UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DMA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GABRIELLE MARQUES SANTOS

UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA PARA SOLUÇÃO DE EDO's LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

SÃO CRISTÓVÃO-SE
2019

GABRIELLE MARQUES SANTOS

UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA PARA SOLUÇÃO DE EDO's LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni

SÃO CRISTÓVÃO-SE

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos, Gabrielle Marques
S237a Uma abordagem algébrica para solução de edo's lineares com coeficientes constantes / Gabrielle Marques Santos ; orientador Humberto Henrique de Barros Viglioni . – São Cristóvão, 2019.
65 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Equações diferenciais lineares. 4. Equações diferenciais ordinárias 5. Funções simétricas. 6. Laplace, Transformadas de. I. Viglioni, Humberto Henrique de Barros orient. II. Título.

CDU 519.61

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma abordagem algébrica para solução de EDO's lineares com coeficientes constantes

por

Gabrielle Marques Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Humberto H. de B. Viglioni
Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni - UFS
Orientador

Zaqueu A S Ramos
Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Aislan Leal Fontes
Prof. Dr. Aislan Leal Fontes - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 18 de Junho de 2019

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Às minhas avós materna e paterna, Adelina Maria dos Santos e Raimunda dos Santos (In Memoriam), e à minha mãe, Valdimira Marques, que sempre me apoiou e acreditou no meu potencial, encorajando-me a enfrentar todos os momentos difíceis da vida.

"Mas os que esperam no Senhor renovarão as forças, subirão com asas como águias; correrão, e não se cansarão; caminharão, e não se fatigarão."

Isaías 40:31

Resumo

O estudo de equações diferenciais é um campo extenso da matemática tendo inúmeras aplicações práticas em medicina, engenharia, química, biologia e outras áreas do conhecimento. Com o intuito de introduzir uma abordagem puramente algébrica, flexível e elegante à teoria clássica bem conhecida das equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, neste trabalho faremos um estudo sobre anel de funções simétricas e séries de potências formais e aplicaremos esses conceitos no desenvolvimento de um método algébrico com o qual seremos capazes de obter a solução de um problema de valor inicial considerando que estas equações tenham coeficientes contantes em uma $\mathbb{Q}$-álgebra qualquer. A generalidade do método aqui apresentado permite o desenvolvimento de eficientes implementações computacionais para obter boas representações das soluções, independentemente da ordem da equação.

Palavras chaves: EDO's lineares, solução universal, funções simétricas, $\mathbb{Q}$-álgebras, séries de potências formais, transformada formal de Laplace.

Abstract

The study of differential equations is an extensive field of mathematics having numerous practical applications in medicine, engineering, chemistry, biology and other fields of knowledge. In order to introduce a purely algebraic, flexible and elegant approach to the well-known classical theory of linear ordinary differential equations with constant coefficients, in this work we will study the ring of symmetric functions and formal power series and apply these concepts in the development of an algebraic method with which we will be able to obtain the solution of an initial value problem considering that these equations have constant coefficients in any $\mathbb{Q}$-algebra. The generality of the method presented here allows the development of efficient computational implementations to obtain good representations of the solutions, independently of the order of the equation.

Keywords: Linear ODE's, universal solutions, symmetric functions, $\mathbb{Q}$-algebras, formal power series, formal Laplace transform.

Sumário

Introdução

Os aspectos algébricos e combinatórios da representação de soluções de uma EDO ficam evidentes nas técnicas de solução por meio de séries de potências. Em [2], L. Gatto e I. Scherbak desenvolvem uma formulação algébrica para solução de uma EDO linear com coeficientes constantes por meio de séries de potências formais, generalizando a abordagem clássica e apresentando importantes aplicações. Com o intuito de introduzir esta técnica de uma maneira elementar, elaboramos, no presente trabalho, uma revisão de algumas preliminares algébricas importantes e, seguindo [1], [2] e [3], fazemos um estudo das funções simétricas e do uso destas para a representação da solução de uma EDO linear com coeficientes constantes por meio de séries de potências formais, desenvolvendo aplicações em diversos exemplos e comparando com os métodos clássicos.

A abordagem clássica para solução de uma EDO linear com coeficientes constantes, além de depender das raízes da equação auxiliar, apresenta algumas particularidades. Por exemplo, considere a equação linear homogênea de coeficientes constantes de ordem dois

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \tag{1}$$

Para solucionar esta EDO precisamos resolver uma equação polinomial de grau 2

$$a_2t^2 + a_1t + a_0 = 0, \tag{2}$$

a qual é conhecida por equação auxiliar ou equação característica de (1). Então,

1. Se a equação auxiliar (2) possui duas raízes distintas, a solução geral de (1) é dada por

$$y(x) = c_1e^{t_1x} + c_2e^{t_2x}.$$

2. Se ocorrer das raízes serem iguais $t_1 = t_2$, então a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{t_1x} + c_2xe^{t_1x}.$$

3. Se t_1 e t_2 são raízes complexas, então $t_1 = \alpha + i\beta$ e $t_2 = \alpha - i\beta$. Assim, a solução geral real neste caso será

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

No caso geral, para resolver uma equação diferencial de n-ésima ordem

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

em que $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, devemos resolver uma equação polinomial de grau n

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$$

e seguir o mesmo raciocínio do caso $n = 2$.

Para o caso não homogêneo, sabemos que uma solução geral para tal equação é dada pela soma da solução geral da equação homogênea associada e uma solução particular da equação não homogênea. Existem dois métodos padrão para solucionar uma EDO linear não homogênea: coeficientes a determinar, usado só para equações lineares não homogênea com coeficientes constantes e variação de parâmetros, usado para quaisquer equações lineares não homogênea.

No método aqui apresentado o conhecimento das raízes da equação auxiliar não é mais necessário para resolver uma EDO linear. Uma das características mais relevantes da teoria é que ela apresenta uma base universal de soluções para EDO's lineares homogêneos. A base universal consiste em séries de potências formais com coeficientes no anel de polinômios $E_r := \mathbb{Q}[e_1, \cdots, e_{r+1}]$.

Considere $E_r = \mathbb{Q}[e_1, \cdots, e_{r+1}]$ uma $\mathbb{Q}$-álgebra polinomial nas variáveis $e_1, \cdots, e_{r+1}$, $E_r[[t]]$ o conjunto das séries de potências formais com coeficientes em E_r e $\mathbf{f}(t) \in E_r[[t]]$. Nosso objetivo é resolver as seguintes equações diferencias ordinárias

$$y^{(r+1)} - e_1 y^{(r)} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} y = 0$$

e

$$y^{(r+1)} - e_1 y^{(r)} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} y = \mathbf{f}(t).$$

explicitamente em $E_r[[t]]$ obtendo, assim, um método mais geral para solucionar equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes em uma $\mathbb{Q}$-álgebra qualquer.

Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra e considere uma EDO linear de ordem $r+1$ com coeficientes $a_1, \cdots, a_{r+1} \in A$. O homomorfismo $\psi : E_r \to A$ que mapeia $e_1 \mapsto a_1, \cdots, e_{r+1} \mapsto a_{r+1}$ induz em A uma estrutura natural de E_r-álgebra, e a base de soluções para a equação nada mais é do que a base de soluções universais depois de estender os coeficientes por meio do homomorfismo.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos. Para a melhor compreensão do leitor, noções básicas de anéis, módulos, álgebras, séries de potências formais e, em especial, o anel de funções simétricas, são apresentados no capítulo 1 com o intuito de revisar os principais pré-requisitos.

No capítulo 2, definimos séries de potências formais com coeficientes em uma $\mathbb{Q}$-álgebra e introduzimos algumas noções de séries, polinômios e sequêcias com coeficientes no anel de polinômios $E_r = \mathbb{Q}[e_1, \cdots, e_{r+1}]$, onde e_i é o i-ésimo polinômio simétrico elementar. E_r é conhecido como *anel de funções simétricas nas variáveis $x_1, \cdots, x_{r+1}$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$.*

O capítulo 3 é dividido em duas seções. Na primeira seção trabalhamos com EDO's homogêneas e apresentamos a sua solução geral utilizando o método algébrico desenvolvido. E, na segunda seção nos dedicamos ao estudo de EDO's não homogêneas. A aplicação de maior interesse é a solução geral de ambas equações. As EDO's serão primeiramente solucionadas explicitamente em $E_r[[t]]$ e depois, através de um homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras, vamos generalizar a solução encontrada para resolver EDO's com coeficientes constantes em uma $\mathbb{Q}$-álgebra qualquer.

Finalmente, no capítulo 4 aplicamos o método apresentado no capítulo anterior para solucionar problemas de valor inicial, enfatizando algumas das vantagens da técnica desenvolvida em relação à abordagem clássica.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Capítulo 1

Preliminares Algébricas

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos de módulos, álgebras e anéis graduados, assim como a definição de séries de potências formais e funções simétricas, que serão de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Ao longo desse texto, sempre que nos referirmos a um anel estaremos tratando de um anel comutativo com identidade.

1.1 Módulos e Álgebras

Definição 1.1 (Módulo)**.** Seja A um anel. Um A-*módulo* ou *módulo sobre* A é um grupo abeliano $(M, +)$ munido com uma aplicação

$$\begin{cases} A \times M \to M \\ (a, m) \mapsto am \end{cases}$$

tal que para todos $a, b \in A$ e $m, n \in M$, valem as seguintes propriedades:

1. $a(m + n) = am + an$;
2. $(a + b)m = am + bm$;
3. $(ab)m = a(bm)$;
4. $1m = m$.

Exemplo 1.1. Se $A = K$ um corpo então um A-módulo é um espaço vetorial sobre K.

Exemplo 1.2. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de anéis podemos atribuir a B uma estrutura de A-módulo com a seguinte operação multiplicativa $ab := f(a)b$, onde $a \in A$ e $b \in B$.

Definição 1.2 (Independência Linear)**.** Seja M um A-módulo e S um subconjunto não vazio de M. Os elementos de S são *linearmente independentes* se, para toda família finita $\{m_1, \cdots, m_r\}$ de elementos de S e $a_1, \cdots, a_r \in A$, temos

$$a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0.$$

Caso contrário, dizemos que os elementos de S são *linearmente dependentes.*

Definição 1.3 (Gerador de um Módulo)**.** Seja M um A-módulo e S um subconjunto não vazio de M. S é um *gerador* de M se $M = \langle S \rangle$, ou seja, qualquer elemento $m \in M$ pode ser escrito na forma:

$$m = \sum_{i=1}^{k} a_i m_i, \ a_i \in A, \ m_i \in S.$$

Se M possui um conjunto finito de geradores, dizemos que M é *finitamente gerado* sobre A.

Definição 1.4 (Base de um Módulo)**.** Seja M um A-módulo e S um subconjunto não vazio de M. S é uma *base* de M se é um conjunto gerador cujos elementos são linearmente independentes. Neste caso , qualquer elemento $m \in M$ pode ser escrito de forma única como combinação linear de elementos de S:

$$m = \sum_{i=1}^{k} a_i m_i, \ a_i \in A, \ m_i \in S.$$

M diz-se um A-módulo *livre* se possui uma base. Se S possui uma quantidade finita de n elementos dizemos que M é uma A-módulo *livre de posto n.*

Exemplo 1.3. O grupo abeliano $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ munido com a operação

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \\ (x, \overline{y}) \mapsto \overline{xy} \end{cases}$$

é um $\mathbb{Z}$-módulo. No entanto, $\mathbb{Z}_n$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, pois em $\mathbb{Z}_n$ todo elemento é de torção, ou seja, se $\overline{g} \in \mathbb{Z}_n$ então existe um inteiro não nulo m tal que $\overline{mg} = 0$.

Definição 1.5 (Homomorfismo de A-módulos)**.** Sejam M e N A-módulos. Uma aplicação $\phi : M \to N$ é um *homomorfismo de A-módulos* se

1. $\phi(m + n) = \phi(m) + \phi(n)$, $m \in M$ e $n \in N$;

2. $\phi(\lambda m) = \lambda \phi(m)$, $m \in M$ e $\lambda \in A$.

Definição 1.6 (Álgebra)**.** Seja A um anel. Uma *álgebra sobre A* ou uma *A-álgebra* é um anel R que também é um A-módulo e satisfaz

$$a(r_1 r_2) = (a r_1) r_2 = r_1 (a r_2),$$

para todo $a \in A$ e $r_1, r_2 \in R$.

Proposição 1.1. *Seja A uma anel. R é uma A-álgebra se e somente se existe um homomorfismo de anéis $\phi : A \to R$ tal que R tem uma estrutura de A-módulo dada por $ar := \phi(a)r$, $\forall a \in A$ e $r \in R$.*

Demonstração. Seja R uma A-álgebra, nosso objetivo é mostrar que podemos ver R como um A-módulo por meio do homomorfismo de anéis ϕ definido por

$$\begin{aligned} \phi : A &\to R \\ a &\mapsto a \cdot 1_R. \end{aligned}$$

Lembre-se que $a \cdot 1_R \in R$, pois, pela definição de álgebra, R é um A-módulo.

Afirmação: ϕ é um homomorfismo.

De fato, usando a definição de módulo e álgebra, temos que

$$\phi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2) \cdot 1_R = a_1 \cdot 1_R + a_2 \cdot 1_R = \phi(a_1) + \phi(a_2)$$

$$\phi(a_1 a_2) = (a_1 a_2) \cdot 1_R = a_1(a_2 \cdot 1_R) = a_1[1_R \cdot (a_2 \cdot 1_R)] = (a_1 \cdot 1_R)(a_2 \cdot 1_R) = \phi(a_1)\phi(a_2)$$

$$\phi(1_A) = 1_A \cdot 1_R = 1_R.$$

Além disso, R é um A-módulo tal que

$$ar = a(1_R \cdot r) = (a \cdot 1_R)r = \phi(a)r.$$

Por outro lado, considere $\phi : A \to R$ um homormofismo de anéis tal que R é um A-módulo, onde $ar := \phi(a)r$. Então,

$$a(r_1 r_2) = \phi(a)(r_1 r_2) = (\phi(a) r_1) r_2 = (a r_1) r_2$$

e

$$(a r_1) r_2 = (\phi(a) r_1) r_2 = (r_1 \phi(a)) r_2 = r_1(\phi(a) r_2) = r_1(a r_2).$$

Logo,

$$a(r_1 r_2) = (a r_1) r_2 = r_1(a r_2).$$

E, assim, R é uma álgebra sobre A.

$\square$

Definição 1.7 (Homomorfismo de A-álgebras)**.** Sejam F e G álgebras sobre A. A aplicação $\psi : F \to G$ é um *homomorfismo de A-álgebras* se para $\lambda, \mu \in A$ e $f_1, f_2 \in F$ arbitrários, satisfaz

1. $\psi(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \cdot \psi(f_1) + \mu \cdot \psi(f_2)$;
2. $\psi(f_1 f_2) = \psi(f_1) \cdot \psi(f_2)$.

1.2 Anéis Graduados

Definição 1.8 (Anel Graduado)**.** Um anel A é chamado de *anel graduado* (ou mais precisamente, $\mathbb{Z}$-graduado) se existe uma família de subgrupos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de A tais que

1. $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$;

2. $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Um anel graduado A é chamado graduado não negativo (ou $\mathbb{N}$-graduado) se $A_n = 0$ para todo $n < 0$.

Definição 1.9 (Módulo Graduado)**.** Seja A um anel graduado e M um A-módulo. Dizemos que M é um *A-módulo graduado* se existe uma família de subgrupos $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de M tais que

1. $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$;

2. $A_n \cdot M_m \subseteq M_{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Um elemento não nulo $x \in M_n$ é chamado *elemento homogêneo de M de grau n*. Qualquer elemento $x \in M \setminus \{0\}$ pode ser escrito de maneira única como $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, onde $x_n \in M_n$ e todos, exceto um número finito de x_n, são zero. As componentes x_n não nulas são chamadas de *componentes homogêneas de x*.

Exemplo 1.4. Cada anel A é trivialmente um anel graduado, basta tomar $A_0 = A$ e $A_n = 0$, $\forall n \neq 0$.

Exemplo 1.5. O anel de polinômios $S = A[x_1, \cdots, x_n]$ é um anel graduado. De fato, considere $m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$. Assim, $S = \bigoplus_{k\geq 0} S_k$ onde

$$S_k = \left\{ \sum_{m\in\mathbb{N}^n} a_m x^m \mid a_m \in A \text{ e } m_1 + \cdots + m_n = k \right\},$$

ou seja, S_k é o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau k e $S_0 = A$.

