

Gustavo Alves de Menezes

**EFEITOS DA FORMA DO PULSO NO  
ESPALHAMENTO THOMSON NÃO LINEAR**

São Cristóvão-SE

Dezembro de 2023



Gustavo Alves de Menezes

# **EFEITOS DA FORMA DO PULSO NO ESPALHAMENTO THOMSON NÃO LINEAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal de Sergipe como requisito  
para obtenção do título de Bacharel em Física.

Universidade Federal de Sergipe – UFS  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Stoian Zlatev

São Cristóvão-SE  
Dezembro de 2023

Gustavo Alves de Menezes

# **EFEITOS DA FORMA DO PULSO NO ESPALHAMENTO THOMSON NÃO LINEAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal de Sergipe como requisito  
para obtenção do título de Bacharel em Física.

---

**Prof. Dr. Stoian Zlatev**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Mario Everaldo de Souza**  
Convidado 1

---

**Prof. Dr. Washington Figueiredo**  
Convidado 2

---

**Prof. Dr. Milan Lalic**  
Convidado 3

São Cristóvão-SE  
Dezembro de 2023

# RESUMO

Desde o advento da tecnologia laser na década de 60, a fronteira Clássica-Quântica da Física vem cada vez mais chamando a atenção de especialistas de diversas áreas do conhecimento humano. O espalhamento Compton não linear e seu equivalente de baixa energia, o espalhamento Thomson não linear, são fenômenos característicos desse regime que descrevem a emissão de um fóton após a interação de um elétron com um pulso eletromagnético de alta intensidade e curta duração. Neste trabalho, estudamos a influência do formato desses pulsos no espectro de frequências e probabilidades de transição do fóton emitido através de um formalismo híbrido entre a Teoria Quântica de Campos e a Eletrodinâmica Clássica. São observados deslocamentos de frequências harmônicas e o aparecimento de padrões únicos de ressonância para diferentes durações efetivas e formas dos pulsos, o que implica fortemente a efetividade do uso de modulação nesses feixes óticos para criação de diferentes cenários experimentais na espectroscopia atômica e na física de partículas como um todo. **Palavras-chave:** Espalhamento. Thomson. Compton. Eletrodinâmica. Quântica. Pulso.



# ABSTRACT

Ever since the advent of laser technology in the 60s, the Quantum-Classical frontier has continuously drawn much attention from experts in diverse areas of human knowledge. Nonlinear Compton scattering, and its low energy equivalent, nonlinear Thomson scattering, are characteristic phenomena in this regime that describe the emission of a photon as result of the interaction between an electron and a high intensity electromagnetic pulse of short duration. In this work, we study the influence of the pulse shape on the frequency spectrum and transition probability of the emitted photon through a hybrid formalism between Quantum Field Theory and Classical Electrodynamics. We observe displacements of the harmonic frequency lines and the appearance of unique resonance patterns for the different effective durations and shapes of the pulses, which heavily imply the effectiveness of modulation on these optical beams in order to create different experimental scenarios on atomic spectroscopy and particle physics as a whole.

**Keywords:** Scattering. Thomson. Compton. Electrodynamics. Quantum. Pulse.



# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de valores da duração efetiva dos pulsos. . . . .	39
---	----



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de Feynman de primeira ordem do processo. . . . .	15
Figura 2 – Gráficos para os pulsos retangulares de $N$ ciclos. . . . .	42
Figura 3 – Gráficos do envelope senoidal para $N = 3$ . . . . .	44
Figura 4 – Gráficos do envelope senoidal para $N = 5$ . . . . .	44
Figura 5 – Gráficos do envelope senoidal para $N = 10$ . . . . .	44



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>17</b>
2.1	Ondas eletromagnéticas planas	17
2.2	Soluções de Volkov	19
2.3	Teoria de campos	20
2.3.1	Campos livres	20
2.3.2	Interação	24
<b>3</b>	<b>ESPALHAMENTO</b>	<b>27</b>
3.1	Amplitude de transição	28
3.1.1	Coordenadas de cone de luz	29
3.2	Cinemática	30
3.2.1	Retroespalhamento	31
3.3	Energia transferida por fóton	32
<b>4</b>	<b>PULSOS</b>	<b>33</b>
4.1	Pulso de envelope retangular	34
4.1.1	Caso geral	34
4.1.2	Limite monocromático	35
4.2	Pulso de envelope senoidal	36
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>39</b>
5.1	Análise Espectral	39
5.2	Representação gráfica dos resultados	40
5.2.1	Pulso retangular	41
5.2.2	Pulso de envelope senoidal	43
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>47</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios da física contemporânea é certamente conciliar o regime clássico com o quântico. Nessa região fronteira, lasers, pulsos eletromagnéticos de curtíssima duração e altíssima intensidade, são frequentemente usados em estudos de espectroscopia atômica, espalhamento de partículas, criação de pares, entre outros. Desses processos, um que vem chamando bastante atenção nos últimos anos devido ao número de artigos publicados é o do espalhamento Compton não linear (ver, por exemplo (FEDOTOV et al., 2022; PIAZZA et al., 2012; EHLITZKY; KRAJEWSKA; KAMIŃSKI, 2009)).

Tradicionalmente, o espalhamento Compton (discutido em inúmeros livros textos de TQC, como por exemplo (SREDNICKI, 2007)) consiste no espalhamento de um fóton após a interação com uma partícula eletricamente carregada, geralmente um elétron. É comumente analisado no referencial de repouso da partícula carregada, onde se observa uma alteração na frequência e direção da radiação incidente acompanhado de um recuo da partícula. No limite de baixas energias, denominado espalhamento Thomson (ver, por exemplo, (SREDNICKI, 2007)), o recuo do elétron é praticamente inexistente e o processo se torna completamente elástico. Isso se dá para fótons de comprimento de onda  $\lambda$  muito maiores que o comprimento de onda de Compton  $\lambda_C = \frac{h}{mc}$  (SREDNICKI, 2007), onde  $m$  é a massa do elétron,  $h$  é a constante de Planck e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

No contexto não linear, para um elétron de carga  $e$  negativa, o produto do processo é o mesmo mas o fóton inicial é substituído por um feixe coerente de muitos fótons, geralmente na forma de um pulso curto e intenso, o que torna a probabilidade de espalhamento dependente de forma não linear da amplitude adimensional (NAROZHNYI; FOFANOV, 1996; BOCA; FLORESCU, 2009)

$$a_0 = \frac{|e|a}{mc}, \quad (1.1)$$

onde  $a$  é a amplitude máxima do quadripotencial eletromagnético externo  $\mathcal{A}^\mu$ . A dependência se torna significativa para valores de  $a_0 \geq 1$ , dando origem a efeitos relativísticos (PIAZZA et al., 2012).

Considerando um elétron em repouso,  $a_0 \approx 1$  corresponde à uma intensidade do pulso eletromagnético da ordem de  $10^{18}$  W/cm<sup>2</sup> (NAROZHNYI; FOFANOV, 1996). Com o advento de métodos de criação de pulsos eletromagnéticos ultracurtos como CPA (*Chirped Pulse Amplification*) (STRICKLAND; MOUROU, 1985), a intensidade de lasers óticos vem crescendo cada vez mais, atualmente chegando em  $10^{23}$  W/cm<sup>2</sup> (YOON et al., 2021). Nesse cenário, experimentos recentes (ver, por exemplo, as inúmeras referências de (FEDOTOV et al., 2022)) vem testando efeitos previstos por trabalhos teóricos na área ao longo das décadas, grande parte ainda na década de 60, inspirados pela própria criação do laser (FEDOTOV et al., 2022). No início, foram

usadas ondas monocromáticas para representar os campos externos, como nos trabalhos pioneiros de (BROWN; KIBBLE, 1964) e (NIKISHOV; RITUS, 1964), devido à facilidade analítica do cálculo de observáveis, sendo possível tratar o campo externo de forma exata (FEDOTOV et al., 2022).

Nas décadas recentes, o foco foi posto em modelos mais realistas de lasers, enfim tratando pulsos finitos, grande parte através de métodos de integração numérica (BOCA; FLORESCU, 2009; HARVEY; ILDETON; KING, 2015; KING, 2021), mas também havendo discussões de métodos analíticos em regimes perturbativos (DINU, 2013; SEIPT et al., 2016). Uma das principais abordagens utilizam pulsos descritos por ondas monocromáticas moduladas por envelopes, funções que se extinguem rapidamente e dão ao pulso um caráter aproximadamente monocromático ao longo da sua curta duração (ver, por exemplo, (HEINZL; SEIPT; KÄMPFER, 2010; HARVEY et al., 2012; ANGIOI; MACKENROTH; PIAZZA, 2016)).

Na linguagem da Eletrodinâmica Quântica, o espalhamento Compton é tratado para campos eletromagnéticos de baixa intensidade através da teoria de perturbação de segunda ordem, sendo um dos primeiros resultados relevantes desse formalismo (SREDNICKI, 2007). Para campos externos fortes, um formalismo híbrido é geralmente utilizado onde o elétron é fruto de um campo quantizado que interage com o campo externo clássico. Além disso, a emissão fotônica ao final do processo é descrita pela interação do campo eletrônico e do campo eletromagnético quantizado (BOCA; FLORESCU, 2010). Dessa forma, o campo eletrônico serve como um mediador entre os dois campos eletromagnéticos, não havendo interações diretas entre esses campos. Na figura 1, temos à esquerda o diagrama de Feynman de primeira ordem para o processo, onde as linhas cheias duplicadas simbolizam os elétrons no campo externo e o fóton é representado pela tradicional linha ondulada. À direita, esse diagrama é reinterpretado como a soma de  $\ell$  diagramas, onde  $\ell$  é o número de fótons absorvidos pelo elétron (linha cheia simples).

Nesse contexto, o presente trabalho pretende utilizar a Teoria Quântica de Campos para descrever, de maneira analítica, o efeito da forma de dois tipos de envelope no espalhamento Thomson. A fim de simplificar os cálculos, ignoramos efeitos espinoriais e tratamos como partícula carregada um elétron de spin zero, aqui denominado de selétron (SREDNICKI, 2007), representado por um campo quantizado de Klein-Gordon (ver, por exemplo, (SREDNICKI, 2007)). Além disso, vamos tratar o caso específico de retroespalhamento, onde o fóton emitido viaja na direção contrária à do pulso.

Os capítulos 2 e 3 abordam fundamentos teóricos da Teoria Quântica de Campos e da Eletrodinâmica Quântica de Campos Fortes, enquanto os capítulos 4 e 5 são reservados para o desenvolvimento dos cálculos e resultados da espectroscopia do processo.

