



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E
TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



FILLIPE MATHEUS SILVA DE SENA

DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO
SUBMETIDAS A FLEXÃO SIMPLES UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO

São Cristóvão - SE

2022

FILLIPE MATHEUS SILVA DE SENA

**DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO
SUBMETIDAS A FLEXÃO SIMPLES UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof. Dra. Nilma Fontes de
Araújo Andrade

São Cristóvão - SE

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



ATA DE DEFESA

Fillipe Matheus Silva de Sena

Dimensionamento de Vigas de Concreto Armado Submetidas a Flexão Simples Utilizando Otimização

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **23 de novembro de 2022**

Banca Examinadora	Nota
Orientadora: Prof ^ª . Dra. Nilma Fontes de Araujo Andrade (UFS)	– 9,0
Examinadora: Prof ^ª . Dra. Cláudia Maria de Oliveira Campos (UFF)	– 9,0
Examinador: Prof. Dr. Emerson Figueiredo dos Santos (UFS)	– 9,0
Média Final:	9,0

Documento assinado digitalmente
gov.br NILMA FONTES DE ARAUJO ANDRADE
Data: 30/11/2022 09:47:58-0300
Verifique em <https://verificador.tti.br>

Prof^ª. Dra. Nilma Fontes de Araujo Andrade (UFS)

*Dedico esse trabalho aos meus pais Ana e Roberval
e à minha irmã Vanessa, com muito amor e gratidão.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que cuidou de mim ao longo desses anos de graduação, me dando forças para atravessar todos os obstáculos, principalmente o maior de todos que é a saudade de casa. Obrigado por ter me dado a oportunidade de concluir este sonho.

Aos meus pais, Ana Lucia Valverde Silva de Sena e Roberval Antônio de Sena, por todo amor, compreensão, incentivo e cuidado no decorrer de toda a vida, tudo foi por vocês. Cada palavra de conforto foi fundamental para o prosseguimento dessa caminhada que não é minha, e sim, nossa. Obrigado pela educação que me foi dada e pela oportunidade de realizar o sonho de estudar em uma universidade pública de qualidade. Que eu consiga levar esse legado da educação ao longo da minha vida. À minha irmã Vanessa Karoline Silva de Sena, que está presente em todas as fases da minha vida, essa também é por você.

Ao meu amigo e irmão Edson Menezes Barreto, que mesmo distante sempre fez questão de se manter presente, incentivando e dando força para cada escolha profissional feita durante essa caminhada muito obrigado pelos 25 anos de amizade. Aos meus amigos Gabriel Brito e Rodrigo Rocha por serem tão presentes mesmo com uma grande distância nos separando, vocês foram e são especiais em minha vida e foram fundamentais. À minha querida amiga de luta Giovanna Santana, pelo companheirismo durante esses 5 anos de graduação, ajudando de forma única e importante em matérias, trabalhos e tudo que envolveu a Universidade, amizade que extrapolou a UFS e hoje é de fundamental importância na minha vida, sendo uma pessoa da família. À minha amiga Amanda, por sempre se mostrar presente e disposta a ajudar nesse ciclo.

À minha grande orientadora, Nilma Fontes de Araújo Andrade, pela excelente orientação realizada. Para além dos conhecimentos compartilhados, levarei o seu exemplo de dedicação e comprometimento ao longo da minha caminhada profissional.

A todos os professores do curso de Engenharia Civil, do Campus São Cristóvão, por todo o conhecimento transmitidos. E também a Universidade Federal de Sergipe, por possibilitar a realização desse grande sonho.

Por fim, quero dizer: Pai, Mãe, estou levando o nosso diploma para casa.

RESUMO

DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS A FLEXÃO SIMPLES UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO

Com o avanço da Engenharia Civil e com o aumento da competitividade do mercado, cada vez mais se faz necessário que soluções estruturais mais eficientes e com melhores custos sejam propostas. Entretanto, ainda nos dias de hoje, o modelo convencional de dimensionamento ainda é muito utilizado, baseando-se na experiência do projetista com trabalhos anteriores, sendo um modelo eficiente, mas nem sempre econômico. Diante desse cenário, esse trabalho teve como objetivo o dimensionamento otimizado de vigas de concreto armado, a fim de minimizar os custos financeiros. O trabalho foi dividido em quatro Problemas, sendo que no primeiro problema foi realizado apenas o dimensionamento da armadura longitudinal e no segundo problema, somente houve o dimensionamento da armadura transversal. Já no terceiro problema, efetuou-se tanto o dimensionamento da armadura longitudinal como da armadura transversal, e finalmente, no quarto problema, além do dimensionamento das armaduras, foi adicionada a verificação à deformação excessiva. Esses problemas foram aplicados a dois Casos, sendo que no Caso 1 considerou-se uma viga biapoiada e no Caso 2, uma viga biengastada. A função objetivo levou em consideração os custos de concreto, fôrma e aço, tendo como objetivo a minimização do custo e, como variáveis de projeto, a base (b_w), a altura (h) da seção transversal e as áreas de aço longitudinal e transversal, com as restrições de segurança baseadas na norma ABNT NBR 6118:2014. Ademais, as próprias equações inerentes ao dimensionamento de uma seção transversal submetida a flexão simples e à verificação da deformação excessiva também foram empregadas como restrições. Após as análises foi possível constatar a eficiência do dimensionamento otimizado pois ofereceu soluções econômicas, além de eficientes do ponto de vista da segurança.

Palavras-chave: Concreto Armado, Otimização, Vigas.

ABSTRACT

DESIGN REINFORCED CONCRETE BEAMS SUBJECT TO SIMPLE BENDING USING OPTIMIZATION

With the advance of Civil Engineering and the increase in market competitiveness it is increasingly necessary that more efficient and cost-effective structural solutions are proposed. However, even today, the conventional design model is still widely used, based on the experience of the designer with previous works, being an efficient model, but not always economical. In this scenery, the objective of this work was the optimized design of reinforced concrete beams to minimize financial costs. The work was divided into four problems, being that in the first problem only the longitudinal reinforcement design was performed, and in the second problem, only the transverse reinforcement design was performed. In the third problem there was the design of both longitudinal and transverse reinforcement, and finally, in the fourth problem, besides the design of the reinforcement, verification of excessive deformation was added. The problems were applied to two cases, Case 1 was a propped beam and Case 2, a biengasted beam. The objective function took into account the costs of concrete, molds and steel, with the goal of minimizing the cost and, as design variables, the base (b_w), height (h) of the cross-section and the longitudinal and transverse steel areas, with safety constraints based on ABNT NBR 6118:2014. Furthermore, the equations inherent to the design of a cross-section subjected to simple bending and the verification of excessive deformation were also employed as constraints. After the analyses, it was possible to verify the efficiency of the optimized design because it offered economical solutions, besides being efficient from the safety point of view.

Keywords: Reinforced Concrete; Optimization; Beams.

LISTA DE LUSTRAÇÕES

Figura 1: Estádios de deformação de uma viga de concreto armado na flexão simples .	27
Figura 2: Domínios de deformação do concreto	28
Figura 3: Seção transversal de uma viga submetida a flexão simples	31
Figura 4: Taxa de armaduras mínima de flexão para vigas	33
Figura 5: Viga biapoiada utilizada para a otimização	46
Figura 6: Viga biengastada utilizada para a otimização.....	46

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1: Custos unitários	47
Tabela 2: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 1).....	53
Tabela 3: Comparação entre modelos de dimensionamentos (Problema 2)	54
Tabela 4: Comparação entre modelos de dimensionamentos (Problema 3)	55
Tabela 5: Comparação entre os modelos de dimensionamento (Problema 4)	56
Tabela 6:Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 1, Caso 2).....	57
Tabela 7: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 2, Caso 2).....	57
Tabela 8: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 3, Caso 2).....	58
Tabela 9: Comparação entre os modelos de dimensionamento (Problema 4, Caso 2) ..	59

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Classes de concreto estrutural	22
Quadro 2: Resumo das parcelas componentes das funções objetivo	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
C50	Classe de resistência do concreto de 50 MPA
C90	Classe de resistência do concreto de 90 MPA
ELU	Estado - limite Último
ELS	Estado - limite de Serviço
LN	Linha Neutra

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Roteiro do Trabalho	16
2 OBJETIVOS	17
2.1 Objetivo Geral	17
2.2 Objetivos específicos	17
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
4 ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO	21
4.1 Classes do concreto	21
4.2 Resistência à compressão do concreto	22
4.3 Resistência à tração do concreto	22
4.4 Módulo de Elasticidade do concreto	23
4.5 Aço	24
4.5.1 <i>Categorias</i>	24
4.5.2 <i>Massa específica</i>	24
4.5.3 <i>Módulo de Elasticidade</i>	24
4.6 Elementos Estruturais	24
4.7 Estados Limites	25
4.8 Ações	25
4.8.1 <i>Ações Permanentes</i>	25
4.8.2 <i>Ações Variáveis</i>	26
4.9 Ações de cálculo e combinações	26
4.9.1 <i>Combinações Últimas</i>	26
4.9.2 <i>Combinações de Serviço</i>	26
4.10 Resistência de cálculo do concreto e do aço	26

4.11 Níveis de deformação para concretos	27
4.12 Domínios de deformação para concretos de classe até C50	28
4.13 Dimensionamento Estrutural	29
5 DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE UMA VIGA	30
5.1 Dimensionamento a flexão simples	30
5.1.1 <i>Condições de ductilidade</i>	30
5.1.2 <i>Momento máximo resistente na seção</i>	30
5.1.2 <i>Cálculo da área de armadura longitudinal necessária</i>	32
5.1.3 <i>Armadura mínima</i>	33
5.1.4 <i>Armadura máxima</i>	33
5.2 Dimensionamento à força cortante.....	34
5.3 Verificações do Estado Limite de Serviço.....	35
6 OTIMIZAÇÃO.....	37
6.1 Elementos componentes de um problema de otimização	37
6.1.1 <i>Variáveis de projeto</i>	37
6.1.2 <i>Função objetivo</i>	37
6.1.3 <i>Restrições</i>	38
6.2 Formulação de um problema de otimização.....	38
7 OTIMIZAÇÃO APLICADA AO DIMENSIONAMENTO DE VIGA EM CONCRETO ARMADO.....	40
7.1 Função Objetivo	40
7.2 Variáveis de projeto	42
7.3 Restrições	43
8 METODOLOGIA	46
9 RESULTADOS E DISCUSSÕES	53
9.1 Caso 1	53

9.2 Caso 2	56
10 CONCLUSÕES	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

1 INTRODUÇÃO

A Engenharia Civil é uma área de extrema importância para o crescimento e avanço da sociedade como um todo, desde os projetos de infraestrutura urbana até as construções de grandes empreendimentos. Um dos ramos de maior importância dentro da Engenharia Civil é o projeto de estruturas, que é onde se faz todo o dimensionamento e detalhamento dos elementos estruturais.

Historicamente, a concepção estrutural é feita de forma convencional, fazendo-se um pré-dimensionamento e verificando-se se os esforços resistentes suportam as ações atuantes de acordo com o que são prescritos em normas técnicas quanto à segurança. Esse pré-dimensionamento é realizado baseado em literaturas dispostas no mercado e na experiência do projetista com projetos anteriores. Esse modelo de dimensionamento gera soluções seguras e duráveis, entretanto podem não ser as mais econômicas, podendo existir melhores soluções para esses projetos. É nesse contexto que surge a otimização aplicada a estruturas.

Os primeiros trabalhos voltados para a ideia de otimizar estruturas são datados do século XIX, conforme mostrado por Vanderplaats (1982). Entretanto, o primeiro trabalho que teve como objetivo a minimização do custo foi o de Forsel (1924). Já o primeiro trabalho de otimização utilizando algoritmos computacionais foi o de Kabala (1962), enquanto que Switsky (1965) inovou ao aplicar em seu trabalho técnicas para garantir a segurança das estruturas.

Em conceitos gerais, a otimização estrutural busca a maior minimização possível do custo de projeto, encontrando valores ótimos para as variáveis de projeto, satisfazendo as restrições normativas. Com o avanço da competitividade do mercado, cada vez mais a busca por soluções mais econômicas aparece como objetivo principal dos engenheiros projetistas, sendo necessário que os conceitos relacionados a otimização sejam trazidos para a engenharia estrutural, a fim de encontrar concepções ótimas das estruturas.

