



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



RAINARA SOUZA GOMES

**ANÁLISE DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS FAVOS DE
MEL EM CONFIGURAÇÕES DE DIAMANTE E CRUZ: UMA ABORDAGEM
COM BASE NA TEORIA DE PÓRTICOS PLANOS**

São Cristóvão – SE

2024

RAINARA SOUZA GOMES

**ANÁLISE DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS FAVOS DE MEL
EM CONFIGURAÇÕES DE DIAMANTE E CRUZ: UMA ABORDAGEM COM BASE
NA TEORIA DE PÓRTICOS PLANOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

São Cristóvão – SE

2024

Ficha catalográfica

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta qualificação e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Rainara Souza Gomes

Gomes, Rainara Souza

Análise das propriedades mecânicas de materiais favos de mel em configurações de diamante e cruz: uma abordagem com base na teoria de pórticos planos/ Rainara Souza Gomes, São Cristóvão, 2024.

92 p.

Orientador: David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

Dissertação de mestrado – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe.

1. Materiais favos de mel. 2. Propriedades mecânicas. 3. Células unitárias. 4. Teoria de flexão de Timoshenko. 5. Critério de Falha. I. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim. II. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe. III. Análise das propriedades mecânicas de materiais favos de mel em configurações de diamante e cruz: uma abordagem com base na teoria de pórticos planos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido forças e guiado os meus passos nessa jornada para alcançar os meus objetivos.

À minha família, por todo amor, dedicação e incentivo nos momentos difíceis, especialmente aos meus pais, Enival Souza Gomes e Leia Lima de Souza, aos meus irmãos Daniel Souza, Esthevão Loamy, Paulo Lorenzo e Raquel Souza e à minha madrasta Luciana dos santos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. David Leonardo Amorim, sou imensamente grata pela paciência, por toda orientação, por ter sido sempre prestativo e estar sempre à disposição para me ajudar em toda a elaboração desse trabalho, contribuindo significativamente para meu crescimento acadêmico.

A todo corpo docente e Administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, em especial a Rejane Donato, por sempre estar à disposição para sanar as dúvidas e conversar sobre qualquer assunto.

Aos meus amigos que têm sido uma fonte constante de apoio desde a graduação, especialmente, Adysson André, Henrique Rodrigues, Nora Ney e Taine Aparecida, agradeço por sua amizade sincera, pelos conselhos e incentivos durante ao longo desta Jornada.

Aos meus amigos do mestrado, Eliakim Alcântara, Fernando Rocha, Jéssica Simão e Ludmila Santos que ao longo do mestrado se tornaram minha segunda família. Agradeço por estarem ao meu lado em diversos trabalhos, pelas várias madrugadas que passamos estudando, pelas aulas compartilhadas, e por compartilharem comigo momentos de alegrias e desafios. Seu constante incentivo e apoio foram fundamentais para não desistir. Obrigada por tudo.

A Rafael Nunes e Renério Neto, aos quais também tive o privilégio de conhecer no mestrado e que sempre recorri para sanar as dúvidas, agradeço pela rede de apoio, pela paciência e pela amizade.

Ao professor Ludmilson Abritta, ao qual tive o prazer de conviver no LAMEC, agradeço pelos conselhos, pela amizade e por sempre estar disposto a ouvir e orientar.

Por fim, agradeço ao professor Julio Flórez-Lopéz por toda disponibilidade e auxílio durante a realização desta pesquisa.

RESUMO

Os materiais *honeycombs*, também conhecidos como materiais celulares ou materiais favos de mel, são aplicados em diversas áreas, como arquitetura, engenharia e biomedicina. Na engenharia civil, esses materiais são empregados como reforço estrutural, soluções geotécnicas ou em estruturas sanduíche. As propriedades mecânicas desses materiais são intrinsecamente influenciadas pelas configurações das células unitárias. As pesquisas nesta área têm crescido nas últimas décadas, com enfoque nos comportamentos mecânicos, que podem ter características isotrópicas ou anisotrópicas. O presente estudo tem como finalidade investigar as propriedades mecânicas dos materiais celulares no plano, concentrando-se nas configurações de células unitárias em formato de diamante e cruz. Para alcançar tal objetivo, utiliza-se como base metodológica os conceitos da teoria de pórticos planos, embasados na lei de elasticidade e plasticidade via teoria de flexão de Timoshenko. Nesta pesquisa, são analisadas as propriedades elásticas e plásticas dos favos de mel em configurações de diamante e cruz, por meio de um critério de falha. Os resultados são validados por meio da comparação dos esforços e deslocamentos calculados para meios bidimensionais compostos por elementos finitos de pórticos planos, com propriedades do material constituintes, e por elementos finitos quadrilaterais, com as propriedades efetivas da célula unitária. Tais resultados comprovaram que a metodologia adotada descreve de forma satisfatória o comportamento dos materiais favos de mel em configuração cruz e diamante. Em especial, a abordagem elastoplástica para a configuração em cruz foi comparada com experimentos com acurácia satisfatória.