Por último, grande parte das convenções notacionais segue as apresentadas em (SREDNICKI, 2007). O tensor métrico de Minkowski é da forma  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  e o produto interno no espaço de Minkowski entre dois quadrivetores quaisquer  $x^\mu$  e  $y^\mu$  é muitas vezes

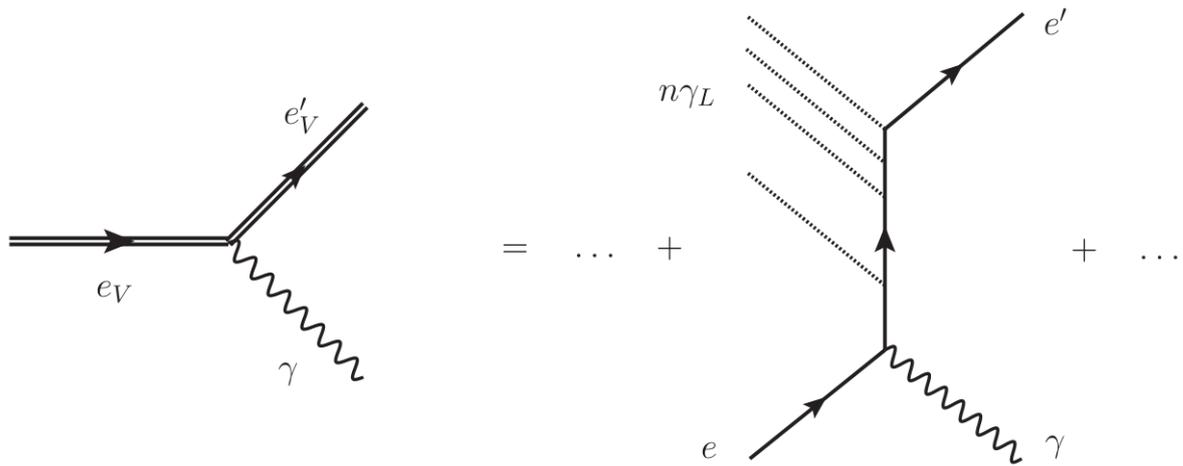


Figura 1 – Diagrama de Feynman de primeira ordem do processo.

Fonte: (HEINZL; SEIPT; KÄMPFER, 2010).

representado por  $xy := x_\mu y^\mu$ . Enquanto isso, trivetores espaciais são representados por letras não italicizadas em negrito  $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ . Ademais, são utilizadas as unidades naturais:  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  é a constante reduzida de Planck. Nesse contexto, a carga elétrica  $e < 0$  é uma grandeza negativa determinada pela constante de estrutura fina  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ . Ocasionalmente, o símbolo  $e$  também representa o número de Euler  $e \approx 2.71828$ , porém a distinção se torna nítida devido ao contexto.



## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A primeira seção deste capítulo trata o formalismo covariante do campo eletromagnético, discutido em vários livros (por exemplo, (LANDAU; LIFSHITZ, 1980)) e de grande familiaridade entre os físicos. Apesar de bastante conhecido, sua inserção neste trabalho é útil para a introdução de parte da notação que será usada ao longo do texto.

### 2.1 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS PLANAS

Na teoria da relatividade restrita, o campo eletromagnético clássico é tradicionalmente posto em uma forma covariante em relação às transformações de Lorentz (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) através do uso do quadripotencial eletromagnético  $A^\mu$ , dado pelas relações:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}.\end{aligned}$$

O rotacional quadridimensional do quadripotencial, o chamado tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

nos permite escrever as equações de Maxwell na forma covariante:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu, \quad (2.1)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $J^\mu$  é a quadricorrente geradora do campo. Dada uma função escalar qualquer  $\Lambda$ , dependente apenas das coordenadas  $x$ , é possível perceber que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são invariantes a transformações da forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda.$$

Essa liberdade é chamada de invariância de calibre. A fim de eliminarmos essa redundância, "fixamos o calibre", ou seja, escolhemos  $\Lambda$  de forma a determinarmos  $A^\mu$  de maneira unívoca. Por exemplo, no calibre de Lorenz, escolhemos  $\Lambda$  de forma que a quadridivergência de  $A^\mu$  seja nula:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.3)$$

Dessa maneira, expandindo a equação (2.1), notamos que as componentes do quadripotencial passam a obedecer às equações de onda não homogêneas:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -J^\nu. \quad (2.4)$$

Na ausência de interações ( $J^\mu = 0$ ), qualquer solução das equações diferenciais lineares acima pode ser decomposta em uma combinação linear dos modos de vibração do sistema. Esses modos são compostos por ondas planas monocromáticas de quadrimomento  $k^\mu$ , ou seja, senóides que dependem das coordenadas apenas na forma invariante  $kx$ , onde  $k^\mu$  obedece ao vínculo relativístico:

$$k^2 = 0. \quad (2.5)$$

Para cada valor de  $k^\mu$ , temos um modo normal de vibração dado pela combinação:

$$u_k(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}, \quad (2.6)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

Assim, uma solução possível das equações de Maxwell que obedece o calibre de Lorenz é o quadripotencial

$$A^\mu = c_1 \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu e^{ikx}, \quad (2.7)$$

onde  $c_1$  é novamente uma constante arbitrária e os quadrivetores de polarização  $\epsilon_\lambda^\mu$  formam uma base no espaço de Minkowski. Substituindo o quadripotencial  $A^\mu$  em (2.3), temos a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\sum_{\lambda=0}^3 k \epsilon_\lambda = 0. \quad (2.8)$$

O vínculo acima elimina um grau de liberdade no espaço dos quadrivetores de polarização possíveis do campo, mas não os determina univocamente. Se fizermos a substituição  $\epsilon_\lambda^\mu \rightarrow \epsilon_\lambda^\mu + c_3 k^\mu$  (para  $c_3$  arbitrário), a equação (2.8) acima ainda é satisfeita devido ao vínculo relativístico  $k^2 = 0$ . Percebemos então que ainda há um grau de liberdade redundante, o qual podemos eliminar ao escolhermos, por exemplo,  $A^0 = 0$ . Essa restrição somada ao calibre de Lorenz é geralmente chamada de calibre de radiação. Como consequência, a equação (2.8) se torna

$$\sum_{\lambda=0}^3 \mathbf{k} \cdot \epsilon_\lambda = 0. \quad (2.9)$$

Logo, só existem dois quadrivetores de polarização independentes possíveis para uma dada onda plana eletromagnética.

Para descrever a ação de lasers, necessitamos de pulsos, ondas de duração finita. Como mencionado, qualquer pulso pode ser descrito como uma superposição de infinitas ondas planas monocromáticas. Alternativamente, pulsos de lasers podem ser aproximados por uma única onda plana monocromática, modulada por um função  $\psi$  que extingue a onda fora de um intervalo  $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ , onde  $\tau$  é a duração efetiva do pulso.

Em outras palavras, dada uma senoide de fase  $-kx$ , podemos formar um pulso finito ao multiplicá-la por uma função  $\psi(-nx)$  de suporte compacto  $\text{supp}(\psi) = [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ , onde

$$n^\mu = \frac{k^\mu}{\omega}, \quad (2.10)$$

e  $\omega$  é a frequência característica do pulso, dada por

$$\omega = |\mathbf{k}|. \quad (2.11)$$

Essa função, chamada de envelope, altera a forma da senoide no intervalo de duração do pulso, sendo objeto de análise desse trabalho, como veremos mais a frente.

## 2.2 SOLUÇÕES DE VOLKOV

Sob a presença de um quadripotencial eletromagnético externo qualquer  $\mathcal{A}^\mu(x)$ , a equação de Klein-Gordon toma a seguinte forma (BERESTETSKII; LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1982):

$$(-D^2 + m^2)\phi = 0, \quad (2.12)$$

onde  $\phi(x)$  é um campo clássico de Klein-Gordon e  $D^\mu$  é a derivada covariante:

$$D^\mu = \partial^\mu - ie\mathcal{A}^\mu. \quad (2.13)$$

No caso de um campo externo de onda plana, o quadripotencial depende das coordenadas espaço-temporais na forma  $\xi = -nx$ , onde  $n^\mu$  é um quadrivetor do tipo luz:

$$n^2 = 0.$$

Além disso, o quadripotencial satisfaz a condição de Lorenz (2.3):

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = -n_\mu \frac{d\mathcal{A}^\mu}{d\xi} = 0. \quad (2.14)$$

Sem perda de generalidade, o termo constante em  $\mathcal{A}^\mu$  pode ser ignorado e assim, temos a seguinte relação de ortogonalidade:

$$n\mathcal{A} = 0. \quad (2.15)$$

Buscamos soluções da forma:

$$\phi_{\mathbf{p}}(\pm; x) = e^{\pm ipx} f_{\mathbf{p}}(\pm; \xi), \quad (2.16)$$

onde o quadrivetor  $p^\mu$  está na camada de massa:  $p^2 = -m^2$ . Essa equação representa uma função de onda de Klein-Gordon que é modificada por uma fase oriunda da interação com o campo externo. Como condição de contorno, a função acima deve tender a uma função de onda de uma partícula livre de quadrimomento  $p^\mu$  no limite  $\xi \rightarrow \xi_0$ :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \phi_{\mathbf{p}}(\pm; x) = e^{\pm ipx}. \quad (2.17)$$

O sinal positivo ou negativo indica se a solução livre contém somente energias positivas ou negativas, respectivamente.

Substituindo (2.16) em (2.12) e fazendo uso de (2.14) e (2.15), temos:

$$\pm 2in p \frac{df_{\mathbf{p}}(\pm; \xi)}{d\xi} + (e^2 \mathcal{A}^2 \mp 2e\mathcal{A}p) f_{\mathbf{p}}(\pm; \xi) = 0,$$

cuja solução é:

$$f_{\mathbf{p}}(\pm; \xi) = \exp \left[ \frac{i}{np} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \left( -ep\mathcal{A} \pm \frac{e^2 \mathcal{A}^2}{2} \right) \right], \quad (2.18)$$

para  $\xi_0$  arbitrário. Para facilitar a notação, definimos as funções  $F_{\mathbf{p}}(\pm; \xi)$  como

$$F_{\mathbf{p}}(\pm; \xi) - F_{\mathbf{p}}(\pm; \xi_0) := \frac{i}{np} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \left( -ep\mathcal{A} \pm \frac{e^2 \mathcal{A}^2}{2} \right), \quad (2.19)$$

e assim, temos as chamadas soluções (ou funções) de Volkov (VOLKOV, 1935):

$$\phi_{\mathbf{p}}(\pm; x) = \exp \left[ \pm ipx + F_{\mathbf{p}}(\pm; -nx) - F_{\mathbf{p}}(\pm; \xi_0) \right]. \quad (2.20)$$

Tratando a equação de Klein Gordon (2.12) como uma equação de autovalor do operador  $P^\mu = -i\partial^\mu$  no espaço Hilbert de uma única partícula (BERESTETSKII; LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1982), podemos determinar as relações de conservação do quadrimomento inicial  $p^\mu$  do selétron. Como exemplo ilustrativo (NIKISHOV; RITUS, 1964), tomemos o trivetor  $\mathbf{n}$  paralelo ao eixo  $z$ ,  $\mathcal{A}^\mu$  linearmente polarizado ao longo do eixo  $x$  e  $\mathcal{A}^0 = 0$ . Nesse referencial especial, a função de Volkov é autofunção dos operadores  $P^1$ ,  $P^2$  e da combinação  $-n_\mu P^\mu = P^0 - P^3$ . Isso implica na conservação dos respectivos autovalores  $p^1$ ,  $p^2$  e  $p^0 - p^3$ , já que esses operadores comutam com o operador de Klein Gordon (2.12). A energia  $p^0$  e o momento  $p^3$  não são individualmente conservados, o que é característico da interação com um campo externo.