Proposição 1.2. *Se $A = \bigoplus A_i$ é um anel graduado, então A_0 é um subanel de A, $1 \in A_0$ e A_n é um A_0-módulo, $\forall n$.*

Demonstração. Pela definição de anel graduado segue-se que A_0 é um subgrupo de A e que $A_0 \cdot A_0 \subseteq A_0$, ou seja, A_0 é fechado para operação de adição e multiplicação. Assim, A_0 é um subanel de A.

Agora mostraremos que a identidade de A pertence a A_0. Sendo $1 \in A$, temos que

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j$$

onde cada $a_j \in A_j$ e $a_j \neq 0$ para uma quantidade finita de índices. Além disso, para todo $i \in \mathbb{Z}$ temos

$$a_i = a_i \cdot 1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_i a_j.$$

Pela unicidade da escrita como soma de elementos homogêneos, temos

$$a_i = a_i a_0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por outro lado também temos a seguinte igualdade

$$a_0 = 1 \cdot a_0 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j a_0 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j = 1.$$

Assim, $1 = a_0 \in A_0$. Por fim, A_n é um A_0-módulo pelo fato de que $A_0 \cdot A_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

□

Definição 1.10 (Homomorfismo de Anéis Graduados)**.** Sejam A e B anéis graduados e $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Então f é chamado de *homomorfismo de anéis graduados* (ou *homogêneos*) se $f(A_i) \subseteq B_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.11 (Álgebra Graduada)**.** Seja A um anel graduado e R uma álgebra sobre A. Dizemos que R é uma *A-álgebra graduado* se existe uma família de subgrupos $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de R tais que

1. $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$;

2. $A_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$;

3. $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

1.3 Séries de Potências Formais

Definição 1.12 (Séries de Potências Formais)**.** Seja A um anel. Uma *série de potência formal* com coeficientes em A é

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n, a_n \in A. \tag{1.1}$$

O conjunto formado por esses elementos é denotado por $A[[t]]$. Outra maneira de representarmos uma série de potência formal é utilizando sequências. Seja $\mathbf{a}(t) \in A[[t]]$, então $\mathbf{a} := (a_0, a_1, a_2, ...)$ é a sequência dos coeficientes de $\mathbf{a}(t)$. Equivalentemente, seja $\mathbf{a} := (a_0, a_1, a_2, ...)$ uma sequência qualquer com $a_i \in A$ e $i \in N$, podemos construir uma série dada por (1.1).

Definição 1.13. Sejam $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t) \in A[[t]]$ e $\lambda, \mu \in A$. A *soma* e o *produto* de séries de potências formais são definidos por:

$$\lambda\mathbf{a}(t) + \mu\mathbf{b}(t) = \sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + \mu b_n)t^n$$

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{h\geq 0}^{n} a_h b_{n-h}\right) t^n.$$

Dessa forma, é fácil ver que $A[[t]]$ tem estrutura de A-módulo, anel e A-álgebra. Além disso, seja $\phi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Podemos induzir um homomorfismo entre séries de potências formais $\widehat{\phi} : A[[t]] \to B[[t]]$ dado por

$$\widehat{\phi}\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right) = \sum_{n\geq 0} \phi(a_n)t^n. \tag{1.2}$$

Observação 1.1. Seja A um anel. Naturalmente A será um $\mathbb{Z}$-módulo. De fato, $\cdot : \mathbb{Z} \times A \to A$ definido por

$$n \cdot a = \begin{cases} a + \cdots + a, & \text{se } n > 0 \\ (-a) + \cdots + (-a), & \text{se } n < 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

onde a soma é realizada n vezes, satisfaz as propriedades dadas na definição 1.6. Logo, A é um $\mathbb{Z}$-módulo.

Definição 1.14 (Transformada Formal de Laplace)**.** Seja $\mathbf{a}(t) \in A[[t]]$. A *transformada formal de Laplace* é uma aplicação $L : A[[t]] \to A[[t]]$ definida por

$$L(\mathbf{a}(t)) = \sum_{n \geq 0} (n! a_n) t^n. \tag{1.3}$$

Assim como as séries de potências formais, a transformada formal de Laplace também pode ser representada por meio de sequências. Seja $L(\mathbf{a}) := (a_0, a_1, 2a_2, 3!a_3, \cdots)$, então $L(\mathbf{a})(t) = L(\mathbf{a}(t))$.

Observação 1.2. L é uma aplicação não invertível, a menos que A seja uma $\mathbb{Q}$-álgebra (isto é, os elementos de A podem ser multiplicados por números racionais).

Definição 1.15. A ordem de uma série de potência formal é o valor da menor potência de t.

Definição 1.16. Seja B uma A-álgebra. Uma *derivação* $d : B \to B$ é uma transformação A-linear, isto é, $d(a_1 b_1 + a_2 b_2) = a_1 d(b_1) + a_2 d(b_2)$, que satisfaz a regra de Leibniz

$$d(b_1 \cdot b_2) = d(b_1) b_2 + b_1 d(b_2).$$

Proposição 1.3. *A aplicação $D : A[[t]] \to A[[t]]$ definido por*

$$D\left(\sum_{n \geq 0} a_n t^n\right) = \sum_{n \geq 0} n a_n t^{n-1}$$

é uma A-derivação em $A[[t]]$.

Demonstração. Sejam $\lambda, \mu \in A$ e $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \in A[[t]]$. Utilizando a definição 1.18 é fácil ver que D é uma transformação A-linear. De fato,

$$D\left(\lambda \mathbf{a}(t) + \mu \mathbf{b}(t)\right) = \lambda D(\mathbf{a}(t)) + \mu D(\mathbf{b}(t)).$$

Sendo assim, basta mostrarmos que D satisfaz a regra de Leibniz. De fato,

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)) &= D\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{h\geq 0}^{n} a_h b_{n-h}\right)t^n\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} n\left(\sum_{h\geq 0}^{n} a_h b_{n-h}\right)t^{n-1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{h+k=n} n a_h b_k\right)t^{n-1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{h+k=n} h a_h b_k + k a_h b_k\right)t^{n-1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{h+k=n} h a_h b_k t^{n-1} + \sum_{n\geq 0}\sum_{h+k=n} k a_h b_k t^{n-1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{h+k=n} h a_h b_k t^{h+k-1} + \sum_{n\geq 0}\sum_{h+k=n} k a_h b_k t^{h+k-1}\\
&= \sum_{h\geq 0} h a_h t^{h-1}\sum_{k\geq 0} b_k t^k + \sum_{h\geq 0} a_h t^h \sum_{k\geq 0} k b_k t^{k-1}\\
&= D(\mathbf{a}(t))\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)D(\mathbf{b}(t)).
\end{aligned}
$$

Logo, D é uma A-derivação em $A[[t]]$.

A i-ésima iteração de D define o operador diferencial de ordem i. Sendo assim, $D^i : A[[t]] \to A[[t]]$ é uma transformação A-linear e satisfaz a "*regra geral de Leibiniz*", ou seja,

$$D^i(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)) = \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} a^{(k)}(t)\cdot b^{(i-k)}(t),$$

onde $a^{(j)}(t) := D^j(\mathbf{a}(t))$. $\square$

1.4 Funções Simétricas

1.4.1 Partição

Definição 1.17 (Partição)**.** Uma *partição* λ é uma sequência (finita ou infinita)

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \cdots) \tag{1.4}$$

de inteiros não negativos em ordem decrescente:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \cdots$$

e que contém uma quantidade finita de termos diferentes de zero.

Observação 1.3. Não distinguimos as sequências que diferem apenas pela quantidade de zeros que possuem no final. Por exemplo, $(2,1), (2,1,0)$ e $(2,1,0,0)$ são consideradas a mesma partição.

Os λ_i não nulos em (1.4) são chamados de *partes* de λ. O número das partes é definido como o *comprimento* de λ e a soma de todas as partes é o *peso* de λ denotados por $l(\lambda)$ e $|\lambda|$, respectivamente.

Se $|\lambda| = n$ dizemos que λ é uma partição de n. O conjuntos de todas as partições de n é denotado por $\mathcal{P}_n$ e o conjunto das partições por $\mathcal{P}$. Em particular, $\mathcal{P}_0$ consiste em um único elemento denotado por 0, a única partição de zero.

Outra maneira de representarmos uma partição é indicando o número de vezes que cada inteiro ocorre como uma parte, ou seja,

$$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots r^{m_r} \cdots),$$

onde m_i, denominado *multiplicidade de i em λ*, é o número de partes de λ que são iguais a i.

1.4.2 O Anel de Funções Simétricas

Sejam $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinômios nas variáveis $x_1, ..., x_n$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e S_n o grupo simétrico de todas as permutações de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Definição 1.18 (Polinômio Simétrico)**.** Um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ é dito *simétrico* se para todo $\sigma \in S_n$, tem-se

$$f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}),$$

ou seja, o polinômio f é invariante sob a ação de S_n.

O conjunto de todos os polinômios simétricos em $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ é um subanel de $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ conhecido como *anel de funções simétricas em n variáveis*, denotado por

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]^{S_n}.$$

Além disso, Λ_n é um anel graduado, ou seja,

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k,$$

onde Λ_n^k representa os polinômios simétricos homogêneos de grau k em n variáveis, juntamente com o polinômio nulo.

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ o monômio x^α é dado por

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Definição 1.19. Seja λ uma partição de comprimento $l \leq n$. O polinômio simétrico monomial $m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ é definido como a soma de todos os monômios x^α, onde α varia sobre todas as permutações distintas de $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Matematicamente, temos

$$m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \sum x^\alpha. \tag{1.5}$$

Como o próprio nome sugere, m_λ é simétrico. Além disso, o conjunto $\{m_\lambda\}$ (onde λ varia sobre todas as partições de comprimento $\leq n$) forma uma $\mathbb{Z}$-base de Λ_n. Consequentemente, o conjunto $\{m_\lambda\}$ tal que $l(\lambda) \leq n$ e $|\lambda| = k$, é uma $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k; em particular, se $n \geq k$ e $|\lambda| = k$ então $\{m_\lambda\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k.

Na teoria de funções simétricas o número de variáveis é usualmente irrelevante desde que n seja grande o suficiente. Em geral, é mais conveniente trabalhar com funções simétricas em infinitas variáveis. Para tornar essa ideia precisa, seja $m \geq n$ e considere o homomorfismo

$$\mathbb{Z}[x_1, ..., x_m] \to \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \tag{1.6}$$

que envia x_i em x_i, se $1 \leq i \leq n$ e x_i em 0, se $n+1 \leq i \leq m$. Sua restrinção a Λ_m induz o homomorfismo

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \to \Lambda_n \tag{1.7}$$

cujo efeito sobre a base $\{m_\lambda\}$ é facilmente descrito por: mapeia $m_\lambda(x_1, \cdots, x_m)$ em $m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ se $l(\lambda) \leq n$ e em 0 se $l(\lambda) > n$, o que implica no fato de $\rho_{m,n}$ ser sobrejetiva. No entanto, $\rho_{m,n}$ não é injetiva. Os elementos não nulos pertencentes ao núcleo de $\rho_{m,n}$ tem grau no mínimo $n+1$ (são múltiplos do monômio $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$). Isso significa que a restrinção de $p_{m,n}$ ao conjunto de elementos que tem grau de no máximo n é um homomorfismo bijetivo. Desse modo,

$$\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \to \Lambda_n^k$$

é um homomorfismo sobrejetivo para todo $k \geq 0$ e $m \geq n$ e bijetivo sempre que $m \geq n \geq k \geq 0$.

A seguir apresentaremos os conceitos de categoria e limite inverso que serão importantes para a definição do Anel de Funções Simétricas.

Definição 1.20 (Categoria)**.** Uma *categoria* é uma tripla $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Hom(\mathcal{C}), \circ)$, onde $Ob(\mathcal{C})$ é chamado de classe dos objetos de $\mathcal{C}$, $Hom(\mathcal{C})$ é chamado de classe dos morfismos de $\mathcal{C}$, e $\circ$ é uma operação binária nos morfismos de $\mathcal{C}$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, associamos o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, definido como conjuntos dos morfismo de X em Y, tal que se $(X, Y) \neq (Z, U)$ então a interseção entre os conjuntos $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z, U)$ é vazia;

2. para cada tripla de objetos X, Y, Z de $\mathcal{C}$, a operação

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

(chamada de composição de f e g), é definida e satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, onde $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, U)$;

(b) para cada objeto X de $\mathcal{C}$, existe um elemento $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, definido como morfismo identidade em X, tal que se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$ então $f \circ 1_X = f$ e $1_X \circ g = g$.

Exemplo 1.6. A categoria dos conjuntos que tem por objetos conjuntos e por morfismos as funções entre conjuntos. A composição de morfismos é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 1.7. A categoria dos A-módulos, onde a classe dos objetos é dado pelos A-módulos, a classe dos morfismos pelos homomorfismos de A-módulos e composição é dada pela composição usual de homomorfismo.

Exemplo 1.8. Um conjunto parcialmente ordenado $(S, \prec)$ define uma categoria, tendo por objetos os elementos do conjunto S e os morfismos são definidos por

$$Hom(s_1, s_2) = \begin{cases} \emptyset, & s_1 \not\prec s_2 \\ (s_1, s_2), & s_1 \prec s_2 \end{cases}$$

Desse modo, $Hom(s_1, s_2)$ consiste de um único elemento e é definido se $s_1 \prec s_2$. A lei de composição decorre da transitividade da relação de ordem.

1. Se $s_1 \not\prec s_2$ ou $s_2 \not\prec s_3$, então $Hom(s_1, s_2) \times Hom(s_1, s_2) = \emptyset$.

2. Se $s_1 \prec s_2$ e $s_2 \prec s_3$, então $s_1 \prec s_3$ por transitividade. Logo,

$$\circ : Hom(s_1, s_2) \times Hom(s_2, s_3) \to Hom(s_1, s_3)$$
$$((s_1, s_2), (s_2, s_3)) \mapsto (s_1, s_3).$$

Por fim, a assosciatividade da composição é direta e o morfismo de identidade 1_x existe desde que $x \prec x$.

Definição 1.21 (Sistema Inverso)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um *sistema inverso* em $\mathcal{C}$ consiste em um conjunto ordenado S, uma coleção de objetos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$ de $\mathcal{C}$ e morfismos $\pi_{\beta\alpha} : X_\beta \to X_\alpha$ para $\beta \geq \alpha$ tais que

1. $\pi_{\alpha\alpha} = id_{X_\alpha}$, $\forall \alpha \in S$;

2. $\pi_{\beta\alpha} \circ \pi_{\gamma\beta} = \pi_{\gamma\alpha}$, sempre que $\gamma \geq \beta \geq \alpha$.

Definição 1.22 (Limite Inverso)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $(S, \{X_\alpha\}, \{\pi_{\beta\alpha}\})$ um sistema inverso em $\mathcal{C}$. Um objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ é chamado de *limite inverso* deste sistema se existir um morfismo $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ para $\alpha \in S$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para $\beta \geq \alpha$ o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_\beta"'] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[rr, "\pi_{\beta\alpha}"'] & & X_\alpha \end{tikzcd}$$

ou seja, $\pi_\alpha = \pi_{\beta\alpha} \circ \pi_\beta$.

2. Seja $Y \in Ob(\mathcal{C})$ e o morfismo $\phi_\alpha : Y \to X_\alpha$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\phi_\beta"'] \arrow[dr, "\phi_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[rr, "\pi_{\beta\alpha}"'] & & X_\alpha \end{tikzcd}$$

comuta para $\beta \geq \alpha$, existe um único morfismo $\phi : Y \to X$ tal que o diagrama a seguir comuta para todo $\alpha \in S$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi_\alpha"] & \\ X \arrow[rr, "\pi_{\alpha}"'] & & X_\alpha \end{tikzcd}$$

isto é, $\phi_\alpha = \pi_\alpha \circ \phi$. Se o limite inverso existe , ele é único, a menos de $\mathcal{C}$-isomorfismo, e é denotado por $\varprojlim X_\alpha$.

Observação 1.4. O limite inverso sempre existe em categorias de conjuntos, grupos, anéis, módulos (sobre um anel fixo), álgebras (sobre um anel fixo), etc; e admite a seguinte descrição:

$$X = \varprojlim X_\alpha = \{x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha \mid \pi_{\beta\alpha}(x_\beta) = x_\alpha, \forall \beta \geq \alpha\}.$$

O limite inverso X vem equipado com as projeções naturais $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ que seleciona a α-ésima componente do produto direto para cada $\alpha \in S$. Claramente, o par (X, π_α) satisfaz as propriedades descritas acima.

