



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Sólidos Geométricos: uma abordagem histórica, conceitual e aplicada sobre volumes

por

Robson Francisco dos Santos

Mestrado Acadêmico em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo

Agosto de 2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237s Santos, Robson Francisco dos
Sólidos Geométricos: uma abordagem histórica, conceitual e aplicada sobre volumes / Robson Francisco dos Santos ; orientador Gerson Cruz Araujo. - São Cristóvão, 2023.
106 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Matemática (Ensino médio). 2. Geometria espacial. I. Araujo, Gerson Cruz orient. II. Título.

CDU 514.113



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



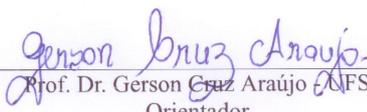
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

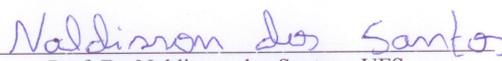
Sólidos geométricos: Uma abordagem histórica, conceitual e aplicada.

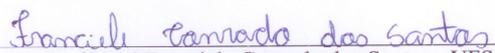
por

Robson Francisco dos Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo - UFS
Orientador


Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Primeiro Examinador


Prof.^a Dr.^a Franciele Conrado dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Agosto de 2023.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa
Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão - Sergipe - Brasil - Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail: profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido a vida, por estar sempre me guiando em todas as minhas ações e decisões, proporcionando-me mais este momento de graça, que traz consigo muito aprendizado e por sempre me dá forças para superar todas as adversidades encontradas ao longo do percurso.

A minha mãe pelo apoio, incondicional, dado em toda minha trajetória de vida. As minhas filhas, Lavinia e Beatriz, por compreenderem minha ausência em alguns momentos de suas vidas ao longo deste curso.

A minha namorada, companheira e amiga, Patrícia Duarte, por toda força e sensibilidade em aceitar a renúncia de minha presença em alguns períodos de sua vida devido ao curso.

Aos companheiros e amigos do PROFMAT, pelos momentos de estudo, descontração e amizade. Aqui cito, em especial, dois deles – Erivaldo e Wallisson, dois amigos irmãos..

Ao meu amigo, mestre pelo PROFMAT, José William Júnior, por toda contribuição através de ensinamentos e empréstimo de material ao longo do curso. Aos professores e coordenador do PROFMAT/UFS, que tanto contribuíram para minha formação e que certamente tiveram grandes e valiosas contribuições para que esse momento fosse possível. Saibam que os seus ensinamentos e orientações estão sendo um norte na minha vida profissional e pessoal.

Ao meu orientador, professor Dr. Gerson Cruz Araújo, pela orientação, pelo incentivo e ajuda durante o curso e, principalmente, na construção desse trabalho.

A secretaria Municipal de Capela, a qual mantenho vínculo efetivo em regência, pelo apoio necessário.

Aos gestores, especialistas e coordenadores das escolas Municipais Major Honorino Leal e Zózimo Lima, pela flexibilidade na distribuição dos meus horários e dias de trabalho, e pela compreensão em minhas ausências durante os sábados letivos.

Por fim, a todas as pessoas que contribuíram, de forma direta ou indireta, para realização desse trabalho, um forte abraço e meu muito obrigado. Que Deus abençoe-nos poderosamente, hoje e sempre.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho é aludido o conceito de volume dos principais sólidos geométricos estudados no ensino médio – modalidade de ensino a qual ele se destina. Nessa abordagem, priorizou-se o cálculo de volume do Prisma, da Pirâmide, do Cilindro, do Cone e da Esfera, em duas vertentes: princípio de Cavalieri – método muito presente nos livros didáticos da última etapa da educação básica e o uso do processo de integração como método alternativo nas deduções das fórmulas de volume dos sólidos aqui estudados. Também é versado sobre a aplicação do conceito de volume abordado em algumas avaliações externas–OBMEP e ENEM; além de retratar a importância histórica da geometria espacial, seu ensino e sua aprendizagem tanto na vida escolar dos discentes quanto no seu convívio social. Haja vista que foi feito um estudo de campo mostrando a aplicação do conhecimento adquirido em sala de aula sobre o conceito de volume, seja ele empírico ou cognitivo, e o impacto desse aprendizado na tomada de decisão de um cidadão que visa melhorar sua produção de insumos alimentícios para criação de gado, sem perder de vista o custo/benefício de todo esse processo.

Palavras-chaves: Sólidos geométricos. Volume. Aplicação.

Abstract

In this work, the concept of volume of the main geometric solids studied in high school is alluded to – the teaching modality for which it is intended. In this approach, priority was given to calculating the volume of the Prism, the Pyramid, the Cylinder, the Cone, and the Sphere, in two aspects: Cavalieri's principle - a method very present in textbooks of the last stage of basic education and the use of the process of integration as an alternative method in the deduction of the volume formulas of the solids studied here. It is also versed on the application of the concept of volume addressed in some external evaluations–OBMEP and ENEM; in addition to portraying the historical importance of spatial geometry, its teaching and learning both in the students' school life and in their social life. Considering that a field study was carried out showing the application of knowledge acquired in the classroom on the concept of volume, whether empirical or cognitive, and the impact of this learning on the decision-making of a citizen who aims to improve his production of inputs food products for cattle raising, without losing sight of the cost/benefit of this whole process.

Keywords: Geometric solids. Volume. Application.

Lista de Figuras

2.1	Prisma	21
2.2	Prisma reto	22
2.3	Prisma Oblíquo	23
2.4	Prisma regular	23
2.5	Secção transversal do prisma	23
2.6	Secção reta do prisma	24
2.7	Prismas	24
2.8	Paralelepípedo reto retângulo	25
2.9	Cubo	25
2.10	Pirâmide	25
2.11	Pirâmides	26
2.12	Pirâmide regular	26
2.13	Secção da pirâmide	27
2.14	Cilindro	27
2.15	Cilindro oblíquo	28
2.16	Cilindro reto	28
2.17	Secções do cilindro	29
2.18	Cilindro equilátero	29

2.19	Cone	30
2.20	Cone reto	31
2.21	Cone oblíquo	31
2.22	Secções do cone	32
2.23	Sec meridiana no cone reto	32
2.24	Cone equilátero	32
2.25	Esfera	33
2.26	Sec da esfera	33
2.27	Círculo máximo da esfera	34
3.1	Ilustra do Princípio de Cavaliere. Fonte: Cole Profmat Geometria- SBM	36
3.2	Material dourado	38
3.3	Paraleleppede	38
3.4	Paralelepípedos justapostos	39
3.5	Cubo	39
3.6	Sec transversal do paraleleppede e do prisma	40
3.7	Triângulos semelhantes	41
3.8	Pirâmides seccionadas	42
3.9	Sec do prisma em pirâmides triangulares	42
3.10	Volume da pirâmide	44
3.11	Sec do prisma e do cilindro	45
3.12	Sec do cone e da pirâmide	46
3.13	Anticlepsidra	47
3.14	Sec da esfera e do cilindro	48
3.15	Coroa circular	48

5.1	Secção transversal do sólido S	65
5.2	Paralelepípedo reto retângulo e o sistema cartesiano xOy	66
5.3	Prisma hexagonal e o sistema xOy	67
5.4	Pirâmide no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal	68
5.5	Esquema para determinação do volume do tronco de pirâmide	71
5.6	Cilindro circular reto e o sistema cartesiano xOy	73
5.7	Cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal	74
5.8	Tronco de cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal	76
5.9	Visualização da relação entre x e y	76
5.10	Esfera no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal	78
5.11	Calota esférica e o sistema cartesiano xOy	80
5.12	Segmento esférico e o sistema cartesiano xOy	82
5.13	Relação entre R, r e h	85
6.1	Distribuição das águas na terra (Fonte: SHIKLOMONOV, 1998 apud TUNDISI	87
6.2	Tabela sobre os usos múltiplos da água (Fonte: TUNDISI, 2020)	88
6.3	Tipos de cisternas (Fonte: EMBRAPA)Tipos de cisternas (Fonte: EMBRAPA)	90
6.4	Materiais utilizados na pesquisa	96
6.5	Medições externa e interna da profundidade da cisterna.	97
6.6	Registro no caderno da medida da profundidade da cisterna.	97
6.7	Medição do comprimento da circunferência da área da base da cisterna.	98
6.8	Registros do comprimento do círculo da base e cálculo da medida do raio da base da cisterna.	99
6.9	Registro do cálculo da medida da área da base da cisterna.	99

Sumário

Agradecimentos	1
Resumo	3
Abstract	4
Introdução	12
1 Falando sobre Geometria Espacial	14
1.1 Um breve panorama histórico sobre a Geometria Espacial	14
1.2 Importância do ensino de Geometria Espacial	17
1.3 Importância do estudo da Geometria Espacial	18
2 Conceitos e definições de alguns Sólidos Geométricos	21
2.1 Prisma	21
2.1.1 Classificação dos Prismas	22
2.1.2 Secção de um Prisma	23
2.1.3 Natureza de um Prisma	24
2.2 Pirâmide	25
2.2.1 Elementos de uma Pirâmide	25
2.2.2 Classificação ou Natureza de uma Pirâmide	26

2.2.3	Secção de uma Pirâmide	27
2.3	Cilindro	27
2.3.1	Elementos do Cilindro	27
2.3.2	Classificação dos Cilindros	28
2.3.3	Secção de um Cilindro	29
2.4	Cone	30
2.4.1	Elementos do Cone	30
2.4.2	Classificação dos Cones	30
2.4.3	Secção de Cone	31
2.5	Esfera	33
2.5.1	Secção da Esfera	33
3	Volume	35
3.1	Breve histórico sobre Cavalieri	35
3.2	Áreas e volumes pelo princípio de Cavalieri	36
3.3	Volumes no Ensino Médio pelo princípio de Cavalieri	37
3.4	Ideia intuitiva de volume	37
3.5	Sugestão de Atividade Didática	38
3.6	Volume do Paralelepípedo Retângulo	38
3.7	Volume do Prisma	40
3.8	Volume de uma Pirâmide	41
3.9	Volume de uma Pirâmide Qualquer	43
3.10	Volume do Cilindro	44
3.11	Volume de um cone	45
3.12	Volume da Esfera	46

<i>SUMÁRIO</i>	10
4 Aplicações	50
4.1 Pequeno histórico sobre a OBMEP	50
4.2 Pequeno histórico sobre o ENEM	51
4.3 Exemplos	51
5 Uso da ferramenta integral definida como prática alternativa para demonstrar as fórmulas de volume dos sólidos geométricos	64
5.1 O método da integração para o cálculo de volumes	64
5.2 Volumes do Paralelepípedo reto retângulo e do prisma	66
5.3 Volume da pirâmide	68
5.4 Volume do Tronco de pirâmide	70
5.5 Volume do cilindro circular reto e oblíquo	72
5.6 Volume do cone circular	74
5.7 Volume do tronco de cone circular	75
5.8 Volume da esfera	78
5.9 Volume da calota esférica	79
5.10 Volume do segmento esférico	81
6 Intervenção no ensino	86
6.1 Águas	86
6.2 Cisternas	89
6.3 Tipos de cisternas	89
6.4 Critérios para captação	90
6.5 Dimensionamento da cisterna	91
6.6 Relato do estudo teórico sobre cisternas – custo/benefício; com os alunos em sala de aula	92

<i>SUMÁRIO</i>	11
6.7 Relato do estudo de campo sobre cisternas para captação e armazenamento de água	95
Conclusão	102
Referências Bibliográficas	103

Introdução

Vivemos em um mundo físico rodeado de formas, das simples às complexas, e cada uma delas tem sua respectiva função nesse espaço. Observar e compreender esse espaço para interagir e sobreviver a ele é tarefa fundamental de cada cidadão que participa ativamente em sociedade resolvendo problemas das diversas áreas do conhecimento.

Segundo Ubiratan D'Ambrósio (2002),

Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos materiais e intelectuais para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer, como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais.

É neste contexto de mundo rodeado de formas geométricas que surge a necessidade de se apropriar da ideia, conceitos e definições sobre volume de sólidos geométricos para construir soluções possíveis dentro do espaço físico o qual estamos inseridos. Haja vista, corriqueiramente sempre nos deparamos com situações que exigem de nós tomada de decisão sobre formas e espaço, desde situações elementares à melindrosas, como por exemplo: escolher um roupeiro que se adeque ao espaço físico do quarto, o tamanho da fossa séptica em regiões que não há rede de saneamento básico, construção de cisternas para armazenamento de água, arquitetura, engenharia e nos mais variados lugares na natureza.

O primeiro registro sobre volume data de 300 a.C. quando Euclides em sua obra “Os Elementos” livro XII, apresenta como calcular o volume do prisma, do cilindro, do cone e da pirâmide. Por volta de 200 a.C., Arquimedes foi o primeiro a tratar com rigor e elegância uma expressão do volume da esfera no livro “Superfície e volume do Cilindro e da Esfera”.

Intuitivamente, o volume de um sólido geométrico representa a quantidade de espaço que ele ocupa. Esse modo intuitivo de definir volume é aceito desde os primórdios, haja vista a sua praticidade e facilidade em entendê-lo. Neste contexto, calcula-se o volume de um sólido geométrico comparando-o com uma unidade de volume pré-estabelecida que normalmente é o volume de um

cubo unitário, isto é, cubo de aresta que mede uma unidade de comprimento. O volume do sólido é expresso pelo número de vezes que o volume do cubo unitário cabe no volume do sólido em questão. Porém, nem sempre o sólido geométrico permite tais comparações com a unidade de volume estabelecida, por apresentar irregularidades em suas formas. Diante desse fato, houve necessidade de se pensar em métodos mais gerais para calcular o volume de sólidos ditos irregulares.

Surge então, alguns métodos como o Princípios de Cavalieri, usado neste trabalho para justificar as deduções das fórmulas do volume do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera. E o uso da ferramenta do cálculo diferencial e integral - a integral definida; abordada aqui como prática alternativa nas demonstrações das fórmulas de volume de alguns sólidos geométricos.

O presente trabalho compõe-se de seis capítulos. No primeiro é feito uma breve abordagem histórica sobre sólidos geométricos e o ensino e aprendizagem da geometria desses sólidos. No segundo capítulo é apresentado os conceitos e definições sobre os principais sólidos geométricos estudados no ensino médio e presentes nos livros didáticos para esta modalidade de ensino. Já o terceiro capítulo, apresenta a ideia intuitiva de volume, acompanhada de uma sugestão de atividade, um breve apanhado sobre Cavalieri e o cálculo de volume dos principais sólidos: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, através do princípio de Cavalieri. No quarto capítulo, é anunciado algumas aplicações sobre volumes dos sólidos, aqui já mencionados, presentes em exames externos como ENEM e OBMEP. Já o quinto capítulo apresenta o uso da integral definida como prática alternativa nas demonstrações das fórmulas de volume de alguns sólidos geométricos. Por fim, o sexto e último capítulo, traz uma proposta de intervenção pedagógica através de uma pesquisa de campo que oportuniza a aplicação dos conceitos sobre volume, no dia a dia, fomentando a aprendizagem sobre eles.

O que se propõe com este trabalho é deixar o registro de um texto que aborda a geometria espacial, volume, em seu aspecto histórico, seu ensino, sua aprendizagem, sua aplicação e ferramentas para demonstração de suas fórmulas, para que possa servir de base na ministração de aulas na educação básica, não na sua totalidade, uma vez que no último capítulo é utilizado a integral definida como ferramenta alternativa na demonstração das fórmulas de volumes de alguns sólidos geométricos, algo que, talvez, não seja apropriado ao nível de desenvolvimento de alguns alunos dessa modalidade de ensino. Por outro lado, não se propõe esgotar o objeto de estudo - volume dos sólidos geométricos; pois o conhecimento é dinâmico e mutável.

Capítulo 1

Falando sobre Geometria Espacial

Neste capítulo apresentamos um breve panorama histórico sobre a geometria espacial e a importância do seu ensino e do seu estudo na formação do discente. Desde já, destacamos que o embasamento teórico, aqui apresentado, foi extraído de [3], [7], [10], [11], [13], [16], [19] e [27].

1.1 Um breve panorama histórico sobre a Geometria Espacial

De acordo com Boyer (2012), não se pode, ao certo, expor enfaticamente onde se originou a geometria plana e espacial, pois há riscos de falha, haja vista de que o surgimento de muitos assuntos matemáticos remonta à escrita. Deste modo, todo o conhecimento que temos hoje se baseia em documentos chamados de papiros. Dentre os principais podemos citar o “papiro de Rhind” e o “papiro de Moscou”. Neles estão expostos problemas e suas soluções.

Foi a partir dos últimos seis milênios que o homem começou a fazer registros de seus pensamentos, descobertas e estudos. Informações sobre o homem pré-histórico, por exemplo, baseiam-se em interpretações a partir de alguns artefatos que chegaram até os dias atuais.

Para Eves (2004), o cálculo do volume de um paralelepípedo reto retângulo já era realizado pelos babilônios, como também, o volume de um prisma reto de base trapezoidal. Estes acreditavam que a circunferência media o triplo do seu diâmetro e, a partir daí concluíam que $\pi \cong 3$. Admitiam, também, que a área do círculo valia o duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência dada. Assim, calculavam o volume de um cilindro como sendo o produto da área da base pela altura e, de maneira equivocada, calculavam o volume de um tronco de cone e de um tronco de pirâmide fazendo o produto da altura pelo semiperímetro das bases.

Notadamente, uma grande evolução no estudo da geometria deu-se com a valorosa contribuição sistemática de Euclides, por volta de 300 a.C., na obra “*Os Elementos*”. Tal escrito sintetizava toda

a geometria conhecida até então, sistematizada através do método lógico-dedutivo, e que se tornaria o livro-texto de maior relevância em toda a história das ciências. Escrito esse que é considerado o mais bem sucedido até a presente data.

Trabalho composto por 465 proposições distribuídas em 13 livros, “*Os Elementos*”, versa nos livros XI, XII e XIII sobre a geometria espacial. Porém, em particular, é no livro XIII- composto por dezoito proposições; que ele trata sobre o cálculo de volumes de sólidos geométricos pela aplicação do método da exaustão. Boyer (2012) afirma que no início desse livro, está presente uma demonstração do teorema que enuncia a seguinte afirmação:

“As áreas de círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros.”

Neste trabalho, são calculados os volumes de pirâmides, cones, cilindros e esferas. E as determinações rigorosas dos volumes desses sólidos são atribuídas, por Arquimedes - que viveu no período 287 a.C.-212 a.C.; a Eudoxo- 408 a.C.-355 a.C.; de quem provavelmente Euclides adaptou muito de suas demonstrações.

De acordo com Lima (2006), no livro XIII de “*Os Elementos*”, não existem fórmulas fechadas para a determinação de volumes e os principais teoremas demonstrados nele são os seguintes:

- As pirâmides e os prismas de mesma base (ou mesma altura) estão entre si como suas alturas (ou bases);
- Todo prisma triangular se decompõe em três pirâmides equivalentes;
- O volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura;
- Os cones e cilindros de mesma base (ou altura) estão entre si como suas alturas (ou bases);
- Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros.

De acordo com esses teoremas temos que os volumes do prisma e do cilindro são diretamente proporcionais à altura e à base dos mesmos. Daí, o volume é determinado pela relação $V = k \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura})$, onde k é uma constante real. Já os volumes do cone e da pirâmide são determinados pela expressão $V = \frac{k}{3} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura})$. Tomando o cubo unitário como unidade padrão de volume, temos que $k = 1$. A partir daí, chegamos às fórmulas atuais de volume desses sólidos. Tais fatos evidenciam que Euclides já era conhecedor do cálculo de volume desses sólidos.

Já o quinto teorema de Euclides afirma que o volume de uma esfera de raio R é dado pela relação $V = \lambda \cdot R^3$. Para Lima (2006), o valor da constante λ não foi mencionado por Euclides. Porém, Arquimedes, mostra que $\lambda = \frac{4}{3}\pi$ e conclui que o volume é dado pela expressão $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, isto é, como calculamos até então.

O valor $\pi \cong 3,14$ foi determinado por Arquimedes através do método clássico de cálculo baseado em aproximações por polígonos regulares inscritos e circunscritos.

De acordo com Lima (2012), Arquimedes, contribuiu de forma significativa no desenvolvimento da geometria espacial. Dentre essas contribuições, podemos citar a Esfera, o Cilindro, o Cone e a Esferoide. Tais trabalhos evidenciam que foi ele, Arquimedes, o pioneiro na demonstração do cálculo, de forma rigorosa e elegante, do volume e da área da superfície da esfera. Dando destaque aos trabalhos de Arquimedes que tratam sobre volumes de sólidos, Lima (2012, p. 55) afirma que:

Sobre a esfera e o cilindro Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é quatro vezes maior que a área do seu círculo máximo. Além disso, ele encontra a área do segmento de uma esfera qualquer, mostra que o volume de uma esfera é dois terços do volume de um cilindro circunscrito à mesma, e que a superfície esférica é dois terços da superfície de um cilindro circunscrito incluindo as suas bases. (Lima, 2012, p. 55)

Segundo Eves (2004), esse trabalho foi escrito em dois livros e é constituído de 53 proposições, onde está presente o teorema que determina as superfícies de uma esfera e de uma calota esférica. Um problema interessante apresentado nesse trabalho, é o de cortar uma esfera por um plano, de modo que a razão entre os volumes dos dois segmentos esféricos obtidos seja igual a uma razão já conhecida. Porém, tal solução não está no texto.