Palavras-chave: Materiais favos de mel; Propriedades mecânicas; Células unitárias; Teoria de flexão de Timoshenko; Critério de Falha.

ABSTRACT

Honeycomb materials, also known as cellular materials or honeycomb materials, are applied in various areas, such as architecture, engineering and biomedicine. In civil engineering, these materials are used as structural reinforcement, geotechnical solutions or in sandwich structures. The mechanical properties of these materials are intrinsically influenced by the unit cell configurations. Research in this area has grown in recent decades, focusing on mechanical behaviors, which can have isotropic or anisotropic characteristics. The present study aims to investigate the mechanical properties of in-plane cellular materials, focusing on diamond and cross-shaped unit cell configurations. To achieve this objective, the concepts of the theory of flat frames are used as a methodological basis, based on the law of elasticity and plasticity via Timoshenko's flexural theory. In this research, the elastic and plastic properties of honeycombs in diamond and cross configurations are analyzed, using a failure criterion. The results are validated by comparing the efforts and displacements calculated for two-dimensional media composed of finite elements of flat frames, with constituent material properties, and quadrilateral finite elements, with the effective properties of the unit cell. These results proved that the methodology adopted satisfactorily describes the behavior of honeycomb materials in cross and diamond configurations. In particular, the elastoplastic approach for the cross configuration was compared with experiments with satisfactory accuracy.

Keywords: Honeycomb materials; Mechanical properties; Unit cells; Timoshenko bending theory; Failure Criterion.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- (a) comportamento dos materiais convencionais; (b) comportamento de metamateriais auxéticos.....	1
Figura 2- Favos de mel: (a) colmeia de abelha; (b) coral; (c) cortiça	6
Figura 3- Células unitárias.....	7
Figura 4- favos de mel com diferentes formas celulares	7
Figura 5- favos de mel aplicados na arquitetura.....	8
Figura 6- favos de mel com aplicação na biomedicina: (a) cintura pélvica híbrida; (b) crânio com malha reticulada; (c) fêmur poroso; (d) implante de quadril dentro do fêmur	9
Figura 7- favos de mel com diferentes formas celulares: (a) quadrada; (b) circular; (c) retangular; (d) diamante; (e) hexagonal; (f) diamante.....	10
Figura 8- Telas de aço utilizada como reforço estrutural	10
Figura 9- Estruturas sanduíches.....	11
Figura 10- favos de mel: (a) Papel; (b) Alumínio; (c) aço	12
Figura 11- favos de mel impressão com auxílio de um robô	12
Figura 12- favos de mel impressão 3D.....	13
Figura 13- Defeitos favos de mel: (a) Malformação; (b) Falha adesiva; (c) esquema de favos de mel irregular e regular.....	14
Figura 14- (a) Favos de mel (b) Estrutura homogeneizada	15
Figura 15- Representação do elemento b	18
Figura 16- Deformações generalizadas do elemento b conectado pelos nós i e j	20
Figura 17- (a) Deformada de um elemento com sinais iguais; (b) Deformada do elemento com sinais opostos.....	21
Figura 18 - (a) Elemento b em coordenadas locais; (b) Deslocamentos generalizados do nó j	21