Sendo assim, o presente trabalho realizou o dimensionamento convencional e otimizado de vigas de concreto armado com o intuito de analisar todos os parâmetros de segurança. No dimensionamento convencional, valores de base (b_w) e altura (h) foram pré-definidos, já no dimensionamento otimizado, os valores de b_w e h ficaram livres para variar dentro das restrições impostas pela norma ABNT NBR 6118:2014. Com isso, foi possível comparar qual a metodologia fornece custos mais econômicos.

1.1 Roteiro do Trabalho

Com a intenção de dimensionar vigas retangulares de concreto armado de forma otimizada, dentro das restrições impostas por normas, algumas etapas foram seguidas com o intuito de embasar o assunto.

Em um primeiro momento, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre trabalhos de otimização estrutural que vêm sendo realizados em universidades, onde foi possível ampliar o entendimento sobre o tema escolhido. Esse momento foi importante para se compreender mais profundamente os assuntos trabalhados e ter melhor embasamento para a escolha do método de otimização.

Após o entendimento sobre os trabalhos já realizados, foram apresentados conceitos sobre estrutura em concreto armado em geral, definindo cada etapa necessária para se realizar o dimensionamento estrutural. Com esses conceitos definidos, foi explicado brevemente como se realiza um projeto de vigas, considerando-se as armaduras longitudinal, transversal e as verificações do estado limite de serviço.

Em seguida, foram mostrados os conceitos sobre otimização de forma geral, apresentando os elementos básicos como função objetivo, restrições e variáveis de projeto. Após isso, o trabalho em questão propôs o dimensionamento de duas vigas, sendo a primeira biapoiada e a segunda biengastada em concreto armado, onde o dimensionamento foi feito de acordo com a norma ABNT NBR 6118:2014 respeitando taxas mínimas e máximas de armaduras e os limites de flechas.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O presente trabalho teve como objetivo geral o dimensionamento otimizado e verificação da deformação excessiva de vigas em concreto armado sujeitas a flexão simples e a cisalhamento, buscando melhorar os custos de volume de concreto, área de forma e armaduras longitudinal e transversal.

2.2 Objetivos específicos

- Realizar o dimensionamento convencional
- Comparar os resultados obtidos através do dimensionamento otimizado com o dimensionamento convencional e
- Encontrar valores ótimos de base e altura da seção transversal e de armaduras longitudinal e transversal das vigas a fim de minimizar os custos financeiros;

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na engenharia civil, a busca por soluções econômicas e eficientes sempre foi vista como um dos principais desafios da profissão, principalmente quando o assunto é projeto estrutural. Com isso, a otimização estrutural vem sendo bastante explorada e estudada por profissionais da área, contendo diversos trabalhos com aplicações de técnicas a fim de se chegar nas melhores soluções. Então, a fim de embasar melhor o tema deste trabalho, serão apresentadas a seguir algumas pesquisas que vêm sendo realizadas sobre a aplicação de otimização em projetos estruturais.

Correia (2016) propôs como estudo o dimensionamento otimizado de vigas retangulares em concreto armado sujeitas a flexão simples e ao cisalhamento com o objetivo de encontrar o menor custo. Para isso, utilizou o Microsoft Excel como ferramenta de formulação do problema de otimização, enquanto que para a solução utilizou o Analytic Solver Platform. Após todas as análises feitas, o autor chegou à conclusão que o dimensionamento utilizando a otimização apresenta soluções melhores que a encontrada no dimensionamento convencional, pois traz economia nos custos.

Boscardin (2017) trabalhou otimização com o objetivo de atingir o menor custo possível no dimensionamento de pórticos planos de concreto armado. Para isso foi empregado um processo heurístico utilizando as restrições de cardinalidade. Para o desenvolvimento do estudo, um software foi criado em linguagem Fortran 90 onde associou-se à análise e o dimensionamento dos pórticos com a metodologia de otimização da Busca Harmônica. Como conclusão, foi constatado que esse método teve um bom desempenho porque foram obtidos custos ótimos melhores que aqueles encontrados no dimensionamento convencional e próximos a outros métodos de otimização.

Correia et al (2017) formularam um estudo com o objetivo de otimizar o dimensionamento de vigas de concreto armado com seção transversal no formato T. Para isso, o problema foi formulado todo no Microsoft Excel e solucionado na plataforma Analytic Solver Platform utilizando algoritmos evolucionários onde foram comparados dois métodos: o dos Algoritmos Genéticos e o da Busca Dispersa. Chegou-se à conclusão que o dimensionamento otimizado das vigas com seção T leva a situação de economia nos dois métodos. Comparando-se os dois, a Busca Dispersa mostrou um resultado melhor que os Algoritmos Genéticos porque apresentou menores custos.

Silva (2017) propôs como estudo o dimensionamento otimizado de pilares em concreto armado com diversos tipos geométricos de seção transversal. Para o desenvolvimento do trabalho, foi elaborado um programa computacional que foi implementado no Matlab, onde foi utilizado, como algoritmo de otimização, o Método dos Pontos Interiores. Após analisar vários exemplos que atestaram a validade do

programa, chegou-se à conclusão que quanto maior for o número de parâmetros liberados para serem otimizados, mais a redução no custo total dos pilares.

Nunes (2018) propôs como estudo o desenvolvimento de um programa computacional visando o dimensionamento otimizado de lajes nervuradas com o objetivo de maximizar sua funcionalidade e segurança com o menor custo possível, atendendo a norma ABNT NBR 6118:2014. Foram utilizados como ferramentas o Matlab, onde foi utilizado como algoritmo de otimização o toolbox de Algoritmos Genéticos, e o Cypecad, que serviu como uma ferramenta de validação do programa implementado. Concluiu-se com esse estudo que os Algoritmos Genéticos apresentam um bom desempenho na otimização, entregando soluções mais econômicas e eliminando o processo tradicional da tentativa e erro que ainda é muito utilizada no dimensionamento estrutural.

Spazzan (2018) apresentou em seu estudo um algoritmo de otimização para a determinação de seções transversais de vigas retangulares de concreto armado. Para se chegar na melhor solução, foi utilizado o software Matlab com a sua família auxiliar fmicon. Como parâmetro de análise foram utilizadas a ABNT NBR 6118:2003 e a ABNT NBR 6118:2014, onde na primeira não foram levadas em consideração as restrições referentes às flechas e a segunda, onde as restrições das flechas foram levadas em consideração. Após a análise dos resultados, chegou-se à conclusão que a análise através de ferramentas computacionais permite resultados ótimos, entretanto a ABNT NBR 6118:2014 apresenta soluções menos econômicas que a norma mais antiga, entretanto devido a limitação estabelecida para o posicionamento da linha neutra.

Salles et al (2018) propuseram como estudo a otimização de um pórtico espacial de concreto armado utilizando Algoritmos Genéticos. Para a resolução desse estudo, foi preciso desenvolver um programa computacional que fizesse o dimensionamento das armaduras dos elementos estruturais utilizando Algoritmos Genéticos. Para o modelo estrutural, foi utilizado o programa Ansys, onde é feita a discretização por elementos finitos e onde se obtém os esforços e as deformações do pórtico em análise. A metodologia adotada ofereceu resultados econômicos para o dimensionamento em, apresentando coerência com a prática.

Cavalcante (2019) estudou a implementação de um modelo computacional de otimização aplicada a estruturas de contraventamento formada por pórticos planos. Para a análise estrutural utilizou-se o software Ansys, enquanto que para o método de otimização usou-se um programa que foi desenvolvido em linguagem C++ com o algoritmo genético do programa BIOS. Nesse estudo, foi analisada a influência da rigidez relativa das vigas e dos pilares, permitindo soluções para lajes com vigamento convencional e

para lajes com vigas em faixas. Como conclusão desse estudo, percebeu-se que um problema com simetria de 12 variáveis e com as vigas tendo altura fixa de 60 cm gera a melhor solução.

Brito (2021), buscou reduzir o volume de concreto de uma estrutura em concreto armado submetida a excitação do vento através da otimização, sendo essa estrutura um pórtico plano de 42 pavimentos que foi adaptado de uma estrutura real localizada em Belém-PA. Foi utilizado para essa finalidade o algoritmo WOA que faz parte do grupo dos Meta – Heurísticos. Além disso, foram utilizados Atenuadores de Massa Sintonizados com o objetivo de se obter soluções diferentes para a estrutura em estudo. Com esse estudo foi possível, diante das simulações feitas, reduzir em quase 24% o volume de concreto da estrutura e ainda respeitar o máximo de deslocamento no topo permitido pela norma.

Huppes (2021) integrou os softwares Matlab e Robot com o objetivo de dimensionar de forma otimizada estruturas de edificações em concreto armado visando o custo mais econômico e com menores impactos ao meio ambiente. No Matlab, criou-se uma formulação computacional para as vigas e os pilares onde foi implementada em associação com o método dos algoritmos genéticos, onde a integração com o Robot possibilitou um dimensionamento em menor tempo. Após as análises necessárias, foi possível obter soluções que apresentaram custos mais econômicos e com menores impactos ambientais ao serem comparados com a metodologia tradicional.

4 ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO

O concreto é um material que possui em sua composição água, cimento e agregados. Ele possui como característica principal, uma boa resistência a compressão. Entretanto, essa característica por si só não o condiciona como um bom material para a utilização estrutural, devido a uma baixa resistência a esforços de tração.

Para que ele possa ser utilizado estruturalmente são introduzidos materiais com boa resistência a tração. O mais usual é o aço, onde trabalhando em conjunto com o concreto devido à aderência entre as superfícies, o transforma em material estrutural. Essa combinação entre a propriedade de resistência a tração do aço com a resistência a compressão do concreto dá origem ao concreto armado, material que foi utilizado pela primeira vez na Europa no século XIX.

As estruturas em concreto armado possuem algumas vantagens em relação a outros materiais estruturais, podendo-se citar: boa resistência à maioria das solicitações; boa trabalhabilidade; obtenção de estruturas monolíticas; técnicas de execução razoavelmente dominadas em todo o país; materiais duráveis-desde que a sua execução seja bem feita evitando-se usar produtos como aceleradores de pega, cujas substâncias químicas podem corroer a armadura; boa resistência ao fogo, quando comparada ao aço e à madeira, desde que o revestimento previsto em norma seja respeitado; utilização da pré-moldagem, possibilitando uma maior rapidez e facilidade na sua execução; boa resistência a choques e vibrações, efeitos térmicos, atmosféricos e desgastes mecânicos (CARVALHO; FILHO, 2014).

Porém, esse material também apresenta algumas desvantagens. Algumas delas são: limitação de uso devido ao seu peso específico elevado acarretar em elementos com peso próprio muito grande; reformas e adaptações podem ser de difícil execução; por ser bom condutor térmico e de som, muitas vezes precisa, em casos específicos, de uma associação com outros materiais para sanar esses problemas; pode apresentar certo desconforto visual, pelo concreto ser pouco resistente a tração e acaba sendo suscetível ao aparecimento de fissuras (CARVALHO; FILHO, 2014).

4.1 Classes do concreto

De acordo com a ABNT NBR 8953:2015, o concreto armado pode ser dividido em 2 grupos de acordo com a sua resistência característica a compressão (f_{ck}). No quadro abaixo serão dispostas as classes de concreto e as suas respectivas resistências.

Quadro 1: Classes de concreto estrutural

Grupo 1	Resistências Características (MPA)	Grupo 2	Resistências Características (MPA)
C20	20	C55	55
C25	25	C60	60
C30	30	C70	70
C35	35	C80	80
C40	40	C90	90
C45	45	C100	100
C50	50		

Fonte: ABNT NBR 8953:2015

4.2 Resistência à compressão do concreto

O concreto é um material que possui como principal característica a resistência a compressão que é determinada a partir do ensaio de corpos de prova cilíndricos. De acordo com a ABNT NBR 6118:2014 essa resistência deve estar relacionada a uma idade de 28 dias.