Arquimedes resume alguns de seus resultados geométricos favoritos, nos estudos feitos sobre a esfera e o cilindro, o elegante enunciado abaixo, do qual ele desejava ter representado na lápide do seu túmulo:

“O cilindro que tem por base o maior dos círculos contidos na esfera e por altura o diâmetro dessa esfera é igual a uma vez e meia a mesma esfera, e sua superfície, incluindo as bases, é também igual a uma vez e meia a superfície da esfera”.

Em símbolos, o enunciado acima afirma que o volume e a superfície de uma esfera de raio R têm as respectivas fórmulas:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } S = 4\pi R^2$$

Vale lembrar que Herão de Alexandria, que viveu no período de 10 d. C. – 75 d. C., foi outro matemático que também deu sua valorosa contribuição na determinação de volumes. Conforme Eves (2004), Herão pode ter vivido no período entre 150 a.C. e 250 d.C.. Dentre os achados sobre os trabalhos dele, destacamos seu trabalho intitulado *“A métrica”*, distribuído em três livros. O livro II de *“A métrica”* dispõe sobre o cálculo de volumes das seguintes figuras: paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, cones, troncos de cones e troncos de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros, os cinco sólidos regulares e alguns prismatóides. Prismatóide é um poliedro cujos

vértices pertencem à planos paralelos, e suas faces estão contidas nesses planos paralelos e são chamadas de bases do prismatóide, onde sua altura é definida como sendo a distância entre esses dois planos paralelos.

Um exemplo particular de fórmula de volume de prismatóide determinada por Herão é dado pela expressão

$$V = h \left[\frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4} + \frac{(a - c) \cdot (b - d)}{12} \right],$$

onde h é altura e as bases retangulares têm como pares de dimensões as medidas a, b, c e d .

Notoriamente, os métodos desenvolvidos pelos matemáticos da Antiguidade para a determinação de volumes eram um tanto trabalhosos. Atualmente, a forma mais eficiente e genérica para a determinação dos volumes dos três corpos redondos, a saber, cilindro, cone e esfera, é o cálculo infinitesimal, com a integração de funções elementares. Consoante com Eves (2004), dos antigos, quem mais se aproximou do sentido atual de integração, por meio da aplicação do método da exaustão foi, sem dúvidas, Arquimedes, sendo considerado um dos precursores do cálculo infinitesimal, dando o desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral.

Já em meados do século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, o célebre Bonaventura Cavalieri exerceu uma grande contribuição para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal com seu livro “*Geometria dos Indivisíveis*”, em que considerava uma região plana como sendo a união de cordas paralelas e um sólido como sendo a união de placas planas paralelas. Nesse trabalho ele enuncia o seu conhecido Princípio de Cavalieri. As ideias de Cavalieri influenciaram de forma considerável Leibniz.

Para finalizar esta revisão histórica, vale ressaltar que o cálculo diferencial e integral atual foi desenvolvido por Newton e Leibniz, e isso se deu na segunda metade do século XVII, tendo como referências os trabalhos introdutórios de Fermat¹ e Descartes², bem como os trabalhos nesse contexto dos demais matemáticos da antiguidade, principalmente Arquimedes.

1.2 Importância do ensino de Geometria Espacial

A Geometria é um conhecimento importante, tendo uma vasta aplicação em situações do nosso cotidiano. O trabalho com a Geometria possibilita o desenvolvimento de habilidades como as de visualizar, experimentar, representar, além de instigar a criatividade e imaginação. Essas habilidades, dentre outras, colaboram com o entendimento das representações geométricas.

¹Pierre de Fermat viveu entre 1601 e 1665.

²René Descartes viveu entre 1596 e 1650.

Na visão de Oliveira (2007, P.03), descreve que: “O ensino de Geometria é um dos processos didáticos que requer maior sensibilidade do professor, pois trabalha a união das formas visuais com os conceitos e propriedades”. O objeto de estudo da Geometria Espacial, segundo as normas da Base Nacional Curricular Comum, deve ser visto no 3º ano do Novo Ensino Médio. Nos livros didáticos, geralmente, divide-se nos seguintes tópicos:

- Geometria espacial de posição – Uma introdução intuitiva;
- Poliedros: prismas e pirâmides;
- Corpos redondos: cilindro, cone e esfera.

Em geral, a Geometria é uma área da Matemática que é vista em algumas escolas como uma disciplina à parte, inclusive com professores diferentes, o que faz com que os alunos sigam, vendo-a apenas como mais uma disciplina, o que acaba desvinculando a Geometria da Matemática para uma parcela do alunado. Além disso, outro fato que ocorre, em algumas escolas, é que os professores simplesmente “deixam” de lado a Geometria, e quando transmitem o conteúdo geralmente ficam apenas na parte da Geometria Analítica, talvez um pouco da Geometria Plana, sendo assim a Geometria Espacial acaba sendo esquecida de certa forma. Fazendo com que possamos encontrar alunos que não sabem diferenciar uma figura plana de um sólido espacial, chegando a chamar um cubo de quadrado. Ao longo da nossa vida escolar, aprendemos (ou deveríamos ter aprendido), vários conceitos que nos permitiriam compreender a Geometria Plana de uma forma mais completa. Se ela não for bem compreendida, as deficiências irão tornar mais difíceis o aprendizado da Geometria Espacial, visto que está se processa em um universo mais rico e exigente.

Segundo Bernardi (2011), entende-se que a sensibilidade do professor exerce uma grande influência no ensino de Geometria pelo fato de que, ela transmite valores e comportamentos por meio dos procedimentos e das noções didáticas do mestre. Visto que é necessário trabalhar a Geometria Espacial em sala de aula de maneira mais lúdica, assim, fazendo os alunos enxergarem de maneira mais concreta do que se trata cada elemento de um sólido geométrico, procurando facilitar o aprendizado integrando o alunado com o conteúdo visto.

1.3 Importância do estudo da Geometria Espacial

Vivemos em um mundo rodeado de formas geométricas especialmente a espacial, seja na natureza ou no cotidiano. Daí, surge a necessidade de se apropriar dos conhecimentos da geometria espacial para obter a formulação matemática destes objetos, padronizando e classificando conforme suas formas.

Esse elo entre a teoria e a prática é fundamental para a aprendizagem, na qual devemos conhecer vários elementos básicos que constituem essa importante parte da matemática que é a geometria espacial. Batizada como a ciência do espaço, ela favorece noções básicas que nos dão suporte para explorar cada vez mais as figuras tanto geometricamente como algebricamente.

A geometria espacial é a área da matemática que estuda as figuras tridimensionais, onde tem porção finita e são limitados por superfície planas e curvas, além das áreas, volumes, propriedades e relações. Ela é, em primeiro momento, apresentada ao aluno a partir da geometria plana, enfatizando na grande maioria a figuras planas, como quadrado, círculo e o triângulo dando menos ênfase à tridimensionalidade.

Historicamente a geometria é uma área da matemática que ficou na grande maioria das vezes como um segundo plano dentro das escolas, especialmente nas públicas. De acordo com Lorenzato (1995) existem duas razões principais para isso: a priorização de explicar os conteúdos algébricos, pois são eles que preenchem a grande maioria dos livros didáticos e outro caso de maior ascensão era a bagagem que muitos professores não tinham na sua formação e com isso acabavam acarretando um déficit na qual em grande parte deixa o aluno seguir para a série seguinte sem completar a grade curricular da série estudada.

Já para Pavanello (1993), o abandono do ensino da geometria é causado devido ao contexto histórico-político, pois em 1971 foi promulgada a lei 5692/71 em que professor deixou de ter autonomia para elaborar o seu próprio roteiro de conteúdo, prejudicando não só os professores, mais em grande parte o alunado, devido ao fato de sempre deixar a geometria para última unidade, e não havendo tempo suficiente, não era trabalhada de forma adequada, ficando sempre para série seguinte essa lacuna.

Outro fator histórico é que a geometria não era trabalhada de forma interdisciplinar com outras matérias, nem com outros conteúdos correlacionados, de forma que a aula era monótona e muitas vezes deixava os alunos confusos, como afirma Almouloud (apud Machado, 2003, p.125). No ensino fundamental o conteúdo geométrico como é trabalhado com uma faixa etária pouco questionadora deixa de orientar um futuro pesquisador. É papel do professor dinamizar o conteúdo se conectando com uma didática pedagógica que lhe influenciará e deixar de ser um aluno não participativo para transformá-lo num ser que apenas possua o conhecimento e sim que saiba aplicá-lo no seu cotidiano.

Por isso essa pesquisa tem como proposta resgatar os alunos do ensino médio através de uma pesquisa de campo associadas à construção das maquetes que serão aplicadas numa série do 2º ano do ensino médio de uma escola particular na cidade de Remanso-BA, com o objetivo será que os participantes tornem pesquisadores e logo questionadores das formas geométricas estudadas, na qual poderão alcançar uma melhor visualização e representação das formas geométricas buscando uma correlação com o seu dia a dia fazendo com que os mesmos tenham uma melhor aplicabilidade.

Sabe-se que a Geometria, segundo Ferreira (1999, p.983)

é ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos” ou ainda “um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço) (Ferreira, 1999, p. 983).

Etimologicamente a palavra geometria (geo+metria) significa “medição da terra”. Ela faz parte da vida do ser humano desde a antiguidade, onde os egípcios deixaram magníficos documentos escritos, nos quais revelam os primeiros registros dos conhecimentos geométricos. Embora existam outras geometrias é a geometria Euclidiana que prevalece dentro dos estabelecimentos, pois “estuda as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto relações internas entre os seus elementos, sem levar em consideração o espaço” (Nacarato; Passos, 2003, p. 24). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) destacam a importância desse ramo da matemática que também serve de instrumento para outras áreas do conhecimento:

O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (Brasil, 1997, p. 39).

Por isso a partir das maquetes possibilitamos que o aluno explore, construa, explore, represente, discuta, investigue e perceba as inúmeras propriedades fundamentais para a construção do conhecimento matemático espacial, de toda essa combinação o aluno consiga habilidades para explorar toda a figura.

Segundo Fürkotter e Morelatti (2009, p. 29) apontam “é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno”.

Capítulo 2

Conceitos e definições de alguns Sólidos Geométricos

Neste capítulo abordamos os conceitos e definições dos principais sólidos geométricos estudados no Ensino Médio tais como: prisma, pirâmide, cone, cilindro e esfera. Apresentamos também alguns elementos de maior relevância nos respectivos sólidos que serão retomados no próximo capítulo para demonstração de determinados modelos matemáticos necessários para cálculo de volumes.

2.1 Prisma

Definição 2.1.1. *Dados os planos α e β , distintos e paralelos, uma reta r secante aos planos α e β e o polígono contido em α . Denomina-se prisma o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos a r em que uma extremidade é um ponto do polígono e a outra extremidade pertença ao plano β .*

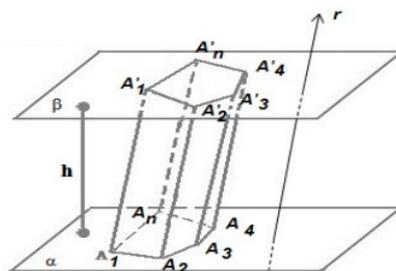


Figura 2.1: Prisma

Os principais elementos que compõem os prismas são: vértices, bases, altura, arestas da base, arestas laterais e faces. Na figura 2.1, temos:

1. Os **vértices** são os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ e $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n$.
2. As **bases** são os polígonos $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$.
3. A **altura**(h) é a distância entre as duas bases.
4. As **arestas da base** são os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$; $A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_{n-1}A'_n$.
5. As **arestas laterais** são os segmentos $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$.
6. As **faces** são os polígonos $A_1A'_1A_2A'_2, A_2A'_2A_3A'_3, \dots, A_{n-1}A'_{n-1}A_nA'_n$.

2.1.1 Classificação dos Prismas

Classificamos os prismas de acordo com o ângulo entre as arestas laterais e as bases, podendo ser retos ou oblíquos.

1. Prisma Reto

Um prisma é reto quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Neste caso, as faces laterais são retângulos.

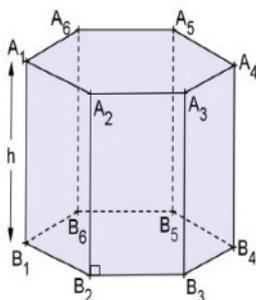


Figura 2.2: Prisma reto

2. Prisma Oblíquo

Um prisma é oblíquo quando as arestas laterais não são perpendiculares aos planos das bases.

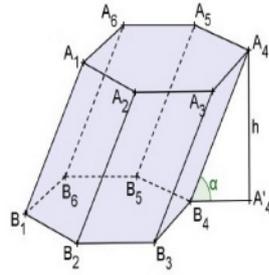


Figura 2.3: Prisma Oblíquo

3. Prisma regular

Um prisma é regular quando é reto e os polígonos que representam suas bases são polígonos regulares. Neste caso, as faces laterais são quadriláteros congruentes.

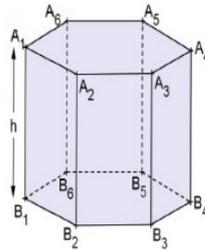


Figura 2.4: Prisma regular

2.1.2 Secção de um Prisma

Definição 2.1.2. *Denomina-se secção de um prisma a intersecção do prisma com um plano distinto dos planos das bases que intersecta todas as arestas laterais.*



Figura 2.5: Secção transversal do prisma

O resultado de uma secção de um prisma é um polígono com vértices em cada aresta lateral. Se o plano que secciona o prisma é paralelo às bases, a secção é chamada de secção transversal e o polígono resultante dessa secção é congruente às bases.

Se o plano que secciona o prisma é perpendicular a todas as arestas laterais, a secção é dita secção reta.

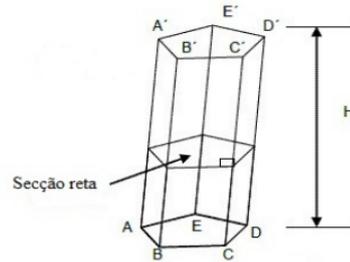


Figura 2.6: Secção reta do prisma

Observação 2.1.1. *As secções reta e transversal em um prisma reto coincidem.*

2.1.3 Natureza de um Prisma

A natureza de um prisma será dada de acordo com o polígono de sua base. Se sua base for um triângulo será dito prisma triangular; se sua base for um quadrilátero será dito prisma quadrangular; se sua base for um pentágono será dito prisma pentagonal e, assim sucessivamente.

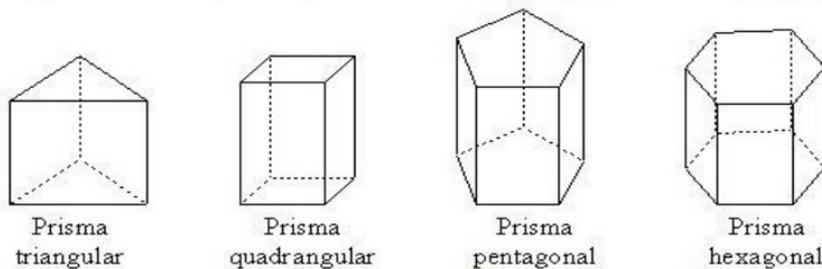


Figura 2.7: Prismas

Os primas quadrangulares que têm por bases os paralelogramos formam um subconjunto importante de prismas que são os paralelepípedos. O paralelepípedo que é um prisma reto é chamado de paralelepípedo reto. Já o paralelepípedo que além de reto tem bases retangulares é chamado de paralelepípedo reto retângulo, ou ortoedro, ou bloco retangular conforme alguns autores de livros didáticos. O ortoedro fica perfeitamente determinado pelas medidas de suas três arestas que concorrem em um ponto: O comprimento (a), a largura (b) e a altura (c) aos quais chamamos de dimensões do ortoedro. Todo paralelepípedo reto retângulo que tem base quadrada e medida da altura igual ao lado dessa base, é chamado de cubo (dimensões a, a, a). O cubo tem todas as arestas com mesma medida. Observe as figuras 2.8 e 2.9.

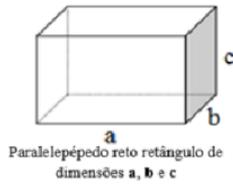


Figura 2.8: Paralelepípedo reto retângulo

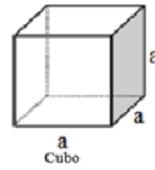


Figura 2.9: Cubo

2.2 Pirâmide

Definição 2.2.1. Considere o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ contido no plano α e um ponto V não pertencente a α . Denomina-se *pirâmide* o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Neste texto, convencionou-se como notação de pirâmide a expressão $V_{A_1A_2A_3 \dots A_n}$, onde V é o vértice e o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ é a base.

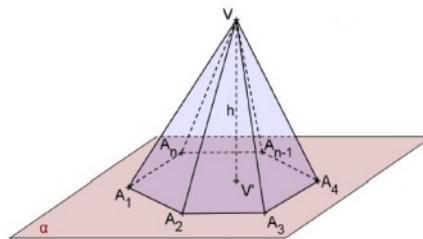


Figura 2.10: Pirâmide

2.2.1 Elementos de uma Pirâmide

Na pirâmide acima, pode-se identificar os seguintes elementos:

1. A **base** é o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$.
2. O **vértice** é o ponto V .
3. As **faces** são os triângulos $A_1A_2V, A_2A_3V, \dots, A_{n-1}A_nV$.
4. As **arestas laterais** são os segmentos de reta A_1V, A_2V, \dots, A_nV .
5. As **arestas da base** são os segmentos de reta $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$.
6. A **altura** (h) é dada pela distância entre o vértice e o plano da base.

2.2.2 Classificação ou Natureza de uma Pirâmide

A classificação de uma pirâmide é estabelecida de acordo com o polígono de sua base, ou seja

1. Na pirâmide triangular a base é um triângulo.
2. Na pirâmide quadrangular a base é um quadrilátero.
3. Na pirâmide pentagonal a base é um pentágono.
4. Na pirâmide hexagonal a base é um hexágono, e assim sucessivamente.

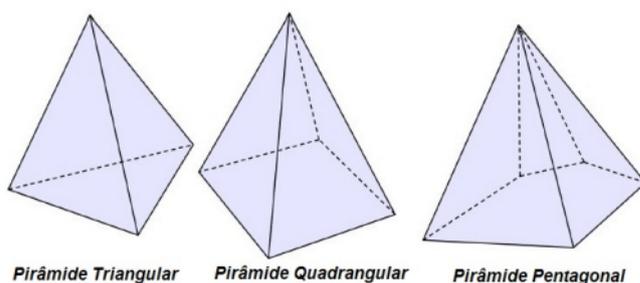


Figura 2.11: Pirâmides

Definição 2.2.2. *Define-se como pirâmide regular a pirâmide que tem um polígono regular na sua base. Neste caso, o centro da base é dado pela projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base.*

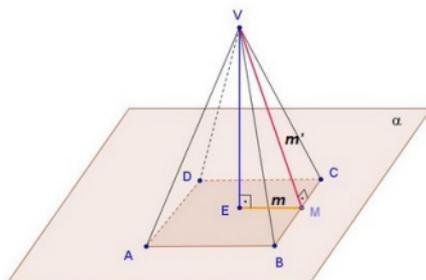


Figura 2.12: Pirâmide regular

Em uma pirâmide regular as faces laterais são triângulos isósceles congruentes e a altura relativa ao lado da base de uma face é chamada de **apótema da pirâmide**, representado na figura acima por m' . A distância do centro da base a qualquer aresta da base, chama-se **apótema da base**, representado na figura acima por m .

2.2.3 Secção de uma Pirâmide

Se um plano distinto do plano da base intersecta todas as arestas laterais de uma pirâmide em pontos distintos do vértice, diz-se que houve uma secção dessa pirâmide. No caso desse plano ser paralelo ao plano da base da pirâmide, a secção é denominada **secção transversal** e o polígono gerado por esta secção é semelhante ao polígono da base.

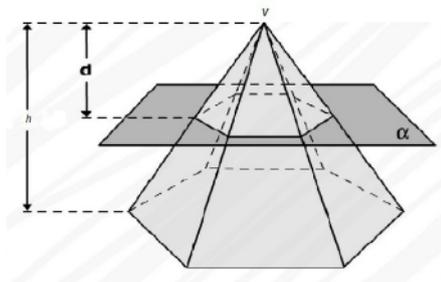


Figura 2.13: Secção da pirâmide

2.3 Cilindro

Definição 2.3.1. Considere um círculo de raio r e centro O contido num plano α , um plano β paralelo a α e uma reta s secante aos dois planos. Denomina-se cilindro o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos a s , que tenham uma extremidade num ponto do círculo e a outra extremidade no plano β .

