UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Teoria de Regularidade para soluções de Equações Elípticas Não-Locais

Dissertação de Mestrado

Aelson Oliveira Sobral

DMA

São Cristóvão – Sergipe

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Aelson Oliveira Sobral

# Teoria de Regularidade para soluções de Equações Elípticas Não-Locais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Disson Soares dos Prazeres

São Cristóvão – Sergipe

2020

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL**
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Sobral, Aelson Oliveira
S677t Teoria de regularidade para soluções de equações elípticas não-locais / Aelson Oliveira Sobral ; orientador Disson Soares dos Prazeres. – São Cristóvão, 2020.
161 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2020.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Equações diferenciais não lineares. I. Prazeres, Disson Soares dos, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA


*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

# Teoria de Regularidade para soluções de Equações Elípticas Não-Locais

*por*

*Aelson Oliveira Sobral*

Aprovada pela banca examinadora:

Disson Soares dos Prazeres

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres - UFS
Orientador

José Miguel Urbano

Prof. Dr. José Miguel Urbano - UC
Primeiro Examinador

Damião Junio G. Araujo

Prof. Dr. Damião Junio Goncalves Araujo - UFPB
Segundo Examinador

José Anderson V. Cardoso

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Terceiro Examinador

São Cristóvão, 23 de Julho de 2020


Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

*Dedicado à Ires.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e pela força que me foi dado para que eu pudesse concluir este Mestrado.

Aos meus pais Nelson, Nágia, meus irmãos Nágila e Wictor por todo apoio durante todos estes anos.

A minha namorada Ires, por todo incentivo e carinho desde a graduação até o momento, que me ajudou tanto nos estudos quanto na vida.

Aos meus bons companheiros que me fizeram com que o período do mestrado fosse mais divertido: Thyago Rosa, Thiago Dantas, Thiago Guimarães, Antônio, Fernando, Pablo, Ian, Ricardo, Claudemir, Ginaldo, André e Marcos Gabriel.

A todos os professores que contribuíram de alguma forma para minha formação acadêmica: José Anderson, Marcelo, Bruno, Disson, Almir, Wilberclay, Zaqueu e Maria.

Ao meu orientador/amigo Disson por todos os ensinamentos acadêmicos e pessoais, por toda a paciência desde a graduação e por me ensinar como podemos nos divertir estudando matemática.

Aos professores, Damião Júnior, José Anderson e José Miguel Urbano pela disponibilidade para participar da banca e por todos os comentários sobre o trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Se não puder se destacar pelo talento, vença pelo esforço.*
*(Dave Weinbaum)*

# Resumo

Nesta dissertação, nosso objetivo é apresentar uma breve introdução à Teoria de Regularidade para soluções de equações Elípticas Não-Locais. O trabalho está dividido em três capítulos onde dissertamos sobre três grandes artigos de Caffarelli e Silvestre. A ideia é apresentar a versão Não-Local da teoria existente para operadores Uniformemente Elípticos e traz importantes resultados como uma estimativa ABP, um princípio de comparação, estimativas Hölder $C^{\alpha}$ e $C^{1,\alpha}$, resultados de regularidade por aproximação e uma versão do teorema de Evans-Krylov para soluções de uma equação Íntegro-Diferencial cujo operador associado é côncavo.

**Palavras-chave**: Equação Não-Local. Teoria de Regularidade.

# Abstract

In this dissertation, our goal is to present a brief introduction to the regularity theory for solution of Nonlocal Elliptic equations. The work is divided in three chapters where we discuss three big papers from Caffarelli and Silvestre. The ideia is to present the Nonlocal version of the existing theory to Uniformly Elliptic operators and we bring important results like an ABP estimate, a comparison principle, $C^{\alpha}$ and $C^{1,\alpha}$ Hölder estimates, regularity results by approximation and a version of the Evans-Krylov theorem for solutions of an Integro-Differential equation for which the associated operator is concave.

**Keywords**: Nonlocal Equation. Regularity theory.

# Sumário

# Introdução

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma relação entre os valores de uma função desconhecida e suas derivadas parciais de diferentes ordens. Dentre os motivos pelos quais estuda-se esse ramo da Análise Matemática, pode-se destacar a relação existente entre soluções destas equações e modelagem de fenômenos reais, o que desempenha importante papel em termos de simulações computacionais. Um dos exemplos mais fascinantes de EDP é Equação de Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} u = 0, \tag{1}$$

cujo modelo descreve desde concentrações químicas a potenciais eletrostáticos. Outro exemplo tão importante quanto que é dado por

$$a_{ij}(x)\partial_{ij} u = f, \tag{2}$$

onde a função $w$, neste caso, descreve fenômenos em meios heterogêneos submetidos a forças externas. Para ser mais rigoroso matematicamente, de acordo com (EVANS, 1998) , uma EDP de ordem $k$ é uma expressão da forma

$$\mathcal{F}\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x\right) = 0 \quad \text{para x} \in U, \tag{3}$$

onde

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

é um funcional dado e $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função desconhecida. Esta escrita é importante para podermos classificar as equações a depender das hipóteses estruturais impostas sobre $\mathcal{F}$, o que nos fornece que tipo de propriedades devemos procurar ou até mesmo o que podemos esperar das soluções destas equações. Uma das hipóteses amplamente estudada é a de Elipticidade Uniforme, a qual encobre problemas do tipo (1, 2)(Ver (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995)).

Os modelos da forma (3) possuem uma característica particular. Para podermos avaliar a equação em um ponto, é necessário sabermos apenas o comportamento local da função naquele ponto, isto é, numa vizinhança bem pequena. Paralelamente a isto, existem modelos onde o oposto acontece, ou seja, é necessário que saibamos um comportamento global para avaliarmos a equação em determinado ponto, o que nomeia esta classe de problemas por Não-Locais. O representante canônico está relacionado com a tentativa de obter potências fracionárias de (1) e é dado por

$$(-\Delta)^{\sigma/2} u(x) = \frac{C(n,\sigma)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(2u(x) - u(x+y) - u(x-y))}{|y|^{n+\sigma}} dy, \tag{4}$$

o operador acima é denominado por Laplaciano Fracionário de ordem $\sigma \in (0, 2)$.
A motivação em se estudar equações não-locais é novamente as aplicações ao mundo real. Na

verdade, o que acontece é que muitas vezes estes problemas modelam de uma melhor maneira certos fenômenos em relação àqueles, como acontece na área de Processamento de Imagens para detecção de contornos e na área de Física Quântica com o movimento Browniano. Em especial, o operador (4) pode surgir na área matemática de Finanças sobre a consideração de ser um processo aleatório que permite grandes saltos arbitrariamente, algo bastante natural se pensarmos nos preços de ações.

Para entender isto melhor, digamos que o movimento em uma certa região $\Omega$ seja determinado randomicamente por uma certa probabilidade. Além disso, toda vez que saímos pela primeira vez através de um salto para fora da região $\Omega$ para um ponto $y \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ ganhamos um total de $u_0(y)$ em moedas. Com isso, se $u(x)$ determina a quantidade de moedas que esperamos ganhar, então a prescrição de seu comportamento é determinada por resolver a seguinte equação

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\sigma/2} u(x) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = u_0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

ver (BUCUR; VALDINOCI, 2016) para uma modelagem precisa.

O surgimento de Operadores Não-Locais está também intimamente relacionado com processos estocásticos com saltos como geradores infinitesimais de processos de Lévy (ver (APPLEBAUM, 2009; ROS-OTON, 2015; OTON, 2014)). Estes generalizam o conceito de movimento browniano onde a condição da continuidade sobre o movimento é relaxada. Para ser mais preciso, pela Fórmula de Lévy-Khintchine (ver (BERTOIN, 1996)), o gerador infinitesimal de qualquer processo de Lévy é um operador da forma

$$\mathcal{H}u(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_i b_i \partial_i u + \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(x+y) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathcal{X}_{B_1}(y)\big)\, d\nu(y),$$

onde $\nu$ é uma medida (chamada medida de Lévy) que satisfaz a propriedade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min\left(1, |y|^2\right) d\nu(y) < \infty. \tag{5}$$

Se negligenciarmos a parte local na expressão em $\mathcal{H}u(x)$ o operador se torna

$$L_\mu u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathcal{X}_{B_1}(y)) d\nu(y), \tag{6}$$

onde a indexação é feita para ressaltar a importância na definição do operador. A expressão em $L_\mu$ acima inspira, por sua vez, classes de operadores mais gerais que possuem certa correlação. Na Teoria dos jogos, por exemplo, quando é permitido ao jogados optar por diferentes estratégias em cada passo, então uma família $\{\nu_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ de medidas aparece, onde $\mathcal{B}$ pode ser um conjunto de índices arbitrários. A fim de maximizar o ganho do jogador, o seguinte operador não-linear surge

$$\mathcal{I}u(x) = \sup_{\beta \in \mathcal{B}} L_{\nu_\beta} u(x).$$

Quando é permitida a entrada de mais jogadores, equações mais complicadas aparecem, como por exemplo

$$\mathcal{I}u(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \sup_{\beta \in \mathcal{B}} L_{\nu_{\alpha\beta}} u(x), \tag{7}$$

onde os conjuntos de parâmetros $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ pode ser considerados arbitrários. Estes modelos são chamados na literatura de Equações de Isaacs e Bellman.
Outro aspecto interessante em se estudar equações não-locais é a possibilidade de se recuperar certos problemas locais de segunda ordem como limite, o que conecta ainda mais as duas teorias e motiva o estudo deste trabalho. O exemplo primordial disto é que

$$-(-\Delta)^{\sigma/2} u(x) \longrightarrow \Delta u(x), \quad \text{quando } \sigma \to 2, \tag{8}$$

que mostra a íntima relação entre os modelos locais e não-locais. Mostramos na seção subsequente, em (22), como isto é feito e ainda de que maneira podemos recuperar uma grande classe de operadores de segunda ordem. Além disso, é possível ainda recuperar estimativas para equações de segunda ordem, como será visto em (1.3).

Neste presente trabalho iremos considerar três artigos de Caffarelli e Silvestre, onde apresentaremos de forma detalhada toda a teoria exposta nesses artigos e, por vezes, comparando aos resultados existentes para equações de segunda ordem que podem ser encontrados no clássico livro (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995). A ideia dos autores nestes trabalhos foi estender a teoria existente para equações de segunda ordem, a qual está muito bem estabelecida, para equações não-locais de tal forma que os métodos e as estimativas atinjam uniformemente os problemas de segunda ordem a medida que a ordem da equação tende para 2.

Neste sentido, dedicamos o Capítulo 0 para as preliminares. Dissertamos sobre aspectos gerais da teoria, como o tipo de solução que iremos considerar, a saber, a solução no sentido da viscosidade. Discutimos também sobre os operadores extremais e as classes de Kernels que iremos considerar ao longo do trabalho. Por fim, dedicamos a última seção para mostrar como pode-se obter equações de segunda ordem como limites de operadores uniformemente elípticos. Esta seção é particularmente importante para entender a conexão entre operadores Não-Locais e de segunda ordem locais.

O Capítulo 1 é destinado ao desenvolvimento da teoria exposta em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009). O principal interesse neste artigo é o estudo da regularidade de soluções da equação

$$\mathcal{I}u(x) = 0, \tag{9}$$

onde $\mathcal{I}$ é um operador Não-Local invariante por translação, ou seja, possui coeficientes constantes, e a única hipótese estrutural imposta é a de Elipticidade Uniforme (1.1), que pode ser pensada como uma espécie de comparação com Laplaciano Fracionário (7), a saber,

$$M^{-}_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \leq \mathcal{I}u(x) - \mathcal{I}v(x) \leq M^{+}_{\mathcal{L}}(u-v)(x),$$

onde $M^+_{\mathcal{L}}$ e $M^-_{\mathcal{L}}$ são as versões não-local dos operadores extremais de Pucci. Esta condição mostra-se suficiente para obtermos resultados de estabilidade como, por exemplo, a passagem ao limite. Impondo uma condição minimal de elipticidade sobre a classe de operadores é possível obter um Princípio de Comparação e com isso a questão de existência de soluções fica quase determinada. A seguir apresentamos uma versão não-local da estimativa Aleksandrov-Bakel'man-Pucci(ABP) que desempenha um papel importante na teoria de regularidade, pois permite a passagem de estimativas em medida para estimativas pontuais. Isto fornece um controle apropriado da oscilação da função e assim pode-se obter a Hölder continuidade das soluções. Por fim, adicionando uma regularidade extra à classe de Kernels dos operadores em questão prova-se uma estimativa $C^{1,\alpha}$.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados expostos em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2011b). Neste artigo os autores estendem a teoria de regularidade em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009) para equações com operadores não-necessariamente invariantes por translação, ou seja, que possuem coeficientes. O foco é estudar a regularidade de soluções para equações do tipo

$$\mathcal{I}(u, x) = f, \tag{10}$$

onde $\mathcal{I}$ é um operador Não-Local Uniformemente Elíptico com coeficientes. A heurística do problema em questão é clássica, se uma equação está próxima, em um certo sentido, de outra que possui soluções com certa regularidade, então é esperado que as soluções da primeira também a herdem. Neste sentido, prova-se um resultado de regularidade por aproximação extremamente geral utilizando um argumento de compacidade para que possamos aplicar nos mais diversificados contextos. Para isto definimos uma maneira apropriada de medir proximidade entre operadores não-locais que reproduz a oscilação para operadores uniformemente elípticos de segunda ordem. Esta ferramenta, por sua vez, nos permite fornecer uma melhoria substancial para os resultados de estabilidade apresentados no primeiro capítulo para as equações em questão e assim garantir o ambiente apropriado para o resultado de regularidade por aproximação. Como aplicação apresentamos a versão não-local do Cordes-Niremberg, assim como um resultado de regularidade $C^{2,\alpha}$ para equações próximas do Fracionário Laplaciano.

Para finalizar o trabalho, no Capítulo 3 apresentamos o artigo (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2011a) no qual os autores provam uma versão Não-Local do Teorema de Evans-Krylov. Neste artigo é considerada uma classe de equações íntegro-diferenciais do tipo Bellman e é provado que soluções da equação

$$\inf_{a\in\mathcal{A}} L_a u(x) = \inf_{a\in\mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K_a(y) dy = 0, \tag{11}$$

são de classe $C^{\sigma+\alpha}$ com uma estimativa, onde $\sigma$ é a ordem da equação e $L_a \in \mathcal{L}_2$ para todo $a$ em um conjunto de parâmetros arbitrário $\mathcal{A}$, sendo $\mathcal{L}_2$ é uma classe de kernels definida em (21). Para isto, a regularidade extra sobre os Kernels e o fato de o operador em questão ser côncavo desempenha papel fundamental para provar que os operadores extremais são limitados. Esta informação permite criar um processo iterativo para que possamos transmitir tal informação de volta para a solução da equação em questão, e por fim garantir que $(-\Delta)^{\sigma/2}u \in C^{\alpha}$ e uma estimativa na norma $C^{\alpha}$. Consequentemente, através de resultados clássicos, teremos que $u \in C^{\sigma,\alpha}$.

# Preliminares

Neste capítulo iremos tratar de algumas definições e resultados que serão de grande importância em todo o decorrer do trabalho. Dissertamos sobre a solução no sentido da viscosidade, os operadores extremais e por fim mostramos como obter operadores de segunda ordem como limite de operadores não-locais.

## Sobre a definição de solução no sentido da viscosidade

Os geradores do processos de Levy mostrados são extremamente gerais, como podemos claramente ver em (6). Em termos de aplicações reais, iremos nos restringir ao caso em que a medida $\mu$ é dada por um Kernel simétrico não-negativo $K$, i.e, $K(y) = K(-y)$, onde

$$\int_\Omega f(y)d\mu(y) = \int_\Omega f(y)K(y)dy.$$

É importante lembrar que não é necessário subtrair o termo $-\nabla u(x) \cdot y\mathcal{X}_{B_1}$ se pensarmos no operador no sentido $P.V$, i.e, do valor principal em (6). Por outro lado, como o Kernel $K$ é simétrico, podemos reescrever o operador na seguinte maneira

$$Lu(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy.$$

Para entender melhor sobre estas questões, indicamos fortemente ((NEZZA; PALATUCCI; VALDINOCI, 2012), seção 3).

Para não tornar a notação carregada, escrevemos

$$\delta(u, x, y) := u(x+y) + u(x-y) - 2u(x).$$

Por simplificação, podemos omitir o $\frac{1}{2}$ na definição do operador $L$ acima e com isto a expressão se torna

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y)K(y)dy. \tag{12}$$

É importante lembrar que a condição (5) se escreve na forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min\left(1, |y|^2\right) K(y)dy < \infty, \tag{13}$$

ou equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y)dy < \infty. \tag{14}$$

Para clarificar essa condição, se pensarmos nos operadores do tipo Isaacs-Bellman da forma

$$\mathcal{I}u(x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \sup_{\beta\in\mathcal{B}} L_{\alpha\beta}u(x),$$

onde cada $L_{\alpha\beta}u(x)$ é um operador linear da forma (12) com um Kernel genérico $K_{\alpha\beta}$ que satisfaz a condição (13). Para que o operador fique pelo menos bem definido, é necessário que a condição (13) seja uniformemente satisfeita por todos $\alpha$ e $\beta$ no sentido de que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min\left(1, |y|^2\right) \sup_{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}} K_{\alpha\beta}(y)dy < \infty. \tag{15}$$

Isto ficará mais claro após fornecermos a definição de Elipticidade uniforme na próxima seção. Se considerarmos um operador $\mathcal{I}$ uniformemente elíptico com respeito a alguma classe $\mathcal{L}$ e quisermos avaliá-lo em $u$ num ponto $x$, precisamos que $u$ seja pelo menos pontualmente $C^{1,1}$ no seguinte sentido.

**Definição 0.1.** *Uma função $\varphi$ é dita ser $C^{1,1}$ no ponto $x$, e escrevemos $\varphi \in C^{1,1}(x)$, se existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e um número $M > 0$ tal que*

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y| \leq M|y|^2$$

*para $|y|$ pequeno o suficiente. Dizemos que uma função é $C^{1,1}$ num conjunto $\Omega$ se a definição acima vale para todo $x \in \Omega$ com uma constante $M$ uniforme.*

Dada a íntima relação entre operadores não-locais e de segunda ordem, é natural que o tipo de solução a ser considerado seja semelhante. Neste sentido, temos a seguinte definição.

**Definição 0.2.** *Uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semicontínua superiormente em $\bar{\Omega}$ é dita ser uma subsolução (supersolução) para $\mathcal{I}u = f$, e escrevemos $\mathcal{I}u \geq f$ ($\mathcal{I}u \leq f$) se o seguinte acontece:*

- *$x$ é um ponto de $\Omega$.*
- *$N$ é uma vizinhança de $x$ em $\Omega$.*
- *$\varphi$ é alguma função $C^2$ em $N$.*
- *$\varphi(x) = u(x)$.*
- *$\varphi(y) > u(y)(\varphi(y) < u(y))$, para todo $y \in N\backslash\{x\}$.*

*Então se definirmos*

$$v = \begin{cases} \varphi & \text{em } N \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n\backslash N, \end{cases}$$

*devemos ter $\mathcal{I}v(x) \geq f(x)(\mathcal{I}v(x)) \leq f(x)$ no sentido clássico.*

Na literatura de EDP, é comum se dizer que $\varphi \in C^2(N)$ toca $u$ por cima em $x$ numa vizinhança $N$ de $x$, equivalentemente aos itens da definição de solução no sentido da viscosidade local. É importante comentar que eventualmente o operador $\mathcal{I}$ pode ter coeficientes. A definição de solução no sentido da viscosidade, entretanto, é a mesma; basta trocar $\mathcal{I}u$ por $\mathcal{I}(u, x)$. Este tipo de solução irá ser adotada simplesmente porque a classe de operadores satisfazem uma condição de elipticidade uniforme garante que este tipo de solução está bem definida. Para melhores detalhes sobre este tipo de solução, recomendamos ao leitor (KOIKE, 2004) e (BARLES; IMBERT, 2008).

Por fim, vale ressaltar que embora utilizemos a nomenclatura Não-Local indistintamente ao longo do trabalho, sua definição precisa será fornecida precisamente no Capítulo 2; sua principal característica é que permitem algum tipo de crescimento no infinito. Com isso, seria natural pedir que $u \in C^{1,1}(x) \cap L^1(\mathbb{R}^n, w)$, onde $w$ é um peso que controla o crescimento dos Kernels no infinito. Naturalmente, isto também se aplica a operadores Íntegro-Diferenciais do tipo que foi discutido anteriormente.

## Operadores Extremais

Nesta seção, iremos apresentar o conceito de operador extremal. Estes fazem papel análogo aos Pucci para operadores uniformemente elípticos do caso local, onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^+(M,\lambda,\Lambda) &= \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i = \sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} Tr(AM) \\
\mathcal{M}^-(M,\lambda,\Lambda) &= \Lambda \sum_{e_i<0} e_i + \lambda \sum_{e_i>0} e_i = \inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} Tr(AM),
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}_{\lambda,*}$ é a classe de matrizes $A \in \mathcal{S}^n$ que satisfazem $\lambda|y|^2 \leq Ay\cdot y \leq \Lambda|y|^2$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Esta maneira de definir os Pucci fornece uma ideia de como podemos nos basear para estabelecer os operadores extremais não locais. Dessa forma, dada uma classe de operadores (ou kernels) $\mathcal{L}$, definimos da seguinte forma

$$M^+_{\mathcal{L}}u(x) = \sup_{L\in\mathcal{L}} Lu(x), \tag{16}$$

$$M^-_{\mathcal{L}}u(x) = \inf_{L\in\mathcal{L}} Lu(x). \tag{17}$$

onde $\mathcal{L}$ é uma classe de operadores lineares $L$ cuja expressão é dada por (12). Usualmente chamamos $M^+_{\mathcal{L}}$ e $M^-_{\mathcal{L}}$ os operadores maximal e minimal de Pucci com respeito à classe $\mathcal{L}$. Por exemplo, uma classe importante que será estudada a frente é a classe $\mathcal{L}_0$ de operadores $L$ da forma (12) cujos Kernels associados satisfazem a seguinte desigualdade

$$(2-\sigma)\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \leq K(y) \leq (2-\sigma)\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, \quad \text{onde} \quad 0<\sigma<2. \tag{18}$$

Para essa classe de operadores em específico, podemos representar os operadores maximais de uma maneira mais conveniente, a saber

$$M^+_{\mathcal{L}_0}u(x) = (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \tag{19}$$

$$M^-_{\mathcal{L}_0}u(x) = (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\lambda\delta^+(u,x,y)-\Lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy, \tag{20}$$

onde $\delta^+(u,x,y)$ e $\delta^-(u,x,y)$ são, respectivamente, as partes positiva e negativa de $\delta(u,x,y)$. Mostremos esta igualdade para (19) (a demonstração para (20) é análoga). Mostraremos, primeiramente, que

$$M^+_{\mathcal{L}_0}u(x) \le (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Lambda\delta^+(u,x,y)-\lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Lembre que $\delta(u,x,y) = \delta^+(u,x,y) - \delta^-(u,x,y)$. Com isto, usando (18) temos

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,x,y)K(y)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\delta^+(u,x,y)K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n}\delta^-(u,x,y)K(y)dy\\
&\le (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\delta^+(u,x,y)\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}dy - (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\delta^-(u,x,y)\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}dy\\
&= (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Lambda\delta^+(u,x,y)-\lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy,
\end{aligned}$$

para todo $L \in \mathcal{L}_0$ e portanto a desigualdade segue. Para mostrar o outro lado da desigualdade, defina o seguinte Kernel

$$K(y) = (2-\sigma)\left(\mathcal{X}_A\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} + \mathcal{X}_B\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}\right),$$

onde $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \delta(u,x,y) \ge 0\}$ e $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \delta(u,x,y) < 0\}$. Assim, este Kernel satisfaz a condição (18) e com isto

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,x,y)K(y)dy\\
&= (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}(\delta^+(u,x,y)-\delta^-(u,x,y))\left(\mathcal{X}_A\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} + \mathcal{X}_B\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}\right)dy\\
&= (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Lambda\delta^+(u,x,y)-\lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy,
\end{aligned}$$

daí segue a outra desigualdade. Com isso mostramos (19) e de maneira análoga mostramos (20). Ao longo deste trabalho iremos considerar outras classes de kernels que são extremamente importantes para a Teoria de Regularidade proposta em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009),(CAFFARELLI; SILVESTRE, 2011b),(CAFFARELLI; SILVESTRE, 2011a). Por exemplo, temos a classe $\mathcal{L}_1$ de kernels em $\mathcal{L}_0$ tal que vale

$$|\nabla K(y)| \le C|y|^{-n-\sigma-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n\backslash\{0\},$$

iremos considerá-la para a Teoria de regularidade por aproximação do Capítulo 2. No Capítulo 3 iremos considerar uma classe menor de kernels em $\mathcal{L}_1$ que satisfazem

$$|D^2K(y)| \leq C|y|^{-n-\sigma-2} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \tag{21}$$

denominaremos tal classe por $\mathcal{L}_2$. A ideia por trás em trabalhar com tais operadores é simplesmente porque podemos substituir qualquer outra equação em particular através de certas desigualdades, a saber,

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \leq Iu(x) - Iv(x) \leq M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x),$$

desde que $I(u,x)$ e $I(v,x)$($I$ pode ou não ter coeficientes) estejam bem definidos. Esta é uma desigualdade que envolve a definição de elipticidade que veremos posteriormente.

# Equações de segunda ordem como limites de operadores Elípticos

Nesta seção traremos alguns exemplos de como podemos obter Equações de Segunda Ordem como limites de equações envolvendo um operador não-local que podem ser encontrados em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009),(CAFFARELLI; SILVESTRE, 2011b),(CAFFARELLI; CHARRO, 2015). Vamos mostrar que podemos recuperar qualquer equação da forma $F(D^2u)$ do tipo Isaacs-Bellman, e a Equação de Monge-Ampère através de limites de operadores não-locais. Primeiro veremos a mais clássica de todas, que mostra a relação fundamental entre dois operadores que são extremamente importantes. Assim, temos que Se $u \in C^2(x) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$(-\Delta^\sigma)\, u(x) \to -\Delta u(x) \quad \text{quando} \quad \sigma \to 2. \tag{22}$$

Lembre que

$$\begin{aligned}
-\Delta^\sigma u(x) &= \frac{C(n,\sigma)}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2u(x)-u(x+y)-u(x-y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \frac{C(n,\sigma)}{2}\int_{B_\delta}\frac{2u(x)-u(x+y)-u(x-y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\quad+\frac{C(n,\sigma)}{2}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_\delta}\frac{2u(x)-u(x+y)-u(x-y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \frac{C(n,\sigma)}{2}(I+II),
\end{aligned}$$

onde a constante $C(n,\sigma)$ é dada por

$$C(n,\sigma) = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-\cos(\xi_1)}{|y|^{n+\sigma}}d\xi\right)^{-1} = \frac{\sigma(2-\sigma)}{4A(n,\sigma)B(\sigma)}.$$

A análise assintótica destas constantes podem ser encontradas com grandes detalhes em ((NEZZA; PALATUCCI; VALDINOCI, 2012), seção 4), e é mostrado que $\lim\limits_{\sigma\to 2} A(n,\sigma) < +\infty$ e $\lim_{\sigma\to 2} B(\sigma) = 1/2$.

Vamos estimar a integral na expressão em $II$. Temos que

$$
\begin{aligned}
|II| &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} \frac{|2u(x)-u(x+y)-u(x-y)|}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\leq 4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= 4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\delta^\infty \int_{\partial B_r} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dS(y)dr \\
&= 4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\delta^\infty r^{-n-\sigma}|\partial B_r|dr \\
&= 4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\delta^\infty r^{-n-\sigma}r^{n-1}|\partial B_1|dr \\
&= 4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\partial B_1| \int_\delta^\infty r^{-1-\sigma}dr \\
&= 4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\partial B_1|\frac{\delta^{-\sigma}}{\sigma}
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{C(n,\sigma)}{2}II &\leq \frac{C(n,\sigma)}{2}4||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\partial B_1|\frac{\delta^{-\sigma}}{\sigma} \\
&= \frac{1}{2}(2-\sigma)\left[\frac{\sigma}{A(n,\sigma)B(\sigma)}||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\partial B_1|\frac{\delta^{-\sigma}}{\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{2}(2-\sigma)f(\sigma) \to 0
\end{aligned}
$$

quando $\sigma \to 2$ pois a função $f(\sigma)$ é limitada. Para estimar $I$, vamos usar a expansão de Taylor ao redor de $x$,

$$
\begin{aligned}
u(x+y) &= u(x) + \langle \nabla u(x), y\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle D^2u(x)y, y\right\rangle + R(y) \\
u(x-y) &= u(x) - \langle \nabla u(x), y\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle D^2u(x)y, y\right\rangle + R(y),
\end{aligned}
$$

com $R(y)$ satisfazendo

$$\lim_{y\to 0}\frac{R(y)}{|y|^2} = 0,$$

o que pode ser visto como $|R(y)| \leq \epsilon |y|^2$ para $|y| \leq \delta$. Daí,

$$\begin{aligned} I &= \int_{B_\delta} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= -\int_{B_\delta} \frac{\left\langle D^2 u(x) y, y \right\rangle}{|y|^{n+\sigma}} dy + \int_{B_\delta} \frac{R(y)}{|y|^{n+\sigma}} dy. \end{aligned}$$

Para controlar a segunda integral, perceba que

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} \frac{R(y)}{|y|^{n+\sigma}} dy &\leq \epsilon \int_{B_\delta} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= \epsilon \int_0^\delta \int_{\partial B_r} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}} dS(y) dr \\ &= |\partial B_1| \epsilon \int_0^\delta \frac{r^2}{r^{n+\sigma}} r^{n-1} dr \\ &= |\partial B_1| \epsilon \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{2-\sigma}. \end{aligned}$$

Com isso

$$\frac{C(n,\sigma)}{2} \int_{B_\delta} \frac{R(y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq \frac{C(n,\sigma)}{2} |\partial B_1| \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \epsilon \longrightarrow 4n\epsilon,$$

onde usamos o fato de $C(n,\sigma)/(2-\sigma) \longrightarrow 4n/|\partial B_1|$ quando $\sigma \longrightarrow 2$, que pode ser encontrado em ((NEZZA; PALATUCCI; VALDINOCI, 2012), Seção 3, Corolário 4.2). Depois fazemos $\epsilon \longrightarrow 0$.

Agora vamos fazer algumas manipulações na primeira integral de $I$. Note que, fazendo $y = \delta z$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} \frac{\left\langle D^2 u(x) y, y \right\rangle}{|y|^{n+\sigma}} dy &= \delta^n \int_{B_1} \frac{\left\langle D^2 u(x) \delta z, \delta z \right\rangle}{|\delta z|^{n+\sigma}} dz \\ &= \delta^{2-\sigma} \int_{B_1} \frac{\left\langle D^2 u(x) z, z \right\rangle}{|z|^{n+\sigma}} dz. \end{aligned}$$

Fazendo novamente uma mudança de variável, observe que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \frac{\left\langle D^2 u(x) z, z \right\rangle}{|z|^{n+\sigma}} dz &= \int_0^1 \int_{\partial B_r} \frac{\left\langle D^2 u(x) z, z \right\rangle}{|z|^{n+\sigma}} dS(z) dr \\ &= \int_0^1 r^{n-1} \int_{\partial B_1} \frac{\left\langle D^2 u(x) ry, ry \right\rangle}{|ry|^{n+\sigma}} dS(y) dr \\ &= \int_0^1 r^{1-\sigma} \int_{\partial B_1} \left\langle D^2 u(x) y, y \right\rangle dS(y) dr \\ &= \left( \int_{\partial B_1} \left\langle D^2 u(x) y, y \right\rangle dS(y) \right) \left( \int_0^1 r^{1-\sigma} dr \right). \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^1 r^{1-\sigma} dr = \frac{1}{2-\sigma},$$

obtemos

$$\int_{B_\delta} \frac{\langle D^2u(x)y, y\rangle}{|y|^{n+\sigma}} dy = \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \int_{\partial B_1} \langle D^2u(x)y, y\rangle \, dS(y).$$

Pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1} \langle D^2u(x)z, z\rangle \, dS(z) &= \int_{B_1} \nabla \cdot (D^2u(x)z) dz \\
&= \int_{B_1} \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} \left( \sum_{j=1}^n \partial_{ij} u(x) z_j \right) dz \\
&= \int_{B_1} \sum_{i=1}^n \partial_{ij} u(x) dz \\
&= |B_1| \Delta u(x).
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$-\frac{C(n,\sigma)}{2} \int_{B_\delta} \frac{\langle D^2u(x)y, y\rangle}{|y|^{n+\sigma}} dy = -\frac{C(n,\sigma)}{2} \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} |B_1| \Delta u(x).$$

Finalmente, fazendo $\sigma \to 2$,

$$\frac{C(n,\sigma)}{2} \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} |B_1| \to 1,$$

como pode ser encontrado em ((NEZZA; PALATUCCI; VALDINOCI, 2012), Seção 3, Corolário 4.2), e assim a convergência desejada segue.

Aproveitando estes cálculos, se fizermos uma simples mudança de variável $Az = y$, sob as mesmas hipóteses sobre $u$, pode-se provar que

$$\lim_{\sigma \to 2} \frac{C(n,\sigma)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{\det(A)|A^{-1}y|^{n+\sigma}} dy = \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}(x), \tag{23}$$

onde $\{a_{ij}\}$ são as entradas de $AA^T$. Para entender como isso acontece, basta fazermos a mesma análise que foi feita para o Laplaciano Fracionário separando as integrais adequadamente. As mesmas convergências acontecem aqui, a diferença é na análise no termo da integral em $I$, que neste caso irá ser

$$\int_{B_\delta} \frac{\langle D^2u(x)y, y\rangle}{\det(A)|A^{-1}y|^{n+\sigma}} dy.$$

Para analisar isso, lembre que, como mostramos anteriormente,

$$\int_{B_\delta} \frac{\langle D^2u(x)y, y\rangle}{|y|^{n+\sigma}} dy = \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \int_{\partial B_1} \langle D^2u(x)y, y\rangle \, dS(y).$$

Utilizando esta observação acima e fazendo a mudança de variável $y = Az$ e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta} \frac{\left\langle D^2u(x)y, y\right\rangle}{\det(A)|A^{-1}y|^{n+\sigma}}dy &= \int_{B_\delta} \frac{\left\langle D^2u(x)Az, Az\right\rangle}{|z|^{n+\sigma}}dz \\
&= \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \int_{\partial B_1} \left\langle D^2u(x)Az, Az\right\rangle dS(z) \\
&= \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \int_{\partial B_1} \left\langle A^t D^2u(x)Az, z\right\rangle dS(z) \\
&= \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \int_{B_1} \nabla \cdot \left(A^t D^2u(x)Az\right) dS(z) \\
&= \frac{\delta^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)}|B_1| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u(x),
\end{aligned}$$

de onde segue (23).

Dessa maneira, se $F$ é um operador Uniformemente Elíptico do tipo Isaacs-Bellman que possui a forma

$$F(M) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \sup_{\beta\in\mathcal{B}} \left(\sum_{i,j} a_{ij}^{\alpha\beta} M_{ij} + b^{\alpha\beta}\right),$$

para alguma coleção $\{a_{ij}^{\alpha\beta}\}_{i,j} = A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^T$ e constantes $b^{\alpha\beta}$, com $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podem ser conjuntos arbitrários de parâmetros. Daí, por (23),

$$F(D^2u) = \lim_{\sigma\to 2}\left(\inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \sup_{\beta\in\mathcal{B}}\left(\frac{C(n,\sigma)}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{\det(A_{\alpha\beta})|A_{\alpha\beta}^{-1}z|^{n+\sigma}}dz + b^{\alpha\beta}\right)\right),$$

desde que possamos comutar a operação de limite com o ínfimo e supremo, o que pode ser garantido simplesmente pelo fato de $F$ ser um operador uniformemente Elíptico.
Podemos novamente aproveitar os cálculos feitos em (22) para obter

$$\lim_{\sigma\to 2} M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)} = \int_{\partial B_1} \Lambda \left\langle D^2u(x)y, y\right\rangle^+ - \lambda \left\langle D^2u(x)y, y\right\rangle^- dS(y), \tag{24}$$

onde $M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)}$ é o operador maximal referente à classe $\mathcal{L}_0$ que tem a forma

$$M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)} = (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Isto nos diz que $\lim_{\sigma\to 2} M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)}$ é um operador uniformemente elíptico da forma $F(D^2u)$, onde

$$F(A) := \int_{\partial B_1} \Lambda \langle Ay, y\rangle^+ - \lambda \langle Ay, y\rangle^- dS(y).$$

Naturalmente, pode-se comparar $F$ com o Pucci clássico $\mathcal{M}^+$, pois basta lembrar que como $\partial B_1$ é compacto, a função $\langle Ay, y\rangle$ assume máximo e mínimo em vetores $y_1, y_2$ que são autovetores associados a $A$ aos autovalores $e_1, e_2$ que (pode-se mostrar) são o maior e menor autovalor de $A$ respectivamente. Assim

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1} \Lambda \langle Ay, y\rangle^+ - \lambda \langle Ay, y\rangle^- \, dS(y) &\leq \Lambda|\partial B_1|e_1 - \lambda|\partial B_1|e_2 \\ &\leq \tilde{\Lambda}\sum_{e_i>0} e_i - \tilde{\lambda}\sum_{e_i<0} e_i \\ &= \mathcal{M}^+(A, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}).\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\lim_{\sigma\to 2} M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)} u(x) \leq \mathcal{M}^+(D^2u, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}). \tag{25}$$

Contas semelhantes podem ser feitas para

$$\lim_{\sigma\to 2} M^-_{\mathcal{L}_0(\sigma)},$$

onde $M^-_{\mathcal{L}_0(\sigma)}$ denota o operador minimal com respeito à classe $\mathcal{L}_0$.

Podemos ainda obter a equação de Monge-Ampère como limite de uma equação envolvendo um operador não-local. Se definirmos o seguinte operador

$$\mathcal{D}_{\frac{\sigma}{2}} u(x) = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|A^{-1}y|^{n+\sigma}} dy : A > 0, \det(A) = 1\right\}.$$

podemos obter

$$\lim_{\sigma\to 2}\left((2-\sigma)\mathcal{D}_{\frac{\sigma}{2}} u(x)\right) = \det(D^2u(x))^{1/n}.$$

Isto é feito em dois passos. Primeiro mostra-se que, sobre certas condições sobre $u$,

$$\lim_{\sigma\to 2}\left((2-\sigma)\mathcal{D}_{\frac{\sigma}{2}} u(x)\right) = \frac{\alpha_n}{2n}\inf\left\{Tr\left(AA^tD^2u(x)\right) : A > 0, \det(A) = 1\right\},$$

cujas contas podem ser encontradas no apêndice de (CAFFARELLI; CHARRO, 2015). Daí, usa-se um fato de Álgebra Linear que se $B$ é simétrica e positiva semi-definida então

$$n\det(B)^{1/n} = \inf\left\{Tr(AA^tB) : \det(A) = 1\right\},$$

cuja demonstração pode também ser encontrada no mesmo apêndice citado.

Estas considerações ratificam, mais uma vez, a importância de se estudar os mais variados tipos de equações não-locais, uma vez que é possível recuperar problemas locais através desses.

# 1

# Teoria de Regularidade para Equações Íntegro-diferenciais completamente não lineares

Neste capítulo estudaremos a regularidade de soluções de equações completamente não lineares do tipo

$$\mathcal{I}u(x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

onde $u$ é uma função limitada no $\mathbb{R}^n$, $\Omega$ é um aberto limitado e $\mathcal{I}$ é um operador uniformemente elíptico, de acordo com a definição 1.1 à frente, para uma certa classe $\mathcal{L}$ de Kernels que será descrita posteriormente. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados no artigo (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009) de Caffarelli e Silvestre.

A ideia dos autores foi se basear na teoria existente para equações de segunda ordem para desenvolver resultados similares para equações envolvendo operadores não-locais e por esta razão, muitas das técnicas apresentadas aqui relembram as clássicas. Além disso, para que a teoria apresentada aqui seja uma generalização de equações diferenciais elípticas de segunda ordem existe um problema a mais na obtenção dos resultados, que é sempre tentar manter as estimativas uniformes na ordem $\sigma$ da equações para que estes resultados continuem a reproduzir o caso local no limite.

Como estamos apenas interessados nos resultados que concernem sobre regularidade, nosso foco esteve em volta destes que são usados para tal propósito. Em suma, traremos os seguintes problemas:

1. Um princípio de Comparação para uma classe geral de Equações;
2. Uma versão não-local da estimativa Aleksandrov-Bakel'man-Pucci (ABP);
3. Estimativa Hölder para equações como Kernels comparáveis aos do Laplaciano Fracionário;
4. Estimativa $C^{1,\alpha}$ para uma classe de Equações com regularidade extra nos kernels acima.

Este Capítulo está dividido da seguinte maneira, primeiro dedicamos uma seção de preliminares, onde destacamos algumas definições que serão usadas e alguns resultados de estabilidade que não fazem menção diretamente aos nossos propósitos de regularidade. Na seguinte seção, sobre uma condição estrutural mínima na classe de operadores $\mathcal{L}$, apresentamos um princípio de comparação, o qual desempenha importante papel na existência de soluções. Na seção 3 desenvolvemos a estimativa ABP não-local. Este resultado é o mais delicado deste capítulo e é essencial para obtenção dos resultados de regularidade por ser a ponte entre estimativas pontuais e estimativas em medida. A seção 4 é dedicada a construção de uma função especial. Esta função será uma subsolução envolvendo o operador Minimal de pucci não-local que funcionará como uma barreira para as soluções de (1.1). Na seção 5 é onde obtemos a estimativa Hölder $C^\alpha$ usando a estimativa ABP. A função especial desempenha papel importante neste processo para forçar o toque da solução com seu conjunto de contato. Por fim, na seção 6, exigindo uma condição de integrabilidade extra sobre os Kernels, obtemos a estimativa $C^{1,\alpha}$ para soluções de (1.1).

## 1.1 Preliminares

Nesta seção iremos fornecer a definição de elipticidade que usaremos ao longo deste capítulo e mostraremos que operadores como em (7) satisfazem essa condição. Além disso, mostraremos algumas propriedade de estabilidade que esses operadores possuem.

### 1.1.1 Sobre a definição de Elipticidade Uniforme

Vamos fornecer a definição de Elipticidade que usaremos ao longo deste capítulo usando operadores extremais. Esta definição é inspirada na hipótese clássica de Elipticidade Uniforme para operadores locais e baseia-se em uma desigualdade envolvendo os 'maiores' e 'menores' operadores lineares sobre uma classe. Portanto, é demasiadamente importante saber quais serão os operadores lineares a ser considerados para definir esses operadores extremais. Levando isto em consideração, um operador $L$ linear Íntegro-Diferencial genérico terá a forma

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy,$$

para alguma função $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-negativa, que chamaremos de núcleo, que satisfaz a propriedade (13). Podemos ainda indexar o operador $L_K$ com seu núcleo $K$ para expressar a dependência na sua definição, porém isto torna a notação um pouco carregada e portanto não iremos fazer tal indexação. Esta opção de indexar, ou não, pode ser um preciosismo, uma vez que um kernel $K$ define um operador $L$ e um operador $L$ sempre está associado a um núcleo $K$. Tendo isto em consideração, temos a seguinte definição.

**Definição 1.1.** *Seja $\mathcal{L}$ uma classe de operadores lineares íntegro-diferenciais. Um operador $\mathcal{I}$ é dito ser uniformemente elíptico com respeito a uma classe $\mathcal{L}$ se possui as seguintes propriedades:*

- *Se $u$ é qualquer função limitada, $\mathcal{I}u(x)$ está bem definido para toda $u \in C^{1,1}(x)$.*
- *Se $u \in C^2$ em algum conjunto aberto $\Omega$, então $\mathcal{I}u(x)$ é uma função contínua em $\Omega$.*
- *Se $u$ e $v$ são funções limitadas e $C^{1,1}$ em $x$ então*

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \le \mathcal{I}u(x) - \mathcal{I}v(x) \le M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x),$$

A condição de Elipticidade nos permite linearizar a equação para o caso invariante por translação, isto é,

$$\tau_z \mathcal{I}u = \mathcal{I}(\tau_z u),$$

onde $\tau_z u(x) = u(x-z)$. Embora neste capítulo iremos considerar operadores invariantes por translação, é fácil perceber que $M^+_{\mathcal{L}}$ e $M^-_{\mathcal{L}}$ são invariantes por translação, pois

$$\begin{aligned}
\tau_z M^+_{\mathcal{L}} u(x) &= \sup_{L\in\mathcal{L}} Lu(x+z) \\
&= \sup_{L\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+z+y) + u(x+z-y) - 2u(x+z))K(y)dy \\
&= \sup_{L\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_z u(x+y) + \tau_z u(x-y) - 2\tau_z u(x))K(y)dy \\
&= \sup_{L\in\mathcal{L}} L\tau_z u(x) \\
&= M^+_{\mathcal{L}} \tau_z u(x),
\end{aligned}$$

e da mesma forma para $M^-$. Um exemplo prático do benefício disso é que podemos transladar certas estimativas.

O primeiro resultado desta seção asserta sobre a desigualdade de elipticidade do operador base definido em (7).

**Lema 1.1.** *Seja $\mathcal{I}$ um operador como em (7) e $\mathcal{L}$ uma coleção de operadores íntegro-diferenciais. Assuma que $L_{\alpha\beta}$ pertença a classe $\mathcal{L}$ para todo $\alpha$ e $\beta$. Então para cada $u, v \in C^{1,1}(x)$ temos*

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \le \mathcal{I}u(x) - \mathcal{I}v(x) \le M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x)$$

*Demonstração.* Como $u, v \in C^{1,1}(x)$, $L_{\alpha\beta}u(x)$ e $L_{\alpha\beta}v(x)$ estão definidos de maneira clássica para todo $\alpha$ e $\beta$. Note que para cada $\alpha$ e $\beta$ temos, pela linearidade do operador,

$$L_{\alpha\beta}(u-v)(x) + L_{\alpha\beta}v(x) = L_{\alpha\beta}u(x).$$

Além disso, note que

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \le L_{\alpha\beta}(u-v)(x) \le M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x).$$

Por estas desigualdades, temos

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) + L_{\alpha\beta}v(x) \leq L_{\alpha\beta}u(x) \leq L_{\alpha\beta}v(x) + M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x).$$

Agora passando o supremo em $\alpha$ e depois o ínfimo em $\beta$ obtemos

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) + \mathcal{I}v(x) \leq \mathcal{I}u(x) \leq \mathcal{I}v(x) + M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x),$$

e consequentemente

$$M^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \leq \mathcal{I}u(x) - \mathcal{I}v(x) \leq M^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x).$$

□

O lema que provaremos a seguir reforça a ideia de que o tipo de solução que estamos adotando (solução no sentido da viscosidade) carrega importantes propriedades sobre a função. Em outras palavras, o toque por cima (ou por baixo) de funções suaves força algum tipo de regularidade infinitesimal nas soluções. Mais objetivamente temos o seguinte resultado

**Lema 1.2.** *Seja $\mathcal{I}$ o operador definido em (7) tal que para todo $K_{\alpha\beta}$ vale a desigualdade (18). Se $u$ é uma subsolução $\mathcal{I}u \geq f$ em $\Omega$ e $\varphi \in C^2$ toca $u$ por cima em $x \in \Omega$, então $\mathcal{I}u(x)$ está definido no sentido clássico e $\mathcal{I}u(x) \geq f(x)$.*

*Demonstração.* Defina, para $r > 0$,

$$v_r = \begin{cases} \varphi & \text{em } B_r(x) \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_r(x). \end{cases}$$

Daí segue que $\mathcal{I}v_r(x)$ está definido classicamente e $M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)}v_r(x) \geq \mathcal{I}v_r(x) \geq f(x)$. Com isso,

$$M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)}v_r(x) = (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\delta^+(v_r,x,y)\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} - \frac{\delta^-(v_r,x,y)\lambda}{|y|^{n+\sigma}}\right)dy \geq f(x). \tag{1.2}$$

Como $\varphi$ toca $u$ por cima no ponto $x$, temos

$$\delta(v_r,x,y) \geq \delta(u,x,y) \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n,$$

pois $u(x) = v_r(x) = \varphi(x)$ e também $u(x+y) \leq v_r(x+y)$, $u(x-y) \leq v_r(x-y)$ (isto segue do fato de $\varphi \geq u$ em $B_r$). Como $v_r \in C^{1,1}(x)$, pela definição 0.1 e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |v_r(x+y) + v_r(x-y) - 2v_r(x)| &= |v_r(x+y) - v_r(x) - p\cdot y| \\ &\quad + |v_r(x-y) - v_r(x) - p\cdot(-y)| \\ &\leq 2M|y|^2, \end{aligned}$$

para $y \in B_r$ com $r$ pequeno. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\delta(v_r,x,y)|}{|y|^{n+\sigma}} dy &= \int_{B_r} \frac{|\delta(v_r,x,y)|}{|y|^{n+\sigma}} dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} \frac{|\delta(v_r,x,y)|}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\le 2M \int_{B_r} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}} dy + 4||u||_\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= 2M \int_0^r \left( \int_{\partial B_s} \frac{r^2}{r^{n+\sigma}} dS(y) \right) ds + 4||u||_\infty \int_r^\infty \left( \int_{\partial B_s} \frac{1}{r^{n+\sigma}} dS(y) \right) ds \\
&= 2M|\partial B_1| \int_0^r \frac{s^2 s^{n-1}}{s^{n+\sigma}} ds + 4||u||_\infty |\partial B_1| \int_r^\infty \frac{s^{n-1}}{s^{n+\sigma}} ds \\
&= 2M|\partial B_1| \frac{1}{(2-\sigma)} r^{2-\sigma} + 4||u||_\infty |\partial B_1| \frac{1}{\sigma} r^{-\sigma}.
\end{aligned}$$

Logo, o quociente $\dfrac{|\delta(v_r,x,y)|}{|y|^{n+\sigma}}$ é integrável e consequentemente como $\delta^+(u,x,y) \le |\delta(v_r,x,y)|$, segue que $\dfrac{\delta^+(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}$ é integrável. Separando a integral (1.2) na parte positiva e negativa de $\delta(v_r,x,y)$ temos

$$(2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \lambda \frac{\delta^-(v_r,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy \le (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\Lambda \delta^+(v_r,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy - f(x).$$

Como $\varphi$ toca $u$ por cima em $x$, temos que $\delta(v_r,x,y)$ decresce à medida que $r$ diminui, pois se $r < r_0$, então $B_r \subset B_{r_0}$ e com isso segue, por contas análogas, que $\delta(v_r,x,y) \le \delta(v_{r_0},x,y)$ e portanto $\delta^+(v_r,x,y) \le \delta^+(v_{r_0},x,y)$. Logo, usando esta desigualdade, temos

$$(2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\delta^-(v_r,x,y)\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy \le (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\delta^+(v_{r_0},x,y)\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy - f(x). \tag{1.3}$$

Se $r < r_0$ então $\delta(v_r,x,y) \le \delta(v_{r_0},x,y)$. Daí segue que $\delta(v_r,x,y)$ é monótona crescente, pois $\delta^-(v_r,x,y) \ge \delta^-(v_{r_0},x,y)$. Além disso, $\delta^-(v_r,x,y) \to \delta^-(u,x,y)$ quando $r \to 0$. Pelo Teorema da Convergência monótona, temos

$$\lim_{r\to 0} (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\delta^-(v_r,x,y)\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy = (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\delta^-(u,x,y)\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy.$$

Passando o limite quando $r$ tende a 0 em (1.3) obtemos

$$(2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\delta^-(u,x,y)\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy \le (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\delta^+(v_{r_0},x,y)\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} \right) dy - f(x) < \infty.$$

Dessa maneira, temos que $\dfrac{\delta(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}$ é integrável pois suas partes positiva e negativa o são e consequentemente $\mathcal{I}u(x)$ é computável no sentido clássico, uma vez que $L_{\alpha\beta}u(x)$ está bem definido no sentido clássico para qualquer $\alpha$ e $\beta$.