Figura 19- (a) Incremento de deslocamento no nó i na coordenada xL ; (b) Incremento de deslocamento no nó i na coordenada ZL ; (c) Aplicação da rotação no nó i ; (d) Aplicação do deslocamento no nó j ;	24
Figura 20- (a) Forças externas aplicadas ao pórtico; (b) Tensões generalizada em um membro da estrutura	27
Figura 21- Tensões e deformações do elemento de pórtico	29
Figura 22- Forças locais no elemento b.	30
Figura 23- Modelo elastoplástico com encruamento cinemático	35
Figura 24- (a) Célula unitária Diamante; (b) Supercélula Diamante; (c) Célula unitária cruz; (d) Supercélula Quadrangular	38
Figura 25- (a) Célula unitária Diamante; (b) Célula unitária Cruz	39
Figura 26- Tração Horizontal célula unitária:(a) Diamante; (b) Cruz	40
Figura 27- Tração Vertical célula unitária: (a) Diamante; (b) Cruz	41
Figura 28- Cisalhamento aplicado na Célula unitária: (a) Diamante; (b) Cruz	42
Figura 29- Deformação na Célula unitária Diamante	43
Figura 30- Tração Horizontal :(a) Supercélula;(b) Estrutura Homogeneizada; Tração Vertical: (c)Supercélula; (d) Estrutura Homogeneizada; Cisalhamento: (e) Supercélula; (f) Estrutura Homogeneizada	47
Figura 31- Deslocamentos horizontais: (a) cálculo manual; (b) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos verticais: (c) cálculo manual; (d) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo X (e) cálculo manual; (f) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo Y: (g) cálculo manual; (H) cálculo por elementos finitos	53
Figura 32- Deslocamentos horizontais: (a) cálculo manual; (b) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos verticais: (c) cálculo manual; (d) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo X (e) cálculo manual; (f) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo Y: (g) cálculo manual; (H) cálculo por elementos finitos	54
Figura 33- Gráfico Tensão vs Deformação	59
Figura 34- Critério de falha célula unitária Diamante	59
Figura 35- (a) SSWM de aço; (b) Visão microscópica das malhas de SSWM.	61

Figura 36- Posicionamento da célula unitária ao longo do eixo de simetria da malha 30x32.	62
Figura 37- Critério de falha aplicado:(a) SSWM 30x32; (b) SSWM 40x32;.....	64
Figura 38- Critério d falha aplicado: malha 50x34;	65
Figura 39- Estrutura Homogeneizada com condições de contorno.....	66
Figura 40- Ensaio de tração da SSWM	67
Figura 41- Carga vs deslocamento:(a) Todas as malhas obtidas no <i>software</i> ; (b) SSWM 30x32; (c) SSWM 40x32; (d) SSWM 50x34	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Parâmetros das células unitárias	48
Tabela 2- Valores das propriedades elásticas da célula unitária Diamante	49
Tabela 3- Valores das propriedades elásticas da célula unitária Cruz.....	49
Tabela 4- Comparação das forças da Célula unitária Diamante.....	51
Tabela 5- Comparação das forças da Célula unitária Cruz.....	51
Tabela 6- Comparação dos deslocamentos da Célula unitária Diamante.....	52
Tabela 7- Comparação dos deslocamentos da Célula unitária Cruz.....	52
Tabela 8- Comparação das forças resultantes da Célula unitária Diamante.....	55
Tabela 9- Comparação das forças resultantes da Célula unitária Cruz	57
Tabela 10- Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária diamante.....	58
Tabela 11- Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária diamante.....	60
Tabela 12- Parâmetros da célula unitária Cruz.....	61
Tabela 13- Valores das constantes elásticas da célula unitária Cruz.....	63
Tabela 14- Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária cruz	63
Tabela 15- Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária cruz	65

LISTA DE SÍMBOLOS

$M(x)$	- Momento fletor na seção transversal do elemento de pórtico
$V(x)$	- Cisalhamento na seção transversal do elemento de pórtico
$N(x)$	- Esforço axial do elemento de pórtico
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
I	- Momento de inércia da seção transversal
χ	- Curvatura
β	- Rotação da seção transversal
w	- Deslocamento transversal ao eixo longitudinal
k_s	- Fator de correção ao cisalhamento
G	- Módulo de elasticidade transversal, ou módulo de rigidez
A	- Área da seção transversal
γ	- Deformação angular
ν	- Coeficiente de Poisson
$\{q\}_{bi}$	- Matriz de deslocamentos generalizados do nó i do elemento b
u_i, u_j, u_n	- Deslocamentos do nós i e j na direção do eixo global X
w_i, w_j, w_n	- Deslocamentos do nós i e j na direção do eixo global Z
θ_i, θ_j	- Rotação do nós i e j no plano XZ
X, Z	- Coordenadas de eixos globais
$\{q\}_b$	- Matriz de deslocamentos generalizados do elemento b
$\{U\}$	- Matriz de deslocamentos generalizados do global
$\{\Phi_b\}$	- Matriz de mudança de forma generalizadas do elemento b
Φ_i^b, Φ_j^b	- Rotações relativas das seções transversais do elemento de pórticos
δ_b	- Alongamento do elemento de pórtico
X_L, Z_L	- Coordenadas de eixos Locais
α_b^0	- O ângulo formado pelo elemento em sua configuração inicial
L_b^0	- comprimento do elemento sem sofrer esforço axial