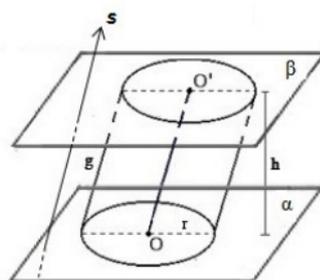


Figura 2.14: Cilindro

2.3.1 Elementos do Cilindro

No cilindro acima, tem-se

1. As **bases** são os círculos contidos nos planos α e β .
2. As **geratrizes** são os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto da circunferência do círculo contido no plano α e a outra num ponto da circunferência do círculo contido no plano β .
3. A **altura** é a distância entre os planos das bases.
4. O **raio** é o raio da base.
5. O **eixo** é o segmento de reta que tem suas extremidades nos centros das bases.

2.3.2 Classificação dos Cilindros

Os cilindros são classificados de acordo com a posição entre as geratrizes e os planos das bases.

1. Se as geratrizes do cilindro forem oblíquas aos planos das bases, ele será chamado de **cilindro oblíquo**.

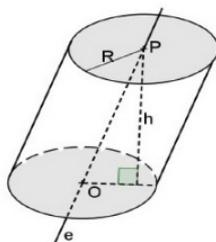


Figura 2.15: Cilindro oblíquo

2. Se as geratrizes do cilindro forem perpendiculares aos planos das bases, ele será chamado de **cilindro reto**.

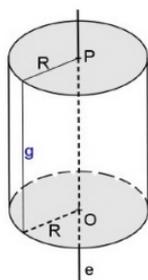


Figura 2.16: Cilindro reto

2.3.3 Secção de um Cilindro

Secção transversal. Se um plano paralelo aos planos das bases de um cilindro o intersecta, diz que essa secção é **transversal**.

Secção meridiana. É a secção que contém o eixo do cilindro. Da secção meridiana de um cilindro reto obtém-se um retângulo que tem a base igual ao diâmetro da base do cilindro e a altura igual à altura do cilindro.

Da secção meridiana de um cilindro oblíquo, obtém-se um paralelogramo. Quando o ângulo formado pela base do cilindro e pelo plano da secção meridiana é equivalente ao ângulo formado pelas geratrizes com o plano da base a secção é um retângulo.

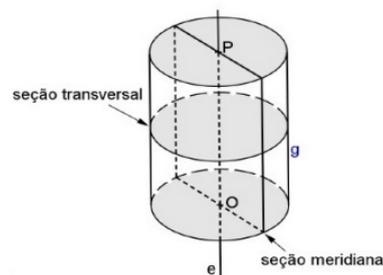


Figura 2.17: Secções do cilindro

Cilindro Equilátero

Definição 2.3.2. Um cilindro reto é dito equilátero quando sua altura é congruente ao diâmetro de sua base. A secção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado de lado igual à altura dele.

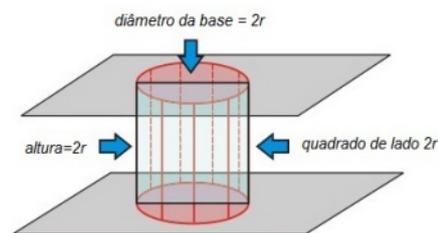


Figura 2.18: Cilindro equilátero

2.4 Cone

Definição 2.4.1. Sendo C um círculo de centro O e raio r contido no plano α e A um ponto não pertencente a α , define-se como cone o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em A e a outra em um ponto do círculo C .

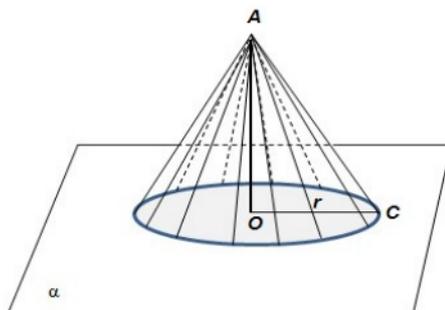


Figura 2.19: Cone

2.4.1 Elementos do Cone

Da figura 2.19, pode-se identificar:

- A **Base** é o círculo C .
- O **Vértice** é o ponto A .
- A **Altura** é a distância do vértice A ao plano da base.
- O **Raio da base** é o raio do círculo C .
- O **Eixo** é o segmento de reta AO .
- A **Geratriz** (g) é qualquer segmento que tem uma extremidade em A e a outra na circunferência da base.

2.4.2 Classificação dos Cones

A classificação de um cone é definida de acordo com a posição do seu eixo em relação ao plano da base.

1. Se o eixo do cone for perpendicular ao plano da base será dito cone reto.

Observação 2.4.1. *Somente no caso do cone reto as geratrizes apresentam o mesmo comprimento.*

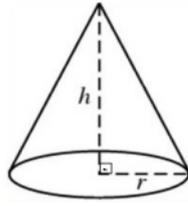


Figura 2.20: Cone reto

2. Se o eixo do cone for oblíquo ao plano da base será dito cone **oblíquo**.

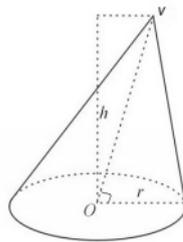


Figura 2.21: Cone oblíquo

2.4.3 Secção de Cone

Secção transversal. É a secção feita por um plano paralelo ao plano da base que intersecta todas as geratrizes em pontos distintos do vértice. Da secção transversal de um cone obtém-se um círculo paralelo ao círculo da base.

Secção meridiana. É a secção feita no cone por um plano que contém o seu eixo.

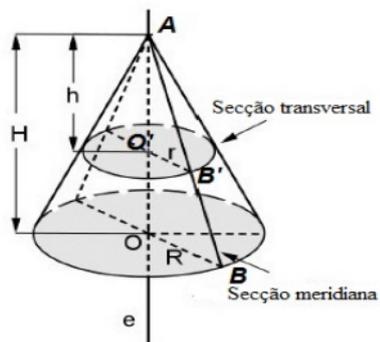


Figura 2.22: Secções do cone

Observação 2.4.2. *A secção meridiana em um cone reto é um triângulo isósceles.*

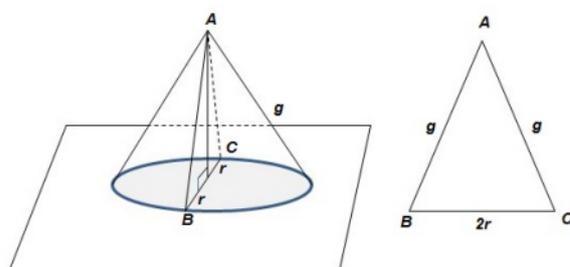


Figura 2.23: Secção meridiana no cone reto

Observação 2.4.3. *Se a secção meridiana de um cone reto for um triângulo equilátero, o cone é chamado de cone equilátero.*

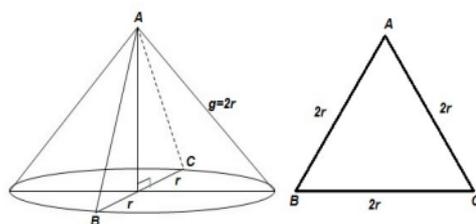


Figura 2.24: Cone equilátero

2.5 Esfera

Definição 2.5.1. *Dados um ponto O e um segmento de reta com medida R , denomina-se esfera de centro O e de raio R o conjunto de todos os pontos P do espaço tal que $d(O, P) \leq R$, onde $d(O, P)$ denota a distância de O a P .*

Observação 2.5.1. *A esfera também pode ser considerada como sólido de revolução gerada pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.*

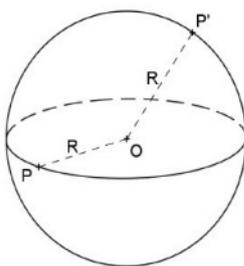


Figura 2.25: Esfera

2.5.1 Secção da Esfera

A secção feita por um plano secante a uma esfera é um **círculo**.

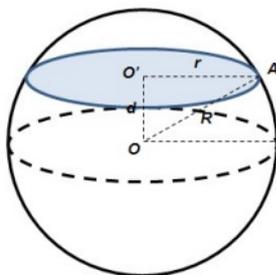


Figura 2.26: Secção da esfera

Observação 2.5.2. *Se o plano secante à esfera contém o seu centro $d = 0$, a secção é chamada de **círculo máximo** da esfera.*

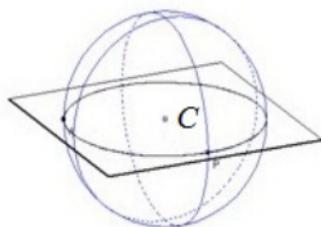


Figura 2.27: Círculo máximo da esfera

Capítulo 3

Volume

É a partir deste capítulo que está a essência deste trabalho, pois o objetivo é apresentar conceitos, princípios, dois modelos matemáticos – Princípio de Cavaliere e Integral definida; para a demonstração das fórmulas de volume dos principais sólidos geométricos trabalhados no ensino médio: prismas, pirâmides, cilindros, cones e a esfera; a abordagem de alguns problemas que são comumente vistos em avaliações externas – ENEM e OBMEP; e, principalmente, uma proposta de intervenção. Aqui sugerimos, também, a utilização do material dourado, em sala de aula, para justificar a ideia intuitiva de volume de um cubo.

3.1 Breve histórico sobre Cavaliere

Francisco Cavalieri (1598 - 1647) nasceu em Milão, na Itália, e adotou o nome de Bo-naventura quando entrou para a ordem Jesuítica, em 1615. De família nobre, Cavalieri seguiu paralelamente a carreira religiosa e a atividade científica. Discípulo de Galileu Galilei (1564 - 1642), por indicação deste veio a ser catedrático, desde 1629, da Universidade de Bolonha, ao mesmo tempo que era o superior do monastério de São Jerônimo. Cavalieri foi também astrônomo, mas, se ainda é lembrado, isso se deve em grande parte ao método dos indivisíveis que desenvolveu a partir de 1626.

Cavalieri não definia, em suas obras sobre o assunto, o que vinham a ser os indivisíveis. Segundo ele, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e um sólido geométrico por uma infinidade de seções planas paralelas entre si - a essas cordas e as essas seções ele chamava de indivisíveis.

O método dos indivisíveis foi desenvolvido por Cavalieri a partir das ideias de Arquimedes, investigando como calcular áreas e volumes de figuras curvas. A ideia central desse matemático foi

a de olhar para uma área como um número infinito de segmentos de reta equidistantes e para um volume como uma infinidade de áreas planas. Cavalieri chamou esses elementos de indivisíveis da área e do volume.

Essa teoria permitia que se encontrasse rapidamente e com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, porém fora duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada. Mal sabiam estes que o princípio de Cavalieri seria um dos pilares do que hoje se conhece como cálculo integral, o que de fato, ajudou no desenvolvimento da teoria do cálculo.

3.2 Áreas e volumes pelo princípio de Cavaliere

O Princípio de Cavalieri é considerado pelos pesquisadores como axiomas de uma maneira intuitiva, sendo sintetizado em dois enunciados equivalentes para as regiões do plano e outra para a região do espaço, como segue:

Segundo Eves (2004), os princípios de Cavalieri são assim enunciados:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (p. 426)

Observe:

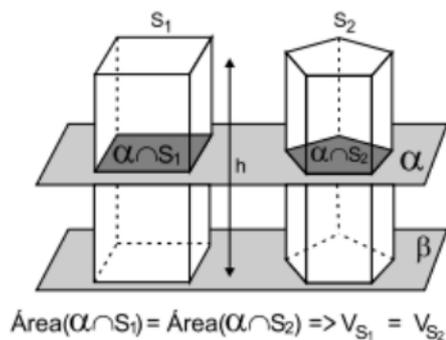


Figura 3.1: Ilustração do Princípio de Cavaliere. Fonte: Coleção Profmat Geometria- SBM

De acordo com a Coleção Profmat Geometria- SBM, o Princípio de Cavalieri se considerar dois

sólidos quaisquer que possuem a mesma altura e seccionarmos estes sólidos a uma mesma altura qualquer, se as secções possuírem sempre as mesmas áreas, concluímos que os volumes destes sólidos são iguais. Isso reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas, para isso devemos comparar as áreas das secções obtidas nos sólidos paralelos ao plano das suas bases, sendo que esses sólidos deverão ter mesma altura e devem ser considerados sobre o mesmo plano.

3.3 Volumes no Ensino Médio pelo princípio de Cavalieri

Com o desenvolvimento e a necessidade da humanidade, surgiram várias propostas de como calcular volumes de sólidos geométricos, dentre elas temos a apresentação clássica de Euclides, aperfeiçoadas por autores modernos como Legendre e Hadamard, utilização do Cálculo Infinitesimal e o Princípio de Cavalieri. A utilizada na prática no ensino médio sob a forma de axioma é o princípio de Cavalieri que é intuitivamente aceitável e reduz os argumentos necessários para obtenção das fórmulas de volumes de alguns sólidos.

No formato de axiomas, a utilização desse princípio exige conhecimentos elementares da matemática, no qual os alunos através das montagens das maquetes adquirem competências no raciocínio espacial, no qual será aplicada no Cálculo Integral no cálculo de volumes.

3.4 Ideia intuitiva de volume

O volume de um sólido representa a quantidade de espaço ocupado por ele. Para medir o espaço ocupado por um sólido é necessário comparar a quantidade desse espaço com uma unidade de volume. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes o sólido contém a unidade de volume estabelecida. Como convenção, estabelece-se como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, chamado cubo unitário. Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprime quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário.

Propriedades de Volume de Sólidos

1. Sólidos congruentes têm volumes iguais;
2. Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S' e S'' que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S' e S'' ;
3. Se dois ou mais sólidos tem o mesmo volume, são chamados de sólidos equivalentes.

3.5 Sugestão de Atividade Didática

Para mostrar, de forma prática a ideia de volume, o professor poderá utilizar material dourado que é composto de cubos, placas, barras e cubos unitários, instigando o aluno a pensar sobre a quantidade de cubinhos necessários para preencher uma barra, em seguida quantas barras compõem uma placa, depois quantas placas são necessárias para formar o cubo e, por fim, quantos cubinhos cabem no cubo. A partir disto, iniciam-se os cálculos para determinar o volume do cubo, pois ele é formado por dez placas, a placa é formada por dez barras e a barra é formada por dez cubos unitários, cada cubo unitário possui 1 cm^3 de volume. A barra é composta de 10 cubos unitários, portanto, seu volume é $10 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3$. Já a placa é composta por dez barras, logo tem volume $10 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 100 \text{ cm}^3$, e o cubo é formado por dez placas, o seu volume é igual a $10 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

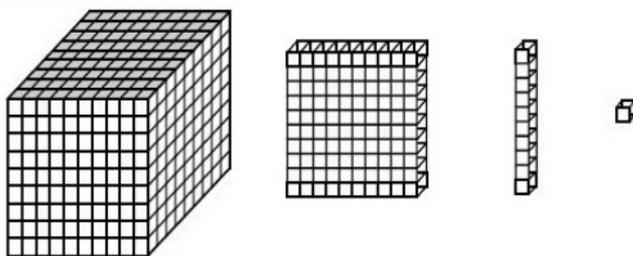


Figura 3.2: Material dourado

3.6 Volume do Paralelepípedo Retângulo

Seja o paralelepípedo retângulo PR de dimensões a, b e c .

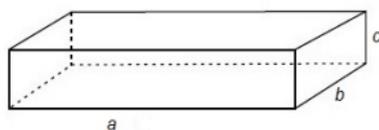


Figura 3.3: Paralelepípedo

Representando seu volume por $V(a, b, c)$ e adotando como unidade padrão de volume o cubo unitário, ou seja, outro paralelepípedo de dimensões $1, 1, 1$, com volume $V(1, 1, 1) = 1$, e sendo o volume de um paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões, isto é,

mantendo-se constantes a largura e a altura e multiplicando o comprimento por um número natural n , o volume ficará também multiplicado por n , ou seja, $V(na, b, c) = n \cdot V(a, b, c)$.

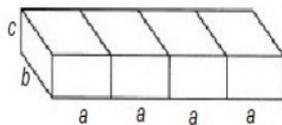


Figura 3.4: Paralelepípedos justapostos

Seja a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, tem-se:

$$\begin{aligned} V(1, 1, 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow V(1 \cdot a, 1, 1) &= a \cdot 1 \\ \Leftrightarrow V(a, 1 \cdot b, 1) &= a \cdot b \\ \Leftrightarrow V(a, b, 1 \cdot c) &= a \cdot b \cdot c \\ \Leftrightarrow V(a, b, c) &= abc. \end{aligned}$$

Concluindo, se $a \cdot b$ representa a área da base do paralelepípedo e c a medida da altura, então o volume de um paralelepípedo retângulo pode ser enunciado assim: O volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, ou seja,

$$V_{PR} = A_b \cdot h$$

Observação 3.6.1. Um cubo pode ser considerado como um paralelepípedo reto-retângulo no qual as três dimensões são iguais. Sendo a a medida da aresta, sua representação é $P(a, a, a)$ e as deduções das fórmulas podem ser obtidas a partir das fórmulas aplicadas aos paralelepípedos retos-retângulos.

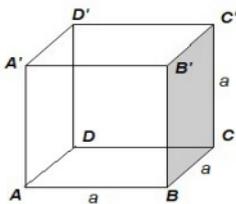


Figura 3.5: Cubo

Daí, a medida do volume é dada por

$$\begin{aligned} V &= a \cdot a \cdot a \\ V &= a^3. \end{aligned}$$

3.7 Volume do Prisma

Considere um paralelepípedo reto-retângulo PR de altura h e área da base apoiado em um plano α . Considere um prisma reto P de altura h e de área da base apoiado no mesmo plano α . Note que o paralelepípedo e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes. Em seguida, tome um plano β , paralelo a α . Quando β secciona PR , também secciona P , resultando dessas secções os polígonos B'_1 e B'_2 , respectivamente.

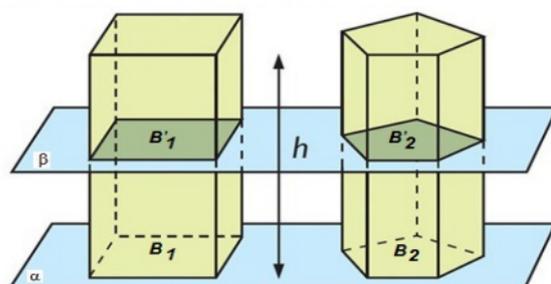


Figura 3.6: Secção transversal do paralelepípedo e do prisma

Como a secção é transversal, os polígonos B_1 e B'_1 , B_2 e B'_2 são congruentes, logo $B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$. Mas $B_1 = B_2 = A$, assim $B'_1 = B'_2 = A$. Dado que B'_1 é equivalente à B'_2 , suas áreas são iguais. Pelo princípio de Cavalieri, o prisma P tem volume igual ao volume do paralelepípedo PR . Então

$$V_P = V_{PR}.$$

Posto que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, tem-se $V_P = A_b \cdot h$. Daí, pode-se enunciar:

O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura, ou seja,

$$V_P = A_b \cdot h \tag{3.1}$$

3.8 Volume de uma Pirâmide

Para demonstrar a fórmula do volume da pirâmide é necessário fazer algumas considerações preliminares.

I. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração. Considere os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ de modo que a razão de semelhança do 1º triângulo para o 2º triângulo seja igual a k .

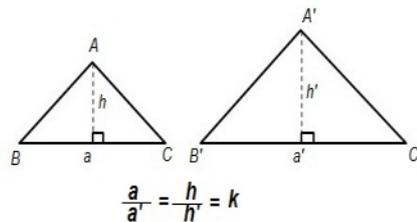


Figura 3.7: Triângulos semelhantes

Calculando as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se

$$A_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad A_{\triangle A'B'C'} = \frac{a' \cdot h'}{2}.$$

Assim, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$ é

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h'}{2}} = \frac{a \cdot h}{a' \cdot h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

□

II. Duas Pirâmides triangulares de bases equivalentes e mesma altura têm volumes iguais.

Demonstração. Tome duas pirâmides triangulares apoiadas num mesmo plano com polígonos das bases P_1 e P_2 , respectivamente. Sendo as bases de mesma área [$A(P_1) = A(P_2)$] e as pirâmides de mesma altura h .

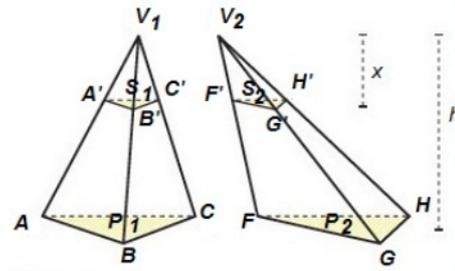


Figura 3.8: Pirâmides seccionadas

Seccionando transversalmente as duas pirâmides por um plano paralelo ao plano da base, a uma distância x dos seus vértices, tem-se que os polígonos S_1 e P_1 , S_2 e P_2 , as pirâmides V_{1ABC} e $V_{1A'B'C'}$, V_{2FGH} e $V_{2F'G'H'}$ são semelhantes, respectivamente. Considerando a razão de semelhança entre as alturas das pirâmides igual a k , tem-se $\frac{x}{h} = k$, então $k^2 = (\frac{x}{h})^2$. Assim, se $P_1 \sim S_1$ e $P_2 \sim S_2$, então

$$\frac{A(S_1)}{A(P_1)} = k^2 \quad \text{e} \quad \frac{A(S_2)}{A(P_2)} = k^2$$

Disto segue que

$$\frac{A(S_1)}{A(P_1)} = \frac{A(S_2)}{A(P_2)}.$$

Dado que $A(P_1) = A(P_2)$, então $A(S_1) = A(S_2)$. Daí, como os polígonos das secções apresentam a mesma área, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que as pirâmides têm volumes iguais. \square

III. O volume de uma pirâmide triangular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

Demonstração. Considere o prisma triangular $ABCA'B'C'$ abaixo de volume $V = A_b \cdot h$.