Os corpos de prova em formato cilíndricos devem ser moldados de acordo com a norma ABNT NBR 5738:2003 e o ensaio deve seguir a ABNT NBR 5739:2007.

Segundo Carvalho e Filho (2014), a resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) é definida como o valor que representa um grau de confiança em 95%, ou seja, os resultados dos ensaios devem estar 95% acima do f_{ck} ou 5% abaixo dele.

4.3 Resistência à tração do concreto

Diferentemente da compressão, o concreto é um material com uma resistência ruim à tração, entretanto é necessário determiná-la devido a sua relação com a capacidade resistente do concreto, e diretamente com a fissuração (CARVALHO; FILHO, 2014).

De acordo com o item 8.2.5 da ABNT NBR 6118:2014, a resistência à tração direta ($f_{ct,sp}$) e a resistência à tração na flexão ($f_{ct,f}$) devem ser obtidos através de ensaios realizados de acordo com a norma ABNT NBR 7222:2011 e ABNT NBR 12142:2010, sendo consideradas iguais a $0,9 \cdot f_{ct,sp}$ e $0,7 \cdot f_{ct,f}$, respectivamente. Entretanto, em caso da falta de ensaio para se obter $f_{ct,sp}$ e $f_{ct,f}$, podem ser obtidas através das seguintes equações.

$$f_{ct,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (4.1)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (4.2)$$

Sendo que $f_{ct,m}$ é dado para concretos de classe C50 como:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (4.3)$$

E para concretos de C50 até C90 como:

$$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (4.4)$$

4.4 Módulo de Elasticidade do concreto

O módulo de elasticidade pode ser dado pelas relações entre as tensões e as deformações dos elementos (CARVALHO; FILHO, 2014).

De acordo com o item 8.2.8 da ABNT NBR 6118:2014, o módulo de elasticidade do concreto (E_{ci}) deve ser obtido segundo o ensaio estabelecido na norma ABNT NBR 8522:2008, sendo considerado o módulo de deformação tangente inicial aos 28 dias.

Quando não forem feitos os ensaios necessários, o item 8.2.8 estabelece a seguinte equação para a determinação inicial do E_{ci} :

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (4.5)$$

onde E_{ci} e f_{ck} são dados em MPa e o α_E é expressado da seguinte forma:

- α_E é 1,2 para basalto e diabásio;
- α_E é 1,0 para granito e gnaisse;
- α_E é 0,9 para calcário e
- α_E é 0,7 para arenito;

Já o módulo de elasticidade secante é expresso pelo referido item da seguinte maneira:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (4.6)$$

Sendo o α_i igual a:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (4.7)$$

4.5 Aço

No concreto armado, o aço desempenha uma função de resistir aos esforços de tração e podem ser armaduras ativas e passivas. A norma ABNT NBR 6118:2014 define em seus itens 3.1.5 e 3.1.6, respectivamente que armadura passiva é “qualquer armadura que não seja usada para produzir forças de protensão, isto é, que não seja previamente alongada” e que armadura ativa é “armadura constituída por barras, fios isolados ou cordoalhas, destinada à produção de forças de protensão, isto é, na qual se aplica um pré – alongamento inicial.

4.5.1 Categorias

De acordo com a norma ABNT NBR 7480:2007 o aço para projetos estruturais é classificado com o seu valor característico ao escoamento (f_{yk}) em categorias CA-25, CA-50 e CA-60, onde CA indica “Concreto armado” e o f_{yk} é em kN/cm².

4.5.2 Massa específica

De acordo com o item 8.3.3 da norma ABNT NBR 6118:2014, a massa específica do aço de armadura passiva pode ser adotada como 7.850 kg/m³.

4.5.3 Módulo de Elasticidade

De acordo com o item 8.3.5 da ABNT NBR 6118:2014, o módulo de elasticidade do concreto pode ser admitido como sendo 210 GPA.

4.6 Elementos Estruturais

O concreto armado é um material estrutural muito utilizado no dia a dia da construção civil, entretanto para que ele seja arranjado com o objetivo de trabalhar como um sistema estrutural, é importante entender as peças que fazem essa composição separadamente. Os elementos estruturais podem ser de infraestrutura e de superestrutura. Estacas, sapatas e vigas baldrames são alguns exemplos de elementos de infraestrutura. Já as lajes, vigas e pilares são os principais elementos da superestrutura e serão conceituados nessa seção.

As lajes são elementos estruturais bidimensionais onde o comprimento e a largura são bem maiores que a terceira dimensão, nesse caso a espessura. Os pisos de edificações podem ser executados com alguns tipos de lajes, como as maciças, as nervuradas e as pré-moldadas. A escolha do tipo de laje a ser executada

depende das considerações que o projetista levará em conta, sempre buscando um alinhamento entre economia e segurança previsto em norma (ARAÚJO, 2014).

As vigas são elementos estruturais que recebem cargas transversais. Ela é utilizada em sistemas estruturais compostos por lajes, vigas e pilares. Existem alguns tipos de vigas que são executadas como: vigas em balanço, quando possui somente um apoio e toda a carga recebida é transmitida para esse único ponto de fixação; viga contínua, que possui múltiplos apoios; e as vigas biapoiadas/biengastadas, que possuem apoio nos dois lados. Para a definição do melhor tipo a ser aplicado, deve ser feita uma análise minuciosa pelo projetista.

Os pilares são elementos estruturais verticais que geralmente são submetidos a momentos fletores em duas direções e por esforço normal de compressão, configurando uma flexão composta oblíqua. Além disso, transmitem para os elementos de fundação todas as solicitações que recebem das vigas. Segundo a ABNT NBR 6118:2014, os pilares são elementos onde a ação de compressão é preponderante.

4.7 Estados Limites

Para se projetar uma estrutura, precisa ser levado em consideração dois estados limites, o Estado - limite Último, que tem relação direta com o colapso total ou de qualquer forma que impeça a utilização de uma estrutura, e o Estado - limite de Serviço que está relacionado com as condições de uso das estruturas, sendo que problemas nesse Estado podem causar desconforto aos usuários e indicar possíveis problemas na estrutura (ARAÚJO; FILHO, 2014).

4.8 Ações

De acordo com o item 3.1 da ABNT NBR 6120:2019, as ações são causas que provocam esforços solicitantes que atuam sobre a estrutura capazes de produzir ou alterar as deformações ou o estado de tensão nos elementos estruturais. Na análise estrutural, precisam ser levadas em consideração alguns tipos de ações, dentre elas as permanentes e as variáveis, por exemplo.

4.8.1 Ações Permanentes

As ações permanentes são aquelas que ocorrem com valores constantes ou com pequenas variações ao longo de praticamente toda a vida útil da estrutura (ARAÚJO; FILHO, 2014). Devem ser consideradas também como ações permanentes todas aquelas que crescem ao longo do tempo tendendo a um valor limite constante. Existem dois tipos de ações permanentes, as diretas e indiretas. As ações permanentes diretas são o peso próprio da estrutura e o peso de todos os elementos construtivos (alvenarias, revestimentos, instalações). Atualmente, o peso próprio da estrutura deve ser considerado com uma massa específica de 2.400 kg/m³ para o concreto simples e 2.500 kg/m³ para o concreto armado. Já como ação

permanente indireta, pode-se citar a deformação causada por retração, fluência do concreto, deslocamentos de apoio e etc.

4.8.2 *Ações Variáveis*

As ações variáveis, diferente das permanentes, ocorrem com significativas variações durante a vida útil da estrutura. Existem as ações variáveis diretas e indiretas. São consideradas como diretas as cargas acidentais que correspondem ao peso das pessoas, móveis e veículos; já as variáveis indiretas são as ações de frenação, vento e temperatura também são considerados ações variáveis. (ARAÚJO, 2014).

4.9 **Ações de cálculo e combinações**

Para que se chegue nas ações de cálculo, são usados como fatores de majoração de cargas, os coeficientes de ponderação. Levando em consideração que em uma estrutura existem alguns tipos diferentes de cargas atuantes, os coeficientes de ponderação podem ser representados por γ_g para as ações de caráter permanentes e γ_q para as variáveis diretas.

4.9.1 *Combinações Últimas*

As combinações últimas fazem as verificações de segurança no ELU (Estado - limite último), que está relacionada com o colapso ou não da estrutura em estudo. Dentre elas, há as combinações últimas normais. Nessa combinação, as ações permanentes são majoradas pelo seu coeficiente de segurança correspondente, já as ações variáveis são divididas em principal e secundária. Na principal, admite-se que a sua atuação acontece com o seu valor característico, já as secundárias possuem os seus valores reduzidos na combinação por ψ_0 . A ação de cálculo a ser considerada no dimensionamento das estruturas será a maior de todas as combinações para que a pior situação seja contemplada nos cálculos.

4.9.2 *Combinações de Serviço*

As combinações de serviço são usadas nas verificações no ELS (Estado - limite de Serviço) e estão ligadas ao conforto do usuário e à durabilidade da estrutura. Dentre as combinações de serviço, há as combinações quase permanentes de serviço. São considerados nessas combinações que todas as ações variáveis estão com seus valores quase permanentes e que atuam em grande parte da vida útil da estrutura, e precisam ser verificadas para o estado limite de deformação excessiva.

4.10 **Resistência de cálculo do concreto e do aço**

Assim como nas ações, para o dimensionamento de uma estrutura é necessário que se use coeficientes de ponderação para as resistências. Entretanto, os coeficientes de segurança são usados nesse caso como fatores de minoração das resistências (CARVALHO, 2014). Para a verificação do ELU em

obras usuais, os valores das resistências de cálculo do concreto e do aço possuem os seguintes equacionamentos, respectivamente.

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (4.8)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (4.9)$$

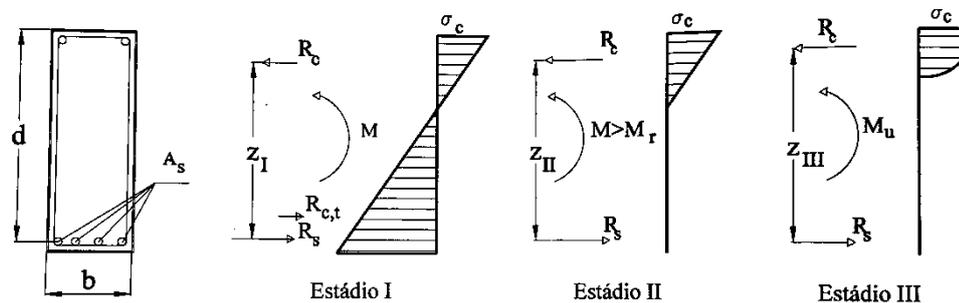
onde:

- f_{cd} é a resistência de cálculo a compressão do concreto;
- f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço;
- γ_c é o coeficiente de segurança do concreto e
- γ_s é o coeficiente de segurança do aço;

4.11 Níveis de deformação para concretos

A seção transversal de uma viga submetida a um momento fletor de cálculo M_{sd} crescente passa por três níveis de deformação, denominados de estádios, que definem o comportamento do elemento estrutural até a sua ruína (CARVALHO; FILHO, 2014). Na Figura 1 estão mostrados os estádios de acordo com a distribuição de tensões.

Figura 1: Estádios de deformação de uma viga de concreto armado na flexão simples



Fonte: Carvalho e Filho (2014)

Segundo Carvalho e Filho (2014), os três estádios podem ser definidos da seguinte forma:

Estádio I (estado elástico) – sob a ação de um momento fletor M_I de pequena intensidade, a tensão de tração no concreto não ultrapassa sua resistência característica à tração (f_{tk}).

Estádio II (estado de fissuração) – aumentando o valor do momento fletor para M_{II} , as tensões de tração na maioria dos pontos abaixo da linha neutra (LN) terão valores superiores ao da resistência característica do concreto à tração (f_{tk}).

Estádio III – aumenta-se o momento fletor até um valor próximo ao de ruína (M_u).