Por fim, as soluções de Volkov são ortogonais sob o chamado produto interno de Klein-Gordon (BOCA, 2011):

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathbf{p}'}(\chi'; x), \phi_{\mathbf{p}}(\chi; x) \rangle &= \int d^3x \phi_{\mathbf{p}'}^*(\chi'; x) (i\overleftrightarrow{\partial}_0 + 2e\mathcal{A}_0) \phi_{\mathbf{p}}(\chi; x) \\ &= 2p^0 (2\pi)^3 \chi \delta_{\chi\chi'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Além disso, elas também são completas no espaço de Hilbert sob o mesmo produto interno (BOCA, 2011).

## 2.3 TEORIA DE CAMPOS

### 2.3.1 CAMPOS LIVRES

A densidade Lagrangiana de Klein-Gordon  $\mathcal{L}_e$  do selétron em um campo externo é da seguinte forma (FRADKIN; GITMAN; SHVARTSMAN, 1991):

$$\mathcal{L}_e = -(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi. \quad (2.22)$$

Na equação acima, supomos que o campo externo seja livre e obedeça as equações de Maxwell na forma:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0,$$

onde  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu$ . Em outras palavras, assumimos que ele não seja gerado por nenhuma corrente oriunda do sistema analisado. Isso justifica a ausência de um termo dependente de  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  para o campo externo na Lagrangiana.

Antecipando o caso quântico, vamos considerar os campos escalares  $\Phi$  e  $\Phi^*$  como os únicos campos dinâmicos do sistema, tratando, após a quantização, o campo externo como um campo clássico. Desse modo, após a habitual transformação de Legendre, obtemos a densidade Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_e = \Pi^* \Pi + ie\mathcal{A}_0(\Pi\Phi - \Pi^*\Phi^*) + \Phi^*(-\mathbf{D}^2 + m^2)\Phi, \quad (2.23)$$

onde

$$\Pi = (D_0\Phi)^* = (\partial_0 + ie\mathcal{A}_0)\Phi^*, \quad (2.24)$$

é a densidade de momento canônico.

Para um dado instante  $t = x^0$ , o conjunto de funções de Volkov (2.20) é completo (BOCA, 2011) e podemos decompor o campo  $\Phi$  e o seu conjugado complexo  $\Phi^*$  em uma soma dessas funções (FRADKIN; GITMAN; SHVARTSMAN, 1991). No caso de espalhamento, estamos interessados, como condições de contorno, o passado distante ( $t \rightarrow -\infty$ ) e o futuro distante ( $t \rightarrow \infty$ ), onde assumimos que a partícula não se encontra mais sob a influência do campo externo. Nesses respectivos instantes temporais, temos  $\xi_0 = n^0 t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \mp\infty$ , assumindo que o trivetor  $\mathbf{x}$  seja finito (BOCA, 2011).

Neste trabalho, representaremos as funções de Volkov por índices no lado inferior esquerdo para as funções no passado ( $\pm\phi_{\mathbf{p}}$ ), e no lado superior esquerdo para o futuro ( $\pm\phi_{\mathbf{p}}$ ). Novamente, a diferença de sinais representa a diferença no sinal da energia da função assintótica (2.17) que representa a partícula livre no respectivo extremo temporal.

Impondo a relação de comutação canônica em tempos iguais

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.25)$$

obtemos, no instante  $t_{\text{in}} := t \rightarrow -\infty$ , a seguinte expansão dos campos escalares (aqui chamados de campos de Volkov) na representação de Schrödinger ( $t = 0$ ):

$$\Phi(\mathbf{x}, 0) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}(t_{\text{in}})_+ \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, 0) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(t_{\text{in}})_- \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, 0) \right], \quad (2.26)$$

$$\Phi^\dagger(\mathbf{x}, 0) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger(t_{\text{in}})_+ \phi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}, 0) + b_{\mathbf{p}}(t_{\text{in}})_- \phi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}, 0) \right]. \quad (2.27)$$

Nas equações acima,  $p^0$  está implicitamente na camada de massa  $p^0 = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$ .

A transição para a representação de Heisenberg é então feita através da transformação unitária

$$\Phi(x) = U_e^\dagger(t, 0)\Phi(\mathbf{x}, 0)U_e(t, 0), \quad (2.28)$$

onde  $U_e(t, t_0)$  é o operador de evolução temporal

$$U_e(t, t_0) = \mathbf{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' \int d^3x \mathcal{H}_e(t') \right] \right\}. \quad (2.29)$$

Na expressão acima, o operador de ordenamento temporal  $\mathbf{T}$  (SREDNICKI, 2007) se faz necessário devido à dependência temporal explícita de  $\mathcal{H}_e$ . Assim, os campos de Volkov na representação de Heisenberg são:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}(\text{in})_+ \phi_{\mathbf{p}}(x) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{in})_- \phi_{\mathbf{p}}(x) \right], \quad (2.30)$$

$$\Phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{in})_+ \phi_{\mathbf{p}}^*(x) + b_{\mathbf{p}}(\text{in})_- \phi_{\mathbf{p}}^*(x) \right], \quad (2.31)$$

ou, analogamente para  $t_{\text{out}} := t \rightarrow \infty$ :

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}(\text{out})^+ \phi_{\mathbf{p}}(x) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{out})^- \phi_{\mathbf{p}}(x) \right], \quad (2.32)$$

$$\Phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{out})^+ \phi_{\mathbf{p}}^*(x) + b_{\mathbf{p}}(\text{out})^- \phi_{\mathbf{p}}^*(x) \right], \quad (2.33)$$

onde\* (FRADKIN; GITMAN; SHVARTSMAN, 1991)

$$a_{\mathbf{p}}(\text{in}) := U_e^\dagger(t_{\text{in}}, 0)a_{\mathbf{p}}(t_{\text{in}})U_e(t_{\text{in}}, 0), \quad (2.34)$$

$$a_{\mathbf{p}}(\text{out}) := U_e^\dagger(t_{\text{out}}, 0)a_{\mathbf{p}}(t_{\text{out}})U_e(t_{\text{out}}, 0). \quad (2.35)$$

Como se pode notar, podemos decompor o campo em função tanto de operadores de aniquilação e criação que atuam no passado distante ou no futuro distante. Porém, utilizando as relações de ortogonalidade (2.21), percebemos que operadores da mesma espécie em instantes distintos diferem um do outro apenas por uma fase constante:

$$a_{\mathbf{p}}(\text{out}) = a_{\mathbf{p}}(\text{in}) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \exp\{i[F_{\mathbf{p}}(+; \xi) - F_{\mathbf{p}}(+; -\xi)]\},$$

$$b_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{out}) = b_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{in}) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \exp\{-iF_{\mathbf{p}}(-; \xi) - F_{\mathbf{p}}(-; -\xi)\}.$$

Como veremos mais a frente, no cálculo da probabilidade de transição do processo, o termo mensurável não é proporcional à amplitude em si, mas ao quadrado do seu módulo. Qualquer fase constante  $C$  proveniente desses operadores pode ser facilmente fatorada para fora da amplitude  $S_{fi}$ :

$$S_{fi} \rightarrow e^{iC} S_{fi},$$

\* O análogo vale para os operadores  $b_{\mathbf{p}}$ .

sem interferir no valor do módulo da mesma. Podemos, desde já, descartar essas fases adicionais. Dessa maneira, temos uma representação válida para os dois extremos temporais:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}(\text{in})\phi_{\mathbf{p}}(x) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{in})\phi_{\mathbf{p}}(x) \right], \quad (2.36)$$

$$\Phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger(\text{in})\phi_{\mathbf{p}}^*(x) + b_{\mathbf{p}}(\text{in})\phi_{\mathbf{p}}^*(x) \right], \quad (2.37)$$

onde

$$\phi_{\mathbf{p}}(x) = \exp[ipx + iF_{\mathbf{p}}(\xi)],$$

$$F_{\mathbf{p}}(\xi) := F_{\mathbf{p}}(+; \xi).$$

Para facilitar ainda mais a notação, a partir daqui, vamos omitir os índices "in" dos operadores de aniquilação e criação dos campos de Volkov acima. Por último, através da relação de comutação canônica (2.25), obtemos as seguintes relações de comutação para esses operadores:

$$[a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = 2p^0(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.38)$$

$$[b_{\mathbf{p}'}, b_{\mathbf{p}}^\dagger] = 2p^0(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.39)$$

Enquanto isso, o campo eletromagnético convencional segue a quantização no calibre de radiação (SREDNICKI, 2007):

$$A^0 = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

$$[A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] = i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

resultando em:

$$\mathcal{H}_\gamma = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}^2 - \mathbf{A} \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) \right), \quad (2.40)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \left[ c_{\mathbf{k}}^\lambda (\epsilon_\mu^\lambda)^* e^{ikx} + (c_{\mathbf{k}}^\lambda)^\dagger \epsilon_\mu^\lambda e^{-ikx} \right], \quad (2.41)$$

onde os dois quadrivetores de polarização  $\epsilon_\mu^1$  e  $\epsilon_\mu^2$  são ortonormais

$$\epsilon_\mu^1 \epsilon^{2,\mu} = 0,$$

$$\epsilon_\mu^1 \epsilon^{1,\mu} = \epsilon_\mu^2 \epsilon^{2,\mu} = 1.$$

Além disso,  $k^0$  obedece implicitamente  $k^0 = |\mathbf{k}|$ . Finalmente, os operadores de aniquilação e criação desse campo obedecem à seguinte relação de comutação:

$$[c_{\mathbf{k}'}^{\lambda'}, (c_{\mathbf{k}}^\lambda)^\dagger] = 2k^0(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.42)$$

### 2.3.2 INTERAÇÃO

O sistema dinâmico completo envolvendo o campo de Volkov e o campo eletromagnético quantizado é descrito pela Hamiltoniana:

$$H(t) = \int d^3x [\mathcal{H}_e(t) + \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_{\text{int}}(t)]. \quad (2.43)$$

Na equação acima,  $\mathcal{H}_e$  descreve a dinâmica do campo escalar e corresponde à densidade Hamiltoniana (2.23).  $\mathcal{H}_\gamma$  representa a parte livre (2.40) do campo eletromagnético quantizado e  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ , a parte de maior interesse, representa a interação desse campo com o campo de Volkov.

Para simplificar o tratamento dessa última interação, utilizamos a chamada representação de Furry (FURRY, 1951), um caso particular da representação de Dirac para campos quantizados sob a ação de um campo clássico externo. Nessa representação, os campos escalares  $\Phi_F$  e  $\Phi_F^\dagger$  e o campo eletromagnético  $A_F^\mu$  correspondem aos respectivos operadores na representação de Heisenberg sem a presença da interação  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ :

$$\Phi_F(x) = U_e^\dagger(t, 0)\Phi(\mathbf{x}, 0)U_e(t, 0), \quad (2.44)$$

$$A_F^\mu(x) = U_\gamma^\dagger(t)A^\mu(\mathbf{x}, 0)U_\gamma(t), \quad (2.45)$$

onde

$$U_\gamma(t - t_0) = \exp\left[-i(t - t_0) \int d^3x \mathcal{H}_\gamma\right].$$

A conexão entre a representação de Heisenberg e a de Furry é dada pelas relações:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = S^\dagger(t, t_0)\Phi_F(\mathbf{x}, t_0)S(t, t_0), \quad (2.46)$$

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = S^\dagger(t, t_0)A_F^\mu(\mathbf{x}, t_0)S(t, t_0). \quad (2.47)$$

O operador  $S$ ,

$$S(t, t_0) = \text{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int},F}(t') \right] \right\}, \quad (2.48)$$

onde

$$H_{\text{int},F}(t) = U_\gamma^\dagger(t)U_e^\dagger(t, 0)H_{\text{int}}(0)U_e(t, 0)U_\gamma(t),$$

conduz a evolução temporal dos autoestados de momento na nova representação.