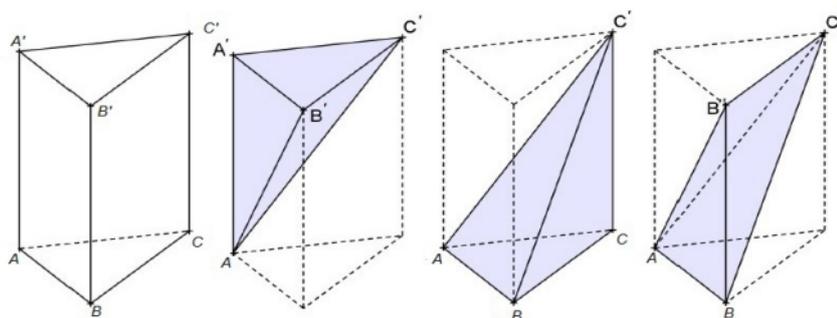


Figura 3.9: Secção do prisma em pirâmides triangulares

Seccionando-se este prisma pelos planos $AB'C'$ e ABC' , obtém-se as pirâmides triangulares $A_{A'B'C'}$, C'_{ABC} e $C'_{ABB'}$. Nas pirâmides $A_{A'B'C'}$ e C'_{ABC} as bases são equivalentes (mesma área) e as alturas são congruentes. Pelo item *II.*, as pirâmides $A_{A'B'C'}$ e C'_{ABC} têm o mesmo volume, ou seja,

$$V_{A_{A'B'C'}} = V_{C'_{ABC}}$$

Note que nas pirâmides C'_{ABC} e $B_{ABC'}$ (que também podem ser escritas como $C_{ABC'}$ e $B'_{ABC'}$) as bases são equivalentes e as alturas têm a mesma medida, pois a distância do vértice C ao plano ABC' é igual à distância do vértice B' ao plano ABC' . Assim, temos que as pirâmides C'_{ABC} e $B_{ABC'}$ têm o mesmo volume, logo

$$V_{C'_{ABC}} = V_{B_{ABC'}} .$$

Disto tudo, tem-se

$$V_{A_{A'B'C'}} = V_{C'_{ABC}} = V_{C'_{ABB'}} = V_{pt} ,$$

onde pt denota a pirâmide triangular.

Logo, o volume do prisma é igual à soma dos volumes das três pirâmides triangulares. Assim

$$\begin{aligned} V_p &= V_{pt} + V_{pt} + V_{pt} \\ \Leftrightarrow A_b \cdot h &= 3 \cdot V_{pt} \\ \Leftrightarrow V_{pt} &= \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h . \end{aligned}$$

Feitas essas considerações, pode-se deduzir a expressão (fórmula) para calcular o volume de uma pirâmide qualquer. \square

3.9 Volume de uma Pirâmide Qualquer

Considere uma pirâmide de vértice V , base $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ de área A_b e altura h .

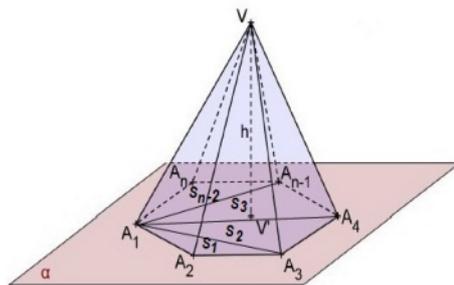


Figura 3.10: Volume da pirâmide

Dividindo-se o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ da base em $(n - 2)$ triângulos, tem-se que a pirâmide $V_{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$ se transforma em $(n - 2)$ pirâmides triangulares de altura h , cujas bases são os $(n - 2)$ triângulos de áreas $S_1, S_2, S_3 \cdots S_{n-2}$. Sendo assim, o volume da pirâmide $V_{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$ é a soma dos volumes das $(n - 2)$ pirâmides triangulares.

Pelo item *III*, vimos que o volume de cada pirâmide triangular é dado por $V_{pt} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$. Então

$$\begin{aligned} V_{PM} &= \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \dots + \frac{1}{3}S_{n-2}h \\ &= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-2})h \end{aligned}$$

Como $A_b = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-2})$, então

$$V_{PM} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Conclusão: O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área de sua base pela medida da altura.

3.10 Volume do Cilindro

Considere um cilindro de raio da base r e altura h , cuja base esteja apoiada em um plano α e um prisma quadrangular de aresta da base $r\sqrt{\pi}$ e altura h também apoiado no plano α e contido no mesmo semiespaço do cilindro.

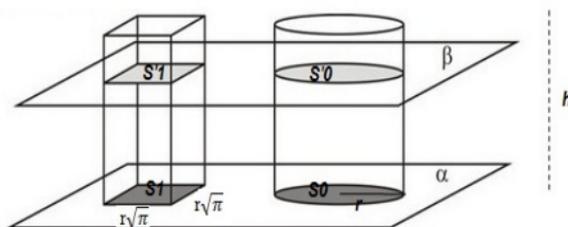


Figura 3.11: Secção do prisma e do cilindro

Note que as áreas das bases tanto do cilindro quanto do prisma são iguais. Chame as áreas da base do cilindro e da base do prisma de $S_0 = A$ e $S_1 = A$, respectivamente. Do estudo de prisma sabe-se que $V_p = A_b \cdot h$, ou seja, $V_p = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Qualquer plano paralelo a α que secciona o cilindro, secciona também o prisma, originando dessa secção regiões planas equivalentes às bases, tanto no cilindro quanto no prisma, pois a secção é transversal. Chame as áreas dessas regiões de S'_0 e S'_1 , respectivamente. Assim a área S'_0 é igual a área da base do cilindro e a área S'_1 é igual a área da base do prisma. Se $S_0 = A = S_1$, $S'_0 = A = S'_1$. Assim, pelo Princípio de Cavalieri o cilindro tem volume igual ao volume do prisma, ou seja,

$$\begin{aligned} V_{CL} &= V_P \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$

Então, o volume do cilindro pode ser enunciado assim:

O volume de um cilindro de raio da base r e altura h é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, isto é,

$$V_{CL} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

3.11 Volume de um cone

Para deduzir a fórmula do volume do cone considere uma pirâmide de altura $h_1 = h$ e área da base $b_1 = b$ e um cone de altura $h_2 = h$ e área da base $b_2 = b$ apoiados em um mesmo plano com vértices V_1 e V_2 não pertencentes ao plano da base, respectivamente.

Note que o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes (mesma área). Se um plano paralelo ao plano da base, intersecta o cone a uma distância k do vértice, também intersecta a pirâmide a uma distância k do seu vértice, gerando secções semelhantes às suas respectivas bases, de áreas b'_1 na pirâmide e b'_2 no cone.

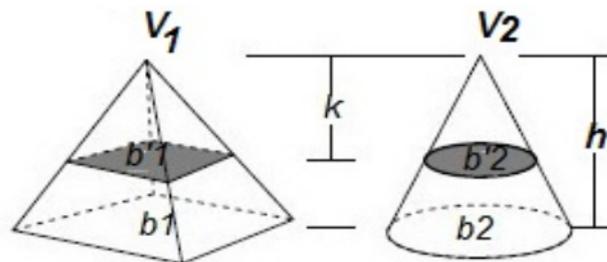


Figura 3.12: Secção do cone e da pirâmide

Sabendo que a razão entre as suas áreas é o quadrado da razão de semelhança, então

$$\frac{b'_1}{b_1} = \left(\frac{k}{h}\right)^2$$

$$\frac{b'_2}{b_2} = \left(\frac{k}{h}\right)^2.$$

Daí, tem-se que $\frac{b'_1}{b_1} = \frac{b'_2}{b_2}$, como $b_1 = b_2 = b$, vem que $\frac{b'_1}{b} = \frac{b'_2}{b}$. Multiplicando a igualdade por b , tem-se $b'_1 = b'_2$, isto significa que as secções têm a mesma área. Logo, pelo Princípio de Cavalieri o cone tem volume igual ao volume da pirâmide, ou seja,

$$V_{CN} = V_{PM}.$$

Como o volume da pirâmide é $\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, conclui-se que:

O volume de um cone é dado por um terço do produto da área da base pela medida da altura.

$$V_{CN} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

3.12 Volume da Esfera

Para a dedução da fórmula do volume da esfera, é preciso utilizar um sólido que já se saiba a fórmula para calcular o seu volume e que quando seccionado por um plano gere uma região que tenha a mesma área que a secção na esfera feita pelo mesmo plano. O sólido usado nessa dedução é a anticlipsisidra, que é o sólido obtido retirando-se dois cones de um cilindro equilátero de raio R

de bases coincidindo com as bases do cilindro e de vértices comuns coincidindo com o centro do cilindro.

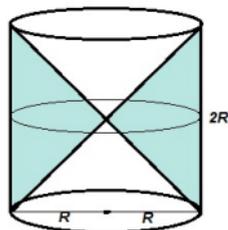


Figura 3.13: Anticlepsidra

Assim, o volume da anticlépsidra é dado por

$$\begin{aligned}
 V_{\text{anticlépsidra}} &= V_{CL} - 2 \cdot V_{CN} \\
 &= \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot R \\
 &= 2\pi \cdot R^3 - \frac{2\pi \cdot R^3}{3} \\
 &= \frac{6\pi \cdot R^3 - 2\pi \cdot R^3}{3} \\
 &= \frac{4\pi \cdot R^3}{3}
 \end{aligned}$$

Deduzida a fórmula para o volume da anticlépsidra, pode-se deduzir a fórmula para o volume da esfera. Considere uma esfera de raio R e uma anticlépsidra obtida de um cilindro equilátero de raio R sobre um mesmo plano e no mesmo semiespaço. Considerando um plano α paralelo ao plano da base, que seccione a esfera a uma distância d do seu centro, esse mesmo plano secciona a anticlépsidra a uma distância também d do seu centro.

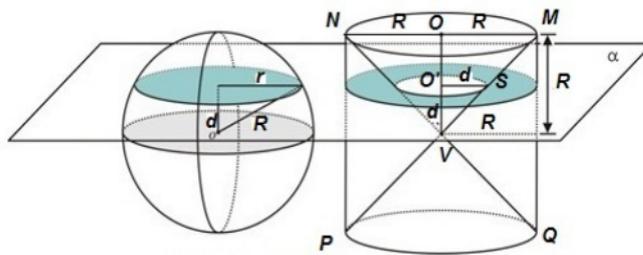


Figura 3.14: Secção da esfera e do cilindro

Na esfera, a secção é um círculo de raio r . Então, sua área A é $A = \pi \cdot r^2$, como $R^2 = r^2 + d^2$ temos que $r^2 = R^2 - d^2$, o que implica que

$$A = \pi(R^2 - d^2)$$

Assim, chamando essa área de A_1 , tem-se que $A_1 = \pi \cdot (R^2 - d^2)$. Na anticlépsidra, a secção é uma coroa circular de raios R e d .

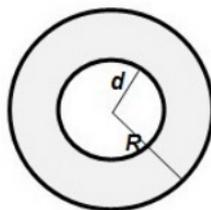


Figura 3.15: Coroa circular

Note que $MNPQ$, figura 3.13, é um quadrado em que PM e NQ são suas diagonais, as quais se intersectam no centro formando ângulos retos. Note também que o triângulo VMN é isósceles e VO é bissetriz do ângulo do vértice V . Assim, o triângulo $VO'S$ também é isósceles, pois se ele é reto em O' , o ângulo no vértice V mede 45° , então o ângulo no vértice S também mede 45° , logo VS é a base do triângulo isósceles $VO'S$ e $VO' \equiv O'S$, logo $\text{med}(VO') = \text{med}(O'S) = d$. Daí, a área da coroa circular A_2 é dada por $A_2 = \pi \cdot (R^2 - d^2)$. Dessa forma $A_1 = A_2$. Pode-se concluir, através do Princípio de Cavalieri, que a esfera tem volume igual ao volume da anticlépsidra, isto é,

$$\begin{aligned} V_E &= V_{\text{anticlépsidra}} \\ &= \frac{4\pi \cdot R^3}{3}, \end{aligned}$$

sendo R o seu raio.

Capítulo 4

Aplicações

Este capítulo é dedicado a abordagem de alguns problemas envolvendo cálculos de volumes de sólidos geométricos, e que estão presentes em avaliações externas, como por exemplo nas provas do ENEM e da OBMEP.

4.1 Pequeno histórico sobre a OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional produzido anualmente desde o ano de 2005, dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação - MEC e do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação – MCTI. Ela tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A prova é composta por duas fases, a saber: fase 1 prova objetiva e fase 2 prova discursiva; em três níveis: nível I corresponde aos alunos do 6º e 7º anos, nível II alunos do 8º e 9º anos e nível III estudantes do ensino médio. A seleção para participar da fase 2 é feita em cada escola participante desse projeto.

4.2 Pequeno histórico sobre o ENEM

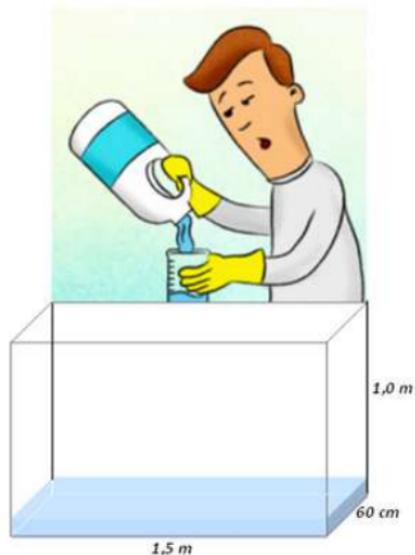
O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) é uma prova de admissão à educação superior realizada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), autarquia vinculada ao Ministério da Educação do Brasil. Foi criado em 1998 com objetivo inicial de ser um avaliador do aprendizado dos alunos de Ensino Médio em todo o Brasil e auxiliar na melhoria do ensino brasileiro, além de influenciar mudanças no currículo dessa modalidade de ensino.

A partir de 2004, o resultado desse exame passou a ser utilizado para o acesso ao ensino superior em universidades públicas brasileiras. Mas somente no ano de 2010 foi que o Ministério da Educação (MEC) desenvolveu um sistema denominado Sistema de Seleção Unificada (SISU) para esse fim. Em 2014, o Enem era o maior exame vestibular do Brasil, em número de inscritos, e o segundo maior do mundo.

Atualmente a prova também é feita por pessoas com interesse em ganhar bolsa integral ou parcial em universidade particular através do Programa Universidade para Todos (ProUni), ou para obtenção de financiamento através do Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (Fies). Ela é versada sobre quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas; além de uma redação.

4.3 Exemplos

Exemplo 4.1. *(OBMEP-2014) Álvaro resolveu fazer uma limpeza na caixa d'água reserva que ele tem em casa. Essa caixa tem a forma de um bloco retangular, com as dimensões mostradas na figura abaixo. Em uma das etapas da limpeza, depois de lavá-la e esvaziá-la completamente, Álvaro deverá colocar água limpa na caixa, até um nível de dez centímetros, e, em seguida, adicionar água sanitária a essa água limpa, na proporção de um litro para cada mil litros de água (1 : 1000).*

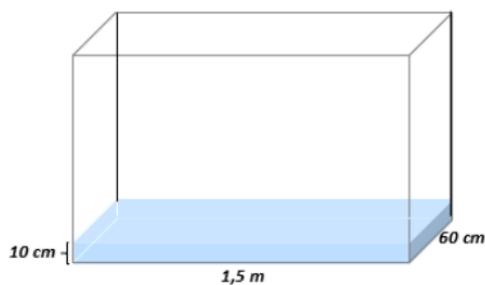


Quantos mililitros de água sanitária Álvaro utilizará nessa etapa da limpeza?

Passos para a solução do problema

1º passo: Determinar o volume de água presente na caixa d'água.

O volume em questão corresponde ao volume de um bloco retangular com dimensões 1,5 m, 60 cm e 10 cm, conforme a figura abaixo.



Convertendo todas as dimensões para metros, teremos um bloco retangular com dimensões 1,5 m, 0,6 m e 0,1 m. Daí, calculamos o volume de água. Faremos isto calculando o volume do bloco retangular de dimensões 1,5 m; 0,6 m e 0,1 m. Assim, temos

$$V = 1,5 \cdot 0,6 \cdot 0,1 = 0,09 \text{ m}^3 \text{ de água.} \quad (4.1)$$

Agora, vamos converter $0,09 \text{ m}^3$ em litro. Sabemos que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{1000} &= \frac{0,09}{x} \\ \implies x &= 1000 \cdot 0,09 \\ \implies x &= 90 \text{ l}\end{aligned}$$

Logo, há no reservatório 90 litros de água.

2º passo: Determinar a quantidade de água sanitária que deverá ser utilizada.

A recomendação é que a água sanitária deve ser diluída na proporção de um litro para cada mil litros de água limpa. Assim, para atender a concentração equivalente a 1 : 1000, Álvaro deverá utilizar:

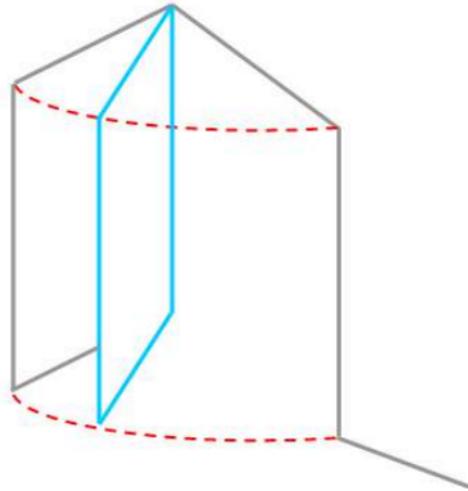
$$\begin{aligned}\frac{1}{1000} &= \frac{y}{90} \\ \implies y &= \frac{90}{1000} \\ \implies y &= 0,09 \text{ litros de água sanitária.}\end{aligned}$$

Note que 1 litro equivale a 1000 mililitros, então temos que

$$0,09\text{l} = 90\text{ml}$$

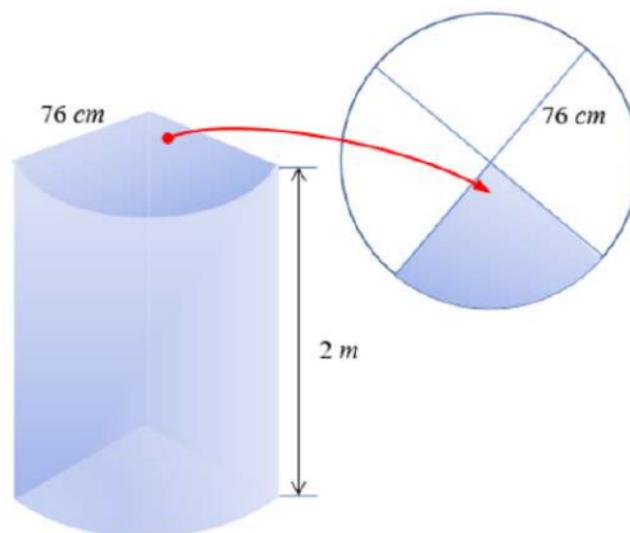
Portanto, Álvaro vai adicionar de 90ml de água sanitária à água presente na caixa d'água.

Exemplo 4.2. (OBMEP- 2019) Uma porta giratória medindo 2,0m de altura por 76cm de largura gira um quarto de volta em torno de suas dobradiças. Qual o volume do sólido descrito por ela? Expresse o resultado em metros cúbicos e em centímetros cúbicos.



Passos para a solução do problema

1º passo: *Notar que o sólido descrito pela rotação da porta depois de ela girar um quarto de volta corresponde a um quarto de um cilindro circular reto de raio 76cm e com 2,0m de altura, conforme a figura abaixo.*



2º passo: *Calcular o volume desse sólido em m^3 ou cm^3 . Vamos optar em calcular, primeiro, cm^3 e, em seguida, converter para m^3 . O volume do sólido descrito pela rotação da porta, em cm^3 , pode ser assim calculado:*

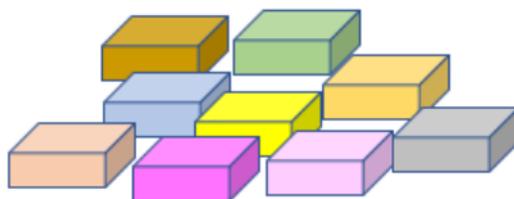
$$\begin{aligned}
 V &= \frac{(\pi r^2) \cdot h}{4} \\
 &= \frac{(\pi \cdot 76^2) \cdot 200}{4} \\
 &= \pi \cdot 76^2 \cdot 50 \\
 &= 288800\pi \\
 &\approx 288800 \cdot (3,14) \\
 \Rightarrow V &\approx 906832 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Agora, para converter em m^3 basta-nos multiplicar o resultado obtido, em cm^3 , por 0,000001. Como $1cm^3$ equivale a $0,000001m^3$. Então, temos

$$\begin{aligned}
 V &\approx (906832) \cdot (0,000001) \\
 \Rightarrow V &\approx 0,906832 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido gerado pela rotação da porta é aproximadamente 906832 cm^3 que equivale a $0,906832 \text{ m}^3$.

