

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA

Métodos de obtenção de geradores
para as potências simbólicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Thiago Dantas Santos

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237m Santos, Thiago Dantas.
Métodos de obtenção de geradores para as potências simbólicas / Thiago Dantas Santos ; orientador Zaqueu Alves Ramos. – São Cristóvão, SE, 2023.
80 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Anéis noetherianos. 2. Anéis (Álgebra). I. Ramos, Zaqueu Alves, orient. II. Título.

CDU 512.55



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Métodos de obtenção de geradores para as potências simbólicas

por

Thiago Dantas Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 ZAQUEU ALVES RAMOS
Data: 31/07/2023 12:49:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
 RICARDO BURITY CROCCIA MACEDO
Data: 31/07/2023 13:57:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
 CLETO BRASILEIRO MIRANDA NETO
Data: 31/07/2023 18:34:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Julho de 2023

Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos” – Av. Marcelo Déda Chagas, s/n - Rosa Elze –
Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887 CEP: 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe -
Brasil – E-mail: promat@academico.ufs.br

A minha mãe, ao meu orientador, e aos meus amigos matemáticos.

Agradecimentos

Aqueles que estudam matemática sabem o quão prazerosa ela se torna quando é debatida entre amigos e colegas, qualquer ocasião que seja. Além disso, diante de todas as suas dificuldades, todos aqueles que nos cercam são figuras importantes que têm sua colaboração. Dito isto, nenhum passo seria dado sem a participação daqueles que aos quais venho a agradecer.

A minha mãe Cleide, que permitiu que eu dedicasse esses últimos anos apenas à matemática, sem que eu precisasse me preocupar em trabalhar. Sem você eu seria mais um graduado sem perspectiva.

Ao meu orientador Zaqueu, que tomou a decisão de ser meu orientador de Iniciação Científica em 2019, e desde então sempre está disposto a me proporcionar oportunidades e caminhos para evoluir matematicamente, além de despertar o desejo pela álgebra comutativa, após assistir seus cursos.

Ao meu amigo André Dosea, que sempre esteve presente desde minhas primeiras leituras sobre álgebra, que está sempre presente nos meus estudos e reflexões, seja propondo problemas ou ajudando a resolvê-los.

A minha ex-professora e amiga Tatiana Andrade, que foi minha inspiração para me matricular no curso de matemática.

Aos professores Paulo Rabelo, Wilberclay, Adriano Veiga, Danilo Dias, e André Vinícius, do Departamento de Matemática, que em suas aulas motivavam-me para seguir carreira acadêmica e colaboraram no aumento da minha vontade em aprender matemática. Em particular os dois últimos, por serem pesquisadores de Geometria Algébrica e Álgebra Comutativa respectivamente.

Aos meus amigos e grandes matemáticos Aelson Sobral e Thyago Rosa, que dividiam uma sala e resolveram me convidar para juntar-se a eles. Estes estiveram sempre dispostos a me ensinar matemática, tirar dúvidas, dar sugestões e propondo debates.

Aos meus amigos João Medeiros, Ademilton Cabral, Liliane Martins, Ginaldo de Sá, Claudemir Alcântara e Natiele Costa, que tiveram participação fundamental em toda minha jornada, com seus conhecimentos matemáticos e conselhos.

A matemática Amalie Emmy Noether, a mãe da Álgebra Comutativa, que mesmo sendo mulher, judia e vivendo no período onde a ciência era totalmente restrita aos homens, foi capaz de fornecer grandes contribuições para tal área, e inspirar futuras gerações.

Aos matemáticos Ernest Kummer, David Hilbert, Wolfgang Krull, Emanuel Lasker e todos os outros algebristas. Sem eles, este trabalho não seria possível.

Aos demais que não foram citados, mas tiveram participação crucial em toda minha jornada.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

Resumo

Essa dissertação tem como objetivo realizar um estudo detalhado das potências simbólicas de ideais puros sobre anéis noetherianos, com ênfase na determinação de geradores para tal classe de ideais. Iniciamos apresentando o conceito, em paralelo com algumas propriedades e exemplos mais elementares. Veremos algumas aplicações famosas do uso dessa ferramenta poderosa, tais como o Teorema do Ideal Principal de Krull, e o Teorema de Zariski-Nagata. Por fim, estudaremos algumas classes de ideais como os ideais secantes e os ideais de arestas, e suas contribuições para a determinação de geradores para as potências simbólicas, bem como o fator de inversão de aplicações birracionais.

Palavras-chave: Anéis Noetherianos, Potências Simbólicas, Álgebra de Rees, Ideais Secantes, Ideais de Arestas

Abstract

This dissertation aims to carry out a detailed study of the symbolic powers of pure ideals over Noetherian rings, with emphasis on the determination of generators for such a class of ideals. We begin by presenting the concept, in parallel with some more elementary properties and examples. We will see some famous applications of using this powerful tool, such as Krull's Principal Ideal Theorem, and the Zariski-Nagata Theorem. Finally, we will study some classes of ideals such as secant ideals and edge ideals, and their contributions to the determination of generators for symbolic powers, as well as the inversion factor of birational maps.

Keywords: Noetherian Rings, Symbolic Powers, Rees Algebra, Secant Ideal, Edge Ideal

Conteúdo

1	Preliminares sobre potências simbólicas	15
1.1	Definição e Resultados Elementares	15
1.2	Potência simbólica em baixa dimensão	20
1.2.1	Dimensão 1	20
1.2.2	Dimensão 2	21
1.3	Aplicações clássicas das potências simbólicas	22
1.3.1	O Teorema do Ideal Principal de Krull	23
1.3.2	O Teorema de Zariski-Nagata	25
2	Álgebra de Rees Simbólica	30
2.1	Filtração	30
2.2	Equações de definição da álgebra de Rees	33
2.2.1	Generalidades	33
2.2.2	O papel das sizígias	34
2.3	Geração da álgebra de Rees	38
2.4	O 14º Problema de Hilbert	40
2.4.1	Normalidade e reduções de Ideais	41
2.4.2	O exemplo de Rees	43
3	Determinando geradores para as potências simbólicas	47
3.1	Variedades Secantes	47
3.2	Ideais Secantes	49
3.3	Ideais de Arestas	54
4	Mapas birracionais versus potências simbólicas	62
4.1	Um breve apanhado sobre mapas birracionais	62
4.1.1	O papel dos fatores de inversão	64

4.2	Mapas birracionais e álgebra de Rees	65
4.3	Teorema Principal	65
5	Apêndice	69
5.1	Álgebras Graduadas	69
5.2	Sistemas de Parâmetros e Sequências Regulares	70
5.3	Ideais Determinantais	72
5.4	Grafos simples e finitos	73

Introdução

Qualquer que seja o nível em que um estudante de álgebra comutativa se encontre, ele irá perceber que os ideais são objetos muito estudados nesta área, seja por temas como decomposição primária, altura, posto aritmético e profundidade. Como sabemos, tais conceitos não são recente, pois de acordo com [14], o conceito de ideal surgiu em busca de provar o *Último Teorema de Fermat*, quando Kummer e Dedekind realizavam pesquisas acerca deste tópico.

Fazendo parte do universo dos ideais, temos o conceito de potências simbólicas, que são objetos estudados por matemáticos contemporâneos. No entanto, este não é um conceito novo. Nesse contexto, [14] afirma que a primeira utilização famosa deste conceito como ferramenta, foi dada por Wolfgang Krull, em meados de 1920, enquanto tentava provar o conhecido resultado acerca de altura de ideais, o qual leva seu nome. Além disso, o foco desse trabalho, será o estudo das potências simbólicas sob um olhar da determinação de geradores, a partir de alguns métodos sistemáticos.

No Capítulo 1, iniciaremos apresentando a definição das potências simbólicas de ideais sem primos imersos, os quais são chamados de ideais puros. Demonstraremos algumas propriedades cruciais para resultados, e exemplos que surgirão durante todo esse trabalho. Além disso, veremos algumas classes de ideais onde ocorre a igualdade entre a potência ordinária e simbólica, e exemplos onde a igualdade não ocorre. Por conseguinte estudaremos o comportamento das potências simbólicas e ordinárias de ideais puros em anéis noetherianos de dimensão 1 e dimensão 2. Finalizaremos esse capítulo apresentando duas aplicações importantes das potências simbólicas para a álgebra comutativa: o Teorema do Ideal Principal de Krull, e o Teorema de Zariski-Nagata, além de exibirmos as principais consequências desses resultados.

No Capítulo 2 abordaremos o conceito de álgebra de Rees simbólica. Veremos a definição, e estudaremos a dimensão dessa álgebra. Em paralelo, veremos acerca da finitude da geração da álgebra de Rees simbólica, além de um curto estudo em linguagem contemporânea do contra-exemplo dado por David Rees (1918 - 2013) em [27] para o Problema de Zariski, que generalizava o 14º Problema de Hilbert.

No Capítulo 3, iniciaremos com a apresentação do conceito de variedades secantes, e provaremos um resultado provado por M. Catalano em [10], que relaciona os ideais de definição desse tipo de variedade com a sua potência simbólica. Tal resultado tem consequências profundas no estudo das curvas racionais. Posteriormente, trataremos do conceito de variedade secante sob um olhar algébrico: os ideais secantes. Tal tratamento é dado por

Sullivant em [32], que além de tratar algebricamente do problema, ainda o faz com menos hipóteses, e refina o resultado de Catalano. Tal refinamento tem consequências positivas na determinação de geradores para as potências simbólicas. Além disso, com esse novo conceito, em paralelo com os ideais de arestas, será possível estabelecer o seguinte fato: Se I for o ideal de aresta associado à um grafo simples e finito, então $I^{(2)} = I^2 + I^{\{2\}}$, onde $I^{\{2\}}$ denota o ideal secante de I .

No Capítulo 4, veremos que a partir de um estudo introdutório das aplicações birracionais, e munidos do conceito de fator de inversão de uma aplicação birracional, é possível estimar geradores de uma vasta quantidade de potências simbólicas, para um determinado tipo de ideais, além de determinar quando a álgebra de Rees simbólica é um anel Cohen-Macaulay.

Para compreensão desse trabalho, se faz necessário um conhecimento de Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica a um nível de mestrado.

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
$\text{Frac}(D)$	Corpo de frações do domínio D
$\text{Im}(\varphi)$	Imagem de um homomorfismo φ
$\text{Ker}(\varphi)$	Núcleo de um homomorfismo φ
I^n	n -ésima potência ordinária de um ideal I
$\mathcal{Z}(M)$	Conjunto dos divisores de zero de um A -módulo M
\sqrt{I}	Radical de um ideal I
(A, \mathfrak{m})	Anel local A com ideal maximal \mathfrak{m}
$l(M)$	Comprimento de um A -módulo M
$\text{ht}(I)$	Altura de um ideal I
$\dim(A)$	Dimensão de Krull do anel A
$\text{Spec}(A)$	Conjunto dos ideais primos de um anel A
$\text{Ass}_A(M)$	Conjunto dos primos associados de um A -módulo M
$\text{Supp}_A(M)$	Suporte de um A -módulo M
$\min_A(M)$	Elementos minimais de $\text{Ass}_A(M)$
A_P	Localização de A em $P \in \text{Spec}(A)$
Q_P	Extensão do ideal primo Q na localização A_P
\mathbb{A}_k^n	Espaço afim n -dimensional com respeito ao corpo k
\mathbb{P}_k^n	Espaço projetivo n -dimensional com respeito ao corpo k
$\mathcal{I}(X)$	Ideal de definição da variedade X
$\mathcal{V}(I)$	Variedade associada ao ideal I
\mathfrak{m}_p	Ideal maximal associado ao ponto $p \in \mathbb{A}_k^n$
$\text{in}_{\prec}(I)$	Ideal gerado pelos termos iniciais dos elementos de I , sob a ordenação monomial \prec
$M_{m \times n}(A)$	Conjunto das matrizes de ordem m por n com entradas em um anel A
$\text{adj}(U)$	Adjunta da matriz U
$I_t(U)$	Ideal gerado pelos menores de ordem t da matriz U

Convenções

- A sempre denotará um anel comutativo e com identidade $1 \neq 0$.
- Sempre que falarmos em uma decomposição primária estaremos subentendendo uma decomposição primária reduzida (ou seja, uma decomposição onde descartamos as componentes supérfluas e juntamos as componentes correspondentes a um mesmo primo associado em uma única componente).
- Subentenderemos que um ideal I de um anel A está contido propriamente em A .
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ representará o conjunto dos números naturais (consideraremos 0 sendo um número natural). Dito isso, ao escrevermos $n \geq 0$, será equivalente a dizermos que $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Preliminares sobre potências simbólicas

Neste primeiro capítulo, apresentaremos as *potências simbólicas*. Iniciaremos abordando a definição, alguns exemplos e propriedades básicas que serão utilizadas ao longo desse trabalho. Veremos também o comportamento dessa classe de ideais em anéis de baixa dimensão. Abordaremos situações em que as potências simbólicas coincidem com as potências ordinárias de um ideal, e quando não coincidem.

1.1 Definição e Resultados Elementares

Um ideal I de um anel A é chamado *puro* se A/I não possui primos associados imersos. São exemplos imediatos de ideais puros: os ideais radicais, os ideais primos bem como os ideais \mathfrak{m} -primários de um anel noetheriano A , com \mathfrak{m} sendo ideal maximal.

Nesse trabalho, o conceito de ideal puro será crucial, tendo em vista que a definição de potência simbólica que iremos tratar é para ideais desse tipo.

Definição 1.1.1. Sejam I um ideal puro de um anel noetheriano A , S o complementar em A do conjunto dos divisores de zero de A/I e n um inteiro positivo. A n -ésima *potência simbólica* de I , é o ideal $I^{(n)} := \iota^{-1}(S^{-1}I^n)$, onde $\iota : A \rightarrow S^{-1}A$ é o homomorfismo natural de anel de frações. Por convenção, $I^{(0)} = A$.

Em muitas situações, se faz mais prático olhar o conceito de potência simbólica através da seguinte igualdade:

Proposição 1.1.2. *Seja I um ideal puro de um anel noetheriano A . Então,*

$$I^{(n)} = \{a \in A; as \in I^n, \text{ para algum } s \in S\}$$

para qualquer $n \geq 1$.

Demonstração. Dado $a \in I^{(n)}$, $a/1 \in S^{-1}I^n$; donde $a/1 = b/u$, para algum $b \in I^n$ e $u \in S$. Mas isto nos diz que existe $t \in S$ tal que $(au - b)t = 0$; ou seja, $a(ut) \in I^n$. Logo, basta tomar $s = ut$, e a inclusão $I^{(n)} \subset \{a \in A; as \in I^n, \text{ para algum } s \in S\}$ fica provada. Inversamente, se existe $s \in S$ tal que $as \in I^n$, então $as - b = 0$, para algum $b \in I^n$, de modo que $a/1 = b/s$; ou seja, $a \in \iota^{-1}(S^{-1}I^n)$ e portanto $a \in I^{(n)}$. Assim, também temos $\{a \in A; as \in I^n, \text{ para algum } s \in S\} \subset I^{(n)}$, e isso conclui a demonstração. \square

Segue facilmente da Proposição 1.1.2 que se $I \subset A$ é um ideal puro de um anel A então

$$I^n \subset I^{(n)} \quad (1.1)$$

para qualquer $n \geq 1$.

Uma questão central na teoria das potências simbólicas é saber quando a inclusão (1.1) é uma igualdade. Uma forma de entender essa questão é através da comparação das decomposições primárias dos ideais I^n e $I^{(n)}$. Para entender como isso ocorre faremos uso do seguinte lema:

Lema 1.1.3. *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e N um submódulo P -primário de M . Se U é um subconjunto multiplicativo de A que não intersecta P , então $\iota^{-1}(U^{-1}N) = N$, onde $\iota : M \rightarrow U^{-1}M$ é o homomorfismo de anéis de frações.*

Demonstração. Ver [28, Theorem 16, Chapter IV, §10]. \square

A seguinte proposição nos explica precisamente como as decomposições primárias dos ideais I^n e $I^{(n)}$ impactam na igualdade entre eles.

Proposição 1.1.4. *Seja I um ideal puro de um anel noetheriano A . Suponha que*

$$I = Q(P_1) \cap \cdots \cap Q(P_r)$$

é a decomposição primária de I em componentes P_i -primárias $Q(P_i)$. Então:

(a) $\min(A/I^n) = \{P_1, \dots, P_r\}$.

(b) $I^{(n)}$ é a interseção das componentes mínimas da decomposição primária de I^n .

$$(c) \text{ Ass}(A/I^{(n)}) = \{P_1, \dots, P_r\}.$$

$$(d) I^{(n)} = I^n, \text{ se e somente se, } \text{Ass}(R/I^n) = \{P_1, \dots, P_r\}$$

Demonstração. (a) Obviamente, $I^n \subset I \subset P_i$ para cada $1 \leq i \leq r$. Agora, considere P um primo mínimo de I^n . Então, para cada $f \in I$ temos $f^n \in I^n \subset P$. Assim, como P é primo segue que $I \subset P$. Como I é ideal puro (em particular, I só possui primos mínimos), segue que $P_i \subset P$ para algum $1 \leq i \leq r$. Desse modo, como $I^n \subset P_i$ e P é primo mínimo de I^n segue que $P = P_i$ para algum $1 \leq i \leq r$. Logo, $\text{min}(A/I^n) \subset \{P_1, \dots, P_r\}$. Agora, mostraremos a inclusão contrária. Para isso, dado $1 \leq i \leq r$, considere Q sendo um ideal primo de A tal que $I^n \subset Q \subset P_i$. Como antes, temos $I \subset Q \subset P_i$. Como P_i é primo mínimo de I segue que $Q = P_i$. Portanto, $\{P_1, \dots, P_r\} \subset \text{Ass}(A/I^n)$ e, consequentemente, $\text{min}(A/I^n) = \{P_1, \dots, P_r\}$.

(b) Pelo item anterior sabemos que a decomposição primária de I^n é da forma

$$I^n = N(P_1) \cap \dots \cap N(P_r) \cap T$$

onde, para cada $1 \leq i \leq r$, $N(P_i)$ é a componente primária correspondente ao primo mínimo P_i de A/I^n e T é a interseção das componentes primárias correspondentes aos primos imersos de A/I^n . Pelo Lema da Esquiva (*Prime Avoidance*), S intersecta todos os primos imersos de I^n . Daí, $S^{-1}I^n = S^{-1}N(P_1) \cap \dots \cap S^{-1}N(P_r)$, de modo que

$$I^{(n)} = \iota^{-1}(S^{-1}I^n) = \iota^{-1}(S^{-1}N(P_1)) \cap \dots \cap \iota^{-1}(S^{-1}N(P_r)) = N(P_1) \cap \dots \cap N(P_r),$$

onde a segunda igualdade é consequência do fato geral de que pré-imagem de uma função comuta com interseção, e a terceira igualdade segue do Lema 1.1.3. A afirmação segue então dessas igualdades.

(c) Consequência imediata de (a) e (b).

(d) Também é consequência imediata de (a) e (b). □

Como consequência desse resultado, apresentamos nas duas proposições a seguir, exemplos de famílias de ideais puros onde a inclusão (1.1) é uma igualdade, qualquer que seja $n \geq 1$.

Proposição 1.1.5. *Se I é um ideal \mathfrak{m} -primário, em um anel noetheriano A , então $I^n = I^{(n)}$ qualquer que seja $n \geq 1$.*

Demonstração. Como I é \mathfrak{m} -primário, segue da Proposição 1.1.4 (a) que $\min(A/I^n) = \{\mathfrak{m}\}$. Mas como \mathfrak{m} é um ideal maximal, devemos ter $\min(A/I^n) = \text{Ass}(A/I^n)$, de modo que $I^n = I^{(n)}$, pelo item (d) dessa mesma Proposição. \square

A segunda situação onde ocorre a igualdade entre as potências ordinárias e simbólicas de um ideal, é quando tal ideal é gerado por uma sequência regular.

Caso o leitor não esteja familiarizado com a noção de sequência regular, ver Apêndice 5.2.

Proposição 1.1.6. *Seja I um ideal puro, gerado por uma sequência regular em um anel noetheriano A . então $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Digamos que I é gerado pela sequência regular a_1, \dots, a_r . Pelo Teorema 5.2.4, existe um isomorfismo

$$\bigoplus_{n \geq 0} (I^n/I^{n+1}) \simeq (A/I)[x_1, \dots, x_r].$$

Em particular, para cada $n \geq 0$, I^n/I^{n+1} é um A/I -módulo livre, e conseqüentemente $\text{Ass}(A/I) = \text{Ass}(I^n/I^{n+1})$. Por outro lado, sendo $0 \rightarrow I^n/I^{n+1} \rightarrow A/I^{n+1} \rightarrow A/I^n \rightarrow 0$ uma sequência exata, segue que $\text{Ass}(A/I^{n+1}) \subset \text{Ass}(I^n/I^{n+1}) \cup \text{Ass}(A/I^n)$. Por fim, basta utilizar indução sobre n , e o resultado seguirá pela Proposição 1.1.4 (c). \square

Agora vejamos algumas ocorrências onde a inclusão (1.1) é própria.

Exemplo 1.1.7. Sejam $A = k[x, y, z]$ e $I = (xy, xz, yz) \subset A$. A decomposição primária de I é $I = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$. Assim, $\text{Ass}(A/I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$. Em particular, um elemento em A que não é um divisor de zero modulo I é $x + y + z$. Observe que $(x + y + z)xyz = xy \cdot xz + xy \cdot yz + xz \cdot yz \in I^2$. Desse modo, pela Proposição 1.1.2, $xyz \in I^{(2)}$. Por outro lado, como I^2 é ideal homogêneo de A gerado em grau 4 temos que $xyz \notin I^2$. Portanto, I^2 está contido propriamente em $I^{(2)}$.