A partir daqui, todos os operadores estarão implicitamente na representação de Furry, a menos quando indicado. Logo, omitiremos os índices  $F$ .

Antes de voltarmos ao formalismo Lagrangiano, uma última simplificação: impomos que o campo externo também obedeça ao calibre de radiação:

$$\mathcal{A}^0 = \nabla \cdot \mathcal{A} = 0. \quad (2.49)$$

Consequentemente, a densidade de momento canônico (2.24) do campo de Volkov passa a ser igual à densidade de momento cinético:

$$\Pi = \partial_0 \Phi^\dagger.$$

Dessa forma, temos:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}} = -eA_\mu J^\mu + e^2 A^2 \Phi^\dagger \Phi, \quad (2.50)$$

onde

$$J^\mu = -i \left[ \Phi^\dagger D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^\dagger \Phi \right], \quad (2.51)$$

é a quadricorrente de Noether (ver, por exemplo ([SREDNICKI, 2007](#))) associada ao campo de Volkov.



### 3 ESPALHAMENTO

O caso de interesse envolve o espalhamento de um selétron, um elétron escalar, em um campo externo de onda plana, tendo como resultado a emissão de um fóton. Sem campo externo, essa interação só é possível se pelo menos uma das três partículas (selétron inicial, final ou fóton emitido) não estiver na camada de massa, ou seja, se a interação é uma subdivisão de um processo maior (SREDNICKI, 2007). Caso contrário, por simetria, poderíamos ter o processo análogo onde um selétron e um antiselétron são criados a partir de um fóton de massa total  $2m$  (HEINZL; ILDETON, 2008). Isso viola a lei da conservação de energia-momento. Na presença do campo externo, o mesmo fornece a energia necessária para o processo (BERESTETSKII; LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1982).

Dado um estado inicial  $|i\rangle$  e um estado final  $|f\rangle$  quaisquer, ambos estados compostos por produtos tensoriais de estados de partículas (assintoticamente) livres no espaço de Fock, a probabilidade diferencial de transição é dada por

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} d\Pi, \quad (3.1)$$

onde

$$S_{fi} := \langle f|S|i\rangle \quad (3.2)$$

é a amplitude de transição entre esses dois estados. O termo  $d\Pi$  representa uma parte infinitesimal de uma região do espaço de fase contendo os respectivos momentos das partículas no estado final do espalhamento. Para termos um resultado mensurável e probabilístico, a integral de  $d\Pi$  na totalidade dessa região deve ser 1. É necessário então impormos condições periódicas aos valores dos momentos finais ou, de forma equivalente, confiná-los a uma região cúbica finita  $V$ :

$$d\Pi = \prod_i^N \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_i, \quad (3.3)$$

onde  $N$  é o número final de partículas. Com essa restrição, a delta de Dirac tridimensional se transforma em uma delta de Kronecker:

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} d^3x = V\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$$

Esse formalismo dá sentido ao produto interno dos autoestados, que apresentam deltas de Dirac com argumento zero, como se pode notar ao analisarmos um estado de partícula única qualquer utilizando as relações de comutação (2.38):

$$\langle p|p\rangle = \langle 0|a_p a_p^\dagger|0\rangle = 2p^0(2\pi)^3\delta^3(0) \rightarrow 2p^0(2\pi)^3V.$$

Na relação acima, foi utilizado o fato de que a norma do estado de vácuo  $|0\rangle$  é 1.

Dito tudo isso, ainda não temos uma quantidade mensurável. Tradicionalmente, para um processo de espalhamento de uma partícula em duas, a quantidade utilizada é a taxa temporal de transição (mais especificamente, de decaimento):

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{T}, \quad (3.4)$$

onde  $T$  é a duração total da interação, considerada finita, de modo análogo a localização do processo em um volume finito  $V$ . Esse formalismo é adequado quando se há conservação da energia, visto que o fator  $T$  é eliminado por outro fator  $T$  decorrente de uma delta de Dirac correspondente.

Como foi visto anteriormente na seção 2.2, não há conservação da energia nem do momento na direção do trivetor  $\mathbf{n}$ . Por isso, uma alternativa à equação (3.4) se torna necessária. Seguindo (BOCA; FLORESCU, 2010) e (ANGIOI; MACKENROTH; PIAZZA, 2016), nota-se que a diferencial de probabilidade do processo pode ser vista como a razão entre a energia transferida do campo externo aos campos quânticos e a energia  $\omega'$  por fóton emitido:

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{dW}{\omega'}. \quad (3.5)$$

A energia transferida  $dW$  é mensurável e não depende explicitamente do tempo. Essa será a grandeza a ser calculada.

### 3.1 AMPLITUDE DE TRANSIÇÃO

O elemento  $S_{fi}$  da matriz  $S$  é a chamada amplitude de transição entre os estados  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$ . No caso a ser estudado, temos um selétron (assintoticamente) livre no estado inicial e no estado final, um selétron e um fóton (assintoticamente) livres. Na representação de furry, essas partículas são representadas pelos seguintes estados de momento:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |\mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle, \\ |f\rangle &= |\mathbf{p}'\rangle \otimes |\mathbf{k}', \lambda\rangle = a_{\mathbf{p}'}^{\dagger} (c_{\mathbf{k}'}^{\lambda})^{\dagger} |0\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando as relações acima e a equação (2.48), temos a amplitude:

$$S_{fi} = \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | S | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{k}'}^{\lambda} \mathbf{T} \left\{ \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \right] \right\} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle. \quad (3.6)$$

Depois, substituímos a forma explícita da Lagrangiana (2.50) em (3.6) e expandimos perturbativamente a exponencial em potências da carga elétrica  $e$  até a primeira ordem:

$$S_{fi} = \langle 0 | a_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{k}'}^{\lambda} \mathbf{T} \left\{ \int d^4x (\mathbb{1} + ieA_{\mu} J^{\mu}) \right\} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle + O(e^2).$$

O operador identidade  $\mathbb{1}$  representa o espalhamento ausente de interação e, como mencionado, esse processo não é físico. Assim, desconsideramos esse termo. Temos, então:

$$S_{fi} \rightarrow \langle f | S - \mathbb{1} | i \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{k}'}^{\lambda} \mathbf{T} \left\{ \int d^4x (ieA_{\mu} J^{\mu}) \right\} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle + O(e^2).$$

Introduzindo a corrente (2.51) e a partir daqui omitindo o fator de ordem  $O(e^2)$ , temos:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\rightarrow \langle 0 | a_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{k}'}^\lambda \int d^4x e A_\mu \mathbf{N} \{ \Phi^\dagger D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^\dagger \Phi \} a_{\mathbf{p}}^\dagger | \text{in} \rangle | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{k}'}^\lambda \int d^4x i e A_\mu \mathbf{N} \{ \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi)^\dagger \Phi - 2i e \mathcal{A}^\mu \Phi^\dagger \Phi \} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned}$$

No cálculo acima foi utilizado o Teorema de Wick, substituindo o produto de ordenamento temporal T pelo respectivo produto de ordenamento normal N (SREDNICKI, 2007). As contrações dos campos não influenciam a amplitude em primeira ordem e, conseqüentemente, foram descartadas.

Com a ajuda das relações de comutação (2.38) e (2.42), obtemos:

$$S_{fi} = e \epsilon_\mu^\lambda \int d^4x e^{-ik'x} \left[ \phi_{\mathbf{p}'}^* \partial^\mu (\phi_{\mathbf{p}}) - \phi_{\mathbf{p}} \partial^\mu (\phi_{\mathbf{p}'}^*) - 2i e \mathcal{A}^\mu (\phi_{\mathbf{p}'}^* \phi_{\mathbf{p}}) \right].$$

Após a diferenciação, temos:

$$\begin{aligned} S_{fi} = i e \epsilon_\mu^\lambda \int d^4x e^{-ik'x} \left\{ \left[ p^\mu + \frac{n^\mu}{np} \left( ep\mathcal{A} - \frac{e^2 \mathcal{A}^2}{2} \right) + (p \leftrightarrow p') \right] \right. \\ \left. - 2e \mathcal{A}^\mu \right\} (\phi_{\mathbf{p}'}^* \phi_{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.1.1 COORDENADAS DE CONE DE LUZ

Antecipando a escolha do referencial inercial do sistema, vamos fixar o quadrivetor  $n^\mu$  no sentido negativo do eixo  $z$ :

$$n^\mu = (1, 0, 0, -1). \quad (3.8)$$

Conseqüentemente, a variável independente  $\xi$  da fase de Volkov se torna igual à combinação linear  $x^0 + x^3$  (NEVILLE; ROHRLICH, 1971) e o problema é simplificado ao serem utilizadas coordenadas de cone de luz (ver, por exemplo (BRODSKY; PAULI; PINSKY, 1997)). Nessa convenção, as componentes  $x^1$  e  $x^2$ , ditas transversais, permanecem inalteradas, sendo comum utilizar a abreviação  $x^\perp$  ao se referir a um vetor  $(x^1, x^2)$  no subespaço  $\mathbb{R}^2$  com produto interno euclidiano. A partir daqui, a notação para o produto escalar convencional nesse subespaço é:

$$x_\perp y^\perp = x^\perp y^\perp = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

Enquanto isso, as componentes  $x^0$  e  $x^3$  se misturam e dão lugar a novas componentes:

$$\begin{aligned} x^+ &= x^0 + x^3, \\ x^- &= x^0 - x^3, \\ x_\pm &= -\frac{x^\mp}{2}. \end{aligned}$$

Logo, o produto interno no espaço de Minkowski é dado por:

$$\begin{aligned} xy &= x_{\perp}y^{\perp} + x_{+}y^{+} + x_{-}y^{-} \\ &= x^{\perp}y^{\perp} - \frac{1}{2}x^{-}y^{+} - \frac{1}{2}x^{+}y^{-}. \end{aligned}$$

Além disso, o elemento invariante de volume quadrimensional na integral (3.7) se torna:

$$d^4x = \frac{1}{2} d^2x^{\perp} dx^{+} dx^{-}.$$

A amplitude (3.7) se torna então:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{ie}{2} \epsilon_{\mu}^{\lambda} \int d^2x^{\perp} dx^{+} dx^{-} \left\{ \left[ p^{\mu} + \frac{n^{\mu}}{np} \left( ep\mathcal{A}(x^{+}) - \frac{e^2[\mathcal{A}(x^{+})]^2}{2} \right) + (p \leftrightarrow p') \right] \right. \\ &\quad \left. - 2e\mathcal{A}^{\mu}(x^{+}) \right\} \times \exp \left[ ix(p - p' - k') + iF_{\mathbf{p}}(x^{+}) - iF_{\mathbf{p}'}(x^{+}) \right]. \end{aligned}$$