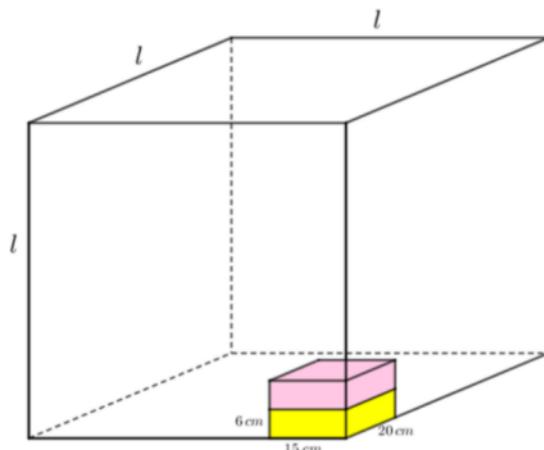
Exemplo 4.3. (OBMEP-2008) Na marcenaria do seu Joaquim, qualquer pedacinho de madeira que sobre de alguma encomenda é aproveitado. Depois da entrega de uma grande encomenda, seu Joaquim percebeu que sobraram vários pedaços de madeira, na forma de paralelepípedos retangulares com dimensões “6cm por 15cm por 20cm”. Também para aproveitar restinhos de tinta, ele pintou os paralelepípedos e resolveu montar cubos para decoração com os paralelepípedos coloridos.



Quantos desses paralelepípedos coloridos serão necessários para que seu Joaquim monte o menor cubo possível, mantendo o tamanho original dos pequenos paralelepípedos?

Passos para a solução do problema

1º passo: Supor o cubo de medida de aresta igual a l , em cm, no qual l seja a menor medida possível, conforme a figura abaixo.



2º passo: Calcular a medida l da aresta do cubo suposto.

Como o tamanho original dos paralelepípedos deverá ser mantido, então as medidas 6cm, 15cm e 20cm deverão caber no comprimento l cm dos lados do cubo a ser montado. Assim, l é um múltiplo de 6, 15 e 20. Mas seu Joaquim vai montar o menor cubo possível, então l é o mínimo múltiplo comum entre 6, 15 e 20, ou seja, $l = \text{mmc}(6, 15, 20)$.

Daí, fatorando simultaneamente os números 6, 15 e 20, obtemos o mmc deles:

6	15	20	2
3	15	10	2
3	15	5	3
1	5	5	5
1	1	1	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

Logo, $l = 60\text{cm}$ e o menor cubo que o seu Joaquim conseguirá montar com esses paralelepípedos inteiros deve ter lados medindo 60 centímetros.

3º passo: Determinar a quantidade de paralelepípedos utilizados na montagem de cada cubo.

Note que o volume de um paralelepípedo de arestas medindo a, b e c é dado por $V = a \cdot b \cdot c$, e que o volume de um cubo (caso particular de um paralelepípedo) de aresta medindo l é dado por $V = l \cdot l \cdot l$, ou seja, $V = l^3$.

Assim,

- O volume de cada paralelepípedo utilizado é $6 \cdot 15 \cdot 20 = 1800 \text{ cm}^3$;
- O volume de um cubo a ser montado é $60^3 = 216000 \text{ cm}^3$.

Dessa forma, se n for o número de paralelepípedos utilizados na montagem de cada cubo, segue que:

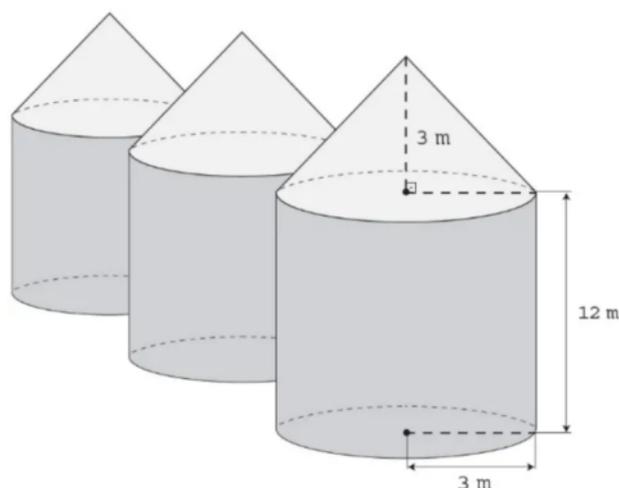
$$1800n = 216000$$

$$\Rightarrow n = \frac{216000}{1800}$$

$$\Rightarrow n = 120 .$$

Portanto, seu Joaquim utilizará 120 paralelepípedos na montagem de cada cubo de decoração.

Exemplo 4.4. (Enem 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é?

Passos para a solução do problema

1º passo: Decompor a figura dada em duas outras (cone e cilindro), determinar seus volumes, e, através da soma dos volumes das figuras decomposta, obter o volume da figura original.

Temos que:

- $V_{cone} = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 27m^3$.
- $V_{cilindro} = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h = 3 \cdot 3^2 \cdot 12 = 324m^3$.

Assim, o volume da figura original é dado por:

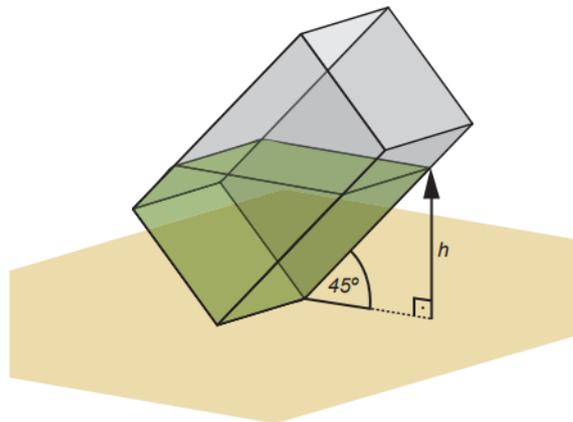
$$\begin{aligned} V &= V_{cone} + V_{cilindro} \\ \implies V &= 27 + 324 = 351 m^3 \end{aligned}$$

2º passo: Calcular o número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo.

Sabemos que a capacidade do caminhão é de $20 m^3$ em cada viagem. O número de viagens necessárias é calculado pela divisão de $351 m^3$ por $20 m^3$, pois necessitamos saber a quantidade, inteira, de vezes que o número 20 cabe no número 351. Daí, temos $351 : 20 = 17,55$. Como a resposta deve ser um número inteiro, então, neste caso, devemos pegar o primeiro inteiro maior que o resultado obtido.

Portanto, o número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é 18.

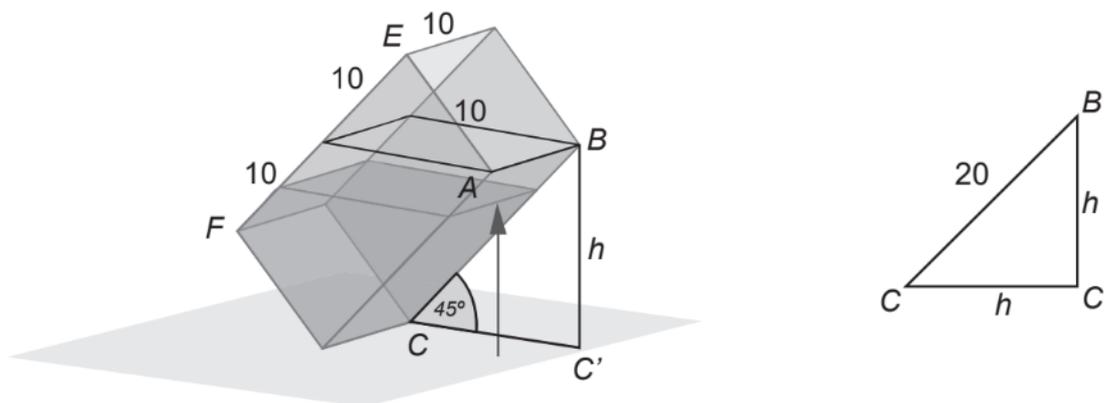
Exemplo 4.5. (OBMEP-Adaptada-2018) Uma lata medindo $20cm \times 10cm \times 10cm$, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45° com o plano horizontal, conforme mostra a figura. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura h em relação ao plano horizontal, também como indicado na figura.



Determine a altura máxima que esse líquido pode atingir e, o volume quando isso ocorrer.

Passos para a solução do problema

1º passo: Determinar altura h , máxima, notando que essa altura atingida pelo líquido é igual ao cateto de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa medindo 20 cm.

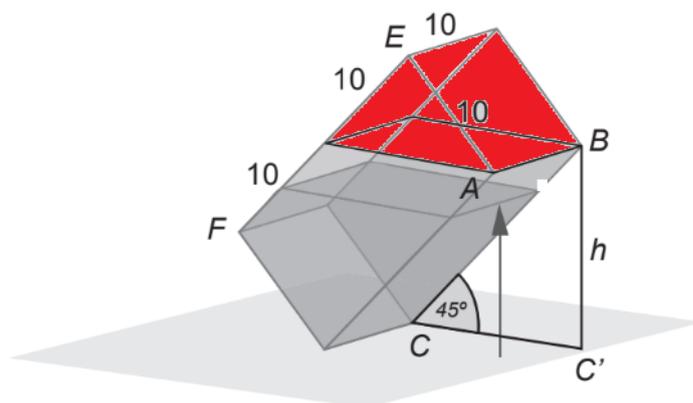


Logo, aplicando o teorema de Pitágoras, e sabendo que h é um número inteiro positivo, temos:

$$\begin{aligned}
 h^2 + h^2 &= 20^2 \\
 \Rightarrow 2h^2 &= 400 \\
 \Rightarrow h &= \sqrt{\frac{400}{2}} \\
 \Rightarrow h &= \sqrt{200} \\
 \Rightarrow h &= 10\sqrt{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Portanto, a altura máxima atingida é $10\sqrt{2}$ cm.

2º passo: Note que o volume da lata que deixa de ser preenchido quando o líquido atinge a altura máxima, é o volume de um prisma triangular que é igual a metade do paralelepípedo retângulo de aresta iguais a 10 cm.



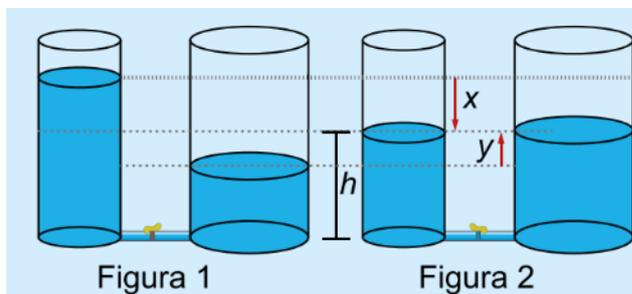
Sendo assim, o volume procurado é dado pela diferença entre o volume da lata e o volume correspondente a metade do paralelepípedo retângulo de aresta de arestas iguais a 10 cm. Daí, temos que

$$\begin{aligned} V_{\text{procurado}} &= V_{\text{lata}} - \frac{V_{\text{paralelepípedo}}}{2} \\ &= 20 \cdot 10 \cdot 10 - \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2} \\ &= 200 - 50 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\text{procurado}} = 1500 \text{ cm}^3.$$

Portanto, o volume de líquido, no instante em que ele atinge a altura máxima, é de 1500 cm^3 .

Exemplo 4.6. (OBMEP-2017) Dois reservatórios, ligados por um fino tubo em sua parte inferior, contêm o mesmo volume de água, com diferentes alturas, conforme mostrado na Figura 1. Abrindo-se a torneira do tubo, a água escoar, de modo que as alturas das colunas de água se tornem iguais. O nível de água do reservatório esquerdo baixa x cm e o nível de água do reservatório direito sobe y cm, conforme indicado na Figura 2.



Qual é a altura h , em cm, da água em equilíbrio?

Passos para a solução do problema

1º passo: Calcular o volume de água presente, em cada cilindro, da Figura.

Note que o volume de água é, segundo o enunciado do problema, o mesmo em ambos os cilindros da Figura 1, mas as áreas das bases deles, assim como as alturas atingidas pela água, são diferentes. Daí, representando por V_1 e A_1 , respectivamente, o volume e a área da base do cilindro à esquerda na Figura 1 e por V_2 e A_2 , respectivamente, o volume e a área da base do cilindro à direita da mesma figura, podemos escrever:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \Rightarrow A_1 \cdot (h + x) &= A_2 \cdot (h - y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

2º passo: Notar a igualdade entre o volume de água que desce de um reservatório e o volume de água que sobe no outro, estabelecendo uma relação entre eles.

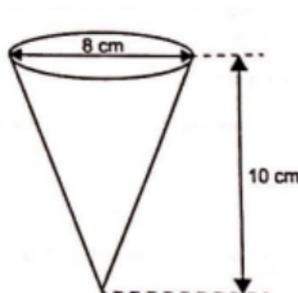
$$\begin{aligned} V_{\text{água que desce}} &= V_{\text{água que sobe}} \\ \Rightarrow A_1 \cdot x &= A_2 \cdot y \end{aligned} \quad (4.4)$$

3º passo: Dividir (4.3) por (4.4) e determinar a altura h .

$$\begin{aligned} \frac{A_1 \cdot (h + x)}{A_1 \cdot x} &= \frac{A_2 \cdot (h - y)}{A_2 \cdot y} \\ \Rightarrow \frac{h + x}{x} &= \frac{h - y}{y} \\ \Rightarrow x(h - y) &= y(h + x) \\ \Rightarrow hx - xy &= hy + xy \\ \Rightarrow hx - hy &= xy + xy \\ \Rightarrow h(x - y) &= 2xy \\ \Rightarrow h &= \frac{2xy}{x - y} \end{aligned}$$

Portanto, a altura procurada, em cm, é $h = \frac{2xy}{x - y}$.

Exemplo 4.7. (ENEM-2022) Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a 4 cm.

Passos para a solução do problema

1º passo: Determinar o volume do cone dado.

Sabemos que o volume de um cone é dado por

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h .$$

Seja V_1 o volume do cone dado, cujo altura mede 10 cm e raio da base igual a 4 cm. Daí, temos

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160\pi}{3} \text{ cm}^3$$

2º passo: Determinar o volume do cone reduzido. Seja V_2 o volume do cone reduzido.

Como reduzir 19% corresponde a um fator multiplicativo igual $1 - 0,19 = 0,81$, então temos que

$$\begin{aligned} V_2 &= (0,81) \cdot V_1 \\ &= (0,81) \cdot \frac{160\pi}{3} \\ &= (43,2)\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

3º passo: Determinar a medida do raio da base do cone reduzido.

Seja R a medida do raio da base do cone reduzido, cuja altura mede 10cm. Utilizando o volume encontrado no 2º passo da resolução do problema, vamos determinar a medida de R .

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = (43,2)\pi \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 10 &= (43,2)\pi \\ \Rightarrow \frac{10}{3}R^2 &= 43,2 \\ \Rightarrow R^2 &= 12,96 \\ \Rightarrow R &= \sqrt{12,96}, \text{ pois } R > 0 \\ \Rightarrow R &= 3,6 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Capítulo 5

Uso da ferramenta integral definida como prática alternativa para demonstrar as fórmulas de volume dos sólidos geométricos

Neste capítulo trazemos a demonstração das fórmulas de volume dos principais sólidos geométricos estudados no ensino médio, através da ferramenta integral definida, como prática alternativa, em virtude de que os livros didáticos para essa modalidade de ensino, usa especificamente o Princípio de Cavalieri como abordagem exclusiva para a demonstração de tais fórmulas.

5.1 O método da integração para o cálculo de volumes

Dado um sólido S , seccionando-o transversalmente em áreas conhecidas, tomando o eixo transversal as secções planas como sendo o eixo x , para facilitar o entendimento.

Considerando o sólido compreendido por dois planos perpendiculares ao eixo das abscissas contendo, respectivamente, as retas perpendiculares $x = a$ e $x = b$, conforme a figura 5.1.

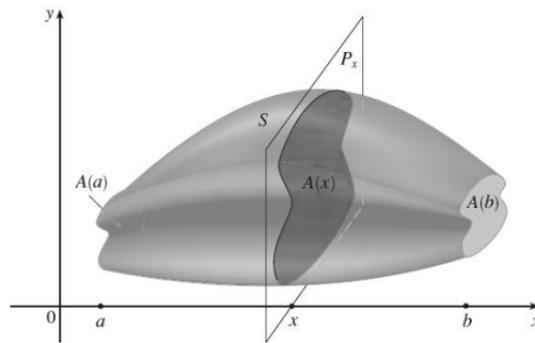


Figura 5.1: Secção transversal do sólido S

Seja P uma partição de $[a, b]$ dada por

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$$

e $A(x)$, a área da secção transversal ao eixo x , para cada elemento x de $[a, b]$, podemos aproximar o volume procurado por

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i \quad (5.1)$$

onde V_i é o volume de um sólido cuja área da base é $A(t_i)$, com $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, e altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, medida ao longo do eixo x , ou seja, $V_i = A(t_i)\Delta x_i$. Assim, podemos afirmar que:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(t_i)\Delta x_i \quad (5.2)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $\Delta x_i \rightarrow 0$ e, daí, definimos:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(t_i)\Delta x_i, \quad (5.3)$$

ou seja,

$$V = \int_a^b A(x)dx \quad (5.4)$$

5.2 Volumes do Paralelepípedo reto retângulo e do prisma

Teorema 5.2.1. *O volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c é dado pelo produto de suas dimensões, ou seja, $V = abc$.*

Demonstração. Seja um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c . Transportemos este paralelepípedo para o plano cartesiano ortogonal xOy de modo que as arestas de direções a e c estejam contidas nos eixos x e y respectivamente e, conseqüentemente, um dos seus vértices esteja na origem do sistema conforme a figura 5.2.

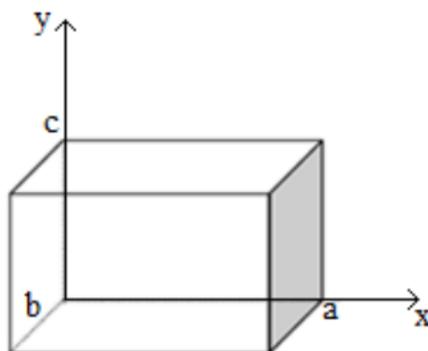


Figura 5.2: Paralelepípedo reto retângulo e o sistema cartesiano xOy

Observamos que o plano Px determina no bloco retangular uma secção transversal retangular de área igual a $b \cdot c$, para qualquer $x \in [0, a]$, ou seja, $A(x) = b \cdot c, \forall x \in [0, a]$. Aplicando a definição de volume por integração com os limites de integração iguais a 0 e a , obtemos que

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^a b \cdot c \, dx \\
 &= b \cdot c \int_0^a dx \\
 &= b \cdot c \cdot x \Big|_0^a \\
 V &= b \cdot c(a - 0) = abc
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

De forma análoga, calculemos o volume de um prisma de base hexagonal com área da base igual a $A(B)$ e altura igual a h . Fazendo o transporte do sólido para o sistema cartesiano ortogonal xOy . Observemos a figura 5.3, que mostra o sólido transportado para o sistema xOy de modo que o eixo

x está contido no plano de uma das bases, o eixo y seja perpendicular ao plano da base e um dos vértices do prisma é a origem do sistema cartesiano ortogonal.

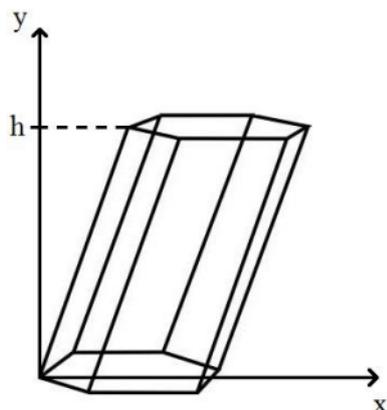


Figura 5.3: Prisma hexagonal e o sistema xOy

Nesse caso, vemos que o plano Py , é perpendicular ao eixo y e intersecta o prisma, determina uma secção transversal hexagonal no prisma, cuja área é igual a $A(B)$ para qualquer $y \in [0, h]$, ou seja, $A(y) = A(B)$, $\forall y \in [0, h]$. Então, para fins de cálculo, tomaremos a secção determinada por Py , uma vez que o prisma está na posição vertical. Observemos que, nesse caso, a variação da secção transversal está ocorrendo no eixo y . Assim, aplicando a definição de volume por integração com os limites de integração iguais a 0 e h , temos que

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(B) \, dy \\
 &= A(B) \int_0^h dy \\
 &= A(B) \cdot y \Big|_0^h \\
 &= A(B)(h - 0) = A(B)h .
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Daí concluímos que o volume do prisma de base hexagonal é igual a $V = A(B)h$. \square

O processo feito acima pode ser aplicado para qualquer prisma de base genérica, pois para todo prisma a área da secção transversal é constante e igual à área das bases. Nessas condições, de modo geral, seu volume é dado por $V = \int_0^h A(B)(h - 0)dx = A(B) \cdot (h - 0) = A(B) \cdot h$.