Note que o quociente $\dfrac{\delta(v_r - u, x, y)}{|y|^{n+\sigma}}$ é uma função monótona decrescente, converge para 0 e é limitado pela função integrável $\dfrac{\delta(v_{r_0} - u, x, y)}{|y|^{n+\sigma}}$. Com isso,

$$\lim_{r\to 0} M^+(v_r - u)(x) = \lim_{r\to 0}(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\Lambda\delta^+(v_r - u, x, y)}{|y|^{n+\sigma}}\right)dy,$$

lembrando que $v_r \geq u$ e por isso $\delta(v_r - u, x, y) = \delta^+(v_r - u, x, y)$. Pelo Teorema da convergência Monótona, temos

$$\lim_{r\to 0} M^+(v_r - u)(x) = 0.$$

Pelo Lema 1.1 temos

$$\mathcal{I}u(x) \geq \mathcal{I}v_r(x) + M^-(u - v_r)(x) = \mathcal{I}v_r(x) - M^+(v_r - u)(x),$$

e passando o limite quando $r \to 0$ obtemos

$$\mathcal{I}u(x) \geq f(x).$$

□

Assim como apontado em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009), a definição de Elipticidade 1.1 se estende para uma classe de operadores muito mais rica, como por exemplo

$$\mathcal{I}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathcal{G}(u(x+y) - u(x))}{|y|^{n+\sigma}}dy,$$

onde $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, $\mathcal{G}(0) = 0$ e $\lambda \leq \mathcal{G}'(x) \leq \Lambda$.

### 1.1.2 Propriedades de estabilidade

Nesta seção, iremos tratar de alguns resultados de estabilidade. Nesse contexto, o resultado mais importante concerne sobre quais são as condições necessárias para que possamos fazer a passagem ao limite em equações envolvendo operadores não-locais. Em comparativo com a teoria local, a definição de Elipticidade uniforme para funcionais

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R},$$

é suficiente para garantir que se

$$\mathcal{F}_k(D^2 u_k) = f_k,$$

no sentido da viscosidade, onde $\mathcal{F}_k \to \mathcal{F}$, $u_k \to u$, $f_k \to f$ localmente uniforme, então

$$\mathcal{F}(D^2 u) = f,$$

isto pode ser encontrado em ((CABRÉ; CAFFARELLI, 1995),Proprosição 2.9). A mesma técnica é aplicável no nosso contexto, entretanto, o caráter Não-local dos operadores exige um comportamento relativamente adequado não apenas localmente mas em todo $\mathbb{R}^n$.

O primeiro resultado desta seção é acerca de equicontinuidade de uma certa família de funções.

**Lema 1.3.** *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\{g_\alpha\}$ uma família de funções tal que $|g_\alpha(x)| \leq |g(x)|$, para alguma $g \in L^1$. Então a família $f * g_\alpha$ é equicontínua em conjuntos compactos.*

*Demonstração.* Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $\epsilon > 0$. Como $g \in L^1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy < \infty,$$

daí escolhemos $R > 0$ grande o suficiente para que $K \subset B_R$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_R(x)} |g(y)|dy \leq \frac{\epsilon}{8||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}, \tag{1.4}$$

para todo $x \in K$. Escrevendo $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 = f\mathcal{X}_{B_{2R}}$ e $f_2 = f\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}}$, perceba que

$$\begin{aligned}
|(f_2 * g_\alpha)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_2(y) g_\alpha(x-y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} f_2(y) g_\alpha(x-y)dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} |f_2(y)||g_\alpha(x-y)|dy \\
&\leq ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} |g_\alpha(x-y)|dy \\
&= ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_R(x)} |g_\alpha(y)|dy.
\end{aligned}$$

E portanto, temos que

$$|(f_2 * g_\alpha)(x)| \leq \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{com } x \in K.$$

Como $g \in L^1$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\int_A g(x)dx \leq \int_A |g(x)|dx < \frac{\epsilon}{16||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}, \quad \forall |A| < \delta_0. \tag{1.5}$$

Considere agora $\eta$ um mollifier padrão como em B.2 e façamos a mollificação de $f_1$. Note que o suporte de $f_1$ está em $B_{2R}$ e $f_1 * \eta_t = 0$ fora de $B_{4R}$ para $t$ pequeno. Assim temos que $f_1 * \eta_t \longrightarrow f_1$ q.t.p em $B_{4R}$ pelo Teorema B.4. Pelo Teorema B.3, existe $A \subset B_{4R}$ tal que $|A| < \delta_0$ e $f_1 * \eta_t \longrightarrow f_1$ uniformemente em $\mathbb{R}^n \backslash A$. Em particular, existe $\bar{f_1} = f_1 * \eta_{t_0}$ tal que

$$|f_1 - \bar{f_1}| < \frac{\epsilon}{8||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$$

em $\mathbb{R}^n \backslash A$. Daí, temos que

$$||(f_1 - \bar{f_1})(1 - \mathcal{X}_A) * g_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ||(f_1 - \bar{f_1})(1 - \mathcal{X}_A)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} ||g_\alpha||_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{8}. \tag{1.6}$$

Por outro lado, por (1.5) e pelo fato de $|A| < \delta_0$, temos

$$||(f_1 - \bar{f}_1)\mathcal{X}_A * g_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{8}. \tag{1.7}$$

Note também que a família $\bar{f}_1 * g_\alpha$ é equicontínua pois $\bar{f}_1$ é contínua e $||g_\alpha||_{L^1}$ é limitada e com isso existe $\delta > 0$ tal que

$$|\bar{f}_1 * g_\alpha(x) - \bar{f}_1 * g_\alpha(y)| < \frac{\epsilon}{4},$$

sempre que $|x - y| < \delta$. Daí, substituindo $f = f_1 + f_2$ e somando e subtraindo termos adequadamente, temos

$$\begin{aligned} |f * g_\alpha(x) - f * g_\alpha(y)| &= |f_1 * g_\alpha(x) - f_1 * g_\alpha(y) + f_2 * g_\alpha(x) - f_2 * g_\alpha(y)| \\ &= |(f_1 - \bar{f}_1) * g_\alpha(x) - (\bar{f}_1 - f_1) * g_\alpha(y) + f_2 * g_\alpha(x) - f_2 * g_\alpha(y) \\ &\quad + \bar{f}_1 * g_\alpha(y) - \bar{f}_1 * g_\alpha(x)| \\ &\le |f_2 * g_\alpha(x)| + |f_2 * g_\alpha(y)| + |\bar{f}_1 * g_\alpha(y) - \bar{f}_1 * g_\alpha(x)| + \\ &\quad |(f_1 - \bar{f}_1)(1 - \mathcal{X}_A) * g_\alpha(x)| + |(f_1 - \bar{f}_1)\mathcal{X}_A * g_\alpha(x)| + \\ &\quad |(f_1 - \bar{f}_1)(1 - \mathcal{X}_A) * g_\alpha(y)| + |(f_1 - \bar{f}_1)\mathcal{X}_A * g_\alpha(y)| \\ &\le \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

sempre que $|x - y| < \delta$. Logo, $f * g_\alpha$ é equicontínua. □

Como aplicação deste resultado, temos o seguinte lema que mostra a segunda condição para que o operador definido em (7) seja, de fato, um operador elíptico de acordo com a Definição 1.1.

**Lema 1.4.** *Seja $\mathcal{I}$ um operador como em* (7) *e assuma* (15). *Seja $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^{1,1}(\Omega)$. Então $\mathcal{I}v$ é contínua em $\Omega$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar primeiramente que a família $L_{\alpha\beta}v$ é equicontínua. Escrevamos

$$K = \sup_{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}} K_{\alpha\beta}$$

como em (15). Seja $\epsilon > 0$ e $x_0 \in \Omega$. Como $v \in C^{1,1}$ em $\Omega$, existe $C > 0$ tal que

$$|\delta(v, x, y)| \le C|y|^2, \quad \text{se} \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad |y| < dist(x, \partial\Omega).$$

Pela condição (15), para $r < 1$ suficientemente pequeno,

$$\int_{B_r} C \min\left(1, |y|^2\right) K(y)dy \le \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim

$$\int_{B_r} C|y|^2 K(y)dy =\le \frac{\epsilon}{3}.$$

Com isso, separando a integral

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}v(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v,x,y)K_{\alpha\beta}(y)dy \\ &= \int_{B_r} \delta(v,x,y)K_{\alpha\beta}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} \delta(v,x,y)K_{\alpha\beta}(y)dy \\ &= w_1(x) + w_2(x). \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$|w_1(x)| \leq \int_{B_r} C|y|^2 K(y)dy < \frac{\epsilon}{3}.$$

Note que $w_2$ pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} w_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} v(x+y)K_{\alpha\beta}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} v(x-y)K_{\alpha\beta}(y)dy - 2\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} v(x)K_{\alpha\beta}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x+y)(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K_{\alpha\beta})(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K_{\alpha\beta})(y)dy \\ &\quad -2v(x)\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K_{\alpha\beta})(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x+y)g_{\alpha\beta}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)g_{\alpha\beta}(y)dy - 2v(x)\int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha\beta}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)\bar{g}_{\alpha\beta}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)g_{\alpha\beta}(y)dy - 2v(x)\int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha\beta}(y)dy \end{aligned}$$

onde $g_{\alpha\beta}(y) = \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K_{\alpha\beta}(y)$ e $\bar{g}_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(-y)$. Assim

$$w_2 = v * \bar{g}_{\alpha\beta} + v * g_{\alpha\beta} - 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha\beta}(y)dy\right)v.$$

Note que como $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g_{\alpha\beta} \leq \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K$, temos que $g_{\alpha\beta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo lema 1.3, $w_2$ é equicontínua. Daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$|w_2(x) - w_2(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{quando} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Com isso,

$$|L_{\alpha\beta}v(x) - L_{\alpha\beta}v(x_0)| \leq |w_1(x)| + |w_1(x_0)| + |w_2(x) - w_2(x_0)| < \epsilon,$$

independentemente de $\alpha$ e $\beta$. Daí, segue que $|\mathcal{I}v(x) - \mathcal{I}v(x_0)| < \epsilon$ sempre que $|x - x_0| < \delta$ e portanto $\mathcal{I}v$ é contínua em $x_0$. □

A Definição 0.2 de solução no sentido da viscosidade avalia o operador em funções teste que são pontualmente $C^2$. A fim de expandir o conjunto das funções teste, seria interessante utilizar soluções que são pontualmente $C^{1,1}$. Veremos que, na verdade, ambas definições são equivalentes.

**Lema 1.5.** *Seja $\mathcal{I}$ elíptico com respeito a alguma classe $\mathcal{L}$ no sentido da definição 1.1. Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua superiormente tal que $\mathcal{I}u \geq f$ em $\Omega$ no sentido da viscosidade. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $C^{1,1}$ em $x \in \Omega$. Assuma que $\varphi$ toca $u$ por cima em $x$. Então $\mathcal{I}\varphi(x)$ está definido no sentido clássico e $\mathcal{I}\varphi(x) \geq f(x)$.*

*Demonstração.* Como $\varphi \in C^{1,1}(x)$ então $\mathcal{I}\varphi(x)$ está definido classicamente. Por esta razão, tomando $q(y) = \varphi(x) + v.(y-x) + (M+r)|y-x|^2$, temos que

$$|q(y) - \varphi(y)| \leq C(r)|y-x|^2, \quad y \in B_r(x),$$

e $C(r) \to 0$ quando $r \to 0$. Defina

$$v_r = \begin{cases} q & \text{em } B_r \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_r. \end{cases}$$

Como $\mathcal{I}u \geq f$ em $\Omega$ no sentido da viscosidade, então $\mathcal{I}v_r(x) \geq f(x)$, com $\mathcal{I}v_r(x)$ bem definido. Além disso, defina

$$\varphi_r = \begin{cases} q & \text{em } B_r \\ \varphi & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_r. \end{cases}$$

Com isso,

$$\mathcal{I}\varphi(x) - \mathcal{I}\varphi_r(x) \geq M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x),$$

somando e subtraindo $\mathcal{I}v_r(x)$, obtemos

$$\mathcal{I}\varphi(x) \geq \mathcal{I}v_r(x) + \mathcal{I}\varphi_r(x) - \mathcal{I}v_r(x) + M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x),$$

como $\mathcal{I}\varphi_r(x) - \mathcal{I}v_r(x) \geq M^-_{\mathcal{L}}(\varphi_r - v_r)(x)$,

$$\mathcal{I}\varphi(x) \geq \mathcal{I}v_r(x) + M^-_{\mathcal{L}}(\varphi_r - v_r)(x) + M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x),$$

como $(\varphi_r - v_r)$ tem um mínimo em $x$, $M^-_{\mathcal{L}}(\varphi_r - v_r)(x) \geq 0$, e daí

$$\mathcal{I}\varphi(x) \geq \mathcal{I}v_r(x) + M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x) \geq f(x) + M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x). \tag{1.8}$$

Note que,

$$M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x) = \inf_{L \in \mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\varphi - \varphi_r, x, y) K_L(y) dy.$$

Como $\varphi(x) = q(x)$ e $\varphi = \varphi_r$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_r$ então,

$$M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x) = \inf_{L \in \mathcal{L}} \int_{B_r} \delta(\varphi - \varphi_r, x, y) K_L(y) dy,$$

como $\varphi_r = q$ em $B_r$ e $\delta^+(\varphi - q, x, y) \geq 0$, temos

$$M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x) = \inf_{L \in \mathcal{L}} \int_{B_r} -\delta^-(\varphi - q, x, y) K_L(y) dy,$$

daí, obtemos

$$M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x) = \int_{B_r} \delta^-(\varphi - q, x, y)K(y)dy,$$

pois $K(y) = \sup_{L\in\mathcal{L}} K_L(y)$. Note que

$$\delta^-(\varphi - q, x, y) = \max\{-\delta(\varphi - q, x, y), 0\} \leq 2C|y|^2,$$

com isso,

$$M^-_{\mathcal{L}}(\varphi - \varphi_r)(x) \geq \int_{B_r} -2C|y|^2 K(y)dy.$$

Devido a condição de integrabilidade do Kernel (13), temos

$$\int_{B_r} 2C|y|^2 K(y)dy \leq \int_{B_r} 2C \min\left(1, |y|^2\right) K(y)dy < \infty.$$

Com isso, a integral à esquerda nesta última expressão tende para zero a medida que $r \longrightarrow 0$. Fazendo $r \longrightarrow 0$ em (1.8) obtemos

$$\mathcal{I}\varphi(x) \geq f(x).$$

□

A noção de solução no sentido da viscosidade para operadores uniformemente elípticos (teoria local), como bem apresentado em (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995), é poderosa devido a sua estabilidade via limites uniformes em conjuntos compactos. Em se tratando de soluções que a priori são apenas semicontínuas(inferiormente ou superiormente), o limite uniforme pode ser relaxado um pouco. Para isso, iremos considerar o $\Gamma-$limite e sua definição é dada por

**Definição 1.2.** *($\Gamma-$convergência) Uma sequência de funções semicontínuas inferiormente $(u_k)$ $\Gamma-$converge para $u$ em um conjunto $\Omega$ se as duas condições abaixo valem*

- *Para toda sequência $x_k \longrightarrow x$ em $\Omega$, $\liminf_{k\to\infty} u_k(x_k) \geq u(x)$;*
- *Para todo $x \in \Omega$, existe uma sequência $x_k \longrightarrow x$ em $\Omega$ tal que*

$$\limsup_{k\to\infty} u_k(x_k) = u(x).$$

Uma propriedade interessante que será usada acerca de $\Gamma-$convergência é que se $u_k$ $\Gamma-$converge para $u$, $u$ é semicontínua inferiormente e $\varphi \in C^2$ toca $u$ por baixo em $x$, então podemos encontrar $x_k$ e $d_k \in C^2$ tal que $\varphi + d_k$ toca $u_k$ em $x_k$ e $x_k \longrightarrow x$ e $d_k \longrightarrow 0$. A ideia para provar isto é usar, equivalentemente, que se $\varphi$ toca $u$ por baixo em $x$ então $(u - \varphi)$ tem mínimo local em $x$. Assim, suponha que $u - \varphi$ atinge mínimo local em $x$, $\varphi \in C^2$. Defina

$$\varphi_{\delta_k}(y) := \varphi(y) - \delta_k|y - x|^4.$$

Para $\delta_k$ pequeno o suficiente, temos

$$(u - \varphi)(x) = (u - \varphi_{\delta_k})(x) < (u - \varphi_{\delta_k})(y).$$

Como $u$ é semicontínua inferiormente, seja $x_k \in \bar{\Omega}$ tal que $(u_k - \varphi_{\delta_k})(x_k) = \min_{\bar{\Omega}}(u_k - \varphi_{\delta_k})$ e daí o resultado segue.
Provemos agora o principal resultado de estabilidade desta seção.

**Lema 1.6.** *Seja $\mathcal{I}$ elíptico no sentido da Definição 1.1 e $(u_k)$ uma sequência de funções que são uniformemente limitadas no $\mathbb{R}^n$ e semicontínuas inferiormente em $\Omega$ tal que*

1. $\mathcal{I}u_k \leq f_k$ *em* $\Omega$;
2. $u_k \to u$ *em* $\Omega$ *no* $\Gamma-$*sentido;*
3. $u_k \to u$ *q.t.p no* $\mathbb{R}^n$;
4. $f_k \to f$ *localmente uniforme em* $\Omega$ *para alguma função contínua* $f$.

*Então* $\mathcal{I}u \leq f$ *em* $\Omega$.

*Demonstração.* Seja $\varphi$ uma função que toca $u$ por baixo em um ponto $x$ em uma certa vizinhança $N(x)$. Defina

$$v = \begin{cases} \varphi & \text{em } N \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash N, \end{cases}$$

Pela $\Gamma-$convergência de $u_k$ para $u$ em $\Omega$, para grandes valores de $k$ podemos encontrar $x_k$ e $d_k \in C^2$ tal que $\varphi + d_k$ toca $u_k$ em $x_k$ e além disso, $d_k \to 0$ e $x_k \to x$. Como $\mathcal{I}u_k \leq f_k$, se definirmos

$$v_k = \begin{cases} \varphi + d_k & \text{em } N \\ u_k & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash N, \end{cases}$$

temos, claramente, $\mathcal{I}v_k(x_k) \leq f_k(x_k)$. Agora considere $z \in N(x)$ tal que $dist(z, \partial N) > \rho > 0$. Temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}v_k(z) - \mathcal{I}v(z)| &\leq \max\{|M^+_{\mathcal{L}}(v_k - v)(z)|, |M^+_{\mathcal{L}}(v - v_k)(z)|\} \\ &\leq \sup_{L \in \mathcal{L}} |L(v_k - v)(z)|, \end{aligned}$$

considerando $K = \sup_{L\in\mathcal{L}} K_L$, temos que

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} |L(v_k - v)(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\delta(v_k - v, z, y)| K(y) dy.$$

Perceba que se $y \in B_\rho$, então $z + y, z - y \in N(x)$ e com isso segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\delta(v_k - v, z, y)| K(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n - B_\rho} |\delta(v_k - v, z, y)| K(y) dy.$$

Note também que a sequência $v_k$ é limitada pois suas sentenças também o são e além disso $\delta(v_k - v, z, y)$ converge para 0 q.t.p pois $u_k$ converge para $u$ q.t.p.. Como $K(y)$ é integrável longe da origem, ou seja, $K \in L^1(\mathbb{R}^n \backslash B_\rho)$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada que a última expressão acima em integral converge para 0 quando $k \to \infty$ uniformemente em $z$. Daí, segue que $\mathcal{I}v_k(z) \to \mathcal{I}v(z)$ localmente uniforme em $N$. Pelo Lema 1.4, $\mathcal{I}v$ é contínua em $N$. Com isso,

$$|\mathcal{I}v_k(x_k) - \mathcal{I}v(x)| \leq |\mathcal{I}v_k(x_k) - \mathcal{I}v(x_k)| + |\mathcal{I}v(x_k) - \mathcal{I}v(x)| \to 0.$$

Dessa forma, $\mathcal{I}v_k(x_k)$ converge para $\mathcal{I}v(x)$ quando $k \to \infty$. Como $x_k \to x$ e $f_k \to f$ localmente uniforme, temos também $f_k(x_k) \to f(x)$. Passando o limite quando $k$ tende para o infinito em $\mathcal{I}v_k(x_k) \leq f_k(x_k)$ obtemos $\mathcal{I}v(x) \leq f(x)$. □

Provamos no lema acima a estabilidade de supersoluções via $\Gamma-$limites. O mesmo resultado pode ser provado para subsoluções que são semicontínuas superiormente e com isso obtemos o seguinte corolário sobre estabilidade via limite uniforme.

**Corolário 1.1.** *Seja $\mathcal{I}$ elíptico no sentido da Definição 1.1 e $(u_k)$ uma sequência de funções que são uniformemente limitadas no $\mathbb{R}^n$ e contínuas $\Omega$ tal que*

1. $\mathcal{I}u_k = f_k$ *em* $\Omega$*;*
2. $u_k \to u$ *uniformemente em* $\Omega$*;*
3. $u_k \to u$ *q.t.p no* $\mathbb{R}^n$*;*
4. $f_k \to f$ *localmente uniforme em* $\Omega$ *para alguma função contínua* $f$.

*Então* $\mathcal{I}u = f$ *em* $\Omega$.

Note que este resultado de estabilidade fixa o operador $\mathcal{I}$. O mais realístico, neste contexto, seria considerar uma sequência $\mathcal{I}_k, u_k, f_k$ tal que

$$\mathcal{I}_k u_k = f_k \quad \text{em} \quad \Omega,$$

e exigir hipóteses de convergência adequadas para cada sequência. Os resultados deste capítulo, porém, não exigem tal generalidade.

## 1.2 Princípio da Comparação

Nesta seção, iremos obter um princípio de comparação para sub e supersoluções de equações Não-locais. Mostraremos, essencialmente, que a diferença entre uma subsolução e uma supersolução ainda resolve uma equação envolvendo um operador uniformemente elíptico. Para isto, iremos mostrar que a diferença entre uma sub e supersolução possui um comportamento clássico local usando o método de inf e sup-convolução criado por Jensen em (JENSEN, 1988), que foi utilizado para mostrar existência de soluções para equações de segunda ordem. Esta técnica, por sua vez, se aplica da mesma maneira para equações não-locais, como iremos ver adiante.

Para que possamos ter algum tipo de comparação, será de suma importância que a classe de operadores que estamos trabalhando possua uma mínima condição de Elipticidade, i.e,

**Hipótese 1.1.** *Existe uma constante $R_0 \geq 1$ tal que para todo $R > R_0$, existe $\delta > 0$, que pode depender de $R$, tal que para qualquer operador $L \in \mathcal{L}$, temos $L\varphi > \delta$ em $B_R$, onde $\varphi$ é dada por*

$$\varphi(x) = \min\left(1, \frac{|x|^2}{R^3}\right).$$

Esta hipótese é satisfeita, por exemplo, para Laplacianos Fracionários, pois

$$\begin{aligned}
(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(\varphi, y, x)}{|y|^{n+\sigma}}dy &= (2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \frac{|x+y|^2 + |x-y|^2 - 2|x|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&+ (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\epsilon} \frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\geq (2-\sigma)|\partial B_1| \int_0^\epsilon r^{1-\sigma}dr - 2|x|^2(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\epsilon} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= |\partial B_1|\epsilon^{2-\sigma} - 2|x|^2\frac{(2-\sigma)}{\sigma}|\partial B_1|\epsilon^{-\sigma}.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos $|x|^2 < \frac{\sigma}{(2-\sigma)}\frac{\epsilon^2}{2}$. Isto significa que em uma vizinhança de $x$ o operador é estritamente positivo como requer a hipótese acima. Vale ressaltar que como o Fracionário Laplaciano é um operador invariante por scalling, mostrar a hipótese (1.1) é equivalente a mostrar a positividade em uma vizinhança de $x$.

Esta seção será dedicada à demonstração do seguinte teorema.

**Teorema 1.1.** *Seja $\mathcal{L}$ uma classe de operadores que satisfaz a Hipótese 1.1. Seja $I$ um operador elíptico com respeito a $\mathcal{L}$ no sentido da Definição 1.1. Seja $\Omega$ um conjunto aberto limitado e $u$ e $v$ duas funções tais que*

1. *$u, v$ são limitadas no $\mathbb{R}^n$;*

2. *$u$ é semicontínua superiormente em todo ponto de $\bar{\Omega}$;*

3. *$v$ é semicontínua inferiormente em todo ponto de $\bar{\Omega}$;*

4. *$\mathcal{I}u \geq f$ e $\mathcal{I}v \leq f$ em $\Omega$ para alguma função contínua $f$;*

5. *$u \leq v$ em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$.*

*Então, $u \leq v$ em $\Omega$.*

A ideia para a demonstração deste resultado segue da seguinte maneira. Supondo que possamos manipular algebricamente no sentido clássico, teríamos que se $\mathcal{I}u \geq f$ e $\mathcal{I}v \leq f$, então pela Definição de Elipticidade 1.1, temos que

$$M^+_{\mathcal{L}}(u-v) \geq \mathcal{I}u - \mathcal{I}v \geq f - f = 0,$$

e assim

$$M^+_{\mathcal{L}}(u-v) \geq 0.$$

A mínima condição de Elipticidade da classe $\mathcal{L}$ imposta pela Hipótese 1.1 nos permite criar uma barreira apropriada para a função $(u-v)$ no $\mathbb{R}^n$ e assim garantir a comparação entre $u$ e $v$. O problema nisto é que não necessariamente podemos avaliar de maneira clássica o operador $\mathcal{I}$ em $u$ e em $v$(e consequentemente $M^+_{\mathcal{L}}$). Para contornar este problema, usaremos as aproximações do tipo sup e inf convoluções que iremos definir a seguir.

**Definição 1.3.** *Dada uma função semi-contínua superiormente e limitada u, a aproximação* sup-*convolução* $u^\epsilon$ *é dada por*

$$u^\epsilon(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{u(x+y) - \frac{1}{\epsilon}|y|^2\}. \tag{1.9}$$

*De maneira semelhante, se u for semi-contínua inferiormente podemos definir a aproximação* inf-*convolução, dada por*

$$u_\epsilon(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{u(x+y) + \frac{1}{\epsilon}|y|^2\} \tag{1.10}$$

A partir da definição acima podemos perceber que $u^\epsilon \geq u(x)$ e $u_\epsilon(x) \leq u(x)$, pois $0 \in \mathbb{R}^n$. Note também que se $y$ é tal que o supremo de $u^\epsilon(x)$ é atingido, ou seja, $u^\epsilon(x) = u(x+y) - \frac{1}{\epsilon}|y|^2$, então

$$u^\epsilon(x+z) \geq u(x+z+y) - \frac{1}{\epsilon}|y|^2,$$

fazendo $y = y - z$ e expandindo o produto interno, iremos obter expandindo o produto interno, temos

$$\begin{array}{rcl} u^\epsilon(x+z) & \geq & u(x+z+y-z) - \frac{1}{\epsilon}|y-z|^2 \\ & = & u(x+y) - \frac{1}{\epsilon}\left(|y|^2 - 2 < y,z > + |z|^2\right) \\ & = & u^\epsilon(x) - \frac{1}{\epsilon}|z|^2 + \frac{2}{\epsilon} < z,y >, \end{array}$$

e assim

$$u^\epsilon(x+z) \geq u^\epsilon(x) - \frac{1}{\epsilon}|z|^2 + \frac{2}{\epsilon} < z,y >$$

isto significa, por sua vez, que $u^\epsilon$ é semiconvexa, ou ainda, que para cada $x$ existe um paraboloide que toca $u^\epsilon$ por baixo (note que exatamente o mesmo poderia ser feito para $u_\epsilon$).

**Proposição 1.1.** *Se u é limitada e semi-contínua inferiormente no* $\mathbb{R}^n$*, então* $u_\epsilon$ *converge no* $\Gamma$*-sentido para u. Se u é limitada e semi-contínua inferiormente, então* $-u^\epsilon$ *converge no* $\Gamma-$*sentido para* $-u$*.*

*Demonstração.* Mostremos apenas a primeira assertiva. Precisamos mostrar que

1. Para toda $x_\epsilon \longrightarrow x$, temos $\liminf_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x_\epsilon) \geq u(x)$;

2. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $x_\epsilon \longrightarrow x$ tal que

$$\limsup_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x_\epsilon) = u(x).$$

Para o item 1 note que, pela definição de ínfimo, para cada $\epsilon > 0$ existe $y_\epsilon$ tal que o seguinte vale

$$u(x_\epsilon + y_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}|y_\epsilon|^2 \leq u_\epsilon(x_\epsilon) + \epsilon \leq u(x_\epsilon) + \epsilon, \tag{1.11}$$

daí, rearranjando os termos, obtemos

$$|y_\epsilon|^2 \leq \epsilon(-u(x_\epsilon + y_\epsilon) + u(x_\epsilon) + \epsilon),$$

e com isso, temos que $y_\epsilon \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Pela desigualdade (1.11) temos

$$u_\epsilon(x_\epsilon) \geq u(x_\epsilon + y_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}|y_\epsilon|^2 - \epsilon \geq u(x_\epsilon + y_\epsilon) - \epsilon,$$

passando o $\liminf$ na desigualdade acima quando $\epsilon \longrightarrow 0$ obtemos

$$\liminf_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x_\epsilon) \geq u(x).$$

Para mostrar o item (2), dado $x$, precisamos achar $x_\epsilon \longrightarrow x$, quando $\epsilon \longrightarrow 0$ tal que vale o que foi proposto. Para fazer o papel da sequência, basta tomar a sequência $x_\epsilon = x + y_\epsilon$, onde $y_\epsilon$ é encontrado a partir da semicontinuidade inferior de $u_\epsilon(x)$ para cada $\epsilon > 0$. Daí, vimos anteriormente que $x_\epsilon = (x + y_\epsilon) \longrightarrow x$ pois $y_\epsilon \longrightarrow 0$ e além disso segue que $u_\epsilon(x_\epsilon) \geq u(x) - \epsilon$, o que implica, por sua vez,

$$\limsup_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x_\epsilon) = u(x).$$

De maneira inteiramente análoga, mostra-se a segunda parte da proposição. □

No caso em que $u$ é uma função contínua(semicontínua inferiormente e superiormente), a convergência da sup e inf convolução é uniforme. Dessa forma, a $\Gamma-$convergência pode ser entendida como uma generalização para o caso em que as funções são apenas semicontínuas.

Essas regularizações da função $u$($u^\epsilon$ e $u_\epsilon$) possuem propriedades interessantes. Além de podermos avaliar o operador Não-Local nestas funções, graças a propriedade de Elipticidade, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.2.** *Se $f$ é uma função contínua e $\mathcal{I}u \geq f$, então $\mathcal{I}u^\epsilon \geq f - d_\epsilon$. E se $\mathcal{I}v \leq f$, então $\mathcal{I}v_\epsilon \leq f + d_\epsilon$, onde $d_\epsilon \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ e depende do módulo de continuidade de $f$.*

*Demonstração.* Seja $\varphi$ uma função teste que toca $u_\epsilon$ por baixo no ponto $x$ numa vizinhança $N$. Para $\epsilon$ suficientemente pequeno existe $x+h \in N$ tal que $u_\epsilon \leq u(y+h) + \frac{|h|^2}{\epsilon}$ com igualdade em $y = x$. Consequentemente, a função $\varphi - \frac{|h|^2}{\epsilon}$ toca $u$ por baixo em $x+h$ na vizinhança $N$. Por hipótese, $\mathcal{I}u \leq f$ no sentido da viscosidade, e portanto se considerarmos

$$v = \begin{cases} \varphi - \frac{|h|^2}{\epsilon} & \text{em } N \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash N, \end{cases}$$

como função teste para $u$, temos $\mathcal{I}v(x+h) \leq f(x+h) \leq f(x) + \rho(|h|)$, onde $\rho$ é o módulo de continuidade de $f$. Como $\mathcal{I}$ é Elíptico com respeito a Definição 1.1, a constante $\frac{|h|^2}{\epsilon}$ não tem efeito no valor de $\mathcal{I}\left(v + \frac{|h|^2}{\epsilon}\right)$ e portanto $\mathcal{I}\left(v + \frac{|h|^2}{\epsilon}\right) \leq f(x) + \rho(|h|)$. Agora note que se definirmos

$$\bar{v} = \begin{cases} \varphi & \text{em } N \\ u_\epsilon & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash N, \end{cases}$$

usando o fato de que $\bar{v} \leq v + \frac{|h|^2}{\epsilon}$ e a definição de Elipticidade 1.1 novamente, obtemos

$$\mathcal{I}\bar{v}(x) \leq f(x) + \rho(|h|),$$

como queríamos. □

É desejável que sempre que tivermos um comportamento clássico das soluções (localmente), o operador possa ser avaliado pontualmente. Em outras palavras, temos o seguinte lema.

**Lema 1.7.** *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente(superiormente) em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{I}u \leq 0(\geq)$ em $\Omega$ no sentido da viscosidade. Seja $x \in \Omega$ um ponto de tal forma que $u \in C^{1,1}(x)$. Então $\mathcal{I}u(x)$ está definido classicamente e $\mathcal{I}u(x) \leq 0(\geq)$.*

*Demonstração.* Provemos para supersoluções. Como $u \in C^{1,1}(x)$, considere

$$\psi_\epsilon(y) = u(y) - \frac{\epsilon}{2}|y-x|^2 \leq u(y), \quad y \in B_r(x).$$

Assim $\psi_\epsilon$ toca $u$ por baixo em $x$ numa vizinhança $B_r(x)$. Pelo Lema 1.5, $\mathcal{I}u(x)$ está definido classicamente e usando a Definição de Elipticidade 1.1 e fazendo $\epsilon \to 0$ temos que $\mathcal{I}u(x) \leq 0$. □

O lema acima é importante para garantir que a sup e inf convolução possuem um comportamento razoável para que possamos avaliar o operador de maneira clássica nestas funções. Neste sentido, o Lema 1.7 pode ser aplicado da seguinte maneira.

**Lema 1.8.** *Seja $\mathcal{I}$ elíptico no sentido da Definição 1.1. Sejam $u, v$ duas funções limitadas tais que*

1. *$u$ é semicontínua superiormente e $v$ é semicontínua inferiormente em $\mathbb{R}^n$, e*

2. *$\mathcal{I}u \geq f$ e $\mathcal{I}v \leq g$ no sentido da viscosidade em $\Omega$ para duas funções contínuas $f$ e $g$.*

*Então, $M^+_{\mathcal{L}}(u - v) \geq f - g$ em $\Omega$ no sentido da viscosidade.*

*Demonstração.* Por (1.2) temos que $\mathcal{I}u^\epsilon \leq f - d_\epsilon$ e $\mathcal{I}v_\epsilon \leq g + d_\epsilon$. Além disso, temos que $-u^\epsilon \to -u$ e $v_\epsilon \to v$ no $\Gamma-$sentido. Pela estabilidade de soluções sobre limite no $\Gamma$-sentido e como $d_\epsilon \to 0$, é suficiente mostrar que $M^+_{\mathcal{L}}(u^\epsilon - v_\epsilon) \geq f - g - 2d_\epsilon$ em $\Omega$ para todo $\epsilon$.
Seja $\varphi \in C^2$ que toca $u^\epsilon - v^\epsilon$ por cima em $x \in \Omega$. Para qualquer $\epsilon \geq 0$ as funções $u^\epsilon$ e $v_\epsilon$ são semiconvexas, ou seja, para cada uma delas existem um paraboloide que as toca por baixo em cada ponto $x$. Se uma função $C^2$ toca $(u^\epsilon - v_\epsilon)$ por cima então, da semiconvexidade de cada função, segue que cada uma delas tem que ser $C^{1,1}(x)$. Daí, pela Lema 1.7, $\mathcal{I}u^\epsilon(x)$ e $\mathcal{I}v_\epsilon(x)$ podem ser avaliados classicamente. Pela definição (1.1) temos

$$M^+_{\mathcal{L}}(u^\epsilon - v_\epsilon)(x) \geq \mathcal{I}u^\epsilon(x) - \mathcal{I}v_\epsilon(x) \geq f - g - 2d_\epsilon,$$

com isso, temos que $M^+_{\mathcal{L}}\varphi(x) \geq f - g - d_\epsilon$, pois $\varphi$ toca $(u^\epsilon - v_\epsilon)$ por cima. Dessa maneira, podemos concluir que $M^+_{\mathcal{L}}(u^\epsilon - v_\epsilon) \geq f - g - 2d_\epsilon$ no sentido da viscosidade em $\Omega$. Fazendo $\epsilon \to 0$ e pelo Lema 1.6 concluímos este Lema. □

O Lema 1.8 é quase o que precisamos provar para o Teorema 1.1. Porém note que este teorema permite que as funções sejam descontínuas fora do domínio da equação. Para resolver este problema basta estendermos as funções adequadamente e aplicar o Lema 1.8 provado acima. Com isto, temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.** *Seja $\mathcal{I}$ elíptico no sentido da Definição 1.1. Sejam $u, v$ duas funções limitadas tais que*

1. *$u$ é semi-contínua inferiormente e $v$ é semi-contínua superiormente em $\bar{\Omega}$, e*

2. *$\mathcal{I}u \geq f$ e $\mathcal{I}v \leq g$ no sentido da viscosidade em $\Omega$, para $f, g$ funções contínuas.*

*Então, $M^+_{\mathcal{L}}(u - v) \geq f - g$ em $\Omega$ no sentido da viscosidade.*

*Demonstração.* Mostraremos que existem sequências $u_k$ e $v_k$ semicontínuas superiormente e inferiormente, respectivamente, de tal maneira que

- $u_k = u$ em $\bar{\Omega}$, $v_k = v$ em $\bar{\Omega}$,
- $u_k \to u$, e $v_k \to v$ q.t.p em $\mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega}$,
- $\mathcal{I}u_k \geq f_k$ e $\mathcal{I}v_k \leq g_k$ com $f_k \to f$ e $g_k \to g$ localmente uniforme em $\Omega$.

A existência dessas sequências $u_k$ e $v_k$ satisfazendo os dois primeiros itens é sempre possível. Basta fazer uma mollificação padrão de $u$ e $v$ longe de $\Omega$ e então preenchendo o espaço que falta de uma maneira semicontínua. O que iremos mostrar é que existem funções $f_k$ e $g_k$ de tal forma que o terceiro item valha. Como $u_k$ coincide com $u$ em $\Omega$, segue que $(u_k - u)$ é identicamente nula em $\Omega$ e $M^-_{\mathcal{L}}(u_k - u)$ está definido no sentido clássico em $\Omega$. Por definição,

$$\begin{aligned} M^-_{\mathcal{L}}(u_k - u)(x) &= \inf_{L\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u_k - u, y, x)K_L(y)dy \\ &= \inf_{L\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} ((u_k - u)(x+y) + (u_k - u)(x-y))K_L(y)dy, \end{aligned}$$

pois $u_k(x) = u(x)$. Separando as integrais e fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned} M^-_{\mathcal{L}}(u_k - u)(x) &= 2\inf_{L\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} (u_k - u)(x+y)K_L(y)dy \\ &\geq -2\inf_{L\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u|(x+y)K_L(y)dy \\ &\geq \geq -2\int_{\mathbb{R}^n} |(u_k - u)(x+y)|K(y)dy, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de $K = \sup_{L\in\mathcal{L}} K_L$. Como

$$B_{dist(x,\partial\Omega)}(x) \subset \bar{\Omega} \quad \text{e} \quad u_k = u \quad \text{em} \quad \bar{\Omega},$$

temos

$$M^-_{\mathcal{L}}(u_k - u)(x) \geq -2\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{dist(x,\partial\Omega)}(x)} |(u_k - u)(x+y)|K(y)dy := h_k(x).$$

Dessa maneira, temos que $h_k$ é contínua em $\Omega$. Como $u_k \to u$ q.t.p em $\mathbb{R}^n\setminus\bar{\Omega}$, segue, pelo Teorema da Convergência Dominada, que $h_k(x) \to 0$.

Agora seja $\varphi \in C^{1,1}(x)$ que toca $u_k$ por cima em $x$. Daí, $\varphi + u - u_k \in C^{1,1}(x)$. Porém, $\varphi + u - u_k$ toca $u$ por cima em $x$. Daí, pela Lema 1.5 temos que $\mathcal{I}(\varphi + u - u_k)(x) \geq f(x)$. Com isso, pela definição de Elipticidade,

$$\mathcal{I}\varphi(x) \geq \mathcal{I}(\varphi + u - u_k)(x) + M^-_{\mathcal{L}}(u - u_k)(x) \geq f(x) + h_k(x).$$

Para finalizar, basta tomar $f_k = f + h_k$. O mesmo processo pode ser aplicado para a sequência $v_k$. Dessa forma, pelo Lema 1.8, temos

$$M^-_{\mathcal{L}}(u_k - v_k) \geq f_k - g_k,$$

no sentido da viscosidade em $\Omega$. Passando o limite, pelo Lema 1.6, temos que

$$M^-_{\mathcal{L}}(u - v) \geq f - g,$$

em $\Omega$ no sentido da viscosidade. □

Agora veremos como a mínima Elipticidade exigida na classe $\mathcal{L}$ dada pela Hipótese 1.1 nos permite criar uma barreira para a solução $u$.

**Lema 1.9.** *Seja $u$ uma função limitada, semicontínua superiormente em todo ponto de $\bar{\Omega}$ tal que $M^+_{\mathcal{L}}u \geq 0$ no sentido da viscosidade em $\Omega$. Então $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u$.*

*Demonstração.* Seja $R_0$ da Hipótese 1.1 e escolha $R > R_0$ de tal maneira que $\Omega \subset B_R$. Dado $\epsilon > 0$, defina a função

$$\varphi_M(x) = M + \epsilon(1 - \varphi(x)),$$

onde $\varphi(x) = \min\{1, |x|^2/R^3\}$. Perceba que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Com isso, $1 \geq 1 - \varphi(x) \geq 0$ e daí segue que $M \leq M + \epsilon(1 - \varphi(x)) \leq M + \epsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Da Hipótese 1.1 temos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $L \in \mathcal{L}$ temos $L\varphi > \delta$ em $B_R$. Com isso

$$L\varphi_M(x) = L(M + \epsilon(1 - \varphi(x))) = -\epsilon L\varphi(x) < \epsilon\delta,$$

e como consequência,

$$M^+_{\mathcal{L}}\varphi_M(x) \leq -\epsilon\delta, \quad \text{para todo } x \in B_R.$$

Considere $M_0$ o menor valor de $M$ tal que $\varphi_M \geq u$ em $\mathbb{R}^n$. Devemos ter $M_0 \leq \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u$, pois do contrário, se $M_0 > \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u$, então $\varphi_{M_0} \geq M_0 > \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u \geq u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $u(x) \leq \varphi_{M_0}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então existiria $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi_{M_0}(x_0) = u(x_0)$. Mas com isso $\varphi_{M_0}$ tocaria $u$ em $x_0$ por cima, sendo $\varphi_{M_0} \in C^2(x_0)$ então, pela definição de solução no sentido da viscosidade de $M^+_{\mathcal{L}}u \geq 0$ deveríamos ter $M^+_{\mathcal{L}}\varphi_{M_0}(x_0) \geq 0$, que é uma contradição com o fato de $M^+_{\mathcal{L}}\varphi_M(x) \leq -\epsilon\delta$, para todo $x \in B_R$. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$u(x) \leq \varphi_{M_0}(x) \leq M_0 + \epsilon \leq \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u + \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos $u(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u$ e daí $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u$. □

Com este resultado podemos finalmente demonstrar o Teorema 1.1.

*Demonstração.* Sob as hipóteses do Teorema 1.1, se $u, v$ são limitadas no $\mathbb{R}^n$, $u$ é semicontínua superiormente em $\overline{\Omega}$, $v$ é semicontínua inferiormente em $\overline{\Omega}$, $\mathcal{I}u \geq f$ e $\mathcal{I}v \leq f$, então, pelo Teorema 1.2 temos $M^+(u - v) \geq 0$ no sentido da viscosidade. Pelo Lema 1.9 temos que

$$\sup_{\Omega}(u - v) \leq \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}(u - v).$$

Como $u \leq v$ em $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, segue que $\sup_{\Omega}(u - v) \leq 0$ e com isso $u \leq v$ em $\Omega$. □

## 1.3 A estimativa ABP não-local

Nnesta seção, iremos provar uma estimativa do tipo Aleksandrov-Bakel'man-Pucci (ABP) para soluções de uma certa inequação envolvendo o operador maximal de Pucci Não-Local. Este resultado desempenha um papel extremamente importante em diversas áreas da Análise às Equações Diferenciais como na prova de desigualdades de Autovalores, Isoperimétricas, Sobolev (ver (CABRÉ, 2017)) e, no nosso caso, para dar acesso à Teoria de Regularidade. Isto acontece pois o ABP é a ferramenta que permite passarmos de estimativas em medida para estimativas pontuais, como veremos em seções posteriores.

Paralelamente ao caso local, é conhecido (ver (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995)) que se $u$ resolve

$$\mathcal{M}^{+}(D^2u, \lambda, \Lambda) \geq -f(x) \quad \text{em} \quad B_1, \tag{1.12}$$

e $u \leq 0$ em $\partial B_1$, então

$$\sup_{B_1} u^{+} \leq C \left( \int_{B_1 \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^{+})^{n} dx \right)^{1/n}, \tag{1.13}$$

onde $\Gamma_u$ é o envelope côncavo de $u$. De maneira intuitiva, este resultado nos diz que se não for muito 'convexa'(cujo controle é dado pelo lado direito de (1.12)) então vale uma limitação do tipo (1.13). O surpreendente desta estimativa é que pouco importa o comportamento da função $u$ fora do conjunto de contato $\{u = \Gamma_u\}$, as propriedades intrínsecas ao problema estão atreladas à este conjunto.

Nesta linha de pensamento, Caffarelli e Silvestre, em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009), tentam adaptar este resultado para soluções de equações Não-Locais. Para isso, é necessário um cuidado a mais devido aos efeitos Não-Locais causados pela natureza do operador. O primeiro problema proveniente disto é a dificuldade em se definir o envelope côncavo, uma vez que, fora do domínio da equação, não necessariamente temos um controle da convexidade e/ou concavidade como ocorre para operadores de segunda ordem locais. Ainda assim, aproveitando a definição do envelope côncavo no caso Local, temos a seguinte definição: se $u$ é uma função não-positiva em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$, então seu envelope côncavo $\Gamma$ em $B_3$ é definido por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \min\{p(x) : \text{para todos planos} \quad p \geq u^{+}\text{em} \quad B_3\} & \text{em } B_3 \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_3. \end{cases}$$

Podemos entender o envelope côncavo como o desenho côncavo de $u$. Denotaremos por $\Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_1$ o conjunto de contato de $u$ com seu envelope côncavo em $B_1$. É importante ressaltar que a análise será concentrada neste conjunto, pois, como comentado acima, este carrega informações cruciais da função em questão.

A seguir apresentaremos o primeiro Lema desta seção. Relembre a definição de superdiferencial de uma função côncava em ($B$.1). Este resultado reforça, mais uma vez, a importância do conjunto $\Sigma$.