Como o campo externo depende exclusivamente de  $x^{+}$ , as integrais em  $x^{\perp}$  e  $x^{-}$  geram três deltas de Dirac, como mencionado anteriormente. Isolando as deltas, temos a parte perturbativa da matriz  $S$ , geralmente chamada de matriz de transferência, simbolizada por  $\mathcal{T}$  (SREDNICKI, 2007). Podemos então escrever, em primeira ordem em  $e$ :

$$S_{fi} = (2\pi)^3 ie \delta^2(\mathcal{P}^{\perp}) \delta(\mathcal{P}^{+}) \mathcal{T}_{fi}, \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi} &= \int dx^{+} \epsilon_{\mu}^{\lambda} \left\{ \left[ p^{\mu} + \frac{n^{\mu}}{np} \left( ep\mathcal{A}(x^{+}) - \frac{e^2[\mathcal{A}(x^{+})]^2}{2} \right) + (p \leftrightarrow p') \right] \right. \\ &\quad \left. - 2e\mathcal{A}^{\mu}(x^{+}) \right\} \times \exp \left[ \frac{i}{2} \mathcal{P}^{-} x^{+} + iF_{\mathbf{p}}(x^{+}) - iF_{\mathbf{p}'}(x^{+}) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

e

$$\mathcal{P} = p' + k' - p. \quad (3.11)$$

## 3.2 CINEMÁTICA

O referencial mais apropriado para o tratamento do espalhamento Thomson é o referencial de repouso do selétron, onde inicialmente o selétron de quadrimomento

$$p^{\mu} = (m, 0, 0, 0), \quad (3.12)$$

sofre uma colisão direta com um pulso eletromagnético que se propaga ao longo do eixo  $z$ , cujo quadripotencial depende das coordenadas na forma  $-nx = x^{+}$ , como mencionado na seção anterior.

### 3.2.1 RETROESPALHAMENTO

No caso específico de retroespalhamento, o trivetor de onda  $\mathbf{k}'$  do fóton emitido é antiparalelo ao trivetor  $\mathbf{n}$  e seu comprimento é igual à frequência  $\omega'$  desse fóton. Assim, o quadrivetor  $k'^{\mu}$  é da forma:

$$k'^{\mu} = \omega' \tilde{n}^{\mu},$$

onde  $\tilde{n}^{\mu} = (1, 0, 0, 1)$ .

O quadrimomento final do selétron é totalmente determinado pelas relações de conservação e pelo vínculo relativístico  $p'^2 = -m^2$ :

$$\begin{aligned} p'^0 &= m - \omega' \left( 1 - \frac{m}{m - 2\omega'} \right), \\ p'^3 &= -\omega' \left( 1 + \frac{m}{m - 2\omega'} \right), \\ p'^{\perp} &= 0. \end{aligned}$$

De forma geral, para determinado valor de  $\omega'$ , podemos escrever as relações de conservação na forma quadridimensional (FEDOTOV et al., 2022):

$$p^{\mu} + \ell k^{\mu} = p'^{\mu} + k'^{\mu}, \quad (3.13)$$

onde  $k^{\mu} = \omega n$ . O coeficiente adimensional  $\ell$  depende apenas de  $\omega'$  e é univocamente determinado pelas equações cinemáticas anteriores:

$$\ell(\omega') = \frac{\mathcal{P}^-}{2\omega} = \frac{\omega'}{\omega} \frac{m}{m - 2\omega'}. \quad (3.14)$$

Interpretamos esse coeficiente como o número de fótons de frequência  $\omega$  emitidos pelo campo externo, caracterizando o aspecto não-linear do processo (FEDOTOV et al., 2022).

Ademais, como o campo eletromagnético quantizado  $A^{\mu}$  obedece ao calibre de radiação, temos as seguintes relações para os devidos quadrivetores de polarização:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda}^0 &= 0, \\ \tilde{n}\epsilon_{\lambda} &= 0 \rightarrow \epsilon_{\lambda}^3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, o campo eletromagnético quantizado só possui componentes transversais, acarretando nas relações de ortogonalidade:

$$\epsilon_{\lambda} p^{\lambda} = n\epsilon_{\lambda} = 0. \quad (3.15)$$

Essas restrições excluem a dependência do termo linear no campo externo  $\mathcal{A}^{\mu}$  na fase do integrando em (3.10) e retira a parte divergente da integração de termos que não são nulos fora do intervalo  $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ . Usando (3.14), a expressão final do elemento da matriz de transferência (3.10) se torna:

$$\mathcal{T}_{fi} = -2\epsilon_{\lambda}^{\mu} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ \mathcal{A}_{\mu} \exp \left[ i\ell\omega x^+ + iF_{\mathbf{p}}(x^+) - iF_{\mathbf{p}'}(x^+) \right]. \quad (3.16)$$

### 3.3 ENERGIA TRANSFERIDA POR FÓTON

A diferencial de probabilidade (3.1) se torna:

$$dP_{i \rightarrow f} = (2\pi)^6 e^2 [\delta^2(\mathcal{P}^\perp) \delta(\mathcal{P}^+)]^2 \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{k}', \lambda | \mathbf{k}', \lambda \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle} d\Pi \quad (3.17)$$

$$= (2\pi)^3 e^2 \delta^2(\mathcal{P}^\perp) \delta(\mathcal{P}^+) \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{8p^0 p'^0 k'^0 V^2} d\Pi. \quad (3.18)$$

Após substituirmos  $d\Pi$  pela medida de integração correspondente (3.3), os fatores de volume se cancelam:

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \delta^2(\mathcal{P}^\perp) \delta(\mathcal{P}^+) \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{8p^0 p'^0 k'^0} d^3 p' d^3 k' \quad (3.19)$$

As deltas eliminam a dependência em relação ao momento  $p'$ , se integrarmos em relação à medida invariante equivalente na hipersuperfície  $p'^- = 0$  (ANGIOI; MACKENROTH; PIAZZA, 2016):

$$\frac{d^3 p'}{2p'^0} = \frac{d^2 p'^\perp dp'^+}{2p'^+}. \quad (3.20)$$

Dessa forma, a diferencial se torna:

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{8p^0 k'^0 (p^+ - k'^+)} d^3 k', \quad (3.21)$$

onde foi utilizado o fato de que  $p'^+ = p^+ - k'^+$ .

Ao substituirmos  $p^\mu$  e  $k'^\mu$  por suas componentes no referencial de repouso do selétron, obtemos:

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{8m\omega'(m - 2\omega')} d^3 k'$$

Devido ao vínculo  $\omega' = k'^0 = |\mathbf{k}'|$ , a medida é simplificada ao adotarmos coordenadas polares:

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{8m(m - 2\omega')} \omega' d\omega' d\Omega, \quad (3.22)$$

onde

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

é a diferencial do ângulo sólido  $\Omega$ .

Por último, multiplicando a diferencial por  $\omega'$ , temos a diferencial de energia transferida (3.5):

$$\frac{dW}{d\omega' d\Omega} = \frac{\alpha}{(4\pi)^2} \frac{\omega\omega'}{m^2} \ell(\omega') |\mathcal{T}_{fi}|^2, \quad (3.23)$$

onde  $\ell(\omega')$  é o número de fótons emitidos pelo campo externo (3.14) e

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

é a constante de estrutura fina.

## 4 PULSOS

Neste trabalho, vamos considerar apenas pulsos de amplitude máxima  $a$ , linearmente polarizados ao longo do eixo  $x$ . De forma geral, temos:

$$\mathcal{A}^\mu(x^+) = a\psi(x^+) \cos(\omega x^+) \delta_1^\mu, \quad (4.1)$$

onde  $\delta_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$ . De forma a simplificar os cálculos, tomamos a seguinte condição periódica para a duração efetiva do pulso:

$$\tau = \frac{2\pi N}{\omega}, \quad (4.2)$$

onde  $N$  é o número de ciclos. Além disso, qualquer parte constante do pulso será descartada, visto que não interfere no módulo da amplitude.

Definida a polarização e a forma do pulso, podemos reescrever o elemento  $\mathcal{T}_{fi}$  (3.16) na forma

$$\mathcal{T}_{fi} = -2\epsilon_\lambda \delta_1(ea) \mathcal{R}_{fi}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathcal{R}_{fi}$  é a parte da amplitude que não depende da polarização do fóton emitido, chamada aqui de amplitude reduzida:

$$\mathcal{R}_{fi} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ \psi(x^+) \cos \omega x^+ \exp \left\{ i l \omega x^+ + 2i\beta \omega \int^{x^+} d\xi [\psi(\xi) \cos \omega \xi]^2 \right\}. \quad (4.4)$$

Na equação acima, o parâmetro adimensional  $\beta$  é dada por

$$\beta = \frac{e^2 a^2}{4\omega} \left( \frac{1}{p'^+} - \frac{1}{p^+} \right). \quad (4.5)$$

O módulo do elemento  $\mathcal{T}_{fi}$  ao quadrado é então dado por:

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 = 4(ea)^2 (\epsilon_\lambda)_\mu (\epsilon_\lambda^*)_\nu \delta_1^\mu \delta_1^\nu |\mathcal{R}_{fi}|^2. \quad (4.6)$$

A polarização final é geralmente de difícil medição e no nosso contexto assume pouca importância, já que o selétron é uma partícula de spin 0. Dessa forma, é natural efetuarmos a soma de (4.6) em relação às possíveis polarizações  $\lambda$  (SREDNICKI, 2007):

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \rightarrow \sum_\lambda |\mathcal{T}_{fi}|^2. \quad (4.7)$$

A identidade de Ward (SREDNICKI, 2007)

$$k'_\mu \mathcal{T}_{fi}^\mu = 0, \quad (4.8)$$

permite a substituição

$$\sum_\lambda (\epsilon_\lambda)_\mu (\epsilon_\lambda^*)_\nu \rightarrow g_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

e assim:

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \rightarrow 4(ea)^2 |\mathcal{R}_{fi}|^2. \quad (4.10)$$

Finalmente, substituindo (4.10) na diferencial de energia (3.23), obtemos:

$$\frac{dW}{d\omega' d\Omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} a_0^2 \omega \omega' \ell(\omega') |\mathcal{R}_{fi}|^2, \quad (4.11)$$

onde  $a_0$  é a amplitude adimensional (1.1)

$$a_0 = \frac{|e|a}{m}.$$

## 4.1 PULSO DE ENVELOPE RETANGULAR

### 4.1.1 CASO GERAL

O primeiro pulso finito a ser analisado é caracterizado por um envelope composto por uma função indicadora no suporte  $\text{supp}(\psi) = [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ :

$$\psi(x^+) = \mathbf{1}_{\text{supp}(\psi)} = \begin{cases} 1, & |x^+| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x^+| > \frac{\tau}{2} \end{cases}. \quad (4.12)$$

Esse envelope, comumente chamado de retangular (FEDOTOV et al., 2022), não altera a amplitude da senoide original no seu intervalo de duração.