Os argumentos acima demonstram o teorema seguinte, que generaliza a fórmula para o cálculo do volume de um prisma.

Teorema 5.2.2. *O volume de um prisma é igual ao produto da área da base ($A(B)$) pela medida da altura (h). Em símbolos:*

$$V = A(B)h \quad (5.7)$$

5.3 Volume da pirâmide

Iniciaremos essa seção com um exemplo particular que servirá como motivação à demonstração geral.

Consideremos uma pirâmide regular cuja altura mede h unidades de comprimento, e a base é um quadrado de lado com l unidades de comprimento. Inicialmente, colocamos o vértice da pirâmide na origem do sistema cartesiano ortogonal de modo que o eixo x intersecte a base no centro da mesma, como indicado na figura 5.4. É fácil ver que todo plano Px , é perpendicular ao eixo das abscissas no ponto $x \in [0, h]$, intersecta a pirâmide de acordo com um quadrado com lado de comprimento s . Percebemos, pelo esquema abaixo, utilizando semelhança de triângulos, que o comprimento s pode ser escrito em função de x .

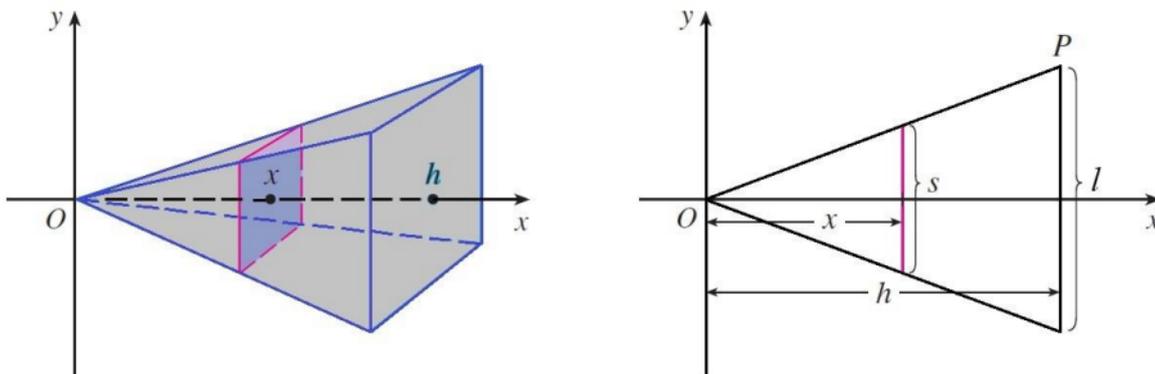


Figura 5.4: Pirâmide no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Pela semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{l} \implies s = \frac{lx}{h}$$

Dessa forma, podemos dizer que a área da secção transversal em certo ponto $x \in [0, h]$ é igual a

$$A(x) = s^2 = \left(\frac{lx}{h}\right)^2 = \frac{l^2}{h^2}x^2 \quad (5.8)$$

Como a pirâmide está entre os planos paralelos P_0 e P_h , são perpendiculares ao eixo x , pelo processo de integração temos que seu volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)dx \\ &= \int_0^h \frac{l^2}{h^2}x^2 dx \\ &= \frac{l^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\ &= \frac{l^2 h}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot l^2 h \\ V &= \frac{1}{3} \cdot A(B)h . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Teorema 5.3.1. *O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base $A(B)$ pela medida da altura (h). Em símbolos:*

$$V = \frac{1}{3} \cdot A(B)h . \quad (5.10)$$

Demonstração. A demonstração da fórmula para o volume de uma pirâmide qualquer é feita de forma análoga ao caso da pirâmide quadrangular. De modo geral, para uma pirâmide de base B qualquer e de altura h , posicionada no sistema cartesiano como o exemplo anterior, o plano Px , que é perpendicular ao eixo x no ponto x , irá determinar uma secção transversal na pirâmide na forma de uma região poligonal B' que será uma figura homotética à base B com razão $\frac{x}{h}$.

Assim, as regiões B' e B são figuras semelhantes com razão de semelhança igual a $\frac{x}{h}$. Sabemos que figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança. Assim sendo,

temos que

$$\begin{aligned}\frac{A(x)}{A(B)} &= \frac{A(B')}{A(B)} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \\ \Rightarrow A(x) &= \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot A(B).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Agora que sabemos o valor da área da secção transversal em função de, podemos então determinar o volume da pirâmide como segue:

$$\begin{aligned}V &= \int_0^h A(x)dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot A(B)dx \\ &= \frac{A(B)}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{A(B)}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\ V &= \frac{A(B)}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot A(B)h.\end{aligned}\tag{5.12}$$

□

Para um maior aprofundamento nos conceitos de semelhança, bem como na definição de homotetia e estudo de seus teoremas, sugerimos ao leitor a leitura de Lima (2006).

5.4 Volume do Tronco de pirâmide

Teorema 5.4.1. *O volume de um tronco de pirâmide com área da base maior igual a B , área da base menor igual a b e altura com medida h é dada por*

$$V = \frac{h}{3} \left(B + \sqrt{Bb} + b \right)\tag{5.13}$$

Demonstração. Consideremos um tronco de pirâmide com área da base maior igual a B , área da base menor igual a b e altura h . Posicionemos esse sólido no plano cartesiano ortogonal xOy de forma que um dos pontos da base maior esteja na origem de xOy e que ela esteja contida no plano perpendicular ao eixo y pela origem. A figura 5.5 serve apenas como uma ilustração auxiliar para

a demonstração da fórmula do volume do tronco de pirâmide.

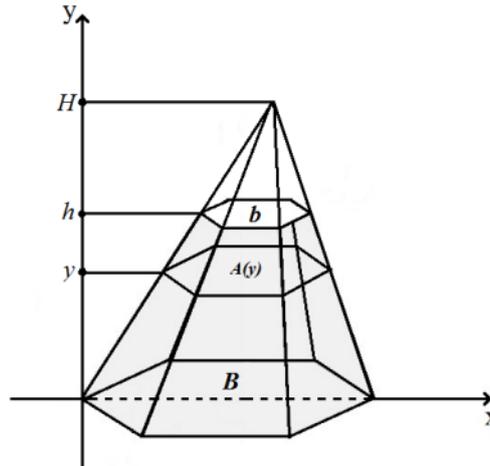


Figura 5.5: Esquema para determinação do volume do tronco de pirâmide

Na figura acima, temos que $A(y)$ é a área da seção transversal determinada pelo plano Py , plano esse que é perpendicular ao eixo das ordenadas no ponto $y \in [0, h]$, intersectando o tronco segundo um polígono e a medida H representa a altura da pirâmide.

Os polígonos de áreas b , $A(y)$ e B são figuras homotéticas. Portanto, são semelhantes, logo, temos os seguintes resultados.

$$(i) \quad \frac{B}{b} = \left(\frac{H}{H-h} \right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{H}{H-h} \Rightarrow H\sqrt{B} - h\sqrt{b} = H \Rightarrow H(\sqrt{B} - \sqrt{b}) = h\sqrt{B} \\ \Rightarrow H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$(ii) \quad \frac{B}{A(y)} = \left(\frac{H}{H-y} \right)^2 \Rightarrow \frac{A(y)}{B} = \left(\frac{H-y}{H} \right)^2 \Rightarrow A(y) = \left(1 - \frac{y}{H} \right)^2 b = \left(1 - \frac{2}{H}y + \frac{1}{H^2}y^2 \right) B$$

Assim, temos que $\left(1 - \frac{2}{H}y + \frac{1}{H^2}y^2 \right) B$. Usando esses dois resultados, podemos determinar o

volume do tronco de pirâmide como segue:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy = \int_0^h \left(1 - \frac{2}{H}y + \frac{1}{H^2}y^2\right) B dy \\ &= B \left[y - \frac{1}{H}y^2 + \frac{1}{3H^2}y^3 \right]_0^h \\ &= B \left(h - \frac{1}{H}h^2 + \frac{1}{3H^2}h^3 \right) \end{aligned}$$

Substituindo o resultado de (i) em (ii), temos:

$$\begin{aligned} V &= B \left[h - \frac{\sqrt{B} - \sqrt{b}}{h\sqrt{B}}h^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2}{bh^2}h^3 \right] \\ &= Bh - \sqrt{B}(\sqrt{B} - \sqrt{b})h + \frac{1}{3}(B - 2\sqrt{B}\sqrt{b} + b)h \\ &= Bh - Bh + \sqrt{B}\sqrt{b}h \\ &\quad + \frac{1}{3}(B - 2\sqrt{B}\sqrt{b} + b)\frac{h}{3} [3\sqrt{B}\sqrt{b} + (2\sqrt{B}\sqrt{b} + b)] \\ V &= \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b) \end{aligned} \tag{5.14}$$

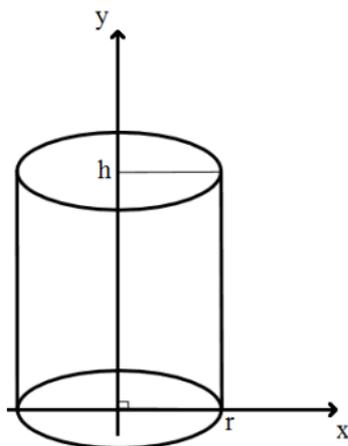
□

5.5 Volume do cilindro circular reto e oblíquo

Teorema 5.5.1. *O volume de um cilindro circular reto de raio r e medida da altura igual a h é dado por*

$$V = \pi r^2 h \tag{5.15}$$

Demonstração. Consideremos um cilindro circular reto de altura com medida igual a h unidades e raio da base medindo r unidades de comprimento. Posicionemos os eixos coordenados do sistema cartesiano xOy de maneira que a origem do sistema coincida com o centro de uma das bases do cilindro e a altura desse cilindro seja medida ao longo do eixo positivo y , observado na figura 5.6.

Figura 5.6: Cilindro circular reto e o sistema cartesiano xOy

Logo, todo plano Py intersecta o cilindro de acordo com uma secção transversal em forma de um círculo de raio r , de modo que sua área é constante e igual a $A(y) = \pi r^2$ para todo r no intervalo $[0, h]$. Então, pela nossa definição de volume, temos que

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(x) dx \\
 &= \int_0^h \pi r^2 dy \\
 &= \pi r^2 \int_0^h dy \\
 &= \pi r^2 y \Big|_0^h = \pi r^2 h
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

□

De forma análoga à demonstração da fórmula de volume do prisma, o processo feito acima pode ser expandido para qualquer cilindro circular de altura h e raio da base medindo r , pois, para todo cilindro circular (reto ou oblíquo) na mesma posição do cilindro anterior (vertical), a área da secção transversal determinada por Py é sempre igual à área das bases que é πr^2 , de modo geral temos que

$$V = \int_0^h \pi r^2 dy = \pi r^2 h .$$

Assim, os argumentos acima demonstram o próximo teorema, que generaliza a fórmula para o cálculo de volume de um cilindro circular.

Teorema 5.5.2. *O volume de um cilindro circular de raio da base igual a r e medida da altura igual a h é*

$$V = \pi r^2 h \quad (5.17)$$

5.6 Volume do cone circular

Teorema 5.6.1. *O volume de um cone circular de raio da base igual a r medidas de comprimento e cuja altura medindo h é igual a*

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (5.18)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, faremos a demonstração desse teorema para o caso do cone circular reto de raio da base igual a r e altura medindo h , sendo o caso genérico demonstrado de forma análoga, seguindo os mesmos passos. Escolhemos o cone circular reto para essa demonstração. Dado o cone circular reto tal que sua origem coincida com o vértice do cone e o eixo positivo x do sistema cartesiano passe pelo centro da base do mesmo, situação ilustrada pela figura 5.7. De fato, o plano Px , que passa pelo ponto x e é perpendicular ao eixo das abscissas, determina no cone uma secção transversal circular de raio s , de modo que podemos escrever o raio s do círculo da secção em função do raio da base r por meio de uma semelhança de triângulos. (Observe a figura 5.7, que ilustra o que acabamos de dizer).

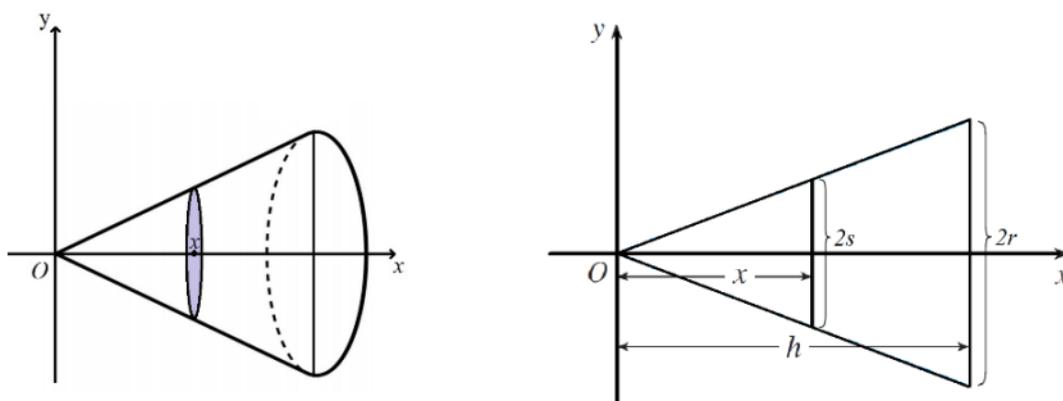


Figura 5.7: Cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Pela semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{2s}{2r} = \frac{x}{h} \Rightarrow s = \frac{r}{h}x \quad (5.19)$$

Agora, já sabemos a medida do raio do círculo da secção transversal do cone, determinada pelo plano Px , em qualquer ponto $x \in [0, h]$ escrito em função de x . Como a área de um círculo de raio r é πr^2 , o valor de s nos possibilita encontrar a área da secção, ou seja, podemos dizer que a área $A(x)$ da secção transversal em qualquer ponto $x \in [0, h]$ é igual a

$$A(x) = \pi s^2 = \pi \left(\frac{r}{h}x\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2. \quad (5.20)$$

Assim, o volume procurado é determinado pela integração da função $A(x)$ no intervalo $[0, h]$, como segue.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\ V &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para generalizar essa demonstração para todo cone circular (reto ou oblíquo), basta seguirmos a mesma sequência lógica da demonstração feita para o cone circular reto acima. Com esses argumentos, provamos que a fórmula para o cálculo do volume de um cone circular é

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (5.22)$$

□

5.7 Volume do tronco de cone circular

Teorema 5.7.1. *O volume de um tronco de cone circular com altura h , raio da base maior R e raio da base menor r , é igual a*

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) \quad (5.23)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, utilizaremos um tronco de cone circular reto na demonstração do teorema. Isso significa que os passos feitos aqui são aplicáveis a todo tronco de

cone circular, mas, por questão de conveniência, escolhamos o tronco de cone circular reto. Seja um tronco de cone circular reto de altura h , com raio maior R e raio menor r . Colocando o sólido no plano cartesiano ortogonal xOy de modo que o centro da base maior se encontre na origem do sistema cartesiano xOy e o centro da base menor pertença à parte positiva do eixo x , conforme mostra a figura 5.8.

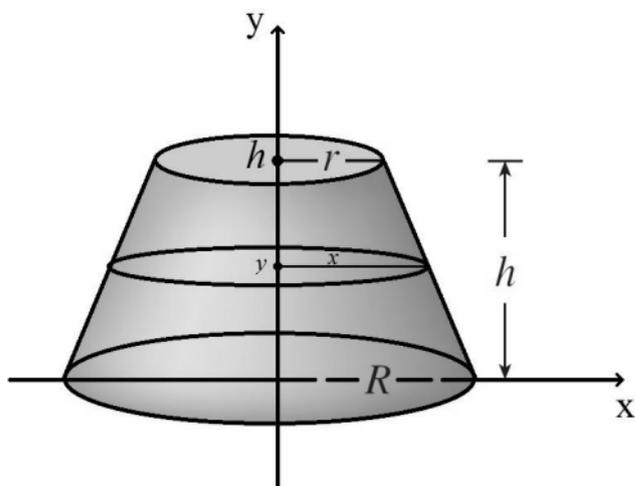


Figura 5.8: Tronco de cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Podemos perceber, conforme a figura 5.8, que o plano Py , que está a uma distância Y do plano da base, intersecta o tronco de cone de modo a determinar um círculo cujo raio é X . Para determinar o volume desse sólido, temos que encontrar o valor de $A(y)$ para assim utilizá-lo em nossa definição de volume por integral. Escrevendo agora a variável x em função de y . Com esse objetivo, observemos a figura 5.9.

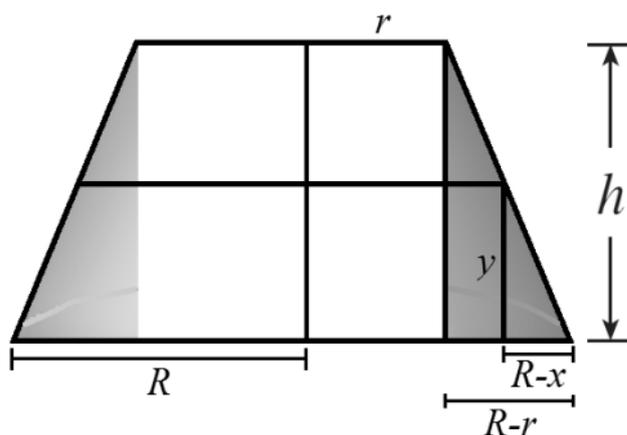


Figura 5.9: Visualização da relação entre x e y

Observando a semelhança de triângulos na figura acima, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 \frac{R-x}{y} &= \frac{R-r}{h} \\
 \Rightarrow (R-x)h &= (R-r)y \\
 \Rightarrow Rh - xh &= (R-r)y \\
 \Rightarrow xh &= Rh - (R-r)y \\
 \Rightarrow x &= R - \frac{(R-r)}{h}y.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Agora podemos calcular o volume do tronco. Vejamos:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(y)dy \\
 &= \int_0^h \pi \left(R - \frac{R-r}{h}y \right)^2 dy \\
 &= \pi \int_0^h \left[R^2 - 2R\frac{(R-r)}{h}y + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 y^2 \right] dy \\
 &= \pi \left[R^2y - \frac{R(R-r)}{h}y^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 y^3 \right]_0^h \\
 &= \pi \left[R^2h - R(R-r)h + \frac{1}{3}(R-r)^2h \right] \\
 &= \pi \left[R^2h - R^2h + Rrh + \frac{1}{3}(R^2h - 2Rrh + r^2h) \right] \\
 &= \frac{1}{3}\pi h[3Rr + (R^2 - 2Rr + r^2)] \\
 V &= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

□

5.8 Volume da esfera

Teorema 5.8.1. *O volume de uma esfera de raio r é igual a*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (5.26)$$

Demonstração. Posicionemos uma esfera de raio r no plano cartesiano ortogonal xOy , de modo que seu centro coincida com a origem do sistema xOy . De fato, o plano Px , que é perpendicular ao eixo das abscissas no ponto $x \in [-r, r]$, intersecta essa esfera de acordo com um círculo de raio igual a $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ com $-r \leq x \leq r$. Esse resultado é obtido por uma simples aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de lados com medidas x, y e r , de acordo com a figura 5.10.

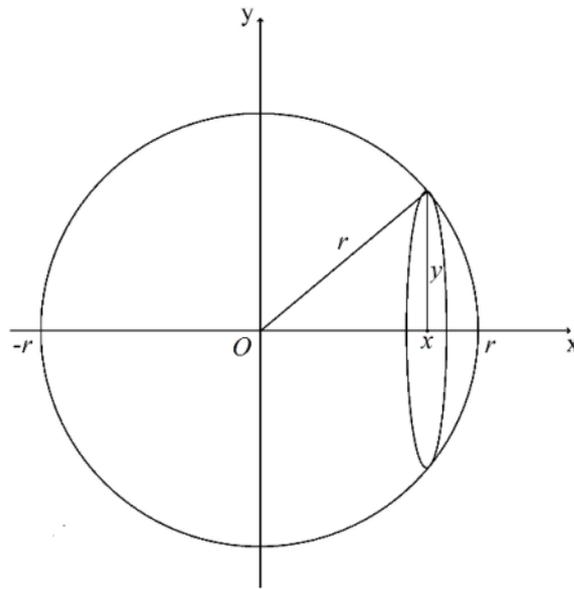


Figura 5.10: Esfera no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Nessas condições, temos que a área da secção transversal determinada pelo plano Px é a área de um círculo de raio y , ou seja,

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2). \quad (5.27)$$

Pela nossa definição de volume, temos que o volume da esfera de raio r é igual a

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx \\ &= \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] \\ &= 2\pi \frac{2r^3}{3} \\ V &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned} \tag{5.28}$$

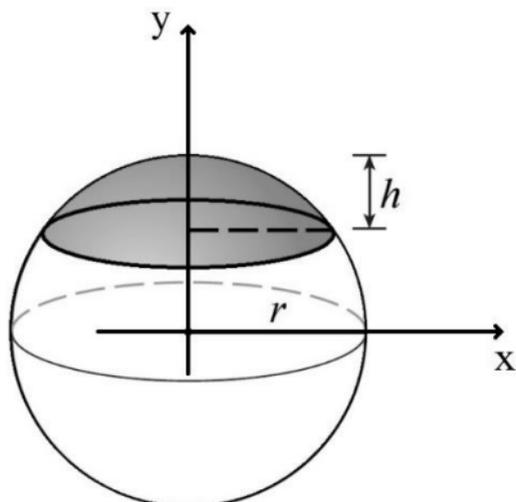
□

5.9 Volume da calota esférica

Teorema 5.9.1. *O volume de uma calota esférica de altura h numa esfera de raio r é igual a*

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) \tag{5.29}$$

Demonstração. Seja uma calota esférica de altura h contida numa esfera de raio r . Centremos essa esfera na origem do plano cartesiano xOy conforme indica a figura 5.11.