**Lema 1.10.** *Seja $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$. Considere $\Gamma$ o envelope côncavo de $u$ em $B_3$. Assuma $M^+_{\mathcal{L}_0} u(x) \geq -f(x)$ em $B_1$. Seja $\rho_0 = 1/(8\sqrt{n})$, $r_k = \rho_0 2^{\frac{-1}{(2-\sigma)}-k}$ e $R_k(x) = B_{r_k}(x) \backslash B_{r_{k+1}}(x)$. Existe uma constante $C_0$ dependendo apenas de $n$ e $\lambda$, mas não de $\sigma$, tal que para qualquer $x \in \{u = \Gamma\}$ e qualquer $M > 0$ existe um $k$ tal que*

$$|R_k(x) \cap \{u(y) < u(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - Mr_k^2\}| \leq C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)| \tag{1.14}$$

*onde $\nabla\Gamma$ representa o superdiferencial de $\Gamma$ em $x$, que irá coincidir com o gradiente de $\Gamma$ e também o gradiente de $u$ quando estas funções são diferenciáveis.*

*Demonstração.* Como $x \in \{u = \Gamma\}$, existe um plano $P$ que toca o gráfico de $u$ por cima em $x$. Dessa forma pelo Lema 1.2, $M^+_{\mathcal{L}_0} u$ está definido classicamente em $x$ e temos

$$M^+_{\mathcal{L}_0} u(x) = (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq -f(x).$$

Lembre que $\delta(u,x,y) = u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)$ e $u(x) = \Gamma(x) = P(x)$ para algum plano $P$ que está acima de $u$ em $B_3$. Daí, se $x+y$ e $x-y$ pertencem a $B_3$ então $u(x) \geq u(x+y)$ e $u(x) \geq u(x-y)$ e com isso $\delta(u,x,y) \leq 0$. Caso $x+y$ ou $x-y$ não pertença a $B_3$, então ambos não pertencem a $B_1$ e como $u$ é negativa fora de $B_1$ por hipótese, segue que $\delta(u,x,y) \leq 0$. Dessa maneira,

$$-f(x) \leq M^+_{\mathcal{L}_0} u(x) = (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq (2-\sigma)\lambda \int_{B_{r_0}(x)} \frac{-\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy,$$

onde $r_0 = \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$.Perceba que $B_{r_0}(x) = \bigcup_k B_{r_k}(x) \backslash B_{r_{k+1}}(x) = \bigcup_k R_k(x)$. Com isso, temos

$$-f(x) \leq (2-\sigma)\lambda \int_{B_{r_0}(x)} \frac{-\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy = (2-\sigma)\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k(x)} \frac{-\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy,$$

e por isto,

$$f(x) \geq (2-\sigma)\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k(x)} \frac{\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Agora suponha, por contradição, que (1.14) não vale. Com isso, temos que, como $R_k(x) \cap A \subset R_k(x)$, onde $A = \{u(y) < u(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - Mr_k^2\}$, segue que

$$f(x) \geq (2-\sigma)\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k(x) \cap A} \frac{\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Agora, note que se $y \in R_k(x) \cap A$, temos $u(x+y) < u(x) + y.\nabla\Gamma(x) - Mr_k^2$ e $u(x-y) < u(x) - y.\nabla\Gamma(x) - Mr_k^2$. Daí, obtemos $\delta(u,x,y) \leq -2Mr_k^2$. Como $\delta(u,x,y) \leq 0$ segue que $\delta^-(u,x,y) = -\delta(u,x,y) > 2Mr_k^2$. Daí,

$$f(x) \geq (2-\sigma)\lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2Mr_k^2 \int_{R_k(x) \cap A} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Como $y \in R_k(x)$,

$$\int_{R_k(x)\cap A} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \int_{R_k(x)\cap A} \frac{1}{r_k^{n+\sigma}} dy \geq \frac{1}{r_k^{n+\sigma}} |R_k(x) \cap A|.$$

Pela hipótese de contradição

$$|R_k(x) \cap A| > C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)|.$$

Combinando as estimativas, obtemos

$$f(x) \geq (2-\sigma)\lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2M \frac{r_k^2}{r_k^{\sigma}} \frac{1}{r_k^n} \frac{C_0 f(x)}{M} |R_k(x)| = (2-\sigma)\lambda\alpha(n)C_0 f(x) \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{2-\sigma},$$

onde usamos $|R_k(x)| = \alpha(n)(r_k^n - r_{k+1}^n) = \frac{\alpha(n)}{2} r_k^n$. Como $r_k = \rho_0 2^{-k} 2^{-1/(2-\sigma)}$ temos que $r_k^{2-\sigma} = \rho_0^{2-\sigma} 2^{-k(2-\sigma)} 2^{-1}$ e portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(2-\sigma)} 2^{-1} \rho_0^{2-\sigma} = 2^{-1} \rho_0^{2-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(2-\sigma)} \geq 2^{-1} \rho_0^2 \left( \frac{1}{1 - 2^{-(2-\sigma)}} \right).$$

Daí,

$$f(x) \geq (2-\sigma) C(n,\lambda) C_0 \frac{\rho_0^2}{1 - 2^{-(2-\sigma)}} f(x),$$

como $0 < \sigma < 2$, temos que $\frac{(2-\sigma)}{1-2^{-(2-\sigma)}}$ permanece limitado por baixo. Dessa maneira,

$$f(x) \geq C(n,\lambda) C_0 f(x).$$

Tomando $C_0$ suficientemente grande, obtemos uma contradição e temos o desejado. □

O próximo Lema será importante para mostrar que a estimativa no Lema anterior garante um deslocamento quadrático uniforme de $\Gamma$ com respeito a seu plano tangente. Mais precisamente temos o seguinte lema.

**Lema 1.11.** *Seja $\Gamma$ uma função côncava em $B_r$. Assuma que para $\epsilon$ pequeno tenhamos*

$$|\{y : \Gamma(y) < \Gamma(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - h\} \cap (B_r(x) \backslash B_{r/2}(x))| \leq \epsilon |B_r(x) \backslash B_{r/2}(x)| \tag{1.15}$$

*então $\Gamma(y) \geq \Gamma(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - h$ em $B_{r/2}(x)$.*

*Demonstração.* Considere $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ e $y_1$ e $y_2$ em $B_r(x) \backslash B_{\frac{r}{2}}(x)$ tal que

1. $y = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$, e

2. $|y_1 - x| = |y_2 - x| = \frac{3}{4} r$

para algum $\alpha \in (0,1)$, o que é sempre possível devido à convexidade de $\bar{B}_{3r/4}$.Consideremos as bolas $B_1 = B_{\frac{r}{4}}(y_1)$ e $B_2 = B_{\frac{r}{4}}(y_2)$. Estas bolas são simétricas com respeito a $y$ e estão completamente contidas em $B_r(x)\backslash B_{\frac{r}{2}}(x)$. Como

$$|\{y : \Gamma(y) < \Gamma(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - h\} \cap (B_r(x)\backslash B_{r/2}(x))| \leq \epsilon |B_r(x)\backslash B_{r/2}(x)|,$$

se $\epsilon$ for pequeno o suficiente, poderemos encontrar pontos $z_1 \in B_1$ e $z_2 \in B_2$ tais que vale

1. $\Gamma(z_1) \geq \Gamma(x) + (z_1 - x).\nabla\Gamma(x) - h$,
2. $\Gamma(z_2) \geq \Gamma(x) + (z_2 - x).\nabla\Gamma(x) - h$.

E além disso, essa escolha pode ser feita de tal maneira que temos $y = \alpha_1 z_1 + (1-\alpha_1) z_2$, com $\alpha_1 \in (0,1)$. Pela concavidade $\Gamma$, temos

$$\Gamma(y) = \Gamma(\alpha_1 z_1 + (1-\alpha_1)z_2) \geq \alpha_1\Gamma(z_1) + (1-\alpha)\Gamma(z_2).$$

Daí, fazendo a multiplicação e somando as desigualdades abaixo

1. $\alpha_1\Gamma(z_1) \geq \alpha_1\Gamma(x) + \alpha_1(z_1 - x).\nabla\Gamma(x) - \alpha_1 h$,
2. $(1-\alpha_1)\Gamma(z_2) \geq (1-\alpha_1)\Gamma(x) + (1-\alpha_1)(z_2 - x).\nabla\Gamma(x) - (1-\alpha_1)h$.

Desta maneira, pela concavidade de $\Gamma$,

$$\Gamma(y) \geq \alpha_1\Gamma(z_1) + (1-\alpha_1)\Gamma(z_2) \geq \Gamma(x) + (y-x).\nabla(x) - h.$$

□

O lema (1.11) é um lema sem relação com EDP's e sua demonstração é um fato da Análise Convexa. Com este lema temos o seguinte corolário que também é livre de EDP's.

**Corolário 1.2.** *Para qualquer $\epsilon_0 > 0$ existe uma constante $C$ tal que para qualquer função $u$ nas hipóteses do Lema 1.10 existe um $r \in (0, \rho_0 2^{\frac{-1}{2-\sigma}})$ tal que*

$$\frac{|\{y \in B_r(x)\backslash B_{r/2}(x) : u(y) < u(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - Cf(x)r^2\}|}{|B_r(x)\backslash B_{r/2}(x)|} \leq \epsilon_0 \tag{1.16}$$

*e*

$$|\nabla\Gamma(B_{r/4}(x))| \leq Cf(x)^n |B_{r/4}(x).| \tag{1.17}$$

*Demonstração.* Basta tomar $M = \frac{Cf(x)}{\epsilon_0}$ no Lema 1.10 e daí, (1.16) segue. Para obtermos a segunda estimativa, defina $F(y) = \Gamma(y) - \Gamma(x) - \nabla\Gamma(x).(y-x) + Cf(x)r^2$. Como $\Gamma$ é côncava, então $\Gamma(y) \leq \Gamma(x) + \nabla\Gamma(x).(y-x)$, daí segue que $F(y) \leq Cf(x)r^2$ para todo $y \in B_{r/2}(x)$ e além disso, do Lema 1.11, temos $F(y) \geq 0$ em $B_{r/2}(x)$. Como $\Gamma$ é côncava, temos que $F$ é côncava. Além disso, como $F(y) \leq Cf(x)r^2$, temos por $B.1$ que

$$|\nabla F(y)| = |\nabla\Gamma(y) - \nabla\Gamma(x)| \leq C_2 f(x)r^2, \quad y \in B_{r/4}(x).$$

Isto significa que

$$\nabla\Gamma(B_{r/4}(x)) \subset B_{c_2 f(x)r^2}(\nabla\Gamma(x)).$$

Por consequência,

$$|\nabla\Gamma(B_{r/4}(x))| \leq |B_{c_2 f(x)r^2}(\nabla\Gamma(x))| = \alpha(n)C_2^n f^n(x)r^{2n}.$$

Como $r^2 < r$, temos $\alpha(n)C_2^n f^n(x)r^{2n} \leq \alpha(n)C_2^n f^n(x)r^n\frac{4^n}{4^n} = 4^n C_2^n f^n(x)(r/4)^n\alpha(n)$. Por fim,

$$|\nabla\Gamma(B_{r/4}(x))| \leq C(n)f^n(x)|B_{r/4}(x)|.$$

□

Agora notemos o seguinte detalhe. Na prova do ABP no caso Local, se $M = \sup u^+ = u^+(x_0)$, então o cone $C$ (em $\mathbb{R}^{n+1}$) com vértice em $(x_0, -M)$ e base em $\partial B_3 \times \{0\}$ possuía uma propriedade curiosa; qualquer hiperplano (em $\mathbb{R}^{n+1}$) da forma

$$x_{n+1} = -M + \xi.(x - x_0), \quad \text{tal que} \quad |\xi| < M/3,$$

possuía um hiperplano paralelo de suporte para $u^+$ em algum ponto $x^* \in B_1$, e por isso,

$$B_{\frac{M}{3}} \subseteq \nabla\Gamma_u(B_1).$$

Isto nos fornece a seguinte estimativa

$$\alpha(n)\frac{M^n}{3^n} \leq |\nabla\Gamma_u(B_1)|,$$

e consequentemente

$$\sup u^+ \leq C(n)\,|\nabla\Gamma_u(B_1)|.$$

A estimativa obtida acima é essencial para obter o ABP, desde que $\Gamma_u$ seja regular o suficiente. No caso não-local tal regularidade não é esperada para o envelope definido, porém podemos reproduzir o mesmo raciocínio utilizando o superdiferencial(que funciona como se fosse o gradiente) e o deslocamento quadrático de $\Gamma$(e de $u$) dos seus planos tangentes para obter um resultado um pouco mais grosseiro.

**Lema 1.12.** *Seja $B_r(x)$ com $x \in \Sigma$ sendo a família de bolas construídas no Lema 1.10, então*

$$\left|\bigcup_{x\in\Sigma} B_r(x)\right| \geq C(\sup u)^n.$$

*Demonstração.* Lembre que $\Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_1$, é o conjunto de contato de $u$ com seu envelope côncavo. Consideremos a cobertura aberta para $\Sigma$ citada acima e aplicamos o Teorema de Recobrimento de Besicovitch $B.2$ nesta cobertura. Com isso cada ponto de $\Gamma$ pertencerá a no máximo $C(n) > 0$ elementos da cobertura. Como $\Gamma$ tem crescimento quadrático em cada $B_j$ desta cobertura, então pelo Corolário 1.2 temos

$$|\nabla\Gamma(B_j)| \leq C|B_j|.$$

Com isso,

$$(\sup u)^n = (\sup \Gamma)^n \leq C|\nabla\Gamma(B_3)| = C|\nabla\Gamma(\Sigma)|.$$

Além disso, temos

$$|\nabla\Gamma(\Sigma)| = |\nabla\Gamma(\cup B_j)| \leq \sum_j |\nabla\Gamma(B_j)| \leq \sum_j |B_j|.$$

Como a cobertura tem overlap limitado, podemos comparar

$$\sum_j |B_j| \leq C(n) \left| \bigcup_{x\in\Sigma} B_r(x) \right|,$$

e assim segue o desejado. $\square$

Por fim desta seção, provemos a estimativa ABP Não-Local que reproduz a estimativa original no limite.

**Teorema 1.3.** *Sejam $u$ e $\Gamma$ funções como no Lema 1.10. Existe uma família finita de cubos abertos $Q_j$ com diâmetro $d_j$ tal que o seguinte vale*

1. *Os cubos $Q_j$ são dois a dois disjuntos.*
2. $\{u = \Gamma\} \subset \bigcup \bar{Q}_j$.
3. $\{u = \Gamma\} \bigcap \bar{Q}_j \neq \emptyset$ *para qualquer* $Q_j$.
4. $d_j \leq \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$, *onde* $\rho_0 = 1/(8\sqrt{n})$.
5. $|\nabla\Gamma(\bar{Q}_j)| \leq C(\max_{\bar{Q}_j} f)^n |Q_j|$.
6. $|\{y \in 8\sqrt{n}Q_j : u(y) > \Gamma(y) - C(\max_{\bar{Q}_j} f)d_j^2\}| \geq \mu|Q_j|$.

*A constante $C > 0$ e $\mu > 0$ dependem de $n, \lambda$ e $\Lambda$ mas não de $\sigma$.*

*Demonstração.* Seja $\{Q_j\}$ uma cobertura aberta para $\bar{B}_1$ de cubos $Q_j$ de diâmetro $d_j$ menor ou igual a $\rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$. Como $\bar{B}_1$ é compacto, podemos extrair uma cobertura finita. Descartamos todos os cubos que não intersectam o conjunto de contato $\{u = \Gamma\}$. Além disso, essa construção pode ser feita de tal maneira que as condições de 1 a 4 sempre valem. O problema é que pode

existir, eventualmente, um cubo que não satisfaça as condições restantes 5 e 6. Daí, repartimos este cubo que houve falha em $2^n$ cubos cujo diâmetro vale metade do original. A ideia é mostrar que este processo de repartição de cubos acaba em um número finito de passos. Desta maneira, suponha por contradição que o processo não acaba após um número finito de passos, em outras palavras, existe um cubo $Q_j$ da cobertura inicial que, ao ser repartido, irá conter pelo menos um cubo que também não satisfaz o desejado. Como o processo é infinito, iremos encontrar uma família de cubos encaixados. Com isso, a intersecção dos fechos dessa família de cubos, por serem encaixados, será um ponto (digamos $x_0$). Como todos estes cubos intersectam o conjunto de contato $\{u = \Gamma\}$, então $u(x_0) = \Gamma(x_0)$.
Pelo Corolário 1.2, temos que dado $\epsilon_0 > 0$, existe um raio $r$, com $0 < r \leq \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$ tal que

$$\frac{|\{y \in B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0) : u(y) < u(x) + (y-x).\nabla\Gamma(x) - Cf(x)r^2\}|}{|B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0)|} \leq \epsilon_0 \tag{1.18}$$

e

$$|\nabla\Gamma(B_{r/4}(x_0))| \leq Cf(x_0)^n |B_{r/4}(x_0)|. \tag{1.19}$$

Pela comparatividade entre cubos e bolas, existe um cubo $Q_j$, com $x_0 \in \bar{Q}_j$, com um certo diâmetro $d_j$, tal que $r/4 \leq d_j < r/2$. Dessa maneira, temos que

$$\bar{Q}_j \subset B_{r/2}(x_0), \quad B_r(x_0) \subset 8\sqrt{n}Q_j,$$

pois se $y \in \bar{Q}_j$, $|y - x_0| \leq d_j < r/2$, então $y \in B_{r/2}(x_0)$. Caso $y \in B_r(x_0)$, então $|y - x_0| < r \leq 4d_j < 8\sqrt{n}d_j$ e consequentemente $y \in 8\sqrt{n}Q_j$.
Lembre que, da concavidade de $\Gamma$ em $B_2$, temos

$$\Gamma(y) \leq \Gamma(x_0) + (y - x_0).\nabla\Gamma(x_0) = u(x_0) + (y - x_0).\nabla\Gamma(x_0).$$

Com isso, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|\{y \in 8\sqrt{n}Q_j : u(y) \geq \Gamma(y) - c(\max_{\bar{Q}_j} f)d_j^2\}| &\geq \\
|\{y \in 8\sqrt{n}Q_j : u(y) \geq u(x_0) + (y-x_0).\nabla\Gamma(x_0) - c(\max_{\bar{Q}_j} f)d_j^2\}| &\geq \\
|\{y \in 8\sqrt{n}Q_j : u(y) \geq u(x_0) + (y-x_0).\nabla\Gamma(x_0) - cf(x_0)r^2\}| &\geq \\
|\{y \in B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0) : u(y) \geq u(x_0) + (y-x_0).\nabla\Gamma(x_0) - cf(x_0)r^2\}| &\geq \\
(1-\epsilon_0)|B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0)|&.
\end{aligned}$$

Onde usamos o fato de $cf(x_0)r^2 \leq c(\max_{\bar{Q}_j} f)d_j^2$ , $B_r(x_0) \subset 8\sqrt{n}Q_j$ e (1.18) para estimar

$$|B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0)| = |A| + |B| \leq \epsilon_0 |B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0)| + |B|.$$

onde

$$B = \{y \in B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0) : u(y) \geq u(x_0) + (y-x_0).\nabla\Gamma(x_0) - cf(x_0)r^2\}$$

e

$$A = \{y \in B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0) : u(y) < u(x_0) + (y - x_0).\nabla\Gamma(x_0) - cf(x_0)r^2\}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon_0)|B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0)| &\leq \\ \{y \in B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0) : u(y) \geq u(x_0) + (y - x_0).\nabla\Gamma(x_0) - cf(x_0)r^2\}|. \end{aligned}$$

Daí,

$$(1 - \epsilon_0)|B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0)| = (1 - \epsilon_0)cr^n \geq (1 - \epsilon_0)cd_j^n \geq \mu|Q_j|.$$

Com isto, o item (6) do Teorema é válido. Como $\bar{Q}_j \subset B_r(x_0)$ e (1.19) então o item 5 do Teorema também vale para $Q_j$ e com isso, $Q_j$ não se repartiria. Contradição. □

**Observação 1.1.** *É importante destacar que podemos reproduzir as estimativas do caso Local quando $\sigma \to 2$. Primeiro perceba que à medida que $\sigma$ se aproxima de 2, os diâmetros $\rho_0$ se tornam pequenos. Assim,*

$$\sum_j \left|\nabla\Gamma(Q_j)\right| \leq \sum_j C(\max_{\bar{Q}_j} f^+)^n |Q_j|.$$

*O lado direito da expressão acima se torna próxima da soma de Riemman com respeito à integral de $(f^+)^n$ em $\{u = \Gamma\}$. Daí, temos*

$$|\nabla\Gamma(\{u = \Gamma\})| \leq \left|\nabla\Gamma(\cup Q_j)\right| \leq \sum_j \left|\nabla\Gamma(Q_j)\right| \leq \int_{\{u=\Gamma\}} (f^+)^n dx.$$

## 1.4 Uma função Especial

Nesta seção iremos construir uma função barreira que denotaremos por função especial. A necessidade de tal construção é para forçar a não-negatividade de $u$ em uma região maior para que possamos usar a Estimativa ABP obtida na seção anterior. Para isso, construímos uma função que é subsolução para uma equação envolvendo o operador minimal fora de uma certa bola e é estritamente positiva numa bola maior. Isto será de grande importância para forçar que o conjunto de contato permaneça dentro de uma certa região, ou seja, para forçar o contato da solução com seu conjunto de contato.

**Lema 1.13.** *Existe $p > 0$ e $\sigma_0 \in (0, 2)$ tal que a função*

$$f(x) = \min(2^p, |x|^{-p})$$

*é uma subsolução para*

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f(x) \geq 0, \tag{1.20}$$

*para todo $\sigma \in (\sigma_0, 2)$ e $|x| > 1$.*

*Demonstração.* É suficiente mostrar (1.20) para $x = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, pois se $|x| = 1$, então através de uma rotação $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{R}(e_i) = x$ temos

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f(x) = (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda(f(\mathcal{R}(e_1)+y) + f(\mathcal{R}(e_1)-y) - f(\mathcal{R}(e_1)))^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Como $\mathcal{R}$ é linear, $|\mathcal{R}(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ e $f$ é radial, fazendo a mudança de variável $z = \mathcal{R}^{-1}y$, teremos $\delta(f, \mathcal{R}(e_1), y) = \delta(f, e_1, z)$ e $dy = |det(\mathcal{R})|dz$. Dessa forma,

$$(2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda(\delta(f, \mathcal{R}(e_1), y))^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy = (2-\sigma)|det(\mathcal{R})| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta(f, e_1, z)^+ - \Lambda\delta^-}{|z|^{n+\sigma}} dz.$$

Assim, $M^-_{\mathcal{L}_0} f(x) = |det(\mathcal{R})| M^-_{\mathcal{L}_0} f(e_1)$. Além disso, se $|x| > 1$, definimos $g(y) = |x|^p f(|x|y)$. Perceba que $g(y) \geq f(y)$ pois

$$g(y) = |x|^p \min\{2^p, |x|^{-p}|y|^{-p}\} \geq 2^p|x|^p > 2^p,$$

e também

$$g(y) = |x|^p \min\{2^p, |x|^{-p}|y|^{-p}\} \geq |x|^p|x|^{-p}|y|^{-p} = |y|^{-p}.$$

Consequentemente, $g(y) \geq \min(2^p, |y|^{-p}) = f(y)$. Com esta informação e do fato de $M^-_{\mathcal{L}_0} f(x) \geq |x|^{-p-\sigma} M^-_{\mathcal{L}_0} f(\frac{x}{|x|})$, pois como $\delta\left(g, \frac{x}{|x|}, y\right) = |x|^p \delta(f, x, |x|y)$, fazendo a mudança de variável $z = |x|y$ iremos obter $dy = |x|^{-n}dz$. Dessa maneira,

$$M^-_{\mathcal{L}_0} g\left(\frac{x}{|x|}\right) = (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta\left(g, \frac{x}{|x|}, y\right)^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy = (2-\sigma)|x|^p|x|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta\,(f, x, z)^+ - \Lambda\delta^-}{||x|^{-1}z|^{n+\sigma}} dz,$$

e portanto

$$M^-_{\mathcal{L}_0} g\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{p+\sigma} M^-_{\mathcal{L}_0} f(x).$$

Consequentemente,

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f(x) = |x|^{-p-\sigma} M^-_{\mathcal{L}_0} g\left(\frac{x}{|x|}\right) \geq |x|^{-p-\sigma} M^-_{\mathcal{L}_0} f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Feita estas reduções, considere $x = e_1$. Relembre as seguintes relações para qualquer $a > b > 0$ e $q > 0$,

$$(a+b)^{-q} \geq a^{-q}\left(1 - q\frac{b}{a}\right), \tag{1.21}$$

$$(a+b)^{-q} + (a-b)^{-q} \geq 2a^{-q} + q(q+1)b^2a^{-q-2}. \tag{1.22}$$

Então, para $|y| < 1/2$,

$$\begin{aligned}
\delta &= |x+y|^{-p} + |x-y|^{-p} - 2|x|^{-p} \\
&= \langle e_1 + y, e_1 + y \rangle^{\frac{-p}{2}} + \langle e_1 - y, e_1 - y \rangle^{\frac{-p}{2}} - 2 \\
&= (1 + 2y_1 + |y|^2)^{\frac{-p}{2}} + (1 - 2y_1 + |y|^2)^{\frac{-p}{2}} - 2.
\end{aligned}$$

Usando a relação (1.22) com $a = (1 + |y|^2)$ e $b = 2y_1$, temos

$$\begin{aligned}\delta &\geq 2(1+|y|^2)^{\frac{-p}{2}} + \tfrac{p}{2}\left(\tfrac{p}{2}+1\right)(2y_1)^2(1+|y|^2)^{\frac{-p}{2}-2} - 2\\ &= 2(1+|y|^2)^{\frac{-p}{2}} + p\,(p+2)\,y_1^2(1+|y|^2)^{\frac{-p}{2}-2} - 2.\end{aligned}$$

Pela relação (1.21), temos que $2(1+|y|^2)^{\frac{-p}{2}} \geq 2(1-\frac{p}{2}|y|^2) = 2 - p|y|^2$ e da mesma maneira $(1+|y|^2)^{\frac{-p}{2}-2} \geq (1-(\frac{p}{2}+2)|y|^2)$. Com isso,

$$\begin{aligned}\delta &\geq -p|y|^2 + p(p+2)y_1^2(1-(\tfrac{p}{2}+2)|y|^2)\\ &= p(-|y|^2(p+2)y_1^2 - \tfrac{1}{2}(p+2)(p+4)y_1^2|y|^2).\end{aligned}$$

Agora escolhemos $p$ grande de tal forma que

$$(p+2)\lambda\int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y) - \lambda|\partial B_1| = \delta_0 > 0,$$

e vamos estimar $M^-_{\mathcal{L}_0} f(e_1)$. Note que em $B_r$, com $r < \frac{1}{4}$, temos $f(y+e_1) = |y+e_1|^{-p}$ e $f(e_1-y) = |y-e_1|^{-p}$. Além disso, usando do fato de $\delta^+(f,e_1,y) \geq \delta^(f,e_1,y) = |y+e_1| + |y-e_1| - 2|e_1|$, temos

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f(e_1) = (2-\sigma)\left(\int_{B_r}\frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}}dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}}dy\right).$$

Agora observe que

$$\lambda\int_{B_r}\frac{\delta^+}{|y|n+\sigma}dy \geq \lambda p\int_{B_r}\frac{-|y|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy + \lambda p(p+2)\int_{B_r}\frac{y_1^2}{|y|^{n+\sigma}}dy - \lambda\frac{1}{2}(p+2)(p+4)\int_{B_r}\frac{y_1^2|y|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Como $-y_1^2 \geq -|y|^2$ e usando coordenadas polares para a integração, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\int_{B_r}\frac{\delta^+}{|y|n+\sigma}dy &\geq \lambda p\int_0^r\frac{-s^2}{s^{n+\sigma}}|\partial B_s|ds + \lambda p(p+2)\int_0^r\frac{1}{s^{n+\sigma}}\left(\int_{\partial B_s} y_1^2 dS(y)\right)ds\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\lambda p(p+2)(p+4)\int_0^r\frac{s^4}{s^{n+\sigma}}|\partial B_s|ds.\end{aligned}$$

Como $|\partial B_s| = s^n|\partial B_1|$ e pela mudança de variável $y = sz$,

$$\int_{\partial B_s} y_1^2 dS(y) = s^2 s^{n-1}\int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y),$$

temos que

$$\begin{aligned}\lambda\int_{B_r}\frac{\delta^+}{|y|n+\sigma}dy &\geq \lambda p|\partial B_1|\int_0^r\frac{-s^2}{s^{1+\sigma}}ds + \lambda p(p+2)\int_0^r\frac{s^2}{s^{1+\sigma}}ds\left(\int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y)\right)\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\lambda p(p+2)(p+4)|\partial B_1|\int_0^r\frac{s^4}{s^{1+\sigma}}ds\\ &= p\int_0^r\frac{s^2}{s^{1+\sigma}}ds\left((p+2)\lambda\int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y) - \lambda|\partial B_1|\right)\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\lambda p(p+2)(p+4)|\partial B_1|\int_0^r\frac{s^4}{s^{1+\sigma}}ds\\ &\geq p\int_0^r\frac{s^2}{s^{1+\sigma}}ds\left((p+2)\lambda\int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y) - \Lambda|\partial B_1|\right)\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\lambda p(p+2)(p+4)|\partial B_1|\int_0^r\frac{s^4}{s^{1+\sigma}}ds,\end{aligned}$$

onde usamos, na última desigualdade, que $\lambda \leq \Lambda$. Calculando as integrais

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{s^2}{s^{1+\sigma}} ds &= \tfrac{1}{2-\sigma} r^{2-\sigma} \\ \int_0^r \frac{s^4}{s^{1+\sigma}} ds &= \tfrac{1}{4-\sigma} r^{4-\sigma}, \end{aligned}$$

finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B_r} \frac{\delta^+}{|y|^{n+\sigma}} dy &\geq p \frac{1}{2-\sigma} r^{2-\sigma} \left( (p+2)\lambda \int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y) - \Lambda |\partial B_1| \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda p(p+2)(p+4) |\partial B_1| \frac{1}{4-\sigma} r^{4-\sigma}. \end{aligned}$$

Para estimar a parte negativa, usamos o fato de $f \in C^2$ e assim, pela expansão de taylor,

$$\begin{aligned} f(y+e_1) &= f(e_1) + \langle \nabla f(e_1), y \rangle + \tfrac{1}{2} \left\langle H_f(e_1) y, y \right\rangle + O(|y|^2) \\ f(y-e_1) &= f(e_1) - \langle \nabla f(e_1), y \rangle + \tfrac{1}{2} \left\langle H_f(e_1) y, y \right\rangle + O(|y|^2). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|\delta(f, e_1, y)| = |f(e_1+y) + f(e_1-y) - 2f(e_1)| = O(|y|^2).$$

Agora usamos o fato de $\delta^-(f, e_1, y) \leq |\delta(f, e_1, y)|$ e assim

$$\int_{B_r} \frac{-\Lambda \delta^-(f, e_1, y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \int_{B_r} \frac{-\Lambda |\delta(f, e_1, y)|}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq -C\Lambda \int_{B_r} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}} dy = -C\Lambda |\partial B_1| \frac{r^{2-\sigma}}{2-\sigma}.$$

Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy &\geq p \tfrac{1}{2-\sigma} r^{2-\sigma} \left( (p+2)\lambda \int_{\partial B_1} y_1^2 dS(y) - \Lambda |\partial B_1| \right) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \lambda p(p+2)(p+4) |\partial B_1| \tfrac{1}{4-\sigma} r^{4-\sigma} - C\Lambda |\partial B_1| \tfrac{1}{2-\sigma} r^{2-\sigma} \\ &\geq C_1 p \tfrac{1}{2-\sigma} r^{2-\sigma} \delta_0 - \tfrac{1}{2} \lambda p(p+2)(p+4) |\partial B_1| \tfrac{1}{4-\sigma} r^{4-\sigma}. \end{aligned}$$

Note também que como $0 \leq f(x) \leq 2^p$ e $\lambda\delta^+ \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy &\geq -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{\Lambda 2^p}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= -|\partial B_1| \Lambda \int_r^\infty \frac{2^p}{s^{1+\sigma}} ds \\ &= -\frac{1}{\sigma} |\partial B_1| 2^p r^{-\sigma}. \end{aligned}$$

Agora prosseguimos com a conta,

$$\begin{aligned}
M^-_{\mathcal{L}_0} f(e_1) &= (2-\sigma)\left(\int_{B_r} \frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} \frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy\right) \\
&\geq (2-\sigma)\left(\int_{B_r} \frac{\lambda\delta^+}{|y|^{n+\sigma}} dy - \int_{B_r} \frac{\Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} \frac{\Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy\right) \\
&\geq (2-\sigma)\left(C_1 p \frac{1}{2-\sigma} r^{2-\sigma}\delta_0 - \frac{1}{2}\lambda p(p+2)(p+4)|\partial B_1| \frac{1}{4-\sigma} r^{4-\sigma}\right) \\
&\quad -(2-\sigma)\frac{1}{\sigma}|\partial B_1| 2^p r^{-\sigma} \\
&= C_1 p r^{2-\sigma}\delta_0 - (2-\sigma)\frac{1}{2}\lambda p(p+2)(p+4)|\partial B_1| \frac{1}{4-\sigma} r^{4-\sigma} \\
&\quad -(2-\sigma)\frac{1}{\sigma}|\partial B_1| 2^p r^{-\sigma}.
\end{aligned}$$

Note que $(2-\sigma) \to 0$ quando $\sigma \to 2$. Dessa forma, é possível escolher $\sigma_0$ próximo o suficiente de 2 de tal forma que o segundo e terceiro termo da expressão acima ficam suficientemente pequenos. Com isto, teremos

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f(e_1) \geq \frac{C_1 r^{2-\sigma} p\delta_0}{2} > 0,$$

como queríamos. □

Através de um simples scalling, obtemos o seguinte corolário do Lema anterior.

**Corolário 1.3.** *Dado qualquer $\sigma_0 \in (0,2)$ e $r > 0$ existe um $p > 0$ e $\delta$ tal que a função*

$$f_\delta(x) = \min(\delta^{-p}, |x|^{-p})$$

*é uma subsolução para*

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f(x) \geq 0,$$

*para todo $\sigma \in (\sigma_0, 2)$ e $|x| > r$.*

*Demonstração.* Pelos comentários feitos no resultado anterior, faremos a demonstração para $|x| = r = 1$. Considere $\sigma_1$ e $p_0$ do Lema 1.13. Dessa maneira, sabemos que este corolário é válido para $\delta = \frac{1}{2}$ e $p = p_0$, que é exatamente o Lema 1.13. Quando $\delta < \frac{1}{2}$, temos que

$$B_\delta \subset B_{1/2} \iff \mathbb{R}^n\setminus B_{1/2} \subset \mathbb{R}^n\setminus B_\delta.$$

Com isto, temos $|x| \geq \delta \iff |x|^p \geq \delta^p \iff |x|^{-p} \leq \delta^{-p}$, ou seja, $f_\delta \geq f_{1/2}$. Como $f_\delta(x) = f_{1/2}(x)$ então

$$M^-_{\mathcal{L}_0} f_\delta(x) \geq M^-_{\mathcal{L}_0} f_{1/2}(x) \geq 0,$$

para valores de $\sigma$ tais que $\sigma > \sigma_1$. A questão agora é escolher $\delta$ pequeno o suficiente para que o resultado valha para $\sigma \in (\sigma_0, \sigma_1]$. Para isso, lembre que se $p \geq n$, a função $|x|^{-p}$ não é integrável ao redor da origem. Escolhendo $p = \max\{p_0, n\}$ e seja $x = e_1$ como no Lema anterior. Com isso,

$$\begin{aligned} M^{-}_{\mathcal{L}_0} f_\delta(e_1) &= (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta^+}{|y|^{n+\sigma}}dy - (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Para estimar $I_2$, usamos o fato de $f_\delta \in C^2$ e assim, pela expansão de taylor,

$$\begin{aligned} f_\delta(y+e_1) &= f(e_1) + \langle \nabla f_\delta(e_1), y\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle H_{f_\delta}(e_1)y, y\right\rangle + O(|y|^2) \\ f_\delta(y-e_1) &= f(e_1) - \langle \nabla f_\delta(e_1), y\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle H_{f_\delta}(e_1)y, y\right\rangle + O(|y|^2). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|\delta(f_\delta, e_1, y)| = |f_\delta(e_1+y) + f_\delta(e_1-y) - 2f_\delta(e_1)| = O(|y|^2),$$

para $|y| < r$. Agora usamos o fato de $\delta^-(f_\delta, e_1, y) \leq |\delta(f_\delta, e_1, y)|$ e assim

$$\int_{B_r} \frac{-\Lambda\delta^-(f_\delta, e_1, y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \geq \int_{B_r} \frac{-\Lambda|\delta(f_\delta, e_1, y)|}{|y|^{n+\sigma}}dy \geq -C\Lambda\int_{B_r} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy = -C\Lambda|\partial B_1|\frac{1}{2-\sigma}r^{2-\sigma}.$$

Como $1/|y|^{n+\sigma}$ é integrável no infinito e $f_\delta$ é limitada por baixo, temos que

$$I_2 \geq -C_1,$$

com $C_1 > 0$. Para estimar $I_1$, note que

$$(|e_1+y|^{-p} + |e_1-y|^{-p} - 2)^+ \geq (|e_1+y|^{-p} + |e_1-y|^{-p} - 2).$$

Como $p \geq n$, o lado direito da expressão acima não é integrável na origem, consequentemente o lado esquerdo também não o será. Daí, a medida em que $\delta$ diminui, $I_1$ fica tão grande quanto queiramos e, em particular, podemos fazer $I_1 > C_1 \geq -I_2$. Com isto, obtemos

$$M^{-}_{\mathcal{L}_0} f_\delta(e_1) > 0.$$

$\square$

Vamos construir agora a função especial.

**Corolário 1.4.** *Dado qualquer $\sigma_0 \in (0,2)$, existe uma função $\phi$ tal que*

1. *$\phi$ é contínua no $\mathbb{R}^n$,*

2. *$\phi(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2\sqrt{n}}$,*

3. *$\phi(x) > 2$ para $x \in Q_3$ e*

4. *$M^{-}_{\mathcal{L}_0}\phi(x) > -\psi(x)$ no $\mathbb{R}^n$ para alguma função positiva $\psi(x)$ com suporte em $\overline{B}_{1/4}$.*

*Demonstração.* Sejam $p$ e $\delta$ do Corolário 1.3 com $r = \frac{1}{4}$. Considere

$$\phi = C \begin{cases} q & \text{em } B_\delta \\ |x|^{-p} - (2\sqrt{n})^{-p} & \text{em } B_{2\sqrt{n}} \backslash B_\delta \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{2\sqrt{n}}, \end{cases}$$

onde $q$ é um paraboloide quadrático escolhido de tal maneira que $\phi$ é $C^{1,1}$ ao longo de $\partial B_\delta$. Para que $\phi$ seja contínua no $\mathbb{R}^n$ basta olhar a transição da segunda sentença de $\phi$ para a terceira, pois a transição da primeira para a segunda é escolhida de tal maneira para que já seja suave. Mas se $|x| = 2\sqrt{n}$, então $|x|^{-p} = (2\sqrt{n})^{-p}$ e daí $|x|^{-p} - (2\sqrt{n})^{-p} = 0$. Diretamente da definição de $\phi$ temos que $\phi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2\sqrt{n}}$. Note que $Q_3 \subset B_{2\sqrt{n}}$. A constante $C$ é escolhida de tal forma que $\phi(x) > 2$ para $x \in Q_3$. Perceba também que $\phi$ é $C^{1,1}$ em $B_{2\sqrt{n}}$, uma vez que suas sentenças o são e a transição entre a primeira sentença e a segunda foi feita de tal maneira que a regularidade permanecesse. Daí, dos resultados de estabilidade, $M^-_{\mathcal{L}_0}\phi$ é contínua em $B_{2\sqrt{n}}$. Escrevendo

$$\phi_\delta = C \begin{cases} q & \text{em } B_\delta \\ f_\delta(x) - (2\sqrt{n})^{-p} & \text{em } B_{2\sqrt{n}} \backslash B_\delta \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{2\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Como $f_\delta(x) \leq |x|^{-p}$, temos que $\phi_\delta \leq \phi$. Consequentemente $M^-_{\mathcal{L}_0}\phi \geq M^-_{\mathcal{L}_0}\phi_\delta$. Do Corolário 1.3, temos que $M^-_{\mathcal{L}_0} f_\delta \geq 0$ para $|x| \geq 1/4$. Dessa forma, obtemos $M^-_{\mathcal{L}_0}\phi_\delta(x) \geq 0$ para $|x| \geq 1/4$ e o item 4 do Corolário segue. □

## 1.5 Estimativa Hölder $C^\alpha$

Nesta seção, iremos obter a Hölder continuidade no interior para funções que não são muito 'convexas' nem muito 'côncavas', ou seja, resolvem uma equação envolvendo os operadores extremais. No caso de equações envolvendo operadores elípticos de segunda ordem, temos que se $u$ resolve

$$\mathcal{M}^+(D^2u) \geq -|f| \quad \text{em} \quad Q_1$$
$$\mathcal{M}^-(D^2u) \leq |f| \quad \text{em} \quad Q_1,$$

então $u \in C^\alpha(\bar{Q}_{1/2})$ e vale a estimativa

$$||u||_{C^\alpha(\bar{Q}_{1/2})} \leq C\left(||u||_{L^\infty(Q_1)} + ||f||_{L^n(Q_1)}\right).$$

A ideia da demonstração desse resultado, como pode ser encontrado em ((CABRÉ; CAFFARELLI, 1995), Teorema 4.3), é controlar a oscilação em cubos(i.e, $o_r = \sup_{Q_r} u - \inf_{Q_r} u$) da solução do problema acima $u$ usando a Desigualdade de Harnack, a qual diz que

$$\sup_{Q_{1/2}} u \leq C(\inf_{Q_{1/2}} u + ||f||_{L^n(Q_1)}).$$

A natureza da norma $L^n$ da $f$ é um aspecto extremamente curioso na estimativa acima. Sua aparição é proveniente da forte estimativa ABP que soluções de equações com operadores de segunda ordem elípticos possuem. Esta é a primeira deficiência clara para o contexto Não-Local, cujo ABP só enxerga um lado direito limitado. É importante ressaltar que na literatura existe uma versão do ABP(ver (GUILLEN; SCHWAB, 2012)) que enxerga a norma $L^n$ do lado direito da equação, porém a estimativa obtida ainda envolve sua norma $L^\infty$. Nesta estimativa, à medida que a ordem da equação $\sigma$ se aproxima de 2, tal dependência da norma $L^\infty$ desaparece, o que reproduz a estimativa no caso local.

A mesma estratégia para obtenção de regularidade é levada para o contexto Não-Local, como pode ser visto em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009), utilizando a mesma heurística, ou seja, devemos usar o fato de $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ resolver

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}_0} u &\geq -C_0 \quad \text{em} \quad B_1 \\ M^-_{\mathcal{L}_0} u &\leq C_0 \quad \text{em} \quad B_1, \end{aligned}$$

para controlar a oscilação da solução $u$. Em vez da Desigualdade de Harnack(a qual está disponível para soluções do problema acima(ver (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009))), usaremos um resultado conhecido na literatura como Estimativa $L^\epsilon$, o qual é potencialmente mais forte.

O primeiro passo para obter a estimativa desejada é o seguinte lema de aproximação.

**Lema 1.14.** *Seja $\sigma > \sigma_0 > 0$. Existem constantes $\epsilon_0 > 0, \mu \in (0,1)$, e $M > 1$ que dependem de $\sigma_0$, constantes de Elipticidade e dimensão, tal que se*

1. $u \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^n$,
2. $\inf_{Q_3} u \leq 1$ *e*
3. $M^-_{\mathcal{L}_0} u \leq \epsilon_0$ *em* $Q_{4\sqrt{n}}$,

*então* $|u \leq M \cap Q_1| > \mu$.

*Demonstração.* Considere $v = \phi - u$, onde $\phi$ é a função construída no Corolário 1.4. Perceba que

$$M^+_{\mathcal{L}_0}(\phi - u) \geq M^+_{\mathcal{L}_0}\phi + M^+_{\mathcal{L}_0}(-u) = M^+_{\mathcal{L}_0}\phi - M^-_{\mathcal{L}_0}u \geq -\psi - \epsilon_0.$$

Considere também $\Gamma$ o envelope côncavo de $v$ em $B_{6\sqrt{n}}$ e $\{Q_j\}$ a família de cubos do Teorema 1.3. Do Lema 1.12 temos

$$(\sup v)^n \leq C|\nabla\Gamma(B_{2\sqrt{n}})| \leq C\sum_j |\nabla\Gamma(\overline{Q_j})|.$$

Pelo item $(v)$ do Teorema 1.3, temos que

$$|\nabla\Gamma(\overline{Q_j})| \leq C\max_{\bar{Q}_j}(\psi + \epsilon_0)^n |Q_j| \leq C\max_{\bar{Q}_j}(\psi + \epsilon_0)^{+n}|Q_j|.$$

Assim,

$$\sup v \leq C\left(\sum_j \max_{\bar{Q}_j}(\psi+\epsilon_0)^{+n}|Q_j|\right)^{1/n} \leq C\epsilon_0 + C\left(\sum_j \max_{\bar{Q}_j}(\psi)^{+n}|Q_j|\right)^{1/n}.$$

Como $\inf\limits_{Q_3} u \leq 1 \leq$ e $\phi \geq 2$ em $Q_3$, temos

$$v = \phi - u \geq 2 - \inf_{Q_3} u \geq 1,$$

e portanto $\max v \geq 1$. Escolhendo $\epsilon_0$ pequeno o suficiente para que $1 - C\epsilon_0 \geq 1/2$, temos

$$\frac{1}{2} \leq C\left(\sum_j \max_{\bar{Q}_j}(\psi)^{+n}|Q_j|\right)^{1/n}.$$

Do Corolário (1.4), $\psi$ tem suporte em $\overline{B}_{1/4}$ e é limitada, com isso

$$\frac{1}{2} \leq C\left(\sum_{j:Q_j\cap\overline{B}_{1/4}\neq\emptyset} |Q_j|\right)^{1/n} \iff \sum_{j:Q_j\cap\overline{B}_{1/4}\neq\emptyset}|Q_j| \geq C. \tag{1.23}$$

O diâmetro destes cubos $Q_j$, de acordo com o Teorema 1.3, satisfazem $d_j \leq \rho_0 2^{\frac{-1}{2-\sigma}}$, onde $\rho_0 = \dfrac{1}{8\sqrt{n}}$. Com isto, toda vez que $x_j \in Q_j \cap B_{1/4}$, se $y \in 4\sqrt{n}Q_j$, temos

$$|y| \leq |y - x_j| + |x_j| \leq 4\sqrt{n}\rho_0 2^{\frac{-1}{2-\sigma}} + \frac{1}{4}.$$

Como $2^{\frac{-1}{2-\sigma}} \leq 2^{-1}$, temos $|y| \leq \frac{1}{2}$. Isto significa que $4\sqrt{n}Q_j \subset B_{1/2}$ sempre que $Q_j \cap B_{1/4} \neq \emptyset$. Seja $M_0 = \max_{B_{1/2}} \phi$. Pelo item $(vi)$ do Teorema (1.3), temos

$$|\{x \in 4\sqrt{n}Q_j : v(x) > \Gamma(x) - Cd_j^2\}| \geq \mu|Q_j|.$$

Agora, considere a coleção de cubos $\{4\sqrt{n}Q_j\}$ tais que $Q_j \cap B_{1/4} \neq \emptyset$. Esta coleção forma uma cobertura aberta para a união dos cubos correspondentes $\overline{Q}_j$ e cada elemento está contido, pelo que mostramos anteriormente, em $B_{1/2}$. Tomando uma subcobertura com finito overlapping que ainda cobre a união dos $\overline{Q}_j$ e combinando as estimativas anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} |\{x \in B_{1/2} : v(x) \geq \Gamma(x) - C\rho_0^2\}| &\geq |\{x \in B_{1/2} : v(x) \geq \Gamma(x) - Cd_j^2\}| \\ &\geq \sum_{\text{fin}} \{x \in 4\sqrt{n}Q_j : v(x) \geq \Gamma(x) - Cd_j^2\}| \\ &\geq C. \end{aligned}$$

Daí, $|\{x \in B_{1/2} : v(x) \geq \Gamma(x) - C\rho_0^2\}| \geq C$. Como $\Gamma \geq 0$, temos

$$|\{x \in B_{1/2} : v(x) \geq -C\rho_0^2\}| \geq |\{x \in B_{1/2} : v(x) \geq \Gamma(x) - C\rho_0^2\}|.$$

Consequentemente, $|\{x \in B_{1/2} : v(x) \geq -C\rho_0^2\}| \geq C$. Reescrevendo $v$, temos $|\{x \in B_{1/2} : u(x) \leq \phi(x) + C\rho_0^2\}| \geq C$. Como $\phi \leq \max_{B_{1/2}} \phi = M_0$, temos

$$|\{x \in B_{1/2} : u(x) \leq M_0 + C\rho_0^2\}| \geq |\{x \in B_{1/2} : u(x) \leq \phi(x) + C\rho_0^2\}|,$$

e portanto $|\{x \in B_{1/2} : u(x) \leq M_0 + C\rho_0^2\}| \geq C$. Agora, como $B_{1/2} \subset Q_1$, tomando $M = M_0 + C\rho^2$, temos

$$|\{x \in Q_1 : u(x) \leq M\}| \geq |\{x \in B_{1/2} : u(x) \leq M\}| \geq C,$$

como desejado. □

Iterando este lema, é possível obter um decaimento para a função distribuição de $u$.

**Lema 1.15.** *Seja $u$ como no Lema 1.14. Então*

$$|\{u > M^k\} \cap Q_1| \leq (1-\mu)^k,$$

*para $k = 1, 2, \ldots$, onde $M$ e $\mu$ são como no Lema 1.14. Como consequência, temos que*

$$|\{u \geq t\} \cap Q_1| \leq dt^{-\epsilon} \quad \forall t > 0,$$

*onde $d$ e $\epsilon$ são constantes universais positivas.*

*Demonstração.* A prova da demonstração segue por indução. Se $k = 1$, pelo Lema (1.14) e decompondo $Q_1$ de maneira adequada, temos

$$\begin{aligned} |Q_1| &= |\{u \leq M\} \cap Q_1 \cup \{u > M\} \cap Q_1| \\ &= |\{u \leq M\} \cap Q_1| + |\{u > M\} \cap Q_1| \\ &> \mu + |\{u > M\} \cap Q_1|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|\{u > M\} \cap Q_1| < |Q_1| - \mu = (1-\mu).$$

Agora suponha que vale até $k-1$ e vamos provar que vale para $k$. Defina

$$A = \{u > M^k\} \cap Q_1 \quad \text{e} \quad B = \{u > M^{k-1} \cap Q_1\}.$$

Com isto, é suficiente, mediante hipótese de indução, provar que $|A| \leq (1-\mu)|B|$, uma vez que temos $|B| \leq (1-\mu)^{k-1}$. Perceba que $A \subset B \subset Q_1$, pois $M^k > M^{k-1}$, além disso, pelo Lema (1.14), $|A| \leq |\{u > M\} \cap Q_1| \leq (1-\mu)$. Nos resta mostrar a condição de que se $Q = Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0)$ é um cubo diádico tal que $|A \cap Q| > (1-\mu)|Q|$ então $\tilde{Q} \subset B$, onde $\tilde{Q}$ é o do Lema $B$.1. Para isto, suponha por contradição que $\tilde{Q} \not\subset B$. Consequentemente, deve existir $\tilde{x} \in \tilde{Q}$ tal que $\tilde{x} \notin B$, ou seja, $u(\tilde{x}) \leq M^{k-1}$. Agora considere a transformação

$$x = x_0 + \frac{1}{2^i} y, \quad y \in Q_1, x \in Q = Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0)$$

e a função

$$\tilde{u}(y) = \frac{u(x)}{M^{k-1}}.$$

Esta função $\tilde{u}$ satisfaz $\tilde{u} \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$ e

$$\inf_{Q_3} \tilde{u} \leq \frac{1}{M^{k-1}} \inf_{Q_3} u \leq 1 \quad \text{e} \quad M^- \tilde{u} \leq \frac{1}{M^{k-1}} M^- u \leq \epsilon_0.$$

Por consequência, podemos aplicar o Lema 1.14 e obtemos

$$\mu < |\{\tilde{u}(y) \leq M\} \cap Q_1| = 2^{in} |\{u(x) \leq M^k\} \cap Q_1|.$$

Daí,

$$|Q \backslash A| > \frac{1}{2^{in}} \mu = |Q| \mu$$

e com isso,

$$|Q| = |Q \backslash A| + |Q \cap A| > \mu |Q| + |A \cap Q| \iff |A \cap Q| < (1 - \mu)|Q|,$$

que é uma contradição. Consequentemente, pelo Lema $B.1$ temos

$$|A| \leq (1 - \mu)|B|$$

e o Lema está provado.
Como consequência disto, tomando $d = (1 - \mu)^{-1}$ e $\epsilon$ tal que $1 - \mu = M^{-\epsilon}$, temos que dado $t \geq 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M^k > t$. Com isto,

$$|\{u > t\} \cap Q_1| \leq |\{u > M^k\} \cap Q_1| \leq (1 - \mu)^k = d(1 - \mu)^{k+1} = dM^{-\epsilon(k+1)} < dt^{-\epsilon}.$$

□

Por um argumento de recobrimento, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 1.4.** *Seja $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$, $u(0) \leq 1$, e $M^-_{\mathcal{L}_0} u \leq \epsilon_0$ em $B_2$. Suponha que $\sigma \geq \sigma_0$ para algum $\sigma_0 > 0$. Então*

$$|\{u > t\} \cap B_1| \leq Ct^{-\epsilon} \quad \forall t > 0,$$

*onde a constante $C$ e $\epsilon$ dependem de $\lambda, \Lambda, n$ e $\sigma_0$.*

*Demonstração.* O Teorema segue pelo Lema 1.15. Porém antes note que $B_1$ pode ser coberto por uma quantidade finita de cubos $Q_k$ com centro em algum $x_k \in B_1$ e $k \in \{1, \dots, p\}$. Daí,

$$|\{u > t\} \cap B_1| \leq \sum_{k=1}^{p} |\{u > t\} \cap Q_k| \leq \sum_{k=1}^{p} dt^{-\epsilon} = Ct^{-\epsilon},$$

onde usamos o Lema 1.15 na penúltima desigualdade. □

Através de um simples scalling, obtemos o seguinte decaimento para a função distribuição de $u$, para finalmente obtermos a estimativa $L^\epsilon$.