u_j^L	– Deslocamento do nó i na direção do eixo local X_L
w_j^L	– Deslocamento do nó j na direção do eixo local Z_L
u_n^L	– Deslocamentos do nós i e j na direção do eixo global X
w_n^L	– Deslocamentos do nós i e j na direção do eixo global Y
$\{q^L\}_b$	Matriz de deslocamentos generalizados do elemento b em coordenadas – locais
$[T]_b$	– Matriz de transformação
du_i^L	– Incremento de deslocamento no nó i na coordenada X_L
du_j^L	– Incremento de deslocamento no nó j na coordenada X_L
dw_n^L	– Incremento de deslocamento no nó i e j na coordenada Z_L
$d\Phi_i$	– Deformações generalizadas no nó i
$d\Phi_j$	– Deformações generalizadas no nó j
$d\delta$	– Atenuação ou um acréscimo no tamanho do elemento b
$d\theta_i^L, d\theta_j^L$	– Incremento da rotação relativa no nó i e j
$\{d\Phi\}_b$	– Matriz de mudança de forma generalizadas global do elemento b
L_b	– Comprimento inicial do elemento b
$[B(q^L)]_b$	– Matriz de transformação cinemática local do elemento b
$[B(q)]_b$	– Matriz de transformação global do elemento b
$[B^0]_b$	– Matriz de transformação cinemática ampliada
$[B_E^0]_b$	– Matriz de transformação cinemática expandida
w_{def}^*	– Trabalho virtual deformações ou trabalho interno
$\{M\}_b$	– Matriz de tensões generalizadas
m_i, m_j	– Momentos fletores nos nós i e j do elemento
n_b	– Carga axial
w_{ext}^*	– Trabalho virtual externo
$\{P\}$	– Forças externas aplicadas
p_{ui}, p_{uj}, p_{un}	– Forças nodais externas horizontal
p_{wi}, p_{wj}, p_{wn}	– Forças nodais externas vertical
$p_{\theta i}, p_{\theta j}, p_{\theta n}$	– Momentos fletores concentrados aplicados na direção de θ
$Q_b(x_b)$	– Carga distribuída ao longo do elemento
$M_b(x_b)$	– Momento fletor ao longo do elemento

$w_b(x_b)$	– Deflexão
C_1, C_2, C_3, C_4	– Constantes de Integração
$[F_0]_b$	– Matriz de flexibilidade de elástica
ε_T	– Deformação Total
ε_p	– Deformação Plástica
ε_e	– Deformação Elástica
σ	– Tensão
σ_y	– Tensão de escoamento
$d_{\varepsilon p}$	– Incremento de deformações plásticas
Y	– Componente de tensão normal no plano X ou Y e componente XY
σ_1, σ_2	– Valores principais do tensor de tensão
R_0, R_{90}	– Coeficientes de Lankford

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Objetivos.....	4
<i>1.2.1 Objetivo Geral.....</i>	<i>4</i>
<i>1.2.2 Objetivos específicos</i>	<i>4</i>
1.3 Organização do trabalho	5
2 MATERIAIS FAVOS DE MEL	6
2.1 Preâmbulo	6
2.2 Fabricação dos materiais Honeycombs	11
2.3 Propriedades mecânicas dos materiais favos de mel.....	14
3 TEORIA DE PÓRTICOS	17
3.1 Pórticos Elásticos	17
<i>3.1.1 Notação de Powell.....</i>	<i>17</i>
<i>3.1.2 Cinemática de pórticos planos</i>	<i>18</i>
<i>3.1.3 Estática de pórticos planos</i>	<i>26</i>
<i>3.1.4 Relação Constitutiva</i>	<i>28</i>
3.2 Plasticidade uniaxial.....	32
<i>3.2.1 Pórticos elastoplásticos.....</i>	<i>32</i>
<i>3.2.2 Critério de falha</i>	<i>35</i>
<i>3.2.2.1 Critério de Hill quadrática no plano</i>	<i>36</i>
4 METODOLOGIA.....	37
4.1 Propriedades Elásticas	37
<i>4.1.1 Topologia.....</i>	<i>37</i>
<i>4.1.2 Aplicação da teoria de Pórticos</i>	<i>38</i>
<i>4.1.3 Condições de contorno</i>	<i>39</i>
<i>4.1.3.1 Condições de contorno para tração Horizontal.....</i>	<i>40</i>