Usando as condições periódicas (4.2) e descartando os termos constantes, temos:

$$F(x^+) = \begin{cases} \frac{x^+}{2} + \frac{\sin 2\omega x^+}{4\omega}, & |x^+| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x^+| > \frac{\tau}{2} \end{cases}. \quad (4.13)$$

Substituindo o potencial senoidal (4.12) e a fase derivada (4.13) no elemento (4.3) da matriz  $\mathcal{T}$ , obtemos:

$$\mathcal{R}_{fi} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ \cos \omega x^+ \exp \left[ i\ell\omega x^+ + i\beta \left( \omega x^+ + \frac{\sin 2\omega x^+}{2} \right) \right]. \quad (4.14)$$

A integral acima não admite uma solução em funções elementares, por isso expandimos o integrando periódico em uma série de Fourier:

$$\cos \omega x^+ \exp \left( i\frac{\beta}{2} \sin 2\omega x^+ \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} B_r \left( -\frac{\beta}{2} \right) e^{-ir\omega x^+}, \quad (4.15)$$

onde  $B_r$  é uma função de Bessel generalizada:

$$B_r \left( -\frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta_{2s+1,r} \left[ J_s \left( -\frac{\beta}{2} \right) + J_{s+1} \left( -\frac{\beta}{2} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Assim, a expressão se torna:

$$\mathcal{R}_{fi} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} B_r \left( -\frac{\beta}{2} \right) \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ \exp[i\omega x^+(\ell + \beta - r)], \quad (4.17)$$

cujos resultados são obtidos facilmente:

$$\mathcal{R}_{fi} = 2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} B_r \left( -\frac{\beta}{2} \right) \frac{\sin[\frac{\omega\tau}{2}(\ell + \beta - r)]}{\omega(\ell + \beta - r)}. \quad (4.18)$$

#### 4.1.2 LIMITE MONOCROMÁTICO

No limite de um pulso de duração infinita  $\tau$ , os coeficientes das funções  $B_r$  em (4.18) se tornam deltas de Dirac:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sin[\frac{\omega\tau}{2}(\ell + \beta - r)]}{\omega(\ell + \beta - r)} = \frac{\pi}{2} \delta[\omega(\ell + \beta - r)]. \quad (4.19)$$

A fim de interpretarmos esse resultado, vamos voltar ao caso clássico de uma partícula num campo externo de onda monocromática. O quadrimomento cinético da partícula é dado por (LANDAU; LIFSHITZ, 1980):

$$\pi_\mu = p_\mu - e\mathcal{A}_\mu - \frac{k_\mu}{kp} \left( \frac{e^2 \mathcal{A}^2}{2} - e\mathcal{A}p \right), \quad (4.20)$$

onde  $p_\mu$  é o quadrimomento da partícula anterior à presença do campo ( $t = t_{in}$ ). Ambos os quadrimomentos  $p_\mu$  e  $\pi_\mu$  se situam na camada de massa:

$$p^2 = \pi^2 = -m^2.$$

O mesmo não ocorre para o quasimomento  $q_\mu$ ,

$$q_\mu := \langle \pi_\mu \rangle = p_\mu - \frac{e^2 \langle \mathcal{A}^2 \rangle}{2kp} k_\mu, \quad (4.21)$$

a média do quadrimomento cinético em relação à duração efetiva do pulso (4.2), que na realidade se encontra situado na camada de uma massa efetiva  $m_*$ :

$$\begin{aligned} -m_*^2 := q^2 &= -m^2 - e^2 \langle \mathcal{A}^2 \rangle \\ &= -m^2 - \frac{m^2 a_0^2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ (\cos \omega x^+)^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

No caso da onda monocromática, temos

$$q_\mu = p_\mu - \frac{m^2 a_0^2}{4kp} k_\mu, \quad (4.23)$$

e conseqüentemente\*

$$m_*^2 = m^2 \left( 1 + \frac{a_0^2}{2} \right). \quad (4.24)$$

\* O fator de 2 no denominador de  $a_0^2$  é devido à polarização linear do campo. Ele não está presente no caso de polarização circular.

Com a ajuda do quadri vetor  $\tilde{n}^\mu = (1, 0, 0, 1)$ , projetamos esse momento na direção  $p^-$ :

$$-\tilde{n}q = q^- = p^- + \frac{m^2 a_0^2}{2p^+}. \quad (4.25)$$

Ao substituírmos o valor de  $\beta$  (4.5) em (4.19), fica claro então que as deltas induzem a seguinte relação de conservação:

$$\tilde{n}q + r\tilde{n}k = \tilde{n}q' + \tilde{n}k', \quad (4.26)$$

onde  $r$  é um inteiro dado por:

$$r = \ell(\omega') + \beta. \quad (4.27)$$

Assim, o quadrimomento conservado do selétron no limite monocromático é o quasimomento  $q^\mu$ , que obedece a conservação quadridimensional:

$$q^\mu + rk^\mu = q'^\mu + k'^\mu. \quad (4.28)$$

Como  $r$  é estritamente inteiro, é natural interpretarmos (no caso monocromático) a equação (4.28) como a representação da interação de um selétron com  $r$  fótons oriundos do campo externo, resultando numa alteração do momento do selétron e na emissão de um fóton (BROWN; KIBBLE, 1964; NIKISHOV; RITUS, 1964).

## 4.2 PULSO DE ENVELOPE SENOIDAL

O próximo pulso é composto pela soma de duas senoídes de mesma amplitude, porém com frequências diferentes e de valores extremamente próximos:

$$\mathcal{A}(x^+) = \begin{cases} \frac{a \cos[(\omega+\varepsilon\omega)x^+]}{2} + \frac{a \cos[(\omega-\varepsilon\omega)x^+]}{2}, & |x^+| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x^+| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \quad (4.29)$$

onde  $\varepsilon \ll 1$ .

O pulso pode ser representado por uma única senoíde de frequência  $\omega$  (a frequência média), envelopada por uma senoíde de frequência  $\varepsilon\omega$  (o desvio padrão das frequências):

$$\mathcal{A}(x^+) = \begin{cases} a \cos \varepsilon\omega x^+ \cos \omega x^+, & |x^+| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x^+| > \frac{\tau}{2} \end{cases}. \quad (4.30)$$

Para os nossos propósitos, a segunda representação é mais conveniente, onde temos o envelope:

$$\psi(x^+) = \mathbf{1}_{\text{supp}(\psi)} \cos \varepsilon\omega x^+. \quad (4.31)$$

Elevando o quadripotencial (4.30) ao quadrado e integrando em  $x^+$ , obtemos:

$$F(x^+) = \begin{cases} \frac{x^+}{4} + \frac{1}{8\omega} \left\{ \sin 2\omega x^+ + \frac{\sin 2\varepsilon\omega x^+}{\varepsilon} + \frac{\sin [2\omega(1+\varepsilon)x^+]}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\sin [2\omega(1-\varepsilon)x^+]}{2(1-\varepsilon)} \right\}, & |x^+| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x^+| > \frac{\tau}{2} \end{cases}. \quad (4.32)$$

Substituindo:

$$\mathcal{R}_{fi} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ \cos \varepsilon \omega x^+ \cos \omega x^+ \exp \left\{ i l \omega x^+ + i \frac{\beta \omega x^+}{2} + i \frac{\beta}{4} \left\{ \sin 2\omega x^+ + \frac{\sin 2\varepsilon \omega x^+}{\varepsilon} + \frac{\sin [2\omega(1+\varepsilon)x^+]}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\sin [2\omega(1-\varepsilon)x^+]}{2(1-\varepsilon)} \right\} \right\}. \quad (4.33)$$

A exponencial pode ser decomposta num produto de séries de Fourier da forma:

$$e^{\gamma \sin s x^+} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-\gamma) e^{-i n s x^+}, \quad (4.34)$$

para  $\gamma$  e  $s$  reais quaisquer. Temos assim:

$$\mathcal{R}_{fi} = \sum_{a,b,c,d} C_{abcd} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dx^+ \cos \varepsilon \omega x^+ \cos \omega x^+ \times \exp \left\{ i l \omega x^+ + i \frac{\beta \omega x^+}{2} - 2i \omega x^+ [a(1+\varepsilon) + b(1-\varepsilon) + c + d\varepsilon] \right\}, \quad (4.35)$$

onde<sup>†</sup>

$$C_{abcd}(\beta, \omega, \varepsilon) = J_a \left( -\frac{\beta}{8(1+\varepsilon)} \right) J_b \left( -\frac{\beta}{8(1-\varepsilon)} \right) J_c \left( -\frac{\beta}{4} \right) J_d \left( -\frac{\beta}{4\varepsilon} \right). \quad (4.36)$$

A integração resulta em:

$$\mathcal{R}_{fi} = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c,d} C_{abcd} \sum_{\zeta, \eta = \pm 1} \left\{ \frac{\sin \left\{ \frac{\omega \tau}{2} \left[ \ell + \frac{\beta}{2} + (\zeta - 2a - 2b - 2c) + \varepsilon(\eta - 2a + 2b - 2d) \right] \right\}}{\omega \left[ \ell + \frac{\beta}{2} + (\zeta - 2a - 2b - 2c) + \varepsilon(\eta - 2a + 2b - 2d) \right]} \right\}. \quad (4.37)$$

<sup>†</sup> O índice  $a$  diz respeito ao somatório e não à amplitude máxima do pulso.



## 5 RESULTADOS

Seguindo (NAROZHNYI; FOFANOV, 1996) e (BOCA; FLORESCU, 2009), consideramos um laser de baixa frequência

$$\omega = 1.17 \text{ eV}, \quad (5.1)$$

o que nos permite aproximar o número de fótons transmitidos (3.14) dos pulsos finitos por:

$$\begin{aligned} \ell(\omega') &= \frac{\omega'}{\omega} \frac{m}{m - 2\omega'} \\ &\approx \frac{\omega'}{\omega}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

já que a massa do elétron

$$m \approx 0.511 \text{ MeV}, \quad (5.3)$$

é aproximadamente  $10^5$  vezes maior que  $\omega$ .

Ademais, para cada envelope, vamos analisar 3 pulsos com distintos números de ciclos  $N$  (4.2) e com duração efetiva  $\tau$  da ordem de 10 fs. Esses valores estão ilustrados na Tabela 1.

$N$	$\tau$ [10 fs]
3	1.06
5	1.77
10	3.53

Tabela 1 – Tabela de valores da duração efetiva dos pulsos.

### 5.1 ANÁLISE ESPECTRAL

A razão

$$\mu = \frac{m}{m^*} \quad (5.4)$$

entre as massas do elétron tem um papel importante no espectro dos pulsos retangulares. No caso da onda monocromática, o número de fótons emitidos  $r$  (4.27) é dado por

$$\begin{aligned} r &= \ell(\omega') + \beta \approx \left(1 + \frac{a_0^2}{2}\right) \ell(\omega') \\ &= \frac{\ell(\omega')}{\mu^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

induzindo o espectro discreto de frequências características, aqui chamadas de harmônicos monocromáticos (FEDOTOV et al., 2022):

$$\omega'_r = \mu^2 r \omega, \quad r \in \mathbb{N}^*. \quad (5.6)$$

Como  $0 < \mu \leq 1$ , os fótons emitidos possuem frequências menores que as apresentadas no espalhamento Thomson linear ( $\mu = 1$ ), fenômeno conhecido como *redshift* (desvio para o vermelho).