**Teorema 1.5.** *Seja $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$, $u(0) \leq 1$, e $M^-_{\mathcal{L}_0} u \leq C_0$ em $B_{2r}$. Suponha que $\sigma \geq \sigma_0$ para algum $\sigma_0 > 0$. Então*

$$|\{u > t\} \cap B_r| \leq C r^n (u(0) + C_0 r^\sigma)^\epsilon t^{-\epsilon} \quad \forall t > 0,$$

*onde a constante $C$ e $\epsilon$ dependem de $\lambda, \Lambda, n$ e $\sigma_0$.*

*Demonstração.* Defina
$$v(x) = \frac{\epsilon_0}{u(0) + C_0 r^\sigma} u(rx).$$
Daí segue que $M^-_{\mathcal{L}_0} v(x) \leq \epsilon_0$ em $B_2$, $v(0) \leq 1$ e $v \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, $v$ se encaixa nas hipóteses do Teorema 1.4 e por consequência

$$|\{v > T\} \cap B_1| \leq C T^{-\epsilon} \quad \forall T > 0.$$

Em particular, tomando $T = t\epsilon_0 (u(0) + C_0 r^\sigma)^{-1} > 0$ no Lema 1.4 obtemos

$$|\{v > T\} \cap B_1| = |\{v > t\epsilon_0 (u(0) + C_0 r^\sigma)^{-1}\} \cap B_1| \leq C (u(0) + C_0 r^\sigma)^\epsilon t^{-\epsilon}.$$

Agora basta notar que

$$\frac{1}{r^n} |\{u > t\} \cap B_r| \leq |\{v > t\epsilon_0 (u(0) + C_0 r^\sigma)^{-1}\} \cap B_1|,$$

e por consequência
$$|\{u > t\} \cap B_r| \leq C r^n (u(0) + C_0 r^\sigma)^\epsilon t^{-\epsilon}.$$

□

Agora estamos preparados para obter a Hölder continuidade citada no início desta seção. Para isso, usaremos o seguinte Lema.

**Lema 1.16.** *Seja $\sigma > \sigma_0$ para algum $\sigma_0 > 0$. Seja $u$ uma função tal que*

$$-\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2} \quad em \quad \mathbb{R}^n, \quad M^+_{\mathcal{L}_0} \geq -\epsilon_0 \quad em \quad B_1, \quad M^-_{\mathcal{L}_0} \leq \epsilon_0 \quad em \quad B_1.$$

*Então existe um $\alpha > 0$ que depende apenas de $\lambda, \Lambda, n$ e $\sigma_0$ tal que $u \in C^\alpha$ na origem. Mais precisamente,*

$$|u(x) - u(0)| \leq C|x|^\alpha,$$

*para alguma constante $C$.*

*Demonstração.* A demonstração consiste em achar sequências $M_k$ e $m_k$ tais que

$$m_k \leq u \leq M_k \quad \text{em} \quad B_{4^{-k}} \quad \text{e} \quad M_k - m_k = 4^{-\alpha k}.$$

Garantindo isto, o lema segue pois se $x \in B_1$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{4^{-k}} \backslash B_{4^{-(k+1)}}$, ou seja, $4^{-(k+1)} \leq |x| < 4^{-k}$. Assim,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\leq M_k - m_k \\ &= 4^{-\alpha k} \\ &= 4^{\alpha} 4^{-(k+1)\alpha} \\ &\leq 4^{\alpha} |x|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar a existência destas sequência indutivamente. Se $k = 0$, tomemos $m_0 = -\dfrac{1}{2}$ e $M_0 = \frac{1}{2}$. Agora suponha que construímos as sequências até um valor $k$. Vamos construir $m_{k+1}$ e $M_{k+1}$. Perceba que na bola $B_{4^{-(k+1)}}$ devemos ter ou $u \geq (M_k + m_k)/2$ ou $u \leq (M_k + m_k)/2$ em pelo menos metade dos pontos(em medida). Digamos que o primeiro acontece, ou seja,

$$\left| \left\{ u \geq \frac{M_k + m_k}{2} \right\} \cap B_{4^{-(k+1)}} \right| \geq \frac{|B_{4^{-(k+1)}}|}{2}. \tag{1.24}$$

Defina

$$v(x) = \frac{u(4^{-k}x) - m_k}{(M_k - m_k)/2}.$$

Da hipótese de indução, $v \geq 0$ em $B_1$ e rescalonando $u$ em (1.24), temos

$$|\{v \geq 1\} \cap B_{1/4}| \geq \frac{|B_{1/4}|}{2}.$$

Além disso, como $M^-_{\mathcal{L}_0} u \leq \epsilon_0$ em $B_1$, temos, ao fazer a mudança de variável $z = 4^{-k}y$, que

$$\begin{aligned} M^-_{\mathcal{L}_0} v &\leq \frac{(2-\sigma)}{(M_k - m_k)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda(u(4^{-k}x + 4^{-k}y) + u(4^{-k}x - 4^{-k}y) - 2u(4^{-k}x))^+ - \Lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= 24^{\alpha k} 4^{-\sigma k} M^- u(4^{-k}x) \\ &= 24^{-k(\sigma-\alpha)} M^- u(4^{-k}x) \\ &\leq 2\epsilon_0, \end{aligned}$$

em $B_{4^k}$ desde que escolhamos $0 < \alpha < \sigma$. Da hipótese de indução temos que para qualquer $j \geq 1$, $u(4^{-k}x) \geq m_{k-j}$, daí

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{u(4^{-k}x) - m_k}{(M_k - m_k)/2} \geq \frac{m_{k-j} - m_k}{(M_k - m_k)/2} = \frac{m_{k-j} + M_k - M_k - m_k}{(M_k - m_k)/2} \\ &\geq \frac{m_{k-j} - M_{k-j} + M_k - m_k}{(M_k - m_k)/2} = \frac{m_{k-j} + M_{k-j}}{(M_k - m_k)/2} + 2 \\ &= -24^{-\alpha(k-j)} 4^{\alpha k} + 2 = -2(4^{\alpha j} - 1), \end{aligned}$$

para $x \in B_{2^j}$, pois se $x \in B_{2^j}$, então $|4^{-k}x| \leq 4^{-k}2^j \leq 2^{-2k+j} \leq 1$. Note também que se $|x| > 1$, então

$$-2(|4x|^{\alpha} - 1) = -24^{\alpha}|x|^{\alpha} + 2 \leq -24^{\alpha} + 2 = -2(4^{\alpha} - 1) \leq v(x).$$

Se definirmos $w = \max\{v, 0\}$, então temos $M^{-}_{\mathcal{L}_0} w \leq 2\epsilon_0$ em $B_{3/4}$ desde que $\alpha$ seja pequeno o suficiente. Além disso, como $w \geq v$, temos que vale $|\{w \geq 1\} \cap B_{1/4}| \geq |B_{1/4}|/2$. Dado qualquer ponto $x \in B_{1/4}$, podemos aplicar o Teorema 1.5 transladado para $B_1(x)$ com $t = 1$ e $r = 1/2$ e com isto obtemos

$$C(w(x) + 2\epsilon_0)^{\epsilon} \geq |\{w > 1\} \cap B_{1/2}(x)| \geq |\{w > 1\} \cap B_{1/4}| \geq \frac{|B_{1/4}|}{2}. \qquad (1.25)$$

Se escolhermos $\epsilon_0$ pequeno, então temos, por (1.25), que $w \geq \theta$ em $B_{1/4}$, $\theta > 0$. Com isso, tome $M_{k+1} = M_k$ e $m_{k+1} = m_k + \theta(M_k - m_k)/2$ e daí segue que $m_{k+1} \leq u \leq M_{k+1}$ em $B_{4^{-(k+1)}}$ e $M_{k+1} - m_{k+1} = (1 - \theta/2)4^{-\alpha k}$. Para finalizar, escolhemos $\theta$ e $\alpha$ apropriados para que $(1 - \theta/2) = 4^{-\alpha}$ e assim $M_{k+1} - m_{k+1} = 4^{-\alpha(k+1)}$, como queríamos.
Por outro lado, se tivéssemos

$$\left|\left\{u \leq \frac{M_k + m_k}{2}\right\} \cap B_{4^{-(k+1)}}\right| \geq \frac{|B_{4^{-(k+1)}}|}{2},$$

então iríamos definir

$$v(x) = \frac{M_k - u(4^{-k}x)}{(M_k - m_k)/2}$$

e continuaríamos a conta utilizando o fato de $M^{+}_{\mathcal{L}_0} u \geq -\epsilon_0$. □

Usando este Lema e o fato de $M^+$ e $M^-$ serem operadores invariantes por scalling, obtemos finalmente a Estimativa $C^{\alpha}$.

**Teorema 1.6.** *Seja $\sigma > \sigma_0$ para algum $\sigma_0 > 0$. Seja $u$ uma função limitada em $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$M^{+}_{\mathcal{L}_0} u \geq -C_0 \quad em \quad B_1,$$
$$M^{-}_{\mathcal{L}_0} u \leq C_0 \quad em \quad B_1.$$

*Então existe um $\alpha > 0$ que depende apenas de $\lambda, \Lambda, n$ e $\sigma_0$ tal que $u \in C^{\alpha}(B_{1/2})$ e*

$$[u]_{C^{\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\sup_{\mathbb{R}^n} |u| + C_0),$$

*para alguma constante $C > 0$.*

*Demonstração.* Para a demonstração basta definir

$$v(x) = \frac{\epsilon_0}{2\sup_{\mathbb{R}^n} |u| + C_0} u(x).$$

Daí, se $\epsilon_0$ é pequeno o suficiente $-\frac{1}{2} \leq v(x) \leq \frac{1}{2}$, $M^{+}_{\mathcal{L}_0} v \geq -\epsilon_0$ em $B_1$ e $M^{-}_{\mathcal{L}_0} v \leq \epsilon_0$ em $B_1$ e com isso usamos o Lema 1.16. Daí, mostramos que $v$ é Hölder contínua na origem. Se definirmos $w(x) = \tau_{x_0} v(x)$, para $x_0 \in B_{1/2}$, temos que $w$ resolve a mesma equação satisfazendo as mesmas limitações. Com isso, segue que $w$ é Hölder contínua na origem e consequentemente $v$ é Hölder contínua em $x_0$ para qualquer $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$. □

É importante comentar que o $B_{1/2}$ que aparece na estimativa é apenas por conveniência. Poderíamos obter a mesma estimativa $C^{\alpha}$ em $B_{1-\delta}$ para $\delta > 0$ pequeno.

## 1.6 Estimativa $C^{1,\alpha}$

Para finalizar este capítulo, apresentaremos a estimativa $C^{1,\alpha}$ para soluções de

$$\mathcal{I}u = 0, \tag{1.26}$$

onde $\mathcal{I}$ é um operador Não-Local Elíptico com respeito a uma classe $\mathcal{L}_* \subset \mathcal{L}_0$ que iremos definir posteriormente. A ideia é iterar a estimativa Hölder $C^{\alpha}$ sobre os quocientes incrementais

$$w^h(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^{\alpha}}.$$

Como provamos no Teorema 1.2, temos que

$$\begin{cases} M^+ w^h \geq 0 \\ M^- w^h \leq 0, \end{cases}$$

para $h$ pequeno o suficiente, e o resultado de Hölder continuidade (1.6) garante que

$$|w^h(x)| \leq C, \quad \text{para} \quad x \in B_r.$$

Daí, se queremos aplicar o Teorema 1.6 para $w^h$ precisaríamos garantir que esta é uniformemente limitada em $\mathbb{R}^n \backslash B_r$ em $h$, o que não é necessariamente verdade. Dessa forma, fica evidente que se faz necessária alguma hipótese adicional sobre o problema para compensar a falta de regularidade de $u$ no infinito. Como estamos lidando com operadores não-locais que são Elípticos com respeito a alguma classe $\mathcal{L}$, é natural pensar em assumir regularidade extra sobre os Kernels para realizar tal compensação.

Neste contexto, a hipótese mínima sobre os kernels que iremos precisar é a seguinte

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{\rho_0}} \frac{|K(y) - K(y-h)|}{|h|} dy \leq C \quad \text{para} \quad |h| < \frac{\rho_0}{2}. \tag{1.27}$$

Esta condição garante que mesmo que $w^h$ não seja uniformemente limitada em $h$ em todo o $\mathbb{R}^n$, este ainda possui oscilações que se cancelam no infinito. Veremos com mais clareza o que isto significa ao longo da demonstração do Teorema abaixo.

A classe de Kernels $K \in \mathcal{L}_0$ que satisfazem (1.27) é denotada por $\mathcal{L}_*$. Note que uma condição natural de se pedir a fim de que $K$ satisfaça (1.27) seria $|\nabla K(y)| \leq \Lambda/|y|^{1+n+\sigma}$. Agora vamos à demonstração do teorema que nos leva a regularidade $C^{1,\alpha}$ de soluções de (1.26) e a uma estimativa no interior.

**Teorema 1.7.** *Suponha que $\sigma > \sigma_0$. Existe um $\rho_0 > 0$ que depende de $\lambda, \Lambda, \sigma_0$ e $n$ tal que se $\mathcal{I}$ é um operador Elíptico Não-local com respeito a $\mathcal{L}_*$ no sentido da Definição (1.1) e $u$ é uma* *função limitada tal que $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, então existe um $\alpha > 0$ que depende de $\lambda, \Lambda, \sigma_0$ e $n$ tal que $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ e*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leq C\left(\sup_{\mathbb{R}^n}|u| + |\mathcal{I}0|\right)$$

*para alguma constante $C > 0$. A constante $C$ depende de $\lambda, \Lambda, \sigma_0$ e $n$ e da constante em (1.27).*

*Demonstração.* Temos que $\mathcal{L}_* \subset \mathcal{L}_0$. Como $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, temos $M^+_{\mathcal{L}_0}u = M^+_{\mathcal{L}_0}(u-0) \geq \mathcal{I}u - \mathcal{I}0 = -\mathcal{I}0$ e $M^-_{\mathcal{L}_0}u \leq \mathcal{I}0$ em $B_1$. Das estimativas obtidas no Teorema 1.6 , $u \in C^{\alpha}(B_{1-\delta})$ para qualquer $\delta > 0$ com $[u]_{C^\alpha} \leq C(\sup|u| + |\mathcal{I}0|)$. Daí, queremos iterar o Teorema 1.6 até obter regularidade Lipschitz em uma quantidade finita de passos (ver Apêndice B, $C$.1). Agora, suponha que provamos $u \in C^{\beta}(B_r)$ para algum $\beta > 0$ e $1/2 < r < 1$.
Defina

$$w^h = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^{\beta}}.$$

Queremos aplicar o Teorema 1.6 a $w^h$ para obter $C^{\alpha+\beta}(B_{r-\delta})$. Pelo Teorema 1.2, como $\mathcal{I}u = 0$, temos que $M^+_{\mathcal{L}_*}w^h \geq 0$ e $M^-_{\mathcal{L}_*}w^h \leq 0$ em $B_r \subset B_1$. Como $\mathcal{L}_* \subset \mathcal{L}_0$, temos, em particular, $M^+_{\mathcal{L}_0}w^h \geq 0$ e $M^-_{\mathcal{L}_0}w^h \leq 0$. Como $u \in C^{\beta}(B_r)$, $w^h$ é uniformemente limitada em $B_r$, pois

$$|w^h| = \frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^{\beta}} \leq C\frac{|x+h-x|^{\beta}}{|h|^{\beta}} = C,$$

em $B_r$. Para aplicar o Teorema 1.6 a $w^h$ precisaríamos que $w^h$ fosse limitada uniformemente fora de $B_r$, o que não podemos garantir. Para prosseguir, vamos localizar $w^h$. Considere $\eta$ uma função Cutoff da seguinte maneira

$$\begin{cases} \eta = 1 & \text{em } B_{r-\delta/4} \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \text{em } B_r \backslash B_{r-\delta/4} \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_r, \end{cases}$$

onde $\delta$ é um número positivo pequeno que será determinado posteriormente. Daí,

$$\begin{aligned} w^h &= \eta w^h + (1-\eta)w^h \\ &= \frac{\eta u(x+y) - \eta u(x)}{|h|^{\beta}} + \frac{(1-\eta)u(x+y) - (1-\eta)u(x)}{|h|^{\beta}} \\ &= w_1^h + w_2^h. \end{aligned}$$

Seja $x \in B_{r/2}$ e $|h| < \delta/16$. Daí, $\eta \equiv 1$, consequentemente $(1-\eta)u(x) = (1-\eta)u(x+h) = 0$ e assim $w^h(x) = w_1^h(x)$. Vamos mostrar que $w_1^h \in C^{\beta+\alpha}(B_{r-\delta})$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}_0} w_1^h &\geq M^+_{\mathcal{L}_*} w_1^h \\ &= M^+_{\mathcal{L}_*}(w^h - w_2^h) \\ &\geq M^+_{\mathcal{L}_*}(w^h) - M^+_{\mathcal{L}_*}(w_2^h) \\ &\geq -M^+_{\mathcal{L}_*}(w_2^h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^-_{\mathcal{L}_0} w_1^h &\leq M^-_{\mathcal{L}_*} w_1^h \\ &= M^-_{\mathcal{L}_*}(w^h - w_2^h) \\ &\leq M^-_{\mathcal{L}_*}(w^h) - M^-_{\mathcal{L}_*}(w_2^h) \\ &\leq -M^-_{\mathcal{L}_*}(w_2^h) \end{aligned}$$

Para aplicar o Teorema 1.6 precisamos mostrar que $|M^+_{\mathcal{L}_*}(w_2^h)|$ e $|M^-_{\mathcal{L}_*}(w_2^h)|$ são limitados em $B_{r-\delta/2}$ por $C \sup |u|$ para alguma constante $C$ universal. Mostraremos estas desigualdades para qualquer operador $L \in \mathcal{L}_*$ e consequentemente iremos obter as estimativas desejadas. Como $(1-\eta)u(x) = (1-\eta)u(x+h) = 0$ e $w^h(x) = w_1^h(x)$, temos

$$\begin{aligned} w_2^h(x+y) &= \frac{1}{|h|^\beta}(1-\eta)(u(x+y+h) - u(x+y)) \\ w_2^h(x-y) &= \frac{1}{|h|^\beta}(1-\eta)(u(x-y+h) - u(x-y)) \\ w_2^h(x) &= 0. \end{aligned}$$

Daí, fazendo uma mudança de variável e usando a simetria do Kernel $K(y)$, temos

$$Lw_2^h = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-\eta)u(x+y+h) - (1-\eta)u(x+y)}{|h|^\beta} K(y)dy.$$

Note que se $|y| < \delta/8$, então $|x+y+h| \leq |x|+|y|+|h| \leq r/2+\delta/8+\delta/16 = r/2+3\delta/16 < r-\delta/4$ e $|x+y| \leq r/2+\delta/16 \leq r-\delta/4$. Daí, $(1-\eta)u(x+y+h) = (1-\eta)u(x+y) = 0$ para $|y| < \delta/8$. Tomando $\rho_0 = \delta/4$, então fazendo a mudança de variável $y \longrightarrow y-h$ apenas na parte da integral com $(1-\eta)u(x+y+h)$, obtemos

$$\begin{aligned} |Lw_2^h| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1-\eta)u(x+y) \frac{K(y-h) - K(y)}{|h|^\beta} dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(1-\eta)u(x+y)||h|^{1-\beta} \frac{|K(y-h) - K(y)|}{|h|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta/4}} |u(x+y)||h|^{1-\beta} \frac{|K(y-h) - K(y)|}{|h|} dy \\ &\leq |h|^{1-\beta} \sup |u| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_0}} \frac{|K(y-h) - K(y)|}{|h|} dy \end{aligned}$$

Usando a Hipótese 1.27, temos

$$|Lw_2^h| \leq C|h|^{1-\beta} \sup |u| \leq C \sup |u|.$$

Daí, obtemos que $|M^+_{\mathcal{L}_*} w^h_2| \leq C \sup |u|$ e consequentemente $M^+_{\mathcal{L}_*} w^h_1 \geq -C \sup |u|$ e $M^-_{\mathcal{L}_*} w^h_1 \leq C \sup |u|$ em $B_{r-\delta/2}$ para $|h| < \delta/16$. Agora podemos aplicar o Teorema (1.6) para obter que $w^h_1$, e portanto $w^h$, é $C^\alpha$ em $B_{r-\delta} \subset B_{r-\delta/2}$.

Usando os mesmos argumentos como no Lema $C.1$ obtemos $u \in C^{\alpha+\beta}(B_{r-\delta})$, e após uma quantidade finita de iterações, devemos ter que $u$ é Lipschitz em $B_{3/4}$(escolhendo $r$ e $\delta$ de maneira apropriada em cada iteração) e vale

$$||u||_{C^{0,1}(B_{3/4})} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |u| + |\mathcal{I}0| \right).$$

Agora seja $e \in S^{n-1}$ um vetor unitário e $h \in \mathbb{R}$. Se considerarmos o seguinte quociente diferencial

$$w^h(x) = \frac{u(x+he) - u(x)}{h},$$

o mesmo raciocínio ainda se aplica. Consequentemente, iremos obter que $w^h \in C^\alpha\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)$ e

$$||w^h||_{C^\alpha\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |u| + |\mathcal{I}0| \right)$$

Assim, temos que

$$||w^h||_{L^\infty\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} + [w^h]_{C^\alpha\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |u| + |\mathcal{I}0| \right)$$

Como a estimativa não depende de $h$, podemos passar o limite quando $h \to 0$ e assim

$$||\partial_e u||_{L^\infty\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} + [\partial_e u]_{C^\alpha\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |u| + |\mathcal{I}0| \right).$$

Como vale para todo $e \in S^{n-1}$, temos que

$$||\nabla u||_{L^\infty\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} + [\nabla u]_{C^\alpha\left(B_{\frac{3}{4}-\delta}\right)} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |u| + |\mathcal{I}0| \right),$$

para um certo $\delta > 0$ a ser escolhido. Disto segue que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})$ com a estimativa desejada. □

# 2

# Resultados de Regularidade por Aproximação para Equações Não-locais

Neste Capítulo, vamos estender os resultados de Regularidade do Capítulo 1 para soluções de Equações Não-Locais Elípticas não-necessariamente invariantes por translação através de um método perturbativo. A heurística é que se duas equações estiverem uniformemente próximas, então suas soluções também estarão. Esta ideia já foi aplicada para problemas elípticos clássicos para obter, por exemplo, estimativas do tipo Cordes-Niremberg para soluções de

$$Tr\left(\mathcal{A}(x)D^2u(x)\right) = f(x) \quad x \in B_1, \tag{2.1}$$

onde $||\mathcal{A}(x) - \delta(x)||_\infty \leq \epsilon$ para todo $x \in B_1$. Esta ideia foi generalizada para soluções de Equações Elípticas Totalmente não-Lineares do tipo

$$\mathcal{F}(D^2u(x), x) = f(x) \quad x \in B_1, \tag{2.2}$$

por Caffarelli, em (CAFFARELLI, 1989), admitindo que a oscilação dos coeficientes é pequena e que a equação homogênea com coeficientes constantes possui estimativa $C^{1,\alpha}$.

A dualidade Local e Não-Local nos permite perguntar, naturalmente, se o mesmo problema tem sentido para equações Não-Locais, isto é, se soluções de

$$\mathcal{I}(u(x), x) = f(x) \quad x \in B_1, \tag{2.3}$$

onde $\mathcal{I}$ é um operador Não-Local Elíptico com respeito a uma certa classe $\mathcal{L}$ de operadores lineares que está próximo de um operador $I^{(0)}$. Para entender melhor esse problema, é importante que sempre tenhamos em mente o seguinte modelo de equação Não-Local

$$\mathcal{I}(u, x) := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \sup_{\beta\in\mathcal{B}} \int_{\mathbf{R}^n} \delta(u, x, y)(2-\sigma)\frac{a_{\alpha\beta}(x, y)}{|y|^{n+\sigma}}dy = f(x) \quad x \in B_1, \tag{2.4}$$

onde $a_{\alpha\beta}$ é uma família de funções não-negativas com índices $\alpha$ e $\beta$ variando em conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ arbitrários. As aplicações mais interessantes que traremos no final incluem o seguinte uma versão Não-Local da estimativa de Cordes-Niremberg e

- se $0 < \lambda \leq a_{\alpha\beta} \leq \Lambda$, $|\nabla_y a_{\alpha\beta}(x,y)| \leq C|y|^{-1}$ e $a_{\alpha\beta}$ é contínua em $x$ com um módulo de continuidade independente de $\alpha$ e $\beta$ então as soluções de (2.4) são $C^{1,\alpha}$ em $B_{1/2}$ e possuem uma estimativa;
- se $0 < \lambda \leq a_{\alpha\beta} \leq \Lambda$, $|\nabla_y a_{\alpha\beta}(x,y)| \leq C|y|^{-1}$, $a_{\alpha\beta}$ não depende de $x$ e $\Lambda - \eta \leq 1 \leq \lambda + \eta$ para um $\eta$ pequeno o suficiente, então soluções de (2.4) são $C^{2,\alpha}$ no interior e possuem uma estimativa.

Embora estejamos interessados em modelos da forma (2.4), os resultados que apresentaremos aqui estão em uma forma bem geral para que possamos aplicar nas mais diversificadas situações. Isto é possível graças a condição estrutural de Elipticidade uniforme que deve ser entendida simplesmente como a seguinte desigualdade

$$M^-_{\mathcal{L}} v(x) \leq \mathcal{I}(u+v,x) - \mathcal{I}(u,x) \leq M^+_{\mathcal{L}} v(x), \tag{2.5}$$

onde $M^-_{\mathcal{L}}$ e $M^+_{\mathcal{L}}$ são os operadores extremais com respeito a alguma classe de operadores, e $\mathcal{I}$ é um operador Não-Local, cuja definição se fará mais precisa adiante.

Este Capítulo está separado da seguinte maneira. Na primeira seção apresentamos algumas preliminares. Isto inclui algumas definições, hipóteses e resultados auxiliares. Dentre os resultados auxiliares, apresentamos resultados de regularidade que estendem o Teorema 1.7 para soluções $u$ que possuem crescimento no infinito, ou seja, $u \in C(\overline{B}_1) \cap L^1(\mathbb{R}^n, w)$, onde $w$ é um peso adequado. Apresentamos também alguns resultados de estabilidade, onde provamos uma versão mais geral do Lema 1.6 que permite que o operador varie. Provamos também que sequências de operadores uniformemente elípticos com respeito a uma classe de operadores convergem fracamente a menos de subsequência. Na seção subsequente, provamos que soluções de uma equação envolvendo os operadores extremais possuem regularidade no bordo. A ideia é semelhante como ocorre no caso local e a ideia é construir uma barreira adequada para controlar o crescimento da função longe do bordo e utilizar scalling regularidade no interior apropriadamente. Na terceira seção apresentamos o Lema de aproximação e o resultado principal do Capítulo, que é a regularidade $C^{1,\alpha}$ para soluções de equações envolvendo operadores Não-Locais Uniformemente Elípticos. Para isso, é essencial assumir regularidade extra sobre a classe de operadores em questão. Veremos que kernels $K \in \mathcal{L}_0$ que satisfazem

$$|\nabla K(y)| \leq C|y|^{-n-\sigma-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

possuem regularidade suficiente para nossos resultados. Por fim, na seção seguinte apresentamos algumas situações em que nossos resultados se aplicam.

## 2.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas preliminares para este capítulo. Primeiro fornecemos algumas definições que serão importantes, como a definição de operador Não-Local e a de convergência de operadores. Em seguida iremos discutir sobre as hipóteses sobre o peso que iremos considerar. Por fim provaremos alguns resultados de regularidade e estabilidade.

### 2.1.1 Algumas definições

A primeira definição é acerca de Operador Não-Local. Iremos considerar nos nossos resultados operadores que satisfazem o seguinte

**Definição 2.1.** *Um operador $\mathcal{I}$ Não-Local é uma função que atribui para uma função $u$ o valor $\mathcal{I}(u,x)$ em cada ponto $x$ satisfazendo as seguintes hipóteses*

- *$\mathcal{I}(u,x)$ está bem definido desde que $u \in C^2(x) \cap L^1(\mathbb{R}^n, w)$,*
- *Se $u \in C^2(\Omega) \cap L^1(\mathbb{R}^n, w)$, então $\mathcal{I}(u,x)$ é contínua em $\Omega$ como uma função de $x$.*

A definição acima é bem geral e faz mais sentido quando adicionamos a hipótese de Elipticidade Uniforme 2.5. Vale ressaltar que quando dizemos $u \in C^2(x)$ significa que existem um polinômio quadrático $q$ tal que $u(y) = q(y) + o(|y-x|^2)$.

Para medir proximidade entre os operadores iremos considerar a seguinte norma

**Definição 2.2.** *Dado um operador não-local $\mathcal{I}$, definimos $||\mathcal{I}||$ em um domínio $\Omega$ com respeito a algum peso $w$ como*

$$\begin{aligned} ||\mathcal{I}|| := \sup\{|\mathcal{I}(u,x)|/(1+M) : \quad & x \in \Omega, u \in C^2(x), ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \leq M, \\ & |u(y) - u(x) - \nabla u(x).(y-x)| \leq M|y-x|^2 \quad \forall y \in B_1(x)\}. \end{aligned}$$

A ideia desta definição é que se $\mathcal{I}_k(u,x) \to \mathcal{I}(u,x)$ de alguma forma uniforme, então $||\mathcal{I}_k - \mathcal{I}|| \to 0$. A forma mais apropriada de convergência que devemos ter é a seguinte.

**Definição 2.3.** *Dizemos que $\mathcal{I}_k \to \mathcal{I}$ fraco em $\Omega$ se para todo $x_0 \in \Omega$ e para toda função $v$ da forma*

$$v(x) = \begin{cases} p(x) & se\ x \in B_\rho(x_0) \\ u(x) & se\ x \in \mathbb{R}^n \backslash B_\rho(x_0), \end{cases}$$

*temos $\mathcal{I}_k(v,x) \to \mathcal{I}(v,x)$ uniformemente em $B_{\rho/2}(x_0)$,onde $p$ é um polinômio de grau 2 e $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$.*

### 2.1.2 Condições no peso e hipóteses sobre os Kernels

Aqui iremos falar sobre as hipóteses acerca do peso que consideraremos ao longo do Capítulo. É importante que tenhamos em mente o seguinte modelo de peso

$$w(y) = \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma_0}}, \tag{2.6}$$

onde $\sigma_0 \in (1,2)$. A hipótese de $u \in L^1(\mathbf{R}^n, w)$ significa que a integral em (2.4) não é singular no infinito para qualquer $\sigma \geq \sigma_0$. Para verificar isso, basta notar o seguinte

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |u(x+y)| \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |u(x+y)| \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} \frac{(1+|y+x|^{n+\sigma_0})}{1+|y+x|^{n+\sigma_0}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |u(x+y)| \frac{(1+|y+x|^{n+\sigma_0})}{|y|^{n+\sigma}} \frac{1}{|y+x|^{n+\sigma_0}} dy.\end{aligned}$$

Daí, basta notar que

$$\begin{aligned}\frac{1+|y+x|^{n+\sigma_0}}{|y|^{n+\sigma}} &\leq \frac{1+2^{n+\sigma_0}|y|^{n+\sigma_0}+2^{n+\sigma_0}|x|^{n+\sigma_0}}{|y|^{n+\sigma}} \\ &= \frac{1+2^{n+\sigma_0}|x|^{n+\sigma_0}}{|y|^{n+\sigma}} + \frac{2^{n+\sigma_0}|y|^{n+\sigma_0}}{|y|^{n+\sigma}} \\ &\leq 1+2^{n+\sigma_0}|x|^{n+\sigma_0}+2^{n+\sigma_0}|y|^{\sigma_0-\sigma} \\ &\leq C(n,\sigma_0),\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$, $|y|^{-n-\sigma} \leq 1$, $|y|^{\sigma_0-\sigma} \leq 1$ pois $\sigma \geq \sigma_0$ e $x \in B_1$. Assim, teremos

$$(2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |u(x+y)| \frac{(1+|y+x|^{n+\sigma_0})}{|y|^{n+\sigma}} \frac{1}{|y+x|^{n+\sigma_0}} dy \leq (2-\sigma_0) C(n,\sigma_0) ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n, w)},$$

onde o que aparece no lado direito é independente de $\sigma$, desde que $\sigma \geq \sigma_0$. A conta acima também mostra, na prática, como deve ser feita a escolha do peso.

Precisaremos que o peso $w$ satisfaça algumas condições que serão importante ao longo deste capítulo. A primeira condição de que

$$(1+|y|) \in L^1(\mathbb{R}^n, w), \tag{2.7}$$

é razoável, uma vez que a ordem $\sigma$ da equação é maior que 1. A segunda condição, por sua vez,

$$\sup_{z \in B_r(y)} w(z) \leq C(r) w(y), \tag{2.8}$$

é mais técnica e serve para evitar medidas singulares. Note que (2.8) é satisfeita para (2.6), pois se $z \in B_r(y)$, então

$$\begin{aligned}w(z) &= \frac{1}{1+|z|^{n+\sigma_0}} = \left(\frac{1+|y|^{n+\sigma_0}}{1+|z|^{n+\sigma_0}}\right) w(y) = \left(\frac{1+|y-z+z|^{n+\sigma_0}}{1+|z|^{n+\sigma_0}}\right) w(y) \\ &\leq \left(\frac{1+2^{n+\sigma+0}|y-z|^{n+\sigma_0}+2^{n+\sigma_0}|z|^{n+\sigma_0}}{1+|z|^{n+\sigma_0}}\right) w(y) \\ &\leq 2^{n+\sigma_0}\left(\frac{1+|z|^{n+\sigma_0}}{1+|z|^{n+\sigma_0}} + \frac{r^{n+\sigma_0}}{1+|z|^{n+\sigma_0}}\right) w(y) \leq 2^{n+\sigma_0}\left(1+r^{n+\sigma_0}\right) w(y)\end{aligned}$$

As hipóteses mínimas que a classe de operadores $L$ com kernels $K$ deverá satisfazer são duas. A primeira é a seguinte

**Hipótese 2.1.** *Se $K = \sup_\alpha K_\alpha$ é o supremo de todos os Kernels na classe, então para cada $r > 0$*

$$K(y) \leq C_r w(y) \quad se \quad |y| \geq r,$$

*para alguma constante $C_r$.*

Note que se considerarmos os kernels da classe $\mathcal{L}_0$ e o peso (2.6), essa condição é satisfeita, pois

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|y|^{n+\sigma}} &= \frac{1+|y|^{n+\sigma_0}}{|y|^{n+\sigma}} w(y) \\
&= \left( \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} + |y|^{\sigma_0 - \sigma} \right) w(y) \\
&\leq \left( \frac{1}{r^{n+\sigma}} + r^{\sigma_0 - \sigma} \right) w(y) \\
&\leq C(r, \sigma_0) w(y),
\end{aligned}$$

uma vez que $\sigma \in [\sigma_0, 2]$. A segunda hipótese sobre a classe de operadores é a seguinte

**Hipótese 2.2.** *Para alguma constante $C$ e todo $L \in \mathcal{L}$, temos $||L|| \leq C$(o que implica $||M^+_\mathcal{L}|| \leq C$ e $||M^-_\mathcal{L}|| \leq C$).*

Esta hipótese nos diz basicamente que os Kernels são controlados por funções $C^2$ próximo da origem.

### 2.1.3 Resultados de Regularidade

Aqui apresentaremos os resultados de regularidade vistos no Capítulo 1 (Teorema 1.6 e 1.7), porém permitindo que a solução $u$ possua um certo tipo de crescimento no infinito.

**Teorema 2.1.** *Seja $\sigma > \sigma_0 > 0$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$, para $w = 1/(1+|y|^{n+\sigma_0})$, tal que se $u$ é contínua em $\bar{B}_1$ e*

$$\begin{cases} M^+_{\mathcal{L}_0} \geq -C_0 & em\ B_1 \\ M^-_{\mathcal{L}_0} \leq C_0 & em\ B_1, \end{cases}$$

*então existe um $\alpha > 0$ (que depende apenas de $\lambda, \Lambda, n, \sigma_0$) tal que $u \in C^\alpha(B_{1/2})$ e*

$$||u||_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C \left( \sup_{B_1} |u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n, w)} + C_0 \right),$$

*para alguma constante $C$ que não depende de $\sigma$.*

*Demonstração.* Considere $\tilde{u}(x) = \mathcal{X}_{B_1}u(x)$. Com isso, note que

$$M^+_{\mathcal{L}_0}\tilde{u}(x) \geq M^+_{\mathcal{L}_0}u(x) - M^+_{\mathcal{L}_0}(\tilde{u}-u)(x).$$

Vamos estimar $M^+_{\mathcal{L}_0}(\tilde{u}-u)(x)$. Seja $L \in \mathcal{L}_0$.

$$\begin{aligned} L(\tilde{u}-u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\tilde{u}-u,x,y)K_L(y)dy \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u}(x+y)-u(x+y))K(y)dy \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x+y)-u(x+y)|K(y)dy \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{X}_{B_1}(y)-1)||u(y)|\Lambda\frac{1}{|y-x|^{n+\sigma}}dy \\ &\leq C(\Lambda,\sigma_0)||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)}, \end{aligned}$$

para todo $L \in \mathcal{L}_0$ e daí segue que

$$\begin{cases} M^+\tilde{u} \geq -C_0 - c||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \\ M^-\tilde{u} \leq C_0 + c||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)}, \end{cases}$$

. O resultado segue do Teorema 1.6. □

Da mesma forma, podemos obter regularidade $C^{1,\alpha}$ admitindo regularidade extra nos kernels e permitindo algum crescimento da $u$ no infinito. É suficiente considerar a classe $\mathcal{L}_*$ dada por kernels que estão em $\mathcal{L}_0$ e satisfazem

$$|\nabla K(y)| \leq Cw(y) \quad \mathbb{R}^n \backslash B_{\rho_0},$$

para um certo $\rho_0 > 0$ dado. Dessa maneira, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.2.** *Suponha que $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. Existe um $\rho_0 > 0$(que depende de $\lambda, \Lambda, \sigma_0, n$) tal que se $\mathcal{I}$ é um operador invariante por translação não-local elíptico com respeito à classe $\mathcal{L}_*$ e $u$ é uma função contínua em $\bar{B}_1$ tal que $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$ para $w = 1/(1+|y|^{n+\sigma_0})$, $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, então existe um $\alpha > 0$ universal( que depende apenas de $\lambda, \Lambda, n, \sigma_0$) tal que $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ e*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\sup_{B_1}|u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + |\mathcal{I}0|\right),$$

*para alguma constante C universal.*

*Demonstração.* A demonstração segue as linhas da prova do Teorema 1.7. A diferença é que como $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$, usamos o fato de $|\nabla K(y)| \leq Cw(y)$ para garantir que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_0}} |u(x+y)| \frac{|K(y)-K(y-h)|}{|h|} dy &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_0}} |u(x+y)||\nabla K((1-\theta)y + \theta(y-h))| dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_0}} |u(x+y)| w(y-\theta h) dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_0}} |u(x+y)||w(y) dy \\
&\leq C||u||_{L^1(\mathbb{R}^n, w)} < \infty
\end{aligned}$$

e iterar a estimativa Hölder 2.1 acima da mesma forma, onde usamos na desigualdade acima a Hipótese 2.8 sobre os kernels. □

É importante observar que a classe $\mathcal{L}_*$ não é invariante por scalling, isto é, se $K \in \mathcal{L}_*$ para um certo $\rho > 0$, então $\bar{K} = \lambda^{n+\sigma} K(\lambda -)$ é tal que

$$|\nabla \bar{K}(z)| \leq C\lambda^{-1} w(z) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus B_{\lambda^{-1}\rho}.$$

Para nossos propósitos de regularidade por aproximação, será importante que a classe $\mathcal{L}$ de operadores considerada seja constituída de kernels que são invariantes por scalling.

### 2.1.4 Resultados de Estabilidade

Agora iremos apresentar alguns resultados que concernem sobre a estabilidade das Equações que iremos considerar. O primeiro deles é a respeito de uma restrição no conjunto de funções teste.

**Lema 2.1.** *Na definição 0.2 é suficiente considerar funções teste $\varphi$ que são polinômios quadráticos e vizinhanças $N$ que são bolas centradas no ponto de toque.*

*Demonstração.* Suponha que a Definição 0.2 vale sempre que $\varphi$ é um polinômio e $N$ é uma bola centrada no ponto de toque. Mostraremos que isto implicará em considerar funções teste $\varphi \in C^2$ que não necessariamente são polinômios quadráticos. Como a demonstração funciona da mesma maneira se considerarmos funções teste que tocam por cima ou por baixo, iremos nos concentrar no caso em estas tocam por cima. Dessa maneira, considere $\varphi \in C^2$ uma função que toca $u$ por cima em um ponto $x_0$ numa vizinhança $N$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x_0$ é a origem do espaço $\mathbb{R}^n$.

Seja $p$ o polinômio obtido da expansão de Taylor de 2° ordem de $\varphi$ somado com um termo quadrático convexo, i.e.

$$p(x) = \left\langle \frac{1}{2}(D^2\varphi(0) + \epsilon I_n)x, x \right\rangle + \langle x, \nabla\varphi(0) \rangle + \varphi(0).$$

Lembremos que, pelo Teorema da Expansão de Taylor,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2\varphi(0)x, x\right\rangle + r_2(x) \quad \text{com} \quad \lim_{x\to 0}\frac{r_2(x)}{|x|^2} = 0.$$

Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$, então

$$\frac{|\varphi(x) - (\varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2\varphi(0)x, x\right\rangle)|}{|x|^2} < \epsilon,$$

e consequentemente

$$\varphi(x) - (\varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle D^2\varphi(0)x, x\right\rangle) \quad \leq \quad \epsilon|x|^2.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq \varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle (D^2\varphi(0) + \epsilon I_n)x, x\right\rangle \\ &= p(x) \quad \forall x \in B_\delta(0). \end{aligned}$$

Daí, $p \geq \varphi \geq u$ numa vizinhança $B_r(0)$ em que vale a expansão de Taylor acima e $B_r(0) \subset N$. Considere

$$v_\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in N \\ u(x) & \text{se } x \notin N. \end{cases}$$

$$v_p(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x \in B_r(0) \\ u(x) & \text{se } x \notin B_r(0). \end{cases}$$

Note que $v_p(x) \leq v_\varphi(x) + 2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}$, pois se $x \in B_r$, então $v_p(x) = v_\varphi(x)$. Da expansão de Taylor,

$$|\varphi(x) - \left(\varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2\varphi(0)x, x\right\rangle\right)| \leq \epsilon|x|^2,$$

consequentemente

$$-\epsilon|x|^2 \leq \varphi(x) - \left(\varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2\varphi(0)x, x\right\rangle\right) \leq \epsilon|x|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} v_\varphi(x) &= \varphi(x) \\ &\geq \varphi(0) + \langle \nabla\varphi(0), x\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle D^2\varphi(0)x, x\right\rangle - \epsilon|x|^2 \\ &= p(x) - 2\epsilon|x|^2 \\ &= v_p(x) - 2\epsilon|x|^2 \\ &\geq v_p(x) - 2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}, \quad \forall x \in B_r(0) \subset N. \end{aligned}$$

Dessa forma, $v_p(x) \leq v_\varphi(x) + 2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}$. Caso $x \in N\backslash B_r(0)$, então

$$v_p(x) = u(x) \leq \varphi(x) = v_\varphi(x) + 0 = v_\varphi(x) + 2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}.$$

Finalmente, se $x \notin N$, então $x \notin B_r$ e assim

$$v_p(x) = u(x) = v_\varphi(x) + 0 = v_\varphi(x) + 2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r} \quad \forall x \notin N.$$

Como $p$ é um polinômio quadrático tal que $p \geq \varphi \geq u$ e $\varphi$ toca $u$ por cima em 0, i.e, $\varphi(0) = u(0)$, temos $p(0) = \varphi(0) = u(0)$. Daí, $p$ toca $u$ por cima em 0. Daí, pela definição de solução no sentido da viscosidade 0.2, temos

$$\mathcal{I}(v_p, 0) \geq f(0).$$

Por outro lado, da definição de Elipticidade Uniforme, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(v_\varphi, 0) - \mathcal{I}(v_p, 0) &\geq M^-_{\mathcal{L}}(v_\varphi - v_p, 0) \\ &= -M^+(v_p - v_\varphi, 0). \end{aligned}$$

Como $v_p(x) - v_\varphi(x) \leq 2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $(v_p(0) - v_\varphi(0)) = (2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r})(0) = 0$, temos que $M^+(v_p - v_\varphi, 0) \leq M^+(2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}, 0)$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(v_\varphi, 0) - \mathcal{I}(v_p, 0) &\geq -M^+(2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}, 0) \\ &= -\sup_{L\in\mathcal{L}} L(2\epsilon|x|^2\mathcal{X}_{B_r}) \\ &= -2\epsilon \sup_{L\in\mathcal{L}} L(|x|^2\mathcal{X}_{B_r}) \\ &\geq -2C\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{I}(v_p) \geq f(0)$, temos

$$\mathcal{I}(v_\varphi, 0) \geq \mathcal{I}(v_p, 0) - 2C\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Consequentemente, $\mathcal{I}(v_\varphi, 0) \geq f(0)$. □

O próximo Lema é uma melhoria do resultado (1.6). A diferença entre estes dois resultados é que agora permitimos algum crescimento da $u$ no infinito, os operadores podem ter coeficiente e também é habilitado que os operadores variem desde que sobre certas condições de convergência.

**Lema 2.2.** *Seja $\mathcal{I}_k$ uma sequência de operadores uniformemente elípticos com respeito à classe $\mathcal{L}$. Assuma que a Hipótese 2.1 vale. Seja $u_k$ uma sequência de funções semi-contínuas superiormente em $\Omega$ tal que*

- $\mathcal{I}_k(u_k, x) \leq f_k(x)$ *em* $\Omega$,
- $u_k \longrightarrow u$ *no* $\Gamma-$*sentido em* $\Omega$,
- $u_k \longrightarrow u$ *em* $L^1(\mathbb{R}^n, w)$,
- $f_k \longrightarrow f$ *localmente uniforme em* $\Omega$,
- $\mathcal{I}_k \longrightarrow \mathcal{I}$ *fraco em* $\Omega$*(com respeito a* $w$*)*
- $|u_k(x)| \leq C$ *para todo* $x \in \Omega$.

*Então,* $\mathcal{I}u \leq f$ *em* $\Omega$.