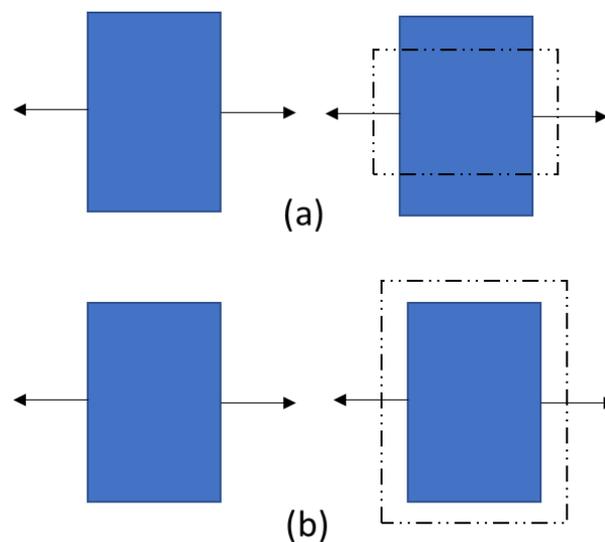
4.1.3.2 Condições de contorno para tração vertical	41
4.1.3.3 Condições de contorno para Cisalhamento	41
4.1.4 <i>Deslocamento imposto</i>	42
4.2 Propriedades Plásticas	44
4.3 Validação da metodologia aplicada	46
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	48
5.1 Exemplos acadêmicos.....	48
5.1.1 <i>Propriedades elásticas</i>	48
5.1.2 <i>Propriedades elastoplásticas</i>	58
5.2 Plasticidade célula unitária Cruz	60
6 CONCLUSÃO.....	69
REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Os materiais *honeycombs*, também conhecidos como favos de mel ou materiais celulares, recebem esse nome em virtude da sua semelhança com os favos presentes nas colmeias de abelhas (Zhang *et al.*, 2015). Esses materiais podem ser categorizados em dois grupos distintos: metamateriais ou convencionais, cuja distinção é determinada pelas propriedades e características do material em questão. De acordo com Faraci, Driemeier e Comi (2021), os materiais favos de mel identificados como metamateriais denotam da origem artificial, sendo concebidos com a finalidade de obter propriedades específicas e altamente desejáveis, cuja a manifestação na natureza é rara ou inexistente. Estas propriedades anômalas são engendradas através da configuração da microestrutura subjacente, ao invés de depender unicamente da composição química dos elementos constituintes. Um exemplo de metamaterial derivados de favos de mel são representados pelos *honeycombs* auxéticos, caracterizados por apresentarem um coeficiente de Poisson negativo, isto é, ao serem submetidos, por exemplo, à tração, expandem-se na direção perpendicular à carga aplicada, como apresentado na Figura 1.

Figura 1- (a) comportamento dos materiais convencionais; (b) comportamento de metamateriais auxéticos.



Fonte: Autor (2024).

Os *honeycombs* convencionais também conhecidos materiais celulares se caracterizam pela complexa rede interconectada de escoras e placas, organizadas em arranjos de arestas e faces unitárias. Essa organização cria uma estrutura com células unitárias, que preenche o espaço bidimensional ou tridimensional. Tais estruturas estão presentes em elementos naturais como cortiça, madeira, coral, esponja e favos de mel de colmeias de abelhas (Surjadi *et al.*, 2019).

Os materiais favos de mel convencionais podem ser fabricados artificialmente, mediante a utilização de uma diversidade de materiais, que abrangem desde o papel, metais, cerâmicas e compósitos. Exemplificativamente, os favos de mel periódicos ilustram um caso de estruturas celulares artificiais, cujos métodos de manufatura abarcam um aspecto que engloba múltiplos materiais (Zhang *et al.*, 2015).

Os favos de mel fabricados a partir de liga de alumínio ou folhas de aramida são amplamente empregados na construção de estrutura tipo sanduíche, devido às suas características de baixa densidade, alta resistência mecânica e boa capacidade de absorção de energia. Enquanto que os favos de mel constituído de materiais compósitos encontram aplicação devido à excelente rigidez específica e resistência mecânica (Wei; Li; Xiong, 2019). Estas versatilidades de aplicações abrangentes refletem a diversidade de propriedades que os favos de mel podem oferecer, tornando-os relevantes para indústrias aeroespaciais, da construção civil, arquitetura e medicina, onde a necessidade por estruturas leves e de alta resistência é crucial.

No âmbito geral, as estruturas em *honeycombs* são notáveis pela sua capacidade de oferecer alta resistência com baixo peso em várias escalas de tamanho, ao mesmo tempo que apresentam propriedades mecânicas importantes, como a capacidade de absorção de energia, resistência à fadiga, resistência ao fogo e à corrosão (Isanaka *et al.*, 2022). Destaca-se, que essas propriedades mecânicas estão intrinsecamente ligadas à configuração da célula unitária subjacente, a qual pode assumir configurações distintas, como hexagonal, retangular, diamante, quadrangular (cruz), triangular, dentre outras.