As funções simétricas homogêneas de grau k são formadas tomando o limite inverso

$$\Lambda^k = \varprojlim_n \Lambda_n^k$$

dos $\mathbb{Z}$-módulos Λ_n^k com respeito aos homomorfismo $\rho_{m,n}^k$, $m \geq n \geq 1$ e $k \geq 0$ $(m, n, k \in \mathbb{N})$. O que significa: um elemento de Λ^k é por definição uma sequência $f = (f_n)$, onde cada $f_n = f_n(x_1, \cdots, x_n) \in \Lambda_n^k$, $\rho_{m,n}^k(f_m) = f_n$ e $f_m(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) = f_n(x_1, \cdots, x_n)$ sempre que $m \geq n$. Considere a projeção

$$\begin{aligned} \rho_n^k : \Lambda^k &\to \Lambda_n^k \\ f &\mapsto f_n, \end{aligned}$$

o corolário a seguir resulta do fato de $\rho_{m,n}^k$ ser um isomorfismo para $m \geq n \geq k$.

Corolário 1.1. *A projeção ρ_n^k é um isomorfismo sempre que $k \leq n$.*

Demonstração. Como a projeção é um homomorfismo sobrejetivo, basta mostrarmos que ρ_n^k é injetivo quando $k \leq n$.

Suponha $f \in \ker(\rho_n^k)$, então $f \in \Lambda^k$ tal que $0 = \rho_n^k(f) = f_n$. Assim,

$$f = (f_1, \cdots, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, \cdots) = (f_1, \cdots, f_{n-1}, 0, f_{n+1}, \cdots).$$

Sabemos que $\rho^k_{m,n}(f_m) = f_n$ e que $\rho^k_{m,n}$ é injetivo quando $m \geq n \geq k$. Então,

$$0 = f_n = \rho^k_{m,n}(f_m)$$

implica que $f_m = 0$, $\forall m \geq n$. Além disso, considere $1 \leq i \leq n-1$ então

$$0 = \rho^k_{n,i}(0) = \rho^k_{n,i}(f_n) = f_i.$$

Logo, $f_1 = \cdots = f_{n-1} = 0$.

Portanto, f é a sequência nula. Assim, ρ^k_n é um isomorfismo, sempre que $k \leq n$.

□

Consequentemente, Λ^k possuirá uma $\mathbb{Z}$-base consistindo das funções simétricas monomiais m_λ (para todas as partições λ de k) definida por

$$\rho^k_n(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, ..., x_n), n \geq k.$$

Esse resultado implica que Λ^k é um $\mathbb{Z}$-módulo livre de grau $p(k)$, o número das partições de k. Agora, considere

$$\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k,$$

então Λ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado por m_λ para todas as partições λ. Além disso, considere os homomorfismos sobrejetivos

$$\rho_n = \bigoplus_{k \geq 0} \rho^k_n : \Lambda \to \Lambda_n$$

para $n \geq 0$, e ρ_n é um isomorfismo sempre que $k \leq n$.

É claro que Λ tem uma estrutura de anel graduado tais que ρ_n são homomorfismo de anéis. O anel graduado Λ assim definido é chamado de *anel de funções simétricas* em variáveis independentes enumeráveis $x_1, x_2, \cdots$.

Observação 1.5. Um anel de funções simétricas pode ser definido sobre qualquer anel comutativo A e será denotado por Λ_A. Nesta seção apresentamos o caso básico que foi tomando $A = \mathbb{Z}$. A construção foi baseada em [1].

1.4.3 Funções Simétricas Elementares

Para cada $r \geq 0$ a *r-ésima função simétrica elementar* e_r é a soma de todos os produtos de r variáveis distintas x_i. Matematicamente, para $r \geq 1$

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} = m_{1_r}$$

onde 1_r denota a partição λ com r partes, todas iguais a 1; em particular, $e_0 = 1$. É conveniente definirmos $e_r = 0$ quando $r < 0$.

Outra maneira de visualizarmos essa definição é por meio da função geradora [1] de e_r, dada por

$$E(t) := \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t). \tag{1.8}$$

Se o número de variáveis é finito, suponha n, então e_r é zero para todos $r > n$ e (1.8) passa a ser

$$\sum_{r=0}^{n} e^r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t)$$

ambos os lados são elementos de $\Lambda_n[t]$.

Proposição 1.4. *As funções simétricas elementares $\{e_1, e_2, \cdots\}$ geram Λ como um anel e são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Z}$. Desse modo,*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \cdots]$$

é um anel de polinômios sobre $\mathbb{Z}$ em infinitas variáveis $\{e_1, e_2, \cdots\}$.

A proposição anterior implica no fato de que cada elemento de Λ pode ser escrito unicamente como uma combinação $\mathbb{Z}$-linear finita de produtos finitos de $\{e_1, e_2, \cdots\}$.

Observação 1.6. *Quando há apenas uma quantidade finita de variáveis $x_1, \cdots, x_n$, temos que $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1, \cdots, e_n]$ e $e_1, \cdots, e_n$ são algebricamente independentes.*

Exemplo 1.9. A seguir listamos os n polinômios simétricos elementares para os quatro primeiros valores positivos de n. Em todos os casos, $e_0 = 1$.

1. Para $n = 1$:
$$e_1(x_1) = x_1.$$

2. Para $n = 2$:
$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$
$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

3. Para $n = 3$:
$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3,$$
$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3.$$

4. Para $n = 4$:
$$e_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

[1] Uma função geradora é um recurso que permite codificar uma sequência infinita de elementos (a_n), tratando-os como os coeficientes de uma série de potências, isto é, uma função geradora $f(x)$ é uma função cuja série de potência formal $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ tem como coeficientes os termos da a sequência $(a_0, a_1, ...)$.

$$e_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$$

$$e_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4.$$

1.4.4 Funções Simétricas Completas

Para cada $r \geq 0$ a *r-ésima função simétrica completa* é definido por

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}.$$

Em particular, $h_0 = 1$. Definimos $h_r = 0$ sempre que $r < 0$. A função geradora de h_r é

$$H(t) := \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{1.9}$$

Por (1.8) e (1.9) temos que

$$H(t)E(-t) = 1. \tag{1.10}$$

Expandindo essa expressão, segue-se que

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{r \geq 0} h_r t^r \right) \left(\sum_{r \geq 0} e_r (-t)^r \right) \\ &= \left(\sum_{r \geq 0} h_r t^r \right) \left(\sum_{r \geq 0} (-1)^r e_r t^r \right) \\ &= \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{r} (-1)^i e_i h_{r-i} \right) t^r \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i e_i h_{r-i} = 0 \tag{1.11}$$

para $r \geq 1$.

Exemplo 1.10. A seguir listamos os n polinômios simétricos completos para os três primeiros valores positivos de n. Em todos os casos, $h_0 = 1 = e_0$.

1. Para $n = 1$:

$$h_1(x_1) = x_1 = e_1(x_1).$$

2. Para $n = 2$:

$$h_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = e_1(x_1,x_2),$$

$$h_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = e_1^2(x_1,x_2) - e_2(x_1,x_2).$$

3. Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} h_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 = e_1(x_1,x_2,x_3), \\ h_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = e_1^2(x_1,x_2,x_3) - e_2(x_1,x_2,x_3), \\ h_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3 \\ &= e_1^3(x_1,x_2,x_3) - 2e_1(x_1,x_2,x_3)e_2(x_1,x_2,x_3) + e_3(x_1,x_2,x_3). \end{aligned}$$

O exemplo anterior ilustra o que foi dito anteriormente quando nos referirmos ao fato de que: “Na teoria das funções simétricas o número de variáveis é irrelevante desde que n seja grande o suficiente”. Dessa forma, podemos definir as funções simétricas completas em infinitas variáveis por

$$\begin{aligned} h_0 &= e_0 \\ h_1 &= e_1 \\ h_2 &= e_1^2 - e_2 \\ h_3 &= e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Desde que as funções simétricas elementares $\{e_1, e_2, \cdots\}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Z}$ e $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \cdots]$, podemos definir um homomorfismo de anéis graduados dado por

$$\begin{aligned} \omega : \Lambda &\to \Lambda \\ e_r &\mapsto h_r \end{aligned}$$

para $r \geq 0$.

Proposição 1.5. *ω é uma involução, isto é, ω^2 é a função identidade.*

Demonstração. Para provarmos isso, é suficiente mostrar que $\omega(h_r) = e_r$, para $r \geq 0$. Desde que ω é um homomorfismo de anéis, podemos induzir um homomorfismo $\omega' : \Lambda[[t]] \to \Lambda[[t]]$ aplicando ω ao coeficiente de cada potência de t separadamente (estamos considerando $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \cdots]$). Assim,

$$\omega'(E(t)) = H(t). \tag{1.12}$$

Aplicando ω' a (1.10) e usando (1.12) temos

$$\begin{aligned} 1 &= \omega'(H(t))\omega'(E(-t)) \\ &= \omega'(H(t))H(-t) \end{aligned}$$

o que implica em

$$\omega'(H(t)) = [H(-t)]^{-1} = E(t).$$

Portanto, para $r \geq 0$ temos

$$\omega(h_r) = e_r.$$

$\square$

Corolário 1.2. *As funções simétricas completas* $\{h_1, h_2, \cdots\}$ *geram* Λ *como um anel e são algebricamente independentes sobre* $\mathbb{Z}$. *Desse modo,*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \cdots]$$

é um anel de polinômios sobre $\mathbb{Z}$ *em infinitas variáveis* $\{h_1, h_2, \cdots\}$.

Observação 1.7. Seja n o número de variáveis, então $e_r = 0$ para $r > n$. Além disso, a aplicação $\omega : \Lambda_n \to \Lambda_n$ é definido por $\omega(e_r) = h_r$ para $0 \leq r \leq n$ e ainda é uma involução. Sendo assim, $\Lambda_n = \mathbb{Z}[h_1, \cdots, h_n]$ com $h_1, \cdots, h_n$ algebricamente independentes, mas $h_{n+1}, h_{n+2}, \cdots$ são polinômios não nulos em $h_1, \cdots, h_n$ ou $e_1, \cdots, e_n$ (isto segue da própria definição de h_r).

Capítulo 2

Séries de Potências Formais sobre $\mathbb{Q}$-álgebras

Pela definição dada no capítulo anterior, temos que uma $\mathbb{Q}$-álgebra é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial A equipado com a operação binária "$\cdot$", tal que $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo com identidade. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e o anel de polinômios com coeficientes em uma $\mathbb{Q}$-álgebra são exemplos de $\mathbb{Q}$-álgebras. Neste capítulo vamos desenvolver a teoria de séries de potências formais vista no capítulo anterior para $\mathbb{Q}$-álgebras. Além disso, vamos definir alguns polinômios, séries e sequências que terão como base o anel de funções simétricas nas variáveis $x_1, \cdots, x_{r+1}$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

2.1 Propriedades básicas sobre $\mathbb{Q}$-álgebras

Definição 2.1. Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra. Um polinômio mônico $P \in A[t]$ de grau $r+1$ será escrito como

$$P(t) := t^{r+1} - a_1(P)t^r + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1}(P),$$

onde $a(P) = (a_1(P), a_2(P), \cdots, a_{r+1}(P))$ é definida como a sequência de coeficientes de P.

Exemplo 2.1. Sejam $A = \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_{r+1}]$ e $P = \prod_{i=1}^{r+1}(t - x_i) = (t - x_1)\cdots(t - x_r)(t - x_{r+1})$, então

$$\begin{cases} a_1(P) = x_1 + \cdots + x_r + x_{r+1}, \\ a_2(P) = \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} x_i x_j, \\ \vdots \\ a_j(P) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r+1} x_{i_1} \cdots x_{i_j}, \\ \vdots \\ a_{r+1}(P) = x_1 \cdots x_r x_{r+1}. \end{cases}$$

Nota-se que, cada $a_i(P)$ é o i-ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}$.

2.2 Séries de Potências Formais em uma $\mathbb{Q}$-álgebra

Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra. Desde que os elementos de A podem ser multiplicados por números racionais, qualquer série de potência formal $\mathbf{a}(t) \in A[[t]]$ pode ser escrita como

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}, \tag{2.1}$$

onde $a_n \in A$.

A transformada formal de Laplace de $\mathbf{a}(t)$ é

$$L(\mathbf{a}(t)) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n, \tag{2.2}$$

e neste caso temos que $L : A[[t]] \to A[[t]]$ é uma aplicação invertível. De fato,

$$L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Proposição 2.1. *Sejam A uma $\mathbb{Q}$-álgebra, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t) \in A[[t]]$ e $\lambda, \mu \in A$. Podemos escrever*

$$\lambda\mathbf{a}(t) + \mu\mathbf{b}(t) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n)\frac{t^n}{n!}$$

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a_h b_{n-h}\right] \frac{t^n}{n!}.$$

Demonstração. Observe que

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{a_n}{n!}\right) t^n \text{ e } \mathbf{b}(t) = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{b_n}{n!}\right) t^n,$$

onde $\frac{a_n}{n!}, \frac{b_n}{n!} \in A$. Assim, pela definição 1.18 temos que

$$\lambda\mathbf{a}(t) + \mu\mathbf{b}(t) = \sum_{n\geq 0} \left[\lambda\left(\frac{a_n}{n!}\right) + \mu\left(\frac{b_n}{n!}\right)\right] t^n = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n)\frac{t^n}{n!}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) &= \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{h=0}^{n} \frac{a_h}{h!} \cdot \frac{b_{n-h}}{(n-h)!}\right] t^n = \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{h=0}^{n} n! \cdot \frac{a_h}{h!} \cdot \frac{b_{n-h}}{(n-h)!}\right] \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a_h b_{n-h}\right] \frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

A proposição anterior, em particular, mostra que a transformada formal de Laplace não é um homomorfismo. De fato,

$$L(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)) \neq L(\mathbf{a}(t))\cdot L(\mathbf{b}(t)).$$

Exemplo 2.2. Dado $a \in A$, definimos *série de potência formal exponencial* por:

$$\exp(at) = \sum_{n\geq 0} a^n \frac{t^n}{n!}.$$

Para cada a, $b \in A$, temos que

$$\exp(at)\cdot\exp(bt) = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n-h}\right]\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}(a+b)^n\frac{t^n}{n!} = \exp((a+b)t).$$

Além disso, a transformada formal de Laplace de $\exp(at)$ é dada por

$$L(\exp(at)) = \sum_{n\geq 0} a^n t^n = \frac{1}{1-at}.$$

Para $\psi : A \to B$ um homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras podemos induzir um homomorfismo $\widehat{\psi} : A[[t]] \to B[[t]]$ tal que

$$\widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} a_n\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\psi\left(\frac{a_n}{n!}\right)t^n = \sum_{n\geq 0}\psi(a_n)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.3}$$

Definição 2.2. A derivada em $A[[t]]$, sendo A uma álgebra sobre $\mathbb{Q}$ e os elementos de $A[[t]]$ escritos como (2.1) será dada por

$$(D\mathbf{a})(t) := D\left(\sum_{n\geq 0} a_n\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}\frac{t^n}{n!}, \tag{2.4}$$

onde $D : A[[t]] \to A[[t]]$ é chamado de *operador diferencial ordinário de primeira ordem.*

De forma mais geral, se $i \in \mathbb{N}$, a *i-ésima derivada* ou *operador diferencial de ordem i* em $A[[t]]$ é definida por

$$(D^i\mathbf{a})(t) := D^i\left(\sum_{n\geq 0} a_n\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} a_{n+i}\frac{t^n}{n!}. \tag{2.5}$$

Observação 2.1. As equações (2.4) e (2.5) são transformações $\mathbb{Q}$-lineares e satisfazem a regra de Leibiniz, então de fato definem uma derivação em $A[[t]]$. Em particular, $D^0 = id_{A[[t]]}$ é o homomorfismo identidade de $A[[t]]$ e D^i é a i-ésima iteração do operador D.

2.3 Polinômios sobre $\mathbb{Q}$-álgebras

Seja $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \cdots)$ uma sequência de indeterminadas sobre $\mathbb{Q}$, onde e_i é a i-ésima função simétrica elementar. Para cada $r \geq 0$, denotamos por E_r a $\mathbb{Q}$-álgebra

$$E_r := \mathbb{Q}[e_1, \cdots, e_{r+1}]. \tag{2.6}$$

Por convenção, definimos $E_{-1} = \mathbb{Q}$. Note que E_r representa o anel de funções simétricas em $r+1$ variáveis com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Assim, pela teoria do anel de funções simétricas e sabendo que cada e_i tem grau i, E_r é uma $\mathbb{Q}$-álgebra graduada, ou seja,

$$E_r = \bigoplus_{w \geq 0} (E_r)_w$$

onde $(E_r)_w$ é o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau w. Mais explicitamente,

$$(E_r)_1 = \mathbb{Q} \cdot e_1, \; (E_r)_2 = \mathbb{Q} \cdot e_1^2 \oplus \mathbb{Q} \cdot e_2, \; (E_r)_3 = \mathbb{Q} \cdot e_1^3 \oplus \mathbb{Q} \cdot e_1 e_2 \oplus \mathbb{Q} \cdot e_3, \; \cdots$$

Seja $-1 \leq s \leq r$, temos que $E_s \subseteq E_r$, assim E_s é uma $\mathbb{Q}$-subálgebra de E_r. Além disso,

$$p_{r,s} : E_r \to E_s$$

que envia e_i em e_i se $1 \leq i \leq s+1$ e e_i em zero se $s+2 \leq i \leq r+1$ é um homomorfismo. Note que, $p_{r_2,r_3} \circ p_{r_1,r_2} = p_{r_1,r_3}$ para cada $r_1 \geq r_2 \geq r_3$.