Exemplo 1.1.8. Sejam $X = (x_{ij})_{3 \times 3}$ uma matriz de indeterminadas sobre um corpo k , A o anel de polinômios $k[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 3]$ e I o ideal de A gerado pelos menores de ordem 2 da matriz X . Pelo Teorema 5.3.7, I é um ideal primo de A . Assim, $\text{Ass}(A/I) = \{I\}$. Em particular, cada variável x_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$) é regular módulo I . É sabido que $\text{adj}(X) \cdot X = \det X \cdot E$ (onde $\text{adj}(X)$ é a matriz adjunta de X e E é a matriz identidade

de ordem 3). Obtemos dessa igualdade que $\text{adj}(\text{adj}(X)) \cdot \text{adj}(X) = \det \text{adj}(X)E$. Assim, $\text{adj}(\text{adj}(X)) \cdot \text{adj}(X) \cdot X = \det \text{adj}(X)X$, ou seja,

$$\det X \cdot \text{adj}(\text{adj}(X)) = \det \text{adj}(X)X. \quad (1.2)$$

Mas, da fórmula $\text{adj}(X) \cdot X = \det X \cdot E$ também deduzimos que $\det \text{adj}(X) = (\det X)^2$. Substituindo esse valor de $\det \text{adj}(X)$ em (1.2) e efetuando os devidos cancelamentos obtemos

$$\text{adj}(\text{adj}(X)) = \det(X)X. \quad (1.3)$$

Observe que a entrada $(1, 1)$ da matriz $\text{adj}(\text{adj}(X))$ é uma expressão polinomial de grau 2 nas entradas de $\text{adj}(X)$, ou seja, é um elemento de I^2 . Essa observação juntamente com (1.3) nos fornece $x_{11} \det X \in I^2$. Como x_{11} é regular módulo I segue por (1.1.2) que $\det X \in I^{(2)}$. Por outro lado, como I^2 é ideal homogêneo de A gerado em grau 4 temos que $\det X \notin I^2$. Portanto, também temos nesse exemplo que I^2 está contido em $I^{(2)}$ propriamente.

A respeito da generalização desse exemplo temos a seguinte observação

Observação 1.1.9. Com argumentos análogos aos feitos no exemplo acima, é possível verificar que se $X = (x_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz genérica de ordem n e I é o ideal gerado pelos menores de ordem $n - 1$ de X , então a inclusão $I^{n-1} \subset I^{(n-1)}$ é própria. Isso decorre essencialmente do fato de que em geral

$$\text{adj}(\text{adj}(X)) = \det(X)^{n-2}X. \quad (1.4)$$

Caso o leitor não tenha familiaridade com ideais gerados por menores de uma matriz genérica, ver Apêndice 5.3.

Finalizamos essa seção mostrando exatamente como as potências simbólicas de um ideal e as potências simbólicas de suas componentes primárias estão relacionadas.

Proposição 1.1.10. *Sejam A um anel noetheriano e $I \subset A$ um ideal puro, tendo $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$ como decomposição primária, onde cada Q_i é P_i -primário. Então $I^{(n)} = Q_1^{(n)} \cap \dots \cap Q_r^{(n)}$.*

Demonstração. Suponha que a decomposição primária de I^n seja

$$I^n = \tilde{Q}_1 \cap \dots \cap \tilde{Q}_r \cap N,$$

com cada componente primária \tilde{Q}_i correspondendo aos primos mínimos P_i de A/I^n , se $1 \leq i \leq r$, e N sendo a interseção das componentes primárias correspondentes aos primos imersos de A/I^n .

Localizando I^n em $P_i \in \min(A/I^n)$, temos que $(I^n)_{P_i} = (\tilde{Q}_i)_{P_i}$. Por outro lado, sendo $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$, segue que

$$(I^n)_{P_i} = (I_{P_i})^n = (Q_{iP_i})^n = (Q_i^n)_{P_i},$$

de modo que $(\tilde{Q}_i)_{P_i} = (Q_i^n)_{P_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$; ou seja, $\tilde{Q}_i = Q_i^{(n)}$. E o resultado segue pela Proposição 1.1.4. \square

1.2 Potência simbólica em baixa dimensão

Seja I um ideal puro de anel noetheriano A . Como visto na Proposição 1.1.4 a igualdade $I^{(n)} = I^n$ é codificada na igualdade $\text{Ass}(A/I^n) = \text{Ass}(A/I)$. Assim, como a coleção dos ideais primos de um anel noetheriano de baixa dimensão pode ser determinada, há uma expectativa maior de que nesses anéis os ideais $I^{(n)}$ e I^n coincidam com uma certa frequência. Nesse capítulo veremos os fenômenos que podem acontecer em dimensão menor ou igual a dois.

1.2.1 Dimensão 1

Quando estamos em um anel de dimensão 1, nosso ambiente é bastante restrito e mais controlado. Dito isso, são necessárias poucas hipóteses para que tenhamos $I^{(n)} = I^n$. Veremos isso nos próximos resultados.

Proposição 1.2.1. *Sejam A um domínio noetheriano e I um ideal de A . Se $\dim(A) = 1$, então I é puro e vale $I^{(n)} = I^n$, para cada $n \geq 1$.*

Demonstração. Como A é domínio de dimensão 1, então um ideal primo de A ou é o ideal nulo ou um ideal maximal. Assim, $I = (0)$ ou $\text{Ass}(A/I)$ é formado apenas por ideais maximais. Em todo caso, $\text{Ass}(A/I) = \min(A/I)$, ou seja, I é puro. Em particular, $\text{Ass}(A/I^n) = \min(A/I^n) = \min(A/I) = \text{Ass}(A/I^{(n)})$. Logo, pela Proposição 1.1.4, $I^{(n)} = I^n$. \square

Nos próximos exemplos discutiremos a necessidade das hipóteses nesta proposição. Iniciamos discutindo a condição de A ser domínio.

Exemplo 1.2.2. Seja k um corpo e $A = k[x, y]/(xy)$. Temos que A é um anel de dimensão 1 que não é um domínio. Consideremos agora o ideal primo $P = (\bar{x}) \subset A$. Temos nesse caso que $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \in P^2$. Como $\bar{y} \in S = A \setminus P$, então $\bar{x} \in P^{(2)}$. Além disso, $\bar{x} \notin P^2$ pois P^2 é ideal homogêneo gerado em grau 2.

Agora discutiremos a condição da Proposição 1.2.1 referente a dimensão do anel A .

Exemplo 1.2.3 (Curva normal racional de \mathbb{P}^2). Seja k um corpo. Consideremos o anel de coordenadas homogêneas $A = k[x, y, z]/(xz - y^2)$ da curva normal racional de \mathbb{P}^2 , que por sua vez, é um domínio de dimensão 2. Considere o ideal $P = (\bar{x}, \bar{y}) \subset A$. Vamos mostrar que $P^2 \subsetneq P^{(2)}$. Inicialmente, perceba que tal ideal é primo, pois $A/P \simeq k[z]$. Além disso, como todo ideal primo é primário, temos que $\mathcal{Z}(A/P) = P$, de modo que $S = A \setminus P$. Daí, como $\bar{z} \notin P$, temos que $\bar{z} \in S$. Além disso, sendo $P^2 = (\bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2)$, e tendo em vista que $\bar{x}\bar{z} \in P^2$ (pois $\bar{x}\bar{z} = \bar{y}^2$), e que $\bar{z} \in S$, segue que $\bar{x} \in P^{(2)}$ pelo Proposição 1.1.2. Finalmente, como P^2 é ideal homogêneo gerado em grau 2 e \bar{x} tem grau 1 segue que $\bar{x} \notin P^2$.

1.2.2 Dimensão 2

Aumentando a dimensão do anel em uma unidade, novas hipóteses são necessárias para que a inclusão $I^n \subset I^{(n)}$ possa ser de fato uma igualdade. É o que veremos quando o anel tem dimensão 2.

Lema 1.2.4. *Sejam A um anel noetheriano que é um domínio de fatoração única, e P um ideal primo de A com $\text{ht}(P) = 1$. Então $P = (p)$, com $p \in A$ sendo irredutível.*

Demonstração. Como $\text{ht}(P) = 1$ e A é um domínio, então $P \neq 0$; donde existe $a \in P$ não nulo. Daí, sendo A um domínio de fatoração única, a pode ser escrito como um produto de elementos irredutíveis de A , de modo que um desses elementos deve pertencer a P , por esse ideal ser primo.

Denotando por $p \in A$ o elemento irredutível da fatoração de a descrito acima, temos que $0 \subsetneq (p) \subset P$, e conseqüentemente, $(p) = P$, já que $\text{ht}(P) = 1$. □

Proposição 1.2.5. *Sejam A um anel noetheriano que é domínio de fatoração única com $\dim A = 2m$ e $I \subset A$ um ideal puro. Então $I^n = I^{(n)}$.*

Demonstração. Se $I = (0)$ então o resultado é imediato. Assim, resta considerarmos os seguintes casos:

Caso 1. $\text{ht}(I) = 2$.

Nessa situação, os primos mínimos da decomposição primária de I têm altura igual à dois, e sendo $\dim(A) = 2$, tais ideais devem ser maximais, e conseqüentemente, I^n não terá primos imersos e portanto a n -ésima potência ordinária deverá coincidir com a n -ésima potência simbólica pela Proposição 1.1.4.

Caso 2. I é um ideal principal de altura 1.

Nesse caso, digamos que $I = (a)$. Suponhamos que $a = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ é a fatoração em irreduzíveis de a . temos pelo Lema anterior que $(a) = (p_1^{m_1}) \cap \cdots \cap (p_r^{m_r})$, com $p_1, \dots, p_r \in A$ sendo elementos irreduzíveis. Daí, sendo A um domínio de fatoração única, temos que

$$I = (p_1^{m_1}) \cap \cdots \cap (p_r^{m_r}) = (p_1^{m_1}) \cdots (p_r^{m_r}) = (p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}),$$

de modo que

$$I^n = (p_1^{m_1 n} \cdots p_r^{m_r n}) = (p_1^{m_1 n}) \cap \cdots \cap (p_r^{m_r n}).$$

Portanto $I^n = I^{(n)}$, pela Proposição 1.1.4 e pelo Lema anterior.

Caso 3. I é um ideal de altura 1 que não é principal.

Nesse caso, podemos escrever $I = (a)J$, onde $\text{ht}(J) = 2$. Daí teremos

$$I = [(f_1^{m_1}) \cap \cdots \cap (f_r^{m_r})] \cdot [Q_1 \cap \cdots \cap Q_s] = (f_1^{m_1}) \cap \cdots \cap (f_r^{m_r}) \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_s = (a) \cap J.$$

Dito isso, temos que $I^n = (a)^n \cap J^n$. No entanto, $(a)^n$ e J^n não possuem primos imersos pelos casos anteriores, e o mesmo valerá para I^n , já que tanto $\text{Ass}(A/(a)^n)$ quanto $\text{Ass}(A/J^n)$ contém $\text{Ass}(A/I^n)$. Conseqüentemente, $I^n = I^{(n)}$, pela Proposição 1.1.4 (d). \square

Observação 1.2.6. A hipótese do anel ser um domínio de fatoração única é crucial para que a veracidade da Proposição acima. Uma situação que justifica isso, é descrita no Exemplo 1.2.3.

1.3 Aplicações clássicas das potências simbólicas

Ao longo da curta história da álgebra comutativa, as potências simbólicas foram ferramentas cruciais para estabelecer alguns resultados que são pilares dessa área da matemática.

Nessa seção estudaremos duas aplicações importantes das potências simbólicas: o Teorema do Ideal Principal de Krull e o Teorema de Zariski-Nagata.

1.3.1 O Teorema do Ideal Principal de Krull

Uma das aplicações mais famosas de potências simbólicas, também é um dos resultados mais importantes da álgebra comutativa, o *Teorema do Ideal Principal de Krull*. Tal resultado recebe esse nome em homenagem ao matemático Wolfgang Krull (1899-1971). Neste Teorema é possível ver a importância das potências simbólicas, tendo em vista o impacto que tal resultado é para a álgebra comutativa e para a geometria algébrica.

Teorema 1.3.1 (Ideal Principal). *Sejam A um anel noetheriano, e $a \in A$ um elemento não invertível. Se $P \in \text{Spec}(A)$ é um primo mínimo de $I = (a)$, então $\text{ht}(P) \leq 1$.*

Demonstração. Se $a = 0$, então $\text{ht}(P) = 0$ e chegamos ao desejado. Vamos considerar então $a \neq 0$.

A demonstração será por contradição; ou seja, vamos supor que $\text{ht } P > 1$, e chegar a um absurdo. Com efeito, supondo que tal desigualdade ocorre, segue que existem $P_0, P_1 \in \text{Spec}(A)$ tais que $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P$ e $a \notin P_0, P_1$.

Passando ao quociente A/P_0 , temos a cadeia de ideais primos $0 \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq P/P_0$, com P/P_0 sendo primo mínimo de $(I + P_0)/P_0$. Dito isto, vamos reduzir ao caso em que A é um domínio, e que existe um ideal $Q \in \text{Spec}(A)$ tal que $0 \subsetneq Q \subsetneq P$ e $a \notin Q$.

Observe que ao localizarmos A em P , temos que P_P é primo mínimo de $(a/1)$ em A_P , com P_P sendo o único ideal maximal de A_P . Além disso, como $Q \subsetneq P$, a bijeção existente entre os ideais primos de A_P e os ideais primos de A que não intersectam $A \setminus P$ garante que $Q_P \in \text{Spec}(A_P)$ e mais, $0 \subsetneq Q_P \subsetneq P_P$, com $a/1 \notin Q_P$.

Por conseguinte, vamos considerar o caso em que A é um domínio local cujo único ideal maximal é P , e que existe $Q \in \text{Spec}(A)$ tal que $0 \subsetneq Q \subsetneq P$ e $a \notin Q$.

Passando ao quociente A/I , temos que $\text{ht } P/I = 0$, pois P é primo mínimo de I ; donde $\dim(A/I) = 0$, e portanto A/I é um anel artiniano. Consequentemente, a Proposição 2.1.1 nos permite construir a seguinte cadeia descendente de ideais em A/I :

$$\dots \subset \frac{Q^{(n)} + I}{I} \subset \dots \subset \frac{Q + I}{I}, \quad (1.5)$$

que por sua vez se estabiliza, por A/I ser artiniano; ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \geq n_0$, temos $(Q^{(n_0)} + I)/I = (Q^{(m)} + I)/I$.

O absurdo que pretendemos chegar é mostrar que $Q = 0$. Para isto, a estratégia a ser tomada é usar o *Lema de Nakayama* e o fato que estamos supondo A um domínio local.

Nosso primeiro movimento para isso, será provar que

$$Q^{(n_0)} = Q^{(n_0+1)} + IQ^{(n_0)}.$$

Com efeito, observe que a inclusão $Q^{(n_0+1)} + IQ^{(n_0)} \subset Q^{(n_0)}$ é imediata, pois $IQ^{(n_0)} \subset Q^{(n_0)}$, e $Q^{(n_0+1)} \subset Q^{(n_0)}$ pela Proposição 2.1.1. Para provarmos a inclusão inversa, considere $x \in Q^{(n_0)}$. Daí, como a cadeia 1.5 se estabiliza neste índice, existem $y \in Q^{(n_0+1)}$ e $b \in A$ tais que $\bar{x} = \bar{y} + \bar{ab}$; donde $(x - y) - ab \in I$, e portanto $x - y \in I$. Mas isto implica que existe $c \in A$ tal que $x - y = ac$; ou seja, $ac \in Q^{(n_0)}$. Oras, sendo $Q^{(n_0)}$ Q -primário, e como estamos supondo que $a \notin Q$, devemos ter $c \in Q^{(n_0)}$, e isto verifica a igualdade acima. Logo, pelo *Lema de Nakayama* temos que $Q^{(n_0)} = Q^{(n_0+1)} + IQ^{(n_0)}$ implica $Q^{(n_0)} = Q^{(n_0+1)}$.

Agora, observe que localizando $Q^{(n_0)}$ em $Q \in \text{Spec}(A)$, temos que $Q_Q^{(n_0)} = Q_Q^{(n_0+1)}$, e como $Q_Q^{(n)} = Q_Q^n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, temos que $Q_Q^{n_0} = Q_Q^{n_0+1}$, de modo que $Q_Q^{n_0} = Q_Q Q_Q^{n_0}$, e pelo *Lema de Nakayama*, $Q_Q^{n_0} = 0$. Mas desta última igualdade, temos que $Q_Q = 0$, pois A é um domínio por hipótese. Mas $Q_Q = 0$ implica $Q = 0$, que é uma contradição. Portanto $\text{ht}(P) \leq 1$. \square

Um dos fatos que faz da demonstração do Teorema do Ideal Principal de Krull elegante, é o uso de ferramentas clássicas da álgebra comutativa, como o Lema de Nakayama, o uso das potências simbólicas, e a equivalência existente entre os anéis noetherianos de dimensão zero com os anéis artinianos.

Exemplo 1.3.2. Agora, veremos as duas situações ocorrendo: igualdade e desigualdade. Aqui, k representará um corpo.

- (i) (Desigualdade) Considere $A = k[x]/(x^3)$ e $I = (x^2)/(x^3)$. Dado P um primo mínimo de I , temos que $P = (f)/(x^3)$, para algum ideal primo $(f) \subset k[x]$ contendo (x^3) . Vamos mostrar que $\text{ht}(P) = 0$. Para isto, suponha que existe $Q \in \text{Spec}(A)$ tal que $Q \subset P$; donde existe $(g) \subset k[x]$ ideal primo contendo (x^3) tal que $Q = (g)/(x^3)$ e $(g) \subset (f)$. Observe que $(g) \neq 0$, pois $x^3 \in (g)$. E sendo $k[x]$ um domínio de ideais principais, (g) é um ideal maximal, e portanto $(f) = (g)$; isto é, $P = Q$. Portanto $\text{ht}(P) = 0$.
- (ii) (Igualdade) Basta considerar $A = k[x]$ e $I = (x^2)$, pois se P for um primo mínimo de I , então $\text{ht}(P) = 1$.

Existe uma versão generalizada do Teorema do Ideal Principal de Krull, conhecido por *Teorema do Ideal Primo* ou *Teorema da Altura de Krull*. Apesar de não ser uma consequência imediata do Teorema 1.3.1, tal generalização tem o Teorema do Ideal Principal como ponto de partida para a demonstração.

Iremos omitir a demonstração desse resultado, por fim de brevidade. Contudo, ela é feita por indução sob a quantidade de geradores do ideal, e utilizando uma versão do Lema da Esquiva ao longo de uma cadeia de ideais primos. Para detalhes sobre esse fato, ver [30, Lemma 2.5.26].

Teorema 1.3.3. *Seja $I \subsetneq A$ um ideal gerado por n elementos. Então, qualquer que seja $P \in \text{Spec}(A)$ primo mínimo de I tem-se $\text{ht}(P) \leq n$.*

Demonstração. Ver [30, Theorem 2.5.27]. □

O Teorema 1.3.1 nos permite extrair informações sobre objetos geométricos. Uma delas é a quantidade mínima de geradores para um subconjunto algébrico afim em \mathbb{A}_k^n , na situação onde k é um corpo algebricamente fechado.

Exemplo 1.3.4. Sejam k um corpo algebricamente fechado, e $X \subset \mathbb{A}_k^n$ um subconjunto algébrico afim. Uma questão que pode ser levantada é sobre qual é a menor quantidade m de polinômios $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{I}(X)$ tal que $X = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_m)$. Como k é algebricamente fechado, então pelo teorema dos zeros de Hilbert isso é equivalente a encontrar a menor quantidade m de polinômios $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{I}(X)$ tal que

$$\mathcal{I}(X) = \sqrt{(f_1, \dots, f_m)}$$

Assim, pelo Teorema 1.3.1, temos:

$$\text{codim } X = \text{ht } \mathcal{I}(X) = \text{ht}(f_1, \dots, f_m) \leq m$$

Portanto, podemos concluir que a menor quantidade m de polinômios necessários para definir X é pelo menos a codimensão da variedade X . Variedades onde essa estimativa é uma igualdade são chamadas de *set-theoretically complete intersection*.

1.3.2 O Teorema de Zariski-Nagata

Aqui, nosso objetivo será estudar uma interpretação geométrica da potência simbólica, proposta inicialmente por Oscar Zariski (1899-1986) e Masayoshi Nagata (1927-2008). Para

atingirmos esse objetivo, se faz necessário estabelecer alguns conceitos, como o conceito de potência diferencial. Veremos que o ideal associado a essa definição, tem comportamento similar ao da potência simbólica na situação em que o ideal considerado é primo.

O estudo aqui realizado, tem [13] como referência.

Definição 1.3.5. Seja A uma k -álgebra. Dados $f \in A$ e $\delta \in \text{Hom}_k(A, A)$, o *comutador de f e δ* é o mapa $[f, \delta] \in \text{Hom}_k(A, A)$ dado por $[f, \delta](g) = \delta(fg) - g\delta(f)$.

Definição 1.3.6. Seja A uma k -álgebra finitamente gerada. Os *operadores diferenciais k -lineares em A* são definidos da seguinte maneira:

- (a) Os operadores diferenciais de ordem zero, são simplesmente os mapas em $\text{Hom}_k(A, A)$.
- (b) Para cada $r > 0$, dizemos que $\delta \in \text{Hom}_k(A, A)$ é um operador k -linear de ordem n , se para cada operador diferencial de ordem zero γ , o comutador $[\delta, \gamma]$ é um operador de ordem $r - 1$.

Observação 1.3.7. Para cada $r \geq 0$, conjunto dos operadores k -lineares de ordem r é denotado por $D_k^r(A)$, de modo que o conjunto dos operadores k -lineares em A é

$$D_k(A) = \bigcup_{r \geq 0} D_k^r(A).$$

Exemplo 1.3.8. Se k é um corpo de característica zero, um exemplo de operador diferencial de ordem r , é a i -ésima derivada parcial $\partial_i^{(r)} : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$.

A partir do conceito de operador diferencial k -linear, é possível definir o que vem a ser a potência diferencial de um ideal.

Definição 1.3.9. Sejam A uma k -álgebra finitamente gerada e $I \subset A$ um ideal. A *r -ésima potência diferencial k -linear de I* (ou simplesmente *r -ésima potência diferencial de I*), é

$$I^{(r)} = \{f \in A; \delta(f) \in I, \forall \delta \in D_k^{r-1}(A)\}.$$

Observação 1.3.10. Como $D_k^{r-1}(A) \subset D_k^r(A)$ para cada $r \in \mathbb{N}$, temos que $I^{(r+1)} \subset I^{(r)}$.

A seguir, algumas propriedades elementares sobre as potências diferenciais que são necessárias para provar o resultado central dessa seção.