Os pulsos finitos apresentam espectros contínuos caracterizados por picos centrados nas frequências de ressonância das suas expansões de Fourier. Para o envelope retangular, essas frequências satisfazem a condição

$$\ell(\omega') + \beta - (2s + 1) = 0, \quad (5.7)$$

onde  $s$  é um inteiro positivo. Substituindo os valores de  $\beta$  (4.5) e  $\ell$  (5.2), obtemos o seguinte espectro das ressonâncias:

$$\omega' = \frac{(2s + 1)}{1 + \frac{a_0^2}{2}} \omega = \mu^2(2s + 1)\omega.$$

ou, em termos do primeiro harmônico monocromático (5.6):

$$\omega' = (2s + 1)\omega'_1. \quad (5.8)$$

O caso do envelope senoidal é bem mais rico, havendo 6 parâmetros livres diferentes:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{a_0^2}{4}} [(2a + 2b + 2c - \zeta) + \varepsilon(2a - 2b + 2d - \eta)], \quad (5.9)$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $\zeta = \pm 1$  e  $\eta = \pm 1$ . Torna-se necessária uma avaliação qualitativa através de gráficos das amplitudes.

## 5.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS

Esta seção contém gráficos da diferencial de energia (4.11) em função da frequência do fóton emitido para pulsos finitos com os 2 envelopes apresentados. A amplitude adimensional foi mantida fixa,  $a_0 = 1$ , assim como a frequência relativa  $\varepsilon = 0.05$ . Todos os gráficos foram feitos utilizando o software Wolfram Mathematica (Wolfram Research Inc., 2010).

O regime analisado consiste no intervalo  $\omega' \in [0, 3]$  eV, já que o espectro para valores maiores demonstrou-se ser praticamente nulo devido à baixa frequência do pulso. Para o pulso retangular, os termos  $r = -1, 0, 1$  na amplitude reduzida  $\mathcal{R}_{fi}$  (4.18) dominam completamente a forma do gráfico, não havendo nenhuma mudança significativa ao adicionarmos termos subsequentes.

Para valores pequenos de  $\varepsilon$ , o fator  $C_{abcd}$  (4.36) do pulso de envelope senoidal é dominado pelo termo  $J_d\left(-\frac{\beta}{4\varepsilon}\right)$ , o único cujo argumento é inversamente proporcional a  $\varepsilon$ . Dessa maneira, as ordens dos termos considerados da expansão de Fourier em (4.35) formam as combinações

dos índices inteiros:

$$a = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$b = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$c = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

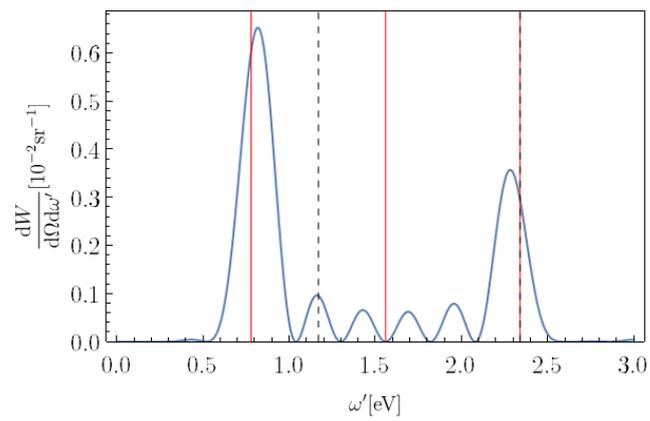
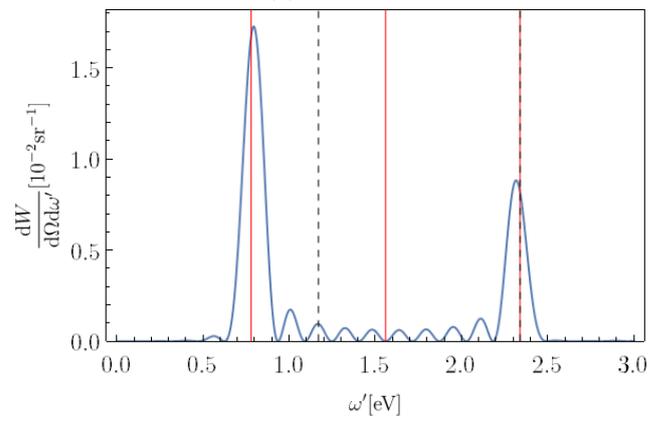
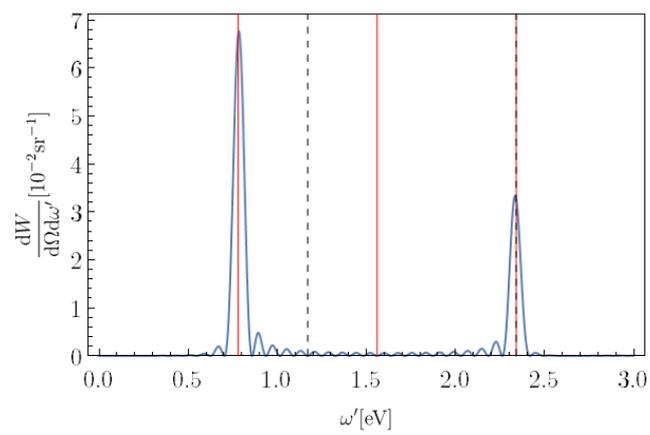
$$d = \{-20, \dots, 20\}.$$

Termos de maior ordem não apresentaram mudanças significativas nos gráficos.

### 5.2.1 PULSO RETANGULAR

Na figura 2, temos os gráficos para os 3 pulsos retangulares. As linhas vermelhas cheias representam os primeiros harmônicos monocromáticos ( $\Delta m = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ) (5.6), enquanto as linhas pretas tracejadas representam os harmônicos lineares ( $\Delta m = 1$ ) (5.6). Como é possível inferir da equação (5.8), a amplitude do pulso retangular é marcada pela inexistência de ressonâncias nos harmônicos  $\omega'_r$  de  $r$  par. Isso é característica do restroespalhamento: como vimos na subseção 3.2.1, os termos lineares no campo  $\mathcal{A}^\mu$  presentes no argumento da exponencial em (3.16) foram eliminados, causando esse fenômeno. É possível observar que na vizinhança de  $r = 2$ ,  $\omega'_2 = 1.56$  eV, temos um padrão gráfico oscilante e de baixa amplitude, aproximadamente simétrico em relação ao eixo dessa frequência até os outros harmônicos monocromáticos mais próximos. Com o aumento do número de ciclos, esse padrão se torna cada vez menos presente.

As frequências de ressonância do pulso retangular no intervalo analisado correspondem a  $\omega'_1 = 0.78$  eV e  $\omega'_3 = 2.34$  eV. Naturalmente, a distribuição de  $dW$  nessas ressonâncias é proporcional à duração do pulso, tornando-se cada vez maior e concentrado nesses harmônicos. Na subfigura 2a, o primeiro pico está situado na região delimitada pela frequência  $\omega'_1$  pela esquerda e pelo harmônico linear  $\omega' = \omega = 1.17$  eV pela direita, aproximando-se cada vez mais de  $\omega'_1$  à medida que  $N$  cresce (vide as subfiguras 2b e 2c). Isso se deve ao fato de que a massa efetiva (4.22) para o pulso retangular não é constante, variando em relação à duração efetiva  $\tau$ , fenômeno conhecido como Alargamento Ponderomotivo (FEDOTOV et al., 2022).

(a)  $N = 3$ .(b)  $N = 5$ .(c)  $N = 10$ .Figura 2 – Gráficos para os pulsos retangulares de  $N$  ciclos.

## 5.2.2 PULSO DE ENVELOPE SENOIDAL

O gráfico da diferencial para os 3 pulsos de envelope senoidais considerados são ilustrados no item (a) das figuras 3,4 e 5, novamente com diferentes números de ciclos. As linhas vermelhas cheias representam os harmônicos monocromáticos, mas dessa vez as linhas pretas tracejadas representam uma parte das ressonâncias previstas pela fórmula (5.9). Novamente, temos uma figura oscilante na vizinhança de  $\omega'_2$  que tende a diminuir com o aumento do número de ciclos.

O comportamento do pulso com  $N = 3$  em 3 apresenta poucas variações em relação à do pulso retangular em 2a, porém é notável a diferença entre os picos correspondentes no primeiro harmônico linear  $\omega$ , já que esse harmônico faz parte do espectro do envelope senoidal. A diferença é de aproximadamente  $\Delta dW \approx 0.05 \cdot 10^2 \text{ sr}^{-1}$ .

Para  $N = 5$ , notamos um deslocamento dos picos para longe da frequência de simetria  $\omega'_2$ : o primeiro pico tem um deslocamento mais acentuado que o análogo retangular, ultrapassando o harmônico monocromático  $\omega'_1$ ; o pequeno pico subsequente é deslocado do harmônico linear  $\omega$  até a vizinhança da frequência de ressonância  $\omega' \approx 1.03 \text{ eV}$ . Esse pequeno pico também está presente em 2b, mas é menos intenso, apresentando aproximadamente a mesma diferença anterior  $\Delta dW \approx 0.05 \cdot 10^2 \text{ sr}^{-1}$ . No lado direito do eixo de simetria, o pico no segundo harmônico linear é deslocado até a ressonância  $\omega' \approx 2.43 \text{ eV}$ , enquanto um pequeno pico subsequente é formado em  $\omega' \approx 2.62 \text{ eV}$ .

O caso  $N = 10$  (figura 5) é sem dúvidas o de maior discrepância. O primeiro pico é deslocado para a ressonância  $\omega' \approx 0.84 \text{ eV}$  e sua intensidade é cerca de 3 vezes menor que o primeiro pico na subfigura 2c, localizado no primeiro harmônico monocromático  $\omega'_1$ . Essa diferença de amplitude vem acompanhada de uma alteração na região de antes baixa intensidade entre os harmônicos monocromáticos  $\omega'_1$  e  $\omega'_2$ , surgindo pequenos picos de significativa intensidade, onde o maior apresenta  $dW \approx 0.95 \cdot 10^2 \text{ sr}^{-1}$ . O mesmo ocorre para a vizinhança do segundo harmônico, com o aumento da intensidade em  $\omega' \approx 2.62 \text{ eV}$  e o surgimento de um pico em  $\omega' \approx 2.85 \text{ eV}$ , porém nesse caso ocorre a diminuição da intensidade do pico em  $\omega' \approx 2.43 \text{ eV}$ .

Os 3 pulsos de envelope senoidais considerados são ilustrados em azul no item (b) das figuras 3,4 e 5. A curva em amarelo representa o envelope do pulso.