Definição 2.3. Visto que E_r é uma $\mathbb{Q}$-álgebra, o *polinômio universal* U_{r+1} de grau $r+1$ em $E_r[t]$ é dado por

$$U_{r+1}(t) = t^{r+1} - e_1 t^r + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1}, \tag{2.7}$$

em outras palavras, $a_i(U_{r+1}(t)) = e_i$.

Além disso, definimos para cada $r \geq 0$:

$$V_{r+1}(t) = t^{r+1} U_{r+1}\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}. \tag{2.8}$$

Definição 2.4. Seja A uma E_r-álgebra. Para cada sequência $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \cdots)$ de elementos de A, definimos a sequência de $U_0(\mathbf{a}), U_1(\mathbf{a}), U_2(\mathbf{a}), \cdots$ tais que $U_0(\mathbf{a}) = a_0$ e

$$U_i(\mathbf{a}) := a_i - e_1 a_{i-1} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_{i-r-1} \tag{2.9}$$

para cada $i \geq 1$, considerando $a_j = 0$ se $j < 0$.

Observação 2.2. Qualquer sequência finita em A será considerada como uma sequência infinita de tal forma que todos os termos, exceto uma quantidade finita, são nulos.

Desenvolvendo a equação (2.9) da definição anterior para $0 \leq i \leq r+1$, obtemos:

$$\begin{aligned} U_0(\mathbf{a}) &= a_0, \\ U_1(\mathbf{a}) &= a_1 - e_1 a_0, \\ U_2(\mathbf{a}) &= a_2 - e_1 a_1 + e_2 a_0, \\ &\vdots \\ U_{r+1}(\mathbf{a}) &= a_{r+1} - e_1 a_r + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Proposição 2.2. *Se $i > r+1$ então $U_i(\mathbf{a}) = a_i - e_1 a_{i-1} + \cdots + (-1)^i e_i a_0$.*

Demonstração. Sabendo que $e_i = 0$ se $i > r+1$ em E_r e fazendo $i = r+2$ na segunda expressão da igualdade acima, temos que

$$a_{r+2} - e_1 a_{r+1} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_1 + (-1)^{r+2} e_{r+2} a_0 =$$

$$a_{r+2} - e_1 a_{r+1} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_1 =$$

$$U_{r+2}(\mathbf{a}).$$

Considere que a igualdade é satisfeita quando $i = r+k+2$, onde $k \geq 1$. Mostraremos que a igualdade é válida para $i = r+k+3$.

$$a_{r+k+3} - e_1 a_{r+k+2} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_{k+2} + (-1)^{r+2} e_{r+2} a_{k+1} + \cdots + (-1)^{r+k+3} e_{r+k+3} a_0 =$$

$$a_{r+k+3} - e_1 a_{r+k+2} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_{k+2} =$$

$$U_{r+k+3}(\mathbf{a}).$$

Portanto, por indução sobre i, temos que $U_i(\mathbf{a}) = a_i - e_1 a_{i-1} + \cdots + (-1)^i e_i a_0$ quando $i > r+1$. $\square$

Corolário 2.1. *Sejam A uma E_r-álgebra e $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \cdots)$ uma sequência de elementos de A. Sabendo que $a_j = 0$ para $j < 0$ e que $e_j = 0$ se $j > r+1$ em E_r então para cada $i \geq 1$ podemos concluir que:*

$$U_i(\mathbf{a}) = a_i - e_1 a_{i-1} + \cdots + (-1)^i e_i a_0. \tag{2.11}$$

Definição 2.5. Dado $j \in \mathbb{Z}$, definimos como $s_j(\mathbf{a})$ a sequência de $\mathbf{a}$ deslocado por j, ou seja,

$$s_j(\mathbf{a}) = (a_j, a_{j+1}, \cdots). \tag{2.12}$$

Em particular, $s_0(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Além disso, para $j > 0$ temos que

$$U_{r+1+j}(\mathbf{a}) = U_{r+1}(s_j(\mathbf{a})).$$

Proposição 2.3. *Seja A uma E_r-álgebra. Se $0 \leq r \leq \infty$ então*

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i e_i t^i \cdot \sum_{i\geq 0} a_i t^i = \sum_{i\geq 0} U_i(\mathbf{a}) t^i, \tag{2.13}$$

a expressão acima é um elemento de $A[[t]]$.

Demonstração. Pela multiplicação de séries de potências formais, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 0}(-1)^i e_i t^i \cdot \sum_{i\geq 0} a_i t^i &= \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j e_j a_{i-j}\right) t^i \\
&= \sum_{i\geq 0}(a_i - e_1 a_{i-1} + \cdots + (-1)^i e_i a_0) t^i \\
&= \sum_{i\geq 0} U_i(\mathbf{a}) t^i.
\end{aligned}$$

□

Para $0 \leq i, j \leq r$ as equações (2.10) podem ser escritas como

$$\begin{pmatrix} U_0(\mathbf{a}) \\ U_1(\mathbf{a}) \\ U_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ U_r(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \mathcal{E}_r \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

onde $\mathcal{E}_r$ é a matriz quadarada de ordem $r+1$ dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_r &:= ((-1)^{i-j} e_{i-j}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & -e_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^r e_r & (-1)^{r-1} e_{r-1} & (-1)^{r-2} e_{r-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sejam $0 \leq r \leq \infty$ e $\mathbf{h} = (h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de E_r, onde h_j é a j-ésima função simétrica completa. A função geradora de h_j será dada por

$$\sum_{j\geq 0} h_j t^j = \prod_{i=1}^{r+1} \frac{1}{1 - x_i t} = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}} = \frac{1}{V_{r+1}(t)}. \tag{2.15}$$

Como consequência da equação anterior e lembrando que $e_j = 0$ se $j > r+1$, temos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j e_j t^j \cdot \sum_{j \geq 0} h_j t^j \\ &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j e_j t^j \cdot \sum_{j \geq 0} h_j t^j \\ &= \sum_{j \geq 0} U_j(\mathbf{h}) t^j, \end{aligned} \tag{2.16}$$

o que implica em $U_0(\mathbf{h}) = 1$ e $U_j(\mathbf{h}) = 0$ para todo $j \geq 1$. A última igualdade da expressão (2.16) foi obtida usando a proposição anterior. Além disso, considerando $0 \leq i, j \leq r$ temos

$$\mathcal{E}_r \cdot \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r \cdot \mathcal{E}_r = 1,$$

onde

$$\mathcal{H}_r := (h_{i-j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_r & h_{r-1} & h_{r-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, a equação (2.14) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \mathcal{H}_r \cdot \begin{pmatrix} U_0(\mathbf{a}) \\ U_1(\mathbf{a}) \\ U_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ U_r(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Definição 2.6. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos

$$u^{(j)} = L^{-1}(s_j(\mathbf{h})(t)) = \sum_{n \geq 0} h_{n+j} \frac{t^n}{n!}. \tag{2.18}$$

Note que $D^i u^{(j)} = u^{(i+j)}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Lema 2.1. *Seja A uma E_r-álgebra e $\mathbf{a}(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} \in A[[t]]$ então*

$$a_n = U_0(\mathbf{a}) h_n + U_1(\mathbf{a}) h_{n-1} + \cdots + U_n(\mathbf{a}) h_0, \tag{2.19}$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração, lembre-se que $h_0 = e_0 = 1$, $h_1 = e_1$ e que para

$j \geq 1$, por (2.16) e (2.9), temos que

$$0 = U_j(\mathbf{h}) = h_j - e_1 h_{j-1} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} h_{j-r-1},$$

o que implica em

$$h_j = e_1 h_{j-1} - \cdots - (-1)^{r+1} e_{r+1} h_{j-r-1}, \tag{2.20}$$

para todo $j \geq 1$.

Pela equação (2.17) a igualdade (2.19) é válida para $0 \leq n \leq r$. Nosso objetivo é mostrar que este resultado é satisfeito quando $n \geq r+1$. A prova será feita por indução sobre n. Seja $n = r+1$, sabemos que

$$U_{r+1}(\mathbf{a}) = a_{r+1} - e_1 a_r + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
a_{r+1} &= e_1 a_r - \cdots - (-1)^{r+1} e_{r+1} a_0 + U_{r+1}(\mathbf{a}) \\
&= e_1[U_0(\mathbf{a})h_r + U_1(\mathbf{a})h_{r-1} + \cdots + U_r(\mathbf{a})h_0] - \cdots - (-1)^{r+1} e_{r+1} U_0(\mathbf{a}) h_0 + U_{r+1}(\mathbf{a}) \\
&= U_0(\mathbf{a})[e_1 h_r - \cdots - (-1)^{r+1} e_{r+1} h_0] + \cdots + U_r(\mathbf{a}) e_1 h_0 + U_{r+1}(\mathbf{a}) \\
&= U_0(\mathbf{a}) h_{r+1} + \cdots + U_r(\mathbf{a}) h_1 + U_{r+1}(\mathbf{a}) h_0,
\end{aligned}$$

a última igualdade foi obtida usando a equação (2.20) para $j = r+1$ e o fato de que $h_0 = e_0 = 1$ e $h_1 = e_1$.

Agora, suponha que $a_n = U_0(\mathbf{a})h_n + U_1(\mathbf{a})h_{n-1} + \cdots + U_n(\mathbf{a})h_0$, para $r+2 \leq n \leq k$ [1]. Mostraremos que a igualdade é satisfeira quando $n = k+1$. Sabemos que,

$$U_{k+1}(\mathbf{a}) = a_{k+1} - e_1 a_k + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} a_{k-r}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= e_1 a_k - \cdots - (-1)^{r+1} e_{r+1} a_{k-r} + U_{k+1}(\mathbf{a}) \\
&= e_1[U_0(\mathbf{a})h_k + U_1(\mathbf{a})h_{k-1} + \cdots + U_k(\mathbf{a})h_0] - \cdots - \\
&\qquad (-1)^{r+1} e_{r+1}[U_0(\mathbf{a})h_{k-r} + U_1(\mathbf{a})h_{k-r-1} + \cdots + U_{k-r}(\mathbf{a})h_0] + U_{k+1}(\mathbf{a}) \\
&= U_0(\mathbf{a})[e_1 h_k - \cdots - (-1)^{r+1} e_{r+1} h_{k-r}] + \cdots + U_k(\mathbf{a}) e_1 h_0 + U_{r+1}(\mathbf{a}) \\
&= U_0(\mathbf{a}) h_{k+1} + \cdots + U_k(\mathbf{a}) h_1 + U_{k+1}(\mathbf{a}) h_0.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução sobre n, para $n \geq 0$

$$a_n = U_0(\mathbf{a})h_n + U_1(\mathbf{a})h_{n-1} + \cdots + U_n(\mathbf{a})h_0.$$

□

[1] De modo geral, temos que $a_n = U_0(\mathbf{a})h_n + U_1(\mathbf{a})h_{n-1} + \cdots + U_n(\mathbf{a})h_0$ para $0 \leq n \leq k$.

Teorema 2.1. *Se A é uma E_r-álgebra e $L(\mathbf{a}(t)) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in A[[t]]$ então as séries de potências formais*

$$u^{(-j)} = L^{-1}(s_{-j}(\mathbf{h})(t)) = \sum_{i\geq 0} h_{i-j}\frac{t^i}{i!}$$

são linearmente independentes em $A[[t]]$ e

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{j\geq 0} U_j(\mathbf{a})u^{(-j)} = a_0 u^{(0)} + U_1(\mathbf{a})u^{(-1)} + \cdots \tag{2.21}$$

Demonstração. Para cada $j \geq 0$, a ordem de $u^{(-j)}$ é j. De fato, sabendo que $h_i = 0$ para $i < 0$ e $h_0 = 1$, temos que

$$\begin{aligned} u^{(-j)} &= \sum_{i\geq 0} h_{i-j}\frac{t^i}{i!} \\ &= h_{-j} + \cdots + h_{-1}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + h_0\frac{t^j}{j!} + \sum_{i\geq 1} h_i \frac{t^{j+i}}{(j+i)!} \\ &= \frac{t^j}{j!} + \sum_{i\geq 1} h_i \frac{t^{j+i}}{(j+i)!}. \end{aligned}$$

Assim, desde que cada $u^{(-j)}$ possuem ordens distintas, temos que $\{u^{(-j)}\}_{j\geq 0}$ é um conjunto linearmente independente. Além disso,

$$\sum_{j\geq 0} U_j(\mathbf{a})u^{(-j)} = \sum_{j\geq 0} U_j(\mathbf{a}) \sum_{i\geq 0} h_{i-j}\frac{t^i}{i!} = \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} h_{i-j}U_j(\mathbf{a})\right)\frac{t^i}{i!}. \tag{2.22}$$

Nosso objetivo é provar a igualdade (2.21), para isto mostraremos que o coeficiente associado a $\frac{t^n}{n!}$ em (2.22) é igual a a_n para todo $n \geq 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} h_{i-j}U_j(\mathbf{a})\right)\frac{t^i}{i!}\right]_n &= \sum_{j\geq 0} h_{n-j}U_j(\mathbf{a}) \\ &= h_n U_0(\mathbf{a}) + h_{n-1}U_1(\mathbf{a}) + \cdots + h_0 U_n(\mathbf{a}) \\ &= a_n, \end{aligned}$$

onde $[\ ]_n$ denota o coeficiente de grau n e a última igualdade é devido ao lema anterior.

$\square$

Capítulo 3

Soluções Universais para EDO's Lineares

Sejam $E_r = \mathbb{Q}[e_1, \cdots, e_{r+1}]$ uma $\mathbb{Q}$-álgebra polinomial nas variáveis $e_1, \cdots, e_{r+1}$, $E_r[[t]]$ o conjunto das séries de potências formais com coeficientes em E_r e $\mathbf{f}(t) \in E_r[[t]]$. Neste capítulo, nosso objetivo é resolver a E.D.O

$$y^{(r+1)} - e_1 y^{(r)} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} y = \mathbf{f}(t)$$

explicitamente em $E_r[[t]]$.

3.1 Equação Diferencial Ordinária Linear Universal

Desde que E_r é uma $\mathbb{Q}$-álgebra, pelo capítulo anterior, a derivada formal padrão $D : E_r[[t]] \to E_r[[t]]$ é dada por

$$(D\mathbf{f})(t) := D\left(\sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} f_{n+1}\frac{t^n}{n!}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$(D^i\mathbf{f})(t) := D\left(\sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} f_{n+i}\frac{t^n}{n!}.$$

Definição 3.1. Definimos como operador diferencial universal a aplicação de D no polinômio mônico universal $U_{r+1}(t)$, ou seja,

$$U_{r+1}(D) := D^{r+1} - e_1 D^r + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1}, \tag{3.1}$$

onde $U_{r+1}(D) \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E_r[[t]])$.

Seja

$$\mathcal{U}_r := \ker U_{r+1}(D),$$

então $\mathcal{U}_r$ é um E_r-submódulo de $E_r[[t]]$ das soluções da EDO universal:

$$U_{r+1}(D)y = y^{(r+1)} - e_1 y^{(r)} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} y = 0. \tag{3.2}$$

Em geral, se

$$\mathbf{g} = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{t^n}{n!} \in E_r[[t]],$$

então a solução da equação diferencial ordinária linear

$$U_{r+1}(D)y = \mathbf{g} \tag{3.3}$$

é um elemento do conjunto $U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g}) \subseteq E_r[[t]]$. A equação 3.3 é usualmente escrita como:

$$D^{r+1}y - e_1 D^r y + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} y = \mathbf{g}, \tag{3.4}$$

e se $\mathbf{g}$ é a série de potência formal nula, então $U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{0}) = \mathcal{U}_r$.