Figura 5.11: Calota esférica e o sistema cartesiano xOy

De forma análoga à demonstração da fórmula de volume da esfera, temos que a área da secção transversal da esfera determinada pelo plano Py é igual a

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(r^2 - y^2) .$$

Salientando que a calota esférica está entre os planos perpendiculares ao eixo y nos pontos $r - h$ e r que são, respectivamente, limites inferiores e superiores da integral que determinará o volume do sólido. Usando essas informações vem:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{r-h}^r A(y) dy \\
&= \int_{r-h}^r \pi(r^2 - y^2) dy \\
&= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - y^2) dy \\
&= \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{r-h}^r \\
&= \pi r^2 [r - (r - h)] - \frac{\pi}{3} [r^3 - (r - h)^3] \\
&= \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} [r^3 - r^3 + 3r^2 h - 3rh^2 + h^3] \\
&= \frac{\pi}{3} (3rh^2 - h^3) = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) \\
V &= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

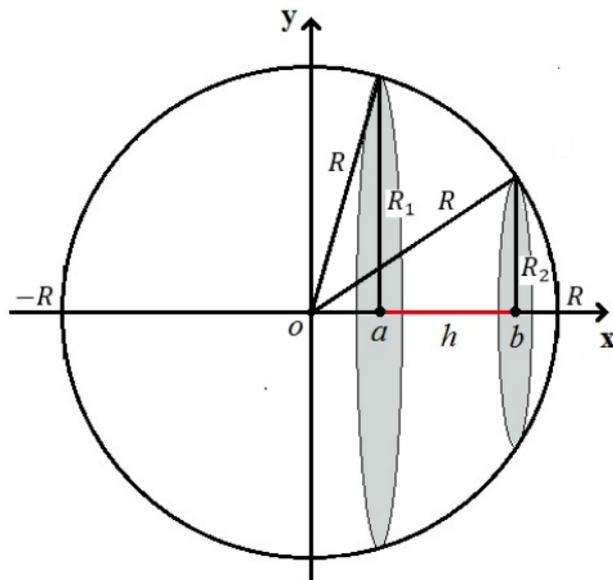
□

5.10 Volume do segmento esférico

Teorema 5.10.1. *O volume de um segmento esférico de raios das bases iguais a R_1 e R_2 , e altura com medida h é igual a*

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(R_1^2 + R_2^2) + h^2] \tag{5.31}$$

Demonstração. Consideremos um segmento esférico de raios das bases iguais a R_1^2 e R_2^2 , e altura igual a h , numa esfera de raio R . Coloquemos essa esfera no sistema cartesiano ortogonal xOy de modo que a origem do sistema seja o centro da esfera e o eixo x do sistema xOy passe pelo centro de cada uma das bases do segmento esférico. De fato, os planos paralelos, que contêm as bases do sólido em pauta, intersectam o eixo das abscissas em dois pontos. Sejam a e b esses pontos. A figura 5.12 ilustra as considerações feitas acima.


 Figura 5.12: Segmento esférico e o sistema cartesiano xOy

Observando os triângulos retângulos de lados R, R_1 e a e o outro de lados R, R_2 e b , temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$(i) \quad a^2 + R_1^2 = R^2 \implies a^2 = R^2 - R_1^2;$$

$$(ii) \quad b^2 + R_2^2 = R^2 \implies b^2 = R^2 - R_2^2.$$

Temos também que a altura h do segmento esférico é dada pela distância entre suas bases. Pela figura acima é imediato que

$$(iii) \quad h = b - a.$$

Da mesma forma como na demonstração da fórmula do volume da esfera, o plano Px intersecta o segmento esférico de acordo com um círculo cujo raio é igual a $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ com $-r \leq a \leq x \leq b \leq r$. Dessa forma, a área da secção transversal determinada pelo plano Px no segmento esférico é igual a

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(R^2 - x^2) \tag{5.32}$$

Observemos que o segmento esférico está entre os planos perpendiculares ao eixo x nos pontos a e b , que são justamente os limites de integração da nossa definição de volume. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b A(x)dx \\
&= \int_a^b \pi(R^2 - r^2)dx \\
&= \pi \int_a^b (R^2 - r^2)dx \\
&= \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_a^b \\
&= \pi \left[R^2(b - a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right] \\
&= \pi \left[R^2(b - a) - \frac{1}{3}(b - a)(a^2 + ab + b^2) \right] \\
&= \pi(b - a) \left[R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{3}(b - a) [3R^2 - (a^2 + ab + b^2)]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

No entanto, usando os resultados dos itens (i), (ii), e (iii) nessa última expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi h}{3} [3R^2 - (R^2 - R_1^2 + ab + R^2 - R_2^2)] \\
&= \frac{\pi h}{3} [3R^2 - (2R^2 - R_1^2 - R_2^2 + ab)]
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Da relação dada no item (iii), obtemos que

$$\begin{aligned}
b - a &= h \\
\Rightarrow (b - a)^2 &= h^2 \\
\Rightarrow b^2 - 2ab + a^2 &= h^2 \\
\Rightarrow ab &= \frac{a^2 + b^2 - h^2}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando novamente as relações dos itens (i) e (ii), vem:

$$\begin{aligned}
 ab &= \frac{R^2 - R_1^2 + R^2 - R_2^2 - h^2}{2} \\
 ab &= R^2 - \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.35}$$

Substituindo esse resultado na última expressão do desenvolvimento do volume do segmento esférico, obtemos

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi h}{3} [3R^2 - (2R^2 - R_1^2 - R_2^2 + ab)] \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left\{ 3R^2 - \left[2R^2 - R_1^2 - R_2^2 + R^2 - \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2} \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left\{ 3R^2 - \left[3R^2 - R_1^2 - R_2^2 - \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2} \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left[R_1^2 + R_2^2 + \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2} \right] \\
 &= \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)}{2} \\
 &= \frac{\pi h}{6} [3(R_1^2 + R_2^2) + h^2] .
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

□

Uma observação interessante que pode ser feita é que as fórmulas de volume da esfera e da calota esférica, demonstradas nas seções anteriores, decorrem diretamente da fórmula de volume do segmento esférico. Em outras palavras, podemos dizer que tanto a fórmula de volume da esfera, como a fórmula de volume da calota esférica são casos particulares da fórmula de volume de um segmento esférico.

Assim, para deduzir a fórmula de volume de uma esfera de raio r utilizando a fórmula de volume de um segmento esférico, fazemos $R_1 = R_2 = 0$, de modo que $h = 2r$, assim obtemos

$$V = \frac{\pi(2r)}{6} [3(0^2 + 0^2) + (2r)^2] = \frac{4}{3}\pi r^3
 \tag{5.37}$$

Agora, para a dedução da fórmula de volume de uma calota esférica de altura h e base de raio

igual a r , contida numa esfera de raio R , pela fórmula de volume de um segmento esférico, basta fazermos $R_1 = r$ e $R_2 = 0$. Assim, temos

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(r^2 + 0^2) + h^2] = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2) . \quad (5.38)$$

Observemos a figura 5.13, que nos mostra uma calota esférica de raio da base igual a r e altura de medida h em uma esfera de raio R , destacando o triângulo retângulo OAB .

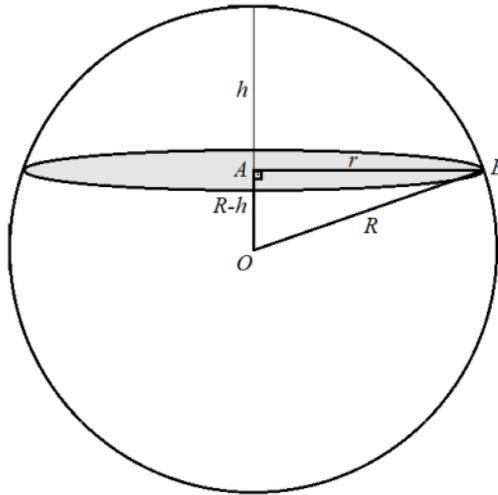


Figura 5.13: Relação entre R , r e h

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAB , obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} r^2 + (R - h)^2 &= R^2 \\ \Rightarrow r^2 + R^2 - 2Rh + h^2 &= R^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 2Rh - h^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Substituindo esse último resultado em (5.38), vem:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2) = \frac{\pi h}{6} [3(2Rh - h^2) + h^2] \\ &= \frac{\pi h}{6} (6Rh - 2h^2) \\ &= \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) . \end{aligned} \quad (5.40)$$

Capítulo 6

Intervenção no ensino

Nos capítulos anteriores, definimos os principais sólidos geométricos que geralmente são estudados no ensino básico. Apresentamos conceitos e princípios de dois modelos matemáticos, o princípio de Cavalieri e a integral definida. Neste capítulo, através de uma aplicação do cálculo de volume, trazemos uma aplicação no ensino básico, fazendo uma transposição didática. Tal aplicação se baseia no cálculo de volume de cisterna que é utilizada para o armazenamento de água, no município de Aquidabã/SE.

6.1 Águas

Distribuída nos estados físico, sólido e gasoso, a água é a substância mais abundante na biosfera, presente nos oceanos, em rios, lagos, nas calotas polares e geleiras, no ar e no subsolo. Essa substância é utilizada em atividades essenciais ao ser humano, como a produção agrícola, e usada como solvente universal. Ela é responsável por manter toda espécie de vida no planeta Terra.

De toda água presente no planeta, a maior parte é de água salgada – presente nos oceanos; e essa quantidade representa, aproximadamente, 97,5% de toda água na Terra, o restante, cerca de 2,5%, é de água doce. Mas desse percentual de quase 2,5%, 68,9% encontram-se em calotas polares e geleiras, 29,9% está presente no subsolo (armazenada em aquíferos) e apenas 0,3% corresponde a água dos rios e lagos (TUNDISI, 2005 apud Abreu, 2011). O gráfico abaixo ilustra toda essa distribuição.

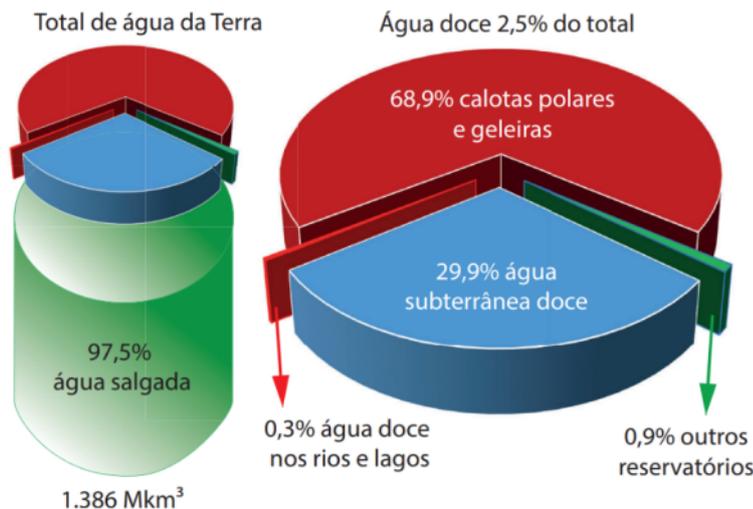


Figura 6.1: Distribuição das águas na terra (Fonte: SHIKLOMONOV, 1998 apud TUNDISI)

Essa riqueza - a água doce; tem sido motivo de conflitos entre os povos por ser um bem cada vez mais escasso e essencial a vida. Logo, o uso desse bem, precioso a existência das espécies terrestres, precisa ser pensado para que não prejudique nenhum dos diferentes usos que ela tem na preservação da vida.

Segundo a Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA) – autarquia vinculada ao Ministério do Meio Ambiente; O Brasil detém de 13,7% de toda água doce existente no planeta, sendo que, aproximadamente, 80% dessa água está presente nos rios da Amazônia. Esses dados mostram que, apesar da abundância do recurso hídrico no país, há uma distribuição desigual dele nas regiões brasileiras, pois o Sul e o Sudeste brasileiro concentram a maior taxa de densidade demográfica e não a região da Amazônia. Logo, a maior demanda desse recurso está nas regiões que concentra a maioria da população brasileira – Sul e Sudeste.

Além de estar presente na composição do planeta, a água também compõe parte do nosso corpo, isto é, de acordo com dados divulgados pelo Ministério da Saúde, cerca de 70 a 75% do corpo humano é formado por água. Porém, mais do que sinônimo de VIDA, a água também é usada para as mais diversas atividades humanas, como exposto a seguir.

Agricultura	Irrigação e outras atividades relacionadas
Abastecimento público	Usos domésticos
Hidroeletricidade	
Usos industriais diversificados	Resfriamento, diluição, aquecimento
Recreação	
Turismo	
Pesca	Produção pesqueira comercial ou esportiva
Aquacultura	Cultivo de peixes, moluscos, crustáceos de água doce. Reserva de água doce para futuros empreendimentos e consequente uso múltiplo
Transporte e navegação	
Mineração	Lavagem de minérios
Usos estéticos	Paisagismo

Figura 6.2: Tabela sobre os usos múltiplos da água (Fonte: TUNDISI, 2020)

Mesmo sendo conhecedor das múltiplas funções da água e da necessidade de seu uso consciente; já que é um bem limitado; o homem, tem comprometido a qualidade da água doce presente no planeta, e aqui no Brasil não tem sido diferente. Como prática de mau uso e contribuição para a escassez da água, aqui no país, podemos citar algumas ações humanas, tais como:

- Desmatamento;
- Mudança do uso do solo;
- Construção de barragens;
- Emissão de gases;
- Poluição dos rios e das águas subterrâneas;
- Tempo prolongado no uso de torneiras e chuveiros.

Já na escala planetária, destaca-se a mudança climática global decorrente da alteração das características químicas da atmosfera com gases que promovem o “efeito estufa”. Qualquer modificação nos componentes do clima ou da paisagem alterará a quantidade, a qualidade e o tempo de residência da água nos ecossistemas e, por sua vez, o fluxo da água e suas características no canal principal dos rios.

Em decorrência da poluição dos rios, lagos e lençóis freáticos, bactérias, vírus e protozoários se proliferam na água e causam doenças gastrointestinais, acometendo a saúde da população e colocando em risco a vida humana.

Como já foi citado anteriormente, a água doce é um recurso limitado e por esse motivo, além do seu uso consciente e da diminuição dos poluentes nela presentes, faz-se necessário um correto armazenamento tanto para o consumo humano quanto para o uso na vegetação e na criação de animais, pois nem sempre a água superficial (rios, lagos, etc) está à disposição nas propriedades. Por isso a importância do poço artesiano para o sistema de irrigação, pois, o poço assegura que nos momentos de estiagem a lavoura pode desenvolver e ainda aumentar a produção mesmo nos períodos das secas. Já a captação e armazenamento da água das chuvas surgem, neste contexto, como opção para auxiliar no atendimento da demanda de água de limpeza nas propriedades, principalmente em períodos de estiagem, quando é comum a diminuição da vazão das fontes.

É importante citar algumas contribuições oriundas do armazenamento de água, tais como: conservação da água potável, economia para o produtor rural e redução dos impactos ambientais.

6.2 Cisternas

Reservatório utilizado para águas pluviais, de poço e reuso, as cisternas, muito semelhantes às caixas d'água presentes na maioria das residências brasileiras, é uma excelente opção sustentável e econômica, pois além de servir para captação e armazenamento da água das chuvas e de poços artesianos, ressignifica o consumo, isto é, pode ser reutilizada. Já as caixas d'água geralmente são utilizadas para armazenar a água oriunda de rios e lagos através de sistema público de redistribuição.

A cisterna é vista como uma tecnologia social, pois sua implementação se dá pela demanda da população do semiárido brasileiro, onde essa tecnologia é discutida e a construção conta com o apoio da comunidade local (Mendes, 2022, p. 312).

6.3 Tipos de cisternas

Há diversos modelos de cisterna para captação e armazenamento de água oriunda das chuvas ou de poço artesiano (águas subterrâneas). Elas possuem diferentes formas como: retangulares, quadradas, cilíndricas, cônicas. Na figura 6.3 é apresentado alguns modelos de cisternas construídas a partir de diferentes tipos de matérias.



Figura 6.3: Tipos de cisternas (Fonte: EMBRAPA)Tipos de cisternas (Fonte: EMBRAPA)

O tipo de cisterna que deve ser utilizada está associado ao seu uso, isto é, enquanto as de fibra de vidro e alvenaria são comumente usadas para baixa capacidade (até $30 m^3$), as de PVC, PEAD e concreto para alta capacidade de armazenamento. Na busca de uma melhor qualidade dessa água armazenada, é recomendado que a cisterna fique total ou parcialmente enterrada para diminuir os riscos de proliferação de microrganismos e, também, para manter a água numa temperatura mais baixa. Cobri-las é outra recomendação de suma importância, pois evita a entrada de insetos e sujeiras.

6.4 Critérios para captação

Há critérios que devem ser seguidos durante o período de captação e armazenamento da água da chuva, que são:

- demanda diária na propriedade;
- índice médio de precipitação (chuva) por região em cada período do ano;

- tempo necessário para armazenagem;
- área de telhado necessário ou disponível para captação.

É possível obter o índice de precipitação através dos órgãos oficiais, tais como: Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), Embrapa, Universidades, Prefeituras, etc.

6.5 Dimensionamento da cisterna

A determinação da capacidade de armazenamento da cisterna está atrelada a demanda da propriedade por um período mínimo de 15 dias. No cálculo do dimensionamento da cisterna, deve-se acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de evaporação do sistema. Na dificuldade em se estabelecer um coeficiente de evaporação confiável, pode-se considerar um acréscimo de 10% no volume de reserva calculado. No cálculo de volume da cisterna poderá ser adotada a seguinte equação:

$$\begin{aligned} V_c &= (V_d \cdot N_{\text{dia}}) + (0,1) (V_d \cdot N_{\text{dia}}) \\ &= (1,1) \cdot (V_d \cdot N_{\text{dia}}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Sendo:

- $V_c \rightarrow$ Volume da cisterna (m^3);
- $V_d \rightarrow$ Volume de demanda da água diária (m^3);
- $N_{\text{dia}} \rightarrow$ Número de dias de armazenamento (15 dias);
- 10% \rightarrow Acréscimo de 10% em função da evaporação no período de armazenagem considerado.

Para uma melhor qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente dos telhados das edificações. Considerando que uma chuva de $1mm$ sobre uma área de $1m^2$ produz 1 litro de água, poderemos calcular a área necessária para captação da chuva afim de atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira:

$$A = \frac{V_c}{P_{\text{período}}} \quad (6.2)$$

Sendo:

- $A \rightarrow$ Área em metros quadrados de telhado para captação (m^2);

- $V_c \rightarrow$ Volume da cisterna (m^3);
- $P_{\text{período}} \rightarrow$ precipitação média no período considerado para captação (mm).

6.6 Relato do estudo teórico sobre cisternas – custo/benefício; com os alunos em sala de aula

Iniciamos a aula com algumas indagações sobre a utilização dos conhecimentos adquiridos sobre volumes, em nossos cotidianos. Abrimos um espaço para discussão, onde, foram apresentadas algumas situações em que utilizamos o cálculo de volumes no nosso dia a dia. Refletimos sobre a importância de tais conceitos e o quanto eles contribuem em nossas escolhas diárias e na melhoria da qualidade de vida. Após a discussão, foi proposto uma aula prática, onde, eles teriam que aplicar, em cisternas, os conhecimentos adquiridos durante os estudos sobre sólidos geométricos.

Foi solicitado que os alunos fizessem uma pesquisa sobre cisterna e seus tipos. Eles descobriram, além do que fora pedido na pesquisa, que existem projetos de construção de cisternas para regiões do semiárido brasileiro custeados pelo governo federal. Também foi observado que há critérios estabelecidos para dimensionamento das cisternas e para a captação da água das chuvas através de equações.