As propriedades mecânicas dos materiais *honeycombs* podem ser investigadas com condições de carregamentos distintos, como carregamento no plano e fora do plano, abrangendo cargas estáticas, de baixa velocidade e impacto de alta velocidade (Wang, 2019). No âmbito das aplicações de engenharia, as investigações abrangentes do comportamento das estruturas favos de mel são indispensáveis. Para abordar essas propriedades, diversos estudos têm sido desenvolvidos, explorando diferentes aspectos

desse comportamento. Xu, Qiao e Davalos (2001), empregaram uma abordagem analítica com técnicas de homogeneização, visando avaliar a rigidez de cisalhamento transversal em estruturas favos de mel com paredes finas, frequentemente empregadas em aplicações estruturais do tipo sanduíche.

Ruan *et al.* (2003), explorou o comportamento dinâmico no plano de colmeias hexagonais de alumínio por meio de simulações de elementos finitos. Wu *et al.* (2017), se dedicaram à investigação das respostas sob condições de colisão e características de resistência apresentadas por materiais celulares de alumínio. No que concerne ao limite de escoamento, Li *et al.* (2018), desenvolveram uma abordagem teórica que visa elucidar esses limites em estruturas favos de mel quadradas, considerando diversas orientações de carregamentos. Destaca-se que estes trabalhos apresentaram limitações em relação aos métodos aplicados para descrever o comportamento desses materiais.

Thomas e Tiwari (2019), analisaram o comportamento do núcleo de estruturas sanduíches compostas por materiais honeycombs, explorando cinco configurações de células unitárias (kagome, hexagonal, triangular, quadrangular e circular), sob diferentes condições de carregamento. No entanto, os resultados obtidos apresentaram uma divergência significativa em relação às conclusões proveniente da literatura. Zhang *et al.* (2020), que formularam um modelo com o objetivo de analisar o comportamento de painéis sanduíches com núcleos favos de mel. Na qual, a pesquisa ressalta a necessidade de realizar estudos adicionais, principalmente, de propor uma lei constitutiva e critérios de dano mais apropriado para descrever o comportamento desses materiais em diferentes condições de solicitações. Mohammadi *et al.* (2023), investigaram o comportamento dos materiais *honeycombs*, ressaltando a necessidade de desenvolver modelos teóricos que possibilitem uma compreensão mais aprofundada das propriedades mecânicas desses materiais.

Estes resultados apontam para a complexibilidade do comportamento desses materiais em determinadas condições de solicitações e destacam a necessidade de aprimoramento e refinamento nas formulações utilizadas para a compressão do desempenho mecânico dos materiais favos de mel.

Ressalta-se que a análise do comportamento das estruturas em favos mel é complexo, sendo objeto de minuciosas investigações isoladas, para determinar sua resistência à compressão, tração ou ao cisalhamento (Rodríguez-Ramírez; Castanié; Bouvet, 2020).

Diante desse panorama, esta pesquisa tem como finalidade aprofundar a compreensão e investigar de forma abrangente o comportamento elastoplástico de materiais favos de mel, em configurações diamante e quadrangular. Para tanto, serão empregados os conceitos da teoria de pórticos elásticos e elastoplásticos, discutindo conceitos essenciais da teoria da elasticidade e da plasticidade. Estas investigações se propõem a elucidar a resposta mecânica dessas estruturas em condições de carregamentos distintos.

Os modelos elastoplásticos englobam tanto deformações elásticas quanto permanentes. A relação entre tensão aplicada e deformação elástica encontra-se sujeita à influência direta da lei de elasticidade, a lei de evolução e a função de escoamento que delinea os critérios para o início da deformação plástica. Outro aspecto importante da teoria da plasticidade é o fenômeno de encruamento, o qual se caracteriza pelo aumento de resistência mecânica do material à medida que o processo de deformação avança. Além disso, o critério de falha é primordial nessa teoria para prever quando um material atingirá sua capacidade máxima de suportar cargas sem sofrer deformações plásticas permanentes. Diversos critérios de falha estão disponíveis na literatura como o critério de Tresca, critério de von Mises, critério de Tsai-Hill, critério de Hashin, critério de Hoffman, Critério de Puck e de Hill.