Proposição 3.1. *Seja* $y_0(t) \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g})$. *Então,*

$$\begin{aligned} U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g}) &= y_0(t) + \ker U_{r+1}(D) \\ &= \{y_0(t) + y(t) \mid y(t) \in \ker U_{r+1}(D)\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $y(t) \in \ker U_{r+1}(D)$, então $U_{r+1}(D)y(t) = 0$. Pela linearidade de $U_{r+1}(D)$, temos que

$$U_{r+1}(D)(y_0(t) + y(t)) = U_{r+1}(D)y_0(t) + U_{r+1}(D)y(t) = \mathbf{g}.$$

Logo, $y_0(t) + y(t) \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g})$ o que implica em

$$y_0(t) + \ker U_{r+1}(D) \subseteq U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g}).$$

Por outro lado, se $y_1(t) \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g})$ então $y_1(t) - y_0(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ e assim

$$y_1(t) \in y_0(t) + \ker U_{r+1}(D) \Rightarrow U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{g}) \subseteq y_0(t) + \ker U_{r+1}(D).$$

$\square$

Proposição 3.2. *Seja* $\mathbf{f}(t) \in E_r[[t]]$. *Então* $\mathbf{f}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ *se e somente se*

$$U_{n+r+1}(\mathbf{f}) := f_{n+r+1} - e_1 f_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} f_n = 0 \tag{3.5}$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Substituindo $y = \mathbf{f}(t)$ na equação (3.4) com $\mathbf{g} = 0$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= D^{r+1}\mathbf{f}(t) - e_1 D^r \mathbf{f}(t) + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1}\mathbf{f}(t) \\ &= \sum_{n\geq 0} f_{n+r+1}\frac{t^n}{n!} - e_1 \sum_{n\geq 0} f_{n+r}\frac{t^n}{n!} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}\sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0}(f_{n+r+1} - e_1 f_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}f_n)\frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{f}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ se e somente se $U_{n+r+1}(\mathbf{f}) = f_{n+r+1} - e_1 f_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}f_n = 0$, para todo $n \geq 0$. $\square$

Exemplo 3.1. A série de potência formal $\exp(e_1 t)$ é solução da equação $U_1(D)y = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} D(\exp(e_1 t)) - e_1(\exp(e_1 t)) &= D\left(\sum_{n\geq 0} e_1^n \frac{t^n}{n!}\right) - e_1 \sum_{n\geq 0} e_1^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} e_1^{n+1}\frac{t^n}{n!} - e_1 \sum_{n\geq 0} e_1^n \frac{t^n}{n!} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra e $a \in A$, então A tem uma estrutura de álgebra sobre $E_0 = \mathbb{Q}[e_1]$ induzida pelo homomorfismo $\psi : E_0 \to A$ que mapeia $e_1 \mapsto a$. Além disso, a estrutura de E_0-módulo de A é dada por

$$\begin{aligned} E_0 \times A &\to A \\ (e_1, x) &\mapsto \psi(e_1)x. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\exp(at) \in A[[t]]$ pode ser visto como solução $Dy - e_1 y = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} D(\exp(at)) - e_1(\exp(at)) &= D\left(\sum_{n\geq 0} a^n \frac{t^n}{n!}\right) - e_1 \sum_{n\geq 0} a^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} a^{n+1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} e_1 a^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} a^{n+1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} a a^n \frac{t^n}{n!} \\ &= 0. \end{aligned}$$

o que também significa que $\exp(at) \in A[[t]]$ é solução da equação diferencial $Dy - ay = 0$. O polinômio

$$P(t) := t - a$$

implica que

$$\ker P(D) = \ker(D - a) = [\exp(at)] := \{\lambda \cdot \exp(at) \mid \lambda \in A\}.$$

Exemplo 3.2. Suponha que $P \in A[t]$ é um polinômio mônico de grau $r + 1$ e que possui uma raíz em

A, isto é, existe $a \in A$ tal que $P(a) = 0$. Como consequência, vamos mostrar que $\exp(at)$ é uma solução de $P(D)z = 0$. Pelo teorema de Ruffini, $P(t)$ admite a decomposição

$$P(t) = Q(t)(t - a),$$

onde $Q(t)$ é um polinômio mônico de grau r. Visto que, $\exp(at) \in \ker(D - a)$ segue-se

$$P(D)\exp(at) = Q(D)(D - a)(\exp(a)) = 0.$$

Observação 3.1. Quando afirmamos que $\mathbf{f}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ se e somente se satisfaz (3.5), nenhuma condição foi imposta sobre os $r + 1$ primeiros coeficientes de $\mathbf{f}$. $f_0, f_1, \cdots, f_r$ são chamados de condições iniciais da solução.

Proposição 3.3. *Se as condições iniciais f_0, $f_1, \cdots$, f_r de $\mathbf{f}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ são nulas, então $\mathbf{f}(t) = 0$, isto é, $f_n = 0$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Pela proposição 3.2, se $\mathbf{f}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ então

$$f_{n+r+1} - e_1 f_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} f_n = 0$$

para $n \geq 0$. Em particular, para $n = 0$ temos

$$f_{r+1} - e_1 f_r + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} f_0 = 0. \tag{3.6}$$

Visto que $f_0 = f_1 = \cdots = f_r = 0$, substituindo em (3.6), obtemos $f_{r+1} = 0$.

Por indução, assumindo que $f_0 = f_1 = \cdots = f_{k+r} = 0$, vamos provar que $f_{k+r+1} = 0$. De fato, aplicando novamente a proposição 3.2 para $n = k$ temos que

$$f_{k+r+1} - e_1 f_{k+r} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} f_k = 0,$$

o que implica em

$$f_{k+r+1} = 0.$$

Portanto, $f_n = 0$ para todo $n \geq 0$ e assim $\mathbf{f}(t) = 0$.

□

Proposição 3.4. *Sejam $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ então $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$ se e somente se as suas condições iniciais coincidem, ou seja, $f_0 = g_0$, $f_1 = g_1, \cdots$, $f_r = g_r$.*

Demonstração. Se $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$, as suas condições iniciais claramente coincidem. Por outro lado, suponha que $f_0 = g_0$, $f_1 = g_1, \cdots$, $f_r = g_r$, então $\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t) \in \ker U_{r+1}(D)$ e suas condições iniciais são todas nulas. Logo, pela proposição anterior, $\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t) = 0$ o que resulta em $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$. □

3.2 Solução Universal

Teorema 3.1. *O E_r-módulo* $\ker U_{r+1}(D) \subset E_r[[t]]$ *é livre de grau* $r+1$ *e gerado por*

$$\{u^{(0)}, u^{(-1)}, \cdots, u^{(-r)}\}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Pelo teorema 2.1, sabemos que $(u^{(-j)})_{j\geq 0}$ são linearmente independentes em $E_r[[t]]$ (E_r é uma E_r-álgebra). Além disso, observe que:

$$U_{r+1}(D)u^{(-j)} = U_{r+1}(D)D^{r-j}u^{(-r)} = D^{r-j}U_{r+1}(D)u^{(-r)},$$

então para provar que $u^{(-j)} \in \ker U_{r+1}(D)$ para $0 \leq j \leq r$, basta mostrarmos que $u^{(-r)} \in \ker U_{r+1}(D)$. Utilizando a proposição 3.2 e lembrando que $u^{(-r)} = \sum_{n\geq 0} h_{n-r}\frac{t^n}{n!}$, temos que

$$\begin{aligned} U_{n+r+1}(u^{(-r)}) &= h_{n+1} - e_1 h_n + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} h_{n-r} \\ &= U_{n+1}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Pela expansão da equação (2.16), vimos que $U_0(\mathbf{h}) = 1$ e $U_j(\mathbf{h}) = 0$ se $j \geq 1$. Desse modo, concluímos que $U_{n+1}(\mathbf{h}) = 0$ para todo $n \geq 0$. Logo,

$$U_{n+r+1}(u^{(-r)}) = 0, \forall n \geq 0,$$

e assim $u^{(-r)} \in \ker U_{r+1}(D)$. Portanto, $u^{(-j)} \in \ker U_{r+1}(D)$ para $0 \leq j \leq r$.

Para mostrar que $u^{(0)}, \cdots, u^{(-r)}$ geram $\ker U_{r+1}(D)$ sobre E_r, lembre-se que, pelo teorema 2.1, cada

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} \in E_r[[t]]$$

pode ser escrito como uma combinação linear infinita de $(u^{(-j)})_{j\geq 0}$:

$$\mathbf{f}(t) = U_0(\mathbf{f})u^{(0)} + U_1(\mathbf{f})u^{(-1)} + \cdots + U_r(\mathbf{f})u^{(-r)} + \sum_{n\geq 0} U_{n+r+1}(\mathbf{f})u^{-(n+r+1)}.$$

Pela proposição 3.2, $\mathbf{f}(t) \in \ker U_{r+1}$ se e somente se $U_{n+r+1}(\mathbf{f}) = 0$ para $n \geq 0$. Portanto,

$$\mathbf{f}(t) = U_0(\mathbf{f})u^{(0)} + U_1(\mathbf{f})u^{(-1)} + \cdots + U_r(\mathbf{f})u^{(-r)}. \tag{3.8}$$

$\square$

Observação 3.2. A fórmula (3.8) é chamada de a fórmula universal de Cauchy.

Corolário 3.1 (Solução Universal do Problema de Cauchy)**.** *A única solução de* $U_{r+1}(D)y = 0$ *com condições iniciais* $f_0, \cdots, f_r \in E_r$ *é*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= U_0(\mathbf{f})u^{(0)} + \cdots + U_r(\mathbf{f})u^{(-r)} \\ U_i(\mathbf{f}) &= f_i - e_1 f_{i-1} + \cdots + (-1)^i e_i f_0, 0 \leq i \leq r. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra, denote por $A[t]$ a A-álgebra polinomial em t e $A[[t]]$ a A-álgebra de séries de potências formais em t. Se $P \in A[t]$ é um polinômio mônico de grau $r+1$ dado por

$$P(t) = t^{r+1} - a_1(P)t^r + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1}(P),$$

o homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras $\psi : E_r \to A$ que mapeia $e_i \mapsto a_i(P)$, para $1 \leq i \leq r+1$, induz os seguintes homomorfismos:

$$\widetilde{\psi} : E_r[t] \to A[t] \text{ e } \widehat{\psi} : E_r[[t]] \to A[[t]].$$

Desse modo, sendo $P(t)$ a imagem de $U_{r+1}(t)$ sobre $\widetilde{\psi}$, claramente $\widehat{\psi}$ mapeará a solução da EDO universal $U_{r+1}(D)y = 0$ na solução de $P(D)z = 0$. E assim, a prova do teorema 3.1 pode ser repetida textualmente para as imagens de $u^{(-j)}$, $0 \leq j \leq r$, o que resulta no seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Seja* A *uma álgebra sobre* $\mathbb{Q}$ *e* $P(t) = t^{r+1} - a_1(P)t^r + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1}(P) \in A[[t]]$.

1. *A série de potência formal* $\mathbf{q}(t) = \sum_{n\geq 0} q_n \frac{t^n}{n!} \in A[[t]]$ *é uma solução de* $P(D)z = 0$ *se e somente se*

   $$V_{n+r+1}(\mathbf{q}) := q_{n+r+1} - a_1(P)q_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1}(P)q_n = 0,$$

   para todo $n \geq 0$.

2. $\ker P(D)$ *é um* A*-módulo livre gerado por* $v^{(0)}, \cdots, v^{(-r)}$*, as imagens de* (3.7) *pelo homomorfismo* $\widehat{\psi}$ *tal que:*

   $$\begin{aligned} \widehat{\psi} &: E_r[[t]] \to A[[t]] \\ \sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} &\mapsto \sum_{n\geq 0} \psi(f_n)\frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

   ou seja, $v^{(-j)} = \widehat{\psi}(u^{(-j)})$ *para cada* $0 \leq j \leq r$.

3. *A única solução de* $P(D)z = 0$ *com condições iniciais* $q_0, \cdots, q_r \in A$ *é*

   $$\mathbf{q}(t) = V_0(\mathbf{q})v^{(0)}(t) + \cdots + V_r(\mathbf{q})v^{(-r)}(t), \tag{3.10}$$

   onde $V_i(\mathbf{q})$ *é a imagem de* $U_i(\mathbf{q})$ *sobre o único homomorfismo de* $\mathbb{Q}$*-álgebras que mapeia* $e_j \mapsto a_j(P)$, $1 \leq j \leq r+1$*, isto é,*

   $$V_i(\mathbf{q}) = q_i - a_1(P)q_{i-1} + \cdots + (-1)^i a_i(P)q_0, 0 \leq i \leq r.$$

Exemplo 3.3. Considere a equação diferencial com coeficientes reais $z'' + z = 0$. Podemos escrever essa equação como $P(D)z = 0$ onde $P(t) = t^2 + 1$. O teorema 3.2 afirma que todas as soluções são da forma:

$$\lambda v^{(0)} + \mu v^{(-1)} = \lambda\widehat{\psi}(u^{(0)}) + \mu\widehat{\psi}(u^{(-1)}), (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

tal que $\widehat{\psi} : E_1[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]$ mapeia $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} \mapsto \sum_{n\geq 0} \psi(a_n)\frac{t^n}{n!}$, onde $\psi : E_1 \to \mathbb{R}$ é o homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebra que envia $e_1 \mapsto 0$ e $e_2 \mapsto 1$. Assim,

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= \widehat{\psi}(u^{(0)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \widehat{\psi}[1 + e_1 t + (e_1^2 - e_2)\frac{t^2}{2!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^3}{3!} + \cdots] \\ &= 1 + \psi(e_1)t + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^2}{2!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(-1)} &= \widehat{\psi}(u^{(-1)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-1} \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \widehat{\psi}[t + e_1\frac{t^2}{2!} + (e_1^2 - e_2)\frac{t^3}{3!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^4}{4!} + \cdots] \\ &= t + \psi(e_1)\frac{t^2}{2!} + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^3}{3!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^4}{4!} + \cdots \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \cdots. \end{aligned}$$

Ambas as séries são convergentes e elas representam as funções analíticas sobre $\mathbb{R}$, cosseno e seno, respectivamente.

Exemplo 3.4. Consideremos a EDO linear dada por:

$$z'' - 3z' + 2z = 0. \tag{3.11}$$

Vamos resolver essa equação de três maneiras diferentes. Em cada caso temos um respectivo sistema fundamental.

1. O polinômio característico da equação (3.11) é

$$0 = t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1)$$

cujas raízes são $t_1 = 2$ e $t_2 = 1$. Logo, um sistema fundamental da EDO acima é formado por:

$$f_1 = e^t \text{ e } f_2 = e^{2t}.$$

Consequentemente, uma soluação geral de (3.11) é dada por:

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

2. A equação (3.11) pode ser escrita como $P(D)z = 0$, onde $P(t) = t^2 - 3t + 2$. Sabendo que $U_2(t) = t^2 - e_1 t + e_2$, então $\psi : E_1 \to \mathbb{R}$ é o único homomorfismo sobre $\mathbb{Q}$-álgebras que mapeia $e_1 \mapsto 3$ e $e_2 \mapsto 2$. Seja $\widehat{\psi} : E_1[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]$ um homomorfismo induzido por ψ tal que

$$\widehat{\psi}\Big(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}\Big) = \sum_{n\geq 0} \psi(a_n)\frac{t^n}{n!}$$

então, pelo teorema 3.2, $v^{(0)}$ e $v^{(-1)}$ formam uma base de $\ker P(D)$ tais que

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= \widehat{\psi}(u^{(0)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \widehat{\psi}[1 + e_1 t + (e_1^2 - e_2)\frac{t^2}{2!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^3}{3!} + \cdots] \\ &= 1 + \psi(e_1)t + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^2}{2!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + 3t + 7\frac{t^2}{2!} + 15\frac{t^3}{3!} + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(-1)} &= \widehat{\psi}(u^{(-1)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-1} \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \widehat{\psi}[t + e_1\frac{t^2}{2!} + (e_1^2 - e_2)\frac{t^3}{3!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^4}{4!} + \cdots] \\ &= t + \psi(e_1)\frac{t^2}{2!} + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^3}{3!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^4}{4!} + \cdots \\ &= t + 3\frac{t^2}{2!} + 7\frac{t^3}{3!} + 15\frac{t^4}{4!} + \cdots. \end{aligned}$$

Logo, $\{v^{(0)}, v^{(-1)}\}$ é um sistema fundamental de $z'' - 3z' + 2z = 0$.