*Demonstração.* A fim de que $\mathcal{I}u \leq f$ em $\Omega$, devemos mostrar que dado $x \in \Omega$ e $\varphi \in C^2$ que toca $u$ por baixo em $x$, então $\mathcal{I}(v, x) \leq f(x)$, onde

$$v(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in N_x \\ u(x) & \text{se } x \notin N_x, \end{cases}$$

onde $N_x$ é uma vizinhança de $x$. Pelo Lema (2.1), temos que é suficiente considerar $\varphi = p$, um polinômio quadrático e $N_x = B_r(x)$. Por hipótese, $u_k$ converge no $\Gamma-$sentido para $u$ em $\Omega$. Daí, para $k$ grande, encontramos $x_k$ e $d_k \in C^2$ tal que $p + d_k$ toca $u_k$ em $x_k$ e além disso, $x_k \to x$ e $d_k \to 0$, quando $k \to \infty$. Como $\mathcal{I}_k(u_k, x) \leq f_k(x)$, se definirmos

$$v_k(x) = \begin{cases} p + d_k & \text{em } B_r(x) \\ u_k & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_r(x), \end{cases}$$

então $\mathcal{I}_k(v_k, x_k) \leq f_k(x_k)$. Claramente, $v_k \to v$, onde

$$v_k(x) = \begin{cases} p & \text{em } B_r(x) \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_r(x). \end{cases}$$

Agora considere $z \in B_{r/4}(x)$. Pela desigualdade triangular,

$$|\mathcal{I}_k(v_k, z) - \mathcal{I}(v, z)| \leq |\mathcal{I}_k(v_k, z) - \mathcal{I}_k(v, z)| + |\mathcal{I}_k(v, z) - \mathcal{I}(v, z)|.$$

Pela condição de Elipticidade Uniforme, temos

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{I}_k(v_k, z) - \mathcal{I}_k(v, z) & \leq & M^+(v_k - v, z) & \leq & |M^+(v_k - v, z)| \\ \mathcal{I}_k(v, z) - \mathcal{I}_k(v_k, z) & \leq & M^+(v - v_k, z) & \leq & |M^+(v - v_k, z)| \end{array}$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{I}_k(v_k, z) - \mathcal{I}_k(v, z)| & \leq & \max\{|M^+(v_k - v, z)|, |M^+(v - v_k, z)|\} \\ & \leq & \sup_{L \in \mathcal{L}} |L(v_k - v)(z)|. \end{array}$$

Do fato de $K(y) = \sup_{L \in \mathcal{L}} K_L(y)$, temos que

$$\sup_{L \in \mathcal{L}} |L(v_k - v)(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\delta(v_k - v, z, y)| K(y) dy.$$

Note que se $y \in B_r$, então $y + z \in B_r(x)$, pois $|(z + y) - x| \leq |y| + |z - x| \leq r/2 + r/4 < r$. Com isso, $\delta(v - v_k, z, y) = 0$. Dessa maneira

$$\sup_{L \in \mathcal{L}} |L(v_k - v)(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{r/2}} |\delta(v_k - v, z, y)| K(y) dy.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|\delta(v_k - v, z, y)| \leq |(v_k - v)(z + y)| + |(v_k - v)(z - y)| + |(v_k - v)(z)|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |\delta(v_k - v, z, y)|K(y)dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v_k - v)(z + y)|K(y)dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v_k - v)(z - y)|K(y)dy \\ &\quad + |(v_k - v)(z)| \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} K(y)dy.\end{aligned}$$

Pela Hipótese 2.1, como $|y| \geq r/2$, temos que existe $C_{r/2}$ tal que $K(y) \leq C_{r/2}w(y)$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v_k - v)(z + y)|K(y)dy &\leq C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v_k - v)(z + y)|w(y)dy \\ &= C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(z)} |(v_k - v)(y)|w(y - z)dy \\ &\leq C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(z)} |(v_k - v)(y)| \sup_{z\in B_{r/4}} w(y - z)dy.\end{aligned}$$

Fazemos a mesma conta para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v_k - v)(z - y)|K(y)dy \leq C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(z)} |(v_k - v)(y)| \sup_{z\in B_{r/4}} w(y - z)dy.$$

Além disso, como

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} K(y)dy \leq C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} w(y)dy < C,$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |\delta(v_k - v, z, y)|K(y)dy \leq 2C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(z)} |(v_k - v)(y)| \sup_{z\in B_{r/4}} w(y - z)dy + C|v_k(z) - v(z)|.$$

Agora, usando o fato de

$$\sup_{z\in B_{r/4}} w(y - z) = \sup_{z\in B_{r/4}(y)} w(z) \leq Cw(y),$$

temos que

$$\begin{aligned}2C_{r/2} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(z)} |(v_k - v)(y)| \sup_{z\in B_{r/4}} w(y - z)dy &\leq C \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(z)} |(v_k - v)(y)|w(y)dy \\ &\leq C||v_k - v||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)}.\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$|\mathcal{I}_k(v_k, z) - \mathcal{I}(v, z)| \leq C||v_k - v||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + C|v_k(z) - v(z)| + |\mathcal{I}_k(v, z) - \mathcal{I}(v, z)|.$$

Note que como $\mathcal{I}_k \to \mathcal{I}$ fraco em $\Omega$, então $\mathcal{I}_k(v,z)$ converge uniformemente para $\mathcal{I}(v,z)$ com $z \in B_{r/4}(x)$, e assim terceiro termo do lado direito da expressão acima tende a zero. Note também que como $u_k \to u$ em $L^1(\mathbb{R}^n, w)$, então $v_k \to v$ em $L^1(\mathbb{R}^n, w)$ e portanto

$$||v_k - v||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \to 0.$$

Como $d_k \to 0$, temos que $v_k \to v$ uniformemente em $B_r(x)$. Daí, obtemos que

$$\mathcal{I}_k(v_k, x) \to \mathcal{I}(v, x), \tag{2.9}$$

uniformemente em $B_{r/4}(x)$. Agora, pela desigualdade triangular, temos

$$|\mathcal{I}_k(v_k, x_k) - \mathcal{I}(v, x)| \leq |\mathcal{I}_k(v_k, x_k) - \mathcal{I}(v, x_k)| + |\mathcal{I}(v, x_k) - \mathcal{I}(v, x)|.$$

Por 2.9 e pelo fato de $\mathcal{I}v$ ser contínuo, temos que

$$|\mathcal{I}_k(v_k, x_k) - \mathcal{I}(v, x)| \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Como $x_k \to x$ e $f_k \to f$ localmente uniformemente, temos

$$\mathcal{I}(v, x) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}_k(v_k, x_k) \leq \lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = f(x),$$

e, por conseguinte, $\mathcal{I}(v, x) \leq f(x)$. □

Este resultado de estabilidade é importante para sabermos sobre quais condições podemos passar o limite nas equações. Nesta linha de pensamento, faz sentido perguntar sobre a existência de um peso que controla o crescimento da $u$ no infinito. Dessa forma temos a seguinte observação.

**Observação 2.1.** *A condição de $u$ estar em um espaço com peso não é supérflua.*

De fato, tomando

$$\mathcal{I}_k = -(-\Delta)^{1-1/k} \quad \mathcal{I} = \Delta \quad \text{e} \quad u_k(x) = \mathcal{X}_{B_1}(x)(|x|^2 - 1) - M_k \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2k}},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(u_k, x) &= C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|y - x|^{n+2s}} dy \\ &= C_{n,s} \left( \int_{B_1} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^{n+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2k}} \frac{-M_k - |x|^2 + 1}{|y - x|^{n+2s}} dy \right). \end{aligned}$$

Daí, obtemos $\mathcal{I}_k(u_k, x) \leq C_1 - M_k C_2$ e escolhemos $M_k > 0$ grande tal que $\mathcal{I}_k(u_k, x) \leq 0$. Porém, note que $u_k \to u = \mathcal{X}_{B_1}(x)(|x|^2 - 1)$. Daí, se passarmos o limite

$$\mathcal{I}u = \Delta u = 2n > 0.$$

O próximo Lema garante convergência uniforme de sequências no espaço dos operadores $\mathcal{I}$ desde que estejam sendo avaliados em funções adequadas.

**Lema 2.3.** *Seja $v$ uma função*

$$v(x) = \begin{cases} P(x) & se\ x \in B_r \\ u(x) & se\ x \notin B_r, \end{cases}$$

*e $\mathcal{I}_k$ uma sequência de operadores uniformemente Elípticos com respeito a alguma classe $\mathcal{L}$ satisfazendo a Hipótese 2.1. Então existe uma subsequência $\mathcal{I}_{k_j}$ tal que $f_{k_j} = \mathcal{I}_{k_j}(v,x)$ converge uniformemente $B_{\rho/2}$.*

*Demonstração.* Para a demonstração, iremos usar o Teorema de Arzelá-Ascoli. Com isto, precisamos que a sequência $f_k$ seja uniformemente limitada em $B_{r/2}$ e possui um módulo de continuidade uniforme. O fato de $\mathcal{I}_k$ ser uniformemente Elíptica garante que $\mathcal{I}_k(v,x) = f_k(x)$ é uniformemente limitada. Agora, vamos encontrar tal módulo de continuidade. Para isso, dados $x, y \in B_{r/2}$ com $|x-y| < r/8$, temos

$$\begin{aligned} f_k(x) - f_k(y) &= \mathcal{I}_k(v,x) - \mathcal{I}_k(v,y) \\ &= \mathcal{I}_k(v,x) - \mathcal{I}_k(\tau_{y-x}v,x) \\ &\leq M^+_{\mathcal{L}}(v - \tau_{y-x}v, x), \end{aligned}$$

onde $\tau_z u(x) = u(x+z)$. Note que a função $v - \tau_{y-x}v$ é uma função linear em $B_{r/4}(x)$. Para verificar isto, basta lembrar que $v(x) = p(x)$ em $B_r$, onde $p(x)$ é um polinômio quadrático, i.e, $p(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$. Daí, se $y, x \in B_{r/2}$, então $B_{r/4}(x) \subset B_r$, pois se $z \in B_{r/4}(x)$, então

$$|z| \leq |z-x| + |x| < r/4 + r/2 < r.$$

Dessa forma, usando o fato de $v = p$ em $B_r$, temos que se $z \in B_{r/4}$, então $x-z, x+z \in B_{r/4}(x) \subset B_r$. Assim,

$$\begin{aligned} (v - \tau_{y-x}v)(x+z) &= p(x+z) - p(y+z) \\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, z\rangle + \langle Az, x\rangle + \langle Az, z\rangle + \langle b, x\rangle + \langle b, z\rangle + c- \\ &\quad (\langle Ay, y\rangle + \langle Ay, z\rangle + \langle Az, y\rangle + \langle Az, z\rangle + \langle b, y\rangle + \langle b, z\rangle + c) \\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, z\rangle + \langle Az, x\rangle + \langle b, x\rangle - \\ &\quad (\langle Ay, y\rangle + \langle Ay, z\rangle + \langle Az, y\rangle + \langle b, y\rangle). \end{aligned}$$

Com isto, podemos ver claramente que $(v - \tau_{y-x}v)$ é uma função linear em $B_{r/4}(x)$. Assim temos que $\delta(v - \tau_{y-x}v, x, z) = 0$ para $z \in B_{r/4}$. Assim,

$$f_k(x) - f_k(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{r/4}} |\delta(v - \tau_{y-x}v, x, z)| K(z) dz,$$

onde $K(z) = \sup K_\alpha(z)$. Pela Hipótese 2.1, existe $C_{r/4}$ tal que $K(z) \leq C_{r/4} w(z)$. Com isto,

$$f_k(x) - f_k(y) \leq C_{r/4} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{r/4}} |v(x+z) + v(x-z) - 2v(x) - v(y+z) - v(y-z) + 2v(y)| w(z) dz.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |\delta(v - \tau_{y-x}v, x, z)| &\leq |v(x+z) - v(y+z)| + |v(x-z) - v(y-z)| + 2|v(x) - v(y)| \\ &= |\tau_x v(z) - \tau_y v(z)| + |\tau_x v(-z) - \tau_y v(-z)| + 2|v(x) - v(y)|. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
f_k(x)-f_k(y) &\leq C_{r/4}2|v(x)-v(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/4}} w(z)dz + C_{r/4}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/4}} |\tau_x v(z)-\tau_y v(z)|w(z)dz \\
&\quad + C_{r/4}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/4}} |\tau_x v(-z)-\tau_y v(-z)|w(z)dz \\
&= 2C_{r/4}\left(|v(x)-v(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/4}} w(z)dz + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/4}} |\tau_x v(z)-\tau_y v(z)|w(z)dz\right) \\
&\leq C\left(|v(x)-v(y)| + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/4}} |\tau_x v(z)-\tau_y v(z)|w(z)dz\right) \\
&= C\left(|v(x)-v(y)| + \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{x-y} v(z)-v(z)|w(z-y)dz\right) \\
&\leq C\left(|v(x)-v(y)| + \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{x-y} v(z)-v(z)|\sup_{B_r(z)} w dz\right) \\
&\leq C\left(\sup_{|\bar{x}-\bar{y}|\leq|x-y|,\bar{x},\bar{y}\in B_{r/2}}\left\{|v(\bar{x})-v(\bar{y})| + \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{\bar{x}-\bar{y}} v(z)-v(z)\sup_{B_r(z)} w dz|\right\}\right) \\
&\leq c(|x-y|),
\end{aligned}$$

onde $c(\rho)$ é definida por

$$c(\rho) := \left(\sup_{|x-y|\leq\rho,x,y\in B_{r/2}} |v(x)-v(y)| + \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{x-y} v(z)-v(z)w(z)dz,|\right)$$

e usamos o fato de

$$\sup_{B_r(z)} w \leq C_r w(z).$$

A função $c(\rho)$ é, de fato, um módulo de continuidade. Para mostrar isso, precisamos mostrar que $c(\rho)$ é monótona crescente, que vale a condição de que dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $c(r) < \epsilon$ e que $|f_k(y) - f_k(x)| \leq c(|x-y|)$. Claramente $c(\rho)$ é monótona crescente, uma vez que se $r_1 < r_2$ e $|x-y| < r_1$, então $|x-y| < r_2$. Consequentemente, $c(r_1) \leq c(r_2)$. A segunda condição segue da continuidade de $v$ em $B_r$ e do fato de $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$. A terceira condição segue da própria construção do módulo de continuidade. Dessa maneira a sequência $f_k$ é uniformemente limitada e possui um módulo de continuidade uniforme. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, $f_k$ possui um subsequência que converge uniformemente em $B_r$. □

É fato na Teoria Local para operadores uniformemente elípticos que toda sequência de operadores $\{\mathcal{F}_k\}$ converge, a menos de subsequência, para um operador $\mathcal{F}$ que é uniformemente elíptico com respeito à mesma classe. O Teorema a seguir reproduz este resultado no contexto não-local sobre algumas hipóteses minimais que são naturais para o problema.

**Teorema 2.3.** *Seja $\mathcal{I}_k$ uma sequência de operadores uniformemente Elípticos com respeito a alguma classe $\mathcal{L}$ satisfazendo as Hipóteses 2.1 e 2.2. Então existe uma subsequência $\mathcal{I}_{k_j}$ que converge fraco.*

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que podemos construir um subconjunto denso de funções teste $v$ da forma

$$v(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x \in B_r \\ u(x) & \text{se } x \notin B_r. \end{cases}$$

Primeiro lembre que $L^1(\mathbb{R}^n, w)$ é separável. Daí, $L^1(\mathbb{R}^n, w)$ contém um subconjunto denso enumerável $\{u_i\}$. Lembre também que o espaço dos Polinômios quadráticos é um espaço de dimensão finita que também possui um subconjunto denso enumerável $\{P_i\}$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$ defina

$$v_{k,i_1,i_2}(x) = \begin{cases} P_{i_1}(x) & \text{se } x \in B_{2^{-k}} \\ u_{i_2}(x) & \text{se } x \notin B_{2^{-k}}. \end{cases}$$

Dessa forma, dado $\epsilon > 0$ e qualquer função $v$ da forma

$$v(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x \in B_r \\ u(x) & \text{se } x \notin B_r, \end{cases}$$

escolhemos $k$ tal que $2^{-k} < r < 2^{-k+1}$ e depois escolhemos $i_1$ e $i_2$ tal que $||u_{i_2} - u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} < \epsilon$, pois $\{u_i\}$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n, w)$ e $P_{i_1} \in \{P_i\}$ tal que $|D^2P_{i_1} - D^2P| < \epsilon$ em $B_{2^{-k}}$, $|DP_{i_1} - DP| < \epsilon$ em $B_{2^{-k}}$ e $|P_{i_1} - P| < \epsilon$ em $B_{2^{-k}}$. Para esta escolha de $P_{i_1}$, basta notar que $DP(x)$e $D^2P(x)$ têm grau 1 e 2 respectivamente, e portanto é possível usar a densidade do mesmo espaço $\{P_i\}$. Da construção, temos que o conjunto $\{v_{k,i_1,i_2}\}$ é enumerável, Dessa maneira, podemos fazer um rearranjo adequado dos termos em uma sequência $\{v_i\}$ da forma

$$v_i(x) = \begin{cases} P_i(x) & \text{se } x \in B_{r_i} \\ u_i(x) & \text{se } x \notin B_{r_i}, \end{cases}$$

de tal maneira que para cada $v$ da forma

$$v(x) = \begin{cases} P(x) & \text{se } x \in B_r \\ u(x) & \text{se } x \notin B_r, \end{cases}$$

exista $v_i$ tal que

$$\begin{aligned} &||v - v_i||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} < \epsilon && \\ &|v - v_i| < \epsilon && \text{em } B_{r/2} \\ &|Dv - Dv_i| < \epsilon && \text{em } B_{r/2} \\ &|D^2v - D^2v_i| < \epsilon && \text{em } B_{r/2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pelo Lema 2.3, temos que para cada $v_i$ podemos encontrar uma subsequência $\mathcal{I}_{k_{i_j}}(v_i)$ converge uniformemente em $B_{r_i/2}$. Por um argumento clássico de diagonal, temos que existe uma subsequência $\mathcal{I}_{k_j}$ tal que para todo $v_i$, $\mathcal{I}_{k_j}(v_i,x)$ converge uniformemente em $B_{r_i/2}$ para um operador $\mathcal{I}_\infty(v_i,x)$. Com isso, se $v$ é qualquer função teste, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que vale 2.10. Para cada $x \in B_{r/2}$, temos, pela definição de Elipticidade Uniforme, que

$$\mathcal{I}_k(v,x) - \mathcal{I}_k(v_i,x) \leq M^+_{\mathcal{L}}(v - v_i,x).$$

Reescrevendo $(v - v_i)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} (v - v_i) &= (v - v_i)\mathcal{X}_{B_{r/2}} + (v - v_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} \\ &= (v - v_i)\mathcal{X}_{B_{r/2}} + (v - v_i)(1 - \mathcal{X}_{B_{r/2}}), \end{aligned}$$

temos

$$M^+_{\mathcal{L}}(v - v_i,x) \leq M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)\mathcal{X}_{B_{r/2}},x) + M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)(1 - \mathcal{X}_{B_{r/2}}),x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)(1 - \mathcal{X}_{B_{r/2}}),x) &= \sup_{K_\alpha\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta((v - v_i)(1 - \mathcal{X}_{B_{r/2}}),x,y)K_\alpha(y)dy \\ &= \sup_{K_\alpha\in\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} \delta(v - v_i x,y)K_\alpha(y)dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\delta(v - v_i,x,y)K(y)dy. \end{aligned}$$

A Hipótese 2.1 garante que $K(y) \leq C_{r/2}w(y)$. Com isso e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)(1 - \mathcal{X}_{B_{r/2}}),x) &\leq C_{r/2}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v - v_i)|(x+y)w(y)dy \\ &\quad +C_{r/2}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v - v_i)|(x-y)w(y)dy \\ &\quad +C_{r/2}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}} |(v - v_i)|(x)w(y)dy \\ &\leq C_{r/2}(2||v - v_i||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + \epsilon C) \\ &\leq \epsilon C_1. \end{aligned}$$

Além disso, como $(v - v_i)$ é uma função quadrática em $B_{r/2(x)}$, em particular é uma função $C^2$, temos

$$M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)\mathcal{X}_{B_{r/2}},x) \leq \epsilon||M^+|| \leq \epsilon C.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i),x) &\leq M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)\mathcal{X}_{B_{r/2}},x) + M^+_{\mathcal{L}}((v - v_i)(1 - \mathcal{X}_{B_{r/2}}),x) \\ &\leq \epsilon C + \epsilon C_1 \\ &\leq \epsilon C. \end{aligned}$$

Agora perceba que $\mathcal{I}_{k_j}(v,x)$ é uma sequência de cauchy em $L^\infty(B_{r/2})$ pois

$$|\mathcal{I}_{k_j}(v,x) - \mathcal{I}_{k_i}(v,x)| \leq |\mathcal{I}_{k_j}(v,x) - \mathcal{I}_{k_j}(v_i,x)| + |\mathcal{I}_{k_j}(v_i,x) - \mathcal{I}_{k_i}(v,x)|.$$

Mostramos, anteriormente, que $|\mathcal{I}_{k_j}(v_i,x) - \mathcal{I}_{k_j}(v,x)| \longrightarrow 0$ quando $k_j \longrightarrow \infty$. Para estimar o segundo termo, lembre que $\mathcal{I}_{k_j}(v_i,x) \longrightarrow \mathcal{I}_\infty(v_i,x)$. Daí,

$$|\mathcal{I}_{k_i}(v,x) - \mathcal{I}_\infty(v_i,x)| \leq |\mathcal{I}_{k_i}(v,x) - \mathcal{I}_{k_i}(v_i,x)| + |\mathcal{I}_{k_i}(v_i,x) - \mathcal{I}_\infty(v_i,x)|.$$

Novamente, $|\mathcal{I}_{k_i}(v,x) - \mathcal{I}_{k_i}(v_i,x)| \longrightarrow 0$ quando $k_i \longrightarrow \infty$, e $|\mathcal{I}_{k_i}(v_i,x) - \mathcal{I}_\infty(v_i,x)| \longrightarrow 0$ quando $k_i \longrightarrow \infty$. Consequentemente, $\mathcal{I}_{k_j}(v,x)$ é uma sequência de cauchy em $L_\infty(B_{r/2})$. Da completude de $L_\infty$, temos que $\mathcal{I}_{k_j}(v,x)$ é convergente, e converge uniformemente para um certo $\mathcal{I}_\infty(v,x)$ em $B_{r/2}$.

Com isto, mostramos que $\mathcal{I}_{k_j}$ converge uniformemente para um certo $\mathcal{I}_\infty$ em $B_{r/2}$. Agora, precisamos mostrar que este operador pode ser estendido para um operador uniformemente elíptico para todas funções teste $\varphi$. A ideia é lembrar que se $\mathcal{I}_{k_j}$ é uniformemente elíptico e $v_1$ e $v_2$ são funções teste da forma

$$v_1(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{se } x \in B_r \\ u_1(x) & \text{se } x \notin B_r \end{cases} \qquad v_2(x) = \begin{cases} p_2(x) & \text{se } x \in B_r \\ u_2(x) & \text{se } x \notin B_r, \end{cases}$$

então, pela Elipticidade uniforme, temos

$$M^-(v_1 - v_2, x) \leq \mathcal{I}_{k_j}(v_1 - v_2, x) \leq M^+(v_1 - v_2, x).$$

Passando o limite na desigualdade, obtemos

$$M^-(v_1 - v_2, x) \leq \mathcal{I}_\infty(v_1 - v_2, x) \leq M^+(v_1 - v_2, x).$$

Isto garante que há uma maneira única de estender $\mathcal{I}_\infty$ para todas as funções teste $\varphi$ usando o mesmo argumento de aproximação do lema 2.1. □

## 2.2 Regularidade no Bordo

Nesta seção mostraremos um teorema de extensão de módulo de continuidade até o bordo para soluções de equações envolvendo os operadores extremais. Mais precisamente, iremos mostrar que se temos um módulo de continuidade no bordo do domínio da equação, então podemos encontrar outro módulo de continuidade, que pode ser diferente, dentro do domínio. A estratégia para isso, assim como no caso Local (proposições 4.10, 4.12, 4.14 em (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995)), é controlar o crescimento de $u$ através de uma função barreira, scallings e Hölder continuidade no interior.

Vamos construir uma função barreira. Para isso, vamos usar o Lema $C$.2 de maneira adequada. Fazendo um truncamento na função deste lema, podemos obter o seguinte corolário

**Corolário 2.1.** *Para qualquer constante $C$, existe uma função contínua $\varphi$ tal que*

1. $\varphi = 0$ *em* $B_1$,
2. $\varphi \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^n$,
3. $\varphi \geq 1$ *em* $\mathbb{R}^n \backslash B_2$,
4. $M^+\varphi \leq 0$ *em* $\mathbb{R}^n \backslash B_1$ *para todo* $\sigma > \sigma_0$.

*Demonstração.* Basta considerar $\varphi(x) = \min(1, Cu(x))$, onde $u$ é do lema ($C.2$) e notar que

$$M^+_{\mathcal{L}_0}\varphi(x) \leq M^+_{\mathcal{L}_0}u(x) + M^+_{\mathcal{L}_0}(\varphi - Cu)(x),$$

e usar o lema $C.2$. □

Agora vamos em busca de estender o módulo de continuidade. Queremos provar o seguinte teorema

**Teorema 2.4.** *Seja $\sigma > \sigma_0 > 0$, $\rho$ um módulo de continuidade e $M^+$ e $M^-$ os operadores maximais $M^+_{\mathcal{L}_0(\sigma)}$ e $M^-_{\mathcal{L}_0(\sigma)}$. Considere $u$ uma função limitada tal que*

$$\begin{aligned}
&M^+u \geq -C && \text{em} \quad B_1,\\
&M^-u \leq C && \text{em} \quad B_1,\\
&|u(y) - u(x)| \leq \rho(|y-x|) && x \in \partial B_1, \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash B_1.
\end{aligned}$$

*Então existe outro módulo de continuidade $\tilde{\rho}$ tal que $|u(y) - u(x)| \leq \tilde{\rho}(|y-x|)$ para todo $x \in \overline{B}_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Este módulo de continuidade $\tilde{\rho}$ depende apenas de $\rho, \lambda, \Lambda, \sigma_0, n, ||u||_\infty$ e $C$.*

Para isso, iremos dividir o problema em duas partes, assim como no caso Local. Primeiro vamos obter um módulo de continuidade no bordo($x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$), depois vamos estender até o bordo($x \in \overline{B}_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$). Para a primeira parte, vamos precisar construir uma barreira para $u$ usando a função $\varphi$ do corolário 2.1. A ideia é usar a equação para comparar os valores de $u$ e da barreira dentro do domínio em que vale a equação usando um princípio de comparação.

**Lema 2.4.** *Suponha que $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ e seja $\rho$ um módulo de continuidade. Seja $u$ uma função limitada tal que*

$$\begin{aligned}
&M^+u(x) \geq -C && \text{em} \quad B_1\\
&u(y) - u(x) \leq \rho(|y-x|) && x \in \partial B_1, \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash B_1.
\end{aligned}$$

*Então existe outro módulo de continuidade $\tilde{\rho}$ tal que $u(y) - u(x) \leq \tilde{\rho}(|y-x|)$ para todo $x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Este módulo de continuidade depende apenas de $\rho, \lambda, \Lambda, \sigma_0, n, C$ e $||u||_\infty$.*

*Demonstração.* Primeiro observe que como $2 \geq \sigma \geq \sigma_0$, a função $p(x) = \max\{0, 4 - |x|^2\}$ satisfaz $M^+p \geq -c$ em $B_1$ para alguma constante $c > 0$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\delta(p, x, y) &= (p(x+y) + p(x-y) - 2p(x)) \\
&= (\max\{0, 4 - |x+y|^2\}) + \max\{0, 4 - |x-y|^2\} - 2(4 - |x|^2)) \\
&\geq \delta(4 - |.|^2, x, y) \\
&= 4 - |x+y|^2 + 4 - |x-y|^2 - 2(4 - |x|^2) \\
&= -|x|^2 - 2 < x, y > -|y|^2 - |x|^2 + 2 < x, y > -|y|^2 + 2|x|^2 \\
&= -|y|^2.
\end{aligned}$$

Como $p(x) = 4 - |x|^2$, então $M^+p(x) \geq M^+(4 - |.|^2)(x)$. Daí,

$$\begin{aligned}
M^+(4 - |.|^2)(x) &= (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+ - \lambda\delta^-(4 - |.|^2, x, y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\lambda\delta^-(4 - |.|^2, x, y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\lambda|y|^2}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= c < \infty.
\end{aligned}$$

Onde a integral acima é finita pois $n + \sigma - 2 \leq n$. Com isto, podemos reduzir o problema deste lema para o caso em que $M^+u \geq 0$, pois basta definir

$$v = u - \frac{C}{c} p,$$

e consequentemente $M^+v \geq M^+u - \frac{C}{c} M^+p \geq -C + C = 0$. Seja $\rho_0$ o módulo de continuidade da função $\varphi$ do Corolário 2.1. Defina

$$\tilde{\rho}(r) = \inf_R \left( \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right) \right).$$

Afirmamos que $\tilde{\rho}$ é de fato um módulo de continuidade.Primeiro perceba que $\tilde{\rho}$ é crescente pois se $r_1 < r_2$, então $r_1/R < r_2/R$ e como $\rho_0$ é um módulo de continuidade, $\rho_0(\frac{r_1}{R}) \leq \rho_0(\frac{r_2}{R})$. Daí,

$$\rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rho_0 \left( \frac{r_1}{R} \right) \leq \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rho_0 \left( \frac{r_2}{R} \right), \quad \forall R > 0.$$

Com isto, segue que $\tilde{\rho}(r_1) \leq \tilde{\rho}(r_2)$. Agora precisamos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $\tilde{\rho}(r) < \epsilon$. Para isso, primeiro escolhemos $R$ tal que $\rho(3R) < \epsilon/2$ e $r$ tal que $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rho_0(r/R) < \epsilon$. Daí,

$$\tilde{\rho}(r) = \inf_R \left( \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right) \right) \leq \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right) \leq \epsilon.$$

Para finalizar, precisamos mostrar que $\tilde{\rho}(|y - x|) \geq u(y) - u(x)$ para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \partial B_1$. Para isso, vamos construir uma função barreira para $u$. Seja $x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$ e defina

$$B(y) = u(x) + \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varphi \left( -x + \frac{y - x}{R} \right).$$

Como $\varphi \geq 0$, temos que $B(y) \geq u(x) + \rho(3R)$. Se $y \in B_{3R}(x)$, temos $||y - x|| < 3R$ e assim $\rho(3R \geq \rho(||y-x||)) \geq u(y) - u(x)$, para $y \in \mathbb{R}^n \backslash B_1$, onde o módulo de continuidade $\rho$ se aplica. Assim, temos que que $B(y) \geq u(y)$para $y \in B_{3R}(x) \cap \mathbb{R}^n \backslash B_1$. Agora note que se $||y - x|| \geq 3R$, então

$$\left|-x + \frac{y-x}{R}\right| \geq \frac{|y-x|}{R} - |x| \geq 2,$$

e assim $\varphi\left(-x + \frac{y-x}{R}\right) \geq 1$. Note que podemos supor $u(x) \geq 0$, pois basta considerar $v = u + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Dessa forma, temos

$$B(y) \geq ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq u(y) \quad \text{para} \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash B_{3R}(x).$$

Agora perceba que se $y \in B_1 \cap B_{3R}(x)$, então $\left(-x + \frac{y-x}{R} \in \mathbb{R}^n \backslash B_1\right)$. Para verificar isto, suponha o contrário. Com isso,

$$\begin{aligned} 1 > \left|-x + \frac{y-x}{R}\right| \qquad & \Longleftrightarrow \quad R > |y - x(1+R)| \\ |y - x(1+R)| \geq -|y| + |x(1+R)| \quad & \Longrightarrow \quad -|y| + (1+R) < R \end{aligned}$$

Daí, teríamos $|y| > 1$, contradição pois $|y| < 1$. Consequentemente, temos que $M^+B \leq 0$ em $B_1$, pois $M^+\varphi \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$. Assim, temos que $M^+B \leq 0 \leq M^+u$ em $B_1 \cap B_{3R}(x)$ e $u \leq B$ em $(\mathbb{R}^n \backslash B_1) \cap B_{3R}(x)$. Pelo Princípio da Comparação (1.1), temos que $B \geq u$ em $B_1 \cap B_{3R}(x)$ e dessa forma $B \geq u$ em $\mathbb{R}^n$. Agora note que $B \leq u(x) + \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\rho_0(|y-x|/R)$, pois

$$\left|\frac{y-x}{R}\right| = \left|-x + x + \frac{x-y}{R}\right| = \left|-x - \left(-x + \frac{y-x}{R}\right)\right|.$$

Assim

$$\rho_0\left(\frac{|y-x|}{R}\right) \geq \varphi\left(-x + \frac{y-x}{R}\right) - \varphi(-x).$$

Como $|x| = 1$, $\varphi(x) = 0$ e assim

$$\rho_0\left(\frac{|y-x|}{R}\right) \geq \varphi\left(-x + \frac{y-x}{R}\right).$$

Dessa forma,

$$B \leq u(x) + \rho(3R) + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\rho_0(|y-x|/R).$$

Como vale para qualquer $R > 0$, consequentemente vale para o ínfimo. Daí,

$$B \leq u(x) + \tilde{\rho}(|y-x|).$$

Como $u \leq B$, temos $u(y) \leq u(x) + \tilde{\rho}(|y-x|)$ e assim $u(y) - u(x) \leq \tilde{\rho}(|y-x|)$. □

Agora vamos obter regularidade até o bordo. Para isso, vamos fazer um truncamento da função que resolve a equação em torno do valor dela num ponto da fronteira $\partial B_1$. O motivo disto é que a menos de scalling, este truncamento resolve uma equação em que podemos aplicar a estimativa de Hölder continuidade para construir tal módulo de continuidade.

**Lema 2.5.** *Suponha que $\sigma > \sigma_0 > 0$. Seja $\rho$ um módulo de continuidade e $u$ uma função limitada tal que*

$$\begin{array}{lll} M^+u \geq -C & em & B_1, \\ M^-u \leq -C & em & B_1, \\ |u(y) - u(x)| \leq \rho(|y-x|) & x \in \partial B_1, & y \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

*Então existe um módulo de continuidade $\tilde{\rho}$ tal que $|u(y) - u(x)| \leq \rho(|y-x|)$ para todo $x \in \overline{B_1}$ e $y \in \mathbb{R}^n$.Este módulo de continuidade depende apenas de $\rho, \lambda, \Lambda, \sigma_0, n, C$ e $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.*

*Demonstração.* Seja $x \in \overline{B_1}$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Consideraremos dois casos. Se $||y-x|| < \frac{dist(x,\partial B_1)}{4}$ ou $||y-x|| \geq \frac{dist(x,\partial B_1)}{4}$. No segundo caso, se $||y-x|| \geq \frac{dist(x,\partial B_1)}{4}$, então, da compacidade de $\partial B_1$, temos que existe $x_0 \in \partial B_1$ tal que $dist(x, \partial B_1) = ||x - x_0||$. Pela desigualdade triangular e pelo módulo de continuidade, obtemos

$$\begin{array}{rcl} |u(y) - u(x)| & \leq & |u(y) - u(x_0)| + |u(x_0) - u(x)| \\ & \leq & \rho(|y - x_0|) + \rho(|x_0 - x|) \\ & \leq & \rho(5|x-y|) + \rho(4|x-y|). \end{array}$$

Consideremos, agora, o caso em que $||y-x|| < ||x-x_0||/4$. Seja $r = ||x-x_0||/2$ e defina

$$\overline{u} := \min(u(x_0) + \rho(4r), \max(u, u(x_0) - \rho(4r))).$$

Daí, temos

$$|\overline{u}(z) - u(z)| \leq \min((\rho(2r + |z-x|) - \rho(4r))^+, M),$$

onde $M = 2||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Para verificar isso, iremos separar em três casos. No primeiro caso, suponha que $u(x_0) + \rho(4r) \geq u(z) \geq u(x_0) - \rho(4r)$. Neste caso, $\overline{u}(z) = u(z)$ e assim

$$|\overline{u}(z) - u(z)| = 0 \leq \min((\rho(2r + |z-x|) - \rho(4r))^+, M).$$

Agora suponha que $u(z) \leq u(x_0) - \rho(4r) \leq u(x_0) + \rho(4r)$. Neste caso $\overline{u}(z) = u(x_0) - \rho(4r)$ e assim

$$|\overline{u}(z) - u(z)| = u(x_0) - u(z) - \rho(4r).$$

Como $x_0 \in \partial B_1$, $z \in \mathbb{R}^n$ e $\rho$ é um módulo de continuidade

$$u(x_0) - u(z) \leq \rho(|z - x_0|).$$

Pela desigualdade triangular, $|z - x_0| \leq |z-x| + |x - x_0| = |z-x| + 2r$, e assim

$$\rho(|z - x_0|) \leq \rho(2r + |z-x|).$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{rcl} |\overline{u}(z) - u(z)| & \leq & \rho(2r + |z-x|) - \rho(4r) \\ & \leq & (\rho(2r + |z-x|) - \rho(4r))^+. \end{array}$$

Também temos que $u(x_0) - u(z) - \rho(4r) \leq u(x_0) - u(z) \leq M$. Daí,

$$|\overline{u}(z) - u(z)| \leq \min((\rho(2r + |z - x|) - \rho(4r))^+, M).$$

O terceiro caso, $u(z) \geq u(x_0) + \rho(4r) \geq u(x_0) - \rho(4r)$, é análogo ao segundo caso. Agora defina o scalling de $B_r(x)$ para $B_1$,

$$\begin{array}{rcl} \overline{v}(z) & = & \overline{u}(x + rz) \\ v(z) & = & u(x + rz). \end{array}$$

Dessa forma

$$\begin{array}{rcl} |\overline{v}(z) - v(z)| & = & |u(x + rz) - \overline{u}(x + rz)| \\ & \leq & \min((\rho(2r + r|z|) - \rho(4r))^+, M). \end{array}$$

Vamos estimar $M^+\overline{v}$ em $B_1$. Primeiro, lembre que, por hipótese, $M^+u \geq -C$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} M^+v(x_0) & = & (2-\sigma)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda(v(x_0 + y) + v(x_0 - y) - 2v(x_0))^+ - \lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ & = & (2-\sigma)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda(u(x + rx_0 + ry) + u(x + rx_0 - ry) - 2u(x + rx_0))^+ - \lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy. \end{array}$$

Fazendo a mudança de variável $z = ry$, temos $dy = r^{-n}dz$ e assim

$$\begin{array}{rcl} M^+v(x_0) & = & (2-\sigma)r^{-n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+ - \lambda\delta^-}{|r^{-1}z|^{n+\sigma}} dz \\ & = & r^{\sigma} M^+u(x + rx_0) \\ & \geq & -Cr^{\sigma}. \end{array}$$

Também note que $\overline{v} = v + \overline{v} - v$. Daí, $M^+\overline{v} \geq M^+v - M^+(v - \overline{v})$. Agora vamos estimar $M^+(v - \overline{v})$ por cima em $B_1$. Dessa maneira,

$$\begin{array}{rcl} M^+(v - \overline{v}) & = & (2-\sigma)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+ - \lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ & \leq & (2-\sigma)\Lambda\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{((v - \overline{v})(z + y) + (v - \overline{v})(z - y) - 2(v - \overline{v})(z))^+}{|y|^{n+\sigma}} dy. \end{array}$$

Note que se $y \in B_1$, então

$$\begin{array}{rcl} |x + r(y + z) - x| & = & |r(y + z)| < 2r \\ |x + r(y + z) - x| & < & 2r \\ |x + rz - x| & < & r. \end{array}$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{rcl} |x + r(y + z) - x_0| & \leq & |x + r(y + z) - x| + |x - x_0| \leq 4r \\ |x + r(y - z) - x_0| & \leq & 4r \\ |x + rz - x_0| & \leq & 3r \leq 4r, \end{array}$$

e por isto, $\overline{v}(z+y) = v(z+y)$, $\overline{v}(z-y) = v(z-y)$ e $\overline{v}(z) = v(z)$. Assim

$$M^+(v-\overline{v})(z) \leq (2-\sigma)\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{((v-\overline{v})(z+y) + (v-\overline{v})(z-y))^+}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Como $|z+y| \leq |y|+1$ e $|z-y| \leq |y|+1$, temos que $\rho(2r + r|z+y|) \leq \rho(3r + r|y|)$ e $\rho(2r + r|z-y|) \leq \rho(3r + r|y|)$, e assim

$$\begin{aligned} M^+(v-\overline{v})(z) &\leq (2-\sigma)\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{2\min((\rho(3r + r|y|) - \rho(4r))^+, M)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= I_r. \end{aligned}$$

Note que como $2\min((\rho(3r + r|y|) - \rho(4r))^+, M) \leq 2M$, temos

$$I_r \leq 2M(2-\sigma)\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq 2M(2-\sigma)\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|y|^{n+\sigma_0}} dy < \infty.$$

Pelo Teorema da convergência Dominada,

$$I_r \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad r \longrightarrow 0.$$

Além disso, a convergência é uniforme em $\sigma$ para $\sigma \geq \sigma_0$. Assim

$$M^+\overline{v}(z) \geq M^+v(z) - M^+(v-\overline{v})(z) \geq -Cr^\sigma - I_r \quad \text{em} \quad B_1,$$

e $Cr^\sigma + I_r \longrightarrow 0$ se $r \longrightarrow 0$. Fazendo as mesmas contas, obtemos

$$M^-\overline{v} \leq Cr^\sigma + I_r \quad \text{em} \quad B_1.$$

Da definição de $\bar{v}$ temos que $\bar{v} \leq u(x_0) + \rho(4r)$. Assim, pela estimativa $C^\alpha$, Teorema 1.6, obtemos

$$\begin{aligned} |\overline{v}(z) - \overline{v}(0)| &\leq C_1(Cr^\sigma + I_r + \sup_{\mathbb{R}^n} |\bar{v}|)|z|^\alpha \\ &\leq C_1(Cr^\sigma + I_r + \rho(4r))|z|^\alpha \\ &= C_1 m_r |z|^\alpha, \end{aligned}$$

com $m_r \longrightarrow 0$ se $r \longrightarrow 0$, uniformemente em $\sigma$, para $\sigma \geq \sigma_0$,onde supomos, sem perda de generalidade, que $u(x_0) \leq 0$. Daí

$$|\overline{u}(x + rz) - \overline{u}(0)| \leq C_1 m_r |z|^\alpha.$$

Fazendo $z = \frac{y-x}{r}$, temos

$$|\overline{u}(y) - \overline{u}(x)| \leq C_1 m_r \left(\frac{|x-y|}{r}\right)^\alpha.$$

Como $\overline{u} = u$ em $B_r(x)$, temos

$$|\overline{u}(y) - \overline{u}(x)| \leq C_1 m_r \left(\frac{|x-y|}{r}\right)^\alpha \leq C_1 \sup_{r > 2d} \frac{d^\alpha m_r}{r^\alpha},$$

onde a última desigualdade vale pois $|x-y| < |x-x_0|/4 = r/2$, ou seja, $r > 2d$. Agora, provaremos que $|u(y)-u(x)| \leq \tilde{\rho}(|x-y|)$ para algum módulo de continuidade $\tilde{\rho}$ desde que possamos escolher $\tilde{\rho}(d) \geq C_1 \sup_{r>2d} \frac{d^\alpha m_r}{r^\alpha} \geq 0$. Para isso, provaremos que se $d \longrightarrow 0$, então $\sup_{r>2d} \frac{d^\alpha m_r}{r^\alpha} \longrightarrow 0$. Dessa forma, suponha que não vale. Por conseguinte, da definição de supremo, existe $\epsilon > 0$ e sequências $r_i$ e $d_i$ com $r_i > 2d_i$ e $d_i \longrightarrow 0$ tal que $\frac{d_i^\alpha m_{r_i}}{r_i^\alpha} > \epsilon$. Como $m_r$ é limitado superiormente, a sequência $d_i^\alpha / r_i^\alpha$ não pode tender a zero, pois do contrário teríamos

$$0 \leq m_{r_i} \frac{d_i^\alpha}{r_i^\alpha} \leq C \frac{d_i^\alpha}{r_i^\alpha} \longrightarrow 0,$$

e assim $m_{r_i} d_i^\alpha / r_i^\alpha$ tenderia a zero, o que não pode acontecer. Isto significa que, obrigatoriamente, devemos ter $r_i \longrightarrow 0$, pois do contrário a sequência $r_i$ seria limitada e com isso $d_i^\alpha / r_i^\alpha \longrightarrow 0$, o que não pode acontecer. Dessa maneira, como $r_i > 2d_i$, temos

$$0 \leq m_{r_i} \frac{d_i^\alpha}{r_i^\alpha} \leq m_{r_i} \frac{d_i^\alpha}{(2d_i)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} m_{r_i} \longrightarrow 0,$$

pois $r_i \longrightarrow 0$. Assim, $m_{r_i} d_i^\alpha / r_i^\alpha \longrightarrow 0$, que é uma contradição e o Lema está provado. □

Com estes dois lemas preparatórios, podemos provar o Teorema 2.4 da maneira que foi citada anteriormente.

*Demonstração.* Basta usar os Lemas 2.4 e 2.5. Como

$$\begin{array}{ll} M^+ u \geq -C & \text{em} \quad B_1, \\ |u(y)-u(x)| \leq \rho(|y-x|) & x \in \partial B_1, \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash B_1. \end{array}$$

em particular, $u(y)-u(x) \leq \rho(|x-y|)$ $\forall x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Daí, o Lema 2.5 garante que encontraremos outro módulo de continuidade $\rho_1$ que se estende para $y \in \mathbb{R}^n$. Assim, teremos $u(y)-u(x) \leq \rho_1(|x-y|)$ para $x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Agora aplicamos o mesmo lema para $-u$, pois $M^+(-u) = -M^- u \geq -C$ em $\quad B_1$. Dessa forma, obtemos $|u(y)-u(x)| \leq \rho_1(|x-y|)$ para todo $x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ll} M^+ u \geq -C & \text{em} \quad B_1, \\ M^- u \leq C & \text{em} \quad B_1, \\ |u(y)-u(x)| \leq \rho(|y-x|) & x \in \partial B_1, \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash B_1. \end{array}$$

E daí, existe $\tilde{\rho}$ módulo de continuidade tal que $|u(y)-u(x)| \leq \tilde{\rho}(|x-y|)$ para todo $x \in \overline{B_1}$ e $y \in \mathbb{R}^n$. □

É importante notar que as condições $M^+ u \geq -C$ e $M^- u \leq C$ são provenientes do fato de $u$ ser solução de uma equação do tipo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)(2-\sigma) \frac{a(x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy = f(x) \quad \text{em} \quad B_1,$$

onde $\lambda \leq a(x,y) \leq \Lambda$ e $f \in L_\infty(B_1)$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
-||f||_{L_\infty(B_1)} \leq f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)(2-\sigma)\frac{a(x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2-\sigma)\frac{a(x,y)\delta^+(u,x,y) - a(x,y)\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (2-\sigma)\frac{\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= M^+u(x).
\end{aligned}$$

Daí, $M^+u \geq -C$ em $B_1$. Da mesma maneira mostra-se que $M^-u \leq C$.

## 2.3 Regularidade $C^{1,\alpha}$ para Equações com Coeficiente Variáveis

Nesta seção apresentaremos o resultado principal deste capítulo; uma estimativa $C^{1,\alpha}$ para equações não-locais que não-necessariamente são invariantes por translação. A heurística por trás desse problema, proveniente do caso Local, é que se dois operadores estão próximos, então assim serão suas soluções. A diferença agora é que como estamos lidando com operadores Não-Locais, precisamos lidar com os efeitos da natureza do operador. Para entender melhor um desses problemas, olhemos para o seguinte quociente

$$w(x) = \frac{[u-l]}{\lambda^{1+\alpha}}(\lambda x),$$

onde $l$ é uma função afim. Este quociente surge pois como estamos querendo provar regularidade $C^{1,\alpha}$, é esperado que $u$ possua o perfil de uma função afim e assim faz sentido(pelo menos heuristicamente) usarmos um argumento de aproximação baseado na construção de funções lineares como veremos adiante. O principal problema desta técnica para o contexto não-local é que o quociente $w$ é ilimitado, uma vez que estamos considerando todo o espaço $\mathbb{R}^n$ e $l$ é uma função afim. Isto pode ser contornado pelo fato de ainda sabermos quantificar seu crescimento no infinito simplesmente por ser uma função afim (o que pode ser entendido também como uma justificativa de consideramos nos teoremas das seções anteriores que $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$). Com isso fica claro também a necessidade da condição 2.7.

É importante também que possamos dar um pouco mais de liberdade para o conceito de scalling, uma vez que a técnica que iremos usar é baseada em sucessivos rescallings. Desse modo, vamos admitir uma espécie de invariância por scalling para a classe de kernels que iremos trabalhar. Essa invariância funciona da seguinte maneira: toda vez que $K \in \mathcal{L}$, devemos ter que $\lambda^{n+\sigma}K(\lambda -) \in \mathcal{L}$ para todo $\lambda < 1$, e sempre que isto acontecer diremos que a classe $\mathcal{L}$ tem escala $\sigma$. A exemplo temos a classe $\mathcal{L}_0$ que satisfaz essa propriedade de invariância, enquanto $\mathcal{L}_*$ definida antes do

Teorema 2.2 não a satisfaz, como mostramos.
Precisamos determinar também que equação o quociente $w$ resolve. Pelo fato de estarmos lidando com os incrementos de segunda ordem $\delta(u,x,y) = u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)$, temos que a subtração de uma função afim não interfere, ou seja, $\delta(u-l,x,y) = \delta(u,x,y)$. Assim, basta avaliarmos que equação a função $v = \mu u(\lambda -)$ resolve.
Desta forma, definimos o operador rescalonado da seguinte forma

**Definição 2.4.** *Dado $\sigma \in (0,2)$ e um operador $\mathcal{I}$, definimos o operador rescalonado*

$$\mathcal{I}_{\mu,\lambda}(w,x) = \lambda^{\sigma}\mu\mathcal{I}\left(\mu^{-1}w(\lambda^{-1}-), \lambda x\right).$$

*A norma de escala $\sigma$ é definida por*

$$\left\|\mathcal{I}^{(1)} - \mathcal{I}^{(2)}\right\|_{\sigma} = \sup_{\lambda<1}\left\|\mathcal{I}^{(1)}_{1,\lambda} - \mathcal{I}^{(2)}_{1,\lambda}\right\|.$$

Com isto, temos que $v$ resolve $\mathcal{I}_{\mu,\lambda}(v,x) = \lambda^{\sigma}\mu f(x)$. Por esta razão, precisamos definir a norma de escala $\sigma$, pois como fazemos sucessivos rescallings, é necessário que saibamos julgar proximidade em cada escala, e com isso faz-se importante medir essa distância levando em consideração os scallings de ordem $\sigma$.
A classe de operadores que iremos trabalhar é denominada por $\mathcal{L}_1$, esta será a maior classe contida em $\mathcal{L}_*$ que é invariante por escala. Esta é a classe de kernels $K \in \mathcal{L}_0$ que satisfazem

$$|\nabla K(y)| \leq C|y|^{-n-\sigma-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n\backslash\{0\}. \tag{2.11}$$

O primeiro passo em busca do resultado de aproximação principal deste capítulo é o seguinte lema de aproximação.