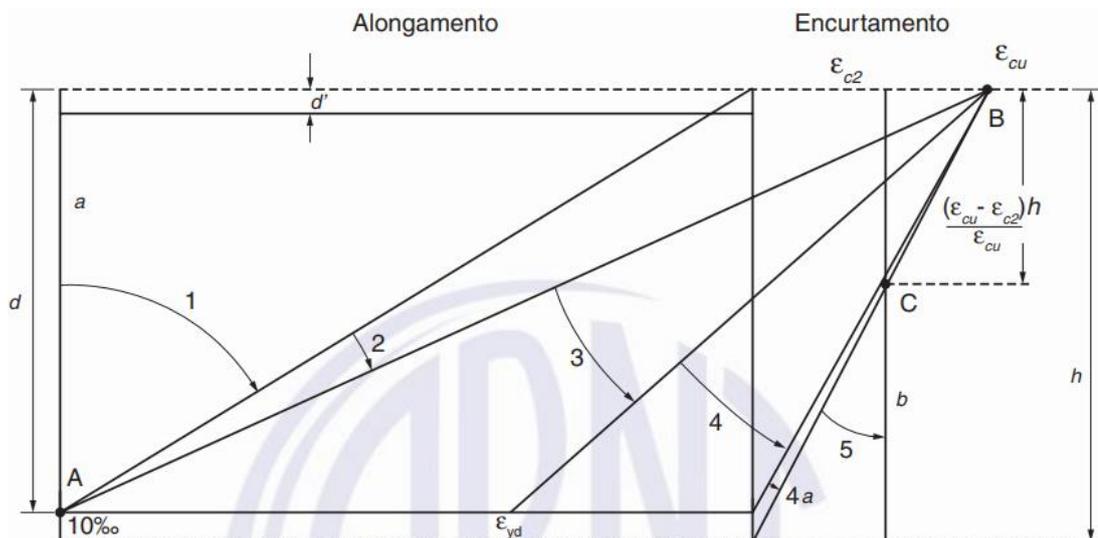
Com isso, pode-se dizer que os Estádios I e II correspondem às situações onde as cargas atuam com seus valores correspondentes, sem a majoração. Já no Estádio III as ações atuam de forma majorada e as resistências minoradas e correspondem ao estado limite último (CARVALHO; FILHO, 2014).

O dimensionamento estrutural é feito no estado limite último, pois garante a projeção de estruturas econômicas que resistam aos esforços sem chegar ao colapso (CARVALHO; FILHO, 2014).

4.12 Domínios de deformação para concretos de classe até C50

No concreto e no aço, as deformações específicas que ocorrem ao longo de uma seção transversal retangular qualquer, com armadura simples (só tracionada) submetida a ações normais definem seis domínios de deformação. Na Figura 2 são mostrados esses domínios.

Figura 2: Domínios de deformação do concreto



Fonte: ABNT 6118:2014

A ABNT NBR 6118:2014, em seu item 17.2.2, define os seis domínios da seguinte forma:

Domínio 1 é onde ocorre uma tração não uniforme, sem compressão;

Domínio 2 ocorre uma flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto;

Domínio 3 ocorre uma flexão simples ou composta com ruptura à compressão do concreto;

Domínio 4 ocorre uma flexão simples ou composta com ruptura à compressão do concreto mas sem o escoamento do aço;

Domínio 4a ocorre uma flexão composta com armaduras comprimidas;

Domínio 5 ocorre uma compressão não uniforme, sem tração;

4.13 Dimensionamento Estrutural

O dimensionamento estrutural tem como objetivo a garantia de que um sistema estrutural suporte todas as solicitações que serão impostas durante a construção e na sua vida útil, sem que sofram deformações excessivas (CARVALHO; FILHO, 2014).

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, em seu item 14.2.1, analisar uma estrutura se faz necessário para a determinação dos efeitos causados pelas ações. Após isto, verifica-se a segurança nos estados limites último e de serviço. Com isso, são utilizados alguns métodos de dimensionamento, sendo o mais utilizado o método dos estados limites, onde a segurança é verificada para que os momentos majorados gerem solicitações menores que as resistências de cálculo (R_d).

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, no seu item 12.5.2, devem ser verificados todos os estados limites e carregamentos para a estrutura considerada, sendo que em todos os casos as resistências de cálculo precisam ser menores que as solicitações de cálculo impostas.

5 DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE UMA VIGA

Calcular a armadura necessária para resistir ao momento fletor é um dos pontos mais importantes em um dimensionamento de uma viga. Para isso é imposto que na seção mais solicitada o estado limite último dos materiais seja alcançado pela ruptura do concreto mais comprimido ou pela deformação excessiva da armadura tracionada (CARVALHO; FILHO, 2014).

O objetivo do estudo das seções de concreto armado é mostrar que sob os efeitos das ações, as peças não superam os estados limites, tendo o aço e o concreto suas resistências características minoradas e os efeitos das ações majoradas para o cálculo ser efetuado. Nessa seção serão mostrados alguns conceitos relacionados ao dimensionamento e verificação dos ELU de ELS de uma viga submetida a flexão normal.

5.1 Dimensionamento a flexão simples

O cálculo da armadura necessária para as seções retangulares de vigas pode ser feito definindo-se como dados de entrada a resistência à compressão do concreto, a largura e a altura útil da seção e o tipo de aço a ser utilizado. Com isso definido, faz-se o equilíbrio das forças que atuam na seção. A flexão simples é representada pelos domínios 2, 3, 4 e 4a, entretanto o item 14.6.4.3 da norma ABNT NBR 6118:2014 permite que o dimensionamento seja realizado nos domínios 2 ou 3 (CARVALHO; FILHO 2014).

5.1.1 Condições de ductilidade

De acordo com o item 14.6.4.3 da norma ABNT NBR 6118:2014, a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU, a qual pode ser encontrada com a relação x/d , onde x é a profundidade da linha neutra e d é a altura útil. Quanto menor for essa relação (x/d), maior será a capacidade de rotação dos elementos.

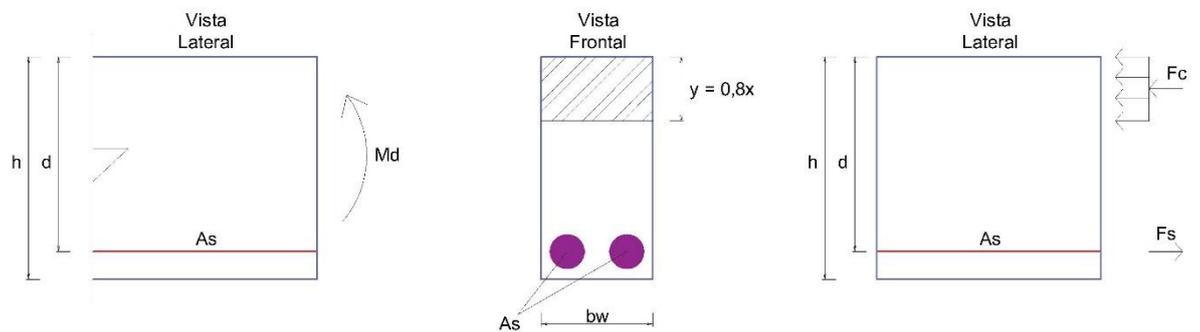
Para as vigas, o comportamento dútil adequado deve respeitar dois limites, sendo o primeiro limite para concretos até 50 MPa e o segundo para concretos maiores que 50 MPa e menores que 90 MPa:

- a) $x/d \leq 0,45$, para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;
- b) $x/d \leq 0,35$, para concretos com $50 < f_{ck} \leq 90$ MPa;

5.1.2 Momento máximo resistente na seção

Após a indicação da ductilidade das seções, onde a ABNT NBR 6118:2014 colocou como limite a relação $x/d = 0,45$ para concretos até C50, são deduzidas as equações para o dimensionamento de vigas com seção retangulares. Nessa seção serão apresentadas equações para os concretos de classe até C50. Na Figura 3 foi esquematizado o equilíbrio em uma seção retangular com armadura simples e em seguida foram mostradas as equações de equilíbrio, a linha neutra e a área de armadura necessária.

Figura 3: Seção transversal de uma viga submetida a flexão simples



Fonte: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2014)

Equilíbrio das forças atuantes normais à seção transversal:

$$\sum F = 0 \quad (5.1)$$

$$F_c = F_s \quad (5.2)$$

$$F_c - F_s = 0 \quad (5.3)$$

onde:

- F_s é a força atuante na armadura de aço e
- F_c é a força atuante no concreto;

Equilíbrio dos momentos:

$$\sum M = M_{rd} \quad (5.4)$$

$$M_{rd} = F_c \cdot z \quad (5.5)$$

$$M_{rd} = F_s \cdot z \quad (5.6)$$

onde:

- M_{rd} é o momento fletor resistente de cálculo e
- z é o braço de alavanca

A resultante das forças de compressão no concreto é dada pela equação 5.7, onde F_c e F_s da equação 5.3 são substituído

$$\begin{aligned} F_c &= (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \\ F_s &= A_s \cdot f_{yd} \\ (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) - A_s \cdot f_{yd} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

A profundidade da linha neutra (x) e o braço de alavanca (z) são dados pelas equações 5.8 e 5.9, respectivamente.

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot b_w} \quad (5.8)$$

$$z = d - (0,4 \cdot x); \quad (5.9)$$

onde:

- A_s é a área de aço tracionada

Colocando as equações de F_c e z na equação 5.5, tem-se a equação mostrada a seguir:

$$M_{rd} = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x); \quad (5.10)$$

Substituindo x da equação 5.8 na equação 5.10, chega-se à equação geral de M_{rd} , mostrada a seguir:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - 0,4 \cdot \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot b_w} \right); \quad (5.11)$$

onde:

- d é a altura útil;

5.1.2 Cálculo da área de armadura longitudinal necessária

Com os momentos solicitantes já calculados e com o valor de x determinado, é possível encontrar a armadura necessária para a seção. Da equação 5.7, e sabendo que $F_s = \sigma_s \cdot A_s$, sendo σ_s a tensão que atua no aço e A_s a área de aço, tem-se que a armadura de aço necessária é dada pela seguinte equação.

$$A_s = M_{sd} / z \cdot \sigma_s \quad (5.12)$$

5.1.3 Armadura mínima

Segundo o item 17.3.5.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, a armadura de tração deve ser determinada a partir do dimensionamento de uma seção a um momento fletor mínimo aplicado, que é dado pela expressão 5.13, respeitando a taxa mínima absoluta de 0,15%.

$$M_{\text{dmin}} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{\text{ctk,sup}}; \quad (5.13)$$

onde:

- W_0 é o módulo de resistência da seção transversal bruta do concreto, relativo à fibra mais tracionada e
- $f_{\text{ctk,sup}}$ é a resistência característica superior do concreto.

Na Figura 4 foram mostradas as taxas mínimas de armadura de acordo com a resistência característica a compressão do concreto.

Figura 4: Taxa de armaduras mínima de flexão para vigas

Forma da seção	Valores de $\rho_{\text{mín}}^a$ ($A_{\text{s,mín}}/A_{\text{c}}$) %														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

^a Os valores de $\rho_{\text{mín}}$ estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50, $d/h = 0,8$ e $\gamma_{\text{c}} = 1,4$ e $\gamma_{\text{s}} = 1,15$. Caso esses fatores sejam diferentes, $\rho_{\text{mín}}$ deve ser recalculado.

Fonte: Norma ABNT NBR 6118:2014

Da Figura 4, pode-se tirar a seguinte relação:

$$\rho_{\text{mín}} = A_{\text{s,mín}}/A_{\text{c}} \quad (5.14)$$

5.1.4 Armadura máxima

Já sobre a armadura máxima, o item 17.3.5.2.4 da ABNT NBR 6118:2014 traz que a soma das armaduras de tração e compressão ($A_{\text{s}} + A_{\text{s}'}$) não pode ser maior que 4% da área de concreto da seção (A_{c}).

5.2 Dimensionamento à força cortante

Foi apresentado até aqui o cálculo da armadura longitudinal sem que houvesse a interferência da força cortante. Entretanto, em casos reais de vigas submetidas a um carregamento vertical qualquer, surgem, além das tensões normais, as tensões tangenciais que equilibram o esforço cortante. Diante disso, é desenvolvido um estado biaxial de tensões, com as tensões principais de tração e compressão inclinadas em relação ao eixo da viga. Com isso, é necessário calcular a armadura necessária para resistir e proporcionar segurança diante dos diferentes modos de ruptura (CARVALHO; FILHO, 2014).