3. Iremos transformar (3.11) em um sistema de E.D.O. de 1º ordem. Definindo $z_1 = z$ e $z_2 = z'$, temos que

$$\begin{cases} z_1' = z' \\ z_2' = z'' = -2z + 3z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -2z_1 + 3z_2 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

A fim de simplificarmos a expressão acima representamos a equação (3.12) por $Z' = AZ$. Pela teoria clássica das EDO's lineares homogêneas temos que solução de $Z' = AZ$ é dada por

$$\begin{aligned}
\phi(t) = e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -14 & 15 \end{pmatrix} \frac{t^3}{3!} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{t^2}{2!} - 6\frac{t^3}{3!} + \cdots & t + 3\frac{t^2}{2!} + 7\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ -2t - 6\frac{t^2}{2!} - 14\frac{t^3}{3!} + \cdots & 1 + 3t + 7\frac{t^2}{2!} + 15\frac{t^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{2t} & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim $g_1 = 2e^t - e^{2t}$ e $g_2 = e^{2t} - e^t$ formam um sistema fundamental de soluções de (3.11). Desse modo, fazendo alguns cálculos adequados temos que $f_1 = v^{(0)} - 2v^{(-1)}$ e $f_2 = v^{(0)} - v^{(-1)}$. Além disso, $g_1 = 2f_1 - f_2 = v^{(0)} - 3v^{(-1)}$ e $g_2 = f_2 - f_1 = v^{(-1)}$.

Na teoria algébrica em consideração, existe uma diferença entre um sistema fundamental, que é a base de $\ker P(D)$, e um conjunto $\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_r$ de soluções linearmente independentes de $P(D)z = 0$. Fato que será apresentado no exemplo que se segue.

Exemplo 3.5. Sejam $A := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ e a equação $z'' - (\sqrt{2} + \sqrt{3})z' + \sqrt{6}z = 0$. Então,

$$P(t) = t^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})t + \sqrt{6} = (t - \sqrt{2})(t - \sqrt{3}).$$

Desse modo, como vimos no exemplo 3.2, $\exp(\sqrt{2}t)$ e $\exp(\sqrt{3}t)$ são soluções da equação diferencial dada acima e são linearmente independentes. Além disso, $v^{(0)}$ e $v^{(-1)}$ são soluções de $P(D)z = 0$ e formam um base de $\ker P(D)$, onde $v^{(0)}$ e $v^{(-1)}$ são as imagens do sistema fundamental universal $\{u^{(0)}, u^{(-1)}\}$ de $U_2(D)y = 0$ por meio do homomorfismo $\psi : E_1 \to A$ que envia $e_1 \mapsto \sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $e_2 \mapsto \sqrt{6}$. Nosso objetivo é mostrar que apesar de $\exp(\sqrt{2}t)$ e $\exp(\sqrt{3}t)$ serem linearmente independentes, não formam uma base de $\ker P(D)$ sobre A. Para isso, basta mostrarmos que $v^{(0)}$ e $v^{(-1)}$ não podem ser escritos como combinação linear de $\exp(\sqrt{2}t)$ e $\exp(\sqrt{3}t)$. Assim, pela fórmula universal de Cauchy, temos

$$\begin{cases} \exp(\sqrt{2}t) = v^{(0)} - \sqrt{3}v^{(-1)}, \\ \exp(\sqrt{3}t) = v^{(0)} - \sqrt{2}v^{(-1)}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Logo,

$$\exp(\sqrt{2}t) - \exp(\sqrt{3}t) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})v^{(-1)}.$$

Observe que $v^{(-1)}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\exp(\sqrt{2}t)$ e $\exp(\sqrt{3}t)$, pois $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ não é invertível em A. Portanto, concluímos que $\exp(\sqrt{2}t)$ e $\exp(\sqrt{3}t)$ não formam uma base de $\ker P(D)$ sobre A. No entanto, considere $A := \mathbb{Q}_{\{\sqrt{2}-\sqrt{3}\}}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, onde $\mathbb{Q}_{\{\sqrt{2}-\sqrt{3}\}}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ denota a localização[1]

[1]Seja A um anel e S um subconjunto multiplicativo de A, ou seja, $s_1, s_2 \in S$ então $s_1 \cdot s_2 \in S$. Definimos a localização

de $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ sobre o conjunto multiplicativo $S=\{1,\sqrt{2}-\sqrt{3},(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2,\cdots\}$, ou seja,

$$\mathbb{Q}_{\{\sqrt{2}-\sqrt{3}\}}[\sqrt{2},\sqrt{3}]:=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right].$$

Assim, repetindo todo o processo dado anteriormente temos que $\{\exp(\sqrt{2}t),\exp(\sqrt{3}t)\}$, $\{v^{(0)},v^{(-1)}\}$ são soluções linearmente independentes de $P(D)z=0$ em A. Além disso, pela equação (3.13) temos que

$$v^{(0)}=\frac{\sqrt{2}\exp(\sqrt{2}t)-\sqrt{3}\exp(\sqrt{3}t)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\text{ e }v^{(-1)}=\frac{\exp(\sqrt{2}t)-\exp(\sqrt{3}t)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

Portanto, ambos $\{v^{(0)},v^{(-1)}\}$ e $\{\exp(a_1t),\exp(a_2t)\}$ são sistemas fundamentais de $P(D)z=0$, ou seja, bases de $\ker P(D)$ sobre $\mathbb{Q}_{\{\sqrt{2}-\sqrt{3}\}}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$.

Exemplo 3.6 (Generalização do exemplo anterior)**.** Considere $A:=\mathbb{Q}[a_1,a_2]$ e a equação $z''-(a_1+a_2)z'+a_1a_2z=0$. Então,

$$P(t)=t^2-(a_1+a_2)t+a_1a_2=(t-a_1)(t-a_2).$$

Consequentemente, pelo exemplo 3.2, como a_1 e a_2 são raízes de $P(t)$ temos que $\exp(a_1t)$, $\exp(a_2t)$ são soluções linearmente independentes da equação anterior. No entanto, essas soluções não formam uma base de $\ker P(D)$ sobre A. De fato, considere $v^{(0)}$, $v^{(-1)}$, as imagens do sistema fundamental universal $\{u^{(0)},u^{(-1)}\}$ de $U_2(D)y=0$ por meio do homomorfismo $\psi:E_1\to A$ que envia $e_1\mapsto a_1+a_2$ e $e_2\mapsto a_1a_2$. Pelo teorema anterior, $\{v^{(0)},v^{(-1)}\}$ é uma base de $\ker P(D)$ sobre A. A relação é dada por:

$$\begin{cases}\exp(a_1t)=v^{(0)}-a_2v^{(-1)},\\ \exp(a_2t)=v^{(0)}-a_1v^{(-1)}\end{cases}$$

assim,

$$\exp(a_1t)-\exp(a_2t)=(a_1-a_2)v^{(-1)}.$$

Observe que $v^{(-1)}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\exp(a_1t)$ e $\exp(a_2t)$, pois a_1-a_2 não é invertível em A. Portanto, concluímos que $\exp(a_1t)$ e $\exp(a_2t)$ não formam uma base de $\ker P(D)$ sobre A. Contudo, claramente $\{\exp(a_1t),\exp(a_2t)\}$ é uma base de $\ker P(D)$ sobre a localização $A_{\{a_1-a_2\}}:=A\left[\frac{1}{a_1-a_2}\right]$[2] e ambos $\{v^{(0)},v^{(-1)}\}$ e $\{\exp(a_1t),\exp(a_2t)\}$ são sistemas fundamentais de $P(D)z=0$, isto é, bases de $\ker P(D)$ sobre $A_{\{a_1-a_2\}}$.

Exemplo 3.7. O polinômio $U_2(t)=t^2-e_1t+e_2\in E_1[t]$ não possui raízes em E_1. Vamos construir uma $\mathbb{Q}$-álgebra onde $U_2(t)$ se divide como produto de dois fatores lineares. Defina

$$E_1[x]:=\frac{E_1[t]}{(U_2(t))},$$

de A sobre o conjunto S, como sendo o anel $S^{-1}A$ tal que

$$S^{-1}A=\left\{\frac{a}{s}\mid a\in A\text{ e }s\in S\right\}.$$

Se S consiste nas potências de um elemento fixado f, então a localização é escrita como A_f.

[2] $A_{\{a_1-a_2\}}$ é a localização de A com respeito ao conjunto $S=\{1,a_1-a_2,(a_1-a_2)^2,\cdots\}$

onde x denota a classe de t módulo o ideal principal gerado por $U_2(t)$. Por construção, temos que $U_2(x) = 0$. Isto é fácil de se ver e resulta da própria definição de x onde consideramos que $x = \bar{t} = t + (U_2(t))$. Assim,

$$\begin{aligned} U_2(x) = x^2 - e_1 x + e_2 &= \bar{t}^2 - e_1\bar{t} + e_2 \\ &= \overline{t^2} - \overline{e_1 t} + \overline{e_2} \\ &= \overline{t^2 - e_1 t + e_2} \\ &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Logo, x é raiz de $U_2(t) \in E_1[x][t]$ e $U_2(t)$ pode ser escrito como produto de dois fatores lineares:

$$U_2(t) = (t - x)(t - (e_1 - x)).$$

Claramente $E_1[x]$ é uma E_1-álgebra e como x é raíz de $U_2(t)$, pelo exemplo 3.2, $\exp(xt)$ é um elemento de $\ker U_2(D)$. Pela fórmula universal de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} \exp(xt) &= U_0(\exp(xt))u^{(0)} + U_1(\exp(xt))u^{(-1)} \\ &= 1 \cdot u^{(0)} + (x - e_1 \cdot 1)u^{(-1)} \\ &= u^{(0)} + (x - e_1)u^{(-1)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

A expressão (3.14) é denominada *fórmula universal de Euler*. De fato, considere a equação diferencial

$$y'' + y = 0,$$

com coeficientes na $\mathbb{Q}$-álgebra $\mathbb{C}$. Então $i := \sqrt{-1}$ é um raiz do polinômio característico $P(t) = t^2 + 1$ da equação. Desse modo, $\exp(it) \in \ker(D^2 + 1)$, e assim

$$\exp(it) = v^{(0)} + (i - e_1)v^{(-1)}$$

sobre a E_1-álgebra estrutura de $\mathbb{C}$ induzida pelo homomorfismo $\psi : E_1 \to \mathbb{C}$ que mapeia $e_1 \mapsto 0$ e $e_2 \mapsto 1$, onde $v^{(i)} = \widehat{\psi}(u^{(i)})$. Logo,

$$\exp(it) = v^{(0)} + iv^{(-1)} \in \ker(D^2 + 1) \subseteq \mathbb{C}[[t]],$$

e pelo exemplo 3.3 temos

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t.$$

De forma geral, considere a equação diferencial

$$y^{r+1} + y = 0 \tag{3.15}$$

com coeficientes em $\mathbb{C}$ e seja x uma raíz de grau $r+1$ do polinômio característico $P(t) = t^{r+1} + 1$ da equação (3.15). Então, $\exp(xt) \in \ker(D^{r+1}+1)$ sobre $\mathbb{C}$ com coeficientes inciais $1, x, \cdots x^r$. Sendo assim, pelo teorema 3.2

$$\exp(xt) = v^{(0)} + xv^{(-1)} + \cdots + x^r v^{(-r)},$$

de modo que $v^{(i)} = \widehat{\psi}(u^{(i)})$ onde $\widehat{\psi} : E_r[[t]] \to \mathbb{C}[[t]]$ mapeia $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} \mapsto \sum_{n\geq 0} \psi(a_n)\frac{t^n}{n!}$, tal que $\psi : E_r \to \mathbb{C}$ é o homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras que envia $e_1 \mapsto 0, \cdots, e_r \mapsto 0$ e $e_{r+1} \mapsto 1$.

Exemplo 3.8. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$z''' - 6z'' + 11z' - 6z = 0, \; z(0) = 1, \; z'(0) = 0, \; z''(0) = 2. \tag{3.16}$$

Iremos resolver o problema acima de duas formas: primeiramente utilizando a ferramenta que foi desenvolvida neste capítulo e depois vamos solucioná-lo com o auxílio do método padrão analítico.

A equação (3.16) pode ser escrita como $P(D)z = 0$, onde $P(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$. Sabendo que $U_3(t) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3$, então $\psi : E_2 \to \mathbb{R}$ é o único homomorfismo sobre $\mathbb{Q}$-álgebras que mapeia $e_1 \mapsto 6$, $e_2 \mapsto 11$ e $e_3 \mapsto 6$. Seja $\widehat{\psi} : E_2[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]$ um homomorfismo induzido por ψ tal que

$$\widehat{\psi}\Big(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}\Big) = \sum_{n\geq 0} \psi(a_n)\frac{t^n}{n!}.$$

Então, pelo teorema 3.2, o conjunto $\{v^{(0)}, v^{(-1)}, v^{(-2)}\}$ é uma base de ker$P(D)$ tal que

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= \widehat{\psi}(u^{(0)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \widehat{\psi}[1 + e_1t + (e_1^2 - e_2)\frac{t^2}{2!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^3}{3!} + \cdots] \\ &= 1 + \psi(e_1)t + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^2}{2!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + 6t + 25\frac{t^2}{2!} + 90\frac{t^3}{3!} + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(-1)} &= \widehat{\psi}(u^{(-1)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-1} \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \widehat{\psi}[t + e_1\frac{t^2}{2!} + (e_1^2 - e_2)\frac{t^3}{3!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^4}{4!} + \cdots] \\ &= t + \psi(e_1)\frac{t^2}{2!} + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^3}{3!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^4}{4!} + \cdots \\ &= t + 6\frac{t^2}{2!} + 25\frac{t^3}{3!} + 90\frac{t^4}{4!} + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{(-2)} = \widehat{\psi}(u^{(-2)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-2}\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \widehat{\psi}[\frac{t^2}{2!} + e_1\frac{t^3}{3!} + (e_1^2 - e_2)\frac{t^4}{4!} + (e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^5}{5!} + \cdots] \\
&= \frac{t^2}{2!} + \psi(e_1)\frac{t^3}{3!} + \psi(e_1^2 - e_2)\frac{t^4}{4!} + \psi(e_1^3 - 2e_1e_2 + e_3)\frac{t^5}{5!} + \cdots \\
&= \frac{t^2}{2!} + 6\frac{t^3}{3!} + 25\frac{t^4}{4!} + 90\frac{t^5}{5!} + \cdots .
\end{aligned}$$

Logo, $\{v^{(0)}, v^{(-1)}, v^{(-2)}\}$ é um sistema fundamental de $z''' - 6z'' + 11z' - 6z = 0$ e pelo teorema 3.2 a única solução de $P(D)z = 0$ com condições inciais $q_0 = 1$, $q_1 = 0$ e $q_2 = 2$ é

$$\mathbf{q}(t) = V_0(\mathbf{q})v^{(0)} + V_1(\mathbf{q})v^{(-1)} + V_2(\mathbf{q})v^{(-2)},$$

onde $V_0(\mathbf{q}) = q_0$, $V_1(\mathbf{q}) = q_1 - 6q_0$ e $V_2(\mathbf{q}) = q_2 - 6q_1 + 11q_0$. Assim,

$$\mathbf{q}(t) = v^{(0)} - 6v^{(-1)} + 13v^{(-2)}.$$

Por outro lado, utilizando o método padrão para resolução de equações diferenciais ordinárias e sabendo que $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$ são raízes do polinômio característico $P(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$, temos que $f_1 = e^t$, $f_2 = e^{2t}$ e $f_3 = e^{3t}$ formam um sistema fundamental e a única solução do P.V.I é

$$z(t) = 4e^t - 5e^{2t} + 2e^{3t}.$$

As duas soluções encontradas são iguais, caso contrário contradizeria o teorema da existência e unicidade para problemas de valor inicial. De fato, como

$$\begin{aligned}
e^t &= v^{(0)} - 5v^{(-1)} + 6v^{(-2)}, \\
e^{2t} &= v^{(0)} - 4v^{(-1)} + 3v^{(-2)}, \\
e^{3t} &= v^{(0)} - 3v^{(-1)} + 2v^{(-2)},
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
z(t) &= 4e^t - 5e^{2t} + 2e^{3t} \\
&= 4(v^{(0)} - 5v^{(-1)} + 6v^{(-2)}) - 5(v^{(0)} - 4v^{(-1)} + 3v^{(-2)}) + 2(v^{(0)} - 3v^{(-1)} + 2v^{(-2)}) \\
&= v^{(0)} - 6v^{(-1)} + 13v^{(-2)} \\
&= \mathbf{q}(t).
\end{aligned}$$

3.3 Equações Diferenciais Lineares não Homogêneas

3.3.1 Algumas observações sobre a transformada formal de Laplace

Lembre-se que a transformada formal de Laplace $L : A[[t]] \to A[[t]]$, onde A é uma $\mathbb{Q}$-álgebra, é definida por

$$L\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} n! a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n t^n.$$

A melhor maneira de se estudar equações diferenciais lineares não homogêneas é pela transformada formal de Laplace. A seguir apresentaremos duas proposições que serão úteis para o desenvolvimento do conteúdo desta seção.