Proposição 1.3.11. Sejam A uma k -álgebra finitamente gerada e I um ideal de A . Dado $r \geq 0$, são válidos os seguintes itens.

(a) $I^{(r)}$ é um ideal de A

(b) $I^r \subset I^{(r)}$.

Demonstração. (a) Dados $f, g \in I^{(r)}$, então $\delta(f), \delta(g) \in I$, para cada $\delta \in D_k^{r-1}(A)$. E como $\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g)$, temos que $\delta(f+g) \in I$, e portanto $f+g \in I^{(r)}$.

Agora, sejam $h \in A$ e $f \in I^{(r)}$; donde esta última pertinência implica que $\delta(f) \in I$, qualquer que seja $\delta \in D_k^{r-1}(A)$. E mais, $\delta \in D_k^{r-1}(A)$ fornece $[\delta, h] \in D_k^{r-2}$. Assim, como $I^{(r)} \subset I^{(r-1)}$, temos que $[\delta, h](f) \in I$. Logo $\delta(hf) = [\delta, h](f) + h\delta(f)$, de modo que $\delta(hf) \in I$, provando que $hf \in I^{(r)}$.

(b) A prova será por indução sobre r . Como os operadores de ordem zero são os homomorfismos em $\text{Hom}_k(A, A)$, segue que $I = I^{(1)}$. Por conseguinte, suponha $r \geq 1$ e que $I^r \subset I^{(r)}$. Como I^{r+1} é gerado pelos elementos da forma fg , com $f \in I$ e $g \in I^r$, basta mostrar que um tal gerador arbitrário de I^{r+1} pertence a $I^{(r+1)}$. Ou equivalentemente, que tenhamos $\delta(fg) \in I$, qualquer que seja $\delta \in D_k^r(A)$.

Como $\delta(fg) = [\delta, f](g) + f\delta(g)$, e $f \in I$, então $f\delta(g) \in I$. E mais, tendo $g \in I^{(r)}$ pela hipótese de indução, e $[\delta, f] \in D_k^{r-1}(A)$, temos que $[\delta, f](g) \in I$, e portanto $\delta(fg) \in I$, como queríamos. \square

No caso especial dos ideais primos, as potências diferenciais se comportam de maneira semelhante às potências simbólicas. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.12. *Sejam A uma k -álgebra finitamente gerada e $P \in \text{Spec}(A)$. Então $P^{(r)}$ é um ideal P -primário, para cada $r \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Mais uma vez, utilizaremos indução sobre r , sendo o caso $r = 0$ imediato, já que $P = P^{(1)}$. Suponha então que $P^{(r)}$ é P -primário para $r \geq 1$, e vamos mostrar que $P^{(r+1)}$ também o é.

Sejam $f, g \in R$ tais que $fg \in P^{(r+1)}$, com $g \notin P$. Como $fg \in P^{(r+1)}$, $\delta(fg) \in P$, qualquer que seja $\delta \in D_k^r(A)$, e sendo $P^{(r+1)} \subset P^{(r)}$, temos que $fg \in P^{(r)}$, de modo que a hipótese de indução implica que $f \in P^{(r)}$. Em particular, $[\delta, g](f) \in P$. Contudo, sendo $\delta(fg) = [\delta, g](f) + g\delta(f)$, o parágrafo anterior fornece $g\delta(f) \in P$, de modo que $\delta(f) \in P$, pois estamos supondo que $g \notin P$ e P é um ideal primo. Portanto $f \in P^{(r+1)}$, e o resultado se verifica. \square

Os dois últimos resultados já deixam claro que a r -ésima potência diferencial de um ideal I tem um comportamento semelhante às potências simbólicas, tanto por conter I , quanto a sua r -ésima potencia ordinária. No entanto, a relação é mais íntima do que o

esperado. É o que diz o Teorema central dessa seção. Tal resultado, é uma das inúmeras versões que aparecem nas literaturas. Uma versão mais geral encontra-se em [13].

Teorema 1.3.13. (Zariski-Nagata) *Sejam $A = k[x_1, \dots, x_n]$ com k sendo um corpo algebricamente fechado e de característica zero, e $I \subset A$ um ideal radical. Então $I^{(r)} = I^{(r)}$, para cada $r \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para provarmos o resultado, verificaremos primeiro que ele é válido para ideais maximais. Oras, se $\mathfrak{m} \subset A$ é um ideal maximal, $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^{(r)}$. Logo, basta mostrarmos que a r -ésima potência diferencial de \mathfrak{m} coincide com a r -ésima potência ordinária deste ideal. Como vimos na Proposição 1.3.11, $\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}^{(r)}$, restando provar a inclusão inversa, a qual faremos por contradição.

Como k é algebricamente fechado, vamos reduzir ao caso em que $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$, e suponha que existe $f \in \mathfrak{m}^{(r)} \setminus \mathfrak{m}^r$; donde f teria algum monômio da forma $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < r$, e coeficiente $a \neq 0$. Agora, fixemos tal monômio de modo que este seja minimal dentre os monômios que aparecem em f na ordenação lexicográfica graduada. Daí, aplicando o operador $\delta \in D_A^{r-1}$ dado por

$$\delta = \frac{1}{\alpha_1!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{\alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

ao polinômio f que estamos considerando, todos os termos serão anulados, exceto o termo $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, que será reduzido ao elemento a ; donde $\delta(f) \notin \mathfrak{m}^{(r)}$, o que é um absurdo. Logo a r -ésima potência diferencial coincide com a ordinária, e sendo \mathfrak{m} maximal, temos que $\mathfrak{m}^{(r)} = \mathfrak{m}^r$.

Agora provaremos que o resultado é verdadeiro para $P \in \text{Spec}(A)$. De fato, como $P^r \subset P^{(r)}$ pela Proposição 1.3.11, e sendo $P^{(r)}$ P -primário pela Proposição 1.3.12, temos que $P^{(r)} \subset P^r$, já que $P^{(r)}$ é o menor ideal P -primário que contém P^r .

Para provarmos a inclusão inversa, vamos utilizar localização em P , pois sendo P_P ideal maximal de A_P , $(P_P)^r$ é P_P -primário. Com efeito, da inclusão que acabamos de provar, segue que $(P^{(r)})_P \subset (P^r)_P$ em A_P ; donde $(P_P)^r \subset (P_P)^{(r)}$, e como provamos no caso anterior, vale a igualdade entre a potência ordinária e a potência diferencial para ideais maximais, logo $(P_P)^r = (P_P)^{(r)}$, e como $\text{Ass}_{A_P}(A_P/(P_P)^r) = \{P_P\}$, devemos ter em particular que $P^{(r)} \subset P^r$ e portanto a igualdade.

Finalmente, verifiquemos o caso geral. Com efeito, se $I = P_1 \cap \dots \cap P_\ell$ é a decompo-

sição primária de I , então pela Proposição 1.1.4, $I^{(r)} = P_1^{(r)} \cap \dots \cap P_\ell^{(r)}$. Portanto,

$$I^{(r)} = P_1^{(r)} \cap \dots \cap P_\ell^{(r)} = P_1^{(r)} \cap \dots \cap P_s^{(r)} = (P_1 \cap \dots \cap P_s)^{(r)} = I^{(r)}$$

□

O Teorema de Zariski-Nagata, nos permite realizar duas interpretações geométricas para as potências simbólicas. É o que veremos nos próximos resultados.

Corolário 1.3.14. *Seja $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ o ideal de definição de uma variedade afim X , então $I^{(r)} = \bigcap_{p \in X} \mathfrak{m}_p^r$.*

Demonstração. Como vimos na demonstração do Teorema 1.3.13, $I^{(r)} = I^{(r)}$, e como $I \subset \mathfrak{m}_p$, para cada $p \in X$, temos que $I^{(r)} \subset \mathfrak{m}_p^{(r)}$; ou seja, $I^{(r)} \subset \mathfrak{m}_p^r$, para cada $p \in X$. Logo $I^{(r)} \subset \bigcap_{p \in X} \mathfrak{m}_p^r$.

Dado f um polinômio na interseção do enunciado, então $f \in \mathfrak{m}_p^r$, para cada $p \in X$; donde $f \in \mathfrak{m}_p^{(r)}$. Daí, para cada $\delta \in D_k^{r-1}(k[x_1, \dots, x_n])$, tem-se $\delta(f) \in \mathfrak{m}_p$. E como isso vale para cada $p \in X$, e I é o ideal de todos os polinômios que se anulam em X , devemos ter $\delta(f) \in I$; ou seja, $f \in I^{(r)}$, e portanto $f \in I^{(r)}$, pelo Teorema 1.3.13. □

O Corolário acima nos diz que a r -ésima potência simbólica de um ideal, consiste nos polinômios que se anulam até ordem r ao longo da variedade associada a tal ideal. Em particular, caso em que o corpo tem característica zero, podemos enunciar uma versão de Zariski-Nagata via derivadas parciais.

Corolário 1.3.15. *Seja $A = k[x_1, \dots, x_n]$ com k sendo um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Dado $I \subset A$ um ideal radical, tem-se*

$$I^{(r)} = \{f \in A; \partial^{|\alpha|} f \in I, |\alpha| < r\}$$

onde $\partial^{|\alpha|} f$ denota derivada parcial de f de ordem $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Em um curso introdutório de geometria algébrica, vemos que na situação onde k é um corpo algebricamente fechado, o Nullstellensatz nos diz que $I = \bigcap_{p \in X} \mathfrak{p}_p$. Consequentemente, Corolário 1.3.14 então, pode ser visto como uma versão de ordem mais elevada do Nullstellensatz, já que ele nos diz que os polinômios que se anulam em ordem r na variedade desse ideal, são precisamente os polinômios da r -ésima potência simbólica desse ideal.

Capítulo 2

Álgebra de Rees Simbólica

2.1 Filtração

Uma família de ideais $\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n \geq 0}$ de um anel A é dita uma A -filtração, se

- (a) $I_0 = A$.
- (b) Se $r \leq s$, então $I_s \subset I_r$.
- (c) $I_m I_n \subset I_{m+n}$.

É de fácil verificação que a família $\{I^n\}_{n \geq 0}$, das potências ordinárias de um ideal I é uma filtração, a chamada *filtração I -ádica*. Veremos na próxima proposição que, de maneira semelhante, a família de todas as potências simbólicas também constitui uma filtração.

Proposição 2.1.1. *Seja A um anel noetheriano. Para cada ideal puro $I \subset A$, a família $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$ é uma A -filtração, a chamada filtração simbólica de I .*

Demonstração. Por convenção, $I^{(0)} = A$. Por outro lado, considere m, n inteiros positivos, tais que $m \geq n$. Dado $a \in I^{(m)}$ segue da Proposição 1.1.2 que $sa \in I^m$, para algum elemento A/I -regular $s \in A$. Como $I^m \subset I^n$ segue que $sa \in I^n$. Logo, usando a Proposição 1.1.2 mais uma vez temos $a \in I^{(n)}$. Consequentemente, $I^{(m)} \subset I^{(n)}$.

Finalmente, considere $a \in I^{(m)}$ e $b \in I^{(n)}$. Então, pela Proposição 1.1.2 temos $sa \in I^m$ e $tb \in I^n$ para certos elementos A/I -regulares $s, t \in A$. Em particular, $(st)ab \in I^{n+m}$. Mas, st é elemento A/I -regular pois é produto de elementos A/I -regulares. Assim, $ab \in I^{(m+n)}$. Desse modo, $I^{(m)} \cdot I^{(n)} \subset I^{(m+n)}$ e com isso concluímos a demonstração. \square

Dada uma filtração $\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n \geq 0}$, é de interesse entender o seu comportamento analítico, ou seja, saber como os ideais I_n se comportam para valores de n suficientemente grandes. Tipicamente, é importante compreender um limiar n_0 de tal modo que o conhecimento de informações dos ideais I_0, \dots, I_{n_0} impactem na compreensão dos ideais I_n para todo n . Por exemplo, se conhecemos um conjunto de geradores f_1, \dots, f_m de I sabemos que um conjunto de geradores de I^n será dado por todas as expressões da forma $f_1^{a_1} \cdots f_m^{a_m}$ tais que $a_1 + \cdots + a_m = n$.

A seguir apresentamos um ingrediente que é fundamental para essa questão de estudar o comportamento analítico de uma filtração.

Definição 2.1.2. Dada uma A -filtração $\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n \geq 0}$, a álgebra de Rees dessa filtração é a A -subálgebra de $A[t]$

$$\mathcal{R}_A(\mathfrak{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} I_n t^n.$$

Exemplo 2.1.3. No caso das filtrações I -ádica e simbólica, temos os seguintes objetos:

- (a) $\mathcal{R}_A(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n$, a chamada *álgebra de Rees de I*
- (b) $\mathcal{R}_A^s(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^{(n)} t^n$, a chamada *álgebra de Rees simbólica de I* .

Segundo [16], o conceito de álgebra de Rees simbólica apareceu implicitamente em meados da década de 50, em trabalhos publicados por D. Rees, O. Zariski, M. Nagata e outros. No entanto, essa classe de álgebras não adquiriu um nome até várias décadas depois. Até onde se sabe, a terminologia “álgebra de Rees simbólica” aparece pela primeira vez no artigo de Huneke [20] em 1982, enquanto V. Vasconcelos propõe em seu livro “*Arithmetic of blowup algebras*” a terminologia alternativa “álgebra de blow-up simbólico”.

Dada uma filtração $\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n \geq 0}$ em um anel A , temos outros exemplos de anéis que estão intimamente relacionados com a álgebra de Rees $\mathcal{R}(\mathfrak{F})$:

- *Anel graduado associado de \mathfrak{F}* : $\text{gr}_{\mathfrak{F}}(A) = \bigoplus I_n / I_{n+1}$.
- *Álgebra de Rees estendida de \mathfrak{F}* : $\mathcal{R}(\mathfrak{F})[t^{-1}]$.
- *Fibra especial de \mathfrak{F}* : $\mathcal{F}(\mathfrak{F}) = \bigoplus I_n / \mathfrak{m} I_n$ (quando A é anel local com ideal maximal \mathfrak{m} ou anel graduado standard com ideal maximal homogêneo \mathfrak{m}).

No caso em que a filtração é a I -ádica esses anéis serão chamadas simplesmente de: Anel graduado associado de I , álgebra de Rees estendida de I e fibra especial de I . Também

nesse caso usaremos, respectivamente, as seguintes notações para esses anéis: $\text{gr}_I(A)$, $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$ e $\mathcal{F}(I)$.

A dimensão da álgebra de Rees de um ideal I é conhecida e depende essencialmente da dimensão do anel A .

Teorema 2.1.4. *Seja $I \subset A$ um ideal. Então, $\dim \mathcal{R}_A(I) = \dim A + 1$, se existe $P \in \text{Spec}(A)$ tal que $\dim A/P = \dim A$ e $I \not\subset P$, ou $\dim \mathcal{R}_A(I) = \dim A$, caso contrário.*

Demonstração. Ver [19, Theorem 5.1.4]. □

Observe que se A é um domínio, então $P = (0)$ é um ideal primo de A tal que $\dim A = \dim A/P$. Assim, nessa situação temos automaticamente que se I é um ideal não nulo de A , então $\dim \mathcal{R}_A(I) = \dim A + 1$.

A dimensão do anel graduado associado $\text{gr}_I(A)$ também é conhecida. Mais precisamente,

$$\dim \text{gr}_I(A) = \dim A \quad (\text{ver [19, Proposition 5.1.6]}) \quad (2.1)$$

Uma dimensão intrigante é a da fibra especial $\mathcal{F}(I)$. Esta dimensão é chamada de *spread analítico* de I e denotada por $\ell(I)$. Em geral,

$$\ell(I) \leq \dim A, \quad (\text{ver [19, Proposition 5.1.6]}). \quad (2.2)$$

Se, em adição, o corpo residual A/\mathfrak{m} for infinito, pode ser provado que

$$\text{ht } I \leq \ell(I), \quad (\text{ver [19, Corollary 8.3.9]}) \quad (2.3)$$

Ainda no caso da filtração I -ádica, é importante registrar as seguintes relações entre os anéis $\mathcal{R}_A(I)$, $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$, $\text{gr}_I(A)$ e $\mathcal{F}(I)$:

$$\text{gr}_I(A) \simeq \mathcal{R}_A(I)/I\mathcal{R}_A(I) \simeq \mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]/t^{-1}\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}] \quad (2.4)$$

$$\mathcal{F}(I) \simeq \mathcal{R}_A(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(I) \simeq \text{gr}_I(A)/\mathfrak{m}\text{gr}_I(A) \quad (2.5)$$

Observação 2.1.5. Como t^{-1} é elemento homogêneo e $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$ -regular, segue do segundo isomorfismo em (2.4) que $\text{gr}_I(A)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$ é Cohen-Macaulay. Em [1, Theorem 5.1], é provado que se A é um anel Cohen-Macaulay e $\mathcal{R}_A(I)$ é Cohen-Macaulay então $\text{gr}_I(A)$ (respectivamente, $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$) é Cohen-Macaulay.

Sobre a dimensão da álgebra de Rees simbólica temos a seguinte proposição

Proposição 2.1.6. *Seja A um domínio e I um ideal puro de A . Então $\dim \mathcal{R}_A^s(I) = \dim A + 1$.*

Demonstração. Ver [4, Lemma 2.7]. □

2.2 Equações de definição da álgebra de Rees

2.2.1 Generalidades

Sejam I um ideal de um anel noetheriano A e $f_1, \dots, f_m \in I$ um conjunto de geradores de I . Como visto anteriormente, a álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ coincide com a A -subálgebra de $A[t]$ gerada por f_1t, \dots, f_mt . Sendo assim, temos o epimorfismo de A -álgebras graduadas

$$\pi : A[y_1, \dots, y_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_A(I), \quad y_i \mapsto f_it.$$

Chamamos o núcleo \mathcal{J} desse epimorfismo de *ideal de definição* da álgebra de Rees de I (com respeito ao conjunto de geradores f_1, \dots, f_m). Em particular, temos a seguinte apresentação para a álgebra de Rees de I :

$$\mathcal{R}_A(I) \simeq A[y_1, \dots, y_m] / \mathcal{J} \tag{2.6}$$

Determinar uma coleção de geradores para o ideal \mathcal{J} é um problema difícil e que motiva muita pesquisa em álgebra comutativa. A seguir, apresentamos um exemplo onde essa questão é relativamente fácil de entender.

Exemplo 2.2.1. Seja $A = k[x_1, \dots, x_m]$, e considere $I = (x_1, \dots, x_m)$. Observe que o ideal $P := I_2 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix}$ está contido no ideal de definição \mathcal{J} da álgebra de Rees de I . Como $\mathcal{R}_A(I)$ é subanel do domínio $A[t]$, então $\mathcal{R}_A(I)$ também é domínio. Desse modo, por (2.6), \mathcal{J} é ideal primo de $A[y_1, \dots, y_m]$. Usando o Teorema 2.1.4 obtemos que $\text{ht } \mathcal{J} = m - 1$. Por outro lado, de acordo com o Teorema 5.3.7, P é um ideal primo de altura $m - 2 + 1 = m - 1$. Sendo assim, $P \subset \mathcal{J}$ é uma inclusão de ideais primos de mesma altura; logo, $\mathcal{J} = P$.

Também podemos considerar o ideal de definição da álgebra de Rees estendida $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$.

Precisamente, este ideal é o núcleo do epimorfismo de A -álgebras

$$A[y_1, \dots, y_m, w] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_A(I)[t^{-1}], \quad y_i \mapsto f_i t, w \mapsto t^{-1}$$

O ideal de definição da álgebra de Rees estendida é determinado essencialmente pelo ideal de definição da álgebra de Rees como nos ensina a seguinte proposição

Proposição 2.2.2. *Considere as notações acima. Então, o ideal de definição da álgebra de Rees estendida de I é*

$$\mathcal{J}A[y_1, \dots, y_m, w] + (wy_i - f_i, 1 \leq i \leq m)$$

Demonstração. Ver [19, Proposition 5.5.7]. □

Em particular, temos:

Exemplo 2.2.3. Considere k um corpo e A o anel de polinômios $k[x_1, \dots, x_m]$. Seja $I = (x_1, \dots, x_m)$. Pelo Exemplo 2.2.1 e a Proposição acima, segue que o ideal de definição da álgebra de Rees estendida de I é:

$$I_2 \left(\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_m \\ y_1 & \cdots & y_m \end{array} \right) A[y_1, \dots, y_m, w] + (wy_i - x_i, 1 \leq i \leq m)$$

2.2.2 O papel das sizíguas

Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A . Suponhamos que f_1, \dots, f_m é um conjunto de geradores de M e que e_1, \dots, e_m são vetores de uma base do A -módulo livre A^m . Sabemos que existe um único homomorfismo sobrejetor de A -módulos $\phi : A^m \twoheadrightarrow M$ que envia e_i em f_i para cada $1 \leq i \leq m$. Precisamente, esse mapa envia cada elemento $a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$ de A^m no elemento $a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$ de M . O A -submódulo $Z_1 = \ker \phi$ de A^m é chamado de *módulo de sizíguas* de M com respeito ao conjunto de geradores f_1, \dots, f_m de M . Cada elemento do módulo de sizíguas é chamada de *sizígia* do módulo M . Em resumo, sizíguas são m -uplas $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ tais que

$$a_1 f_1 + \dots + a_m f_m = 0. \tag{2.7}$$

Digamos agora que Z_1 seja gerado por z_1, \dots, z_r . Como antes, podemos considerar o homomorfismo de A -módulos

$$\phi_1 : A^r \rightarrow Z_1$$

que envia o i -ésimo vetor da base canônica de A^r em \mathfrak{z}_i . Montamos assim a seguinte sequência exata de A -módulos

$$A^r \xrightarrow{\phi_1} A^m \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

Uma tal sequência exata é chamada de *apresentação livre* do A -módulo M . É imediato observar que a representação matricial de ϕ_1 com respeito as bases canônicas de A^r e A^m , é uma matriz de ordem $m \times r$ cuja i -ésima coluna é justamente a sizígia \mathfrak{z}_i posta em coluna. Denotaremos essa matriz por $[\phi_1]$ e a chamaremos de uma *matriz de sizígias* de M com respeito ao conjunto de geradores dado.