A norma ABNT NBR 6118:2014 traz no item 17.4.1, como hipótese básica para dimensionar os elementos lineares sujeitos a força cortante, dois modelos de cálculo (I e II) “que pressupõem a analogia com o modelo em treliça, de banzos paralelos, associados a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural e trazidos por uma componente adicional V_c ”.

A verificação do estado limite último referente à força cortante se dá pela análise da resistência da peça em uma determinada seção transversal, onde são verificadas de forma simultânea duas condições previstas no item 17.2.4.1 da ABNT NBR 6118:2014.

$$V_{sd} \leq V_{rd2}; \quad (5.15)$$

$$V_{sd} \leq V_{rd3}; \quad (5.16)$$

onde:

- V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo na seção;
- V_{rd2} é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, de acordo com os modelos de cálculo I e II e
- V_{rd3} é a força cortante de cálculo relativa à ruína por tração diagonal, igual a $(V_c + V_{sw})$;

Para se determinar a armadura transversal em uma seção, troca-se o sinal de desigualdade da equação 5.16 por um sinal de igualdade. Sendo assim, a equação 5.15 fica sendo a verificação ao esmagamento e a 5.16, com o sinal de igualdade, é usada para o cálculo da armadura transversal.

Além disso, assim como no cálculo da armadura a flexão, deve ser considerada uma armadura mínima também para o dimensionamento a força cortante, mostrada no item 17.4.1.1.1 da ABNT NBR 6118:2014 pela fórmula abaixo:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{yw,k}}; \quad (5.17)$$

onde:

- A_{sw} é a área da seção transversal dos estribos;
- s é o espaçamento dos estribos;
- α é a inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal;
- b_w é a largura da seção transversal e
- f_{ywk} é a resistência característica ao escoamento do aço ao longo da armadura transversal, onde é limitada a f_{yd} em caso de estribos;

5.3 Verificações do Estado Limite de Serviço

Após a realização do dimensionamento no ELU, e garantindo o funcionamento de uma viga qualquer de forma correta, precisa-se realizar as verificações relacionadas ao estado limite de deformação excessiva e o efeito da fissuração com o objetivo de garantir o conforto e a durabilidade do elemento.

O estado limite de deformação excessiva, segundo o item 3.2.4 da ABNT NBR 6118:2014, é onde as deformações atingem os limites estabelecidos para que se tenha um uso normal da construção. As verificações dos valores limites para as deformações são calculadas no item 17.3.2 da ABNT NBR 6118:2014. Para isso, essas verificações são feitas através de modelos que consideram a rigidez efetiva da viga, existência de fissuras no concreto e as deformações diferidas no tempo, ajudando a determinar valores de deformação mais coerentes. Entretanto, uma grande precisão não pode ser esperada desse processo devido a necessidade de se conhecer o processo construtivo, assim como os materiais e suas propriedades no momento da solicitação. Porém, esta é a forma de se encontrar valores mais próximos da realidade (CARVALHO; FILHO, 2014)

Diante de toda a complexidade relacionada à determinação da flecha, o item 17.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2014 permite que seja utilizada a expressão de rigidez equivalente para avaliar de forma aproximada a flecha imediata nas vigas, mostrada na equação 5.19, onde no estágio I se considera a rigidez da seção bruta e no estágio II a armadura é levada em consideração. A flecha imediata prevista, sem levar em consideração o efeito da fluência, é dada pela equação 5.18.

$$a = \frac{\alpha \cdot p \cdot L^4}{(E \cdot I)_{eq}}; \quad (5.18)$$

$$(E \cdot I)_{eq} = Ecs \cdot \{ (Mr/Ma)^3 \cdot Ic + [1 - (Mr/Ma)^3] \cdot Iii \} \quad (5.19)$$

$$Mr = (\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot Ic) / y_t \quad (5.20)$$

onde:

- p é a carga distribuída definida pela combinação quase permanente de serviço;
- L é o vão da viga
- αc é o coeficiente da condição estática do sistema considerado;
- $(E \cdot I)_{eq}$ é a rigidez equivalente devido a distribuição linear de tensões;
- M_r é o momento de fissuração no elemento estrutural;
- M_a é o momento fletor na seção crítica;
- E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto;
- I_c é o momento de inércia da seção bruta do concreto;
- I_{ii} é o momento de inércia da seção fissurada do concreto;
- α 1,5 para seções retangulares e
- y_t é a distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada;

O efeito da fluência do concreto avalia as deformações que ocorrem ao longo do tempo devido a solicitação por tensão constante. Segundo Carvalho e Filho (2014), as deformações de fluência são oriundas de ações permanentes, entretanto, para os cálculos deve ser utilizada a combinação quase permanente devido a atuação de parte da carga acidental em um longo período na vida da estrutura. Para o cálculo desses deslocamentos existem alguns processos, mas será considerada a equação mostrada no item 17.3.2.1.2 da ABNT NBR 6118:2014.

Com as flechas imediatas e diferidas definidas, se encontra a flecha total na viga, que é o resultado da soma das duas anteriores. Esse valor total deve atender aos limites de deslocamentos que são mostrados no item 13.3 da ABNT NBR 6118:2014 e que são classificados em 4 grupos básicos, definidos de acordo com o efeito provocado, sendo para vigas o limite de aceitabilidade sensorial de $L/250$.

6 OTIMIZAÇÃO

RAO (2009) define otimização como um ato que busca o melhor resultado em determinadas circunstâncias com o objetivo final de minimizar os esforços necessários ou maximizar os benefícios desejados. Na engenharia estrutural existem diversos campos para a aplicação da otimização, onde o objetivo sempre é encontrar elementos que tenham boas funcionalidades ao longo da sua vida útil e que ofereçam o menor custo, sendo comum a otimização de seções transversais de vigas e pilares e espessuras de lajes. Para isso, algumas grandezas precisam ser definidas previamente, sendo elas: função objetivo, variáveis de projeto e parâmetros de entrada.

Além disso, são utilizados alguns programas computacionais para auxiliar os projetistas. Os mais utilizados são o Microsoft Excel, onde os problemas são formulados e o Matlab, onde se implementa e se faz as diversas verificações, facilitando e deixando mais atrativa a busca por soluções ótimas, economizando tempo com as sucessivas verificações que são feitas (VALENTE, 2020). Nessa seção, serão mostrados alguns conceitos sobre otimização com o objetivo de embasar melhor o tema em estudo.

6.1 Elementos componentes de um problema de otimização

6.1.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto em um problema de otimização são definidas como os parâmetros que podem assumir qualquer valor desde que atinja o objetivo que se deseja. Elas podem ser contínuas, discretas, inteiras e binárias. As contínuas podem assumir qualquer valor dentro de um domínio admissível, já as discretas assumem valores reais e isolados dentro de uma lista de valores que são permitidos. Já as inteiras podem assumir apenas valores inteiros, por fim, as binárias só podem assumir valores de 0 e 1 (VALENTE, 2020).

Segundo Silva (2009), essas variáveis podem assumir valores contínuos ou discretos, sendo que na grande maioria dos projetos estruturais é negligenciada a natureza discreta dessas variáveis, sendo uma solução o ajuste para o projeto ótimo considerando o valor discreto mais próximo.

6.1.2 Função objetivo

Em problemas de otimização, a função objetivo possui variáveis que se deseja maximizar ou minimizar. Segundo Silva (2009), “a noção de otimização implica a existência de uma função de mérito que pode ser melhorada e utilizada como uma medida da eficácia do projeto”. Geralmente a função objetivo visa a otimização do custo, entretanto, na otimização de estruturas podem ser função objetivo o peso, o deslocamento da estrutura e as tensões, entre outros.

Esses problemas de otimização podem possuir um único objetivo ou vários deles, sendo a função objetivo composta por variáveis de projeto. Segundo Azevedo (1994), em uma estrutura composta somente por um material, a função objetivo estará inteiramente ligada ao material. Em caso de custo, minimizando a variável correspondente irá diminuir o custo. Já em caso de uma estrutura composta por mais de um material, sendo a função objetivo o custo, ela deve representar todos os materiais presentes na composição completa do elemento estrutural.

6.1.3 Restrições

Em problemas de otimização, as variáveis de projeto não podem assumir qualquer valor, para isso existem as restrições que são funções que impõem limites para as escolhas de quem está analisando o problema e podem ser de igualdade e desigualdade.

Segundo Valente (2020), as restrições de igualdade podem ser eliminadas desde que exista possibilidade de mostrar uma variável de projeto distinta, logo após elas são substituídas em equações do mesmo problema matemático. O número de restrições de igualdade não pode ser maior que o de variáveis de projeto, pois se torna inconsistente. Já as restrições de desigualdade não possuem limitações quanto a sua quantidade e são necessárias nos problemas de otimização para limitar parâmetros como deslocamentos e indicar valores mínimos e máximos para variáveis como área, base ou altura de seções.

Na engenharia estrutural, geralmente essas restrições são impostas por normas. No Brasil, a ABNT NBR 6118:2014 define diretrizes para o dimensionamento de estruturas de concreto armado, estabelecendo equações que são utilizadas habitualmente por projetistas e que são utilizadas como restrições de igualdade e desigualdade na otimização.

6.2 Formulação de um problema de otimização

De acordo com Valente (2020), a formulação de um problema de otimização segue a estrutura matemática:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

sujeito a:

$$g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq 0 \quad (6.2)$$

$$h_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (6.3)$$

onde:

- f é a função objetivo;

- x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) é o vetor das variáveis de projeto;
- g_m são restrições de desigualdade e
- h_m são restrições de igualdade;

7 OTIMIZAÇÃO APLICADA AO DIMENSIONAMENTO DE VIGA EM CONCRETO ARMADO

Para alcançar o objetivo deste trabalho, quatro problemas foram formulados e analisados. O Problema 1 consiste no dimensionamento da armadura longitudinal, no estado-limite último (ELU), de uma seção transversal submetida a flexão simples. Já no Problema 2, foi dimensionada apenas a armadura transversal da viga. Os Problemas 3 e 4 são semelhantes no que se refere ao dimensionamento das duas armaduras, longitudinal e transversal, porém diferenciam-se no que se refere à verificação da deformação excessiva no estado- limite de serviço (ELS), a qual foi realizada apenas no Problema 4.

Esses 4 problemas foram aplicados a dois casos, sendo o Caso 1 o dimensionamento de uma viga biapoiada e o Caso 2 o dimensionamento de uma viga biengastada. Nesse capítulo será mostrada a formulação do dimensionamento otimizado.

7.1 Função Objetivo

Para esse trabalho, foram usadas três funções objetivo aplicadas aos quatro Problemas de dimensionamento analisados. As funções objetivo 1 e 2 tiveram três parcelas, a primeira parcela levou em consideração o custo do concreto, a segunda parcela levou em consideração o custo de fôrma e a terceira parcela foi considerado o custo de armadura. Para a função objetivo 1 a armadura considerada foi a longitudinal, para a função objetivo 2 foi considerada a armadura transversal. Já para a função objetivo 3, houve quatro parcelas, devido ao dimensionamento completo onde a terceira parcela foi a armadura longitudinal e a quarta parcela foi a armadura transversal, sendo as duas primeiras parcelas iguais a função objetivo 1 e 2. O Quadro 2 ilustra as parcelas das três funções objetivo.