Proposição 3.5. *Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra. Para cada $k \geq -1$ e cada $a(t) \in A[[t]]$ temos*

$$t^{k+1} L(D^{(k+1)} a)(t) = L(a)(t) - a_0 - a_1 t - \cdots - a_k t^k.$$

Demonstração. Da definição de transformada formal de Laplace tem-se

$$\begin{aligned}
t^{k+1} L(D^{(k+1)} a)(t) &= t^{k+1} L\left(\sum_{n\geq 0} a_{n+k+1} \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= t^{k+1} \sum_{n\geq 0} a_{n+k+1} t^n \\
&= \sum_{n\geq 0} a_{n+k+1} t^{n+k+1} \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n t^n - a_0 - a_1 t - \cdots - a_k t^k \\
&= L(a)(t) - a_0 - a_1 t - \cdots - a_k t^k.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.6. *A transformada formal de Laplace de $u^{(-j)}$ para $0 \leq j \leq r$ é dada por:*

$$L(u^{(-j)}) = t^j \sum_{n\geq 0} h_n t^n = \frac{t^j}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}}.$$

Demonstração. Antes de iniciarmos a prova, lembre-se que $h_i = 0$ para todo $i < 0$ e que

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L(u^{(-j)}) &= L\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-j}\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} h_{n-j}t^n \\
&= h_{-j} + h_{1-j}t + \cdots + h_{-1}t^{j-1} + \sum_{n\geq 0} h_n t^{n+j} \\
&= t^j \sum_{n\geq 0} h_n t^n \\
&= \frac{t^j}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}}.
\end{aligned}$$

□

3.3.2 Solução das Equações Diferenciais Lineares não Homogêneas

Sejam $\mathbf{f}(t) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} \in E_r[[t]]$ e $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_r)$ uma sequência de elementos de E_r. Solucionar o problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_{r+1}(D)y = \mathbf{f} \\ (D^i y)(0) = c_i, \quad 0 \leq i \leq r \end{cases} \tag{3.17}$$

equivale a encontrar uma série de potência formal $\mathbf{p}(t) \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{f})$ que satisfaça as condições iniciais dadas. Antes de iniciarmos esse processo, exibiremos uma proposição similar a que foi apresentada quando estávamos tratando das equações diferenciais homogêneas.

Proposição 3.7. *Seja $\mathbf{g}(t) \in E_r[[t]]$. Dizemos que $\mathbf{g}(t)$ é solução de $U_{r+1}(D)y = \mathbf{f}$, ou seja, $\mathbf{g}(t) \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{f})$ se e somente se*

$$U_{n+r+1}(\mathbf{g}) := g_{n+r+1} - e_1 g_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}g_n = f_n \tag{3.18}$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Substituindo $y = \mathbf{g}(t)$ na equação $U_{r+1}(D)y = \mathbf{f}$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} &= U_{r+1}(D)\mathbf{g}(t) \\
&= D^{r+1}\mathbf{g}(t) - e_1 D^r \mathbf{g}(t) + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}\mathbf{g}(t) \\
&= \sum_{n\geq 0} g_{n+r+1}\frac{t^n}{n!} - e_1 \sum_{n\geq 0} g_{n+r}\frac{t^n}{n!} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}\sum_{n\geq 0} g_n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} (g_{n+r+1} - e_1 g_{n+r} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}g_n)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{g}(t) \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{f})$ se e somente se $U_{n+r+1}(\mathbf{g}) = g_{n+r+1} - e_1 g_{n+r+} + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}g_n = f_n$, para todo $n \geq 0$. □

Nosso objetivo é encontrar $\mathbf{p}(t)$ de modo que satisfaça (3.17). Pela primeira igualdade da equação (3.17) temos que

$$t^{r+1}L(U_{r+1}(D)y) = t^{r+1}L(\mathbf{f}),$$

assim

$$t^{r+1}[L(D^{r+1}y - e_1D^ry + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}y)] = \sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}$$

$$t^{r+1}[L(D^{r+1}y) - e_1L(D^ry) + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}L(y)] = \sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}$$

$$t^{r+1}L(D^{r+1}y) - e_1t[t^rL(D^ry)] + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}L(y) = \sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}.$$

Aplicando a proposição 3.5, obtemos

$$L(y) - \sum_{i\geq 0}^{r} c_it^i - e_1t\left[L(y) - \sum_{i\geq 0}^{r-1} c_it^i\right] + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}L(y) = \sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}.$$

Colocando $L(y)$ em evidência e fazendo alguns cálculos necessários, temos que

$$L(y)(1 - e_1t + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}) = U_0(\mathbf{c}) + U_1(\mathbf{c})t + \cdots + U_r(\mathbf{c})t^r + \sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}.$$

Como nosso intuito é encontrar $\mathbf{p}(t)$ que satisfaça (3.17), eventualmente obtemos a expressão:

$$L(y) = L(\mathbf{p}(t)),$$

onde

$$L(\mathbf{p}(t)) = \frac{U_0(\mathbf{c}) + U_1(\mathbf{c})t + \cdots + U_r(\mathbf{c})t^r + \sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}}{1 - e_1t + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}}. \tag{3.19}$$

Pela proposição 3.6 a equação (3.19) passa a ser

$$L(\mathbf{p}(t)) = U_0(\mathbf{c})L(u^{(0)}) + U_1(\mathbf{c})L(u^{(-1)}) + \cdots + U_r(\mathbf{c})L(u^{(-r)}) + \frac{\sum_{n\geq 0} f_n t^{n+r+1}}{1 - e_1t + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}}.$$

A equação anterior pode ser alternativamente escrita como:

$$L(\mathbf{p}(t)) = U_0(\mathbf{c})L(u^{(0)}) + U_1(\mathbf{c})L(u^{(-1)}) + \cdots + U_r(\mathbf{c})L(u^{(-r)}) + \sum_{n\geq r+1} q_n t^n, \tag{3.20}$$

onde

$$\sum_{n\geq r+1} q_n t^n = \frac{\sum_{n\geq r+1} f_{n-r-1} t^n}{1 - e_1t + \cdots + (-1)^{r+1}e_{r+1}t^{r+1}}.$$

Escrevendo $L(\mathbf{p}(t))$ como $\sum_{n\geq 0} p_n t^n$ com p_n determinado pela equação (3.20), temos que

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n\geq 0} p_n \frac{t^n}{n!}$$

é a única solução do problema de Cauchy (3.13). Todo o processo acima resulta no seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja* $\sum_{n\geq r+1} q_n t^n$ *uma série de potência formal definida pela seguinte função geradora:*

$$\frac{\sum_{n\geq r+1} f_{n-r-1} t^n}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}} = \sum_{n\geq r+1} q_n t^n \tag{3.21}$$

com $q_0, \cdots, q_r = 0$. *Então,*

$$\mathbf{p}(t) = U_0(\mathbf{c})u^{(0)} + U_1(\mathbf{c})u^{(-1)} + \cdots + U_r(\mathbf{c})u^{(-r)} + \sum_{n\geq r+1} q_n \frac{t^n}{n!}$$

onde $U_j(\mathbf{c}) = c_j - e_1 c_{j-1} + \cdots + (-1)^j e_j c_0$ *para* $0 \leq j \leq r$, *é a única solução do problema de Cauchy (3.17).*

Demonstração. Primeiramente iremos mostrar que $\mathbf{q}(t) = \sum_{n\geq r+1} q_n \frac{t^n}{n!} \in U_{r+1}(D)^{-1}(\mathbf{f})$. Pela igualdade (3.21) temos que

$$(q_{r+1}t^{r+1} + q_{r+2}t^{r+2} + q_{r+3}t^{r+3} + \cdots)(1 - e_1 t + e_2 t^2 + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}) = f_0 t^{r+1} + f_1 t^{r+2} + f_2 t^{r+3} + \cdots$$

o que implica em

$$\begin{aligned} q_{r+1} &= f_0 \\ q_{r+2} - e_1 q_{r+1} &= f_1 \\ &\vdots \\ q_{r+n+1} - e_1 q_{r+n} + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} q_n &= f_n \end{aligned} \tag{3.22}$$

para todo $n \geq 0$ desde que $q_0, \cdots, q_r = 0$. Desse modo, pela proposição 3.7 e como consequência da expressão (3.22) temos que $U_{n+r+1}(\mathbf{q}) = f_n$ para todo $n \geq 0$ e assim $\mathbf{q}(t) = \sum_{n\geq r+1} q_n \frac{t^n}{n!}$ é solução de $U_{r+1}(D)y = \mathbf{f}$ com condições iniciais $D^j y(0) = 0$ para $0 \leq j \leq r$.

Portanto, usando a proposição 3.1, a solução do problema de Cauchy será a soma de $\mathbf{q}(t)$ e a solução de $\mathbf{y}_0(t)$ de $U_{r+1}(D)y = 0$ que satisfaz as condições iniciais $D^j y(0) = c_j$ para $0 \leq j \leq r$. Pelo corolário 3.1, $\mathbf{y}_0(t)$ é unicamente determinado por:

$$\mathbf{y}_0(t) = U_0(\mathbf{c})u^{(0)} + U_1(\mathbf{c})u^{(-1)} + \cdots + U_r(\mathbf{c})u^{(-r)}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{y}_0(t) + \mathbf{q}(t)\\ &= U_0(\mathbf{c})u^{(0)} + U_1(\mathbf{c})u^{(-1)} + \cdots + U_r(\mathbf{c})u^{(-r)} + \sum_{n\geq r+1} q_n \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

é a única solução do problema de Cauchy dado por (3.17).

□

Visto que

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}}$$

podemos calcular explicitamente os valores de q_n. Assim, desenvolvendo a expressão (3.21), temos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq r+1} q_n t^n &= \frac{\sum_{n\geq r+1} f_{n-r-1} t^n}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}}\\ &= \left(\sum_{n\geq r+1} f_{n-r-1} t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} h_n t^n\right)\\ &= (f_0 t^{r+1} + f_1 t^{r+2} + f_2 t^{r+3} + \cdots)(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots),\end{aligned}$$

o que resulta em,

$$\begin{aligned}q_{r+1} &= f_0 h_0\\ q_{r+2} &= f_0 h_1 + f_1 h_0\\ q_{r+3} &= f_0 h_2 + f_1 h_1 + f_2 h_0\\ &\vdots\end{aligned}$$

Em geral geral, para $n \geq r+1$ temos que

$$q_n = \sum_{s\geq r+1}^{n} f_{s-r-1} h_{n-s}.$$

Desse modo, podemos reescrever o teorema 3.3 da seguinte forma:

Corolário 3.2. *Seja*

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} \in E_{r+1}[[t]] \tag{3.23}$$

e considere o problema de Cauchy dado por

$$\begin{cases} U_{r+1}(D)y = \mathbf{f} \\ (D^i y)(0) = c_i, \quad 0 \leq i \leq r. \end{cases} \tag{3.24}$$

Então,

$$\mathbf{p}(t) = U_0(\mathbf{c})u^{(0)} + U_1(\mathbf{c})u^{(-1)} + \cdots + U_r(\mathbf{c})u^{(-r)} + \mathbf{q}(t)$$

onde $U_j(\mathbf{c}) = c_j - e_1 c_{j-1} + \cdots + (-1)^j e_j c_0$ *para* $0 \leq j \leq r$ *e*

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{n \geq r+1} \left(\sum_{s \geq r+1}^{n} f_{s-r-1} h_{n-s} \right) \frac{t^n}{n!}$$

é a única solução do problema de Cauchy dado acima.

Seguindo o mesmo argumento usado quando estávamos tratando de EDO homogêneas, o corolário 3.2 pode generalizado para casos em que a EDO possui coeficientes em uma $\mathbb{Q}$-álgebra qualquer.

Teorema 3.4. *Seja A uma $\mathbb{Q}$-álgebra. Considere* $P(t) = t^{r+1} - a_1(P)t^r + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1}(P) \in A[t]$ *e* $\mathbf{g}(t) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{t^n}{n!} \in A[[t]]$. *A única solução de* $P(D)z = \mathbf{g}$ *com condições iniciais* $c_0, c_1, \cdots, c_r \in A$ *é*

$$\mathbf{p}(t) = V_0(\mathbf{c})v^{(0)} + V_1(\mathbf{c})v^{(-1)} + \cdots + V_r(\mathbf{c})v^{(-r)} + \mathbf{q}(t)$$

onde $V_j(\mathbf{c}) = c_j - a_1(P)c_{j-1} + \cdots + (-1)^j a_j(P)c_0$ *para* $0 \leq j \leq r$ *e*

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{n \geq r+1} \left(\sum_{s \geq r+1}^{n} g_{s-r-1} \psi(h_{n-s}) \right) \frac{t^n}{n!}.$$

Exemplo 3.9. Resolva a seguinte equação diferencial ordinária

$$z'' - 4z = e^{5t}. \tag{3.25}$$

Pelo teorema 3.4, a solução da EDO acima será a soma da solução da parte homogênea mais uma solução particular da EDO não homogênea. Resolvamos primeiro a E.D.O homogênea associada

$$z'' - 4z = 0. \tag{3.26}$$

A equação (3.26) pode ser escrita como $P(D)z = 0$, onde $P(t) = t^2 - 4$. Sabendo que $U_2(t) = t^2 - e_1 t + e_2$ e que $\psi : E_1 \to \mathbb{R}$ é um homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras que mapeia $e_1 \mapsto 0$ e $e_2 \mapsto -4$, pelo teorema 3.2, a solução geral de $P(D)z = 0$ é

$$\mathbf{c}(t) = c_0 v^{(0)}(t) + c_1 v^{(-1)}(t), \tag{3.27}$$

onde $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ e $v^{(i)} = \widehat{\psi}(u^{(i)})$. Explicitamente, temos que

$$\begin{aligned}
v^{(0)} = \widehat{\psi}(u^{(0)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \psi(h_n)\frac{t^n}{n!} \\
&= 1 + 4\frac{t^2}{2!} + 16\frac{t^4}{4!} + 64\frac{t^6}{6!} + \cdots ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{(-1)} &= \widehat{\psi}(u^{(-1)}) = \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-1} \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= t + 4\frac{t^3}{3!} + 16\frac{t^5}{5!} + 64\frac{t^7}{7!} + \cdots .
\end{aligned}$$

Para acharmos a solução particular $\mathbf{q}(t)$, usaremos a expressão dada no teorema 3.4. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{s\geq 2}^{n} g_{s-2}\psi(h_{n-s})\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= g_0\psi(h_0)\frac{t^2}{2!} + (g_0\psi(h_1) + g_1\psi(h_0))\frac{t^3}{3!} + (g_0\psi(h_2) + g_1\psi(h_1) + g_2\psi(h_0))\frac{t^4}{4!} + \cdots .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Sabemos que,

$$\mathbf{g}(t) = e^{5t} = \sum_{n\geq 0} 5^n \frac{t^n}{n!} = 1 + 5t + 25\frac{t^2}{2!} + 125\frac{t^3}{3!} + \cdots .$$

Além disso, $\psi(h_0) = 1, \psi(h_1) = 0, \psi(h_2) = 4, \psi(h_3) = 0, \psi(h_4) = 8$, assim por diante. Esses valores foram determinados quando calculamos $v^{(0)}$ e $v^{(-1)}$ explicitamente. Logo, substitindo os termos encontrado em (3.28), temos que

$$\mathbf{q}(t) = \frac{t^2}{2!} + 5\frac{t^3}{3!} + 29\frac{t^4}{4!} + 145\frac{t^5}{5!} + \cdots .$$

Portanto, $\mathbf{p}(t) = c_1 v^{(0)} + c_2 v^{(-1)} + \mathbf{q}(t)$ é a solução geral de $z'' - 4z = e^{5t}$.

Capítulo 4

Aplicações

Quando trabalhamos com o método clássico para solucionar equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes, algumas particularidades devem ser levadas em consideração. Na EDO homogênea devemos nos atentar aos casos em que o polinômio característico possui raízes reais iguais ou raízes complexas, enquanto que na solução das equações diferenciais não homogêneas torna-se relevante considerar o caso em que a função da parte não homogênea já aparece na expressão da solução geral da equação homogênea associada. Por outro lado, o método apresentado nesse trabalho trata todos esses casos de uma única maneira, obtendo a solução representada como uma série de potências formal independentemente de qualquer análise sobre as raízes do polinômio característico e da função do caso não homogêneo pertencer a solução geral da EDO homogênea. A aparente complexidade do método é totalmente justificada e compensada pela generalidade da solução. Essa mesma generalidade também tem a vantagem de permitir a implementação de um algorítmo eficiente para obtenção de soluções numéricas, com vastas aplicações na solução de equações diferenciais que surgem em problemas de física, engenharia e em outras áreas que envolvem modelagem com equações diferenciais.