A seguir, apresentamos dois exemplos para ilustrar os conceitos acima

Exemplo 2.2.4. Sejam k um corpo e A o anel de polinômios $k[x, y, z]$. Considere $I = (x, y, z)$. Primeiro iremos calcular quem são os geradores do módulo de sizígias de I com respeito ao conjunto de geradores x, y, z . Observe que $\mathfrak{z}_1 = (0, -z, y)$, $\mathfrak{z}_2 = (z, 0, -x)$ e $\mathfrak{z}_3 = (-y, x, 0)$ são sizígias de I . Agora suponha $\mathfrak{z} = (a, b, c)$ uma sizígia arbitrária de I . Então,

$$ax + by + cz = 0.$$

Segue dessa igualdade que $ax \in (y, z)$. Como (y, z) é ideal primo e $x \notin (y, z)$ segue que $a \in (y, z)$; logo, $a = py + qz$ para certos $p, q \in A$ apropriados. Substituindo esse valor de a em $ax + by + cz = 0$ obtemos $(b + px)y = -(c + qx)z$. Dessa igualdade e da primalidade de y e z obtemos que $b = uz - px$ e $c = -uy - qx$ para um apropriado $u \in A$. Logo, $\mathfrak{z} = (py + qz, uz - px, -uy - qx) = -u\mathfrak{z}_1 + q\mathfrak{z}_2 - p\mathfrak{z}_3$. Desse modo, $Z_1 = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3)$. Diante disso, temos que a apresentação livre de $I = (x, y, z)$ é

$$A^3 \xrightarrow{\phi_1} A^3 \xrightarrow{\phi} I \rightarrow 0$$

e que uma matriz de sizígias é

$$[\phi_1] = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2.5. Sejam k um corpo e A o anel de polinômios $k[x, y, z]$. Considere o ideal $I = (yz, xz, xy) \subset A$. Podemos observar que $\mathfrak{z}_1 = (-x, y, 0)$ e $\mathfrak{z}_2 = (0, -y, z)$ são sizígias de I com respeito ao conjunto de geradores yz, xz, xy . Considere agora $\mathfrak{z} = (a, b, c) \in Z_1$.

Então, $ayz + bxz + cxy = 0$. Equivalentemente, $ayz = -x(bz + cy)$. Como x é elemento primo de A segue que $a = px$ para algum $p \in A$. Substituindo essa expressão de a na igualdade $ayz = -x(bz + cy)$ e efetuando os devidos cancelamentos obtemos $pyz = -bz - cy$. Por conseguinte, essa igualdade pode ser reescrita como $bz = -y(pz + c)$. Agora, dessa igualdade e da primalidade de y em A segue que $b = qy$ para algum $q \in A$. Substituindo essa expressão de b em $bz = -y(pz + c)$ e efetuando cancelamentos obtemos $qz = -pz - c$, ou seja, $c = -(q + p)z$. Assim, $\mathfrak{z} = (a, b, c) = (px, qy, -(q + p)z) = -p\mathfrak{z}_1 - q\mathfrak{z}_2$. Logo, $Z_1 = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$. Portanto, uma apresentação livre do ideal $I = (yz, xz, xy)$ é

$$A^2 \xrightarrow{\phi_1} A^3 \xrightarrow{\phi} I \rightarrow 0$$

e uma matriz de sizígias de I é

$$[\phi_1] = \begin{pmatrix} -x & 0 \\ y & -y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Apresentamos agora a relação entre o conceito de sizígias e o ideal de definição da álgebra de Rees de um ideal I de um anel A . Digamos que $\mathfrak{z} = (a_1, \dots, a_m)$ seja uma sizígia de I com respeito a um conjunto de geradores f_1, \dots, f_m . Então,

$$a_1 f_1 t + \dots + a_m f_m t = (a_1 f_1 + \dots + a_m f_m) t = 0 \cdot t = 0.$$

Logo, $a_1 y_1 + \dots + a_m y_m$ é um elemento do ideal de definição \mathcal{J} da álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$. Portanto, temos a inclusão

$$I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) \subset \mathcal{J} \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{y} = [y_1 \ \dots \ y_m]$. Essa inclusão nos mostra que alguns geradores do ideal de definição da álgebra de Rees de um ideal I podem ser obtidos através de uma matriz de sizígias de I . De fato, existem ideais I onde essa inclusão já é uma igualdade. Ideais onde isso ocorre são chamados de *ideais de tipo linear*.

Exemplo 2.2.6. Consideremos o ideal do Exemplo 2.2.4. De acordo com o que vimos nesse exemplo,

$$\mathbf{y} \cdot [\phi_1] = (y_1 \ y_2 \ y_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = (y_3 y - y_2 z \quad y_1 z - y_3 x \quad y_2 x - y_1 y)$$

Assim,

$$I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) = (y_3y - y_2z, y_1z - y_3x, y_2x - y_1y) = I_2 \begin{pmatrix} x & y & z \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Dessa igualdade e do Exemplo 2.2.4 concluímos que $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) = \mathcal{J}$; logo, $I = (x, y, z)$ é ideal de tipo linear.

Exemplo 2.2.7. Consideremos agora o ideal do Exemplo 2.2.5. De acordo com o que foi visto, temos

$$\mathbf{y} \cdot [\phi_1] = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 0 \\ y & -y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1x + y_2y & -y_2y + y_3z \end{pmatrix}$$

Assim, $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) = (y_2y - y_1x, y_3z - y_2y)$. Mostraremos que nesse caso a inclusão $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) \subset \mathcal{J}$ também é uma igualdade. Observemos que \mathcal{J} é ideal primo, pois $\mathcal{R}_A(I) \simeq A[y_1, y_2, y_3]/\mathcal{J}$ é domínio, e

$$\text{ht } \mathcal{J} = \dim A[y_1, y_2, y_3] - \dim \mathcal{R}_A(I) = (\dim A + 3) - (\dim A + 1) = 2.$$

Também notemos que $y_2y - y_1x$ é elemento primo de $A[y_1, y_2, y_3] = k[x, y, z, y_1, y_2, y_3]$ (por exemplo, usando o critério de Eisenstein). Logo, o ideal principal $(y_2y - y_1x)$ é primo. Como $y_3z - y_2y$ não pertence ao ideal $(y_2y - y_1x)$, (por razão de grau na variável z) segue que $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) = (y_2y - y_1x, y_3z - y_2y)$ deve ter altura ≥ 2 . Por outro lado, pelo Teorema do Ideal Principal de Krull, segue que $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1])$ tem altura exatamente 2. Assim, $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) \subset \mathcal{J}$ é uma inclusão de ideais de mesma altura. Desse modo, para concluir a igualdade basta mostrar que $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1])$ é ideal primo. Mas isso segue do isomorfismo

$$A[y_1, y_2, y_3]/I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) \simeq T[y]/(y_3z - y_2y)T[y],$$

onde $T = k[x, z, y_1, y_2, y_3]/(y_2y - y_1x)$, e do fato que y_2 é T -regular. Observe ainda nesse exemplo que $\mathcal{R}(I)$ é Cohen-Macaulay, pois é o quociente do anel de polinômios $k[x, y, z, y_1, y_2, y_3]$ pela sequência regular $y_2y - y_1x, y_3z - y_2y$.

A seguinte observação será útil para o estudo da álgebra de Rees simbólica do ideal $I = (yz, xz, xy) \subset k[x, y, z]$.

Observação 2.2.8. Como a álgebra de Rees do ideal $I = (yz, xz, xy)$ é Cohen-Macaulay então, pela Observação 2.1.5 a álgebra de Rees estendida $\mathcal{R}_A(I)[t^{-1}]$ é Cohen-Macaulay também. Além disso, segue da Proposição 2.2.2 que o ideal de apresentação da álgebra de Rees estendida de I é

$$(y_2y - y_1x, y_3z - y_2y, wy_1 - yz, wy_2 - xz, wy_3 - xy)$$

Um exemplo de ideal que não é de tipo linear é dado a seguir

Exemplo 2.2.9. Seja A o anel de polinômios $k[x, y]$ sobre um corpo k . Considere $I = (x^2, xy, y^2)$. É possível mostrar que nesse caso

$$[\phi_1] = \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

Assim que $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) = (y_1y - y_2x, y_2y - y_3x)$. Por outro lado, $y_1y_3 - y_2^2$ é um elemento de \mathcal{J} que não pertence a $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1])$. Isso nos mostra que nesse caso a inclusão $I_1(\mathbf{y} \cdot [\phi_1]) \subset \mathcal{J}$ é própria; em particular, $I = (x^2, xy, y^2)$ não é ideal de tipo linear.

2.3 Geração da álgebra de Rees

Se A é um anel (não necessariamente noetheriano), e I é um ideal de A que é finitamente gerado, então $\mathcal{R}_A(I)$ é uma A -álgebra finitamente gerada. Esse fenômeno pode não ocorrer no caso da álgebra de Rees simbólica $\mathcal{R}_A^s(I)$ como veremos mais adiante.

Uma roteiro efetivo para abordar a finitude da geração da álgebra de Rees simbólica, consiste em

- (A) Encontrar uma sequência de números inteiros $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r$ onde possamos calcular elementos $\Delta_i \in I^{(d_i)}$.
- (B) Investigar se a inclusão $A[It, \Delta_1 t^{d_1}, \dots, \Delta_r t^{d_r}] \subset \mathcal{R}_A^s(I)$ é uma igualdade.

Discutiremos a seguir ferramentas para poder lidar com o item (B).

Definição 2.3.1. Sejam J um ideal em um domínio noetheriano A , e K o corpo de frações de A . O ideal transform de J é

$$T_J(A) = \{x \in K \mid xJ^u \subset A, \text{ para algum inteiro positivo } u\}.$$

É de fácil verificação que $T_J(A)$ é um subanel de K .

Proposição 2.3.2. *Seja A um domínio noetheriano e J um ideal de A . Se T é o ideal transform de J , C é um anel noetheriano tal que $A \subset C \subset T$ e $\text{depth}(JC) \geq 2$, então $C = T$.*

Demonstração. Ver [34, Proposition 7.1.4] □

Um aplicação desse resultado no contexto da álgebra de Rees simbólica é

Proposição 2.3.3. *Sejam $A = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo k e I um ideal puro de A . Suponhamos que:*

- (a) *Para cada $r \geq 1$, $I^{(r)}/I^r = 0$ ou $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) = \{(x_1, \dots, x_n)\}$.*
- (b) *Para $C = A[It, \Delta_1 t^{d_1}, \dots, \Delta_r t^{d_r}]$ e $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$, $\text{depth}(\mathfrak{m}C) \geq 2$*

Então $\mathcal{R}_A^s(I) = A[It, \Delta_1 t^{d_1}, \dots, \Delta_r t^{d_r}]$.

Demonstração. Denotemos $R := \mathcal{R}_A(I)$ e $J := \mathfrak{m}\mathcal{R}_A(I)$. A condição (a) implica que para cada $y \in \mathcal{R}_A^s(I)$ existe um inteiro positivo u tal que $yJ^u \subset R$. Logo, $\mathcal{R}_A^s(I)$ está contido em $T_R(J)$. Como $R \subset C \subset \mathcal{R}_A^s(I) \subset T_R(J)$ segue do item (b) juntamente com a Proposição 2.3.2 que $\mathcal{R}_A^s(I) = A[It, \Delta_1 t^{d_1}, \dots, \Delta_r t^{d_r}]$. □

Vejamos agora uma aplicação desse resultado:

Proposição 2.3.4. *Sejam k um corpo e A o anel de polinômios $k[x, y, z]$. Então a álgebra de Rees simbólica do ideal $I = (yz, xz, xy)$ é finitamente gerada.*

Demonstração. Do Exemplo 1.1.7, sabemos que $\Delta = xyz$ é um elemento do quadrado simbólico do ideal I . De forma precisa, mostraremos que $\mathcal{R}_A^s(I) = A[It, \Delta t^2]$. Para isso, mostraremos que as hipóteses da Proposição 2.3.3 são satisfeitas.

AFIRMAÇÃO 1. *Para cada $r \geq 1$, $I^{(r)}/I^r = 0$ ou $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) = \{(x, y, z)\}$.*

Dado $r \geq 1$, suponha que $I^{(r)}/I^r \neq 0$. Devemos então provar que $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) = \{(x, y, z)\}$.

Como $I^{(r)}/I^r$ é A -submódulo de A/I^r , então $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) \subset \text{Ass}(A/I^r)$.

Pela Proposição 1.1.4 e o fato de que $I^{(r)}/I^r \neq 0$ segue que $\text{Ass}(A/I^r)$ possui primos associados imersos de altura 3. Mas, como I^r é homogêneo segue que tal primo associado imerso é necessariamente (x, y, z) . Sendo assim,

$$\text{Ass}(A/I^r) = \{(x, y), (x, z), (y, z), (x, y, z)\}.$$

Observe também pela Proposição 1.1.4(b) que $I^{(r)}/I^r$ localizado nos ideais primos (x, y) , (x, z) e (y, z) é zero. Assim, (x, y) , (x, z) e (y, z) não são primos associados de $I^{(r)}/I^r$. Consequentemente, $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) = \{(x, y, z)\}$.

AFIRMAÇÃO 2. Para $C = A[It, \Delta t^2]$ e $\mathfrak{m} = (x, y, z)$, $\text{depth}(\mathfrak{m}C) = 2$.

Considere o seguinte epimorfismo de k -álgebras

$$\zeta : A[y_1, y_2, y_3] = k[x, y, z, y_1, y_2, y_3, w] \rightarrow C = k[x, y, z, yzt, xyt, xzt, xyz t^2]$$

tal que $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $z \mapsto z$, $y_1 \mapsto yzt$, $y_2 \mapsto xzt$, $y_3 \mapsto xy$ e $w \mapsto xyz t^2$. Em particular, $\ker \zeta$ é um ideal primo de altura $7 - \dim C = 7 - 4 = 3$.

Por substituição podemos ver que o ideal

$$\mathcal{K} := (y_1 y - y_2 x, y_2 y - y_3 x, wx - y_2 y_3, wy - y_1 y_3, wz - y_1 y_2)$$

está contido em $\ker \zeta$.

Pela Observação 2.2.8

$$k[x, y, z, y_1, y_2, y_3, w]/\mathcal{K} \simeq \mathcal{R}_{A'}(I')[t^{-1}]$$

onde $A' = k[y_1, y_2, y_3]$ e $I' = (y_2 y_3, y_1 y_3, y_1 y_2)$. Assim, \mathcal{K} é um ideal primo de altura $7 - \dim \mathcal{R}_{A'}(I')[t^{-1}] = 3$ Portanto, $\ker \zeta = \mathcal{K}$.

Também pela Observação 2.2.8, $C \simeq A[y_1, y_2, y_3]/\mathcal{K}$ é Cohen-Macaulay. Assim,

$$\begin{aligned} \text{depth}(\mathfrak{m}C) &= \text{ht}(\mathfrak{m}, \mathcal{K})/\mathcal{K} \\ &= \text{ht}(x, y, z, y_2 y_3, y_1 y_3, y_1 y_2)/\mathcal{K} \\ &= \dim C - \dim \frac{k[x, y, z, y_1, y_2, y_3, w]}{(x, y, z, y_2 y_3, y_1 y_3, y_1 y_2)} \quad (\text{pois } C \text{ é Cohen-Macaulay}) \\ &= 4 - \dim \frac{k[y_1, y_2, y_3, w]}{(y_2 y_3, y_1 y_3, y_1 y_2)} \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

□

2.4 O 14º Problema de Hilbert

Uma outra aplicação famosa e importante das potências simbólicas na álgebra comutativa, é [27], um artigo publicado por D. Rees que se relaciona com o 14º Problema de Hilbert,

que é um dos 23 problemas apresentados em 1900 por tal matemático, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris.

14º Problema de Hilbert. *Sejam k um corpo, e a_1, \dots, a_n elementos algebricamente independentes sobre k . Se K é um subcorpo de $k(a_1, \dots, a_n)$ contendo k e é finitamente gerado como k -álgebra, então $k[a_1, \dots, a_n] \cap K$ é finitamente gerado sobre k ?*

Em 1930, Oscar Zariski propõe uma generalização para o 14º Problema de Hilbert, que fora enunciado da seguinte maneira:

Problema de Zariski. *Seja $k[a_1, \dots, a_n]$ um domínio normal afim. Se K é um subcorpo de $k(a_1, \dots, a_n)$ contendo k e é finitamente gerado como k -álgebra, então a k -álgebra $k[a_1, \dots, a_n] \cap K$ é finitamente gerada?*

Uma vez verificada a veracidade do Problema de Zariski, isso culminaria em particular na veracidade do 14º Problema de Hilbert. Em [27], Rees exibiu um contra-exemplo para o Problema de Zariski utilizando a teoria das potências simbólicas. Por fim, ele mostra, utilizando a álgebra que ficara posteriormente conhecida por *Álgebra de Rees Simbólica*, sob quais condições o Problema de Zariski é verdadeiro.

Veremos em uma linguagem mais contemporânea do que a utilizada por Rees como isso ocorre. Mas antes, vejamos alguns conceitos preliminares essenciais para chegarmos a esse feito.

2.4.1 Normalidade e reduções de Ideais

Iniciaremos definindo e exemplificando a noção de anel normal.

Definição 2.4.1. Um anel A é dito *normal*, se ele for integralmente fechado sobre seu anel total de frações.

Agora vejamos um exemplo elementar de anel normal.

Exemplo 2.4.2. Todo domínio de fatoração única D , é normal. De fato, dados $f, g \in D$ tais que $\text{mdc}(f, g) = 1$, considere a seguinte equação de dependência integral:

$$(f/g)^n + a_{n-1}(f/g)^{n-1} + \dots + a_1(f/g) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a equação acima por g^n , obtemos $f^n = -g(a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_0g^n)$, implicando que $g \mid f^n$. E isso prova que D é um domínio normal.

A seguir, temos um critério que nos será útil para determinarmos se um dado anel é normal.

Teorema 2.4.3 (Caracterização de Serre). *Para que um anel A seja normal, é necessário e suficiente que*

- (a) A_P seja um anel regular, qualquer que seja $P \in \text{Spec}(A)$ com $\text{ht}(P) \leq 1$
- (b) P_P contenha uma sequência regular de comprimento maior ou igual ao $\min\{2, \text{ht}(P)\}$, qualquer que seja $P \in \text{Spec}(A)$.

Demonstração. Ver [19, Theorem 4.5.3]. □

A noção de normalidade também pode ser estabelecida entre ideais. É o que veremos a seguir.

Definição 2.4.4. Um elemento $a \in A$ é dito integral sobre um ideal $I \subset A$, se existe $n > 0$ tal que $a^n + b_1 a^{n-1} + \cdots + b_{n-1} a + b_n = 0$, com $b_r \in I^r$ ($1 \leq r \leq n$). Tal expressão é chamada *equação de dependência integral de a sobre I* .

Observação 2.4.5. Dado $I \subset A$ um ideal, temos as seguintes terminologias:

- (a) $\bar{I} = \{a \in A; a \text{ é integral sobre } I\}$ é um ideal, o chamado *fecho integral de I* .
- (b) I é dito *integralmente fechado*, se $I = \bar{I}$.
- (c) Um ideal $J \subset A$ é dito *integral sobre I* , se $J \subset \bar{I}$.
- (d) I é dito *ideal normal* se $I^n = \bar{I}^n$, qualquer que seja $n > 0$.

Proposição 2.4.6. *Todo ideal principal não nulo de um domínio normal é integralmente fechado.*

Demonstração. Sejam A um domínio normal, e $I = (a)$ com $a \in A$ não nulo. Assim, dado $b \in \bar{I}$, existem $u_1, \dots, u_n \in A$ tais que

$$b^n + (u_1 a) b^{n-1} + (u_2 a^2) b^{n-2} + \cdots + (u_{n-1} a^{n-1}) b + u_n a^n = 0,$$

de modo que $(b/a)^n + u_1 (b/a)^{n-1} + \cdots + u_{n-1} (b/a) + u_n = 0$. Daí, $b/a \in A$, por ser um domínio normal por hipótese. Consequentemente, existe $c \in A$ tal que $b = ac$, e isso prova o resultado. □

Definição 2.4.7. Sejam I e J ideais de um anel A . Dizemos que J é uma *redução* de I se $J \subset I$, e existe $n > 0$ tal que $JI^n = I^{n+1}$.

Proposição 2.4.8. Sejam I e J ideais de um anel A .

(a) Se J é uma redução de I , então $I^{n+1} \subset J$. Em particular, $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

(b) J é uma redução de I se, e somente se, $I \subset \bar{J}$.

Demonstração. Ver [19, Corollary 1.2.5]. □

Associado a redução de um ideal, é possível estabelecer alguns invariantes. É o que veremos nas próximas duas definições.

Definição 2.4.9. Uma redução J de I é dita *minimal*, se não existe redução de I que esteja contida propriamente em J . Além disso, o número de redução de J em I , é o menor $n > 0$ tal que $JI^n = I^{n+1}$, e o denotamos por $\text{red}_J(I)$.

Definição 2.4.10. Seja J uma redução minimal de I . O *número de redução de I* , é o número $\text{red}(I) = \min\{\text{red}_J(I); J \text{ é redução minimal de } I\}$.

O resultado a seguir, estabelece uma conexão entre número mínimo de geradores da redução minimal de um ideal e o spread analítico desse ideal. Mais precisamente temos

Lema 2.4.11. *Seja I um ideal de um anel (A, \mathfrak{m}) . Então qualquer redução de I contém uma redução minimal de I . Além disso, se A/\mathfrak{m} é um corpo infinito, então o número mínimo de geradores de cada redução minimal de I coincide com $\ell(I)$.*

Demonstração. Ver [19, Proposition 8.3.7]. □

2.4.2 O exemplo de Rees

O próximo resultado, fornece uma condição necessária para a finitude da álgebra de Rees simbólica.

Proposição 2.4.12. *Seja P um ideal primo em um anel noetheriano (A, \mathfrak{m}) . Se $\mathcal{R}_A^s(P)$ é noetheriana, então existe $m > 0$ tal que $(P^{(m)})^n = P^{(mn)}$.*

Demonstração. Se considerarmos o ideal $I = \bigoplus_{n \geq 0} P^{(n)}t^n$ de $\mathcal{R}_A^s(P)$, temos que $I = (f_1t^{r_1}, \dots, f_st^{r_s})$, com $f_i \in P^{(r_i)}$, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, já que a álgebra de Rees simbólica de P é noetheriana por hipótese.