Quadro 2: Resumo das parcelas componentes das funções objetivo

Funções Objetivo	Custos
1	Volume de concreto + Área de fôrma + Peso de aço da armadura longitudinal
2	Volume de concreto + Área de fôrma + Peso de aço da armadura transversal
3	Volume de concreto + Área de fôrma + Peso de aço da armadura longitudinal + Peso de aço da armadura transversal

Fonte: Autor (2022)

FUNÇÃO OBJETIVO 1

Essa função objetivo refere-se ao Problema 1 dos Casos 1 e 2, e é dada pela seguinte equação:

$$f(bw, h, As) = L \cdot [(bw \cdot h) \cdot Cc + (bw + 2h) \cdot Cf + (As) \cdot \rho_s \cdot Cs] \quad (7.1)$$

onde:

- f é a função objetivo do problema;
- L é o vão da viga;
- bw é a largura da seção transversal da viga;
- h é a altura da seção transversal da viga;
- Cc é o custo do concreto, por unidade de volume;
- As é a área de armadura tracionada na seção da viga;
- ρ_s é o peso específico do aço;
- Cs é o custo do aço da armadura longitudinal, por unidade de massa;

FUNÇÃO OBJETIVO 2

Para a função objetivo do Problema 2, foram necessários alguns passos para o encontro do termo referente ao custo do estribo, como mostrado a seguir:

Para encontrar a área do estribo (A_{est}), usa-se a seguinte equação:

$$A_{est} = (\pi \cdot \phi^2) / 4 \quad (7.2)$$

onde ϕ é a bitola da armadura transversal. Para encontrar o número de estribos por metro (n), é necessário fazer o seguinte cálculo:

$$n = (Asw/s) / A_{est} \quad (7.3)$$

onde Asw é a área da seção transversal dos estribos e s , o espaçamento entre eles. Para o número total de estribos (n_t), multiplica-se o comprimento da viga pelo número de estribos por metro.

$$n_t = L \cdot n \quad (7.4)$$

Para o comprimento total dos estribos (CT), multiplica-se a equação 7.4 pelo comprimento de 1 estribo (c), mostrada na equação 7.5.

$$CT = n_t \cdot c \quad (7.5)$$

Para o custo total dos estribos (C), usa-se a equação 7.5, utilizando todos os termos anteriormente citados.

$$C = CT \cdot A_{est} \cdot \rho_s \cdot C_{est} \quad (7.6)$$

onde:

- C_{est} é o custo do aço da armadura transversal, por unidade de massa;

Para essa função objetivo, o custo do aço é referente à armadura transversal, representada pela equação 7.7 a seguir.

$$f(bw, h, A_{sw/s}) = L \cdot [(bw \cdot h) \cdot C_c + (bw + 2h) \cdot C_f] + CT \cdot A_{est} \cdot \rho_s \cdot C_{est} \quad (7.7)$$

FUNÇÃO OBJETIVO 3

Na função objetivo 3, foi feita a inclusão das duas armaduras, longitudinal e transversal.

$$f(bw, h, A_s, A_{sw/s}) = L \cdot [(bw \cdot h) \cdot C_c + (bw + 2h) \cdot C_f + (A_s) \cdot \rho_s \cdot C_s] + CT \cdot A_{est} \cdot \rho_s \cdot C_{est} \quad (7.8)$$

Os Problemas tiveram como função objetivos as seguintes equações:

- O Problema 1 teve como função objetivo a equação 7.1;
- O Problema 2 teve como função objetivo a equação 7.7;
- Já os Problemas 3 e 4 tiveram como função objetivo a equação 7.8;

7.2 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto foram definidas de acordo com o Problema, sendo que nos quatro Problemas a largura da seção transversal (bw) e a altura (h) foram consideradas como variáveis de projeto.

As variáveis de projeto, para cada problema, estão listadas a seguir:

- Problema 1: bw, h e A_s , sendo A_s a área de armadura longitudinal (m^2);

- Problema 2: b_w , h e A_{sw}/s , sendo A_{sw}/s a área de armadura transversal por metro (cm^2/m);
- Problema 3: b_w , h , A_s (m^2) e A_{sw}/s (cm^2/m);
- Problema 4: b_w , h , A_s (m^2) e A_{sw}/s (cm^2/m);

7.3 Restrições

A ABNT NBR 6118:2014 impõe algumas equações como restrições para que a estrutura seja dimensionada dentro dos limites de segurança. Sendo assim, foram utilizadas como restrições as equações normativas, sendo listadas para cada Problema.

PROBLEMA 1 - CASO 1

Dimensionamento da armadura longitudinal de uma viga biapoiada

Para o Caso 1, a primeira restrição atende o equilíbrio da seção transversal definido no item 12.5.2 da ABNT NBR 6118:2014 e é dada pela seguinte equação:

$$M_{sd} \leq M_{rd} \quad (7.8)$$

onde o M_{sd} é o momento solicitante máximo da viga biapoiada, que acontece no meio do vão ($q \cdot L^2/8$) para uma carga uniformemente distribuída e M_{rd} é o momento fletor resistente de cálculo máximo, mostrado pela equação 5.11.

Segundo o item 14.6.4.3 da ABNT NBR 6118:2014, a equação referente à ductilidade da viga, que é a capacidade de rotação dos elementos estruturais, para concretos até 50 MPa a seguinte restrição:

$$x/d \leq 0,45 \quad (7.9)$$

Já para a armadura mínima, o item 4.1.3 mostra a seguinte equação:

$$A_s \geq A_c \cdot \rho_{\text{mín}} \quad (7.10)$$

O item 5.1.4 do presente trabalho, mostra a restrição de armadura máxima, como não será considerada a armadura de compressão, restrição é dada pela equação a seguir:

$$A_s \leq 4\% \cdot A_c \quad (7.11)$$

No item 13.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, a restrição referente a base mínima de uma seção transversal é dada pela desigualdade abaixo:

$$b_w \geq 12 \text{ cm} \quad (7.12)$$

PROBLEMA 1 - CASO 2

Dimensionamento da armadura longitudinal de uma viga biengastada

A restrição a seguir, é mostrada no item 12.5.2 da ABNT NBR 6118:2014 sendo que o M_{sd} , momento solicitante máximo, para o Caso 2 é igual a $(q \cdot L^2/12)$, para uma carga uniformemente distribuída, diferente do Caso 1. Entretanto, a restrição é escrita como a equação 7.8, dada da seguinte forma:

$$M_{sd} \leq M_{rd}$$

As restrições a seguir estão mostradas nas equações 7.9, 7.10, 7.11, e 7.12, reescritas a seguir.

$$x/d \leq 0,45$$

$$A_s \geq A_c \cdot \rho_{\text{mín}}$$

$$A_s \leq 4\% \cdot A_c$$

$$b_w \geq 12 \text{ cm}$$

Para os Problemas 2, 3 e 4 as restrições são iguais para os Casos 1 e 2.

PROBLEMA 2 - CASOS 1 E 2

Dimensionamento da armadura transversal das vigas

Para o Problema 2, as restrições foram iguais para os Casos 1 e 2, devido ao esforço cortante ser igual, e são mostradas nas equações 5.15, 5.16 e 5.17 no item 5.2 do presente trabalho, as quais serão rerepresentadas a seguir:

$$V_{sd} \leq V_{rd2}$$

$$V_{sd} \leq V_{rd3}$$

$$\frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin \alpha} \geq \left(\frac{0,2 \cdot f_{ctm}}{f_{ywk}} \right)$$

PROBLEMA 3 - CASOS 1 e 2

Dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal das vigas

Para o Problema 3 foram empregadas as mesmas restrições dos Problemas 1 e 2, representados pelas equações 7.8 a 7.12 e pelas equações 5.14 a 5.16. Entretanto, a única diferença acontece para M_{sd} , onde para o Caso 1 ele é dado por $(q \cdot L^2/8)$ e para o Caso 2 é dado por $(q \cdot L^2/12)$.

PROBLEMA 4 - CASOS 1 e 2:

Dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal com verificação das flechas

Para o Problema 4, foi feita a inclusão da verificação no ELS da deformação excessiva. Para as vigas em estudo, o controle da fissuração foi feito sem a verificação da abertura de fissuras, pois de acordo o item 17.3.3.3 da ABNT NBR 6118:2014, em caso de atendidas as exigências de armadura mínima e cobertura, a peça atenderá ao limite máximo de abertura. Com isso, foi realizada somente a verificação referente ao estado limite de deformação excessiva, sendo mostrada na equação 7.13

Para o Problema 4 dos Casos 1 e 2, a ABNT NBR 6118:2014 no item 17.3.2.1 impõe a seguinte restrição:

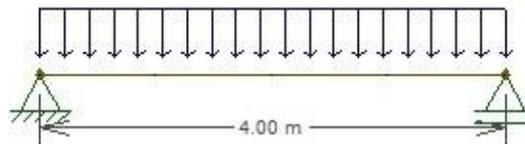
$$a \leq a_{lim} \quad (7.13)$$

8 METODOLOGIA

Como mostrado anteriormente, o presente trabalho teve como objetivo o dimensionamento de duas vigas de seções retangulares, sendo uma biapoiada nos pilares e a segunda biengastada, onde as rigidezes dos pilares não foram levadas em consideração.

Nas Figuras 5 e 6 estão ilustradas as vigas de concreto armado a serem dimensionadas de forma otimizada. As vigas possuem vão efetivo de 4,00 m e apresentam, como carregamento característico, a carga proveniente das lajes e das paredes, sendo elas 50 kN/m e 9,2 kN/m respectivamente, sendo que o peso próprio varia de acordo com os valores das variáveis de projeto b_w e h .

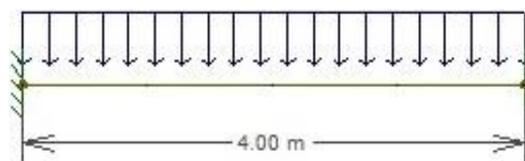
Figura 5: Viga biapoiada utilizada para a otimização



Fonte: Autor (2022)

O concreto utilizado foi de classe C40 e o aço do tipo CA-50. A classe de agressividade ambiental II foi considerada no presente trabalho, sendo o cobrimento nominal adotado de 30 mm. Para as armaduras longitudinais, foi utilizada uma bitola de 10 mm, enquanto que para as armaduras transversais foi utilizada uma bitola de 6,3 mm.

Figura 6: Viga biengastada utilizada para a otimização



Fonte: Autor (2022)

Além disso, para a função objetivo, usou-se o peso específico do aço de 7850 kg/m^3 , já para os custos unitários dos materiais tomou-se como referências o SINAPI e o ORSE para se buscar os custos por unidade de medida. Na Tabela 1 estão mostrados os custos de concreto, fôrmas e aço.

Tabela 1: Custos unitários

Custos Unitários	
Concreto	
Classe	(R\$/m³)
C40	553,80
Fôrmas (R\$/m²)	
57,79	
Aço CA-50	
Diâmetro (mm)	(R\$/kg)
6,30	16,25
10,00	14,38

Fonte: SINAPI (2022) e ORSE (2022)

Com essas definições prévias, o presente trabalho seguiu uma ordem para a análise e o dimensionamento das vigas. Em um primeiro momento, foi realizado o dimensionamento convencional para os quatro problemas definidos anteriormente, onde foram pré-estabelecidos os valores de b_w e h , realizando todas as verificações. Para o dimensionamento convencional, foi pré-definida uma altura de 50 cm e uma base de 20 cm para quatro problemas, onde foram encontrados os volumes de concreto, e as áreas de aço e fôrma, além do custo de cada problema.

Após o dimensionamento convencional, realizou-se o dimensionamento otimizado das vigas dos Casos 1 e 2, onde foram dimensionados quatro problemas. No primeiro problema, foi realizado o dimensionamento somente das armaduras longitudinais das duas vigas, onde se encontrou o valor ótimo para esse problema. Em um segundo problema, foi realizado o dimensionamento somente das armaduras transversais, excluindo da função objetivo os custos das armaduras longitudinais. Já em um terceiro problema, foi realizado o dimensionamento completo das vigas, incluindo os dois tipos de armadura, sendo otimizada de forma completa. No último problema, foi incluso a verificação relacionada a deformação excessiva. Abaixo serão detalhados os quatro problemas realizados no presente trabalho, apresentando a função objetivo de cada problema, as variáveis de projeto e todas as restrições utilizadas.

PROBLEMA 1

- *Variáveis de projeto*: 3 variáveis (b_w , h e A_s)
- *Função objetivo*: Minimização do custo de confecção de uma viga, considerando os custos de concreto, aço e de fôrmas. A função objetivo do Problema 1 foi explicitada na equação 7.1, reescrita abaixo.

$$f(bw, h, As) = L \cdot [(bw \cdot h) \cdot Cc + (As) \cdot \rho_s \cdot Cs + (bw + 2h) \cdot Cf]$$

• *Restrições:* Impostas pela ABNT NBR 6118:2014, referem-se ao dimensionamento da armadura longitudinal e são dadas pelas equações 7.8, 7.9, 7.10, 7.11 e 7.12. Para o dimensionamento otimizado, as equações de restrição foram detalhadas e serão mostradas a seguir.