**Lema 2.6.** *Para algum $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ e $\alpha < \sigma_0 - 1$ consideremos operadores não-locais $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ uniformemente elípticos com respeito a $\mathcal{L}_0(\sigma)$. Assumindo que o problema de fronteira*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 u &= 0 && \text{em } B_1 \\ u &= g && \text{em } \mathbb{R}^n\backslash B_1 \end{aligned}$$

*não tem mais que uma solução $u$ para uma certa $g$ contínua tal que $|g(x)| \leq M(|x|+1)^{1+\alpha}$. Dado $M > 0$, um módulo de continuidade $\rho$ e $\epsilon > 0$, existe um $\eta > 0$ pequeno e $R > 0$ grande tal que se $u, v, \mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ satisfazem*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_0(v,x) = 0 && \text{em } B_1,\\
&\mathcal{I}_1(u,x) \geq -\eta && \text{em } B_1,\\
&\mathcal{I}_2(u,x) \leq -\eta && \text{em } B_1,\\
&u = v && \text{em } \mathbb{R}^n\backslash B_1,\\
&||\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_0|| \leq \eta && \text{em } B_1\\
&||\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_0|| \leq \eta && \text{em } B_1\\
&|u(y) - u(x)| \leq \rho(|y-x|) && \forall x \in B_R\backslash B_1 \quad e \quad y \in \mathbb{R}^n\backslash B_1,\\
&|u(x)| \leq M(|x|+1)^{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

*Então, $|u - v| < \epsilon$ em $B_1$.*

*Demonstração.* Suponha que o Lema é falso. Daí, existem sequências $R_k, \eta_k, u_k, v_k, \mathcal{I}_0^k, \mathcal{I}_1^k, \mathcal{I}_2^k$ tal que $R_k \to \infty$, $\eta_k \to 0$ e todas as hipóteses do Lema valem, mas $\sup |u_k - v_k| \geq \epsilon$ em $B_1$. Como $\mathcal{I}_0^k$ é uma sequência de operadores uniformemente Elípticos, o Teorema 2.3 garante que existe $K_0^{k_j}$ que converge fraco para um operador uniformemente elíptico $\mathcal{I}_0$ e que também é elíptico com respeito à mesma classe $\mathcal{L}$. Daí, como

$$||\mathcal{I}_1^k - \mathcal{I}_0^k|| \leq \eta_k \quad \text{e} \quad ||\mathcal{I}_2^k - \mathcal{I}_0^k|| \leq \eta_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, pela desigualdade triangular, temos

$$||\mathcal{I}_1^{k_j} - \mathcal{I}_0|| \leq ||\mathcal{I}_1^{k_j} - \mathcal{I}_0^{k_j}|| + ||\mathcal{I}_0^{k_j} - \mathcal{I}_0|| \to 0,$$

e o mesmo vale para $\mathcal{I}_2^{k_j}$. Com esta observação, podemos garantir que $\mathcal{I}_1^{k_j}$ e $\mathcal{I}_2^{k_2}$ convergem fraco para $\mathcal{I}_0$, pois dado $v$ da forma

$$v(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x \in B_\rho(x_0) \\ u(x) & \text{se } x \notin B_\rho(x_0), \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_{\rho/2}} |\mathcal{I}_1 i^{k_j}(v,x) - \mathcal{I}_0(v,x)| &= (1+M) \sup_{x \in B_{\rho/2}} \frac{|\mathcal{I}_i^{k_j}(v,x) - \mathcal{I}_0(v,x)|}{1+M} \\ &\leq (1+M)||\mathcal{I}_i^{k_j} - \mathcal{I}_0|| \to 0, \end{aligned}$$

para $i \in \{1, 2\}$. Dessa forma, mostramos que $\mathcal{I}_1^{k_j}$ e $\mathcal{I}_2^{k_j}$ convergem fraco para $\mathcal{I}_0$. Agora note que $u_k$ e $v_k$ possuem o mesmo módulo de continuidade $\rho$ em $\partial B_1$, pois, por hipótese, $u_k = v_k$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$ e $\rho$ é o módulo de continuidade de $u_k$. Como $u_k$ resolve a equação

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^k(u_k, x) &\geq -\eta_k \quad \text{em} \quad B_1 \\ \mathcal{I}_1^k(u_k, x) &\leq \eta_k \quad \text{em} \quad B_1, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} M^+(u_k, x) &\geq -\eta_k \quad \text{em} \quad B_1 \\ M^-(u_k, x) &\leq \eta_k \quad \text{em} \quad B_1, \end{aligned}$$

e vale $|u_k(y) - u_k(x)| \leq \rho(|y-x|)$ para todo $x \in B_{R_k} \backslash B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $|u_k(y) - u_k(x)| \leq \rho(|y-x|)$ para todo $x \in \partial B_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. O teorema 2.4 garante que $\rho$ pode ser estendido para $\tilde{\rho}$ em que vale $|u_k(y) - u_k(x)| \leq \tilde{\rho}(|y-x|)$ para todo $x \in \overline{B}_1$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Consequentemente, obtemos que $u_k$ e $v_k$ possuem um módulo de continuidade uniforme em $B_{R_k}$, onde $R_k \to \infty$, e assim podemos encontrar uma subsequência que converge uniformemente (em conjuntos compactos) e com isso converge $q.t.p$ em $\mathbb{R}^n$. Daí, O Teorema da Convergência Dominada garante que estas subsequências convergem em $L^1(\mathbb{R}^n, w)$. Dessa forma, sejam $u, v$ os respectivos limites de $u_k$ e $v_k$. Como $\sup |u_k - v_k| \geq \epsilon$ em $B_1$. Como $u_k$ e $v_k$ convergem uniformemente para $u$ e $v$, respectivamente, temos que $\sup |u - v| \geq \epsilon$ e por isso $u$ e $v$ devem ser diferentes. O Lema 2.2, por sua vez, nos permite passar o limite nas equações

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^k(u_k, x) &\geq -\eta_k \\ \mathcal{I}_2^k(u_k, x) &\leq \eta_k, \end{aligned}$$

para garantir que $\mathcal{I}_0(u, x) = 0$ em $B_1$. Porém, usando o Lema 2.2 novamente, temos que $\mathcal{I}_0(v, x) = 0$ em $B_1$, uma vez que $\mathcal{I}_0^k(v_k, x) = 0$ em $B_1$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0(v, x) = 0 \quad & \text{em } B_1 \\ \mathcal{I}_0(u, x) = 0 \quad & \text{em } B_1 \\ u = v \quad & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_1. \end{aligned}$$

Dessa maneira, pela unicidade de soluções de $\mathcal{I}_0$, deveríamos ter $u = v$ em $B_1$. Contradição. □

A estratégia agora é usar o lema de aproximação 2.6 iterativamente para obter o seguinte resultado.

**Teorema 2.5.** *Suponha que $\sigma \geq \sigma_0 > 1$. Seja $\mathcal{I}^0$ um operador não-local invariante por translação fixo em uma classe $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0(\sigma)$ com escala $\sigma$ e estimativas $C^{1,\bar{\alpha}}$ interior(por exemplo $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$). Seja $\mathcal{I}^1$ e $\mathcal{I}^2$ dois operadores não-locais, elípticos com respeito a $\mathcal{L}_0(\sigma)$, e suponha que exista $\eta > 0$ tal que*

$$||\mathcal{I}^i - \mathcal{I}^0||_\sigma < \eta, \quad \textit{para} \quad i \in \{1, 2\}.$$

*Seja u uma função limitada que resolve a equação*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^1(u, x) &\geq f_1(x) \quad \textit{em } B_1 \\ \mathcal{I}^2(u, x) &\leq f_2(x) \quad \textit{em } B_1, \end{aligned}$$

*para funções $f_1, f_2$ limitadas. Então, $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ para qualquer $\alpha < \min(\bar{\alpha}, \sigma_0 - 1)$ e*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C \left( ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||f_1||_{L^\infty(B_1)} + ||f_2||_{L^\infty(B_1)} \right),$$

*e a estimativa depende apenas de $n, \lambda, \Lambda, \sigma_0$, mas não de $\sigma$.*

*Demonstração.* Fazendo o scalling

$$v = \frac{1}{\frac{1}{\eta}||f_1||_{L^\infty(B_1)} + \frac{1}{\eta}||f_2||_{L^\infty(B_1)} + ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}} u((2R)^{-1} -),$$

podemos supor que

$$||f_1||_{L^\infty(B_1)} \leq \eta \quad ||f_2||_{L^\infty(B_1)} \leq \eta \quad ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1,$$

e $u$ resolve a equação em $B_{2R}$, com $R$ grande, a ser escolhido posteriormente. O argumento consiste em encontrar uma sequência de funções lineares $l_k = a_k + b_k.x$ e um $\lambda > 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \sup_{B_{\lambda^k}} |u - l_k| & \leq & \lambda^{k(1+\alpha)} \\ |a_{k+1} - a_k| & \leq & \lambda^{k(1+\alpha)} \\ \lambda^k |b_{k+1} - b_k| & \leq & C_2 \lambda^{k(1+\alpha)}. \end{array}$$

Para $k = 0$, tomamos $l_0 = 0$. Agora assumimos que vale até $k$ e vamos mostrar para $k+1$. Defina

$$w_k(x) = \frac{1}{\lambda^{k(1+\alpha)}} [u - l_k](\lambda^k x).$$

Daí, note que $w_k$ resolve uma equação com mesma Elipticidade

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_k^{(1)}(w_k, x) & = & \mathcal{I}^{(1)}_{\lambda^{-k(1+\alpha)}, \lambda^k}(w_k, x) \\ & = & \lambda^{k\sigma} \lambda^{-k(1+\alpha)} \mathcal{I}(\lambda^{k(1+\alpha)} w_k(\lambda^{-k} -), \lambda^k x) \\ & = & \lambda^{k(\sigma-1-\alpha)} \mathcal{I}(u, \lambda^k x) \\ & \geq & \lambda^{k(\sigma-1-\alpha)} f_1(\lambda^k x), \end{array}$$

e do mesma maneira

$$\mathcal{I}_k^{(2)}(w_k, x) \leq \lambda^{k(\sigma-1-\alpha)} f_2(\lambda^k x).$$

Como $\sigma - 1 - \alpha \geq \sigma_0 - 1 - \alpha > 0$, o lado direito das equações acima se tornam menores à medida que $k$ cresce, pois $\lambda^{k(\sigma-1-\alpha)} < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, note que

$$\begin{array}{rcl} \left\| \mathcal{I}_k^{(j)} - \mathcal{I}_k^{(0)} \right\| & \leq & \sup_{\lambda < 1} \left\| \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(j)} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)} \right\| \\ & = & \left\| \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(j)} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)} \right\|_\sigma < \eta. \end{array}$$

Da hipótese de indução, temos que $|w_k| \leq 1$ em $B_1$. Consideremos $\alpha < \alpha_1 < \min\{\bar{\alpha}, \sigma_0\}$ e vamos mostrar que podemos construir a sequência $l_k$ de tal modo que também tenhamos crescimento linear em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$, ou seja,

$$|w_k(x)| \leq |x|^{1+\alpha_1}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash B_1.$$

Como $w_k$ resolve a equação acima, e os operadores $\mathcal{I}^{(1)}$ e $\mathcal{I}^{(2)}$ são uniformemente elípticos com respeito a classe $\mathcal{L}_0$, temos por 2.1 que $w_k$ é Hölder contínua. Tomamos $R > 0$ do Lema 2.6, de tal forma que $w_k$ seja Hölder-contínua em $B_R$ (e, em particular, $B_R \backslash B_1$) e apliquemos o mesmo Lema para a função $h$ que resolve

$$\begin{cases} \mathcal{I}_k^{(0)} h = 0 & \text{em } B_1 \\ h = w_k & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_1. \end{cases}$$

Assim, o Lema 2.6 garante que $|w_k - h| < \epsilon(\eta, R)$ em $B_1$. Como $\mathcal{I}_k^{(0)}$ é um operador invariante por translações e elíptico com respeito à $\mathcal{L}$, temos estimativa $C^{1,\bar{\alpha}}$ no interior. Seja $\bar{l} = \bar{a} + \bar{b}.x$

a parte linear de $h$ ao redor da origem. Como $|w_k - h| < \epsilon(\eta, R)$, então, pela desigualdade triangular inversa, obtemos

$$|h| \leq \epsilon(\eta, R) + |w_k| \leq \epsilon(\eta, R) + 1,$$

e assim $|\bar{a}| \leq \epsilon(\eta, R) + 1$. Além disso, a estimativa $C^{1,\bar{\alpha}}$ nos garante um controle universal do coeficiente $\bar{b}$, ou seja,

$$|\bar{b}| \leq C_2.$$

Também temos que

$$|h - \bar{l}| \leq C_3 |x|^{1+\bar{\alpha}} \quad \text{em} \quad B_{1/2}.$$

Portanto, temos as seguintes estimativas

$$\begin{array}{rcl} |w_k - \bar{l}| & \leq & |w_k - h| + |h - \bar{l}| \\ & \leq & \epsilon(\eta, R) + C_3 |x|^{1+\bar{\alpha}} \quad \text{em} \quad B_{1/2}; \\ |w_k - \bar{l}| & \leq & |w_k - h| + |h| + |\bar{l}| \\ & \leq & \epsilon(\eta, R) + 1 + \epsilon(\eta, R) + 1 + \epsilon(\eta, R) + C_2 |x| \\ & \leq & 3\epsilon(\eta, R) + 2 + C_2 \quad \text{em} \quad B_1 \backslash B_{1/2} \\ |w_k - \bar{l}| & \leq & |w_k| + |\bar{l}| \\ & \leq & |x|^{1+\alpha} + |\bar{a}| + |\bar{b}||x| \\ & \leq & |x|^{1+\alpha} + 1 + \epsilon(\eta, R) + C_2 |x| \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \backslash B_1. \end{array}$$

Escolheremos $\lambda > 0$ pequeno, que determinaremos abaixo, e depois $\eta$ e $R$ tal que $\epsilon(\eta, R) \leq \lambda^{1+\bar{\alpha}}$. Com isso, se definirmos

$$l_{k+1}(x) = l_k(x) + \lambda^{k(1+\alpha)} \bar{l} \left( \lambda^{-k} x \right),$$

e

$$\begin{array}{rcl} w_{k+1}(x) & = & \dfrac{1}{\lambda^{(k+1)(1+\alpha)}} [u - l_{k+1}] \left( \lambda^{k+1} x \right) \\ & = & \dfrac{1}{\lambda^{1+\alpha}} [w_k - \bar{l}] \, (\lambda x) \, . \end{array}$$

Agora, vamos verificar as estimativas anteriores para o scalling acima. Antes note que, nesse novo sistema reescalonado, estaremos realizando as estimativas em

$$B_{\lambda^{-1}/2}, \qquad B_{\lambda^{-1}} \backslash B_{\lambda^{-1}/2} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R}^n \backslash B_{\lambda^{-1}},$$

pois

$$|\lambda x| < 1/2 \iff |x| < \lambda^{-1}/2, \qquad 1/2 < |\lambda x| < 1 \iff \lambda^{-1}/2 < |x| < \lambda^{-1}$$

e

$$|\lambda x| > 1 \iff |x| > \lambda^{-1}.$$

Daí,

$$
\begin{array}{rcl}
|w_{k+1}(x)| & = & \frac{1}{\lambda^{1+\alpha}}|(w_k - \bar{l})(\lambda x)| \\
& \leq & \frac{1}{\lambda^{1+\alpha}}(\epsilon(\eta, R) + C_3|\lambda x|^{1+\bar{\alpha}}) \\
& \leq & \lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} + C_3\lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} \quad \text{em} \quad B_{\lambda^{-1}/2}; \\
|w_{k+1}(x)| & \leq & \lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} + (2 + C_2)\lambda^{-(1+\alpha)} \quad \text{em} \quad B_{\lambda^{-1}} \backslash B_{\lambda^{-1}/2} \\
|w_{k+1}(x)| & \leq & \lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} + \lambda^{-(1+\alpha)} + \lambda^{\alpha_1-\alpha}|x|^{1-\alpha_1} \\
& & +\lambda^{-\alpha}C_2|x| \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \backslash B_{\lambda^{-1}}.
\end{array}
$$

Agora escolhemos $\lambda$ pequeno de tal maneira que $(1 + C_3)\lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} < 1$, daí, como $B_1 \subset B_{\lambda^{-1}/2}$, temos $|w_{k+1}(x)| \leq 1$ em $B_1$. Além disso, se tomarmos $\lambda > 0$ pequeno o suficiente, ainda teremos

$$
\begin{array}{rcl}
|w_{k+1}(x)| & \leq & (1 + C_3)\lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} \\
& \leq & 1 \\
& \leq & |x| \leq |x|^{1+\alpha_1} \quad \text{em} \quad B_{\lambda^{-1}/2} \backslash B_1, \\
|w_{k+1}(x)| & \leq & \lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} + (2 + C_2)\lambda^{-(1+\alpha)} \\
& \leq & \lambda^{\alpha_1-\alpha} + (2 + C_2)\lambda^{-(1+\alpha)} \\
& \leq & C\lambda^{-(1+\alpha_1)} \leq C|x|^{1+\alpha_1} \quad \text{em} \quad B_{\lambda^{-1}} \backslash B_{\lambda^{-1}/2}, \\
|w_{k+1}(x)| & \leq & \lambda^{\bar{\alpha}-\alpha} + \lambda^{-(1+\alpha)} + \lambda^{\alpha_1-\alpha}|x|^{1+\alpha_1} + C_2\lambda^{-\alpha}|x| \\
& \leq & C(\lambda^{\bar{\alpha}-\alpha}\lambda - (1 + \alpha)\lambda^{\alpha_1-\alpha}\lambda^{-\alpha})|x|^{1+\alpha_1} \\
& \leq & C|x|^{1+\alpha_1} \qquad \mathbb{R}^n \backslash B_{\lambda^{-1}}.
\end{array}
$$

Com isso, mostramos que $|w_{k+1}| \leq |x|^{1+\alpha_1}$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$. Além disso, valem as estimativas

$$
\begin{array}{rcl}
|a_{k+1} - a_k| & \leq & \lambda^{k(1+\alpha)} \\
\lambda^k|b_{k+1} - b_k| & \leq & C_2\lambda^{k(1+\alpha)},
\end{array}
$$

também temos que

$$
\begin{array}{rcl}
|u - l_{k+1}| & = & |u - l_k - \lambda^{k(1++\alpha)\bar{l}(\lambda^{-k}x)}| \\
& = & \lambda^{k(1+\alpha)}|w_k(\lambda^{-k}x) - \bar{l}(\lambda^{-k}x)| \\
& \leq & \lambda^{k(1+\alpha)}\lambda^{1+\alpha} = \lambda^{(k+1)(1+\alpha)} \quad \text{em} \quad B_{\lambda^{k+1}}.
\end{array}
$$

Isto finaliza o processo indutivo. Esta informação, por sua vez, implica que $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$, e isto baseia-se no fato de os coeficientes sequência $l_k$, com as estimativas obtidas, são sequências de cauchy ($(a_k) \subset \mathbb{R}$ e $(b_k) \subset \mathbb{R}^n$). Como $\mathbb{R}^N$ é um espaço de Banach, temos que estas sequências convergem, e portanto $l_k$ converge para um certo $l_\infty$. Consequentemente, mostra-se que $l_\infty$ satisfaz

$$|u(x) - l_\infty(x)| \leq C|x|^{1+\alpha},$$

Por fim, a Teoria sobre espaços de Campanato garante que sobre estas condições,

$$u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2}),$$

e segue a estimativa desejada. $\square$

É importante ressaltar que o último passo no Teorema acima apesar de ser clássico, não é trivial. Detalhes dessa demonstração podem ser encontrados no clássico artigo (GIAQUINTA, 1983), onde mostra-se um isomorfismo entre os espaços de Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ e o espaço das funções $\alpha-$Hölder contínuas $C^{0,\alpha}$(ver Capítulo 1).

## 2.4 Aplicações

Nesta seção daremos algumas aplicações do teorema 2.5 que foi feito de maneira geral para podermos aplicar em diversas situações.

### 2.4.1 Equações lineares com coeficientes variáveis

A primeira aplicação é a versão não-local do Cordes-Niremberg.

**Teorema 2.6.** *Seja $\sigma > 1$ e uma função $u$ limitada que resolve a equação*

$$\mathcal{I}(u,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)(2-\sigma)\frac{a(x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy = f(x) \quad em \quad B_1.$$

*Suponha que $f \in L^\infty(B_1)$ e $|a(x,y) - a_0(y)| < \eta$ para todo $x \in B_1$ e para algum $\eta > 0$ pequeno. Suponha que $a_0$ é uma função limitada tal que $k(y) = (2-\sigma)a_0(y)|y|^{-n-\sigma}$ pertença a $\mathcal{L}_1$. Então, para qualquer $\alpha < \sigma - 1$, $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ se $\eta$ é pequeno o suficiente e*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||f||_{L^\infty(B_1)})$$

*Demonstração.* Aplicaremos o Teorema 2.5 para o operador $\mathcal{I}^{(0)}$ dado por

$$\mathcal{I}^{(0)}(u,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)\frac{(2-\sigma)a_0(y)}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Por hipótese, $\mathcal{I}^{(0)} \in \mathcal{L}_1$, que é uma classe de operadores invariantes por scalling com estimativas de regularidade $C^{1,\alpha}$ no interior. Agora note que como a equação acima é linear e os coeficientes não dependem de $x$, então as derivadas da solução resolvem a mesma equação, pois se definirmos

$$h(x) = \frac{\partial u}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{u(x+tv)-u(x)}{t},$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{(0)}(h,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(h,x,y)(2-\sigma)\frac{a_0(y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (h(x+y)+h(x-y)-2h(x))(2-\sigma)\frac{a_0(y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u(x+y+tv)-u(x+y)+ \\
&\quad +u(x-y+tv)-u(x-y)-2u(x+tv)+2u(x))(2-\sigma)\frac{a_0(y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(-\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,x,y)(2-\sigma)\frac{a_0(y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + \int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,x+tv,y)(2-\sigma)\frac{a_0(y)}{|y|^{n+\sigma}}dy\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(-\mathcal{I}^{(0)}(u,x)+\mathcal{I}^{(0)}(u,x+tv)\right) = 0
\end{aligned}$$

Com esta observação podemos concluir que as soluções dessa equação, na verdade, são $C^{2.\alpha}$, e portanto, em particular, o operador $\mathcal{I}^{(0)}$ possui estimativas $C^{1,1}$ interior.
O peso que iremos considerar é

$$w(y) = \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}.$$

Vamos estimar $||\mathcal{I} - \mathcal{I}^{(0)}||_{\sigma}$, onde

$$||\mathcal{I} - \mathcal{I}^{(0)}||_{\sigma} = \sup_{\lambda<1} ||\mathcal{I}_{1,\lambda} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)}||.$$

Note que

$$(\mathcal{I}_{1,\lambda} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)})(u,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)(2-\sigma)\frac{(a(\lambda x,\lambda y) - a_0(\lambda y))}{|y|^{n+\sigma}}dy,$$

$|a(\lambda x,\lambda y) - a_0(\lambda y)| < \eta$. Da Definição 0.2,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{I}_{1,\lambda} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)}|| &= \sup \frac{\mathcal{I}_{1,\lambda}(u,x) - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)}(u,x)}{1+M} \\ &\leq \frac{1}{1+M}\int_{\mathbb{R}^n} |\delta(u,x,y)|\frac{(2-\sigma)\eta}{|y|^{n+\sigma}}dy. \end{aligned}$$

Na definição (0.2), a função $u$ é de tal forma que $||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \leq M$, $|u(y)-u(x)-\nabla u(x).(y-x)| \leq M|y-x|^2$ e $y \in B_1(x)$. Note que essas duas condições juntas implicam que $|u(x)| \leq CM$ em $B_1$ para alguma constante $C > 0$. Como $|u(y) - u(x) - \nabla u(x).(y-x)| \leq M|y-x|^2$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\delta(u,x,y)|\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy &= \int_{B_1} |u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &\leq \int_{B_1} |u(x+y) - u(x) - \nabla u(x).y|\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &\quad + \int_{B_1} |u(x-y) - u(x) + \nabla u(x).y|\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &\leq 2M(2-\sigma)\int_{B_1} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &= 2M(2-\sigma)\int_0^1 \left(\int_{\partial B_s(0)} \frac{s^2}{s^{n+\sigma}}dS(y)\right)ds \\ &= 2M(2-\sigma)|\partial B_1|\int_0^1 s^{1-\sigma}ds \\ &= 2|\partial B_1|M. \end{aligned}$$

Por outro lado, do fato de $||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \leq M$ e $|u(x)| \leq CM$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |\delta(u,x,y)|\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy &\leq (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |u(x+y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\quad +(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |u(x-y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\quad +(2-\sigma)2\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |u(x)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= 2(2-\sigma)\left\{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |u(x+y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |u(x)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy\right\} \\
&\leq 2(2-\sigma)\left\{C_1\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |u(y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy + CM\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy\right\} \\
&\leq 2(2-\sigma)\left\{C_1||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + CM\int_1^\infty\left(\int_{\partial B_s}\frac{1}{s^{n+\sigma}}\right)ds\right\} \\
&= 2(2-\sigma)\left\{C_1||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + CM|\partial B_1|\frac{1}{-\sigma}|_1^\infty\right\} \\
&= 2(2-\sigma)\left\{C_1||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + CM|\partial B_1|\frac{1}{\sigma}\right\},
\end{aligned}
$$

como $2 > \sigma > 1$, temos que $(2-\sigma) < 1$ e $\frac{1}{\sigma} < 1$. Com isso

$$
2(2-\sigma)\left\{C_1||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + CM|\partial B_1|\frac{1}{\sigma}\right\} \leq CM.
$$

Dessa maneira, obtemos que

$$
||\mathcal{I}_{1,\lambda} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)}|| \leq C\eta,
$$

para qualquer $\lambda$, e portanto

$$
||\mathcal{I} - \mathcal{I}^{(0)}||_\sigma = \sup_{\lambda<1}||\mathcal{I}_{1,\lambda} - \mathcal{I}_{1,\lambda}^{(0)}|| \leq C\eta.
$$

Se $\eta$ é pequeno o suficiente, podemos aplicar o Teorema 2.5 para concluir que a equação $\mathcal{I}(u,x) = f(x)$ possui estimativas $C^{1,\alpha}$ interior para $\alpha < \sigma - 1$. □

### 2.4.2 Equações não-lineares com coeficientes variáveis

**Teorema 2.7.** *Seja $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ e $\mathcal{L}_1(\sigma) \subset \mathcal{L}_0(\sigma)$ a classe definida pela condição (2.11). Suponha que $\mathcal{I}^{(0)}$ é um operador Não-Local invariante por translação uniformemente Elíptico com respeito a $\mathcal{L}_1(\sigma)$ e $\mathcal{I}$ um operador uniformemente Elíptico com respeito a $\mathcal{L}_0$. Suponha que*

$||\mathcal{I}(-,x) - \mathcal{I}^{(0)}||_\sigma < \eta$ *para todo* $x \in B_1$ *e* $\eta > 0$ *pequeno. Seja* $f \in L^\infty(B_1)$ *e* $u$ *uma função limitada que resolve a equação*

$$\mathcal{I}(u,x) = f(x) \quad em \quad B_1.$$

*Então* $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ *para algum* $\alpha$ *pequeno e*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||f||_{L^\infty(B_1)}),$$

*e a estimativa depende apenas de* $\sigma_0, n, \lambda, \Lambda, C_1$ *mas não de* $\sigma$.

*Demonstração.* Como $\mathcal{I}^{(0)}$ é um operador não-local invariante por translação que possui estimativas $C^{1,\alpha}$ no interior pelo Teorema 2.2 e $||\mathcal{I}(-,x) - \mathcal{I}^{(0)}||_\sigma < \eta$ para $x \in B_1$, então o Teorema 2.5 garante o resultado. □

Um exemplo de como aplicar esse teorema é considerar operadores $\mathcal{I}$ da forma

$$\mathcal{I}(u,x) = \inf_\alpha \sup_\beta \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y) \frac{(2-\sigma)(a_0(y) + a_{\alpha\beta}(x,y))}{|y|^{n+\sigma}} dy,$$

desde que

$$\begin{aligned} &|a_{\alpha\beta}(x,y)| < \eta, \quad \text{uniformemente em } \alpha \text{ e } \beta,\\ &\lambda \leq a_0(y) \leq \Lambda,\\ &|\nabla a_0(y)| \leq C|y|^{-1}, \end{aligned}$$

esta última condição é para que o kernel $(2-\sigma)a_0(y)|y|^{-n-\sigma} \in \mathcal{L}_1(\sigma)$. Se impusermos um módulo de continuidade uniforme sobre os coeficientes do operador, é possível obter resultados semelhantes, como no seguinte teorema.

**Teorema 2.8.** *Dado* $\sigma \geq \sigma_0$, *seja* $\mathcal{I}(u,x)$ *dado por*

$$\mathcal{I}(u,x) = \inf_\alpha \sup_\beta \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y) \frac{(2-\sigma)a_{\alpha\beta}(x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy,$$

*tal que para todo* $\alpha$ *e* $\beta$ *temos* $\lambda \leq a_{\alpha\beta}(x,y) \leq \Lambda$ *e* $|\nabla_y a_{\alpha\beta}(x,y)| \leq C_1|y|^{-1}$ *e também* $|a_{\alpha\beta}(x_1,y) - a_{\alpha\beta}(x_2,y)| \leq c(|x_1 - x_2|)$ *para algum módulo de continuidade uniforme c. Então soluções da Equação*

$$\mathcal{I}(u,x) = f(x) \quad em \quad B_1,$$

*são de classe* $C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ *para algum* $\alpha > 0$ *pequeno e*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||f||_{L^\infty(B_1)}),$$

*e a estimativa depende apenas de* $\sigma_0, \lambda, \Lambda, C_1$, *do módulo de continuidade c e da dimensão n, mas não de* $\sigma$.

*Demonstração.* Devido a uniformidade do módulo de continuidade, para cada $x_0 \in B_{1/2}$ podemos encontrar $r > 0$ tal que para todo $x \in B_r(x_0)$ temos $|a_{\alpha\beta}(x, y) - a_{\alpha\beta}(x_0, y)| < c(|x - x_0|) < c(r)M\eta$. Assim, fazendo as mesmas contas do Teorema 2.6, mostra-se que $||\mathcal{I}(-, x) - \mathcal{I}(-, x_0)|| < C\eta$. Tomando $\mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}(-, x_0)$ como operador não-local invariante por translações no Teorema 2.7 aplicado em $B_r(x_0)$. Recobrindo $\overline{B}_{1/2}$ com bolas de raio $r$ podemos obter a estimativa em $B_{1/2}$. □

### 2.4.3 Equações não-lineares com coeficientes constantes com Kernels não-diferenciáveis

Em termos de aplicações à engenharia, é interessante se pudermos relaxar a condição de que $K$ deve ser diferenciável longe da origem. Isso pode ser feito da seguinte maneira: defina a classe $\mathcal{L}$ de operadores com núcleo $K$ que satisfazem

$$\begin{aligned}
&K(y) = (2-\sigma)\frac{a_1(y) + a_2(y)}{|y|^{n+\sigma}} \\
&\lambda \le a_1(y) \le \Lambda \\
&|a_2| \le \eta \\
&|\nabla a_1(y)| \le C|y|^{-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \backslash \{0\}
\end{aligned}$$

**Teorema 2.9.** *Suponha que $\sigma \ge \sigma_0 > 1$. Se $\eta$ é pequeno o suficiente(dependendo apenas de $\lambda, \Lambda, C_1$ e dimensão) então a equação não-local*

$$\mathcal{I}(u, x) = \inf_{\alpha} \sup_{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y) K_{\alpha\beta}(y) dy = f(x),$$

*tem estimativa $C^{1,\alpha}$ interior se $K_{\alpha\beta} \in \mathcal{L}$ acima para todo $\alpha$ e $\beta$.*

*Demonstração.* Seja $L \in \mathcal{L}$ um operador com kernel $K$. Como $K$ tem a forma

$$K(y) = (2-\sigma)\frac{a_1(y) + a_2(y)}{|y|^{n+\sigma}},$$

então podemos escrever $K = K_1 + K_2$, onde

$$K_1(y) = (2-\sigma)\frac{a_1(y)}{|y|^{n+\sigma}} \quad \text{e} \quad K_2(y) = (2-\sigma)\frac{a_2(y)}{|y|^{n+\sigma}},$$

e $L = L^1 + L^2$, onde $L^i$ é o operador correspondente ao kernel $K_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Daí, note que fazendo as mesmas contas do Teorema 2.6,

$$||L - L^1||_\sigma = ||L^2||_\sigma \le C\eta, \tag{2.12}$$

pois $|a_2| \le \eta$. Daí, escrevendo

$$\mathcal{I}^{(0)}(u, x) = \inf_{\alpha} \sup_{\beta} L^1_{\alpha\beta} u(x),$$

como operador não-local invariante por translação com estimativa $C^{1,\alpha}$ interior, então obtemos através de (2.12) que $||\mathcal{I} - \mathcal{I}^{(0)}||_\sigma \le C\eta$. Dessa forma, se $\eta$ é pequeno o suficiente, então podemos aplicar o Teorema 2.5 para garantir a estimativa $C^{1,\alpha}$ no interior para o operador $\mathcal{I}(u, x)$. □

### 2.4.4 Equações não-lineares próximas do Laplaciano Fracionário

Podemos obter boa regularidade para as soluções de certas equações envolvendo operadores que são invariantes por translação desde que estejam suficientemente próximas do Laplaciano fracionário. Essa proximidade será realizada sobre a elipticidade do operador em questão da seguinte maneira.

**Teorema 2.10.** *Suponha $\sigma > \sigma_0 > 1$. Existe um $\eta > 0$ e $\rho_0 > 0$ tal que se $\Lambda < 1 + \eta$, $\lambda > 1 - \eta$, $\mathcal{I}$ é um operador não-local invariante por translação e uniformemente elíptico com respeito a $\mathcal{L}_*$ e $u$ é uma função contínua em $\overline{B}_1$ tal que $u \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$, $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, então existe um $\alpha > 0$ universal(que depende apenas de $n$ e $\sigma_0$) tal que $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ e*

$$||u||_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\sup_{B_1} |u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + |\mathcal{I}0|),$$

*para alguma constante $C > 0$ (onde $\mathcal{I}0$ remete ao valor que obtemos ao aplicar o operador $\mathcal{I}$ à função constante igual a zero). A constante $C$ depende de $\sigma_0$, $n$ e da constante em* 2.7.

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2, temos que $u \in C^{1,\alpha}(B_{3/4})$ e assim obtemos, em particular, que $u$ é diferenciável. Seja $w = u_e$ uma derivada direcional. Agora, seguimos os mesmos passos da demonstração do Teorema (1.7) e reescrevemos $w = w_1 + w_2$ onde $w_2$ se anula em $B_{5/8}$ e $w_1$ resolve a equação

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}_*} w_1 &\geq -C||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \quad \text{em} \quad B_{5/8} \\ M^-_{\mathcal{L}_*} w_1 &\leq C||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} \quad \text{em} \quad B_{5/8}. \end{aligned}$$

Agora note que $||M^+_{\mathcal{L}_*} + (-\Delta)^{\sigma/2}|| \leq C\eta$ e $||M^+_{\mathcal{L}_*} + (-\Delta)^{\sigma/2}|| \leq C\eta$. Para verificar isto, basta prosseguir com as mesmas contas do Teorema 2.6 e usar o fato de $1 - \eta < \lambda < \Lambda < 1 + \eta$ para obter

$$\begin{aligned} M^+_{\mathcal{L}_*} v &\leq (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+ - \lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\leq (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+\eta)\delta^+ - (1-\eta)\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^+ - \delta^- + \eta(\delta^+ + \delta^-)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(v,x,y) + \eta|\delta(v,x,y)|}{|y|^{n+\sigma}} dy \end{aligned}$$

e da mesma forma

$$-M^+_{\mathcal{L}_*} v \leq (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\delta v + \eta|\delta v|}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Daí, segue que

$$\left| M^+_{\mathcal{L}_*} v(x) - (\Delta)^{\sigma} v(x) \right| \leq (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta|\delta v|}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Fazendo as mesmas contas que fizemos no Teorema 2.6 obtemos o desejado, onde $v$ é uma função de acordo com a Definição 2.2. As mesma contas podem ser feitas para o operador $M^-_{\mathcal{L}_*}$. O Teorema 2.5 garante que $w_1 \in C^{1,\alpha}$ em $B_{1/2}$ e temos a seguinte estimativa

$$||w_1||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(||w_1||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)}\right).$$

Como por hipótese, $u$ resolve $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, temos, pela estimativa $C^{1,\alpha}$ do Teorema 2.2 que

$$||w_1||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\sup_{B_1}|u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + |\mathcal{I}0|\right).$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} ||w_1||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} &\leq C\left(||w_1||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)}\right) \\ &\leq C\left(\sup_{B_1}|u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + |\mathcal{I}0|\right). \end{aligned}$$

Daí, teremos que

$$||u_e||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\sup_{B_1}|u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + |\mathcal{I}0|\right)$$

para todo $e \in S^{n-1}$ e portanto

$$||\nabla u||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\sup_{B_1}|u| + ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n,w)} + |\mathcal{I}0|\right)$$

Daí, segue que $u \in C^{2,\alpha}$ com a estimativa desejada.

$\square$

# 3

# O Teorema de Evans-Krylov para Equações Não-Locais totalmente Não-Lineares

Neste capítulo iremos considerar um caso particular da equação definida em (7), em que estaremos lidando com kernels sem dependência no supremo. Formalmente, desejamos estudar a regularidade de soluções da equação

$$\mathcal{I}u(x) := \inf_{a\in\mathcal{A}} L_a u(x) = \inf_{a\in\mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y)+u(x-y)-2u(x))K_a(y)dy = 0, \tag{3.1}$$

onde $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Paralelamente ao caso Local, é sabido que se $u$ é uma função limitada que resolve $\mathcal{F}(D^2u) = 0$, onde $\mathcal{F}$ é um operador Uniformemente Elíptico côncavo ou convexo, então $u \in C^{2,\alpha}$ para algum $\alpha > 0$. Este é o grande resultado de Evans-Krylov que foi provado independentemente por cada autor nos clássicos artigos (EVANS, 1982) e (KRYLOV, 1982). A heurística desse resultado é que o operador $F$ é comparável ao Laplaciano clássico no sentido de que é possível obter uma estimativa uniforme envolvendo a função $v = \Delta u$.

A ideia, neste Capítulo, é pensar no mesmo tipo de resultado para soluções da equação (3.1), cujo operador $\mathcal{I}$ é côncavo. Pela Teoria clássica acerca do Fracionário Laplaciano, é sabido que soluções limitadas de

$$-(-\Delta)^{\sigma/2}u(x) = 0$$

são de classe $C^{\sigma+\alpha}$ e possuem uma estimativa. Neste aspecto, devido a íntima relação entre os problemas Locais e Não-Locais, é esperado que soluções de (3.1) tenham regularidade semelhante a do Fracionário, a depender da quantidade de regularidade imposta sobre os Kernels $K_a$.

De maneira semelhante ao que foi feito nos capítulos anteriores, consideramos cada $L_a$ pertencente a uma certa classe $\mathcal{L}$ e que isso é suficiente para que o operador definido aqui satisfaça a condição de Elipticidade em sua classe. Trabalharemos indistintamente com três classes de operadores, a saber, $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$. A classe $\mathcal{L}_0$ já foi definida anteriormente em (18).

A classe $\mathcal{L}_1$ também já foi definida anteriormente e é constituída dos Kernels $K$ em $\mathcal{L}_0$ que satisfazem (2.11). A nova classe que iremos considerar neste capítulo é a $\mathcal{L}_2$ que é composta dos Kernels $K \in \mathcal{L}_1$ tais que

$$|D^2 K(y)| \leq \frac{C}{|y|^{n+2+\sigma}}.$$

Se consideramos os operadores maximais referentes a cada classe

$$\begin{aligned} M_0^+ u(x) &= \sup_{L \in \mathcal{L}_0} Lu(x) = (2-\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda \delta^+(u,x,y) - \lambda \delta^-(u,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ M_1^+ u(x) &= \sup_{L \in \mathcal{L}_1} Lu(x) \\ M_2^+ u(x) &= \sup_{L \in \mathcal{L}_2} Lu(x), \end{aligned}$$

então naturalmente vale a seguinte desigualdade

$$M_0^+ u(x) \geq M_1^+ u(x) \geq M_2^+ u(x)$$

devido a inclusão $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$. Algo semelhante vale para os operadores minimais de cada classe e então teremos

$$M_0^+ u(x) \geq M_1^+ u(x) \geq M_2^+ u(x) \geq M_2^- u(x) \geq M_1^- u(x) \geq M_0^- u(x).$$

O resultado almejado neste capítulo é o seguinte,

**Teorema 3.1.** *Suponha que todo $L_a$ em (3.1) pertença a classe $\mathcal{L}_2$. Se $u$ é uma função limitada em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, então $u \in C^{\sigma+\alpha}(B_{1/2})$. Além disso,*

$$||u||_{C^{\sigma+\alpha}(B_{1/2})} \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Iremos considerar, a fim de garantir uma melhoria nos resultados em relação aos dos capítulos anteriores, que $\sigma > 1$. Se $\sigma \leq 1$, então estimativas de regularidade $C^{1,\alpha}$ já foram obtidas nos capítulos anteriores para soluções de uma equação mais geral. A ideia é mostrar que todo operador em $\mathcal{L}_2$ possui uma certa semelhança com o Fracionário Laplaciano, e daí usar a teoria de regularidade clássica deste operador.

Este capítulo está dividido em 4 seções onde na primeira estabelecemos algumas preliminares. Dentre estas, incluímos um processo de regularização utilizando as ideias e resultados do Capítulo 2, o que nos permite tratar as soluções como se fossem clássicas. Após isso, mostramos que a estrutura côncava do operador permite estabelecer que média de subsoluções ainda é uma subsolução. Em seguida apresentamos a Teoria Linear para operadores Íntegro-Diferenciais, onde usamos resultados clássicos da Análise Harmônica no ponto de vista de operadores pseudo-diferenciais e para finalizar as preliminares mostramos que subsoluções em $L^1$ de uma certa equação envolvendo o operador maximal são limitadas. Estes resultados serão demasiadamente importantes ao longo de todo capítulo. Na segunda seção, mostramos que cada $L_a$ em (3.1) é limitado usando o fato de médias de segunda ordem dos quocientes incrementais serem subsoluções de uma equação envolvendo o operador maximal da classe $\mathcal{L}_2$. Na terceira seção, utilizamos ideias semelhantes da seção 2 para mostrar que os operadores Extremais da classe $\mathcal{L}_0$ são limitados e com isso obter uma estimativa para as médias de segunda ordem dos quocientes incrementais em termos da norma $L^\infty$ da solução $u$ de (3.1). Por fim, na seção 4 iremos usar um argumento iterativo para mostrar que uma certa função, que é comparável ao Fracionário Laplaciano, é $\alpha-$Hölder contínua e usando essa comparação e por resultados clássicos acerca do Laplaciano Fracionário podemos garantir o desejado.

## 3.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados auxiliares que serão importantes ao longo do trabalho. Dentre estes, mostramos um processo de regularização e como a concavidade do operador (3.1) é utilizada.

### 3.1.1 Um processo de Regularização

Aqui apresentaremos uma maneira de regularizar as soluções para que possamos manipulá-las como se fossem clássicas.

**Lema 3.1.** *Seja $u$ uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ que resolve (3.1) em $B_1$ com cada $L_a$ pertencendo à classe $\mathcal{L}_2$(respectivamente $\mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_0$). Existe uma sequência de equações regularizadas na mesma classe*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon &= \inf_a L_a^\epsilon u^\epsilon = 0 && \text{em } B_1, \\ u_\epsilon &= u && \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_1, \end{aligned}$$

*tal que as soluções $u^\epsilon$ são $C^{2,\alpha}$ no interior de $B_1$ para todo $\epsilon > 0$ e $\lim\limits_{\epsilon\to 0} u^\epsilon = u$ uniformemente em $B_1$.*

*Demonstração.* Seja $\eta$ uma função cutoff tal que

$$\begin{aligned} 0 \le \eta \le 1 &\quad \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \eta = 0 &\quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_1, \\ \eta = 1 &\quad \text{em } B_{1/2}, \end{aligned}$$

e considere $\eta_\epsilon(x) = \eta(x/\epsilon)$, note que esta função satisfaz

$$\begin{aligned} 0 \le \eta_\epsilon \le 1 &\quad \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \eta_\epsilon = 0 &\quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon, \\ \eta_\epsilon = 1 &\quad \text{em } B_{\epsilon/2}. \end{aligned}$$

Consideremos os seguintes kernels regularizados

$$K_a^\epsilon(y) = \eta_\epsilon(y)\lambda\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} + (1-\eta_\epsilon(y))K_a(y).$$

Definimos

$$L_a^\epsilon v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v,x,y)K_a^\epsilon(y)dy$$

$$\mathcal{I}^\epsilon v(x) = \inf_a L_a^\epsilon v(x).$$

Note que se $L_a \in \mathcal{L}_i$, então $L_a^\epsilon \in \mathcal{L}_i$ para $i = \{0,1,2\}$, pois $K_a^\epsilon$ é uma combinação convexa entre o kernel do Laplaciano Fracionário e $K_a$. Agora, seja $u^\epsilon$ a solução do seguinte problema de Dirichlet,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon &= \inf_a L_a^\epsilon u^\epsilon = 0 && \text{em } B_1, \\ u^\epsilon &= u && \text{em } \mathbb{R} \setminus B_1. \end{aligned}$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\epsilon}v(x) &= \inf_a L_a^{\epsilon}v(x) \\
&= \inf_a \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v,x,y)\left(\eta_{\epsilon}(y)\lambda\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} + (1-\eta_{\epsilon}(y))K_a(y)\right)dy.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo scalling no operador, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\epsilon}_{1,\lambda}v(x) &= \inf_a \lambda^{\sigma}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(v,x,\lambda^{-1}y)K_a^{\epsilon}(y)dy \\
&= \inf_a \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v,x,z)\left(\eta_{\epsilon}(\lambda z)\lambda\frac{(2-\sigma)}{|z|^{n+\sigma}} + (1-\eta_{\epsilon}(\lambda z))\lambda^{n+\sigma}K_a(\lambda z)\right)dz.
\end{aligned}$$

Note que $\eta_{\epsilon}^{\lambda} = \eta_{\epsilon}(\lambda -)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
&0 \le \eta_{\epsilon}^{\lambda} \le 1 && \text{em } \mathbb{R}^n, \\
&\eta_{\epsilon}^{\lambda} = 0 && \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{\epsilon\lambda^{-1}}, \\
&\eta_{\epsilon}^{\lambda} = 1 && \text{em } B_{\epsilon\lambda^{-1}/2}.
\end{aligned}$$

Se $\lambda$ é pequeno o suficiente, então $\mathcal{I}^{\epsilon}_{1,\lambda}$ se torna o Fracionário Laplaciano. Assim $||\mathcal{I}^{\epsilon}_{1,\lambda} + \frac{1}{c_n}(-\Delta)^{\sigma/2}|| < \eta$. Seguindo como na demonstração do Teorema 2.10 mostra-se que $u^{\epsilon} \in C^{2,\alpha}$. Agora note que se $v \in C^2(x)$ e $|v(y) - v(x) - \nabla v(x).(y-x)| \le M|y-x|^2$ em $B_1(x)$ então $|\mathcal{I}^{\epsilon}v(x) - \mathcal{I}v(x)| \le CM\epsilon^{2-\sigma}$. Para verificar isto, basta fazer a conta diretamente sobre $\mathcal{I}^{\epsilon}v(x)$. Lembre que $\mathcal{I}^{\epsilon}v(x) = \inf_a L^{\epsilon}v(x)$. Daí,

$$\begin{aligned}
L_a^{\epsilon}v(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v,x,y)K_a^{\epsilon}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\eta_{\epsilon}(y)\lambda\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} + (1-\eta_{\epsilon}(y))K_a(y)\right)\delta(v,x,y)dy \\
&= \lambda(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\eta_{\epsilon}(y)\frac{\delta(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + \int_{\mathbb{R}^n}\delta(v,x,y)K_a(y)dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n}\eta_{\epsilon}(y)\delta v(x,y)K_a(y)dy \\
&= \lambda(2-\sigma)\int_{B_{\epsilon}}\eta_{\epsilon}(y)\frac{\delta v(x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x) - \int_{B_{\epsilon}}\eta_{\epsilon}(y)\delta v(x,y)K_a(y)dy
\end{aligned}$$

Usando o fato de $K_a \in \mathcal{L}_0$ e escrevendo $\delta = \delta^+ - \delta^-$, temos

$$\begin{aligned}
L_a^\epsilon v(x) &= \lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\frac{\delta(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x) - \int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\delta(v,x,y)K_a(y)dy \\
&= \lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\frac{\delta^+(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy - \lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\frac{\delta^-(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x) \\
&\quad - \int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\delta^+(v,x,y)K_a(y)dy + \int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\delta^-(v,x,y)K_a(y)dy \\
&\leq \lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \frac{\delta^+(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x) + \Lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \delta^-(v,x,y)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= (\lambda+\Lambda)(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} |\delta(v,x,y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x),
\end{aligned}$$

e assim

$$L_a^\epsilon v(x) - L_a v(x) \leq (\lambda+\Lambda)(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} |\delta(v,x,y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Da mesma maneira, podemos obter um limitante inferior

$$\begin{aligned}
L_a^\epsilon v(x) &= \lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\frac{\delta^+(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy - \lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\frac{\delta^-(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x) \\
&\quad - \int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\delta^+(v,x,y)K_a(y)dy + \int_{B_\epsilon} \eta_\epsilon(y)\delta^-(v,x,y)K_a(y)dy \\
&\geq -\lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \frac{\delta^+(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy + L_a v(x) - \Lambda(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} \delta^-(v,x,y)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy,
\end{aligned}$$

e assim,

$$L_a^\epsilon v(x) - L_a v(x) \geq -(\lambda+\Lambda)(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} |\delta(v,x,y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Consequentemente,

$$|L_a^\epsilon v(x) - L_a v(x)| \leq (\lambda+\Lambda)(2-\sigma)\int_{B_\epsilon} |\delta(v,x,y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy.$$

Agora perceba que como $|v(y) - v(x) - \nabla u(x).(y-x)| \leq M|y-x|^2$, então $|\delta(v,x,y)| \leq 2M|y|^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\epsilon} \frac{|\delta(v,x,y)|}{|y|^{n+\sigma}}dy &\leq 2M\int_{B_\epsilon} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= 2M\int_0^\epsilon \left(\int_{\partial B_s} \frac{1}{s^{n+\sigma-2}}dS(y)\right)ds \\
&= 2M|\partial B_1|\tfrac{1}{2-\sigma}\epsilon^{2-\sigma}.
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$|L_a^\epsilon v(x) - L_a v(x)| \leq (\lambda + \Lambda)2M|\partial B_1|\epsilon^{2-\sigma},$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, e portanto

$$|\mathcal{I}^\epsilon v(x) - \mathcal{I}v(x)| \leq CM\epsilon^{2-\sigma}.$$

Isto significa dizer que $||\mathcal{I}^\epsilon - \mathcal{I}|| \to 0$ se $\epsilon \to 0$ ($\sigma < 2$). Pelo Lema 2.6, temos que $|u^\epsilon - u| < \epsilon$ em $B_1$ e portanto, $u^\epsilon \to u$ uniformemente em $B_1$ quando $\epsilon \to 0$. □

Note que nesta demonstração não usamos o fato de o operador $\mathcal{I}$ ser côncavo. A mesma demonstração se aplica quando o operador $\mathcal{I}$ é o Totalmente não-linear de Isaac-Belman

$$\mathcal{I}u(x) = \sup_b \inf_a L_{ab}u(x) = \sup_b \inf_a \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K_{a,b}(y)dy = 0,$$

e portanto podemos aproximar soluções dessa equação por uma família de funções $C^2$ e obter resultados como se o operador estivesse definido no sentido clássico.