Definindo $r = \text{mmc}\{r_1, \dots, r_s\}$, e $m = rs$, vamos mostrar que $P^{(mn)} \subset (P^{(m)})^n$. Com efeito, note que para cada $j > 0$, um elemento típico de $P^{(j)}$ é uma combinação A -linear de monômios da forma $f_1^{u_1} \cdots f_s^{u_s}$, onde $u_1 r_1 + \cdots + u_s r_s = j$.

Se $j \geq m$, então existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $u_i r_i \geq r$, de modo que ao considerarmos $v = r/r_i$, teremos $f_1^{u_1} \cdots f_s^{u_s} = (f_1^{u_1} \cdots f_i^{u_i-v} \cdots f_s^{u_s}) f_i^v$. E como

$$u_1 r_1 + \cdots + (u_i - v) r_i + \cdots + u_s r_s = j - r,$$

temos que $f_1^{u_1} \cdots f_i^{u_i-v} \cdots f_s^{u_s} \in P^{(j-r)}$, e $f_i^v \in P^{(r)}$, já que $r_i v = r$. Logo $P^{(j)} \subset P^{(j-r)} P^{(r)}$, para cada $j \geq m$. Daí, para cada $\ell > 0$, temos que $P^{(m+r\ell)} \subset P^{(m)} P^{(r\ell)}$. Por conseguinte, fazendo $\ell = s$, vale $P^{(2m)} \subset (P^{(m)})^2$, enquanto para $\ell = s(n-1)$, temos indutivamente que $P^{(mn)} \subset (P^{(m)})^n$. A inclusão inversa é imediata. \square

Agora podemos enunciar e provar o resultado principal dessa subseção. Ele fornece uma condição suficiente para que a álgebra de Rees simbólica de um ideal primo não seja finitamente gerada.

Teorema 2.4.13. *Sejam P um ideal primo em um domínio normal noetheriano (A, \mathfrak{m}) , com $\dim(A) = 2$. Se $\text{ht}(P) = 1$, e nenhuma potência simbólica de P é principal, então $\mathcal{R}_A^s(P)$ não é finitamente gerada sobre A .*

Demonstração. Suponha por contradição que $\mathcal{R}_A^s(P)$ é finitamente gerada. Então segue da Proposição 2.4.12 que existe $m > 0$ tal que $P^{(mn)} \subset (P^{(m)})^n$. Definindo $I = P^{(m)}$, segue do Teorema 2.1.4 que $\dim \mathcal{R}_A(I) = 3$.

Considere $x, y \in A$ um sistema de parâmetros de A , e vamos mostrar que para cada $s > 0$, $J_s = P^{(s)}$ contém uma sequência regular de comprimento 2. Com efeito, iniciemos a sequência com x , e considere J_s/xJ_s . Se não for possível tomar um segundo termo, então $\mathfrak{m} \in \text{Ass}_A(J_s/xJ_s)$, de modo que existe $a \in J_s \setminus xJ_s$ tal que $am \subset xJ_s$; donde $ya \in (x)$, e sendo $\{y, x\}$ também uma sequência regular em A , segue que $a = xb$, para algum $b \in A \setminus J_s$. Consequentemente, $xbm \subset xJ_s$, de modo que $bm \subset J_s$. Contudo, os elementos de $\mathfrak{m} \setminus J_s$ são regulares módulo J_s , implicando que $b \in J_s$, o que é um absurdo. Portanto, cada sistema de parâmetros em A é uma sequência regular sob cada J_s , provando que tal ideal é um A -módulo Cohen-Macaulay.

Pelo que foi verificado acima, como estamos supondo que $\mathcal{R}_A^s(P)$ for finitamente gerada, x, y é uma sequência regular sobre cada J_s ; donde essa também o é em $\mathcal{R}_A(I)$. Assim, $\dim \mathcal{R}_A(I)/(x, y) = 1$, já que também temos que $\sqrt{(x, y)} = \mathfrak{m}$. Mas isso implica que $\ell(I) = 1$. Daí, o Lema 2.4.11 implica que I contém uma redução J que é um ideal

principal. Dessa forma, segue da Proposição 2.4.8 que $J \subset I \subset \bar{J}$. Mas como vimos, os ideais principais são integralmente fechados em domínios normais, provando que I é um ideal principal. No entanto isso contradiz a hipótese do Teorema. \square

Em [16, Proposition 3.1], é possível ver condições suficientes e necessárias para que $R_A^s(I)$ seja finitamente gerada.

Um outro conceito necessário para o estudo feito nessa seção é o Critério Jacobiano. Mas para compreendê-lo é preciso saber o que é o ideal jacobiano (Ver [14, Section 16.6] para mais detalhes).

Definição 2.4.14. Seja $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal tal que $k[x_1, \dots, x_n]/I$ é uma k -álgebra finitamente gerada. O ideal jacobiano de I é $(\mathcal{J}(I) + I)/I$, onde $\mathcal{J}(I) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ denota o ideal gerado pelos menores de ordem $\text{ht}(I)$ da matriz jacobiana de I .

Lema 2.4.15. (Critério Jacobiano) *Suponha k algebricamente fechado. Se $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal tal que $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ é uma k -álgebra finitamente gerada. Se I é tal que $\text{ht}(I) = \text{ht}(P)$ para cada $P \in \text{Ass}(A)$, então $\text{Sing}(A) = \mathcal{V}((\mathcal{J} + I)/I)$, onde $\text{Sing}(A)$ denota o conjunto dos ideais primos de A cujas localizações não são anéis regulares.*

Demonstração. Ver [14, Corollary 16.20]. \square

Teorema 2.4.16. *Seja X uma curva elíptica sobre \mathbb{C} . Então, como grupo abstrato, X é isomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Em particular, para cada n , o subgrupo de pontos de ordem n é isomorfo a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.*

Demonstração. Ver [17, Theorem 4.16] \square

Finalizadas as preliminares, vejamos um exemplo que ilustra os princípios usados por David Rees em [27].

Exemplo 2.4.17. (Rees) Seja $A = \mathbb{C}[x, y, z]$, e considere $f = x^3 + y^3 + z^3 \in A$. Como $f = x^3 + (y + z)(y^2 - yz + z^2)$, temos que f é irredutível pelo Critério de Eisenstein.

Sendo f um elemento A -regular, temos que $A/(f)$ é um anel Cohen-Macaulay. Daí, para cada $P \in \text{Spec}(A/(f))$, P_P contém uma sequência regular cujo comprimento é maior ou igual à $\min\{2, \text{ht}(P)\}$.

Denotando $I = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) = (x^2, y^2, z^2)$, segue que o ideal jacobiano $I/(f)$ tem altura 2 em $A/(f)$; donde $A/(f)$ é localmente regular nos primos de $A/(f)$ que possuem altura menor ou igual à 1, pelo Critério Jacobiano. Consequentemente, $A/(f)$ é um domínio normal, pelo Teorema 2.4.3.

Seja $X = \mathcal{V}(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Pelo Teorema 2.4.16, $k[X]$ contém um ideal primo P de altura 1, cuja ordem no grupo de classes de divisores é infinito.

Se existisse $r > 0$ tal que a r -ésima potência simbólica de P fosse um ideal principal, digamos $P^{(r)} = (g, f)/(f)$, então $Y = \mathcal{V}(g)$ intersectaria X apenas no ponto determinado por P , tendo r como multiplicidade (ver [27, página 146]). Como consequência, rP seria um divisor principal (mais precisamente, teríamos $rP = \text{div}(f)$). Mas isso implicaria que a ordem de P no grupo de classes de divisores seria finita, contradizendo o que foi dito no parágrafo anterior.

Observação 2.4.18. Para detalhes sobre os argumentos no exemplo acima, envolvendo grupo de classe de divisores, ver [17], Seção 6, Cap II e Seção 4, Cap IV; [9], Cap 3 ; [22], páginas 165-169.

Apesar da demonstração dada por D. Rees em [27] não ter sido escrita na linguagem das potências simbólicas, ela consiste em mostrar que se P é um ideal primo de altura 1 sobre uma curva elíptica cuja ordem no grupo de classes de divisores é infinita, então a álgebra de Rees simbólica não é finitamente gerada.

A primeira resposta definitiva para o problema de Hilbert foi dada por Masayoshi Nagata em 1958, utilizando uma extensão K de k com grau de transcendência igual à 13. Um ano depois, o mesmo apresentou outro contra-exemplo, agora mais refinado, onde K tem grau de transcendência igual à 4. Para mais detalhes, ver [24] e [25], respectivamente.

Capítulo 3

Determinando geradores para as potências simbólicas

Um problema tipicamente difícil em álgebra comutativa é determinar geradores para ideais obtidos a partir de operações. E esse mesmo problema se repete quando se lida com potências simbólicas.

Veremos que sob o olhar das *variedades secantes*, é possível estabelecer uma espécie de "cota inferior" de geradores para potências simbólicas mediante inclusão. Uma consequência importante desse feito é estudada por Catalano em [10], determinando condições suficientes para que uma curva em \mathbb{P}_k^n seja normal racional.

Posteriormente, sob uma ótica algébrica, a noção de *ideal secante* nos permitirá demonstrar uma versão generalizada do resultado de Catalano, dada por Sullivant em [32], o qual fornece um melhor refinamento para inclusão citada acima. Nesse caso, as implicações aqui obtidas girarão em torno do próprio conceito de potência simbólica, em busca da determinação de geradores para essa classe de ideais. Ademais, em posse do conceito de ideais de arestas e munidos do estudo feito anteriormente acerca dos ideais secantes, veremos caracterizações que nos permitirão determinar geradores para potência simbólica desse tipo particular de ideais.

Nesse capítulo, consideraremos k um corpo algebricamente fechado.

3.1 Variedades Secantes

Iniciaremos realizando um estudo das potências simbólicas através do ideal de definição das variedades secantes.

Definição 3.1.1. Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}_k^n$ variedades irredutíveis. O *join* de X e Y , denotado por $X * Y$ é o fecho (de Zariski) da união dos subespaços gerados por pontos de X e de Y . Em notação,

$$X * Y = \overline{\bigcup_{x \in X, y \in Y} \langle x, y \rangle}.$$

Em particular, quando $X = Y$, o join $X * X$, denotado por $X^{\{2\}}$, é chamado *variedade secante* de X . E isso nos permite definir indutivamente o conceito de r -ésima variedade secante.

Definição 3.1.2. Seja $X \subset \mathbb{P}_k^n$ uma variedade irredutível. A r -ésima variedade secante de X , denotada por $X^{\{r\}}$, é o join $X^{\{r-1\}} * X$.

Veamos agora o principal resultado dessa abordagem geométrica inicial.

Teorema 3.1.3. (Catalano) *Seja k um corpo de característica zero. Se $X \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ é uma variedade irredutível e não-degenerada (não contida em um hiperplano), então*

$$\mathcal{I}(X^{\{r\}}) \subset \mathcal{I}(X)^{(r)}.$$

Demonstração. Como X não é uma variedade degenerada, podemos reduzir ao caso em que X é uma variedade irredutível de \mathbb{A}_k^n , de modo que dado $p \in X$, podemos garantir a existência de um conjunto \mathcal{F} de \mathbb{A}_k^n , com n vetores linearmente independentes contendo p . E mais, vamos supor que tais pontos linearmente independentes são vetores da base canônica.

Agora, considere $f \in \mathcal{I}(X^{\{r\}})$ um polinômio não nulo. Nosso objetivo será mostrar que todas as derivadas parciais de ordem $r - 1$ de f se anulam em X . Mais precisamente, mostraremos que isso ocorre no ponto p mencionado inicialmente, já que ele foi tomado arbitrariamente.

Claramente, $\mathcal{I}(X^{\{r\}}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{F}^{\{r\}})$. Além disso, como \mathcal{F} contém todos os subespaços lineares gerados por p e por quaisquer $r - 1$ pontos de $\mathcal{F} \setminus \{p\}$, temos que $\mathcal{I}(\mathcal{F}^{\{r\}}) \subset \bigcap_{\lambda \in L} I_\lambda$, onde L é a família dos subconjuntos das variáveis x_1, \dots, x_n contendo $r - 1$ elementos, e I_λ é o ideal gerado pelas variáveis que não estão em λ .

Como cada I_λ é um ideal monomial, então sendo $f \in \bigcap_{\lambda \in L} I_\lambda$, segue que os termos monomiais de f também estão em tal interseção. Dito isso, seja $\tilde{f} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ um desses monômios. Observe que se $\deg(\tilde{f}) < r$, então existem pelo menos $r - 1$ variáveis distintas que dividem \tilde{f} . Assim, denotando por $\tilde{\lambda} \in L$ contendo tais variáveis, temos que $\tilde{f} \notin I_{\tilde{\lambda}}$; donde f não pode ter monômios de grau menor do que r . Consequentemente, todas as

derivadas de f com ordem menor do que r devem se anular em p , e portanto $f \in \mathcal{I}(X)^{(r)}$, pelo Corolário 1.3.15. \square

Em [10], é possível observar que o Teorema 3.1.3 tem um impacto importantes no estudo das curvas racionais, como pode ser observado nessa referência.

3.2 Ideais Secantes

Agora veremos a discussão da seção anterior sob um olhar algébrico, a qual iniciaremos definindo o join entre dois ideais. Isso nos permitirá provar uma versão algébrica do Teorema 3.1.3, a fim de estudar uma versão mais refinada desse resultado, conhecida como *Generalização de Sullivant para o Teorema de Catalano*, provada por Seth Sullivant, em [32].

Definição 3.2.1. Dados $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$, o *join* de I e J é a contração

$$I * J = (I(y_1, \dots, y_n) + J(z_1, \dots, z_n) + (x_i - y_i - z_i; i = 1, \dots, n)) \cap k[x_1, \dots, x_n],$$

onde $I(y_1, \dots, y_n)$ e $J(z_1, \dots, z_n)$ são os ideais I e J com a mudança de variáveis $x_i \mapsto y_i$ e $x_j \mapsto z_j$, respectivamente.

Observação 3.2.2. Se I e J são ideais radicais e homogêneos de $k[x_1, \dots, x_n]$, então

$$\mathcal{V}(I) * \mathcal{V}(J) = \overline{\bigcup_{x \in \mathcal{V}(I), y \in \mathcal{V}(J)} \langle x, y \rangle}.$$

Nesse contexto, como $\mathcal{V}(I), \mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I * J)$, segue que $I * J \subset I \cap J$.

Quando $I = J$, escrevemos $I * I = I^{\{2\}}$. Tal ideal é chamado *ideal secante* de I . Análogo a definição de r -ésima variedade secante na seção anterior, temos o conceito de ideal secante, via join entre ideais.

Definição 3.2.3. Dado $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal, o r -ésimo ideal secante de I , denotado por $I^{\{r\}}$, é o join $I^{\{r-1\}} * I$.

Segue da Definição acima e da Observação 3.2.2 que para cada $r > 0$, tem-se $I^{\{r\}} \subset I^{\{r-1\}}$.

Vejam agora um exemplo elementar de ideal secante.

Exemplo 3.2.4. Seja k um corpo algebricamente fechado, e de característica zero. Se $I = (x^r)$ e $J = (x^s)$, então $I * J = (x^{r+s-1})$ em $k[x]$. Em particular, $I^{\{r\}} = (x^{rs-1})$.

De fato, observe que a inclusão $I * J \subset (x^{r+s-1})$ segue da Observação 3.2.2. Por outro lado, observe que utilizando a expansão binomial, temos que

$$x^{r+s-1} = ((y+z) + (x-y-z))^{r+s-1} = (y+z)^{r+s-1} + h,$$

onde $h \in (x-y-z)$. Utilizando a expansão binomial em $(y+z)^{r+s-1}$, podemos concluir que $x^{r+s-1} = fy^r + gz^s + h$, onde f, g são monômios envolvendo y e z . Portanto, a igualdade segue, pela Definição 3.2.1.

Proposição 3.2.5. *Seja I um ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$.*

- (a) *Se I é radical, então o mesmo vale para $I^{\{r\}}$.*
- (b) *Se I é homogêneo, então $I^{\{r\}}$ também o é.*

Demonstração. Ver [31, Proposition 1.2]. □

Vejam algumas propriedades básicas dos joins. A primeira nos fornece um critério para que um dado elemento em $k[x_1, \dots, x_n]$ esteja no join de dois ideais.

Teorema 3.2.6. *Sejam $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ideais, e $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Para termos $f \in I * J$, é necessário e suficiente que se tenha*

$$f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \in I(y_1, \dots, y_n) + J(z_1, \dots, z_n).$$

Demonstração. Se $f \in I * J$, então $f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \in I(y_1, \dots, y_n) + J(z_1, \dots, z_n)$, pela Definição 3.2.1.

Inversamente, considere $f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \in I(y_1, \dots, y_n) + J(z_1, \dots, z_n)$. Mais precisamente,

$$f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) = \sum_{\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)} b_{\mathbf{a}}(y_1 + z_1)^{a_1} \cdots (y_n + z_n)^{a_n}.$$

Vamos mostrar que $f = f(x_1, \dots, x_n) \in I * J$. Para isto, observe que

$$f = \sum_{\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)} b_{\mathbf{a}}x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = \sum_{\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)} b_{\mathbf{a}} \left(\prod_{i=1}^n ((x_i - y_i - z_i) + (y_i + z_i))^{a_i} \right).$$

Daí, utilizando a expansão binomial, podemos escrever, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$((x_i - y_i - z_i) + (y_i + z_i))^{a_i} = f_i + (y_i + z_i)^{a_i},$$

onde cada f_i é múltiplo de $x_i - y_i - z_i$; donde, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos $f_i \in (x_i - y_i - z_i)$. Portanto f é a contração em $k[x_1, \dots, x_n]$ do polinômio

$$\sum_{\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)} b_{\mathbf{a}}(y_1 + z_1)^{a_1} \cdots (y_n + z_n)^{a_n} + g,$$

com $g \in (x_i - y_i - z_i; i = 1, \dots, n)$, provando que $f(x_1, \dots, x_n) \in I * J$, pela Definição 3.2.1. \square

Outra propriedade fundamental e bastante útil sobre os joins, é com respeito ao seu bom comportamento com interseções:

Proposição 3.2.7. *Seja $\{J_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de ideais de $k[x_1, \dots, x_n]$. Se I é um ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$ então*

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} J_\lambda \right) * I = \bigcap_{\lambda \in L} (J_\lambda * I).$$

Demonstração. Denotemos $J = \bigcap_{\lambda \in L} J_\lambda$. Assim, dado $f \in J * I$, é equivalente a termos $\tilde{f} = f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \in J(y_1, \dots, y_n) + I(z_1, \dots, z_n)$, pelo Teorema 3.2.6. Mas isto ocorre se, e somente se, tivermos $\tilde{f} \in J_\lambda(y_1, \dots, y_n) + I(z_1, \dots, z_n)$, para cada $\lambda \in L$; ou seja, se e somente se, valer $\tilde{f} \in \bigcap_{\lambda \in L} (J_\lambda(y_1, \dots, y_n) + I(z_1, \dots, z_n))$. \square

Observação 3.2.8. Até o fim dessa seção, k denotará um corpo algebricamente fechado, e \mathfrak{m} representará o ideal maximal (x_1, \dots, x_n) de $k[x_1, \dots, x_n]$.

A partir do conceito do join entre ideais, é possível estabelecer uma versão algébrica do Teorema de Catalano, dada por Sullivant em [32]. No entanto, para chegarmos a tal feito, são necessários alguns resultados técnicos acerca dos ideais secantes.

Lema 3.2.9. *Seja $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal radical homogêneo tal que $I \subset \mathfrak{m}^2$. Então $I^{\{r\}} \subset \mathfrak{m}^{r+1}$, para cada $r > 0$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre r . O caso $r = 1$ segue da hipótese do Lema, já que $I^{\{1\}} = I$.

Suponha que o resultado vale para $r > 1$, e considere $f \in I^{\{r\}}$ tal que $\deg(f) \leq r$. Como $I^{\{r\}} \subset I^{\{r+1\}}$, podemos supor que $\deg(f) = r$. Além disso, pelo Teorema 3.2.6,

$$f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \in I^{\{r-1\}}(y_1, \dots, y_n) + I(z_1, \dots, z_n),$$

e daí, podemos supor também que f não é potência de algum outro polinômio, pois $I^{\{r\}}$ é um ideal radical.

Agora considere $g = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ um monômio qualquer que aparece em f . Fazendo a mudança de variáveis $x_i \mapsto y_i + z_i$, obtemos a expansão

$$(y_1 + z_1)^{a_1} \cdots (y_n + z_n)^{a_n} = \sum_{\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}} \left(\prod_{i=1}^n \binom{a_i}{b_i} y_i^{b_i} z_i^{c_i} \right),$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$.

Se considerarmos o caso em que \mathbf{c} é uma n -upla do tipo e_i (i -ésimo vetor da base canônica), teremos produzido o termo

$$\binom{a_1}{a_1} y_1^{a_1} z_1^0 \binom{a_2}{a_2} y_2^{a_2} z_2^0 \cdots \binom{a_i}{a_i - 1} y_1^{a_i-1} z_i^1 \cdots \binom{a_n}{a_n} y_1^{a_n} z_n^0,$$

que é o termo $a_i z_i h$, onde $h = y_1^{a_1} \cdots y_{i-1}^{a_{i-1}} y_i^{a_i-1} y_{i+1}^{a_{i+1}} \cdots y_n^{a_n}$. Contudo, sendo $\deg(h) = r - 1$, segue da hipótese de indução que $a_i z_i h$ não pode aparecer em nenhum polinômio de $I^{\{r-1\}}(y_1, \dots, y_n) + I(z_1, \dots, z_n)$, de modo que o coeficiente de $a_i z_i h$ em f é zero.