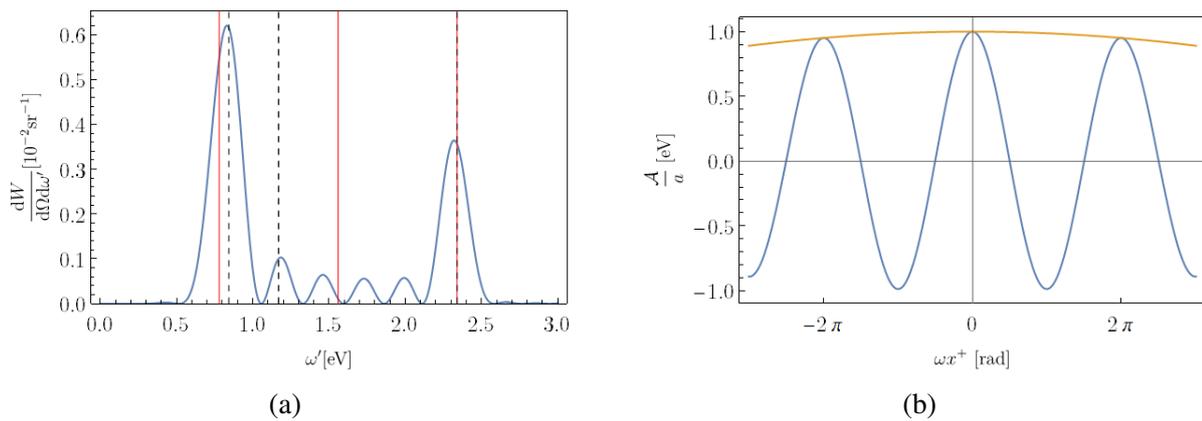


Figura 3 – Gráficos do envelope senoidal para  $N = 3$ .

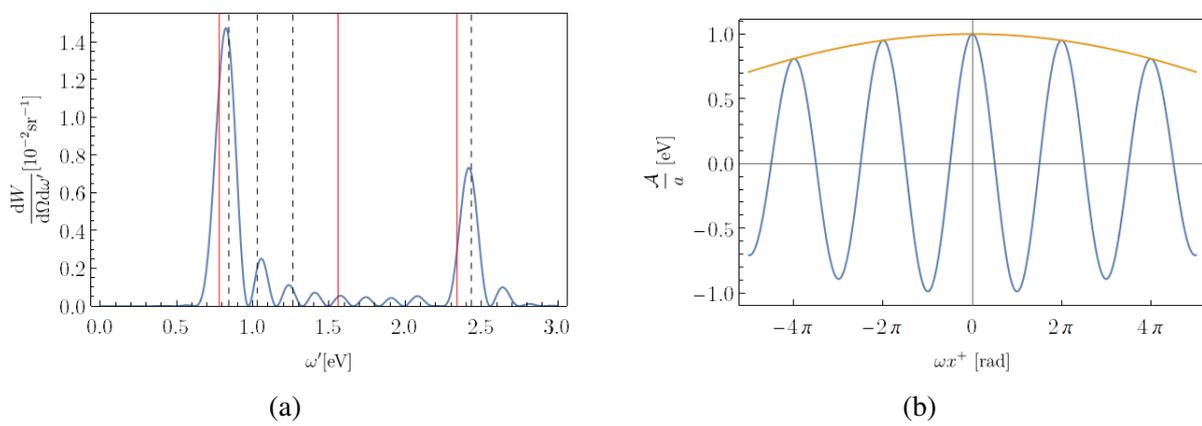


Figura 4 – Gráficos do envelope senoidal para  $N = 5$ .

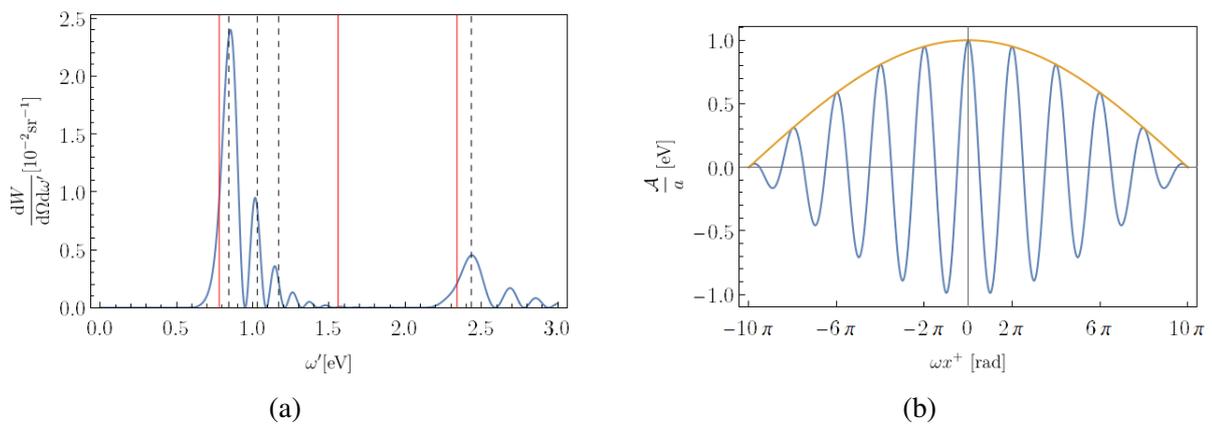


Figura 5 – Gráficos do envelope senoidal para  $N = 10$ .

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, utilizamos métodos analíticos para estudar efeitos da forma de pulsos eletromagnéticos intensos no espalhamento Thomson não linear. Para evitar complicações técnicas de menor importância, consideramos o retroespalhamento de uma partícula escalar de massa semelhante à do elétron.

A quantidade mensurável correspondente foi a razão diferencial da energia transferida pela frequência do fóton emitido, em lugar da mais usada seção de choque de espalhamento, devido ao caráter não conservativo da energia do processo. O pulso de envelope retangular, apesar de tratado extensivamente na literatura, serviu como teste do método e base comparativa para o pulso de forma mais complexa, o de envelope senoidal. O comportamento da diferencial da energia desse último demonstrou padrões bastantes distintos para diferentes durações efetivas do pulso, como o deslocamento dos picos em relação aos harmônicos monocromáticos, ressonâncias características do pulso retangular. Ademais, o aumento da duração efetiva desse pulso produziu uma distribuição mais homogênea da energia transferida, possibilitando um espectro mais rico de frequências com um número maior de picos de diferentes intensidades.

A efetividade do método demonstra seu potencial, abrindo caminho para o seu uso no estudo de processos semelhantes ou com menos restrições. Exemplos imediatos são o tratamento do elétron propriamente dito, uma partícula de spin semi-inteiro descrita por um campo de Dirac; análise de ângulos de espalhamento diferentes entre as partículas finais; espalhamento Compton para pulsos de energias próximas à energia de repouso do elétron, onde efeitos quânticos relevantes, como a polarização do vácuo, estão presentes.



# REFERÊNCIAS

- ANGIOI, A.; MACKENROTH, F.; PIAZZA, A. D. Nonlinear single Compton scattering of an electron wave packet. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 93, p. 052102, maio 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.052102>>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 28 e 32.
- BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Electrodynamics, Second Edition: Volume 4*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1982. 667 p. ISBN 9780750633710. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 27.
- BOCA, M. On the properties of the Volkov solutions of the Klein–Gordon equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 44, p. 445303, out. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- BOCA, M.; FLORESCU, V. Nonlinear Compton scattering with a laser pulse. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 80, p. 053403, nov. 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.053403>>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 39.
- BOCA, M.; FLORESCU, V. Thomson and Compton scattering with an intense laser pulse. *The European Physical Journal D*, Springer Science and Business Media LLC, v. 61, n. 2, p. 449–462, dez. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 28.
- BRODSKY, S.; PAULI, H.-C.; PINSKY, S. Quantum Chromodynamics and Other Field Theories on the Light Cone. *Phys.Rept.301:299-486,1998*, maio 1997. Citado na página 29.
- BROWN, L. S.; KIBBLE, T. W. B. Interaction of Intense Laser Beams with Electrons. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 133, p. A705–A719, fev. 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.133.A705>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 36.
- DINU, V. Exact final state integrals for strong field QED. fev. 2013. Citado na página 14.
- EHLOTZKY, F.; KRAJEWSKA, K.; KAMIŃSKI, J. Z. Fundamental processes of quantum electrodynamics in laser fields of relativistic power. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 72, n. 4, p. 046401, mar. 2009. Citado na página 13.
- FEDOTOV, A. et al. Advances in QED with intense background fields. *Phys. Rep. 1010, 1-138 (2023)*, fev. 2022. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 31, 34, 39 e 41.
- FRADKIN, E. S.; GITMAN, D. M.; SHVARTSMAN, S. M. *Quantum electrodynamics with unstable vacuum*. [S.l.: s.n.], 1991. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.
- FURRY, W. H. On bound states and scattering in positron theory. *Phys. Rev.*, v. 81, p. 115, 1951. Citado na página 24.
- HARVEY, C. et al. Intensity-Dependent Electron Mass Shift in a Laser Field: Existence, Universality, and Detection. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 100402, set. 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.100402>>. Citado na página 14.

- HARVEY, C. N.; ILBERTON, A.; KING, B. Testing numerical implementations of strong-field electrodynamics. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 91, p. 013822, jan. 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.013822>>. Citado na página 14.
- HEINZL, T.; ILBERTON, A. Extreme field physics and QED. set. 2008. Citado na página 27.
- HEINZL, T.; SEIPT, D.; KÄMPFER, B. Beam-shape effects in nonlinear Compton and Thomson scattering. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 81, p. 022125, fev. 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.022125>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- KING, B. Interference effects in nonlinear Compton scattering due to pulse envelope. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 103, n. 3, p. 036018, fev. 2021. Citado na página 14.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition: Volume 2* (course of theoretical physics series). [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. 402 p. ISBN 9780750627689. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 35.
- NAROZHNYI, N. B.; FOFANOV, M. S. Photon emission by an electron in a collision with a short focused laser pulse. *J. Exp. Theor. Phys.*, v. 83, p. 14–23, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 39.
- NEVILLE, R. A.; ROHRLICH, F. Quantum Electrodynamics on Null Planes and Applications to Lasers. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 3, p. 1692–1707, abr. 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.3.1692>>. Citado na página 29.
- NIKISHOV, A. I.; RITUS, V. I. QUANTUM PROCESSES IN THE FIELD OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE AND IN A CONSTANT FIELD. PART I. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.*, 2 1964. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/4032026>>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 20 e 36.
- PIAZZA, A. D. et al. Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 84, p. 1177–1228, ago. 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.1177>>. Citado na página 13.
- SEIPT, D. et al. Analytical results for non-linear Compton scattering in short intense laser pulses. *J. Plasma Phys.* 82, 655820203 (2016), jan. 2016. Citado na página 14.
- SREDNICKI, M. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. 664 p. ISBN 9780521864497. Citado 9 vezes nas páginas 13, 14, 22, 23, 25, 27, 29, 30 e 33.
- STRICKLAND, D.; MOUROU, G. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics Communications*, Elsevier BV, v. 56, n. 3, p. 219–221, dez. 1985. ISSN 0030-4018. Citado na página 13.
- VOLKOV, D. On a class of solutions of the Dirac equation. *Z. Phys.*, v. 94, p. 250, 1935. Citado na página 20.
- Wolfram Research Inc. *Mathematica 8.0*. 2010. Disponível em: <<http://www.wolfram.com>>. Citado na página 40.
- YOON, J. W. et al. Realization of laser intensity over 1023 W/cm<sup>2</sup>. *Optica*, v. 8, n. 5, p. 630–635, 2021. Citado na página 13.