Neste estudo, foi empregado o critério de falha proposto Hill (1948), na sua formulação quadrática no plano para investigar o comportamento anisotrópico dos materiais favos de mel. A escolha desse critério decorre devido a sua capacidade de modelar adequadamente as respostas mecânicas de materiais com propriedades distintas em diferentes direções.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa consiste em analisar as propriedades mecânicas no plano de materiais favos de mel nas configurações de células unitárias diamante e cruz (quadrangular).

1.2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral da pesquisa, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- Analisar as propriedades elásticas das células unitárias dos materiais favos de mel nas configurações diamante e cruz, considerando diferentes condições de solicitações no plano;
- Validar as formulações obtidas por meios de análises numéricas;
- Aplicar as formulações obtidas em problemas apresentados na literatura técnica.

1.3 Organização do trabalho

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica dos materiais favos de mel, na qual abrange definição, topologia, processo de fabricação e as propriedades mecânicas. No capítulo 3, são explanados os conceitos fundamentais da notação de Powell, essa notação é aplicada para a análise dos elementos elásticos de pórtico plano em conjunto com a teoria de flexão de Timoshenko. Ademais, no escopo deste mesmo capítulo, é abordado sobre a plasticidade uniaxial, a qual engloba os conceitos subjacentes à teoria da plasticidade, bem como os aspectos relativos aos materiais elastoplásticos e aos modelos elastoplásticos que são delineados mediante a lei de elasticidade, a regra de encruamento e o critério de falha.

No capítulo 4 delinea-se a metodologia formulada para a determinação das propriedades elásticas dos materiais celulares. Além disso, é apresentado o procedimento empregado para a validação da teoria adotada, bem como é elucidada a aplicação da lei de plasticidade nesses materiais.

Já no capítulo 5, são evidenciados os resultados oriundos das análises dos materiais favos de mel nas configurações de diamante e quadrangular.

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

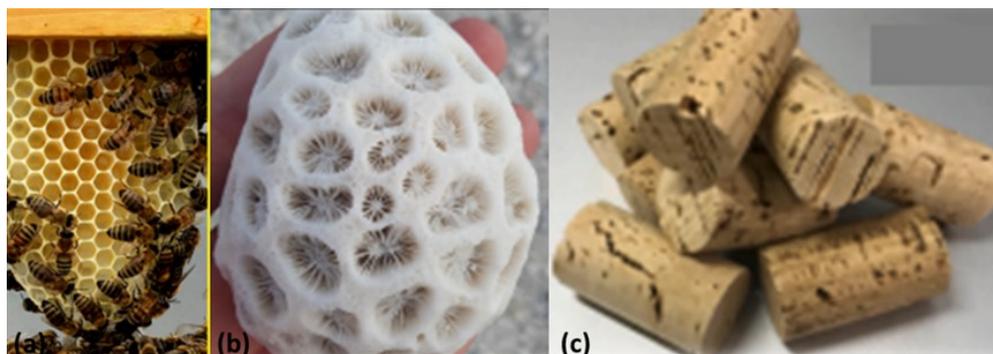
2 MATERIAIS FAVOS DE MEL

No presente capítulo faz-se uma breve introdução sobre os materiais de favos de mel, abrangendo aspectos fundamentais relacionados à sua definição, topologia e processo de fabricação, bem como as propriedades mecânicas desse material.

2.1 Preâmbulo

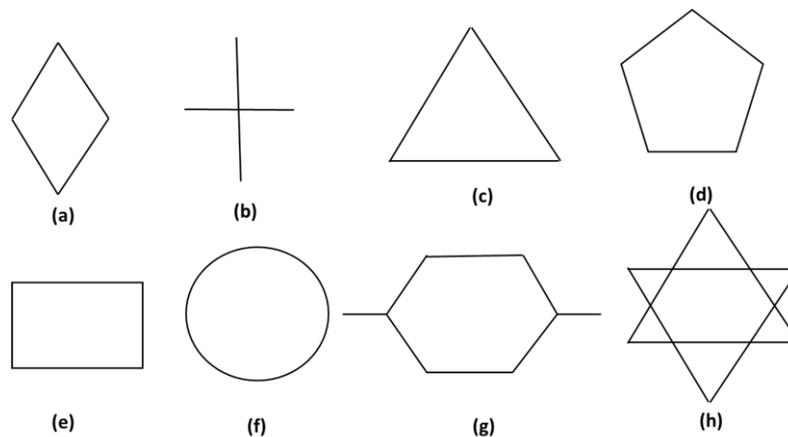
Os materiais *honeycombs*, também conhecidos como favos de mel ou materiais celulares, recebem esse nome em virtude da sua semelhança com os favos presentes nas colmeias de abelhas, caracterizando-se, em sua maioria, por suas configurações celulares fechadas. Estes materiais estão presentes na ecologia natural em diversas formas, tais como favos de mel produzidos pelas abelhas, exoesqueleto de corais marinhos e cortiça proveniente da casca do sobreiro (Figura 2). Além de sua ocorrência natural, esses materiais também podem ser fabricados artificialmente (Mohammadi *et al.*, 2023).