A fórmula encontrada, na pesquisa, para o cálculo do dimensionamento da cisterna não foi assimilada, a princípio, por grande parte dos alunos. Então, resolvemos fazer simulações a partir de algumas situações hipotéticas a fim de que todos pudessem compreender sua aplicação. Eis abaixo um desses exemplos trabalhados na sala.

Exemplo:

Seu José mora numa propriedade que tem uma demanda de 2000 litros de água por dia e deseja construir uma cisterna que atenda sua necessidade por um período de, no mínimo, 15 dias.

Sabendo que a precipitação média, na região, para esse período é de $110mm$, qual a capacidade que deve ter essa cisterna e qual é a área de telhado necessária para atender o consumo de água na propriedade de seu José durante esses 15 dias?

Passos para a solução do problema

1º passo: Determinar a capacidade que a cisterna construída deverá ter.

Dados:

- $V_d = 2000$

- $N_{\text{dia}} = 15$
- $V_c = ?$

Aplicando os dados na equação (6.1), obteremos a capacidade da cisterna. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 V_c &= (V_d \cdot N_{\text{dia}}) + 10\% (V_d \cdot N_{\text{dia}}) \\
 &= (V_d \cdot N_{\text{dia}}) + 0,1 (V_d \cdot N_{\text{dia}}) \\
 &= 1,1 (V_d \cdot N_{\text{dia}}) \\
 &= 1,1(2000 \cdot 15) \\
 \Rightarrow V_c &= 33.000 \text{ litros}
 \end{aligned}$$

Logo, a cisterna terá um volume de 33.000 litros de água.

2º passo: Determinar o tamanho necessário da área do telhado.

Dados:

- $V_c = 33.000$
- $P_{\text{período}} = 110$
- $A = ?$

Aplicando os dados na equação (6.2), obteremos o tamanho necessário da área do telhado. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{V_c}{P_{\text{período}}} \\
 \Rightarrow A &= \frac{33.000}{110} \\
 \Rightarrow A &= 300 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Logo, será necessário um telhado cujo área tem um tamanho de 300 m^2

Após a compreensão da aplicabilidade da equação para definir a capacidade da cisterna e o tamanho do telhado para atenderem a necessidade de consumo de água do proprietário em situações hipotéticas como no exemplo anterior, os discentes foram indagados sobre qual seria o formato ideal da cisterna – cilíndrico ou cúbico; levando-se em consideração o custo-benefício. Então, foi sugerido que eles realizassem uma outra pesquisa com o intuito de esclarecer a dúvida em questão.

Após a pesquisa os alunos concluíram que o formato cilíndrico é o mais recomendado e observaram também que uma parte da cisterna deve ser enterrada. Isto se dá por dois motivos:

- As cisternas no formato cilíndrico diminuem a pressão da água – forma de cisalhamento; sobre a estrutura de alvenaria – parede; elevando a segurança da tecnologia, além de diminuir os custos com infraestrutura (uso de ferro para construção de colunas de sustentação, que são necessárias caso o formato adotado da cisterna fosse cúbico);
- Deixar parte da cisterna enterrada contribui para aumentar a segurança da estrutura, diminuindo o risco de rompimento.

Propus mais um problema, solicitei que os alunos calculassem o tamanho da área ocupada para construir uma cisterna cilíndrica de acordo com o exemplo citado anteriormente e altura fixada, hipoteticamente, em 150 *cm*, para que tenha capacidade igual 33.000 litros de água. Para isso, eles utilizaram a fórmula do volume de um cilindro e procederam conforme a resolução descrita abaixo.

Passo para a solução do problema

Determinar o tamanho da área que cisterna irá ocupar na propriedade de seu José a fim de atender suas necessidades no consumo de água.

Dados:

- Volume = 33 m^3
- Altura (h) = 1,5 m
- Área da base (A_b) = ?

Daí, usando a fórmula para calcular o volume do cilindro, temos

$$\begin{aligned}V &= A_b \cdot h \\ \Rightarrow 33 &= A_b \cdot 1,5 \\ \Rightarrow \frac{33}{1,5} &= A_b \\ \Rightarrow 22 &= A_b\end{aligned}$$

Portanto, a cisterna irá ocupar uma área circular de 22 m^2 .

Para finalizar, acertamos detalhes sobre a prática que seria realizada em um povoado de Aquidabã.

Devido a dificuldade em levar toda a turma para fazer a visita, levamos um pequeno grupo de alunos, sendo que este ficaria responsável por reproduzir o conhecimento adquirido para os colegas de classe que não puderam estar presentes.

Com essa proposta de atividade, os alunos estariam sendo contemplados com duas das habilidades proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que são:

- EM13MAT201 - Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa;
- EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

6.7 Relato do estudo de campo sobre cisternas para captação e armazenamento de água

A propriedade visitada fica localizada no povoado Jurema, zona rural do município de Aquidabã/SE, e pertence a Diego Gomes da Silva, jovem aquidabãense de 23 anos de idade que além de ser agricultor exerce suas funções laborais como policial militar na corporação do estado de Alagoas.

Nossa prática iniciou através de uma conversa com o proprietário, o jovem Diego. Nesta, ele nos informou que a cisterna em questão foi construída com recursos próprios para atender sua demanda na agropecuária, pois sua propriedade está localizada numa região de escassez de água superficial. Então, movido por essa necessidade, antes de iniciar a obra, ele realizou muitas pesquisas e cálculos, com o intuito de encontrar o modelo de cisterna que possuísse o menor custo/benefício. O tipo escolhido foi o cilíndrico, feito de concreto armado, pois, para sua construção, seria necessário apenas areia branca e cimento, para construir as placas, e arame para fazer as amarrações. Outro fator preponderante que tornou a obra mais econômica, foi a mão de obra familiar, já que ele contou com a ajuda de seus irmãos, desde as medições da área que seria instalado o reservatório, até a construção das placas de cimento. No processo de instalação, Diego contou, também, com a ajuda de um amigo que já havia feito este procedimento, de montagem das placas, em uma outra propriedade.

A princípio, o objetivo de construção da cisterna era para captação da água da chuva. Porém, ele mudou de plano após seus irmãos sugerirem a construção de um poço artesiano, ficando a cisterna com a função de receber a água do poço e, em seguida, distribuir através de canos de tubulação para irrigar o plantio de capim elefante – alimento base na criação bovina.

Durante a conversa, os alunos, baseados no conhecimento adquirido em pesquisas e debates em sala de aula, questionaram se o proprietário conhecia uma equação que fornecia a capacidade de

água da cisterna, a partir de alguns elementos, tais como: consumo diário de água na propriedade, tamanho do telhado, precipitação de chuva na região, etc. O jovem Diego informou que durante suas pesquisas, ele encontrou tal equação, no entanto, como o objetivo havia sido modificado de captação e armazenagem de água da chuva para construção de poço artesiano, então ele deixou a equação para segundo plano.

Após todo esse rico momento de discussão, foi pedido ao grupo de alunos que calculassem o volume da cisterna existente na propriedade, já que o proprietário não havia efetuado o cálculo da capacidade dela. Esta foi a primeira tarefa solicitada por mim. Para isto, foram utilizados os seguintes materiais:

- Barbante;
- Fita métrica;
- Calculadora;
- Caderno;
- Caneta;
- Lápis;
- Borracha.

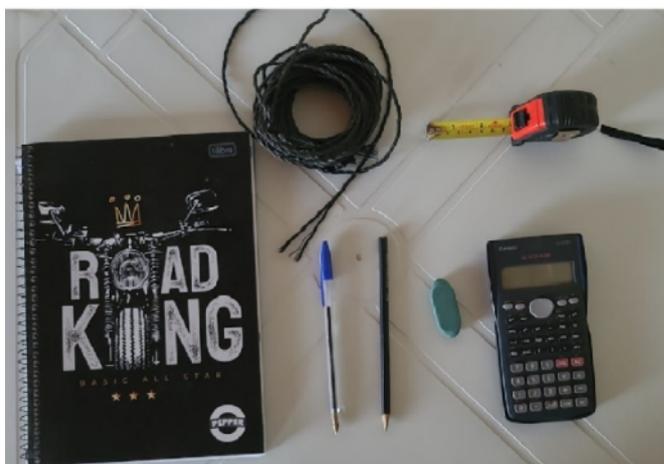


Figura 6.4: Materiais utilizados na pesquisa

Com os materiais em mãos, os alunos iniciaram o processo de determinação do volume da cisterna. Para isto, adotaram a sequência de execução descrita abaixo:

Passos para a solução do problema

1º passo: Determinar a profundidade da cisterna.

O nosso objetivo era determinar o volume da cisterna construída na propriedade do Diego, e para tal, seriam necessárias algumas informações, tais como profundidade e área da base da cisterna. Com o intuito de colher tais informações, a nossa primeira tarefa para este fim foi determinar a profundidade. Para isto, os alunos utilizaram uma fita métrica. Eles mediram a cisterna tanto internamente, quanto externamente, conforme a figura 6.5.



Medição externa da profundidade da cisterna.



Medição interna da profundidade da cisterna.

Figura 6.5: Medições externa e interna da profundidade da cisterna.

Antes de iniciar as medições foi indagado, por dois alunos, se profundidade medida a partir região externa teria a mesma medida da profundidade determinada a partir da interna. Então, pedi que eles fizessem as duas medições e comparassem os resultados obtidos. Com esses dados em mãos, eles perceberam que as medidas eram diferentes. Foi então, que um deles lembrou que essas medidas iriam de fato apresentar resultados diferentes já que, por uma questão de segurança na construção da cisterna, parte dele deveria estar enterrada. Logo, à medida que expressava a profundidade real da cisterna era a interna e não a externa. Após os esclarecimentos necessários desse fato e conclusão dessa tarefa, eles prontamente anotaram, o dado referente a medida da profundidade da cisterna no caderno, conforme pode ser observado na figura 6.6 a seguir.

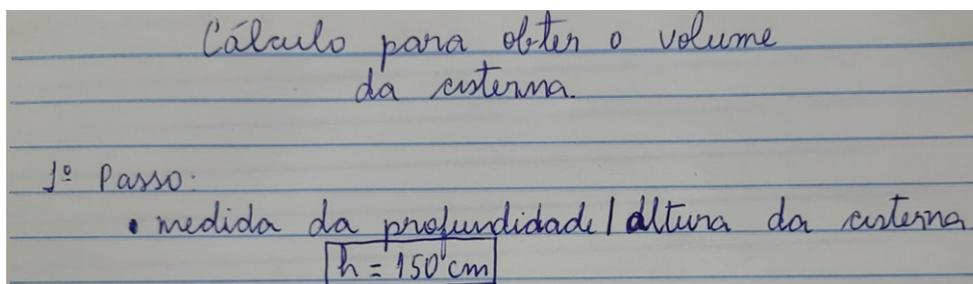


Figura 6.6: Registro no caderno da medida da profundidade da cisterna.

2º passo: Determinar a área da base da cisterna cilíndrica.

Durante esta etapa as discussões se deram em torno de como obter a medida do raio da circunferência da base da cisterna, já que dela dependia a medida da área da base. Para os alunos não seria possível obter a medida exata do raio já que era impossível determinar o centro da circunferência, que por sua vez permitiria encontrar, utilizando o barbante e a fita métrica, a medida do diâmetro dela, o que possibilitaria obter a medida exata do raio. Diante desse impasse, tive que fazer uma pequena intervenção nessa discussão para esclarecer que era possível sim, através da equação $C = 2\pi r$ que relaciona o comprimento da circunferência com a medida de seu raio. Logo, obtendo a medida do comprimento, medida possível de ser determinada usando os objetos supracitados, determinaria a medida do raio. Haja vista que π é uma constante. Uma vez convencidos, iniciaram o processo para medir o comprimento da circunferência.



Medindo o comprimento da circunferência que limita a área da base da cisterna.

Figura 6.7: Medição do comprimento da circunferência da área da base da cisterna.

Em seguida, fazendo uso da equação $C = 2\pi r$ determinaram a medida do raio.

2º Passo:
 • determinar a medida do raio da base.

Dado:
 Comprimento da circunferência
 $C = 30\text{m}$

$$C = 2\pi r$$

$$30 = 2\pi r$$

$$\frac{30}{2\pi} = r, \quad \pi = 3,14$$

$$\frac{30}{2 \cdot 3,14} = r$$

$$\frac{30}{6,28} = r$$

$$\boxed{4,78 \approx r}$$

Figura 6.8: Registros do comprimento do círculo da base e cálculo da medida do raio da base da cisterna.

Com esse dado em mãos, encontraram, finalmente, a medida da área da base da cisterna.

3º Passo:
 • determinar a medida da área da base.

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = 3,14 \cdot (4,78)^2$$

$$A_b = 3,14 \cdot 22,8484$$

$$\boxed{A_b \approx 71,74\text{m}^2}$$

Figura 6.9: Registro do cálculo da medida da área da base da cisterna.

3º passo: Determinar o volume da cisterna construída.

Os dados obtidos nas etapas anteriores – profundidade/altura e a área da base da cisterna; deram-nos subsídios para determinarmos o volume do sólido em questão. Para isto, utilizamos a fórmula de cálculo de volume de um cilindro reto,

$$V = A_b \cdot h$$

Como, $h = 1,5 \text{ m}$ e $C = 30 \text{ m}$, então temos que

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r \\ \Rightarrow 30 &= 2\pi r \\ \Rightarrow \frac{30}{6,28} &= r, \text{ (fazendo } \pi \simeq 3,14) \\ \Rightarrow 4,78 &\simeq r \end{aligned}$$

Obtido a medida do raio da base da cisterna, vamos determinar a medida da área da base. Sabemos que

$$\begin{aligned} A_b &= \pi r^2 \\ A_b &\simeq \pi \cdot (4,78)^2 \\ A_b &\simeq (3,14) \cdot (22,8484), \text{ (fazendo } \pi \simeq 3,14) \\ \Rightarrow A_b &\simeq 71,74 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} V &= A_b \cdot h \\ \Rightarrow V &\simeq (71,74) \cdot (1,5) \\ \Rightarrow V &\simeq 107,6 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Logo, a medida do volume da cisterna é de $107,6 \text{ m}^3$.



Calculando o volume da cisterna cilíndrica reta.

A proposta de intervenção no ensino, atuou de forma significativa e dinâmica na construção de conhecimentos envolvendo o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Tal prática transcende os muros da escola, tornando o aluno protagonista do seu próprio aprendizado.

Do início ao fim da atividade, os alunos demonstraram muito entusiasmo e empolgação na participação dela. Alguns relataram surpresa com os conhecimentos demonstrados pelo proprietário, o jovem Diego, pois apesar de não possuir um curso superior na área, ele não se limitou e procurou por informações através de pesquisas via internet para solucionar o problema de sua necessidade por água. Nestas, o Diego encontrou o modelo adequado, considerando o melhor custo-benefício, atendendo suas demandas- irrigação e criação bovina. O estudo fora da sala faz com que a criança/adolescente experimentem outros contextos da realidade que não são vistos nos materiais didáticos.

Para o aluno Adrian, observar a aplicabilidade da matemática na construção da cisterna foi algo prazeroso e gratificante. Já o aluno José Lima, observou que fica mais fácil assimilar os objetos do conhecimento quando o aluno é o sujeito da ação.

A utilização de metodologias de ensino ligadas ao cotidiano apresenta melhores resultados na aprendizagem dos alunos, diminuindo o desinteresse deles, apresentando a matemática de uma forma prática ligada a vida dos discentes. A satisfação com o conhecimento adquirido nesta atividade foi evidenciado no rosto e nas ações dos alunos presentes nessa atividade.

Conclusão

Neste trabalho priorizamos o cálculo de volume dos principais sólidos geométricos estudados no ensino básico: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera. Tal enfoque deu-se pela importância do tema, devido a sua aplicabilidade no dia a dia do alunado, pelas dificuldades que eles encontram na compreensão da aplicação dos conceitos e definições e na perspectiva de realizar uma atividade, fora do âmbito escolar, que os permitissem ser protagonistas na construção do próprio conhecimento.

Na tentativa de despertar no aluno o interesse pelo tema, devemos buscar compreender os motivos da aversão e/ou dificuldades com o ensino/aprendizagem de geometria e reavaliar nossas estratégias metodológicas. Nesse contexto, mostramos dois métodos para demonstrar as fórmulas de cálculo de volume dos principais sólidos estudados no ensino médio. O primeiro foi o Princípio de Cavalieri, que reduz o cálculo de volume para cálculo de área de figuras planas. E o segundo a integral definida, mostrado aqui como prática alternativa na demonstração de tais fórmulas. Isso porque, como sabemos, apenas mostrar essas fórmulas não é suficiente para a construção do conhecimento. É preciso mostrar como elas são construídas, e o método abordado neste trabalho é acessível aos alunos do ensino básico. Devemos sempre tentar fazer com que nossos alunos construam o conhecimento, pois, é assim que as coisas surgem na matemática. Elas não aparecem prontas, são construídas. Enquanto professores, essa deve ser nossa tarefa diária, isto é, construir junto ao aluno o conhecimento. Se obtivermos êxito nessa jornada, os resultados alcançados serão satisfatórios.

Referências Bibliográficas

- [1] ASA(2013). 1 Milhão de Cisterna Rurais. Disponível em: <http://www.asabrasil.org.br/portal/Default.asp>. Acesso em: 27 de mai. de 2023.
- [2] A. C. Morgado; E. L. Lima; P. C. P. Carvalho; E. Wagner. Coleção do Professor de Matemática: A Matemática do Ensino Médio, v.2. 5a Edição, SBM, Rio de Janeiro. (1998).
- [3] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. História da Matemática. 3. ed. Tradução de Helena Castro; Prefácio de Isaac Asimov. São Paulo: Blucher, 2012.
- [4] BRASIL ESCOLA. A importância do armazenamento de água. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/geografia/agua.htm>5.1. Acesso em: 10 de Ago. de 2023.
- [5] BRITO, Luiza Teixeira; et al. Cisternas Domiciliares: água para consumo humano. Ed. 2007.http://www.ieham.org/html/docs/Cisternas_Domiciliares_%C1gua_ConsumoHumano.pdfAc. Acesso em 27 de mai. de 2023.
- [6] DOLCE, O. POMPEO, J. N. – Fundamentos de Matemática Elementar, vol.10, 6.ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [7] DRUCK, Suely: Artigo: O drama do ensino da matemática. Universidade Federal Fluminense, do Rio de Janeiro. Folha de São Paulo, Edição Especial: 2003. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>. Acesso em 08 de jul. de 2015.
- [8] EMBRAPA SEMI-ÁRIDO. Cisternas para armazenagem de água da chuva. Disponível em: [http://www.cnpsa.embrapa.br/sgc/sgc_publicacoes/publicacao\\$__\\$18q82c2e.pdf](http://www.cnpsa.embrapa.br/sgc/sgc_publicacoes/publicacao$__$18q82c2e.pdf). Acesso em 30 mai. de 2023.
- [9] EMBRAPA SEMI-ÁRIDO. Dados meteorológicos. Disponível em: <http://www.cpatia.embrapa.br/servicos/servicos.html>. Acesso em: 28 mai. de 2023.
- [10] ENEM. Enem: Exame nacional do ensino médio. Página inicial. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 08 de jul. de 2023.

- [11] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [12] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de H. H. Domingues, Editora Unicamp, Campinas (2004).
- [13] IMENES, Luiz Márcio. Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem matemática. São Paulo: FNBECE, 1987.
- [14] ISNARD, Carlos. Introdução à Medida e Integração. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [15] J. Stewart. Cálculo: Volume I, 4a Edição, Pioneira Thomson Learning, São Paulo (2006).
- [16] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e problemas. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [17] LIMA, Elon Lages. Medida e forma em geometria. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [18] LIMA, Jandean da Silva. Arquimedes e Eratóstenes: os principais fatos históricos que marcaram a matemática grega. 2012. 90 f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.
- [19] LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Edição especial.
- [20] L. R. Dante. Matemática: Contexto e Aplicações, v. 2, 2a Edição, Ática, São Paulo (2013).
- [21] M. Paiva. Matemática do Ensino Médio: Volume I, 2a Edição, Moderna, São Paulo (2013).
- [22] MEC. BNCC: Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 08 de nov. de 2023.
- [23] MUNIZ NETO, Antonio Caminha Geometria – Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).
- [24] MORAIS, Leonardo Bernardo de. Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.
- [25] OBMEP. Obmep: Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas. Página inicial. Disponível em: <https://obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 20 de mar. de 2023.
- [26] O. Dolce; J. N. Pompeo. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Espacial: Posição e Métrica, v.10. 6a Edição, Atual Editora, São Paulo (2005).
- [27] PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zetetiké, Ano 1, número 1, CEMPEM/F.E. UNICAMP, 1993.

- [28] R. R. Rautenberg. Dissertação de Mestrado: Os Teoremas de Pappus para Sólidos de Revolução. Universidade Tecnológica Federal de Paraná-PROFMAT, (2013). Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/471/1/CT_PROFMAT_M_Rautenberg,%20Robson%20Raulino_2013.pdf. Acesso em 07 de set. de 2022.
- [29] STEWART, James. Cálculo, volume 1. 7. ed. Tradução de EZ2 translate. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- [30] TUNDISI, J. G.; TUNDISI, T. M. **A Água**. São Carlos: Editora SCIENZA, 2020.