### 3.1.2 Média de Subsoluções é uma subsolução

Aqui iremos mostrar porque a concavidade do operador (3.1) é importante. Esta estrutura permite garantir que média de subsoluções ainda é uma subsolução. O primeiro resultado asserta sobre a média aritmética de subsoluções.

**Proposição 3.1.** *Sejam $u, v$ subsoluções de $\mathcal{I}u = 0$ e $\mathcal{I}v = 0$ em um domínio $\Omega$, $u, v$ contínuas em $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}(\frac{u+v}{2}) \geq 0$ em $\Omega$.*

*Demonstração.* Caso $u, v \in C^2$, então $\mathcal{I}v, \mathcal{I}u$ e $\mathcal{I}(u+v)$podem ser avaliados classicamente. Daí, da concavidade de $\mathcal{I}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\left(\frac{u+v}{2}\right)(x) &\geq \frac{1}{2}\mathcal{I}u(x) + \frac{1}{2}\mathcal{I}v(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{I}u(x) + \mathcal{I}v(x)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Do contrário, usamos o processo de regularização da seção anterior para encontrar sequências $u^\epsilon, v^\epsilon$ funções $C^2$ tal que os operadores $L_a^\epsilon u^\epsilon$ e $L_a^\epsilon v^\epsilon$ na fórmula para $\mathcal{I}^\epsilon$ estão bem definidos e são contínuos. Como $u^\epsilon$ e $v^\epsilon$ são $C^2$,

$$\mathcal{I}^\epsilon\left(\frac{u^\epsilon + v^\epsilon}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon + \mathcal{I}^\epsilon v^\epsilon\right) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Como $v^\epsilon \to v$ e $u^\epsilon \to u$ uniformemente em $\Omega$ e $\mathcal{I}^\epsilon \to \mathcal{I}$, podemos passar o limite, pelo Lema (2.2), e assim

$$\mathcal{I}\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

□

Utilizando argumentos semelhantes, obtemos o seguinte resultado que será importante ao longo de todo o Capítulo.

**Proposição 3.2.** *Seja $u$ uma solução de $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$ e $\eta$ um mollifier,i.e,*

1. $\eta \geq 0$;

2. $\displaystyle\int \eta = 1$;

3. $supp(\eta) \subset B_\delta$,

*temos $\mathcal{I}(\eta * u) \geq 0$ em $B_{1-\delta}$.*

*Demonstração.* Sendo $u$ solução de $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, pelo Lema 3.1, encontramos uma sequência $u^\epsilon$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon = 0 & \text{em} \quad B_1 \\ u^\epsilon = u & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \backslash B_1. \end{cases}$$

Agora considere $u^\epsilon_\eta = u^\epsilon * \eta$ e note que

$$\begin{aligned} L^\epsilon u^\epsilon_\eta &= \int_{\mathbb{R}^n} (u^\epsilon_\eta(x+y) + u^\epsilon_\eta(x-y) - 2u^\epsilon_\eta(x))K^\epsilon_a(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x+y-z)\eta(z)dzK^\epsilon_a(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x-y-z)\eta(z)dzK^\epsilon_a(y)dy \\ &\quad -2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x-z)\eta(z)dzK^\epsilon_a(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (u^\epsilon(x+y-z) + u^\epsilon(x-y-z) - 2u^\epsilon(x-z))\eta(z)K^\epsilon_a(y)dzdy \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} L^\epsilon u^\epsilon_\eta &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (u^\epsilon(x+y-z) + u^\epsilon(x-y-z) - 2u^\epsilon(x-z))\eta(z)K^\epsilon_a(y)dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)\int_{\mathbb{R}^n} (u^\epsilon(x+y-z) + u^\epsilon(x-y-z) - 2u^\epsilon(x-z))K^\epsilon_a(y)dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)L^\epsilon u^\epsilon(x-z)dz \\ &= \int_{B_\delta} \eta(z)L^\epsilon u^\epsilon(x-z)dz \geq 0 \end{aligned}$$

para $x \in B_{1-\delta}$, pois $|x-z| \leq |x| + |z| < 1 - \delta + \delta = 1$, e assim, $L^\epsilon u^\epsilon(x-z) \geq 0$. Com isso, temos que $L^\epsilon u^\epsilon_\eta \geq 0$ em $B_{1-\delta}$ e portanto $\mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon_\eta \geq 0$ em $B_{1-\delta}$. Como $u^\epsilon_\eta \to u * \eta$ uniformemente, passando o limite quando $\epsilon \to 0$, temos

$$\mathcal{I}(u * \eta) \geq 0 \quad \text{em} \quad B_{1-\delta}.$$

□

### 3.1.3 A Teoria Linear de Operadores Íntegro-Diferenciais

Aqui apresentaremos alguns resultados acerca de soluções de operadores Íntegro-Diferenciais lineares. Isto será importante na Seção 3.3 para obter uma estimativa em $L^2$ de uma certa função que será útil para mostrar que os Operadores Extremais são limitados. Usaremos alguns resultados clássicos da Análise Harmônica envolvendo os símbolos de um operador Íntegro-Diferencial e o Teorema da Imersão de Sobolev. Primeiro temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.** *Seja $L$ um operador íntegro-diferencial na classe $\mathcal{L}_1$, com $\sigma \geq \sigma_0 > 1$. Suponha que $u \in L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$ que resolve a equação $Lu = 0$ em $B_1$, então $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ e temos a estimativa*

$$||u||_{C^{2,\alpha}(B_{3/4})} \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

*As constantes $C$ e $\alpha$ dependem de $n, \lambda, \Lambda$ e $\sigma_0$, mas não de $\sigma$.*

*Demonstração.* Provaremos a estimativa a priori. A estimativa de regularidade para soluções no sentido da viscosidade segue do processo de regularização. Primeiro aplicamos o Teorema 2.2 para obter $u \in C^{1,\alpha}(B_{3/4})$ e a seguinte estimativa

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B_{3/4})} \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

A ideia é aplicar a mesma estimativa para cada derivada direcional $u_e$. Como $Lu = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_e(y) K(x+y)\,dy = 0. \tag{3.2}$$

Como não temos uma estimativa em $L^\infty$ fora de $B_{3/4}$ vamos usar um argumento de localização. Para isso, considere $\eta$ uma função cut-off tal que

$$\begin{aligned} &0 \leq \eta \leq 1 && \text{em } \mathbb{R}^n \\ &\eta = 0 && \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{3/4} \\ &\eta = 1 && \text{em } B_{5/8}. \end{aligned}$$

Daí, como vale (3.2), temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u_e(y)\eta(y)K(x+y)dy\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u_e(y)(\eta(y)-1)K(x+y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} u_e(y)k(x+y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u_e(y)(\eta(y)-1)K(x+y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\left(\eta_e(y)K(x+y) + (\eta(y)-1)K_e(x+y)\right)dy\right|,
\end{aligned}$$

onde integramos por partes na última igualdade. Agora vamos estimar as duas integrais. Primeiro note que como $K \in \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$, podemos compará-lo com o peso $\frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}$. Como $|\eta_e| \leq 1$, temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\eta_e(y)K(x+y)dy\right| \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

De maneira semelhante, como $K \in \mathcal{L}_1$, temos que vale

$$|\nabla K(y)| \leq C\frac{1}{|y|^{n+\sigma+1}}.$$

Usando o fato de $|K_e(y)| \leq |\nabla K(y)|$ e $\eta = 1$ em $B_{5/8}$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\eta(y)-1)K_e(x+y)dy\right| &\leq C\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{5/8}} |u(y)|\frac{1}{|x+y|^{n+\sigma+1}}dy \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{5/8}} |u(y)|\frac{1}{|y|^{n+\sigma+1}}dy \\
&= C\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{5/8}} |u(y)|\frac{|y|^{-1}}{|y|^{n+\sigma+1}}dy \\
&\leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u_e(y)\eta(y)K(x+y)dy\right| \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

Agora note que como $Lu_e = 0$ e $L$ é linear, temos que $L(u_e\eta) = L(u_e(\eta-1))$. Pelas contas que fizemos acima, temos que

$$|L(u_e(\eta-1))(x)| \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

Em outras palavras, temos que

$$L(u_e\eta) = f, \quad \text{e} \quad ||f||_{L^\infty} \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

Como $\sigma > 1$, pelo Teorema 2.6, temos que a função $\eta u_e \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ e portanto $u_e \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ para todo $e \in S^{n-1}$. Dessa forma segue que $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ e segue a estimativa desejada. □

Agora vamos utilizar um pouco de Análise de Fourier para mostrar que em $L^2$, todos operadores lineares têm normas comparáveis. A ideia é que como estamos lidando com normas em $L^2$ e operadores lineares invariantes por translação, podemos usar a transformada de Fourier na perspectiva de operadores pseudo-diferenciais.

**Teorema 3.3.** *Sejam $L_0$ e $L_1$ operadores íntegro-diferenciais lineares na classe $\mathcal{L}_0$. Suponha que $L_0 u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $L_1 u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Primeiro note que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta(u,x,y)} &= (u(.+y) + \widehat{u(.-y)} - 2u(.)) \\ &= (e^{iy.\xi} + e^{-iy.\xi} - 2)\hat{u}(\xi) \\ &= 2(\cos(y.\xi) - 1)\hat{u}(\xi),\end{aligned}$$

onde usamos, na última estimativa, a identidade de Euler. Usaremos esta identidade obtida acima para computar o valor do símbolo $s(\xi)$ de um operador $-L$ como operador pseudo-diferencial. Dessa maneira

$$\begin{aligned}-\widehat{Lu}(\xi) &= -\left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)dy\right)^{\wedge}(\xi) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)dydx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\delta(u,x,y)K(y)dydx, \quad \text{pelo Teorema de Fubini,} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\delta(u,x,y)K(y)dxdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} K(y)\widehat{\delta(u,x,y)}dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} 2(1-\cos(y.\xi)K(y)dy\right)\hat{u}(\xi) \\ &= s(\xi)\hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Note que para todo $\xi$, a função $(1-\cos(\xi.y))$ é $C^2$ e limitada no $\mathbb{R}^n$ e por isso, a integral está bem definida. Agora, vamos obter limitantes superior e inferior do símbolo $s(\xi)$. Note que para qualquer $R > 0$,

$$\begin{aligned}
s(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} 2(1-\cos(y.\xi))K(y)dy \\
&= \int_{B_R} 2(1-\cos(y.\xi))K(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} 2(1-\cos(y.\xi))K(y)dy \\
&\leq \int_{B_R} 2|y.\xi|^2 K(y)dy + 2\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} K(y)dy \\
&\leq 2|\xi|^2(2-\sigma)\Lambda \int_{B_R} \frac{|y|^2}{|y|^{n+\sigma}}dy + 2(2-\sigma)\Lambda \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= 2(2-\sigma)\Lambda|\xi|^2 \int_0^R |\partial B_1| s^{2-\sigma} ds + 2(2-\sigma)\Lambda|\partial B_1| \int_R^\infty s^{-1-\sigma} ds \\
&= 2\Lambda|\partial B_1| R^{2-\sigma}|\xi|^2 + 2\tfrac{(2-\sigma)}{\sigma}\Lambda|\partial B_1| R^{-\sigma} \\
&\leq C|\xi|^\sigma,
\end{aligned}$$

desde que escolhamos $R = |\xi|^{-1}$. Por outro lado, note que $(1-\cos(\xi.y))$ e $K(y)$ são funções não negativas. Com isso,

$$\begin{aligned}
s(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} 2(1-\cos(\xi.y))K(y)dy \\
&\geq \int_{B_{|\xi|^{-1}}} \frac{1}{4}|y.\xi|^2(2-\sigma)\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\geq \frac{1}{4}|\xi|^2 \int_{B_{|\xi|^{-1}}} |y|^2(2-\sigma)\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= \tfrac{1}{4}\lambda|\partial B_1||\xi|^2|\xi|^{\sigma-2} \\
&= c|\xi|^\sigma.
\end{aligned}$$

Daí, temos que o símbolo $s(\xi)$ é comparável a $|\xi|^\sigma$ para qualquer operador $L \in \mathcal{L}_0$. Pela Análise Clássica de Fourier para operadores Pseudo-diferenciais, um operador $T$, com símbolo $a(\xi)$, mapeia funções de $L^2$ em $L^2$ desde que $a(\xi)$ seja limitado. A composição de operadores $T_1 o T_2$ pseudo-diferenciais se reduz à multiplicação de seus respectivos símbolos $a_1(\xi)$ e $a_2(\xi)$. Estes resultados podem ser encontrados no clássico livro (STEIN; MURPHY, 1993). Dessa forma, o operador $L_1 L_0^{-1}$ possui símbolo limitado e portanto mapeia funções $L^2$ em $L^2$. Daí, $L_1 L_0^{-1} v \in L^2$, se $v \in L^2$. Como, por hipótese, $v = L_0 u \in L^2$, temos

$$||L_1 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|L_1 L_0^{-1} L_0 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\left(L_1 L_0^{-1}\right) v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Pela Identidade de Parseval, temos

$$\left\|\left(L_1 L_0^{-1}\right) v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\left(\widehat{L_1 L_0^{-1} v}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Pelas contas feitas no começo, temos

$$\left\|\left(\widehat{L_1 L_0^{-1} v}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||s_1 s_0 \widehat{v}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\widehat{v}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

onde $s_1(\xi)$ e $s_0(\xi)$ é o símbolo de $L_1$ e $L_0^{-1}$ respectivamente, e a constante $C$ é proveniente da limitação do símbolo de $L_1 L_0^{-1}$. Usando novamente a identidade de Parseval, temos

$$||\widehat{v}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||L_0 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

e portanto

$$||L_1 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||L_0 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

como queríamos. □

Combinando os resultados anteriores, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.** *Seja $L$ um operador íntegro-diferencial na classe $\mathcal{L}_1$, com $\sigma \geq \sigma_0 > 1$. Suponha que $u \in L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$ que resolve a equação $Lu = f$ em $B_1$ para alguma $f \in L^2$. Seja $L_1$ um operador em $\mathcal{L}_0$, então $L_1 u \in L^2(B_{1/2})$ e*

$$||L_1 u||_{L^2\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leq C\left(||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)} + ||f||_{L^2(B_1)}\right),$$

*para alguma constante $C$ que depende de $n, \lambda, \Lambda, \sigma_0$.*

*Demonstração.* Considere a função $v$ que resolve

$$Lv = f\mathcal{X}_{B_1} \quad \text{em} \quad B_1.$$

Como $f \in L^2(B_1)$, então $f\mathcal{X}_{B_1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 3.3 temos que $L_1 v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como o operador $L_2 = (-\Delta)^{\sigma/2} \in \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$, podemos aplicar o Teorema 3.3 novamente e assim temos que

$$L_2 v = (-\Delta)^{\sigma/2} v \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Da Teoria Clássica do Fracionário Laplaciano, temos que $v \in \dot{H}^{\sigma/2}$(espaço de Sobolev fracionário Homogêneo). Pelo Teorema de Imersão de Sobolev,

$$\dot{H}^{\sigma/2} \hookrightarrow L^p \quad \text{para } p = \tfrac{2n}{n-2\sigma}.$$

Dessa forma, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, e em particular, $v \in L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$. Assim, como $u \in L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$, segue que $u - v \in L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$. Note que $L(u-v) = Lu - Lv = f - f\mathcal{X}_{B_1} = 0$ em $B_1$. Pelo Teorema 3.2, segue que $(u-v) \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$. Com isso,

$$||L_1 u||_{L^2(B_{1/2})} \leq ||L_1(u-v)||_{L^2(B_{1/2})} + ||L_1 v||_{L^2(B_{1/2})} \leq ||L_1(u-v)||_{L^2(B_{1/2})} + C||Lv||_{L^2(B_{1/2})},$$

pela estimativa na norma $C^{2,\alpha}$ de $u - v$ temos

$$||L_1(u-v)||_{L^2(B_{1/2})} \leq C||u-v||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1|y|^{n+\sigma}}\right)} \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1|y|^{n+\sigma}}\right)} + C||v||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1|y|^{n+\sigma}}\right)}.$$

Pela Imersão de Sobolev, comparamos

$$||v||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1|y|^{n+\sigma}}\right)} \leq ||L_2 v||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim, comparamos as normas $L^2$ de $L_2 v$ e $Lv$ pelo Teorema 3.3 e finalizamos com o fato de que

$$||Lv|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^2(B_1)}.$$

Daí, segue a estimativa desejada. □

### 3.1.4 Subsoluções em $L^1$ são limitadas superiormente

Agora iremos usar as ideias da demonstração da Desigualdade de Harnack apresentada em (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2009) para mostrar que subsoluções em $L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$ de uma equação envolvendo o operador maximal $M^+_{\mathcal{L}_0} = M^+_0$ são limitadas superiormente por uma constante universal.

**Teorema 3.5.** *Seja $u \in C(\overline{B}_1)$ e suponha que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}} dy \leq C_0$$

$$M_0^+ u \geq -C_0 \qquad \text{em} \quad B_1,$$

*então*

$$u(x) \leq CC_0 \quad \text{em } B_{1/2},$$

*onde $C$ é uma constante universal.*

*Demonstração.* Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $C_0 = 1$. Basta considerar $v = \frac{1}{C_0}u$. Considere o menor valor de $t$ tal que

$$u(x) \leq h_t(x) := t(1-|x|)^{-n} \quad \text{para } x \in B_1.$$

Com isso, deve existir $x_0 \in B_1$ tal que $u(x_0) = h_t(x_0)$, pois do contrário haveria espaço para decrescer o valor de $t$( o que não pode acontecer pois $t$ é mínimo). Seja $d = (1-|x_0|) > 0$, a distância de $x_0$ a $\partial B_1$. Para $r = d/2$, queremos estimar a porção de $B_r(x_0)$ que é coberta por $\{u < u(x_0)/2\}$ e por $\{u > u(x_0)/2\}$. Mostraremos que o valor de $t$ não pode ser muito grande, e isto garante o resultado do Teorema, pois se existir $C > 0$ tal que $t < C$, então

$$u(x) \leq h_t(x) = t(1-|x|)^{-n} < C(1-|x|)^{-n} < 2^n C = C.$$

Primeiro considere $A := \{u > u(x_0)/2\}$. Note que $u \in L^1(B_1)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |u(y)| dy &= \int_{B_1} \frac{|u(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}}(1+|y|^{n+\sigma}) dy \\
&\leq 2\int_{B_1} \frac{|u(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\leq 2C_0.
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\int_{A\cap B_1} |u| dy \leq \int_{B_1} |u| dy < C < \infty,$$

como $u > u(x_0)/2$ em $A$, então

$$\frac{|u(x_0)|}{2}|A \cap B_1| = \frac{|u(x_0)|}{2}\int_{A\cap B_1} dy \leq \int_{A\cap B_1} |u| dy < C.$$

Daí, usando o fato de $|B_r| = |B_1|r^n$, temos

$$\begin{aligned} |A \cap B_1| &< C\frac{2}{|u(x_0)|} = 2C\frac{1}{h_t(x_0)} = 2Ct^{-1}d^{-n} \\ &= 2Ct^{-1}2^{-n}r^{-n} = Ct^{-1}|B_r|. \end{aligned}$$

Isto significa que se $t$ for grande, então $A$ só pode cobrir, no máximo, uma pequena porção de $B_r(x_0)$. Para obtermos uma contradição, mostraremos que

$$|\{u < u(x_0)/2\} \cap B_r(x_0)| \leq (1-\alpha)|B_r|,$$

para uma constante positiva $\alpha$ independente de $t$. Agora, considere $\theta > 0$ pequeno e vamos estimar $|\{u < u(x_0)/2\} \cap B_{\theta r}(x_0)|$. Para todo $x \in B_{\theta r}(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} u(x) &\leq h_t(x) = t(1-|x|)^{-n} = t(1-|x-x_0+x_0|)^{-n} \\ &\leq t(1-|x-x_0|-|x_0|)^{-n} \\ &\leq t(1-|x_0|-\theta r)^{-n} \\ &= t(d-\theta\tfrac{d}{2})^{-n} \\ &= td^{-n}(1-\tfrac{\theta}{2})^{-n} \\ &= u(x_0)(1-\tfrac{\theta}{2})^{-n}, \end{aligned}$$

com $(1-\theta/2)^{-n}$ próximo de um, pois $\theta$ é próximo de zero. Consideremos, a função $v(x) = (1-\theta/2)^{-n}u(x_0) - u(x)$. Daí, pelas contas acima temos que $v(x) \geq 0$ para $x \in B_{\theta r}(x_0)$. Por hipótese, $M_0^+ u \geq -1$, com isso $M_0^- v = -M_0^+ u \leq 1$. Queremos aplicar o Teorema 1.5 para $v$. Porém $v$ não é positiva no domínio inteiro, mas apenas em $B_{\theta r}(x_0)$. Com isso, considere $w = v^+$ e vamos encontrar um limitante superior para $M_0^- w = M_0^- v^+$. Sabemos que

$$M_0^- v(x) = (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta^+(v,x,y) - \Lambda\delta^-(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \leq 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} M_0^- w(x) &= M_0^- v(x) + \Big(M_0^- w(x) - M_0^- v(x)\Big) \\ &\leq 1 + \Big(M_0^- w(x) - M_0^- v(x)\Big). \end{aligned}$$

Vamos encontrar um limitante superior para $M_0^- w(x) - M_0^- v(x)$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{M_0^- w(x) - M_0^- v(x)}{(2-\sigma)} &= \lambda\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^+(w,x,y) - \delta^+(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &+ \Lambda\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-(v,x,y) - \delta^-(w,x,y)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Agora como

$$v^+(x+y) = v(x+y) + v^-(x+y),$$

temos que

$$\delta^+(w,x,y) = \delta(v,x,y) + v^-(x-y) + v^-(x+y).$$

Levando em conta também que $\delta^+(w,x,y) \geq \delta^+(v,x,y)$ e que $\delta(v,x,y) = \delta^+(v,x,y) - \delta^-(v,x,y)$, temos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq -\lambda \int_{\{\delta^+ w > \delta^+ v\}} \frac{\delta^-(v,x,y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &+ \lambda \int_{\{\delta^+ w > \delta^+ v\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\leq \Lambda \int_{\{\delta^+ w > 0\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy, \end{aligned}$$

onde adotamos a notação de que $\delta g = \delta(g,x,y)$. Da mesma maneira

$$\begin{aligned} I_2 &= \Lambda \int_{\{\delta^- v > 0\} \cap \{\delta^- w \neq \delta^- v\}} \frac{\delta^- v - \delta^- w}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &+ \Lambda \int_{\{\delta^- v = 0\} \cap \{\delta^- w \neq \delta^- v\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\leq \Lambda \int_{\{\delta^- v > 0\} \cap \{\delta^- w \neq \delta^- v\}} \frac{-\delta v - \delta^- v}{|y|^{n+\sigma}} dy. \end{aligned}$$

Usando a seguinte relação $-\delta^- v - \delta^- w = -\delta^+ w + v^-(x+y) + v^-(x-y)$, podemos continuar a estimar $I_2$ para obter

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \Lambda \int_{\{\delta^- v > 0\} \cap \{\delta^- w \neq \delta^- v\}} \frac{-\delta^+ w}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &+ \Lambda \int_{\{\delta^- v > 0\} \cap \{\delta^- w \neq \delta^- v\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\leq \Lambda \int_{\{\delta^- w \geq 0\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy. \end{aligned}$$

Utilizando a estimativa obtida para $I_1$ e $I_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{M_0^- w(x) - M_0^- v(x)}{(2-\sigma)} &= I_1 + I_2 \\
&\leq \Lambda \int_{\{\delta^- w \geq 0\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&+ \Lambda \int_{\{\delta^+ w \geq 0\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= \Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= -2\Lambda \int_{\{v(x+y)<0\}} \frac{v(x+y)}{|y|^{n+\sigma}} dy.
\end{aligned}$$

Com isso, se $x \in B_{\frac{\theta r}{2}}(x_0)$, pela definição de $v$, temos

$$\frac{M_0^- w(x) - M_0^- v(x)}{(2-\sigma)} \leq 2\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\theta r}(x_0 - x)} \frac{(u(x+y) - (1-\theta/2)^{-n} u(x_0))^+}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Como $u(x_0) > 0$, temos que $(u(x+y) - (1-\theta/2)^{-n} u(x_0)) \leq u(x+y)$. Dessa forma, obtemos $(u(x+y) - (1-\theta/2)^{-n} u(x_0))^+ \leq (u(x+y))^+ \leq |u(x+y)|$. Usando o fato de que $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{\theta r}(x_0 - x)$, podemos estimar

$$\frac{|y - (x_0 - x)|^{n+\sigma}}{|y|^{n+\sigma}} \leq C(\theta r)^{-n-\sigma},$$

e com isso, teremos

$$\frac{M_0^- w(x) - M_0^- v(x)}{(2-\sigma)} \leq 2\Lambda C(\theta r)^{-n-\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y)|}{|y - (x_0 - x)|^{n+\sigma}} dy.$$

Por hipótese, $u \in L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)$. Adicionando isto a estimativa acima, temos

$$\frac{M_0^- w(x) - M_0^- v(x)}{(2-\sigma)} \leq C(\theta r)^{-n-\sigma}$$

Daí, $M_0^- w \leq C(\theta r)^{-n-\sigma}$ em $B_{\theta r/2}(x_0)$. Denote por $G = \{u < u(x_0)/2\} \cap B_{\theta r/4}(x_0)$. Pelo Teorema

1.5 (aplicado a $w$ em $B_{\theta r/2}(x_0)$), temos (lembrando que $w(x_0) = v(x_0) = ((1-\theta/2)^{-n} - 1)\, u(x_0)$),

$$
\begin{aligned}
|G| &= \left| \{w > u(x_0) \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-n} - \frac{1}{2} \right) \} \cap B_{\theta r/4}(x_0) \right| \\
&\leq C \left(\frac{\theta r}{4}\right)^n \left( w(x_0) + C(\theta r)^{-n-\sigma} \left(\frac{\theta r}{4}\right)^{\sigma} \right)^{\epsilon} \left( u(x_0) \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-n} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-\epsilon} \\
&= C(\theta r)^n \left( \frac{\left( (1 - \frac{\theta}{2})^{-n} - 1 \right) u(x_0) + C(\theta r)^{-n}}{u(x_0) \left( (1 - \frac{\theta}{2})^{-n} - \frac{1}{2} \right)} \right)^{\epsilon} \\
&\leq C(\theta r)^n \left( \left( (1 - \tfrac{\theta}{2})^{-n} - 1 \right) + (\theta r)^{-n} \left( u(x_0) \left( (1 - \tfrac{\theta}{2})^{-n} - \tfrac{1}{2} \right) \right)^{-1} \right)^{\epsilon} \\
&\leq C(\theta r)^n \left( \left( (1 - \tfrac{\theta}{2})^{-n} - 1 \right)^{\epsilon} + (\theta r)^{-n\epsilon} 2^{\epsilon n} t^{-\epsilon} r^{\epsilon n} \right).
\end{aligned}
$$

Escolhemos $\theta > 0$ de tal maneira que

$$C(\theta r)^n ((1 - \theta/2)^{-n} - 1)^{\epsilon} \leq \frac{1}{4} |B_{\theta r/2}|,$$

e esta escolha é independente do valor de $t$. Assim para este valor fixo de $\theta$, se $t$ é grande o suficiente, teremos também

$$C(\theta r)^n \theta^{-n\epsilon} t^{-\epsilon} \leq \frac{1}{4} |B_{\theta r/2}|,$$

e portanto

$$\left| \{u < u(x_0)/2\} \cap B_{\theta r/4}(x_0) \right| \leq \frac{1}{2} |B_{\theta r/4}|.$$

Isto, por sua vez, implica que

$$\left| A \cap B_{\theta r/4}(x_0) \right| = \left| \{u > u(x_0)/2\} \cap B_{\theta r/4}(x_0) \right| \geq c|B_r|,$$

e isto é uma contradição com o fato de $|A \cap B_1| \leq Ct^{-1}|B_r|$, pois

$$Ct^{-1}|B_r| \geq |A \cap B_1| \geq |A \cap B_{\theta r/4}(x_0)| \geq c|B_r|.$$

Dessa forma $t$ não pode ser muito grande e deve existir uma constante $C$ tal que $t \leq C$, como queríamos. □

## 3.2 Cada $L_a$ é limitado

Esta seção será dedicada para mostrar que se $u$ resolve $\mathcal{I}u = 0$ e $L_a \in \mathcal{L}_2$ para todo $a$, então temos uma limitação de $L_a u$ uniformemente em $a$ envolvendo a norma $L^\infty$ de $u$. Isto é realizado usando um argumento de localização para mostrar que, na verdade, a função $L_a u$ resolve a equação $M^+(L_a u) \geq -C||u||_{L^\infty(B_1)}$. Aqui ficará claro a importância de estarmos sobre a classe de operadores $\mathcal{L}_2$ e da concavidade do operador $\mathcal{I}$. Primeiro temos o seguinte Lema de localização.

**Lema 3.2.** *Suponha que* $u \in C^2$ *e* $\mathcal{I}u = 0$ *em* $B_1$*. Seja* $K$ *um kernel simétrico que satisfaz* $K(y) \leq (2-\sigma)\Lambda|y|^{-n-\sigma}$*(mas não necessariamente a limitação por baixo). Então, para toda função teste* $b$ *tal que*

$$\begin{aligned} 0 \leq b(x) \leq 1 &\quad em\ \mathbb{R}^n \\ b(x) = b(-x) &\quad em\ \mathbb{R}^n \\ b(x) = 0 &\quad em\ \mathbb{R}^n \backslash B_{1/2}, \end{aligned}$$

*temos*

$$M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)b(y)dy\right) \geq 0 \quad em\ B_{1/2}.$$

*Demonstração.* Seja $\phi_k$ a seguinte sequência de funções,

$$\phi(k)(y) = \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/k}} K(y)b(y).$$

Note que $\phi_k \in L^1$, pois

$$\begin{aligned} ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/k}} K(y)b(y)\right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/2}} |K(y)|\, dy \\ &\leq (2-\sigma)\Lambda \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/2}} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy < \infty. \end{aligned}$$

Daí, como $u \in C^2$, $\delta(u,x,y)\phi_k(y) \longrightarrow \delta(u,x,y)K(y)b(y)$ e pelo fato de $K$ ser simétrico, temos, graças ao Teorema da convergência Dominada, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)b(y)dy &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)\phi_k(y)dy \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y)+u(x-y)-2u(x))\phi_k(y)dy \\ &= 2\lim_{k\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)\phi_k(y)dy - u(x)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(y)dy\right) \\ &= 2\lim_{k\to\infty} \left(u * \phi_k - u||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)(x) \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.2, obtemos

$$\mathcal{I}\left(u * \frac{\phi_k}{||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\right) \geq 0.$$

Disto e do fato de $\mathcal{I}u = 0$, temos, pelo Lema (1.2),

$$\begin{aligned} M_2^+\left(u*\phi_k - ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}u\right) &= M_2^+\left(u * \frac{\phi_k}{||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}}||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)} - ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}u\right) \\ &= ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)} M_2^+\left(u * \frac{\phi_k}{||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}} - u\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Daí, temos que $M_2^+(u * \phi_k - ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}u) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.2, passando o limite, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} M_2^+(u * \phi_k - ||\phi_k||_{L^1}u) &= M_2^+(\lim_{k\to\infty} u * \phi_k - ||\phi_k||_{L^1}u)\\ &= M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)K(y)b(y)dy - u(x)\int_{\mathbb{R}^n} K(y)b(y)dy\right)\\ &= M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x))K(y)b(y)dy\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Como $K$ e $B$ são simétricos e $M_2^+$ é homogêneo, temos

$$M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x))K(y)b(y)dy\right) = \frac{1}{2}M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)b(y)dy\right),$$

e o resultado segue. □

Usando novamente um argumento de localização, podemos garantir que $Lu$ resolve uma certa equação envolvendo o operador maximal da classe $\mathcal{L}_2$ e temos o seguinte lema.

**Lema 3.3.** *Suponha que $u \in C^2$ e $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$. Então existe uma constante universal $C$ tal que para todo operado $L \in \mathcal{L}_2$,*

$$M_2^+(Lu) \geq -C||u||_{L^\infty} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

*Demonstração.* Seja $\phi_k(y) = \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/k}}(y)K(y)$ uma sequência de funções $L^1$, e como no Lema 3.2, aproximamos o valor da seguinte integral por

$$Lu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)\phi_k(y)dy = 2\lim_{k\to\infty}(u * \phi_k - u||\phi_k||_{L^1}).$$

Seja $b$ uma função cut-off tal que

$$\begin{aligned}&0 \leq b(x) \leq 1 && \text{em } \mathbb{R}^n,\\ &b(x) = b(-x) && \text{em } \mathbb{R}^n,\\ &b(x) = 0 && \text{em } \mathbb{R}^n\setminus B_{1/2},\\ &b(x) = 1 && \text{em } B_{1/4}.\end{aligned}$$

Dessa forma, usando os mesmos argumentos da demonstração do Lema 3.2, mostra-se que

$$\mathcal{I}\left(u * \frac{\phi_k b(x)}{||\phi_k b||_{L^1}}\right) \geq 0, \tag{3.3}$$

e portanto

$$M_2^+(u * (\phi_k b) - ||\phi_k b||_{L^1}u) \geq 0.$$

Agora, vamos estimar $\mathcal{I}(u*(\phi_k(1-b))$ em $B_{1/2}$. Note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u*(\phi_k(1-b)))(x) &= \inf_a L_a(u*(\phi_k(1-b)))(x) \\
&= \inf_a \int_{\mathbb{R}^n} ((u*(\phi_k(1-b)))(x+y) + (u*(\phi_k(1-b)))(x-y) \\
&\quad -2(u*(\phi_k(1-b)))(x))K_a(y)dy \\
&= \inf_a \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(z)((\phi_k(1-b))(x+y-z) + (\phi_k(1-b))(x-y-z) \\
&\quad -2(\phi_k(1-b))(x-z))dzK_a(y)dy \\
&= \inf_a \int_{\mathbb{R}^n} u(z)\int_{\mathbb{R}^n} ((\phi_k(1-b))(x+y-z) + (\phi_k(1-b))(x-y-z) \\
&\quad -2(\phi_k(1-b))(x-z))K_a(y)dydz \\
&= \inf_a \int_{\mathbb{R}^n} u(z)L_a(\phi_k(1-b))(x-z)dz \\
&= \inf_a (u*L_a(\phi_k(1-b)))(x)
\end{aligned}$$

Note também que as hipóteses sobre o kernel $K$ garantem que $\phi_k(1-b) \in L^1$ e $D^2\phi_k(1-b) \in L^1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para verificar isso, basta notar que

$$\begin{aligned}
||\phi_k(1-b)||_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(y)(1-b)(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/k}} K(y)(1-b)(y)dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/4}} (2-\sigma)\Lambda\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&= (2-\sigma)\Lambda\int_{1/4}^{\infty}\left(\int_{\partial B_s}\frac{1}{s^{n+\sigma}}dS(y)\right)ds \\
&= (2-\sigma)\Lambda\int_{1/4}^{\infty}\frac{1}{s^{n+\sigma}}s^{n-1}|\partial B_1|ds \\
&= \frac{(2-\sigma)}{\sigma}4^{\sigma}\Lambda|\partial B_1|.
\end{aligned}$$

Fazendo contas semelhantes, mostra-se que $D^2\phi_k(1-b) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ uniformemente em $k$. Estas duas informações, por sua vez, implicam que $L(\phi_k(1-b))$ é limitado uniformemente em $L^1$

para todo operador $L \in \mathcal{L}_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
|(u * L_a(\phi_k(1-b)))(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-z)||L_a(\phi_k(1-b))(z)|dz \\
&\leq ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}||L_a(\phi_k(1-b))||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Como isto vale para todo operador $L_a$, temos

$$|\mathcal{I}(u * (\phi_k(1-b)))| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.4}$$

Pelo Lema (1.2) e pela concavidade de $\mathcal{I}$, temos

$$\begin{aligned}
M_2^+\left(u * \phi_k - ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}u\right) &\geq \mathcal{I}(u * \phi_k) - ||\phi_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\mathcal{I}u = \mathcal{I}(u * \phi_k) \\
&= \mathcal{I}(u * \phi_k(1-b+b)) \\
&= \mathcal{I}(u * \phi_k(1-b) + u * \phi_k b) \\
&\geq \mathcal{I}(u * \phi_k(1-b)) + \mathcal{I}(u * \phi_k b) \\
&= ||\phi_k b||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\mathcal{I}\left(u * \frac{\phi_k b}{||\phi_k b||_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\right) + \mathcal{I}(u * \phi_k(1-b)) \\
&\geq 0 - C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

onde usamos (3.3) e (3.4) na última desigualdade. Daí,

$$M_2^+\left(u * \phi_k - ||\phi_k||_{L^1((\mathbb{R}^n))}u\right) \geq -C||u||_{L^\infty((\mathbb{R}^n))}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Passando o limite, pelo Lema (2.2), temos que

$$\begin{aligned}
M_2^+(Lu)(x) &= M_2^+(2\lim_{k\to\infty}(u * \phi_k - u||\phi_k||_{L^1((\mathbb{R}^n))})(x)) \\
&= 2\lim_{k\to\infty} M_2^+(u * \phi_k - u||\phi_k||_{L^1((\mathbb{R}^n))})(x) \\
&\geq -C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

□

Usando estes lemas, obtemos a seguinte estimativa de limitação nas funções $L_a u$.

**Lema 3.4.** *Seja $u$ uma solução de $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$. Suponha que $L_a \in \mathcal{L}_2$ para todo $a$. Então, para todo $a$, $L_a u \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ em $B_{1/8}$, para alguma constante $C$ universal.*

*Demonstração.* Primeiro note que podemos assumir que $u \in C^2$, pois, pelo Lema 3.1, podemos aproximar $u$ por uma sequência $u^\epsilon \in C^2$ que resolve o mesmo tipo de equação. Desta forma, nosso objetivo é provar a estimativa para uma constante $C$ independente de $\epsilon$ e depois passar o limite em $\epsilon$ para obter a estimativa para $u$. Desta forma, assumamos que $u \in C^2$ (o que garante que as integrais estão bem definidas). Pelo Lema 3.3, sabemos que para cada $L_a$

$$M_2^+(L_a u) \geq -C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

Queremos aplicar o Teorema 3.5 para $L_a u$ e para isso precisamos de uma estimativa em, pelo menos, $L^1(\mathbb{R}^n, (1+|y|)^{-n-\sigma})$. Note que,

$$L_a u(x) \geq \inf_a L_a u(x) = \mathcal{I}u(x) = 0 \quad \text{em } B_1,$$

e assim $L_a u \geq 0$ em $B_1$. Agora seja $b$ uma função cutoff tal que $0 \leq b \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$, $b = 1$ em $B_{1/2}$ e $b = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_1$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} L_a u(x) b(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y) K_a(y) dy b(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K_a(y) b(x) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) K_a(y) b(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) K_a(y) b(x) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} 2u(x) K_a(y) b(x) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (b(x+y) + b(x-y) - 2b(x)) K_a(y) u(x) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} L_a b(x) u(x) dx \\
&\leq C||u||_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Daí, $L_a u \in L^1(B_{1/2})$, pois

$$0 \leq ||L_a u||_{L^1(B_{1/2})} \leq \int_{B_{1/2}} |L_a u(x)| b(x) dx \leq C||u||_{L^\infty}. \tag{3.5}$$

Note que ainda precisamos controlar os valores de $L_a u$ fora de $B_{1/2}$ para poder aplicar o Teorema 3.5. Como não queremos assumir uma possível regularidade de $u$ fora de $B_1$, iremos usar a função cutoff novamente. Sendo assim, seja $c(x) := b(2x)$ e $w(x) = c(x) L_a u(x)$. Vamos estimar

$M_2^+ w(x)$ para $x \in B_{1/4}$. Para isso, consideremos qualquer operador $L \in \mathcal{L}_2$ e vamos estimar

$$\begin{aligned}
Lw(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(w, x, y) K(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(cL_a u, x, y) K(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(L_a u, x, y) K(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \delta((1-c)L_a u, x, y) K(y) dy \\
&= L(L_a u)(x) - 2 \int_{\mathbb{R}^n} L_a u(x+y)(1 - c(x+y)) K(y) dy \\
&= L(L_a u)(x) - 2 \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) L_a((1 - c(x+.))K)(y) dy \\
&\geq L(L_a u)(x) - C||u||_{L^\infty},
\end{aligned}$$

onde usamos que $L_a((1 - c(x+.))K) \in L^1$ uniformemente para $x \in B_{1/4}$. Agora, passando o supremo em $L$, obtemos

$$M_2^+ w(x) \geq M_2^+(L_a u) - C||u||_{L^\infty} \geq -C||u||_{L^\infty} \quad \text{para } x \in B_{1/4}.$$

Com isto, $w$ se encaixa nas hipóteses do Teorema 3.5 e desta maneira,

$$w \leq C||u||_{L^\infty} \quad x \in B_{1/8}.$$

Porém, como $w(x) = c(x)L_a u(x)$ e $c(x) = 1$ em $B_{1/4}$, temos

$$L_a u(x) \leq C||u||_{L^\infty}, \quad x \in B_{1/8}.$$

□

## 3.3 Operadores Extremais são limitados

Nesa seção iremos provar um dos resultados essenciais para obtermos (3.1). A ideia é usar um argumento de localização para mostrar que os operadores extremais da classe $\mathcal{L}_0$ são limitados. Isto será feito mostrando que as funções $Lu(x)$ são limitadas para todo $L \in \mathcal{L}_0$ uniformemente em $L$. O primeiro resultado é o seguinte lema.

**Lema 3.5.** *Suponha que $u \in C^2$. Então para todo Kernel simétrico $K$ satisfazendo $K(y) \leq (2-\sigma)\Lambda|y|^{-n-\sigma}$(mas não necessariamente limitado por baixo) e toda função teste tal que*

$$\begin{array}{ll} 0 \leq b \leq 1 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ b(x) = b(-x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ b(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{1/2}, \\ b(x) = 1 & \text{em } B_{1/4}. \end{array}$$

*Então,*

$$M_2^+\left(b(x)\int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy\right) \geq -C||u||_{L^\infty} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

*Demonstração.* Denotemos

$$L^t u(x) = \int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy.$$

Pelo Lema 3.2, temos

$$M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,-,y)K(y)dy\right)(x) \geq 0 \quad \text{em } B_{1/2}, \tag{3.6}$$

e portanto

$$M_2^+(L^t u) \geq 0.$$

Seja $L \in \mathcal{L}_2$ um operador qualquer, vamos estimar $L(bL^t u)$.

$$\begin{aligned} L(bL^t u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(bL^t u,x,y)K(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(L^t u,x,y)K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \delta((1-b)L^t u,x,y)K(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(L^t u,x,y)K(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} ((1-b)L^t u)(x+y)K(y) \\ &\quad +((1-b)L^t u)(x-y)K(y) - 2((1-b)L^t u)(x)K(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(L^t u,x,y)K(y)dy - 2\int_{\mathbb{R}^n} ((1-b)L^t u)(x+y)K(y)dy, \end{aligned}$$

onde usamos na última passagem o fato de $b(x) = 1$ em $B_{1/2}$ e portanto $(1-b)(x) = 0$, e fizemos uma mudança de variável no segundo fator da soma na segunda integral. Agora, note que, denotando

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} L^t u(x+y)(1-b(x+y))K(y)dy,$$

temos

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B_{1/2}} \delta(u,x+y,z)K(z)dz\right)(1-b(x+y))K(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_{1/2}} \delta(u,x+y,z)K(z)(1-b(x+y))K(y)dzdy \\
&= \int_{B_{1/2}}\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y+z)K(z)(1-b(x+y))K(y)dydz+ \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y-z)K(z)(1-b(x+y))K(y)dydz \\
&\quad \int_{B_{1/2}} -2\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)K(z)(1-b(x+y))K(y)dydz \\
&= \int_{B_{1/2}}\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)K(z)(1-b(x+y-z))K(y-z)dydz+ \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)K(z)(1-b(x+y+z))K(y+z)dydz \\
&\quad \int_{B_{1/2}} -2\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)K(z)(1-b(x+y))K(y)dydz \\
&= \int_{B_{1/2}}\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)K(z)\delta((1-b(x+-)K,y,z)dydz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_{1/2}} u(x+y)K(z)\delta((1-b(x+-)K,y,z))dzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)L^t((1-b(x+-))K)(y)dy.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
L(bL^t u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(L^t u,x,y)K(y)dy - 2\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)L^t((1-b(x+-))K)(y)dy \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} \delta(L^t u,x,y)K(y)dy - 2||u||_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n} L^t((1-b(x+-))K)(y)dy.
\end{aligned}$$

Por (3.6) e como $L^t((1-b(x+-))K)$ é limitado em $L^1$, temos

$$L(bL^t u)(x) \geq -C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $L \in \mathcal{L}_2$, e daí segue o desejado. □

Agora vamos usar este lema e os resultados da Seção 3.1.3 para garantir o próximo lema que é basicamente o que almejamos nesta seção. Vale comentar que este é o único momento em que usamos os resultados desta seção.

**Lema 3.6.** *Seja $u$ uma solução de $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$ com todos operadores $L_a \in \mathcal{L}_2$. Existe uma constante $C$ tal que para todo operador $L$ com Kernel simétrico $K$ satisfazendo $K(y) \leq (2-\sigma)\Lambda|y|^{-n-\sigma}$(mas não necessariamente a limitação por baixo), temos*

$$|Lu(x)| \leq C||u||_{L^\infty} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

*Demonstração.* Vamos assumir $u \in C^2$, assim como no Lema 3.4. Se considerarmos $v = u/||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, então podemos assumir que $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$. Além disso, provaremos a estimativa em $B_{1/64}$ e o resultado do Lema segue através de um recobrimento de $B_{1/2}$. Seja $L_a$ um dos operadores usados no ínfimo em (3.1). Pelo Lema 3.4, temos que $L_a u \leq C$ em $B_{1/2}$. Em particular,

$$||L_a u||_{L^2(B_{1/2})} = \left\{ \int_{B_{1/2}} |L_a u(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq C|B_{1/2}|^{1/2} = C.$$

Note que

$$||u||_{L^1(\mathbb{R}^n, 1/(1+|y|^{n+\sigma}))} \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Daí, pelo Teorema 3.4, para cada $L \in \mathcal{L}_0$, temos

$$||Lu||_{L^2(B_{1/2})} \leq C||u||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)} \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = C. \tag{3.7}$$

Agora, separando a integral

$$Lu(x) = \int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy,$$

podemos observar que o segundo termo é limitado, uma vez que $K \in L^1(\mathbb{R}^n \backslash B_{1/2})$. Por este comentário e de (3.7), temos

$$\left\| \int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy \right\|_{L^2(B_{1/4})} \leq ||Lu||_{L^2(B_{1/4})} + \left\| \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy \right\|_{L^2(B_{1/4})} \leq C. \tag{3.8}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2, temos que

$$M_2^+ \left( \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)c(y)dy \right) \geq 0, \tag{3.9}$$

para uma função teste $c(x)$ tal que

$$supp(c) = B_{1/4} \quad \text{e} \quad c \equiv 1 \quad \text{em } B_{1/8}.$$

Note que como $0 \le c(x) \le 1$ e (3.9), temos

$$M_2^+\left(\int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy\right) \ge M_2^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)c(y)dy\right) \ge 0.$$

Definamos a seguinte quantidade

$$w(x) = c(x)\int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy.$$

Notemos que $w = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_{1/4}$ e $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de (3.8). Pela desigualdade de Hölder temos que $w(y) = \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e dessa forma $w \in L^1(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}})$. Pelo Lema 3.5, temos que

$$M_2^+(w) \ge -C \quad \text{em } B_{1/16}.$$

Pelo Teorema 3.5, temos que $w \le C$ em $B_{1/32}$ e consequentemente

$$\int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy \le C \quad \text{em } B_{1/32}.$$

Assim, por observações anteriores

$$Lu(x) = \int_{B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{1/2}} \delta(u,x,y)K(y)dy \le C \quad \text{em } B_{1/32}.$$

Agora vamos usar a equação para obter um limitante inferior para $Lu(x)$. Lembre que, pelo Lema 3.4, $L_a u$ é limitado e $L_a u$ e $Lu$ são dados por

$$L_a u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K_a(y)dy \quad \text{e} \quad Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)K(y)dy,$$

onde

$$(2-\sigma)\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \le K_a(y) \le (2-\sigma)\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} \quad \text{e} \quad K(y) \le (2-\sigma)\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}.$$

Consideremos o Kernel

$$K_d = \frac{2}{\lambda}K_a - \frac{1}{\Lambda}K,$$

e seu operador correspondente $L_d$. Note que

$$K_d(y) = \frac{2}{\lambda}K_a(y) - \frac{1}{\Lambda}K(y) \ge \frac{2}{\lambda}\left((2-\sigma)\frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}\right) - \frac{1}{\Lambda}(2-\sigma)\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} = (2-\sigma)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}},$$

e

$$K_d(y) \le \left(\frac{2}{\lambda}\right)(2-\sigma)\frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} - \frac{\lambda}{\Lambda}(2-\sigma)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}} = (2-\sigma)\left(\frac{2\Lambda}{\lambda} - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}.$$

Daí, $L_d$ pertence à classe $\mathcal{L}_0$ cujas constantes de elipticidade são 1 e $(2\Lambda/\lambda - \lambda/\Lambda)$. Fazendo as mesmas contas que fizemos para esta classe, iremos obter

$$L_d \le C \quad \text{em } B_{1/32}.$$

Dessa forma, dos fato de $L_a$ ser limitado, temos

$$Lu = \frac{2\Lambda}{\lambda}L_a - \Lambda L_d \geq -C,$$

e por isso

$$|Lu| \leq C \quad \text{em } B_{1/32}.$$

□

Como corolário direto, temos o seguinte resultado.