CASO 1

A equação 7.8, foi reescrita substituindo os termos M_{sd} e M_{rd} ; para o M_{rd} , foi substituído pela equação 5.10. Já o M_{sd} foi escrito como $[\gamma_f \cdot (q \cdot L^2/8)]$, obtendo-se a equação 8.1

$$\begin{aligned} M_{sd} &\leq M_{rd} \\ M_{sd} - M_{rd} &\leq 0 \\ \gamma_f \cdot \frac{L^2 \cdot q}{8} - As \cdot f_{yd} \cdot \left(d - 0,4 \cdot \frac{As \cdot f_{yd}}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot bw} \right) &\leq 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

onde:

- γ_f é o coeficiente de ponderação de ações dado pela ABNT NBR 6118:2014 como 1,4;
- q são as ações que atuam na viga;

Já na equação 7.9, houve a substituição de x pela equação 5.8, chegando-se à equação 8.2.

$$\begin{aligned} x/d &\leq 0,45 \\ \frac{As \cdot f_{yd}}{(0,85 \cdot f_{cd} \cdot bw \cdot 0,8)} - 0,45 \cdot (d) &\leq 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Já as equações 7.7, 7.8 e 7.9, todos os termos foram posicionados antes da desigualdade, obtendo-se as equações 8.3, 8.4 e 8.5.

$$As - 4\% \cdot Ac \leq 0 \quad (8.3)$$

$$Ac \cdot \rho_{mín} - As \leq 0 \quad (8.4)$$

$$-bw + 12 \leq 0 \quad (8.5)$$

CASO 2

Para o Caso 2, as restrições são escritas como as do Caso 1, entretanto para a equação 8.1, tem uma mudança quanto ao M_{sd} , onde para a viga biengastada ele é escrito como $[\gamma_f \cdot (q \cdot L^2/12)]$, chegando-se à equação 8.6.

$$\left(\gamma_f \cdot \frac{L^2 \cdot q}{12}\right) - A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - 0,4 \cdot \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot b_w}\right) \leq 0 \quad (8.6)$$

PROBLEMA 2

- *Variáveis de projeto*: 3 variáveis (b_w , h , A_{sw}/s);
- *Função objetivo*: Minimização do custo de confecção de uma viga, considerando os custos de concreto, fôrmas e aço mostrada na equação 7.6, reescrita a seguir:

$$f(b_w, h, A_{sw}/s) = L \cdot [(b_w \cdot h) \cdot C_c + (b_w + 2h) \cdot C_f] + C_T \cdot A_{est} \cdot \rho_s \cdot C_{est}$$

- *Restrições*: Impostas pela ABNT NBR 6118:2014 referente as armaduras longitudinais e transversais. Elas são iguais para os casos 1 e 2 e estão representadas pelas equações 5.15, 5.16 e 5.17. Entretanto, para o dimensionamento otimizado as equações foram reescritas da seguinte maneira, e serão mostradas a seguir:

$$V_{sd} - V_{rd2} \leq 0$$

onde V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo, dado pela equação $[\gamma_f \cdot (q \cdot L^2/2)]$, e o V_{rd2} é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais. Para o modelo de cálculo 1, o item 17.4.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, define o V_{rd2} com a equação 8.7.

$$V_{rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (8.7)$$

onde:

- α_{v2} é igual a $(1 - f_{ck}/250)$, com f_{ck} sendo expresso em megapascal;

Substituindo a equação 8.7 na 5.15, utilizando o V_{sd} como $(\gamma_f \cdot \frac{L^2 \cdot q}{2})$, chega-se à equação 8.8.

$$\left(\gamma_f \cdot \frac{L^2 \cdot q}{2}\right) - 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot (d) \leq 0 \quad (8.8)$$

Já para a restrição representada pela equação 5.16, será reescrita da seguinte forma:

$$V_{sd} - V_{rd3} \leq 0$$

Segundo o item 17.4.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, $V_{rd3} = V_c + V_{sw}$, sendo:

$$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (8.9)$$

$$V_{sw} = (A_{sw}/s) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywk} \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) \quad (8.10)$$

onde:

- V_c é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares de treliça;
- V_{sw} é a parcela resistida pela armadura transversal;

Substituindo as equações 8.9 e 8.10 na equação reescrita 5.16, obtém-se a equação 8.11.

$$\left(\gamma_f \cdot \frac{L^2 \cdot q}{2}\right) - 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot (d) - b_w \cdot 0,9 \cdot (d) \cdot f_{ywk} \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) \leq 0 \quad (8.11)$$

A restrição escrita na equação 5.17, fica reescrita da seguinte forma:

$$\frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin\alpha} \geq \left(\frac{0,2 \cdot f_{ctm}}{f_{ywk}}\right)$$

$$\frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin\alpha} - \left(\frac{0,2 \cdot f_{ctm}}{f_{ywk}}\right) \geq 0 \quad (8.12)$$

$$-\frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin\alpha} + \left(\frac{0,2 \cdot f_{ctm}}{f_{ywk}}\right) \leq 0$$

PROBLEMA 3

- *Variáveis de projeto*: 4 variáveis (b_w , h , A_s e $\frac{A_{sw}}{s}$);
- *Função objetivo*: Minimização do custo de confecção de uma viga, considerando os custos de concreto, aço e de fôrmas, representada pela equação 7.4:

$$f(bw, h, As, Asw/s) = L \cdot [(bw \cdot h) \cdot Cc + (As) \cdot \rho_s \cdot Cs + (bw + 2h) \cdot Cf] + CT \cdot Aest \cdot \rho_s \cdot Cest$$

• *Restrições:* Para esse Problema, as restrições impostas pela ABNT NBR 6118:2014 referentes às armaduras longitudinais e transversais são iguais às restrições do Problema 1, incluindo todas do Problema 2 mostradas, sendo esse um Problema de dimensionamento completo de uma viga;

PROBLEMA 4

- *Variáveis de projeto:* 4 variáveis (bw , h , As e $\frac{Asw}{s}$);
- *Função objetivo:* Minimização do custo de confecção de uma viga, considerando os custos de concreto, fôrmas e aço. Possui uma função objetivo igual à mostrada no Problema 3;
- *Restrições:* Impostas pela ABNT NBR 6118:2014 referente aos limites de deslocamento máximos e de deformação excessiva, mostrada na equação 7.13, reescrita a seguir:

$$a \leq a_{lim}$$

Na tabela 13.3 da ABNT NBR 6118:2014, define a_{lim} como sendo $L/250$. Substituindo o termo a_{lim} e substituindo a pela equação 5.18, a restrição referente a deformação excessiva é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\alpha_c \cdot p \cdot l^4}{(E \cdot I)_{eq}} - L/250 \leq 0 \quad (8.13)$$

Pinheiro et al (2010) mostra na tabela 3.1a o valor de α_c para a viga biapoiada como sendo $5/384$, já na tabela 3.1b mostra o valor de α_c para a viga biengastada como sendo $1/384$. Substituindo esses valores na equação 8.13, tem-se para os Casos 1 e 2 as seguintes equações.

CASO 1

$$\frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot (E \cdot I)_{eq}} - L/250 \leq 0 \quad (8.14)$$

CASO 2

$$\frac{1 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot (E \cdot I)_{eq}} - L/250 \leq 0 \quad (8.15)$$

9 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após o dimensionamento otimizado das vigas, foram encontrados os valores ótimos das variáveis de projeto e dos custos. Todos os resultados do dimensionamento otimizado foram conferidos com o método convencional, implementados em planilhas eletrônicas.

Para a confirmação de que a planilha realizou o dimensionamento de forma correta, foi resolvido o exemplo resolvido 6 do livro de (CARVALHO; FILHO; 2014). Nesse capítulo serão expostos os resultados dos dimensionamentos convencional e otimizado dos casos 1 e 2.

9.1 Caso 1

Para o Caso 1, foi dimensionada uma viga biapoiada, representada pela Figura 3, onde os resultados dos respectivos problemas serão expostos a seguir:

PROBLEMA 1: Apenas dimensionamento da armadura Longitudinal

Foi realizado o dimensionamento otimizado da armadura longitudinal de uma viga, onde o seu comprimento é de 4,00 metros. O algoritmo realizou 9 iterações até chegar no valor ótimo, onde esse ponto retornou uma base (b_w) de 12 cm, uma altura (h) de 61,47 cm, uma área de aço (A_s) de 7,61 cm² e um custo ótimo de execução de R\$ 818,91.

Foi realizado também o dimensionamento convencional dessa viga, onde foram definidas previamente uma base de 20 cm e uma altura de 50 cm. Na Tabela 2 estão mostrados os dados comparativos entre os dois modelos de dimensionamento.

Tabela 2: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 1)

Parâmetros	Dimensionamento	
	Convencional	Otimizado
b_w (cm)	20	12
h (cm)	50	61,47
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	295056
A_s (cm²)	9,58	7,61
Custo (R\$)	931,71	818,92

Fonte: Autor (2022)

Com a realização das duas formas de dimensionamento, percebeu algumas diferenças, sendo a primeira dada pela área de aço, onde no procedimento convencional encontrou-se uma área de aço maior

que no procedimento otimizado. Além disso, o dimensionamento otimizado gera um custo de R\$ 112,79 mais barato, permitindo uma economia de 12,11%.

PROBLEMA 2: Apenas dimensionamento da armadura Transversal

Para esse segundo Problema, foi realizado o dimensionamento referente aos esforços cortantes na peça, encontrando a área das armaduras transversais.

Com isso, foi realizado o dimensionamento otimizado, onde foi obtido no ponto ótimo um valor de base (b_w) de 12 cm, uma altura (h) de 49,76 cm, uma armadura transversal ($A_{sw/s}$) de 6,2890 (cm^2/m) e um custo total de execução de R\$ 614,71.

Foi realizado também, o dimensionamento convencional, sendo a base e a altura pré definidas em 20 e 50 cm, respectivamente. Na Tabela 3 são mostrados os dados comparativos entre os dois modelos de dimensionamentos.

Tabela 3: Comparação entre modelos de dimensionamentos (Problema 2)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
bw (cm)	20	12
h (cm)	50	46,47
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	223056
A_{sw/s} (cm²/m)	4,27	6,29
Custo (R\$)	651,46	614,71

Fonte: Autor (2022)

Mantendo-se fixos os valores de b_w e h para o dimensionamento convencional, foi encontrada uma área de aço de 4,27 cm^2/m e um custo de execução de R\$ 651,46. Já no dimensionamento otimizado, a área de aço para a armadura transversal encontrada foi maior que a área calculada no modelo convencional, e a altura ótima da viga ficou muito próxima da pré estabelecida no modelo convencional. Em relação aos custos, o dimensionamento otimizado gera um custo R\$ 36,75 mais barato, sendo 5,64% mais econômico.

PROBLEMA 3: Dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal

Para o terceiro problema, foram utilizadas todas as funções de restrições e uma função objetivo que contemplava as duas armaduras (longitudinal e transversal).

Realizou-se o dimensionamento otimizado de forma completa, onde foi encontrado no ponto ótimo uma área de aço de 5,99 cm², uma base (bw) de 12 cm, uma altura (h) de 74,73 cm e um custo de execução dessa viga de R\$ 949,15.

Além disso, foi feito o dimensionamento convencional, onde com uma base e uma altura pré estabelecidas de 20 e 50 cm, respectivamente, foi possível comparar, através da Tabela 4, os valores dos dois dimensionamentos.

Tabela 4: Comparação entre modelos de dimensionamentos (Problema 3)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
bw (cm)	20	12
h (cm)	50	73,74
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	353952
As (cm²)	9,58	5,99
Asw/s (cm²/m)	4,27	3,01
Custo (R\$)	1.084,26	949,15

Fonte: Autor (2022)

Utilizando-se os dois modelos de dimensionamento (o convencional e o ótimo), foi possível comparar os resultados de ambos, onde se percebeu que o dimensionamento otimizado gerou uma altura de seção transversal maior que o dimensionamento convencional cuja, altura foi fixada em 50 cm. Além disso, as áreas de aço longitudinal e transversal foram menores no dimensionamento otimizado o que gerou uma diferença de R\$ 135,11, com uma economia de 12,46%.