Se k for um corpo de característica zero, o resultado segue. Suponhamos então que k tem característica prima p . Assim, $f \in k[x_1^p, \dots, x_n^p]$, e sendo k um corpo algebricamente fechado, devemos ter

$$f = \sum_{\mathbf{a}} b_{\mathbf{a}} x_1^{pa_1} \cdots x_n^{pa_n} = \sum_{\mathbf{a}} (b_{\mathbf{a}} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n})^p = \left(\sum_{\mathbf{a}} b_{\mathbf{a}} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \right)^p,$$

ou seja, f é potência de um polinômio, contradizendo o que supomos inicialmente, e isso prova o resultado. \square

O lema a seguir, garante um bom comportamento entre o join de dois ideais, e o ideal gerado pelos seus termos iniciais, fixada uma ordenação monomial. Mais precisamente,

Lema 3.2.10. *Dada uma ordenação monomial $\tilde{<}$, vale $\text{in}_{\tilde{<}}(I * J) \subset \text{in}_{\tilde{<}}(I) * \text{in}_{\tilde{<}}(J)$. Em outras palavras, o join do ideal inicial contém o inicial do join.*

Demonstração. Ver [33, Theorem 4.1]. □

Proposição 3.2.11. *Dado $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}_k^n$, então $\mathfrak{m}_p^r \subset \mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r$.*

Demonstração. Considerando $f = \prod_{i=1}^n (x_i - p_i)^{a_i} \in \mathfrak{m}_p^r$, temos que

$$f = \prod_{i=1}^n ((x_i - y_i - z_i) + (y_i - p_i) + z_i)^{a_i} = \prod_{i=1}^n (f_i - z_i)^{a_i}$$

onde $f_i \in \mathfrak{m}_p(y_1, \dots, y_n) + (x_i - y_i - z_i)$, ($1 \leq i \leq n$); donde $f = g + z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$, com $g \in \mathfrak{m}_p(y_1, \dots, y_n) + (x_i - y_i - z_i; i = 1, \dots, n)$, e portanto $f \in \mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r$. □

O Teorema abaixo é o primeiro passo entre a relação do conceito de joins, com as potências simbólicas de um ideal. Para a demonstração desse resultado, se faz necessário um conhecimento introdutório de *Bases de Grobner*. Caso o leitor não tenha familiaridade com tais conceitos, ver [11].

Teorema 3.2.12. *Se $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal radical, então $I^{(r)} = I * \mathfrak{m}^r$.*

Demonstração. Começaremos calculando o join $I * \mathfrak{m}^r$. Oras, pela Proposição 3.2.7, é suficiente calcular $\bigcap_{p \in \mathcal{V}(I)} (\mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r)$. Por outro lado, o Corolário 1.3.14 implica que basta mostrar que $\mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}_p^r$, pois munidos desses dois resultados é possível escrever:

$$I * \mathfrak{m}^r = \left(\bigcap_{p \in \mathcal{V}(I)} \mathfrak{m}_p \right) * \mathfrak{m}^r = \bigcap_{p \in \mathcal{V}(I)} \mathfrak{m}_p^r = I^{(r)}.$$

Vamos considerar \mathfrak{m}_p como inicialmente, e \tilde{z} uma ordenação monomial arbitrária, de modo que $\text{in}_{\tilde{z}}(\mathfrak{m}_p) = \mathfrak{m}$.

Afirmamos que $\mathfrak{m} * \mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^r$. De fato, se $g = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ é um monômio, então fazendo a mudança $x_i \mapsto y_i + z_i$ temos que

$$(y_1 + z_1)^{a_1} \cdots (y_n + z_n)^{a_n} = \sum_{\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}} \left(\prod_{i=1}^n \binom{a_i}{b_i} y_i^{b_i} z_i^{c_i} \right),$$

de modo que qualquer termo do lado direito da igualdade acima pertence a $\mathfrak{m}(y_1, \dots, y_n)$, para cada $b_i > 0$.

Se $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$, então o termo que aparece é $z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$, que por sua vez pertence a $\mathfrak{m}(z_1, \dots, z_n)^r$ se, e somente se, $g \in \mathfrak{m}^r$. Em outras palavras, se $g \in \mathfrak{m}^r$, então

$$(y_1 + z_1)^{a_1} \cdots (y_n + z_n)^{a_n} \in \mathfrak{m}(y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{m}(z_1, \dots, z_n)^r,$$

ou seja, $g \in \mathfrak{m} * \mathfrak{m}^r$, pela Proposição 3.2.6. E como $\mathfrak{m} * \mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^r$, obtemos a igualdade.

Por fim, usando o Lema 3.2.10 temos que $\text{in}_{\geq}(\mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r) \subset \mathfrak{m} * \mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^r$, enquanto qualquer monômio da forma $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in \mathfrak{m}^r$ é termo líder do monômio $(x_1 - p_1)^{a_1} \cdots (x_n - p_n)^{a_n} \in \mathfrak{m}_p^r$. Isso implica que os monômios dessa forma, com $a_1 + \cdots + a_n = r$ formam uma base de Grobner para $\mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r$. Portanto $\mathfrak{m}_p * \mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}_p^r$. \square

Abaixo, temos uma versão algébrica do Teorema 3.1.3.

Proposição 3.2.13. *Se k é um corpo de característica zero, então dado $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal radical homogêneo, tal que $I \subset \mathfrak{m}^2$, tem-se $I^{\{r\}} \subset I^{(r)}$.*

Demonstração. Basta observar que sendo $I^{\{r\}} = I * I^{\{r-1\}}$, segue do Lema 3.2.9 que $I^{\{r\}} \subset I * \mathfrak{m}^r$. E como $I * \mathfrak{m}^r = I^{(r)}$ pelo Teorema 3.2.12, chegamos ao desejado. \square

Perceba que o Teorema 3.1.3 necessita que estejamos em um corpo de característica zero. A primeira vantagem que podemos observar ao nos depararmos com a generalização provada por Sullivant, é que podemos desconsiderar essa hipótese, e ainda conseguirmos um melhor refinamento para a continência tratada por Catalano. Vejamos tal resultado:

Teorema 3.2.14. (Sullivant) *Seja $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal radical homogêneo tal que $I \subset (x_1, \dots, x_n)^2$. Então $I^{\{r+s-1\}} \subset (I^{\{r\}})^{(s)}$, quaisquer que sejam $r, s > 0$.*

Demonstração. Por definição, $I^{\{r+s-1\}} = I^{\{r\}} * I^{\{s-1\}}$; donde $I^{\{r+s-1\}} \subset I^{\{r\}} * \mathfrak{m}^s$, pelo Lema 3.2.9. Por fim, o resultado segue pelo Teorema 3.2.12. \square

3.3 Ideais de Arestas

Existe uma classe de ideais, que é definida a partir das arestas de grafos. Tais ideais são chamados *ideais de arestas*. Veremos que através desse conceito e dos fatos acerca de ideais secantes estudados na seção anterior, será possível obter respostas sobre os geradores das potências simbólicas de alguns ideais monomiais livres de quadrados.

Em contrapartida, veremos também que nesse contexto, se as potências ordinárias e simbólicas de um ideal de aresta coincidirem, o grafo associado será bipartido.

Por fim, veremos que os resultados aqui estudados, nos permitirão explicitar melhor geradores para tal tipo de ideal.

Nessa seção, consideraremos apenas grafos G sendo simples e finitos, tendo $V(G) = \{1, \dots, n\}$ como conjunto de vértices, e $E(G) = \{\{i, j\}; i, j \in V(G)\}$ como conjunto de arestas. Além disso, k denotará um corpo algebricamente fechado de característica zero.

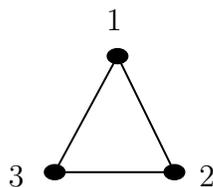
Caso o leitor não tenha familiaridade com os conceitos de grafos que aparecerão ao decorrer da seção, eles encontram-se no Apêndice, Seção 5.4.

Ademais, omitiremos a demonstração de alguns resultados, por brevidade, e além de serem demonstrações delicadas que fazem uso de argumentos mais avançados da teoria de grafos. Porém, eles podem ser encontrados em [5], [12], [15], [18], [21] e [23].

Definição 3.3.1. Dado G um grafo, o *ideal de arestas* associado à G é o seguinte ideal monomial de $k[x_1, \dots, x_n]$:

$$I(G) = (x_i x_j; \{i, j\} \in E(G)) .$$

Exemplo 3.3.2. Considerando o grafo $G = (\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\})$, que possui representação



então $I(G) = (x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$.

Observação 3.3.3. Dados G um grafo e $V' \subset V(G)$, denotaremos $x_{V'} = \prod_{x_i \in V'} x_i$. Além disso, como estamos considerando apenas grafos finitos e simples, os ideais $I(G)$ são ideais monomiais livres de quadrados.

Na seção anterior, vimos que as definições de join e ideal secante nos permite exibir apenas exemplos elementares de ideais secantes, já que o processo de estender e contrair envolve um número significativo de variáveis. O resultado a seguir nos diz que para os ideais de arestas, os geradores ficam facilmente determinados.

Proposição 3.3.4. *Um grafo G é perfeito se, e somente se, todo ideal secante não nulo $I(G)^{\{r\}}$ é gerado em grau $r + 1$. Nesse caso, $I(G)^{\{r\}}$ é gerado por todos os monômios da forma x_V , onde V é um clique de cardinalidade $r + 1$.*

Demonstração. Ver [33, Proposition 3.4]. □

Vejam os um exemplo.

Exemplo 3.3.5. Se considerarmos o grafo

$$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}),$$

sendo tal grafo perfeito, segue do resultado acima que $I^{\{2\}} = (x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, x_1x_3x_4)$.

Um conceito importante para nosso estudo dos ideais de arestas é o conceito de grafo de blowup. Ele será crucial para os próximos resultados que envolverão potências simbólicas e ideais secantes. No entanto, traremos uma definição mais geral desse conceito, envolvendo hipergrafos (ver Apêndice 5.4, Definição 5.4.28).

Definição 3.3.6. Dados H um hipergrafo, e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, com $a_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o *hipergrafo de blowup* de H , denotado por $H_{\mathbf{a}}$ é definido da seguinte maneira:

- (a) Os vértices de $H_{\mathbf{a}}$ são os pares $\{i, j\}$ tais que $i \in V(H)$, e $j \in \{1, \dots, a_i\}$,
- (b) O conjunto de vértices $\{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_m, j_m\}\}$ formam as arestas de $H_{\mathbf{a}}$ se, e somente se, $i_r \neq i_s$, para cada $r \neq s$, e $\{i_1, \dots, i_m\} \in E(H)$.

A seguir, algumas observações pertinentes que serão úteis para alguns resultados envolvendo grafos de blowup.

Observação 3.3.7. Nas notações acima, se existir $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_i = 0$, então não existem vértices em $H_{\mathbf{a}}$ que possuem i como primeiro índice. Em particular, quando \mathbf{a} possui mais de uma entrada nula (mas não todas), temos que $H_{\mathbf{a}} = H_{\text{Supp}(\mathbf{a})}$, onde $\text{Supp}(\mathbf{a}) = \{i \in V(G); a_i \neq 0\}$.

Observação 3.3.8. No caso particular de um grafo G , seu grafo de blowup $G_{\mathbf{a}}$ é obtido a partir de $G_{\text{Supp}(\mathbf{a})}$ trocando cada vértice i por uma cópia do grafo vazio com a_i vértices.

Vejam os um exemplo particular de grafo de blowup.

Exemplo 3.3.9. Se G é o grafo consistindo em um único vértice, e $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, então $G_{\mathbf{a}} = K_{a_1a_2}$.

Agora podemos enunciar um resultado que, apesar de técnico, tem implicações diretas nos estudos aqui realizados, sobre os geradores das potências simbólicas de ideais de arestas.

Teorema 3.3.10. *Sejam $f = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in k[x_1, \dots, x_n]$ um monômio, e H um hipergrafo. Para que se tenha $f \in I(H)^{(r)}$ é necessário e suficiente que tenhamos $\deg(f) \geq r + \alpha(H_{\mathbf{a}})$, onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Em particular, f será um gerador minimal de $I(H)^r$ se, e somente se, $\deg(f) = r + \alpha(H_{\mathbf{a}})$ e $\alpha(H_{\mathbf{a}}) = \alpha(H_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i})$, com $i \in \text{Supp}(\mathbf{a})$, e \mathbf{e}_i sendo o vetor cuja i -ésima entrada é igual à 1, e as entradas restantes, iguais à zero.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.3.15, $f \in I(H)^{(r)}$ se, e somente se, para cada monômio $g = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ com $\deg(g) \leq r - 1$ dividindo f , tenhamos $h = x_1^{a_1-b_1} \cdots x_n^{a_n-b_n} \in I(H)$. Por outro lado, para termos $h \in I(H)$, é necessário e suficiente que exista $V \in E(H)$ tal que $\prod_{s \in V} x_s$ divida h ; ou equivalentemente, se o conjunto

$$\{(i, j) \in V(H_{\mathbf{a}}); i \in \text{Supp}(\mathbf{a}), 1 \leq j \leq a_i - b_i\}$$

não for um conjunto independente de $H_{\mathbf{a}}$. Mas isso deve ocorrer se, e somente se, $\alpha(H_{\mathbf{a}}) \leq \deg(f) - r$.

Em particular, f será um gerador minimal de $I(H)^{(r)}$ se, e somente se, tivermos

$$\tilde{f} = x_1^{a_1} \cdots x_{i-1}^{i-1} x_i^{a_i-1} x_{i+1}^{i+1} \cdots x_n^n \notin I(H)^{(r)}.$$

E pelo que acabamos de provar, isso é equivalente a termos $\deg(\tilde{f}) < r + \alpha(H_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i})$, qualquer que seja $i \in \text{Supp}(\mathbf{a})$. Além disso, como $\deg(\tilde{f}) = \deg(f) - 1$, e $\alpha(H_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) \geq \alpha(H_{\mathbf{a}}) - 1$, segue que f será um gerador minimal se, e somente se $\deg(f) = r + \alpha(H_{\mathbf{a}})$, e $\alpha(H_{\mathbf{a}}) = \alpha(H_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i})$, para $i \in \text{Supp}(\mathbf{a})$. \square

O Teorema acima é primeiro passo no nosso estudo das potências simbólicas, sob o olhar dos ideais de arestas. A partir dele podemos perceber a quantidade de informações que podemos extrair acerca dos geradores das potências simbólicas a partir de invariantes do grafo. Nesse caso, o número de independência.

Tal resultado, paralelo com a Proposição 3.3.4, nos permite calcular quadrados simbólicos de ideais de arestas de grafos perfeitos, como veremos no resultado a seguir.

Proposição 3.3.11. *Se G é um grafo perfeito, então $I(G)^{(2)} = I(G)^2 + I(G)^{\{2\}}$. Em particular, $I(G)^{(2)}$ é gerado por monômios da forma $x_i x_j x_r$ e $x_i x_j x_r x_s$ tais que $\{i, j, r\}$ forma um triângulo em G , e $\{i, j\}, \{r, s\} \in E(G)$.*

Demonstração. Dado $f = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in I(G)^{(2)}$ um gerador minimal, segue do Teorema 3.3.10 que $\alpha(G_{\mathbf{a}}) = \deg(f) - 2$. Seja \mathcal{F} o conjunto independente de $G_{\mathbf{a}}$ com cardinalidade

$\alpha(G_a)$. Se $|\mathcal{F}| = 1$, então G_a deve ser um triângulo; donde $f \in I(G)^{\{2\}}$, pela Proposição 3.3.4.

Suponha agora que $|\mathcal{F}| > 1$, e considere $v_1, v_2 \in V(G_a) \setminus \mathcal{F}$; donde existem $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ tais que $u_1v_1, u_2v_2 \in E(G_a)$. Se u_1, u_2 são distintos, então u_1v_1 e u_2v_2 projetam-se em um par de vértices, cujo monômio associado divide f ; ou seja, $f \in I(G)^2$.

Se $u_1 = u_2 = u$, então ou v_1v_2 é uma aresta de G_a , ou não existe aresta ligando v_1 a v_2 . No primeiro caso, v_1v_2u forma um triângulo tal que $x_{v_1}x_{v_2}x_u$ divide f , de modo que $f \in I(G)^{\{2\}}$. No segundo caso, temos que $\mathcal{F} \setminus (\{u\} \cup \{v_1, v_2\})$ formaria um conjunto independente com cardinalidade maior que \mathcal{F} , contradizendo o que supomos inicialmente. E isso prova o resultado. \square

A partir do resultado acima, podemos computar alguns exemplos de quadrados simbólicos de ideais de arestas.

Exemplo 3.3.12. Como vimos, o grafo

$$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\})$$

é perfeito, tendo $I^{\{2\}} = (x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, x_1x_3x_4)$. Consequentemente, tendo em vista que $I(G)^2 = (x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}; i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 4)$, segue da Proposição anterior que

$$I(G)^{(2)} = (x_1^2x_2^2, \dots, x_1^2x_4^2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2x_4).$$

O resultado a seguir, também fornece uma conexão entre um invariante do grafo e o ideal secante. A partir dele, é possível calcular o número cromático de um grafo, utilizando o ideal secante do ideal de arestas desse grafo.

Podemos perceber também que, sabendo o número cromático do grafo, é possível determinar quem é o r -ésimo ideal secante do ideal associado a tal grafo.

O próximo resultado, apesar de técnico, ajuda a determinar geradores da r -ésima potência simbólica, desde que tenhamos certas informações sobre o número de cliques do grafo dado.

Teorema 3.3.13. *Um grafo G é perfeito se, e somente se, $I(G)^{(r)} = J_r(G)$, onde*

$$J_r(G) = \left(\prod_{i=1}^s m_{V_i}; V_i \in \mathcal{C}_2(G), \text{ com } \sum_{i=1}^s (|V_i| - 1) = r \right),$$

com $m_{V_i} = \prod_{i \in V} x_i$, $|V_i|$ sendo a cardinalidade do conjunto V_i , e $\mathcal{C}_2(G)$ denota o conjunto dos cliques de G com cardinalidade maior do que 2.

Demonstração. Suponha que G é perfeito. Dado f um gerador de $J_r(G)$, se considerarmos todas as derivadas parciais de ordem $r - 1$ de f , teremos que tais derivadas serão nulas ou divisíveis por $x_r x_s$, com $\{i, j\}$ sendo uma aresta em algum V_i , de modo que $J_r(G) \subset I(G)^{(r)}$, pelo Corolário 1.3.15.

Para provarmos a inclusão inversa, considere $g = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in I(G)^{(r)}$ um gerador minimal; donde o Teorema 3.3.10 implica que $\deg(g) = r + \alpha(G_a)$. Por outro lado, sendo G perfeito, então $\overline{G_a}$ também o é (Ver Apêndice 5.4), de modo que $\overline{G_a}$ admite uma coloração usando precisamente $\alpha(G_a) = \omega(\overline{G_a})$ cores, com tal coloração sendo uma partição dos vértices de $\overline{G_a}$ em $\alpha(G_a)$ cliques de G_a , digamos $V_1, V_2, \dots, V_{\alpha(G_a)}$.

Como cada clique $V = \{(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)\}$ de G_a está relacionado a um clique $V' = \{i_1, \dots, i_l\}$ de G , a coloração de G_a descrita inicialmente fornece a fatoração $g = m_{V'_1} \cdots m_{V'_l}$. Vamos mostrar que tal fatoração está em $J_r(G)$ (e conseqüentemente g também estará). Com efeito, observe que

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G_a)} (|V'_i| - 1) = \sum_{i=1}^{\alpha(G_a)} |V'_i| - \alpha(G_a) = \sum_{i=1}^{\alpha(G_a)} |V'_i| - (r + \deg(g)) = r.$$

Daí, removendo os cliques V'_i de cardinalidade 1, a soma acima não é afetada, e conseqüentemente, obteremos um monômio em $J_r(G)$ que divide g , de modo que $g \in J_r(G)$, como queríamos.

Para provarmos a recíproca do Teorema, vamos supor por contradição que G não é um grafo perfeito. Sem perda de generalidade, podemos supor que G é um grafo minimalmente imperfeito (Ver Apêndice 5.4 e [12], pag.128), de modo que $\chi(G) = \alpha(G) + 1$ (Ver Apêndice 5.4). Por outro lado, note que $h = x_1 \cdots x_n \in I(G)^{(n - \alpha(G))}$, pois $\deg(h) = (n - \alpha(G)) + \alpha(G)$. No entanto, $h \notin J_{n - \alpha(G)}(G)$, pois caso tal pertinência fosse verdade, existiria uma coloração de G com $\alpha(G)$ cores, e como $\alpha(G) < \chi(\overline{G})$, isso é um absurdo. Portanto G é um grafo perfeito. \square

Após o estudo dos ideais secantes, podemos perceber que, apesar da inclusão $I^{\{r\}} \subset I^{(r)}$ ocorrer, essa não pode ser uma igualdade, já que tais ideais definem variedades diferentes. Por outro lado, pela Proposição 2.1.1, podemos inferir que $I^{(s)} I^{(r-s)} \subset I^{(r)}$, qualquer que seja $s \in \{1, \dots, r - 1\}$. Dito isso, no caso em que I é um ideal radical homogêneo

que não contém formas lineares, temos que

$$I^{\{r\}} + \sum_{j=1}^{r-1} I^{(j)} I^{(r-j)} \subset I^{(r)}.$$

E pelo Teorema 3.2.14, segue que

$$I^{\{r+s-1\}} + \sum_{j=1}^{r-1} (I^{\{r\}})^{(j)} (I^{\{r\}})^{(r-j)} \subset (I^{(r)})^s.$$

Quando a inclusão acima é uma igualdade, temos o seguinte conceito:

Definição 3.3.14. Um ideal $I \subset A$ é chamado de *r-diferencialmente perfeito*, se para cada $s > 0$, tem-se

$$I^{\{r+s-1\}} + \sum_{j=1}^{r-1} (I^{\{r\}})^{(j)} (I^{\{r\}})^{(r-j)} = (I^{(r)})^s.$$

Em particular, quando a igualdade acima vale para todo $r > 0$, dizemos apenas que I é diferencialmente perfeito.

Exemplo 3.3.15. Um ideal monomial $J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é 1-diferencialmente perfeito se, para cada monômio $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in J^{(r)}$, tivermos

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = (x_1^{b_1^{(1)}} \cdots x_n^{b_n^{(1)}}) \cdots (x_1^{b_1^{(l)}} \cdots x_n^{b_n^{(l)}}),$$

com $x_1^{b_1^{(i)}} \cdots x_n^{b_n^{(i)}} \in I^{\{s_i\}}$, onde $s_1 + \cdots + s_l = r$.