**Corolário 3.1.** *$M_0^+$ e $M_0^-$ são limitados em $B_{1/2}$.*

*Demonstração.* Como $M_0^+ = \sup_{L\in\mathcal{L}_0} L$ e, pelo resultado anterior, temos

$$|Lu| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \text{em } B_{1/2}, \text{ para todo } L \in \mathcal{L}_0,$$

onde $C$ é uma constante que independe de $L$. Dessa forma, passando o supremo, iremos obter

$$|M_0^+| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

De maneira análoga mostra-se para $M_0^-$. □

Tendo em vista que os operadores extremais da classe $\mathcal{L}_0$ são limitados, podemos usá-los de maneira adequada para mostrar que as integrais em (3.1) são absolutamente convergentes.

**Teorema 3.6.** *Suponha que $L_a \in \mathcal{L}_2$ para todo $L_a$. Se $u$ é uma função limitada em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$ no sentido da viscosidade, então temos a seguinte estimativa*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\delta(u,x,y)|\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy \leq C||u||_{L^\infty} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

*Demonstração.* Aplicando o Lema 3.6 a $L = -(\Delta)^{\sigma/2}$, temos

$$|Lu(x)| = \left|-(-\Delta)^{\sigma/2}u(x)\right| = \left|c_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,x,y)\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy\right| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

Por outro lado, pelo Corolário 3.1, temos que para qualquer par $(\lambda, \Lambda)$ com $\lambda < \Lambda$,

$$|M_0^+u(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y))\frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy\right| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \text{em } B_{1/2}.$$

Dessa forma, como $c_\sigma$ é limitada e $\delta = \delta^+ - \delta^-$, obtemos

$$\begin{aligned}
M_0^+ u(x) + \lambda(-\Delta)^{\sigma/2} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\quad + \lambda c_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} -\delta(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda\delta^+(u,x,y) - \lambda\delta^-(u,x,y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\quad + \lambda c_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} -\delta^+(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\quad + \lambda c_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} \delta^-(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\geq (\Lambda - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \delta^+(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy.
\end{aligned}$$

Pelas estimativas anteriores, temos que

$$M_0^+ u(x) + \lambda(-\Delta)^{\sigma/2} u(x) \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

e portanto

$$(\Lambda - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \delta^+(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Da mesma maneira, mostra-se que

$$(\Lambda - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \delta^-(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq \Lambda(-\Delta)^{\sigma/2} u(x) - M_0^+ u(x) \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Somando ambas estimativas, iremos obter

$$\begin{aligned}
(\Lambda - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} |\delta(u,x,y)| \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy &= (\Lambda - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \delta^+(u,x,y) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\quad + (\Lambda - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \delta^-(u,x,y) \tfrac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&\leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\delta(u,x,y)| \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

## 3.4 Mais regularidade

Nesta seção iremos fazer a conexão entre o Teorema principal 3.1 e o Teorema 3.6. Pelo Teorema 3.6, temos a seguinte estimativa

$$\int_{B_{1/2}} |\delta(u,x,y)| \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq C||u||_{L^\infty}.$$

A fim de obtermos regularidade $C^{\sigma+\alpha}$, a ideia é mostrar que

$$\int_{B_{1/2}} |\delta(u,x,y) - \delta(u,0,y)| \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \leq C|x|^\alpha ||u||_{L^\infty},$$

para alguma constante $C > 0, \alpha > 0$ e para todo $x \in B_{1/4}$. Com isto, será possível garantir que $(-\Delta)^{\sigma/2} u$ é $\alpha-$Hölder contínuo e por resultados clássicos teremos a regularidade e estimativa desejada. Consideremos Kernels $K$ da forma

$$K_A(y) = \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} \mathcal{X}_A(y),$$

onde $\mathcal{X}_A$ é a função característica do conjunto $A$, cuja propriedade é a de simetria. Seja $b$ uma função teste como no Lema 3.5. Para cada conjunto $A$, escrevamos

$$w_A(x) = b(x) \int_{B_{1/2}} (\delta(u,x,y) - \delta(u,0,y)) K_A(y) dy.$$

Pelo Lema 3.6, temos que $w_A$ é uniformemente limitado e além disso, pelo Lema 3.5, temos

$$M_2^+ w_A \geq -C||u||_{L^\infty} \quad \text{em } B_{1/4},$$

e esta estimativa é uniforme em $A$ uma vez que o maior conjunto simétrico $A$ é o próprio $\mathbb{R}^n$. Defina

$$P(x) := \sup_A w_A(x) \quad \text{e} \quad N(x) := \sup_A -w_A(x).$$

Note que

$$P(x) = b(x) \int_{B_{1/2}} (\delta(u,x,y) - \delta(u,0,y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Para verificar isto, basta definir $A = \{y : \delta(u, x, y) > \delta(u, 0, y)\}$. Diretamente segue que $A = -A$, ou seja, simétrico. Assim

$$\begin{aligned}
P(x) &\geq w_A(x) = b(x) \int_{B_{1/2}} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} \mathcal{X}_A(y) dy \\
&= b(x) \int_A (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} \mathcal{X}_A(y) dy \\
&+ b(x) \int_{B_{1/2} \setminus A} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} \mathcal{X}_A(y) dy \\
&= b(x) \int_A (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} \mathcal{X}_A(y) dy + 0 \\
&= b(x) \int_A (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y))^+ \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= b(x) \int_{B_{1/2}} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y))^+ \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy.
\end{aligned}$$

Além disso, o conjunto $A$ é o maior conjunto simétrico em $B_{1/2}$ tal que $\delta(u, x, y) > \delta(u, 0, y)$. Disto segue a igualdade desejada. Da mesma maneira, mostra-se que

$$N(x) := \sup_A -w_A(x) = b(x) \int_{B_{1/2}} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y))^- \frac{(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}} dy,$$

e nesta ocasião o maior conjunto simétrico é $A = \{y : \delta(u, x, y) < \delta(u, 0, y)\}$.

**Lema 3.7.** *Suponha que $||u||_\infty = 1$. Existe uma constante $C$ tal que para $x \in B_{1/4}$,*

$$\frac{\lambda}{\Lambda} N(x) - C|x| \leq P(x) \leq \frac{\Lambda}{\lambda} N(x) + C|x|$$

*Demonstração.* Para $x \in B_{1/4}$ considere $u_x(z) = u(x+z)$. Como $u$ resolve a equação numa vizinhança de $x$, então $u$ e $u_x$ resolvem a equação numa vizinhança de 0. Dessa forma, pela definição de elipticidade, temos que

$$M_2^+(u_x - u)(0) \geq 0 \quad \text{e} \quad M_2^-(u_x - u)(0) \leq 0.$$

Para todo Kernel $K \in \mathcal{L}_2$, temos

$$\begin{aligned}
L(u_x - u)(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u_x - u, 0, y) K(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) K(y) dy \\
&= \int_{B_{1/2}} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) K(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/2}} (\delta(u, x, y) - \delta(u, 0, y)) K(y) dy.
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/2}} \left(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y)\right) K(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,0,y)K(y-x)\mathcal{X}_{B^c_{1/2}}(y-x)dy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u,0,y)K(y)\mathcal{X}_{B^c_{1/2}}(y-x)dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{2}+|x|}} |\delta(u,0,y)|\frac{C}{|y|^{n+\sigma+1}}|x|dy \\
&+8||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B_{\frac{1}{2}+|x|}\setminus B_{1/2}} \frac{\Lambda(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}dy \\
&\leq C|x|.
\end{aligned}
$$

Assim, para todo Kernel $K\in\mathcal{L}_2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))K(y)dy \leq \int_{B_{1/2}}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))K(y)dy + C|x|,$$

tomando o supremo, iremos obter

$$0\leq M_2^+(u_x-u)(0)\leq \sup_{K\in\mathcal{L}_2}\int_{B_{1/2}}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))K(y)dy + C|x|,$$

em particular, como $\mathcal{L}_2\subset\mathcal{L}_0$, temos

$$\sup_{\frac{\lambda(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}\leq K(y)\leq\frac{\Lambda(2-\sigma)}{|y|^{n+\sigma}}}\int_{B_{1/2}}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))K(y)dy\geq -C|x|,$$

reescrevendo a integral, temos $\Lambda P(x)-\lambda N(x)\geq -C|x|$. Usando o fato de $M_2^-(u_x-u)(0)\leq 0$ obtemos a outra desigualdade. □

A estratégia para demonstrar o resultado de regularidade será provar que

$$\sup_{x\in B_r} P(x)\leq Cr^\alpha.$$

Perceba que é suficiente obter a estimativa para $|x|$ pequeno o suficiente, e então podemos considerar o rescalling

$$\tilde{w}_A(x)=\frac{1}{C}w_A(rx),$$

onde $C$ é a constante do Lema 3.7 e $r\in\mathbb{R}$ é pequeno o suficiente de tal forma que as estimativas se tornam

$$\text{Para todo conjunto } A: |w_A|\leq 1 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \tag{3.10}$$

$$\text{Para todo conjunto } A: M_2^+w_A\geq -\epsilon_1 \quad \text{em } B_1 \tag{3.11}$$

$$\frac{\lambda}{\Lambda}N(x)-\epsilon_1|x|^{1-\epsilon_1}\leq P(x)\leq\frac{\Lambda}{\lambda}N(x)+\epsilon_1|x|^{1-\epsilon_1}, \tag{3.12}$$

para $\epsilon_1$ arbitrariamente pequeno. Para verificar isso, basta lembrar que originalmente temos

$$|w_A| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad M_2^+ w_A \geq -C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{e} \quad \frac{\lambda}{\Lambda}N(x) - C|x| \leq P(x) \leq \frac{\Lambda}{\lambda}N(x) + C|x|.$$

Assim, se supusermos que $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$, temos diretamente que $|\tilde{w}_A| \leq 1$ e

$$M_2^+ \tilde{w}_A(x) = \frac{1}{C} r^\sigma M_2^+ w_A(rx) \geq -r^\sigma \geq -\epsilon_1,$$

para $r$ suficientemente pequeno. Além disso, note que $\tilde{P}(x) = \frac{1}{C}P(rx)$ e $\tilde{N}(x) = \frac{1}{C}N(rx)$. Assim,

$$\frac{\lambda}{\Lambda}\tilde{N}(x) - r|x| \leq \tilde{P}(x) \leq \frac{\Lambda}{\lambda}\tilde{N}(x) + r|x|,$$

com isso note que $r|x| = r|x|^{\epsilon_1}|x|^{1-\epsilon_1}$. Se $|x| < \left(\frac{\epsilon_1}{r}\right)^{1/\epsilon_1}$, temos (3.12).

Após esses comentários e as reduções temos o seguinte lema.

**Lema 3.8.** *Suponha que $\sigma \in (1,2)$. Seja $P(x)$ a função definida anteriormente. Existe uma constante $C$ e $\alpha > 0$ tal que*

$$P(x) \leq C|x|^\alpha ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demonstração.* Se considerarmos $v = u/||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, podemos supor que $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$. Como mencionado anteriormente, após um scalling apropriado, podemos assumir que as estimativas (3.10), (3.11), (3.12) valem para $\epsilon_1$ pequeno o suficiente. Por outro lado, podemos também supor, através do processo de regularização, que $u \in C^2$ e assim $P(x)$, $N(x)$ e $w_A$ são funções contínuas. Vamos obter estimativas a priori que independem do módulo de continuidade destas funções, e portanto as estimativas irão se manter ao passarmos o limite e assim podemos recuperar a estimativa para soluções no sentido da viscosidade.

Provaremos que existe $r > 0$ e $\theta > 0$ tal que

$$\sup_{B_{r^k}} P \leq (1-\theta)^k = r^{\alpha k}, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{\log(1-\theta)}{\log(r)}. \tag{3.13}$$

Se $k = 0$, então por (3.10) e pelo fato de $P(x) := \sup_A w_A(x)$, temos

$$P(x) = \sup_A w_A(x) \leq 1 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n,$$

em particular, vale (3.13) para $k = 0$. Prosseguimos por indução. Suponhamos que vale até $k$. Assim, se $|x| \geq r^k$ então

$$|w_A(x)| \leq (1-\theta)^{-1}|x|^\alpha.$$

Considere o seguinte rescalonamento

$$\begin{aligned} \tilde{w}_A(x) &= (1-\theta)^{-k} w_A(r^k x) \\ \tilde{P}(x) &= (1-\theta)^{-k} P(r^k x) = \sup_A \tilde{w}_A(x) \\ \tilde{N}(x) &= (1-\theta)^{-k} N(r^k x) = \sup_A -\tilde{w}_A(x). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$\tilde{P}(x) \leq 1 \quad x \in B_1.$$

Além disso, como $|w_A(x)| \leq (1-\theta)^{-1}|x|^\alpha$ para $|x| \geq r^k$, então

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x) &\leq (1-\theta)^{-k} \sup_A w_A(r^k x)\\ &\leq (1-\theta)^{-k}(1-\theta)^{-1} r^{\alpha k}|x|^\alpha\\ &= (1-\theta)^{-1}|x|^\alpha,\end{aligned}$$

para $|x| \geq 1$. Da estimativa (3.12) segue que

$$\frac{\lambda}{\Lambda}\tilde{N}(x) - \epsilon_1 \leq \tilde{P}(x) \leq \frac{\Lambda}{\lambda}\tilde{N}(x) + \epsilon_1, \tag{3.14}$$

uma vez que $|x| \leq r^{k+1}/4 \leq 1$. Queremos mostrar que se $\theta$ e $r$ forem escolhidos pequenos o suficiente, teremos $\tilde{P} \leq (1-\theta)$ em $B_r$. Provaremos por contradição. Seja $x_0$ o ponto em que $\tilde{P}$ atinge o máximo em $\overline{B}_r$ para algum $r \in (0, 1/2)$ e suponha, por contradição, que $\tilde{P}(x_0) \geq 1-\theta$. Da definição de $\tilde{P}$, considere o conjunto $A$ em que $\tilde{P}(x_0) = \tilde{w}_A(x_0) \geq 1-\theta$. Defina $v_A = (1-\tilde{w}_A)^+$ e note que como $\sup_{\overline{B}_r} \tilde{P} = \tilde{P}(x_0) \geq 1-\theta$, então

$$\inf_{\overline{B}_r} v_A \leq \theta.$$

Além disso, como $(1-\tilde{w}_A)^+ = (1-\tilde{w}_A) + (1-\tilde{w}_A)^-$, temos

$$\begin{aligned}M_2^- v_A &\leq M_2^-(1-\tilde{w}_A) + M_2^+(1-\tilde{w}_A)^-\\ &\leq -M_2^+(\tilde{w}_A) + M_2^+(1-\tilde{w}_A)^-.\end{aligned}$$

Assim, como $M_2^+\tilde{w}_A \geq -\epsilon_1$ e $(1-\tilde{w}_A)^- \leq \left((1-\theta)^{-1}|x|^\alpha - 1\right)^+$, temos $M_2^- v_A \leq C$ em $B_{1/2}$. Pelo Teorema (1.5), para algum $p > 0$ e $r < 1/4$ temos a estimativa

$$|\{v_A > t\theta\} \cap B_{2r}| \leq Cr^n(\theta + Cr^\sigma)^p(t\theta)^{-p}.$$

Escolheremos $r$(que dependerá de $\theta$) tal que $Cr^\sigma < \theta$. Assim, temos

$$|\{v_A > t\theta\} \cap B_r| \leq |\{v_A > t\theta\} \cap B_{2r}(x_0)| \leq Cr^n t^{-p} = Ct^{-p}|B_r| = Ct^{-p}r^n|B_1|. \tag{3.15}$$

Com isso, se escolhermos $t > 0$ grande, a medida do conjunto $\{v_A > t\theta\} \cap B_r$ se tornará um pequeno fator de $|B_1|$ independentemente do valor de $\theta$. Relembre que $v_A = (1-\tilde{w}_A)^+$, e assim se $v_A > t\theta$ então $\tilde{w}_A < 1-t\theta$ e vice-versa.

Seja $G = \{v_A \leq t\theta\} \cap B_r$. Por (3.15), temos que $|G| \geq |B_r| - Ct^{-p}|B_r| = (1-Ct^{-p})|B_r|$. Note que se $v_A \leq t\theta$, então $\tilde{w}_A \geq 1-t\theta$. Por outro lado, como $G \subset B_1$, temos $\tilde{P} \leq 1$ em $G$. Consequentemente, $\tilde{P} - \tilde{w}_A \leq 1-(1-t\theta) = t\theta$ em $G$.

Agora perceba que como $\tilde{w}_A + \tilde{w}_{A^c} \leq \tilde{P} - \tilde{N}$, temos que $\tilde{N} + \tilde{w}_{A^c} \leq \tilde{P} - \tilde{w}_A \leq t\theta$ em $G$. Por (3.14), temos

$$\tilde{N}(x) \geq \frac{\lambda}{\Lambda}\tilde{P}(x) - \epsilon_1,$$

e por esta razão,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{w}_{A^c} & \leq & t\theta - \tilde{N} \\ & \leq & t\theta - \frac{\lambda}{\Lambda}\tilde{P} + \epsilon_1 \\ & \leq & t\theta - \frac{\lambda}{\Lambda}\tilde{w}_A + \epsilon_1 \\ & \leq & t\theta - \frac{\lambda}{\Lambda}(1 - t\theta) + \epsilon_1 \\ & \leq & -\frac{\lambda}{2\Lambda}, \end{array}$$

desde que $\epsilon_1$ e $\theta$ sejam pequenos e $x \in G$. Com isso, teremos que

$$\left|\{\tilde{w}_{A^c} \leq -\frac{\lambda}{2\Lambda}\} \cap B_r\right| \geq |G| \geq (1 - Ct^{-p})|B_r|. \tag{3.16}$$

Agora considere a seguinte função

$$v_c(x) = \left(\tilde{w}_{A^c}(\kappa r x) + \frac{\lambda}{2\Lambda}\right)^+.$$

Como $v_c(x) \geq \tilde{w}_{A^c}(\kappa r x) + \frac{\lambda}{2\Lambda}$ em $\mathbb{R}^n$, $v_c = 0$ para $\kappa r x \in G$ e $M_2^+\tilde{w}_A \geq -\epsilon_1$, temos que

$$M_2^+ v_c \geq -\epsilon_1$$

em $B_2$ para $\kappa$ pequeno. Pelo Teorema 3.5, temos $v_c(x) \leq CC_0$ para $x \in B_1$, onde $C_0 = \epsilon_1 + ||v_c||_{L^1\left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}\right)}$. Com isso,

$$\begin{array}{rcl} v_c(0) & \leq & C\left(\epsilon_1 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v_c(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}}dy\right) \\ & = & C\epsilon_1 + C\displaystyle\int_{B_{\kappa^{-1}}} \frac{|v_c(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}}dy + C\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\kappa^{-1}}} \frac{|v_c(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}}dy. \end{array}$$

Como vale (3.16), temos $|\{v_c > 0\} \cap B_{\kappa^{-1}}| \leq Ct^{-p}|B_{\kappa^{-1}}| = Ct^{-p}\kappa^{-n}$. Adicionando este fato a estimativa anterior, teremos

$$\begin{array}{rcl} v_c(0) & \leq & C\epsilon_1 + C\kappa^{-n}t^{-p}\displaystyle\int_{B_{\kappa^{-1}}} \frac{1}{1+|y|^{n+\sigma}}dy + C\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\kappa^{-1}}} \frac{|v_c(y)|}{1+|y|^{n+\sigma}}dy \\ & \leq & C\epsilon_1 + C\kappa^{-n}t^{-p} + C\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\kappa^{-1}}} \frac{\tilde{w}_{A^c}(\kappa r x)^+}{1+|y|^{n+\sigma}}dy \\ & \leq & C\epsilon_1 + C\kappa^{-n}t^{-p} + C\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\kappa^{-1}}} \frac{2r^\alpha\kappa^\alpha|y|^\alpha}{1+|y|^{n+\sigma}}dy \\ & \leq & C\epsilon_1 + C\kappa^{-n}t^{-p} + C\kappa^\alpha\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\kappa^{-1}}} \frac{|y|^\alpha}{1+|y|^{n+\sigma}}dy, \end{array}$$

onde usamos na última desigualdade que $r < 1$. Agora note que como $1 + |y|^{n+\sigma} \geq |y|^{n+\sigma}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\kappa^{-1}}} \frac{|y|^\alpha}{1+|y|^{n+\sigma}}dy = |\partial B_1| \int_{\kappa^{-1}}^{\infty} s^{-1-\sigma+\alpha}ds = \frac{1}{-\sigma+\alpha}s^{-\sigma+\alpha}\Big|_{\kappa^{-1}}^{\infty} = \frac{1}{\sigma-\alpha}\kappa^{\sigma-\alpha}.$$

Adicionando isto a estimativa anterior, iremos obter que $v_c(0) \leq C\epsilon_1 + C\kappa^{-n}t^{-p} + C\kappa^{\sigma}$. Agora podemos escolher $\kappa$ e $\epsilon_1$ pequenos o suficiente de tal forma que $C\epsilon_1 + C\kappa^{\sigma} < \lambda/(8\Lambda)$ e depois escolher $t$ tal que $C\kappa^{-n}t^{-p} < \lambda/(8\Lambda)$. Pela definição de $v_c$, teremos que

$$\tilde{w}_{A^c}(0) + \frac{\lambda}{2\Lambda} \leq v_c(0) \leq \frac{\lambda}{4\lambda} \iff \tilde{w}_{A^c}(0) \leq -\frac{\lambda}{4\Lambda}.$$

Como $\tilde{w}_{A^c}(0) = 0$, temos uma contradição. Daí, teremos que $\tilde{P} < (1-\theta)$ em $B_r$. Pela definição de $\tilde{P}$, teremos $P \leq (1-\theta)^{k+1}$ em $B_{r^{k+1}}$ e com isso vale 3.13 para todo $k \in \mathbb{N}$ e o resultado segue. □

Usando o Lema 3.8 podemos finalmente provar o teorema de Evans-Krylov em sua versão não-local proposto em 3.1. Por conveniência, enunciaremos novamente.

**Teorema 3.7.** *Suponha que todo $L_a$ em (3.1) pertença a classe $\mathcal{L}_2$. Se $u$ é uma função limitada em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{I}u = 0$ em $B_1$, então $u \in C^{\sigma+\alpha}(B_{1/2})$. Além disso,*

$$||u||_{C^{\sigma+\alpha}(B_{1/2})} \leq C||u||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demonstração.* Consideremos o Laplaciano Fracionário de ordem $\sigma$,

$$-(-\Delta)^{\sigma/2}u(x) = c_{\sigma}(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,x,y)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy,$$

onde a constante $c_{\sigma}$ é limitada para $\sigma \in (1,2)$. Considere $b$ uma função cutoff como no lema 3.5. Para $x \in B_{1/4}$, denotando

$$I = (-\Delta)^{\sigma/2}u(0) - (-\Delta)^{\sigma/2}u(x),$$

temos a identidade

$$\begin{aligned}
I &= c_{\sigma}(2-\sigma)\left(-\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,0,y)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy + \int_{\mathbb{R}^n}\delta(u,x,y)\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy\right)\\
&= c_{\sigma}(2-\sigma)\int_{B_{1/2}}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy\\
&\quad + c_{\sigma}(2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/2}}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy\\
&= c_{\sigma}\left(P(x) - N(x) + (2-\sigma)\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/2}}(\delta(u,x,y)-\delta(u,0,y))\frac{1}{|y|^{n+\sigma}}dy\right).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.8, temos que

$$P(x) \leq C||u||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}|x|^{\alpha}.$$

Pelo lema 3.7, temos

$$-N(x) \leq C||u||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}|x|^{\alpha}.$$

O terceiro termo, por sua vez, é limitado por $C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x|$, pelas mesmas contas feitas no lema 3.7. Dessa forma, para $x \in B_{1/4}$, temos

$$(-\Delta)^{\sigma/2}u(0) - (-\Delta)^{\sigma/2}u(x) \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x|^\alpha.$$

Fazemos a mesma conta para

$$-(-\Delta)^{\sigma/2}u(0) + (-\Delta)^{\sigma/2}u(x),$$

e assim

$$\left|(-\Delta)^{\sigma/2}u(x) - (-\Delta)^{\sigma/2}u(0)\right| \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x|^\alpha,$$

para $x \in B_{1/4}$. Fazendo uma translação da estimativa, obtemos

$$\left\|(-\Delta)^{\sigma/2}u\right\|_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Consequentemente, temos que $u \in C^{\sigma+\alpha}(B_{1/2})$ com a estimativa desejada pelo Teorema $B$.5. □

# Referências


APPLEBAUM, D. *Lévy processes and stochastic calculus*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009. Citado na página 12.

BARLES, G.; IMBERT, C. Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited. In: *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*. [S.l.: s.n.], 2008. v. 25, n. 3, p. 567–585. Citado na página 18.

BERTOIN, J. *Lévy processes*. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1996. v. 121. Citado na página 12.

BUCUR, C.; VALDINOCI, E. *Nonlocal diffusion and applications*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 20. Citado na página 12.

CABRÉ, X. Isoperimetric, sobolev, and eigenvalue inequalities via the alexandroff-bakelman-pucci method: A survey. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, Springer, v. 38, n. 1, p. 201–214, 2017. Citado na página 46.

CABRÉ, X.; CAFFARELLI, L. Fully nonlinear elliptic equations. In: *American Mathematical Society, Colloquium Publication*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 43. Citado 9 vezes nas páginas 11, 13, 31, 36, 46, 59, 87, 156 e 159.

CAFFARELLI, L.; CHARRO, F. On a fractional monge–ampère operator. *Annals of PDE*, Springer, v. 1, n. 1, p. 4, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.

CAFFARELLI, L.; SILVESTRE, L. Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, Wiley Online Library, v. 62, n. 5, p. 597–638, 2009. Citado 9 vezes nas páginas 13, 14, 19, 20, 26, 31, 46, 60 e 124.

CAFFARELLI, L.; SILVESTRE, L. The evans-krylov theorem for nonlocal fully nonlinear equations. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 1163–1187, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.

CAFFARELLI, L.; SILVESTRE, L. Regularity results for nonlocal equations by approximation. *Archive for rational mechanics and analysis*, Springer, v. 200, n. 1, p. 59–88, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 14, 19, 20 e 161.

CAFFARELLI, L.; TEYMURAZYAN, R.; URBANO, J. M. Fully nonlinear integro-differential equations with deforming kernels. *arXiv preprint arXiv:1809.06821*, 2018. Nenhuma citação no texto.

CAFFARELLI, L. A. Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 130, n. 1, p. 189–213, 1989. Citado na página 71.

EVANS, L. C. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 35, n. 3, p. 333–363, 1982. Citado na página 110.

EVANS, L. C. Partial differential equations. *Providence, RI*, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 157.

EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. [S.l.]: CRC press, 2015. Citado na página 156.

FIGALLI, A. *The Monge–Ampère equation and its applications*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 155.

GIAQUINTA, M. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*. [S.l.]: Princeton University Press, 1983. Citado na página 102.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. [S.l.]: springer, 2015. Nenhuma citação no texto.

GUILLEN, N.; SCHWAB, R. W. Aleksandrov–bakelman–pucci type estimates for integro-differential equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 206, n. 1, p. 111–157, 2012. Citado na página 60.

JENSEN, R. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 101, n. 1, p. 1–27, 1988. Citado na página 38.

KOIKE, S. A beginner's guide to the theory of viscosity solutions. *MSJ Mem.*, Math. Soc. Japan, 2004. Citado na página 18.

KRYLOV, N. V. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian . . . , v. 46, n. 3, p. 487–523, 1982. Citado na página 110.

NEZZA, E. D.; PALATUCCI, G.; VALDINOCI, E. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces. *Bull. Sci. math*, v. 136, p. 521–573, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 16, 21, 22 e 23.

OTON, X. R. Integro-differential equations: Regularity theory and pohozaev identities. Universitat Politècnica de Catalunya, 2014. Citado na página 12.

POZRIKIDIS, C. *The Fractional Laplacian*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2016. Nenhuma citação no texto.

ROS-OTON, X. Nonlocal elliptic equations in bounded domains: a survey. *arXiv preprint arXiv:1504.04099*, 2015. Citado na página 12.

STEIN, E. M.; MURPHY, T. S. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. [S.l.]: Princeton University Press, 1993. v. 3. Citado na página 121.

STINGA, P. R. *Fractional powers of second order partial differential operators: extension problem and regularity theory*. Tese (Doutorado) — Universidad Autónoma de Madrid, 2010. Nenhuma citação no texto.

STINGA, P. R. User's guide to the fractional laplacian and the method of semigroups. *Fractional Differential Equations*, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, p. 235–266, 2019. Citado na página 158.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Lista de Notações

Aqui apresentaremos uma lista de notações que podem ser úteis para consulta ao longo da leitura do texto.

## Notações para matrizes

1. Escrevemos $A = (a_{ij})$ para indicar uma matriz genérica quadrada de ordem $n$ cujas entradas são $a_{ij}$.
2. $\mathcal{S}^n$ denota o espaço das matrizes simétricas de ordem $n$.
3. $tr(A)$ denota o traço de uma matriz $A$.
4. $\det(A)$ denota o determinante de uma matriz $A$.
5. $A^T$ denota a matriz transposta de $A$.
6. $A^{-1}$ denota a matriz inversa de $A$.
7. $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$ denota o subconjunto de $\mathcal{S}^n$ tal que $\lambda|y|^2 \leq \langle Ay, y\rangle \leq \Lambda|y|^2$. Uma matriz desse conjunto é comumente referida a uma matriz uniformemente elíptica com constantes de elipticidade $\lambda$ e $\Lambda$.

## Notações geométricas

1. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano $n-$dimensional.
2. $e_i = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)$ denota o $i-$ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
3. Um vetor genérico em $\mathbb{R}^n$ é $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
4. $\partial U$ denota a fronteira topológica de $U$ e $\overline{U}$ denota o fecho topológico de $U$.
5. $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro em $x$ e raio $r > 0$. Quando $x = 0$, $B_r(0) = B_r$. $B_r[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$ denota a bola fechada e $\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$.
6. $|A|$ denota a medida de lebesgue de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$.
7. $|\partial B_r| = r^{n-1}|\partial B_1|$, onde $|\partial B_1|$ denota a medida $(n-1)-$dimensional do conjunto $\partial B_1$.

8. Se $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ pertencem a $\mathbb{R}^n$, então

$$\langle a, b\rangle = a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad |a| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$$

# Notações de funções

1. Escremevos $u \equiv v$ para denotar que $u$ é identicamente igual a $v$. A notação $u := v$ denota a definição da função $u$ como sendo igual a $v$. O suporte de uma função $u$ será denotado por $supp(u)$.

2. A parte positiva de uma função é denotada por $u^+ = \max(u, 0)$. A parte negativa será denotada por $u^- = \max(-u, 0)$. Qualquer função $u$ pode ser escrita como $u = u^+ - u^-$ e $|u| = u^+ + u^-$.

3. A notação $\mathcal{X}_E$ denota a função característica do conjunto $E$. Esta função é definida da seguinte forma

$$\mathcal{X}_E(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin E \\ 1 & \text{se } x \in E, \end{cases}$$

4. Uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é dita ser $\alpha-$Hölder contínua se

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha,$$

para $\alpha \in (0, 1]$, alguma constante $C > 0$ e $x, y \in U$. Denotamos

$$[u]_{C^\alpha(U)} := \sup_{x,y\in U, x\neq y} \frac{|u(y) - u(x)|}{|x - y|}.$$

5. A convolução de duas funções $f$ e $g$ em $U$ é denotada por $f * g$ e é definida por

$$f * g(x) := \int_U f(x - y)g(y)dy.$$

6. $\mathcal{M}^+$ denota o operador maximal de Pucci. Este operador $\mathcal{M}^+ : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ é definido da seguinte maneira

$$\mathcal{M}^+(A) := \sup_{N\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} Tr(NA) = \Lambda \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i - \lambda \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i,$$

onde $\lambda_i$ é um autovalor da matriz $A$.

É comum escrever $\mathcal{M}^+(A) = \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(A) = \mathcal{M}^+(A, \lambda, \Lambda)$ para explicitar a dependência de $\lambda$ e $\Lambda$ na definição do operador. As constantes $\lambda$ e $\Lambda$ são chamadas de constantes de elipticidade.

Da mesma forma define-se o operador minimal de Pucci $\mathcal{M}^-(A) := \inf_{N\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} Tr(NA)$.

# Notações de derivadas

Suponha que $u : U \to \mathbb{R}$ e $x \in U$.

1. $u_{x_i}(x) = \partial_i u(x) = \partial_{x_i} u(x) := \lim\limits_{h\to 0} \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$ denota a $i-$ésima derivada parcial de $u$, desde que esse limite exista.

2. Da mesma forma denota-se derivadas parciais de segunda ordem por $\partial_{ij}u(x)$, $\partial x_i x_j u(x)$ou $u_{x_i x_j}$.

3. $\nabla u(x) = Du(x) := (u_{x_1}(x), \ldots, u_{x_n}(x))$ denota o vetor gradiente de $u$ em $x$.

4. $D^2(x) = (\partial_{ij}u(x))$ denota a matriz hessiana de $u$ em $x$.

5. $\nabla \cdot F(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i(F_i(x))$ denota o operador divergente, onde $F : U \to \mathbb{R}^n$.

# Notações para espaços de funções

1. $C(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \quad \text{é contínua}\}$ denota o espaço das funções contínuas em $U$.
$C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \quad \text{é } k-\text{vezes continuamente diferenciável }\}$ denota o espeço das funções $k$-vezes continuamente diferenciáveis em $U$.
$C^\infty(U) = \bigcap_{i=1}^\infty C^k(U)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $U$.

2. $L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \quad \text{é Lebesgue mensurável}, ||u||_{L^p(U)} < \infty\}$denota o espaço de Lebesgue das funções que são $p-$integráveis, onde
$$||u||_{L^p(U)} := \left(\int_U |u|^p dx\right)^{1/p},$$
para $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \quad \text{é Lebesgue mensurável}, ||u||_{L^\infty(U)} < \infty\}$ denota o espaço das funções essencialmente limitadas, onde
$$||u||_{L^\infty(U)} := esssup_U|u|.$$
$L^p_{loc}(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \in L^p(V) \quad \text{para cada V com fecho compacto em } U\}$.

3. $C^{k,\alpha}(U)$ com $\alpha \in (0,1]$ denota os espaços de Hölder das funções $u \in C^k(U)$ cujas $k-$ésimas derivadas são $\alpha-$Hölder contínuas.

# APÊNDICE B – Resultados Clássicos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e definições clássicas que serão usadas ao longo do trabalho.

## Sobre funções convexas

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados sobre funções convexas que podem ser encontrados em (FIGALLI, 2017). O primeiro fato que iremos apresentar é acerca da definição de subdiferencial de uma função convexa.

**Definição B.1.** *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa, para $x \in \Omega$, definimos o superdiferencial de $\phi$ em $x$ como o seguinte conjunto*

$$\partial\phi(x) := \{p \in \mathbb{R}^n : \phi(z) \geq \phi(x) + \langle p, z - x\rangle \; \forall z \in \Omega\}.$$

O conjunto $\partial\phi(x)$ é fechado e convexo, uma vez que $\phi$ é convexa. O significado geométrico do subdiferencial é que se $p \in \partial\phi(x)$ então a função afim

$$l_{x,p}(z) := \phi(z) + \langle p, z - x\rangle$$

toca $\phi$ por baixo em $x$. Em outras palavras, $l_{x,p}$ é um hiperplano de suporte para $\phi$ em $x$. Este é um fato local e não depende do conjunto $\Omega$. Este conceito de subdiferencial generaliza o gradiente da função $\phi$ no sentido de que se $\phi$ for diferenciável, então $\partial\phi(x) = \{\nabla\phi(x)\}$. É importante comentar também que uma vez que $\phi$ é convexa, o conjunto $\partial\phi(x)$ é sempre não vazio. No caso em que $\phi$ é côncava, temos o conceito de superdiferencial e resultados semelhantes valem.

Outro resultado clássico a respeito de funções convexas é que são Localmente Lipschitz.

**Teorema B.1.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função convexa. Então $\phi$ é localmente Lipschitz dentro de $\Omega$ e*

$$||\nabla\phi||_{L^\infty(K)} \leq \frac{2||\phi||_{L^\infty(\Omega')}}{dist(K, \Omega')},$$

*para qualquer $K \subset\subset \Omega' \subset \Omega$.*

Vale comentar que o mesmo resultado vale para funções côncavas.

## Sobre decomposição e recobrimento de conjuntos

Nesta seção vamos apresentar dois resultados clássicos sobre decomposição de conjuntos que é a decomposição em cubos de Calderón-Zygmund, o Teorema de recobrimento de Besicovitch e o Teorema de Egoroff. Estes resultados serão usados no texto.

Primeiro iremos apresentar a decomposição em cubos de Calderón-Zygmung, isto pode ser encontrado no 4 capítulo de (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995). Dessa forma, seja $Q_1$ o cubo unitário. Dividimos este cubo em $2^n$ cubos com metade do lado do cubo $Q_1$. Fazemos o mesmo processo em cada um desses $2^n$ cubos e iteramos este processo. Os cubos provenientes dessa iteração são chamados de cubos diádicos. Se $Q$ é um cubo diádico diferente de $Q_1$, dizemos que $\tilde{Q}$ é o predecessor de $Q$ se $Q$ é um dos $2^n$ cubos obtidos da divisão de $\tilde{Q}$. Com essa terminologia podemos enunciar o seguinte resultado.

**Lema B.1.** *Sejam $A \subset B \subset Q_1$ conjuntos mensuráveis e $0 < \delta < 1$ tal que*

1. *$|A| \leq \delta$;*
2. *Se $Q$ é um cubo diádico tal que $|A \cap Q| > \delta|Q|$, então $\tilde{Q} \subset B$.*

*Então $|A| \leq \delta|B|$.*

O segundo resultado é o Teorema de recobrimento de Besicovitch. Este é um resultado é usado para extrair coberturas de conjuntos com uma propriedade especial cuja demonstração pode ser encontrada em (EVANS; GARIEPY, 2015).

**Teorema B.2.** *Existe uma constante $C(n)$, que depende apenas da dimensão $n$, com a seguinte propriedade:*

*Se $\mathcal{F}$ é qualquer coleção de bolas fechadas não-degeneradas em $\mathbb{R}^n$ com*

$$\sup\{diam(B) | B \in \mathcal{F}\} < \infty$$

*e se $A$ é o conjunto de todos os centros das bolas em $\mathcal{F}$, então existem $N_n$ coleções enumeráveis $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{C(n)}$ de bolas disjuntas em $\mathcal{F}$ tais que*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{C(n)} \bigcap_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$

É comum dizer que a cobertura proveniente do Teorema de Besicovitch tem overlap limitado. Isto significa que cada ponto do conjunto a ser recoberto está em, no máximo, uma quantidade $N_n$ de elementos dessa coleção.

Apresentaremos agora o Teorema de Egoroff cuja demonstração pode ser encontrada em (EVANS; GARIEPY, 2015).

**Teorema B.3.** *Seja $\mu$ uma medida em $\mathbb{R}^n$ e suponha que $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é $\mu$-mensurável para cada $k \in \mathbb{N}$. Suponha também que $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\mu$-mensurável com $\mu(A) < \infty$, and*

$$f_k \longrightarrow f \quad \mu\text{-q.t.p em } A.$$

*Então para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto $\mu$-mensurável $B \subseteq A$ tal que*

- $\mu(A \backslash B) < \epsilon$, *e*
- $f_k \longrightarrow f$ *uniformemente em* $B$.

# Convolução e Suavização

Nesta seção apresentaremos a ferramenta de aproximação por mollifiers. As demonstrações podem ser encontradas com detalhes no Apêndice C.5 do livro (EVANS, 1998). Primeiro, vamos definir o mollifier padrão.

**Definição B.2.** 1. *Defina* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & se\ |x| < 1 \\ 0 & se\ |x| \geq 1, \end{cases}$$

*onde a constante* $C$ *é escolhida de tal forma que* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.

2. *Para cada* $\epsilon > 0$, *defina*

$$\eta_t(x) := \frac{1}{t^n}\eta(\frac{x}{t}).$$

Chamamos $\eta$ de mollifier padrão. Note que cada $\eta_t$ é $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, também satisfaz a propriedade de $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_t dx = 1$ e seu suporte está em $B_t$.

Com isso, podemos definir o que vem a ser a molificação padrão de uma função localmente integrável.

**Definição B.3.** *Se* $f : U \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável, defina sua molificação por*

$$f^t := \eta_t * f$$

*em* $U_t := \{x \in U : dist(x, \partial U) > t\}$, *isto é,*

$$f^t(x) = \int_U \eta_t(x-y)f(y)dy = \int_{B_t} \eta_t(y)f(x-y)dy,$$

*para* $x \in U_t$.

A molificação possui propriedades interessantes. A ideia é que a convolução transfere regularidade para a função com menos regularidade. O teorema a seguir compila todas as suas propriedades importantes.

**Teorema B.4.** 1. $f^t \in C^\infty(U_t)$.

2. $f^t \to f$ *q.t.p se* $t \to 0$.

3. *Se* $f \in C(U)$, *então* $f^t \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* $U$.

4. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{loc}(U)$, *então* $f^t \to f$ *em* $L^p_{loc}(U)$.

# Regularidade do Laplaciano Fracionário

Nesta seção vamos apresentar resultados clássicos que concernem sobre a regularidade do Laplaciano Fracionário. Isto pode ser encontrado no User guide (STINGA, 2019). Neste sentido, temos o seguinte Teorema

**Teorema B.5.** *Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assuma que $(-\Delta)^{\sigma/2}u = f \in C^{0,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1]$. Então u satisfaz as estimativas*

1. *Se $\alpha + \sigma < 1$ então $u \in C^{0,\alpha+\sigma}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$||u||_{C^{0,\alpha+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(||u||_{L^\infty} + ||f||_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}\right);$$

2. *Se $1 < \alpha + \sigma < 2$ então $u \in C^{1,\alpha+\sigma-1}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$||u||_{C^{1,\alpha+\sigma-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(||u||_{L^\infty} + ||f||_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}\right);$$

3. *Se $2 < \alpha + \sigma < 3$ então $u \in C^{2,\alpha+\sigma-2}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$||u||_{C^{2,\alpha+\sigma-2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(||u||_{L^\infty} + ||f||_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}\right),$$

*onde a constante C depende apenas de $n, \sigma$ e $\alpha$.*

É comum dizer que a função $u$ que satisfaz as consequências acima ser de classe $C^{\sigma+\alpha}$.

# APÊNDICE C – Resultados Auxiliares

Este Apêndice será dedicado a apresentação de resultados auxiliares que serão usados ao longo do texto. Algumas demonstrações serão apresentadas por completude.

O seguinte Lema é essencial no Teorema (1.7) no qual iteramos a Estimativa $C^\alpha$ para os quocientes incrementais. Este Lema pode ser encontrado na seção 5.3 de (CABRÉ; CAFFARELLI, 1995)(Lema 5.6).

**Lema C.1.** *Sejam* $0 < \alpha 1$, $0 < \beta \leq 1$ *e* $K > 0$ *constantes. Seja* $u \in L^\infty([-1,1])$ *que satisfaz* $||u||_{L^\infty([-1,1])} \leq K$. *Defina, para* $h \in \mathbb{R}$ *com* $0 < |h| \leq 1$,

$$v_{\beta,h}(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^\beta},$$

*para* $x \in I_h = [-1, 1-h]$ *se* $h > 0$ *e* $[-1-h, 1]$ *se* $h < 0$. *Suponha que* $v_{\beta,h} \in C^\alpha(I_h)$ *e* $||v_{\beta,h}||_{C^\alpha(I_h)} \leq K$ *para qualquer* $0 < |h| \leq 1$. *Então, temos*

- *Se* $\alpha + \beta < 1$ *então* $u \in C^{\alpha+\beta}([-1,1])$ *com*

$$||u||_{C^{\alpha+\beta}([-1,1])} \leq CK,$$

- *Se* $\alpha + \beta \geq 1$ *então* $u \in C^{0,1}([-1,1])$ *com*

$$||u||_{C^{0,1}([-1,1])} \leq CK.$$

*As constantes* $C$ *nos itens acima dependem apenas de* $\alpha + \beta$.

*Demonstração.* Primeiro note que, sem perda de generalidade, podemos assumir que é suficiente limitar $|u(x+\epsilon) - u(x)|$ para $-1 \leq x \leq 0$, $\epsilon > 0$ e $x + \epsilon \leq 1$, pois o problema é simétrico com respeito a mudança de variável $x \to -x$.

Considere $i \in \mathbb{N}$ de tal forma que $x + 2^i\epsilon \leq 1 < x + 2^i\epsilon$ e defina $\tau_0 = 2^i\epsilon$. Daí, segue que $-1 \leq x < x + \tau_0 \leq 1$ e $1/2 \leq \tau_0 \leq 2$, uma vez que

$$\begin{aligned} 1 < x + 2^{i+1}\epsilon = x + 2\tau_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tau_0 > \tfrac{1-x}{2} \geq 1/2 \quad \text{e} \\ x + \tau_0 = x + 2^i\epsilon \leq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tau_0 \leq 1 - x \leq 2. \end{aligned}$$

Defina

$$w(\tau) = u(x+\tau) - u(x), 0 < \tau \leq \tau_0.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left|w(\tau) - 2w\left(\frac{\tau}{2}\right)\right| &= \left|u(x+\tau) - u(x) - 2u\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + 2u(x)\right| \\
&= \left|u(x+\tau) - u\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + u(x) - u\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right| \\
&= \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\beta}\left|v_{\beta,\frac{\tau}{2}}\left(x+\frac{\tau}{2}\right) - v_{\beta,\frac{\tau}{2}}(x)\right| \\
&\leq \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\beta} K\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\alpha} \\
&= K\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\alpha+\beta},
\end{aligned}
$$

onde usamos a hipótese de $||v_{\beta,h}||_{C^{\alpha}(I_h)} \leq K$. Portanto, segue que

$$
\begin{aligned}
\left|2^{i-1}w\left(\frac{\tau_0}{2^{i-1}}\right) - 2^{i}w\left(\frac{\tau_0}{2^{i}}\right)\right| &= 2^{i-1}\left|w\left(\frac{\tau_0}{2^{i-1}}\right) - 2w\left(\frac{\tau_0}{2^{i}}\right)\right| \\
&\leq 2^{i-1}K\left(\frac{\tau_0}{2^{i}}\right)^{\alpha+\beta} \\
&= \frac{1}{2^{\alpha+\beta}}K2^{(i-1)(1-(\alpha+\beta))}\tau_0^{\alpha+\beta},
\end{aligned}
$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
|w(\tau_0) - 2^{i}w(\epsilon)| &= |w(\tau_0) - 2^{i}w(2^{-i}\tau_0)| \\
&\leq |w(\tau_0) - 2w(2^{-1}\tau_0)| + |2w(2^{-1}\tau_0) - 2^{2}w(2^{-2}\tau_0)| + \dots \\
&\quad + |2^{i-1}w(2^{-(i-1)}\tau_0) - 2^{i}w(2^{-i}\tau_0)| \\
&= \sum_{j=1}^{i}|2^{j-1}w(2^{-(j-1)}\tau_0) - 2^{j}w(2^{-j}\tau_0)| \\
&\leq \frac{1}{2^{\alpha+\beta}}K\tau_0^{\alpha+\beta}\sum_{j=1}^{i}2^{(j-1)(1-(\alpha+\beta))}.
\end{aligned}
$$

Como $1/2 \leq \tau_0 \leq 2$, temos que $2^{-i} = \epsilon\tau_0^{-1} \leq 2\epsilon$. Além disso, como $||u||_{L^{\infty}[-1,1]} \leq K$, temos

$$
\begin{aligned}
|w(\epsilon)| &\leq |w(\epsilon) - 2^{-i}w(\tau_0)| + 2^{-i}|w(\tau_0)| \\
&\leq 2^{-i}|w(\tau_0)| + 2^{-i}|w(\tau_0) - 2^{i}w(\epsilon)| \\
&\leq 2^{-i}|w(\tau_0)| + 2^{-i}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}K\tau_0^{\alpha+\beta}\sum_{j=1}^{i}2^{(j-1)(1-(\alpha+\beta))} \\
&\leq 4K\epsilon + \epsilon\tau_0^{-1}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}K\tau_0^{\alpha+\beta}\sum_{j=1}^{i}2^{(j-1)(1-(\alpha+\beta))} \\
&= 4K\epsilon + \frac{1}{2^{\alpha+\beta}}K\epsilon\tau_0^{\alpha+\beta-1}\sum_{j=1}^{i}2^{(j-1)(1-(\alpha+\beta))}.
\end{aligned}
$$

Se $\alpha + \beta < 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|w(\epsilon)| &\leq 4K\epsilon + CK\epsilon\tau_0^{\alpha+\beta-1}2^{i(1-(\alpha+\beta))} \\
&= 4K\epsilon + CK\epsilon^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

Se $\alpha + \beta \geq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|w(\epsilon)| &\leq 4K\epsilon + CK\epsilon\tau_0^{\alpha+\beta-1}\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}2^{(j-1)(1-(\alpha+\beta))} \\
&\leq CK\epsilon,
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

Outro resultado que será importante no Capítulo 2 para a construção de uma função barreira é o seguinte

**Lema C.2.** *Dado qualquer* $\sigma_0 \in (0,2)$*, existe um* $\alpha > 0$ *e* $r > 0$ *pequeno tal que a função* $u(x) = ((|x|-1)^+)^\alpha$ *satisfaz* $M^+u(x) \leq 0$ *em* $B_{1+r} \backslash B_1$ *para todo* $\sigma > \sigma_0$*.*

Sua demonstração pode ser encontrada no apêndice do artigo (CAFFARELLI; SILVESTRE, 2011b).

# Importância social

Neste trabalho, estudamos propriedades qualitativas de soluções de equações Íntegro-Diferenciais gerais. O representante canônico das equações que iremos considerar envolve o Laplaciano Fracionário. O estudo de problemas desse tipo é motivado fortemente por suas aplicações em diversas áreas da ciência, como na área de Processamento de Imagens para detectar contornos de objetos na Física Quântica com o movimento Browniano e, em especial, na área da Economia para modelar o preço de ações do mercado financeiro, o qual pode admitir grandes saltos em seus valores. Nesse contexto, esta dissertação é dedicada a entender de forma precisa o comportamento de funções que modelam estes fenômenos.