A seguir veremos alguns exemplos que ilustram as vantagens da técnica aqui apresentada.

1. Equação característica com raízes complexas:

   Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 0. \tag{4.1}$$

Demonstração. Comparando a equação diferencial acima com $U_3(D)y = y''' - e_1y'' + e_2y' - e_3y$, concluímos que $\psi : E_2 \to \mathbb{R}$ é o único homomorfismo sobre $\mathbb{Q}$-álgebras que mapeia $e_1 \mapsto 4$, $e_2 \mapsto 7$ e $e_3 \mapsto 6$.

Pelo teorema 3.2, a única solução de (4.1) com condições iniciais $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$ é

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= V_0(\mathbf{y})v^{(0)} + V_1(\mathbf{y})v^{(-1)} + V_2(\mathbf{y})v^{(-2)} \\
&= y_0v^{(0)} + (y_1 - 4y_0)v^{(-1)} + (y_2 - 4y_1 + 7y_0)v^{(-2)} \\
&= v^{(0)} - 4v^{(-1)} + 7v^{(-2)}.
\end{aligned}$$

Explicitamente cada $v^{(i)}$ é dado por:

$$\begin{aligned} v^{(0)} = \widehat{\psi}(u^{(0)}) &= \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \psi(h_n)\frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + 4t + 9\frac{t^2}{2!} + 14\frac{t^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(-1)} = \widehat{\psi}(u^{(-1)}) &= \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-1} \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= t + 4\frac{t^2}{2!} + 9\frac{t^3}{3!} + 14\frac{t^4}{4!} + \cdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v^{(-2)} = \widehat{\psi}(u^{(-2)}) &= \widehat{\psi}\left(\sum_{n\geq 0} h_{n-2} \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \frac{t^2}{2!} + 4\frac{t^3}{3!} + 9\frac{t^4}{4!} + 14\frac{t^5}{5!} + \cdots . \end{aligned}$$

□

2. Equação característica com raízes reais iguais:

   Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y^{(5)} + y^{(4)} - 9y''' - 5y'' + 16y' + 12y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 2, y^{(4)}(0) = -1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

   Sabendo que $U_5(D)y = y^{(5)} - e_1y^{(4)} + e_2y''' - e_3y'' + e_4y' - e_5y = 0$, então $\psi : E_4 \to \mathbb{R}$ é o único homomorfismo sobre $\mathbb{Q}$-álgebras que envia $e_1 \mapsto -1$, $e_2 \mapsto -9$, $e_3 \mapsto 5$, $e_4 \mapsto 16$ e $e_5 \mapsto -12$. Pelo teorema 3.2, a única solução de (4.2) com condições iniciais $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = -1$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= V_0(\mathbf{y})v^{(0)} + V_1(\mathbf{y})v^{(-1)} + V_2(\mathbf{y})v^{(-2)} + V_3(\mathbf{y})v^{(-3)} + V_4(\mathbf{y})v^{(-4)} \\ &= y_0v^{(0)} + (y_1 + y_0)v^{(-1)} + (y_2 + y_1 - 9y_0)v^{(-2)} + (y_3 + y_2 - 9y_1 - 5y_0)v^{(-3)} \\ &\qquad + (y_4 + y_3 - 9y_2 - 5y_1 + 16y_0)v^{(-4)} \\ &= v^{(0)} + v^{(-1)} + 9y_0v^{(-2)} - 3v^{(-3)} + 17v^{(-4)}. \end{aligned}$$

3. Função da parte não homogênea é solução da EDO homogêna associada:

   Encontre a solução geral para

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^t. \tag{4.3}$$

   Demonstração. Aplicando o teorema 3.4 na equação dada acima, a sua solução geral será da forma

$$\mathbf{p}(t) = V_0(\mathbf{p})v^{(0)} + V_1(\mathbf{p})v^{(-1)} + \mathbf{q}(t).$$

Assim, sabendo que a equação caracteríscа associada a parte homogênea de (4.3) é $P(t)=t^2-5t+4$ e que $U_2(t)=t^2-e_1t+e_2$, podemos construir o homomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras $\psi: E_1\to\mathbb{R}$ que mapeia $e_1\mapsto 5$ e $e_2\mapsto 4$. Por outro lado, temos que

$$8e^t = 8\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!} = 8+8t+8\frac{t^2}{2!}+8\frac{t^3}{3!}+\cdots .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{s\geq 2}^{n} g_{s-2}\psi(h_{n-s})\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= g_0\psi(h_0)\frac{t^2}{2!}+(g_0\psi(h_1)+g_1\psi(h_0))\frac{t^3}{3!}+(g_0\psi(h_2)+g_1\psi(h_1)+g_2\psi(h_0))\frac{t^4}{4!}+\cdots\\
&= 8\frac{t^2}{2!}+48\frac{t^3}{3!}+216\frac{t^4}{4!}+\cdots .
\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral de $y''-5y'+4y=8e^t$ é dada por

$$\mathbf{p}(t)=V_0(\mathbf{p})v^{(0)}+V_1(\mathbf{p})v^{(-1)}+\mathbf{q}(t),$$

onde

$$\mathbf{q}(t)=8\frac{t^2}{2!}+48\frac{t^3}{3!}+216\frac{t^4}{4!}+\cdots .$$

□

4. Solucione o seguinte problema de valor inicial

$$y'''+2y''-5y'-8y=\cos t,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0. \tag{4.4}$$

Visto que $U_3(t)=t^3-e_1t^2+e_2t+e_3$ então podemos construir um homomorfismo sobre $\mathbb{Q}$-álgebras $\psi: E_2\to\mathbb{R}$ que envia $e_1\mapsto -2$, $e_2\mapsto -5$ e $e_3\mapsto 8$. Pelo teorema 3.4 a única solução de (4.4) com condições iniciais $p_0=1$, $p_1=0$ e $p_2=0$ é

$$\mathbf{p}(t)=V_0(\mathbf{p})v^{(0)}+V_1(\mathbf{p})v^{(-1)}+V_2(\mathbf{p})v^{(-2)}+\mathbf{q}(t),$$

onde $V_0(\mathbf{p})=p_0=1$, $V_1(\mathbf{p})=p_1+2p_0=2$, $V_2(\mathbf{p})=p_2+2p_1-5p_0=-5$ e

$$\mathbf{q}(t)=\sum_{n\geq 3}\left(\sum_{s\geq 3}^{n} g_{s-3}\psi(h_{n-s})\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Sabendo que

$$\cos t=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots ,$$

então

$$\mathbf{p}(t) = v^{(0)} + 2v^{(-1)} - 5v^{(-2)} + \mathbf{q}(t),$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \sum_{n\geq 3}\left(\sum_{s\geq 3}^{n} g_{s-3}\psi(h_{n-s})\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= g_0\psi(h_0)\frac{t^3}{3!} + (g_0\psi(h_1) + g_1\psi(h_0))\frac{t^4}{4!} + (g_0\psi(h_2) + g_1\psi(h_1) + g_2\psi(h_0))\frac{t^5}{5!} + \cdots \\
&= \frac{t^3}{3!} - 2\frac{t^4}{4!} + 8\frac{t^5}{5!} - 18\frac{t^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}$$

é a única solução do PVI dado por (4.4).

5. Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 15\cos t \tag{4.5}$$

Sabemos que $U_3(t) = t^3 - e_1t^2 + e_2t + e_3$ então podemos construir um homomorfismo sobre $\mathbb{Q}$-álgebras de modo que $\psi : E_2 \to \mathbb{R}$ envia $e_1 \mapsto 2$, $e_2 \mapsto 4$ e $e_3 \mapsto 8$. Pelo teorema 3.4 a solução geral de (4.5) é dada por

$$\mathbf{p}(t) = V_0(\mathbf{p})v^{(0)} + V_1(\mathbf{p})v^{(-1)} + V_2(\mathbf{p})v^{(-2)} + \mathbf{q}(t),$$

onde

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{n\geq 3}\left(\sum_{s\geq 3}^{n} g_{s-3}\psi(h_{n-s})\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Note que

$$15\cos t = 15\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} = 15 - 15\frac{t^2}{2!} + 15\frac{t^4}{4!} - 15\frac{t^6}{6!} + \cdots.$$

Então, desenvolvendo a expressão para $\mathbf{q}(t)$ temos que

$$\mathbf{p}(t) = V_0(\mathbf{p})v^{(0)} + V_1(\mathbf{p})v^{(-1)} + V_2(\mathbf{p})v^{(-2)} + \mathbf{q}(t),$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \sum_{n\geq 3}\left(\sum_{s\geq 3}^{n} g_{s-3}\psi(h_{n-s})\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= g_0\psi(h_0)\frac{t^3}{3!} + (g_0\psi(h_1) + g_1\psi(h_0))\frac{t^4}{4!} + (g_0\psi(h_2) + g_1\psi(h_1) + g_2\psi(h_0))\frac{t^5}{5!} + \cdots \\
&= 15\frac{t^3}{3!} + 30\frac{t^4}{4!} - 15\frac{t^5}{5!} - 30\frac{t^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}$$

é a solução geral da equação dada por (4.5).

6. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y^{(7)} + 2y^{(5)} - 5y^{(4)} - 8y''' + 7y'' - 9y' + y = e^t, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0, y^{(4)}(0) = 2, y^{(5)}(0) = 0, y^{(6)}(0) = 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Comparando os polinômios $U_7(t) = t^7 - e_1t^6 + e_2t^5 - e_3t^4 + e_4t^3 - e_5t^2 + e^6t - e_7$ e $P(t) = t^7 + 2t^5 - 5t^4 - 8t^3 + 7t^2 - 9t + 1$, podemos construir um homomorfismo $\psi : E_6 \to \mathbb{R}$ que mapeia $e_1 \mapsto 0$, $e_2 \mapsto 2$, $e_3 \mapsto 5$, $e_4 \mapsto -8$, $e_5 \mapsto -7$, $e_6 \mapsto -9$ e $e_7 \mapsto -1$. Além disso, temos que

$$e^t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots .$$

Usando o teorema 3.4, a única solução do PVI (4.6) com condições iniciais $p_0 = 1, p_1 = -1, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 2, p_5 = 0, p_6 = 1$ é dada por

$$\mathbf{p}(t) = V_0(\mathbf{p})v^{(0)} + V_1(\mathbf{p})v^{(-1)} + \cdots + V_6(\mathbf{p})v^{(-6)} + \mathbf{q}(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \sum_{n\geq 7} \left(\sum_{s\geq 7}^{n} g_{s-7}\psi(h_{n-s}) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= g_0\psi(h_0)\frac{t^7}{7!} + (g_0\psi(h_1) + g_1\psi(h_0))\frac{t^8}{8!} + (g_0\psi(h_2) + g_1\psi(h_1) + g_2\psi(h_0))\frac{t^9}{9!} + \cdots \\ &= \frac{t^7}{7!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^9}{9!} + \cdots . \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_0(\mathbf{p}) &= p_0 = 1, \\ V_1(\mathbf{p}) &= p_1 = -1, \\ V_2(\mathbf{p}) &= p_2 + 2p_0 = 2, \\ V_3(\mathbf{p}) &= p_3 + 2p_1 - 5p_0 = -7, \\ V_4(\mathbf{p}) &= p_4 + 2p_2 - 5p_1 - 8p_0 = -1, \\ V_5(\mathbf{p}) &= p_5 + 2p_3 - 5p_2 - 8p_1 + 7p_0 = 15, \\ V_6(\mathbf{p}) &= p_6 + 2p_4 - 5p_3 - 8p_2 + 7p_1 - 9p_0 = -11. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{p}(t) = v^{(0)} - v^{(-1)} + 2v^{(-2)} - 7v^{(-3)} - v^{(-4)} + 15v^{(-5)} - 11v^{(-6)} + \mathbf{q}(t)$$

é a única solução de (4.6).

4.1 Conclusões

A elegância e generalidade da abordagem algébrica são evidentes quando comparamos com a abordagem clássica que, mesmo ao resolvermos EDO's de baixa ordem temos dificuldades práticas como a necessidade de fazer um estudo das raízes da equação característica e de considerar as particularidades da função que define a parte não homogênea. Essas dificuldades agravam-se bastante quando a EDO tem ordem maior do que 2, ao ponto de mesmo utilizando softwares apropriados a obtenção da solução ser difícil e demorada. Essa observação aponta para uma interessante perspectiva de, em trabalhos futuros, desenvolver e implementar um algorítimo correspondente ao método aqui apresentado, o que certamente trará vantagens interessantes para a solução numérica das EDO's lineares com coeficientes constantes e para a representação computacional destas soluções. Para motivar estudos futuros, em [3] podemos ver diversas outras aplicações, como a obtenção da exponencial de uma matriz sem necessitar da forma canônica de Jordan, cálculo de Schubert e correspondência Boson-Fermion, tópicos mais avançados e que fogem ao escopo deste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] MACDONALD, I. G.. *Symmetric functions and Hall polynomials*. 2rd ed. Oxford University Press, New York: Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, 1995. 475p.

[2] GATTO, L.; SCHERBAK, I. *"On One Property of one solution of one equation"or Linear ODE'S, Wronskians and Schubert Calculus*. Volume 12. Number 2. Moscow Mathematical Jornal, 2012.

[3] GATTO, L. *Linear ODEs: an Algebraic Perspective*. Dipartamento di Scienze Matematiche Politecnico di Torino, 2012. 104 p.

[4] BOURBAKI, N. *Algebra I*. Addison-Wesley Publishing Company. 709p.

[5] ROWEN, L. H. *Graduate Algebra: Commutative View*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 73. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2006. 438p.

[6] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWRONSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 1. New York, USA: Cambridge University Press, 2006. 457p.

[7] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. 3rd ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2005. 326p.

[8] BORGES, H.; TEGAN, E. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2015. 490p.

[9] SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo, 2009. 171p.

[10] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R.*Equações Diferenciais*. Volume 1. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2001. 472p.

[11] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M.*Abstract Algebra*. Third Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc. 922p.

[12] LANG, S.*Algebra*. Revised Third Edition. United States of America: Springer, 2002. 914 p.

[13] *IV. An Introduction to Symmetric Function*. Disponível em: $< http : //www.math.uwaterloo.ca/\ dgwagner/SF.pdf >$.

[14] *Some Category Theory*. Disponível em: $< http : //people.virginia.edu/\ mve2x/7752_Spring2010/lecture25.pdf >$.

[15] *26. Direct and Inverse Limits*. Disponível em: $< http : //people.virginia.edu/\ mve2x/7752_Spring2010/lecture26.pdf >$.

Apêndice A

Cálculo para determinar h_η em E_r

Considere que $E_r = \mathbb{Q}[e_1, \cdots, e_{r+1}]$. Para encontrar os valores de h_n em função de $e_1, \cdots e_{r+1}$ utilizaremos a sua função geradora. Assim,

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}}.$$

Desenvolvendo a expressão acima, temos que

$$h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + \cdots = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}},$$

o que implica em

$$\begin{aligned} h_0 &= f(0) \\ h_1 &= f'(0) \\ h_2 &= \frac{f''(0)}{2!} \\ h_3 &= \frac{f'''(0)}{3!} \\ h_4 &= \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \\ h_5 &= \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde estamos considerando

$$f(t) = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}}.$$

Para derivar a expressão acima aconselho fazer o uso de algum programa computacional para derivadas, como por exemplo o "WolframAlfra", programa utilizado neste trabalho.

Apêndice B

Método alternativo para calcular $\psi(h_n)$

Uma maneira alternativa para determinar os $\psi(h_n)$ é por meio da função geradora de h_n. De fato, sabendo que

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \frac{1}{1 - e_1 t + \cdots + (-1)^{r+1} e_{r+1} t^{r+1}},$$

então

$$\sum_{n\geq 0} \psi(h_n) t^n = \frac{1}{1 - \psi(e_1) t + \cdots + (-1)^{r+1} \psi(e_{r+1}) t^{r+1}} \quad = \frac{1}{1 - a_1(P) t + \cdots + (-1)^{r+1} a_{r+1}(P) t^{r+1}}.$$

Assim, para encontrar os valores de $\psi(h_n)$ basta derivar a expressão acima, aplicar em zero e dividir por $n!$, ou seja, suponha que

$$F(t) = \frac{1}{1 - a_1(P) t + \cdots + (-1)^{r+1} a_{r+1}(P) t^{r+1}},$$

então

$$\begin{aligned}
\psi(h_1) &= F'(0) \\
\psi(h_2) &= \frac{F''(0)}{2!} \\
\psi(h_3) &= \frac{F'''(0)}{3!} \\
\psi(h_4) &= \frac{F^{(4)}(0)}{4!} \\
\psi(h_5) &= \frac{F^{(5)}(0)}{5!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$