O próximo resultado técnico exibe uma relação íntima entre o número cromático de um grafo e o r -ésimo ideal secante do ideal de arestas desse grafo.

Lema 3.3.16. *Seja G um grafo. Então $\chi(G) = \min\{r \geq 0; I(G)^{\{r\}} = 0\}$. Em particular, $I(G)^{\{r\}} = (\prod_{i \in V} x_i; \chi(G) > r)$.*

Demonstração. Ver [33, Proposition 3.1, Theorem 3.2]. □

A seguir, veremos um dos resultados centrais dessa seção. É a partir dele que conseguiremos estabelecer a igualdade entre as potências simbólicas e ordinárias de ideais de aresta, mediante as configurações de um grafo. Para a compreensão dos argumentos aqui utilizados, o leitor poderá consultar o Apêndice 5.4, [15] e [12].

Teorema 3.3.17. *Para que G seja um grafo perfeito, é necessário e suficiente que $I(G)$ seja um ideal 1-diferencialmente perfeito.*

Demonstração. Se G é um grafo perfeito, segue da Proposição 3.3.4 que $I(G)^{\{r\}}$ é gerado por monômios da forma m_V , com V sendo um clique de cardinalidade $r + 1$. Consequentemente, $I(G)$ é 1-diferencialmente perfeito pelo Teorema 3.3.13 e pelo Exemplo 3.3.15.

Inversamente, suponha que G não é um grafo perfeito, mas $I(G)$ é 1-diferencialmente perfeito. Como foi feito no Teorema 3.3.13, podemos supor que G é um grafo minimalmente imperfeito. Consequentemente, G tem precisamente $\alpha(G)\omega(G) + 1 = n$ vértices. Como vimos no Teorema 3.3.13, o monômio $f = x_1 \cdots x_n$ pertence a $I(G)^{(n-\alpha(G))}$, de modo que, sendo G minimalmente imperfeito, todo subgrafo de G é perfeito; ou seja,

$$f \in I(G)^{\{n-\alpha(G)\}} + \sum_{i=1}^{n-\alpha(G)-1} I(G)^{(i)} I(G)^{(n-\alpha(G)-i)}.$$

Dito isso, segue que $f \in J_r(G)$ ou $f \in I(G)^{\{n-\alpha(G)\}}$. Como foi visto no Teorema 3.3.13, a primeira pertinência não ocorre, enquanto a segunda ocorrerá se, e somente se, $\chi(G) > n - \alpha(G)$, pelo Lema 3.3.16. No entanto, sendo G minimalmente imperfeito, tem-se que $\chi(G) = \omega(G) + 1$; donde $\omega(G) + 1 > \alpha(G)\omega(G) + 1 - \alpha(G)$, ou ainda, $\alpha(G) < \omega(G)/(\omega(G) - 1)$. No entanto, isso é um absurdo, já que sendo G um grafo imperfeito, devemos ter $\omega(G), \alpha(G) \geq 2$ (Ver [15], pag.209). Portanto G é perfeito e o resultado segue. \square

Outra situação em que as potências simbólicas fornece informações importantes sobre um grafo e vice-versa, é descrita pelo resultado abaixo.

Corolário 3.3.18. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, $I(G)^r = I(G)^{(r)}$.*

Demonstração. Suponha que G é bipartido. Como todo grafo bipartido é perfeito, então G é 1-diferencialmente perfeito pelo Teorema 3.3.17. Além disso, como grafos bipartidos não possuem ciclos ímpares, então $\chi(G) = 2$, de modo que $I(G)^2 = 0$, pelo Lema 3.3.16, de modo que $I(G)^r = I(G)^{(r)}$, para cada $r > 0$.

Inversamente, se supormos que G não é um grafo bipartido então G admite um ciclo ímpar de comprimento $2r - 1$. Assim, $\prod_{i \in C} x_i \in I(G)^{(r)} \setminus I(G)^r$, onde C é o conjunto de vértices desse ciclo. \square

Capítulo 4

Mapas birracionais versus potências simbólicas

Nesta seção veremos como os mapas birracionais, junto com a noção de fator de inversão, são ferramentas úteis para determinar geradores para as potências simbólicas de um tipo particular de ideal. Iniciaremos apresentando esse conceito, e utilizaremos o fator de inversão de uma aplicação racional para determinar geradores de alguns ideais. Além disso, veremos também as implicações desses resultados no estudo da álgebra de Rees simbólica.

4.1 Um breve apanhado sobre mapas birracionais

Fixaremos nessa seção as seguintes notações:

- k um corpo algebricamente fechado.
- $k[\mathbf{x}] = k[x_0, \dots, x_n]$ o anel de coordenadas homogêneas do espaço projetivo \mathbb{P}_k^n
- $k[\mathbf{y}] = k[y_0, \dots, y_m]$ o anel de coordenadas homogêneas do espaço projetivo \mathbb{P}_k^m
- $\mathbf{X} \subset \mathbb{P}^n$ uma subvariedade irredutível de \mathbb{P}^n .

Um *mapa racional* $\phi : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é dado por uma sequência de formas $f_0, \dots, f_m \in R$ de mesmo grau $d \geq 1$ que mapeia cada ponto $(a_0 : \dots : a_n)$ de $\mathbf{X} \setminus V(f_0, \dots, f_m)$ no ponto $(f_0(a_0, \dots, a_n) : \dots : f_m(a_0, \dots, a_n))$ de \mathbb{P}^m . O subconjunto algébrico $V(f_0, \dots, f_m)$ de \mathbb{P}^n é chamado de *lugar base* ou *lugar de indeterminação* do mapa racional ϕ .

A imagem de um mapa racional $\phi : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ não é, necessariamente, um subconjunto algébrico de \mathbb{P}^m . Esse fenômeno é esclarecido em nosso próximo exemplo.

Exemplo 4.1.1. Considere o mapa racional $\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $(x : y : z) \mapsto (x^2 : xy : yz)$. Definamos: $H_x := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid x = 0\}$ e $H_y := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid y = 0\}$. Podemos decompor $\text{Im } \phi$ como a seguinte união:

$$\text{Im } \phi = (\text{Im } \phi \cap H_x) \cup (\text{Im } \phi \cap H_y) \cup (\text{Im } \phi \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H_x \cup H_y)).$$

Vamos determinar cada membro desse união.

$\text{Im } \phi \cap H_x = \{(0 : 0 : 1)\}$: Temos $\phi(0 : 1 : 1) = (0 : 0 : 1)$. Logo, $(0 : 0 : 1) \in \text{Im } \phi \cap H_x$. Agora considere $p \in \text{Im } \phi \cap H_x$. Então $p = (0 : b : c)$ para certos $b, c \in k$ e $(0 : b : c) = (x^2 : xy : yz)$ para certos $x, y, z \in k$. Dessa segunda igualdade segue que $x = b = 0$. Dessa forma, $p = (0 : 0 : c)$ com $c \neq 0$. Logo, $\text{Im } \phi \cap H_x = \{(0 : 0 : 1)\}$.

$\text{Im } \phi \cap H_y = \{(1 : 0 : 0)\}$: Temos $\phi(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$. Logo, $(1 : 0 : 0) \in \text{Im } \phi \cap H_y$. Por outro lado, dado $p \in \text{Im } \phi \cap H_y$, então $p = (a : 0 : c)$ para certos $a, c \in k$ e $(a : 0 : c) = (x^2 : xy : yz)$ para certos $x, y, z \in k$. Dessa segunda igualdade segue que $y = c = 0$. Dessa forma, $p = (a : 0 : 0)$ com $a \neq 0$. Logo, $\text{Im } \phi \cap H_y = \{(1 : 0 : 0)\}$.

$\text{Im } \phi \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H_x \cup H_y) = \mathbb{P}^2 \setminus H_x \cup H_y$: É suficiente provar que $\mathbb{P}^2 \setminus H_x \cup H_y \subset \text{Im } \phi$. Para isso, considere $p = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2 \setminus H_x \cup H_y$. Então, a e b são diferentes de zero. Em particular, temos $\phi(\sqrt{a} : b/\sqrt{a} : c\sqrt{a}/b) = (a : b : c)$. Logo, $p \in \text{Im } \phi$. Com isso, segue a igualdade desejada.

Desse modo, $\text{Im } \phi = (\mathbb{P}^2 \setminus H_x \cup H_y) \cup \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$, que não é um subconjunto algébrico de \mathbb{P}^2 .

Diante da discussão acima, dado um mapa racional $\phi : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ será interessante então considerarmos o fecho (de Zariski) da imagem de ϕ . Por abuso de terminologia, sempre que mencionarmos a imagem de um mapa racional, estaremos entendendo com isso o fecho da imagem do mapa. Nesse sentido, a imagem do mapa racional do exemplo acima é todo o \mathbb{P}^2 .

Seja $\mathbf{Y} \subset \mathbb{P}^m$ a imagem de um mapa racional $\phi : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$. Denotemos por S o anel de coordenadas homogêneas de \mathbf{Y} . É possível provar que, a menos de renormalização de grau, S é isomorfo a k -álgebra $k[f_0, \dots, f_m]$. Dizemos que ϕ é *birracional sobre a imagem*, se existir um mapa racional $\psi : \mathbf{Y} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ definido por uma sequência de formas $g_0, \dots, g_n \in S$, de mesmo grau δ , tal que

$$g_i(f_0, \dots, f_m) = D\bar{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1)$$

e

$$f_i(g_0, \dots, g_n) = E\bar{y}_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

para certos $D \in \text{Frac}(R)$ e $E \in \text{Frac}(S)$. Chamamos ψ de *inversa* do mapa racional ϕ . Os elementos D e E são chamados *fatores de inversão* com respeito aos representantes escolhidos para ϕ e ψ . Em particular, um mapa birracional de \mathbb{P}^n em \mathbb{P}^n é chamado de *mapa de Cremona*.

Exemplo 4.1.2. Considere o mapa racional $\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ que mapeia $(x : y : z)$ em $(yz : xz : xy)$. Observe que $\phi^2(x : y : z) = (Dx : Dy : Dz)$ onde $D = xyz$. Vemos com isso que ϕ é um mapa de Cremona onde a inversa de ϕ é ela própria. Mapas de Cremona com essa particularidade, da inversa ser ela própria, são chamados de *involuções*.

Exemplo 4.1.3. Considere \mathbf{X} a curva de \mathbb{P}^2 cujo o anel de coordenadas homogêneas é $R = k[x, y, z]/(y^2 - xz)$. Afirmamos que o mapa racional

$$\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}) \mapsto (\bar{x} : \bar{y})$$

é birracional sobre a imagem. Com efeito, considere o mapa

$$\psi : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{X}, \quad (s : t) \mapsto (s^2 : st : t^2).$$

Temos:

$$\phi(\psi(s : t)) = \phi(s^2 : st : t^2) = (s^2 : st) = (Ds : Dt),$$

onde $D = s$, e

$$\psi(\phi(\bar{x} : \bar{y} : \bar{z})) = \psi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^2 : \bar{x}\bar{y} : \bar{y}^2) = (\bar{x}^2 : \bar{x}\bar{y} : \bar{x}\bar{z}) = (E\bar{x} : E\bar{y} : E\bar{z}),$$

onde $E = \bar{x}$.

4.1.1 O papel dos fatores de inversão

Seja $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ um mapa birracional sobre a imagem, determinado por formas $f_0, \dots, f_m \in k[x_0, \dots, x_n]$ de mesmo grau d . Seja S o anel de coordenadas da imagem $\mathbf{Y} \subset \mathbb{P}^m$ de ϕ , e g_0, \dots, g_n um conjunto de formas do mesmo grau δ que definem a inversa de ϕ . Em [26, Lemma 1.2], é provado que o fator de inversão $D \in \text{Frac}(k[x_0, \dots, x_n])$ tal que

$$g_i(f_0, \dots, f_m) = Dx_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

é de fato um polinômio homogêneo de grau $d\delta - 1$ de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Proposição 4.1.4. *Nas notações e hipóteses como acima, suponha que o ideal $I = (f_0, \dots, f_m)$ é puro e que $(x_0, \dots, x_n) \notin \text{Ass}(k[x_0, \dots, x_n]/I)$. Então $D \in I^{(\delta)} \setminus I^\delta$.*

Demonstração. Como $g_i(f_0, \dots, f_m) = x_i D$ para cada $0 \leq i \leq n$ então $(x_0, \dots, x_n)D \subset I^\delta$. Por outro lado, como $(x_0, \dots, x_n) \notin \text{Ass}(k[x_0, \dots, x_n]/I)$, segue do *Lema da Esquiva* que existe $h \notin \mathcal{Z}(A/I)$ tal que $hD \in I^\delta$ portanto, $D \in I^{(\delta)}$. O fato de que $D \notin I^\delta$ é porque I^δ é gerado em grau $d\delta$ e D tem grau $d\delta - 1$. \square

4.2 Mapas birracionais e álgebra de Rees

Seja $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ um mapa birracional sobre a imagem determinado por formas $f_0, \dots, f_m \in A = k[x_0, \dots, x_n]$ de mesmo grau d . Seja S o anel de coordenadas da imagem $\mathbf{Y} \subset \mathbb{P}^m$ de ϕ , e g_0, \dots, g_n um conjunto de formas do mesmo grau δ que definem a inversa de ϕ .

Nesse situação temos o seguinte resultado

Proposição 4.2.1. *Considere as notações e hipóteses como acima. O mapa identidade de $k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]/\mathcal{I}(\mathbf{Y})$, induz um isomorfismo de álgebra bi-graduadas*

$$\mathcal{R}_A((f_0, \dots, f_m)) \simeq \mathcal{R}_S\left(\frac{(g_0, \dots, g_n, \mathcal{I}(\mathbf{Y}))}{\mathcal{I}(\mathbf{Y})}\right)$$

Demonstração. Ver [29, Proposition 2.1]. \square

Nessa dissertação, estaremos interessados na situação particular em que o mapa racional ϕ é um mapa de Cremona. Em particular, $\mathbf{Y} = \mathbb{P}^n$ e $S = k[y_0, \dots, y_m]$.

4.3 Teorema Principal

Teorema 4.3.1. *Seja $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa de Cremona com ideal base $I \subset R = k[x_0, \dots, x_n]$ tal que I é ideal puro com $(x_0, \dots, x_n) \notin \text{Ass}(R/I)$. Suponha que:*

- (i) *Para cada $r \geq 1$, $I^{(r)}/I^r = 0$ ou $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) = (x_0, \dots, x_n)$*
- (ii) *A álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay.*

Então:

(a) $\mathcal{R}_R^s(I) = R[It, Dt^\delta]$, onde D denota o fator de inversão de ϕ e δ é o grau de sua inversa.

(b) Se $\mathcal{J} \subset k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$ denota o ideal de apresentação da álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ então o ideal de apresentação da k -álgebra $R[It, Dt^\delta]$ sobre o anel $k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, w]$ é:

$$(\mathcal{J}, \{x_i w - g_i, 0 \leq i \leq n\}).$$

(c) A álgebra de Rees simbólica $\mathcal{R}_R^s(I)$ é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Considere $I = (f_0, \dots, f_n)$. Digamos que g_0, \dots, g_n seja uma sequência de formas de mesmo grau δ que representa a inversa de ϕ tal que $I' = (g_0, \dots, g_n) \subset S = k[y_0, \dots, y_n]$ tenha altura pelos menos 2. Pela Proposição 4.2.1 temos

$$\mathcal{R}_R(I) \simeq \frac{k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]}{\mathcal{J}} \simeq \mathcal{R}_S(I') \quad (4.2)$$

onde o primeiro isomorfismo é induzido pela epimorfismo de k -álgebras

$$k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I), \quad x_i \mapsto x_i, y_i \mapsto f_i t \quad (4.3)$$

e o segundo é induzido pelo epimorfismo de k -álgebras

$$k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_S(I') \subset S[u], \quad y_i \mapsto y_i, x_i \mapsto g_i u \quad (4.4)$$

Pela Proposição 2.2.2 e do isomorfismo (4.2), temos que $(\mathcal{J}, \{x_i w - g_i, 0 \leq i \leq n\})$ é o ideal de definição da álgebra de Rees estendida $\mathcal{R}_S(I')[u^{-1}]$. Portanto, o ideal $(\mathcal{J}, \{x_i w - g_i, 0 \leq i \leq n\})$ é primo, e tem altura $2n + 3 - n - 2 = n + 1$.

Agora considere \mathcal{K} sendo o núcleo do epimorfismo

$$k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, w] \twoheadrightarrow R[It, Dt^\delta] \quad x_i \mapsto x_i, y_i \mapsto f_i t, w \mapsto Dt^\delta.$$

Pela substituição $y_i \mapsto f_i t, w \mapsto Dt^\delta$, e levando em consideração (4.1), obtemos que

$$(\mathcal{J}, \{x_i w - g_i, 0 \leq i \leq n\}) \subset \mathcal{K} \quad (4.5)$$

Por argumento de grau de transcendência, temos que $\dim R[It, Dt^\delta] = \dim R[It] = n + 2$. Assim, $\text{ht } \mathcal{K} = 2n + 3 - n - 2 = n + 1$. Logo, (4.5) é uma inclusão de ideais primos de

mesma altura. Em particular,

$$\mathcal{K} = (\mathcal{J}, \{x_i w - g_i, 0 \leq i \leq n\}) \quad (4.6)$$

Desse modo,

$$R[It, Dt^\delta] \simeq k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]/\mathcal{K} \simeq \mathcal{R}_S(I')[u^{-1}] \quad (4.7)$$

o que prova o item (a). Como $\mathcal{R}_S(I') \simeq \mathcal{R}_R(I)$ então $\mathcal{R}_S(I')$ é Cohen-Macaulay. Assim, pela Observação 2.1.5, a álgebra de Rees estendida $\mathcal{R}_S(I')[u^{-1}]$ é Cohen-Macaulay. Logo, por (4.7), $R[It, Dt^\delta]$ é Cohen-Macaulay. Desse modo, para concluir a prova dos itens (b) e (c) é suficiente provar a igualdade $\mathcal{R}_R^s(I) = R[It, Dt^\delta]$. Para isso, pela Proposição 2.3.3 e as hipóteses, é suficiente provar que

$$\text{depth}(\mathfrak{m}R[It, Dt^\delta]) \geq 2$$

onde $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_n)$. Mas, para isso temos:

$$\begin{aligned} \text{depth}(\mathfrak{m}R[It, Dt^\delta]) &= \text{ht}(\mathfrak{m}R[It, Dt^\delta]) \quad (\text{pois } R[It, Dt^\delta] \text{ é Cohen-Macaulay}) \\ &= \text{ht}(\mathfrak{m}, \mathcal{K})/\mathcal{K} \\ &= \text{ht}(\mathfrak{m}, I')/\mathcal{K} \\ &= \dim R[It, Dt^\delta] - \dim k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, w]/(\mathfrak{m}, I') \\ &= n + 2 - \dim k[y_0, \dots, y_n, w] + \text{ht } I' \\ &= n + 2 - n - 2 + \text{ht } I' \\ &= \text{ht } I' \geq 2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

o que conclui a demonstração. □

A seguir apresentamos um exemplo onde o teorema acima é aplicado.

Exemplo 4.3.2. Considere o seguinte ideal de $R = k[x_0, x_1, x_2]$:

$$I = (x_0 x_1 (x_1 - x_2)(x_0 - x_2), x_0 x_2 (x_1 - x_2)(x_0 - 2x_1), x_1 x_2 (x_0 - x_2)(x_0 - 2x_1))$$

Este é o ideal base de um mapa de Cremona de \mathbb{P}^2 que aparece em [2, Example 2.1.8]. Um calculo com [3] implica que I é um ideal puro de altura dois. Pela proposição 1.1.4 e o fato de que I^r é homogêneo segue que $I^{(r)}/I^r = 0$ ou $\text{Ass}(I^{(r)}/I^r) = \{\mathfrak{m}\}$. Além disso, usando

mais uma vez [3] temos que a álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é Cohen-Macaulay. Sendo assim, o ideal I satisfaz as hipótese do teorema acima e, portanto, suas conclusões.

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Álgebras Graduadas

O objetivo dessa seção, será explicitar as principais informações sobre anéis e módulos graduados que são necessárias para a compreensão de alguns argumentos utilizados nesse trabalho.

Aqui, A denotará um anel comutativo com identidade $1 \neq 0$.

Definição 5.1.1. Uma A -álgebra R é dita \mathbb{N} -graduada, se R admitir uma decomposição (como \mathbb{Z} -módulo) da forma

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n,$$

onde $R_0 = A$, e $R_i R_j \subset R_{i+j}$, quaisquer que sejam $i, j \in \mathbb{N}$, e cada R_i sendo um grupo abeliano.

Definição 5.1.2. Seja R uma A -álgebra graduada. Um elemento $f \in R$ é dito homogêneo de grau d , se $f \in R_d$. Nesse caso, escrevemos $\deg(f) = d$. Além disso, os elementos de R_d são chamados formas de grau d .

Agora enunciaremos um exemplo bastante utilizado de álgebra graduada.

Exemplo 5.1.3. Seja $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Para cada indeterminada x_i , faça $\deg(x_i) = d_i$. Assim, se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, $x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in R$ é tal que $|\mathbf{a}| = d_1 a_1 + \cdots + d_n a_n$. Isso define uma graduação em R

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n, \quad R_n = \bigoplus_{|\mathbf{a}|=n} kx^{\mathbf{a}}.$$

Em particular, se $d_1 = \dots = d_n = 1$, a dizemos que tal graduação é *standard* ou padrão.

Definição 5.1.4. Seja R uma A -álgebra graduada. Um ideal $I \subset R$ é dito homogêneo se admite uma decomposição

$$I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

onde $I_n = (I \cap R_n)$.

O resultado a seguir fornece uma situação suficiente e necessária para que um anel graduado seja noetheriano.

Teorema 5.1.5. *Seja A um anel graduado. Então A é noetheriano se, e somente se, A_0 é noetheriano e A é uma A_0 -álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Ver [6, Theorem 1.5.5]. □

5.2 Sistemas de Parâmetros e Sequências Regulares

Nessa seção, enunciaremos os principais resultados sobre sistemas de parâmetros e sequências regulares que são cruciais para o desenrolar do estudo desenvolvido nesse trabalho. Para mais detalhes sobre o assunto, ver [6], [22] e [35].