PROBLEMA 4: Dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal e verificação da deformação excessiva

O Problema 4 teve valores ótimos iguais ao Problema 3, entretanto foram feitas as verificações referentes às deformações excessivas. Na Tabela 5 são mostradas as saídas dos dois modelos de dimensionamento.

Tabela 5: Comparação entre os modelos de dimensionamento (Problema 4)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
bw (cm)	20	12
h (cm)	50	73,74
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	353952
As (cm²)	9,58	5,99
Asw/s (cm²/m)	4,27	3,01
Custo (R\$)	1.084,26	949,15
Flecha (cm)	0,00433	0,00185

Fonte: Autor (2022)

Com os dois modelos de dimensionamentos feitos, foi possível analisar para esse problema as flechas, sendo que os dois modelos ficaram dentro do limite máximo ($L/250$) que é de 1,6 cm, entretanto o modelo otimizado apresentou uma flecha menor que o tradicional, mostrando, além da economia, uma durabilidade maior.

9.2 Caso 2

Para o caso 2, foi dimensionado uma viga biengastada, representada pela figura 4, onde os resultados dos respectivos problemas serão expostos a seguir:

PROBLEMA 1: Apenas dimensionamento da armadura Longitudinal

Assim como foi feito para a viga biapoiada, foi dimensionada no primeiro problema somente a armadura longitudinal para uma viga de comprimento 4,00 metros. Ao rodar o problema, obteve-se um dimensionamento otimizado onde foram realizadas 10 iterações.

No ponto ótimo, foi obtido um valor de base (bw) de 12 cm, uma altura (h) de 50,90 cm e uma área de aço (As) de 6,184 cm². O custo ótimo de execução dessa viga, somente dimensionada para armadura longitudinal foi de R\$ 677,62. Além disso, foi realizado o dimensionamento convencional, onde assim como feito em todos os problemas foram pré estabelecidas uma base e uma altura de 20 cm e 50 cm, respectivamente. Os resultados foram colocados na Tabela 6, com a qual foi possível verificar e fazer as análises necessárias.

Tabela 6: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 1, Caso 2)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
bw (cm)	20	12
h (cm)	50	50,9
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	244320
As (cm²)	6,12	6,18
Custo (R\$)	776,30	677,62

Fonte: Autor (2022)

Após a realização do dimensionamento convencional e otimizado, observou-se que no dimensionamento otimizado a altura encontrada foi próxima à pré-estabelecida no modelo convencional. Além disso, mesmo com uma área de aço da armadura longitudinal maior, o modelo otimizado gerou um custo R\$ 98,68 mais barato, com uma economia de 12,71%.

PROBLEMA 2: Apenas dimensionamento da armadura Transversal

Para o segundo problema, foi dimensionada a armadura transversal, onde foram encontrados valores ótimos para as variáveis de projeto. Para a base (bw) o valor ótimo foi de 12 cm, uma altura (h) de 49,76 cm e uma área de aço da armadura transversal $A_{sw/s}$ (cm²/s) de 6,2890 cm²/s.

Além disso, foi feito o dimensionamento convencional para esse problema, onde os valores encontrados foram colocados em uma tabela. Como os esforços cortantes são iguais para os dois casos, o problema 2 do caso 2 é igual ao Problema 2 do Caso 1. Sendo assim, serão mostradas a seguir a Tabela 7.

Tabela 7: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 2, Caso 2)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
bw (cm)	20	12
h (cm)	50	46,47
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	223056
$A_{sw/s}$ (cm²/m)	4,27	6,29
Custo (R\$)	651,46	614,71

Fonte: Autor (2022)

Com isso, o dimensionamento otimizado da viga biengastada gera um custo R\$ 36,75 mais barato e uma economia de 5,64%.

PROBLEMA 3: Dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal

Para o dimensionamento completo da viga biengastada, foram utilizadas todas as restrições e a função objetivo contemplou as duas armaduras (longitudinal e transversal).

Após realiza-se o dimensionamento otimizado, foram encontrados no ponto ótimo valores de base (b_w) 12 cm, uma altura (h) de 66,96 cm, área de aço para a armadura longitudinal (A_s) de 4,41 cm², e uma área de aço para a armadura transversal ($A_{sw/s}$) de 3,74 cm²/m, com um custo de execução completa de R\$ 848,29.

Além disso, realizou-se o dimensionamento convencional dessa viga biengastada, onde foram pré estabelecidos valores de base e altura de 20 cm e 50 cm, respectivamente. Os valores encontrados podem ser visualizados na Tabela 8, onde estão também os resultados para o modelo de dimensionamento otimizado.

Tabela 8: Comparação entre modelos de dimensionamento (Problema 3, Caso 2)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
b_w (cm)	20	12
h (cm)	50	66,96
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	321408
A_s (cm²)	6,14	4,41
$A_{sw/s}$ (cm²/m)	4,24	3,74
Custo (R\$)	927,91	848,29

Fonte: Autor (2022)

Com os dois modelos de dimensionamento feitos, foi possível analisar que no modelo otimizado foram gerados áreas de aço menores que o modelo convencional e uma altura maior. A base ótima foi menor que a do modelo convencional. Além disso, o custo de execução de uma viga otimizada foi de R\$ 79,62 mais barato, gerando uma economia de 8,58% para uma viga.

PROBLEMA 4: Dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal e verificação da deformação excessiva

Para o Problema 4, os pontos ótimos foram iguais aos do problema 3, entretanto, houve o acréscimo da verificação da flecha. Na Tabela 8, são mostrados os dados comparativos entre o modelo convencional de dimensionamento e o modelo utilizando otimização.

Tabela 9: Comparação entre os modelos de dimensionamento (Problema 4, Caso 2)

Dimensionamento		
Parâmetros	Convencional	Otimizado
bw (cm)	20	12
h (cm)	50	66,96
L (cm)	400	400
V (cm³)	400000	321408
As (cm²)	6,14	4,41
Asw/s (cm²/m)	4,24	3,74
Custo (R\$)	927,91	848,29
Flecha (cm)	0,011	0,00597

Fonte: Autor (2022)

Com os dois modelos prontos e os dados mostrados na Tabela 8, ambos estão dentro dos limites de flecha máxima, que é de 1,6 cm, entretanto o modelo otimizado garante uma flecha menor e mais segura se comparada ao modelo convencional.

10 CONCLUSÕES

Diante do que foi exposto anteriormente, o dimensionamento otimizado de vigas em concreto armado pode ser mais vantajoso que o dimensionamento convencional visto que houve a redução dos custos para os quatro problemas em estudo. Essa redução pode acarretar em uma grande economia para um projeto completo, como a construção de edificações em geral. Sendo assim, uma das conclusões desse trabalho é a eficiência do dimensionamento otimizado na redução de custos de execução de vigas e no atendimento dos parâmetros de segurança.

Além disso, o dimensionamento otimizado apresentou uma redução no volume de concreto para os quatro problemas dos dois casos, sendo o principal fator da redução dos custos. Em comparação com o dimensionamento convencional, para os problemas 1 e 3 do Caso 1, houve uma redução da área de aço e um aumento da área de fôrma; já para o problema 2, houve um aumento da área de aço frente ao dimensionamento convencional e uma redução da área de fôrma, além da altura ótima encontrada pelo algoritmo ter sido próxima aos 50 cm do dimensionamento convencional.

Já para o Caso 2, nos problemas 1 e 2, houve um aumento da área de aço no dimensionamento otimizado, apesar que no Problema 1 as áreas de aço ficaram bem próximas. Além disso, nesses dois problemas houve uma diminuição da área de fôrma, além de uma altura ótima próxima aos 50 cm do dimensionamento convencional. Já no problema 3, ocorreu uma diminuição das áreas de aço longitudinal e transversal e um aumento significativo da área de fôrma.

Pode-se concluir também que no Problema 4, os dois modelos de dimensionamento se mostraram seguros quanto às flechas, entretanto o dimensionamento otimizado gerou uma flecha menor, sendo ainda mais seguro que o dimensionamento convencional. Dessa forma, comprova-se a eficiência da análise matemática através de ferramentas computacionais que se aplicadas no mercado de trabalho, podem reduzir os custos de projeto e execução.

Como sugestões de trabalhos futuros, vale o destaque como:

- Inclusão da armadura de pele nos cálculos;
- Desenvolvimento de algoritmos para o dimensionamento otimizado completo de uma estrutura;

O autor espera ter deixado como contribuição, através deste trabalho, motivação para um maior estudo da otimização estrutural no Campus de São Cristóvão da Universidade Federal de Sergipe.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, Jessyca Pricylla De Almeida. **Otimização de lajes nervuradas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal De Pernambuco, Caruaru, 2018.
- ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 4 ed. Rio Grande do Sul: Dunas, v. 1. 2014.
- ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 4 ed. Rio Grande do Sul: Dunas, v. 2. 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7480. **Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado**. Rio de Janeiro, 2007.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120. **Ações para cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8953. **Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência**. Rio de Janeiro, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118. **Projeto de estruturas de concreto – procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- AZEVEDO, Álvaro Ferreira Marques. **Otimização de estruturas com comportamento linear e não linear**. 1994. Dissertação (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade do Porto, Porto, 1994.
- BOSCARDIN, Juliana Triches. **Otimização de pórticos planos em concreto armado considerando restrições de cardinalidade**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2017.
- BRITO, Jherbyson Williams Silva. **Otimização de estrutura de concreto armado submetida à excitação do vento**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 2021.
- CARVALHO, R.C.; FIGUEIREDO, J.R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118:2014**. 4. Ed. São Carlos: Edufscar, 2014.
- CAVALCANTE, Ricardo Nícollas De Andrade. **Otimização da estrutura de contraventamento de edifícios em concreto armado formada por pórticos planos**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal Do Ceará, Fortaleza, 2019.
- CORREIA, Rubens Silva. **Otimização de vigas de concreto armado, utilizando a ferramenta solver**. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil). Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2016.
- CORREIA, R. S.; BONO, G. F. F.; BONO, G. Otimização de vigas de concreto armado com seção T utilizando algoritmos evolucionários, **Mecânica computacional**, Argentina, v.35, p. 1665-1.681, 7-10 2017.

FORSELL, C. Ekonomioch byggnadsvasen. **Sunt Fornoft**, p. 74–77, 1924.

HUPPES, Fábio Augusto Henkes. **Otimização estrutural de edificações em concreto armado com o emprego dos softwares Matlab e Robot**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade De Passo Fundo, Passo Fundo, 2021.

KABALA, R. E. Design of minimal- weight structures given reliability and cost. **J. Aerospace Sciences**, v. 29, p. 355–356, 1962.

PINHEIRO, Libânio Miranda; CATOIA, Bruna; CATOIA, Thiago. **TABELAS DE VIGAS: Deslocamentos e Momentos de Engastamento Perfeito**. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2010.

RAO, S. S. **Engineering optimization: Theory and Praticce**. 4. Ed. New Jersey: Jonh Wiley & Sons, 2009.

SALLES, H.S.; LOMEU, P.F.S.; PETERS, F.C.; MANSUR, W.J. **Otimização de um pórtico tridimensional de concreto armado**. Pesquisa e ensino em ciências exatas e da natureza, Cajazeiras-PB, 2 (edição especial), p. 6-14, 2018.

SILVA, Marcelo Ferreira da. **Estratégias de aproximação para a otimização estrutural**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

SILVA, Paula Mayer Dos Santos. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado de acordo com a NBR 6118:2014**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal Do Espírito Santo, Vitória, 2017.

SPAZZAN, Aline Alves. **Otimização de vigas retangulares de concreto armado**. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2018.

SWITSKY, H. Minimum weight with structural reliability. **J. of Aircraft**, v. 2, p. 228–232, 1965.

VALENTE, Elizabeth Christine Marins. **Otimização em problemas de engenharia civil**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade do Porto, Porto, 2020.

VANDERPLAATS, G. Structural optimization-past, present, and future. **AIAA**, v. 20, n. 7, p. 992–1000, 1982.