Definição 5.2.1. *Seja (A, \mathfrak{m}) um anel local de dimensão r . Um conjunto $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathfrak{m}$ é dito sistema de parâmetros de A , se o ideal gerado por a_1, \dots, a_r é \mathfrak{m} -primário. Além disso, se M é um A -módulo de dimensão s , e existem $b_1, \dots, b_s \in \mathfrak{m}$ tais que $l(M/(b_1, \dots, b_s)M) < \infty$, então $\{b_1, \dots, b_s\}$ é dito sistema de parâmetros de M .*

Definição 5.2.2. Uma sequência de elementos $a_1, \dots, a_r \in A$ é dita *regular*, se

- (i) $(a_1, \dots, a_r) \neq A$,
- (ii) $a_i \notin \mathcal{Z}(A/(a_1, \dots, a_{i-1}))$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Além disso, o comprimento de uma sequência regular, é a quantidade de elementos da mesma.

Exemplo 5.2.3. É fácil ver que x_1, \dots, x_n é uma sequência regular de $k[x_1, \dots, x_n]$.

Teorema 5.2.4. *Sejam A um anel, e I um ideal de A gerado por uma sequência regular a_1, \dots, a_n . Então*

$$\bigoplus_{n \geq 0} (I^n/I^{n+1}) \simeq (A/I)[x_1, \dots, x_r].$$

Demonstração. Ver [6, Theorem 1.1.8]. □

Definição 5.2.5. *Uma sequência regular $a_1, \dots, a_r \in A$ é maximal se não existir $b \in A \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$ tal que a sequência a_1, \dots, a_r, b seja regular.*

Teorema 5.2.6. *Sejam A um anel noetheriano e $I \subsetneq A$ um ideal. Então quaisquer duas sequências regulares máximas têm o mesmo comprimento. Além disso, o supremo de tais comprimentos é finito.*

Demonstração. Ver [6, Theorem 1.2.5]. □

Definição 5.2.7. *Dado $I \subsetneq A$ um ideal, a profundidade de A em I , denotada por $\text{depth}_I A$, é o comprimento de uma (e portanto todas) as sequências regulares máximas de I .*

Observação 5.2.8. *No caso em que temos um anel (A, \mathfrak{m}) , escrevemos $\text{depth } A$, em vez de $\text{depth}_{\mathfrak{m}} A$. Além disso, segue do *Teorema do Ideal Principal de Krull* que*

$$\text{depth } A \leq \dim A = \text{ht } \mathfrak{m}.$$

A observação acima nos motiva a seguinte definição:

Definição 5.2.9. *Um anel (A, \mathfrak{m}) é dito *Cohen-Macaulay*, se $\dim A = \text{depth } A$.*

A noção de anel Cohen-Macaulay pode ser estendida a anéis que não são necessariamente locais.

Definição 5.2.10. *Um anel A é Cohen-Macaulay se para cada $P \in \text{Spec}(A)$, A_P é Cohen-Macaulay.*

O próximo resultado, é um raciocínio natural feito a partir da leitura das duas definições acima.

Proposição 5.2.11. *Seja (A, \mathfrak{m}) um anel Cohen-Macaulay. Então A_P também o é, qualquer que seja $P \in \text{Spec}(A)$.*

Demonstração. Ver [6, Theorem 2.1.3]. □

O próximo resultado estabelece uma conexão entre sequências regulares e sistemas de parâmetros.

Teorema 5.2.12. *Sejam (A, \mathfrak{m}) um anel local Cohen-Macaulay, e $a_1, \dots, a_s \in \mathfrak{m}$. São equivalentes:*

- (a) a_1, \dots, a_s é uma sequência regular;
- (b) $\text{ht}(a_1, \dots, a_r) = r$, para cada $r \in \{1, \dots, s\}$,
- (c) $\text{ht}(a_1, \dots, a_s) = s$,
- (d) a_1, \dots, a_s é parte de um sistema de parâmetros de A .

Demonstração. Ver [22, Theorem 17.4]. □

5.3 Ideais Determinantais

Um conceito que aparece com frequência em artigos de álgebra comutativa é o de anéis e ideais determinantais. A principal referência para esse assunto é [7].

Definição 5.3.1. *Sejam $U = (u_{ij}) \in M_{m \times n}(A)$. Dados índices $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \{1, \dots, m\}$, $\beta_1, \dots, \beta_t \in \{1, \dots, n\}$ com $\alpha_i \leq \alpha_j$ para $i \leq j$ e $\beta_r \leq \beta_s$ para $r \leq s$, um menor de ordem t de U , é o determinante*

$$\det \begin{bmatrix} u_{\alpha_1 \beta_1} & \cdots & u_{\alpha_1 \beta_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\alpha_t \beta_1} & \cdots & u_{\alpha_t \beta_t} \end{bmatrix}$$

Observação 5.3.2. *Seja $U = (u_{ij}) \in M_{m \times n}(A)$. Se $t = \min\{m, n\}$, os menores de ordem t são chamados *menores maximais* de U , enquanto os menores de ordem $t-1$ são chamados *menores submaximais* de U .*

Exemplo 5.3.3. *Considere a matriz $U \in M_{2 \times 3}(A)$ dada por*

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Então os menores de ordem 2 de U são $ae - bd, af - cd, bf - ce$.

Definição 5.3.4. Sejam $U = (u_{ij}) \in M_{m \times n}(A)$ e $t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < t \leq \min\{m, n\}$. O ideal gerado pelos menores de ordem t de U é chamado *ideal determinantal de U* , e é denotado por $I_t(U)$.

Exemplo 5.3.5. Se

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de indeterminadas sobre um corpo k , então o ideal gerado pelos menores sub-maximais de U , o ideal $I_2(X) \in k[x_1, \dots, x_9]$, é dado por $I_2(X) = (x_1x_5 - x_4x_2, x_1x_6 - x_4x_3, x_2x_6 - x_5x_3, x_4x_8 - x_7x_5, x_4x_9 - x_7x_6, x_5x_9 - x_8x_6, x_1x_9 - x_3x_7, x_1x_8 - x_2x_7, x_2x_9 - x_3x_8)$.

Teorema 5.3.6. Sejam $U = (u_{ij}) \in M_{m \times n}(A)$ e $s > 0$. Então

$$\text{ht}(I_t(U)) \leq (m - t + 1)(n - t + 1).$$

Demonstração. Ver [7, (2.1) Theorem] □

Teorema 5.3.7. Seja $X = (x_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de indeterminadas sobre um corpo k . Então $I_t(X)$ é um ideal primo de $k[x_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$.

Demonstração. Ver [7, (2.10) Theorem] □

5.4 Grafos simples e finitos

A seguir, veremos alguns conceitos da teoria de grafos que é crucial para o que é estudado no Capítulo 3. Nos restringiremos à definição de grafo finito, mas em [23], é possível ver uma definição mais geral desse conceito.

Definição 5.4.1. Um *grafo finito* é um par $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ é chamado *conjunto de vértices*, e $E(G) = \{\{v_i, v_j\}; v_i, v_j \in V(G)\}$ é chamado *conjunto de arestas*.

A ideia de obter subestruturas a partir de estruturas induzidas não é uma prática restrita à álgebra. No caso dos grafos por exemplo, temos a seguinte definição:

Definição 5.4.2. Dados G um grafo e $V' \subset V(G)$, o *subgrafo induzido* por V' , denotado por G_V é o grafo tal que $V(G_V) = V'$, e $E(G_V) = \{\{i, j\}; i, j \in V'\}$.

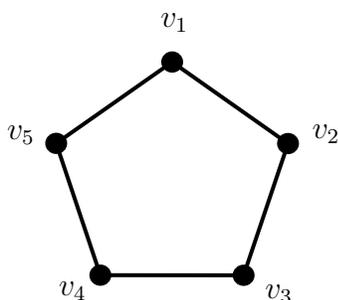
Focaremos nossas atenções nos grafos simples e finitos. Vejamos como são definidos e exemplificados tais conceitos.

Definição 5.4.3. Dizemos que um grafo finito é *simples* se esse não possui arestas múltiplas entre os vértices, nem loops nos mesmos.

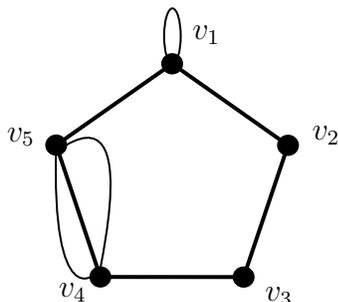
Exemplo 5.4.4. Considere o par

$$G = (\{v_1, \dots, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}\}).$$

É fácil ver que tal par representa um grafo finito simples, tendo como representação



Por outro lado, abaixo temos uma representação de um grafo finito que não é simples, pois possui um loop no vértice \$v_1\$ e três arestas ligando \$v_4\$ à \$v_5\$.



A menos do contrário, todo grafo \$G\$ será simples e finito, tendo \$V(G) = \{1, \dots, n\}\$ como conjunto de vértices.

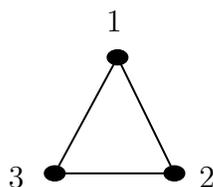
Definição 5.4.5. Seja \$G\$ um grafo. Uma *m-coloração de \$G\$* é uma função, que associa a cada vértice de \$G\$ a um número em \$\{1, \dots, m\}\$ chamado cor, de forma que nenhuma aresta de \$G\$ tenha todos os seus vértices atribuídos a uma mesma cor. Além disso, o *número cromático* de \$G\$, é \$\chi(G) = \min\{m \in \mathbb{N}; \text{ existe uma } m\text{-coloração de } G\}\$.

Agora vejamos um exemplo de *m-coloração*.

Exemplo 5.4.6. Considerando o grafo finito simples do Exemplo 5.4.4, temos que $V(G) = \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_5\}$ é uma 3-coloração para G .

Definição 5.4.7. Um grafo G é dito *completo* se cada par de vértices distintos são unidos por uma única aresta.

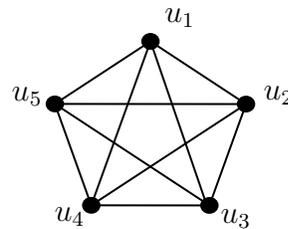
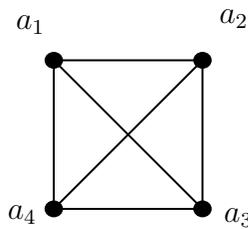
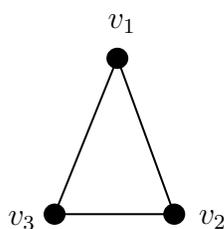
Exemplo 5.4.8. Um exemplo elementar de grafo completo é $G = (\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\})$, tendo como representação



A definição acima motiva o conceito de clique de um grafo. Mais precisamente,

Definição 5.4.9. Sejam G um grafo, e $m \geq 2$. O *clique de G de tamanho m* é um conjunto de vértices $V' = \{v'_1, \dots, v'_m\} \subset V(G)$ que formam um subgrafo completo de G . Tal subgrafo é denotado por K_m . Além disso, o *número de cliques* de G , denotado por $\omega(G)$, é a maior dentre as cardinalidades dos cliques de G .

Exemplo 5.4.10. Abaixo, temos representações para K_3, K_4, K_5 , respectivamente.



O lema a seguir nos fornece uma informação importante sobre o clique de um grafo, e sua relação com o número cromático.

Lema 5.4.11. Se G é um grafo tal que $G = K_m$, então $\chi(G) = m$.

Demonstração. Ver [23], página 250. □

Definição 5.4.12. Seja G um grafo. Um *m -ciclo* de G (ou ciclo de tamanho m de G) denotado por C_m , é um subgrafo de G tal que $V(C_m) = \{1, \dots, m\} \subset V(G)$, e $E(C_m) = \{\{1, 2\}, \dots, \{m-1, m\}, \{m, 1\}\}$.

Exemplo 5.4.13. O grafo simples finito do Exemplo 5.4.4, é um caso de C_5 , enquanto no Exemplo 5.4.8, temos que $K_3 = C_3$.

No caso dos grafos cíclicos, o número cromático fica bem determinado, dependendo da paridade da sua quantidade de vértices. Mais precisamente,

Lema 5.4.14. *Seja G um grafo m -cíclico. Se m é par, então $\chi(G) = 2$. Se m for ímpar, então $\chi(G) = 3$.*

Demonstração. Ver [5, Lemma 12, pag 68]. □

Outra definição bastante conhecida e elementar da teoria de grafos, é a de grafo bipartido.

Definição 5.4.15. Um grafo G é *bipartido* se toda aresta de G conecta um vértice em U a um vértice em V , onde U e V são conjuntos disjuntos de $V(G)$ tais que $V(G) = U \cup V$.

Intuitivamente, um grafo *bipartido*, é aquele cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos que são conjuntos independentes.

Exemplo 5.4.16. O grafo K_5 do Exemplo 5.4.10, é um caso de grafo bipartido.

O próximo resultado, caracteriza os grafos bipartidos em termos de ciclos.

Proposição 5.4.17. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não conter ciclos ímpares.*

Demonstração. Ver [12, Proposition 1.6.1]. □

Definição 5.4.18. Seja G um grafo. Um subconjunto $V' = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V(G)$ é dito *conjunto independente*, se nenhuma aresta de G tem todos os seus vértices contidos em V' . Além disso, o *número de independência de G* , denotado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade do maior conjunto independente de G .

A partir da definição acima, podemos perceber que uma m -coloração de um grafo pode ser vista como uma partição dos vértices desse grafo em m conjuntos independentes.

Exemplo 5.4.19. A partir dos Exemplos 5.4.4 e 5.4.6, podemos concluir que $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ e $\{v_5\}$ são conjuntos independentes de G .

Quando o número cromático de um subgrafo induzido coincide com o número de cliques do mesmo, e tal fenômeno ocorre em todos os subgrafos induzidos, o grafo principal recebe uma denominação, a de *grafo perfeito*. Mais precisamente,

Definição 5.4.20. Um grafo G é *perfeito* se, para cada subconjunto $V \subset V(G)$, tem-se $\omega(G_V) = \chi(G_V)$. Caso contrário, dizemos que G é um *grafo imperfeito*.

Observação 5.4.21. Segue imediatamente da definição que se G é um grafo perfeito, então todo subgrafo induzido de G também o é.

Existe um tipo particular de grafos imperfeitos que serão utilizados para demonstrar alguns resultados apresentados nesse trabalho. São os grafos minimalmente imperfeitos.

Definição 5.4.22. Um grafo G é dito *minimalmente imperfeito* ou *imperfeito minimal*, se não for perfeito, mas todo subgrafo próprio de G for perfeito.

Teorema 5.4.23. *Seja G um grafo minimalmente imperfeito com n vértices. Então $n = \alpha(G)\omega(G) + 1$, e $\chi(G) = \omega(G) + 1$.*

Demonstração. Ver [15, Theorem 3]. □

Definição 5.4.24. Dado G um grafo, o *complemento de G* , denotado por \overline{G} , é o grafo que possui $V(G)$ como conjunto de vértices, e $\{i, j\} \in E(\overline{G}) = \{\{i, j\}; \{i, j\} \notin E(G)\}$ como conjunto de arestas.

Exemplo 5.4.25. Se $G = (\{1, \dots, 5\}, \{1, 2\}, \dots, \{5, 1\})$, então

$$\overline{G} = (\{1, \dots, 6\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 1\}).$$

Um fato importante sobre o complemento de um grafo G , é que seus cliques são os conjuntos independentes de \overline{G} tais que $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ e $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$. Além disso, podemos observar também que uma m -coloração de \overline{G} é uma partição de $V(G)$ em m cliques de G .

Teorema 5.4.26. (Replicação) *Seja G um grafo perfeito. Então o grafo $G_{r,s}$, obtido a partir de G pela substituição do vértice r com um grafo completo de cardinalidade s , é um grafo perfeito.*

Demonstração. Ver [21, Theorem 1]. □

Teorema 5.4.27. (Grafo Perfeito) *G é um grafo perfeito, se, e somente se, \overline{G} é um grafo perfeito.*

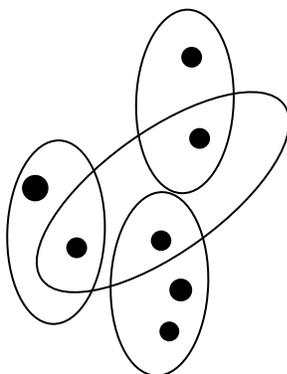
Demonstração. Ver [12, Theorem 28.1]. □

Existe um conceito de generaliza a definição de grafos, são os hipergrafos. Veremos uma definição mais intuitiva desse objeto, que será suficiente para os estudos desse trabalho.

Definição 5.4.28. Um *hipergrafo*, é um par ordenado $H = (V(H), E(H))$, onde $V(H) \subset \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices, e $E(H) = \{V_1, \dots, V_d\}$, como conjunto de arestas, onde para cada $\ell > 0$, $V_\ell \subset \{1, \dots, n\}$ pode conter mais do que dois elementos.

Uma diferença imediata entre os grafos e os subgrafos, é que, enquanto os grafos têm suas arestas compostas por dois vértices, as arestas dos hipergrafos podem ter mais do que dois vértices.

Exemplo 5.4.29. A seguir, temos um exemplo de hipergrafo, onde as representações elípticas se referem às arestas, e as circulares, referem-se aos vértices.



Observação 5.4.30. Os conceitos definidos envolvendo grafos que aparecem nesse apêndice, tais como coloração, conjunto independente, dentre outros, são definidos de maneira análoga para os hipergrafos.

Bibliografia

- [1] Aberbach I.; Huneke C. and Trung N. V. , *Reduction numbers, Briançon-Skoda theorems and the depth of Rees rings*, Compositio Math. **97** (1995), 403–434. 32
- [2] Alberich-Carramiñana M. , *Geometry of the Plane Cremona Maps*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1769 (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002). 67
- [3] Bayer D. and Stillman M., *Macaulay: a computer algebra system for algebraic geometry*, Macaulay version 3.0 1994 (Macaulay for Windows by Bernd Johannes Wu-ebben, 1996). 67, 68
- [4] Bhaumik C.; Sarwar H. *Existence of unimodular element in a projective module over symbolic Rees algebras*, arXiv:2301.05394 [math.AC]. 33
- [5] Bigatti A.; Gimenez P.; Sáenz-de-Cabezón E. (eds) *Monomial Ideals, Computations and Applications*, Vol.2083 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg., 2013. 55, 76
- [6] Bruns, W. ; Herzog, J. *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 39, Cambridge University Press, 1993. 70, 71
- [7] Bruns, W. ; Vetter, U. *Determinantal rings*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York Londo Paris Tokyo, 1988. 72, 73
- [8] Bondy, J. A. ; Murty, U. S. R. *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976. 55, 73, 75
- [9] Borevich Z. I. ; Shafarevich I. R. *Number Theory*, Academic Press. New York, 1986. 46
- [10] Catalano-Johnson, M. *The homogeneous ideals of higher secant varieties*, J. Pure Appl. Algebra 158 (2–3) (2001) 123–129. 11, 47, 49

- [11] Cox, D.; Little, J.; O’Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. 3a edição, New York: Springer, 2007. 53
- [12] Diestel, R. *Graph theory*, Third Edition, New York; Springer, 2000. 55, 59, 60, 76, 77
- [13] Dao, H., De Stefani, A., Grifo, E., Huneke, C., Núñez-Betancourt, L. *Symbolic powers of ideals*. Salvador, Brazil, 2018. 26, 28
- [14] Eisenbud, D. *Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150, New York, Springer-Verlag, 1995. 11, 45
- [15] Gasparian, G.S. *Minimal imperfect graphs: a simple approach*, *Combinatorica* 16 (1996), 209–212. 55, 60, 61, 77
- [16] Grifo, E. ; Seceleanu, A. *Symbolic Rees Algebras*, In: *Commutative Algebra*. Springer, Cham, 2021. p. 343-371. 31, 45
- [17] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, 1977. 45, 46
- [18] Hoang, Chinh T. ; Sritharan, R. e col. *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York 2016. 55
- [19] Huneke, C. ; Swanson, I. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Math. Society, Lecture Notes Series 336, Cambridge University Press (2006). 32, 34, 42, 43
- [20] Huneke, C. *On the finite generation of symbolic blow-ups*, *Math. Z.* 179 (1982), no. 4, 465–472. 31
- [21] Lovász, L. *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, *Discrete Math.* 2 (30) (1972) 253–267. 55, 77
- [22] Matsumura, H. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, 1986. 46, 70, 72
- [23] Murty, U.; Bondy, J. *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976. 55, 73, 75

- [24] Nagata, M. *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. of the Internat. Congr. of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press, London (1960), pp. 459-462. 46
- [25] Nagata, M. *On the 14th problem of Hilbert* Amer. J. Math., 81 (1959), pp. 766-772. 46
- [26] Ramos, Z.; Simis, A. *Symbolic powers of perfect ideals of codimension 2 and birational maps*, J. Algebra 413 (2014) 153–19 64
- [27] Rees, D. *On a problem of Zariski*, Illinois Journal of Mathematics 2 (1958), n°1, 145–149. 11, 40, 41, 45, 46
- [28] Samuel, P. ; Zariski, O. *Commutative Algebra I*, Graduate Texts in Mathematics. New York, Springer-Verlag, 1975. 16
- [29] Simis A., *Cremona transformations and some related algebras*, J. Algebra 280 (2004) 162–179. 65
- [30] Simis, A. *Commutative Algebra*. De Gruyter Textbook, 2020. 25
- [31] Simis, A. ; Ulrich, B. *On the Ideal of an embedded join*, J. Algebra 226 (2000),1-14. 50
- [32] Sullivant, S. *Combinatorial symbolic powers*. Journal of Algebra 319 (2008) 115–142. 12, 47, 49, 51
- [33] Sturmfels, B. ; Sullivant, S. *Combinatorial secant varieties, in: Special Issue: In Honor of Robert MacPherson*, Q. J. Pure Appl. Math. 2 (2006) 285–309. 53, 55, 60
- [34] Vasconcelos W., *Arithmetic of Blowup Algebras*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 195, Cambridge University Press, (1994). 39
- [35] Villarreal, R. *Monomial Algebras*, 2nd Edition. Chapman and Hall/CRC, New York, 2015. 70