Figura 2- Favos de mel: (a) colmeia de abelha; (b) coral; (c) cortiça



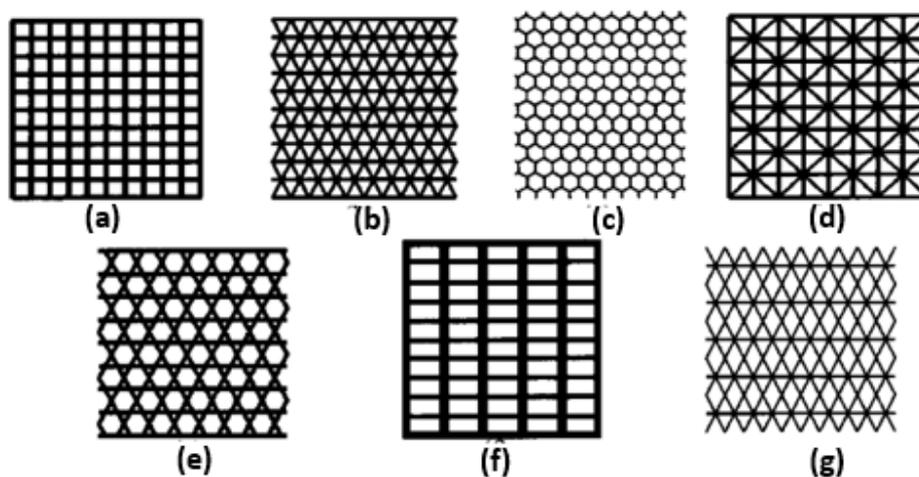
Fonte: Gura *et al.*, (2023); wang *et al.*, (2021).

As estruturas favos de mel são constituídas por células unitárias, que variam de espessuras, dimensões, propriedades e geometrias (Zhang *et al.*, 2015). Neste estudo, as células unitárias são definidas como elemento de volume representativo da estrutura que podem adotar diversas geometrias como: (a) diamante, (b) cruz, (c) triangular, (d) hexagonal, (e) quadrada, (f) circular, (g) hexagonal e (h) kagome como demonstrado na Figura 3.

Figura 3- Células unitárias

Fonte: Autor (2024).

Essas células unitárias são duplicadas em duas dimensões com a finalidade de instituir uma estrutura celular sólida periódica denominada como supercélula. Esta supercélula é composta por diferentes tipos de células ou tamanhos, como: (a) célula quadrada, (b) supercélula hexagonal composta por triângulos equiláteros, (c) célula hexagonal, (d) supercélula quadrada constituída por triângulo, (e) supercélula Kagome, (f) célula angular reta e (g) célula diamante, como evidenciado na Figura 4 (Wang; Mcdowell, 2004).

Figura 4- favos de mel com diferentes formas celulares

Fonte: Wang; Mcdowell (2004).

As estruturas favos de mel com células triangulares demonstram propriedades superiores no que se refere à rigidez estrutural no plano e à resistência sob diferentes condições de carregamentos (Wang; Mcdowell, 2005). Por outro lado, as estruturas favos de mel com arranjos quadrados são utilizadas preferencialmente em cenário que envolvem cargas de alta severidades, como explosões e impactos, em virtude da combinação de resistência ao esmagamento fora do plano e capacidade de suportar forças de tração no plano (Li *et al.*, 2018).

Os materiais celulares apresentados na Figura 4 são artificiais, pois são constituídos a partir da distribuição de células unitárias com formas regulares, resultando em uma estrutura sólida com diferentes conectividades e propriedades distintas. Essa capacidade de reprodução artificial amplia consideravelmente as possibilidades de aplicação desses materiais, tornando-os versáteis em diversas áreas, como arquitetura, Biomedicina e engenharia.

A incorporação de materiais *honeycombs* na arquitetura representa um avanço inovador que abrange diversos elementos cruciais, desde da configuração da célula unitária, seleção dos materiais de construção e a implementação decorativa nas edificações (Figura 5). A utilização desses materiais em edifícios apresenta-se vantagens significativas em termos de eficiência energética, características ecológicas, bem como resistências sísmicas (Zhang *et al.*, 2015).

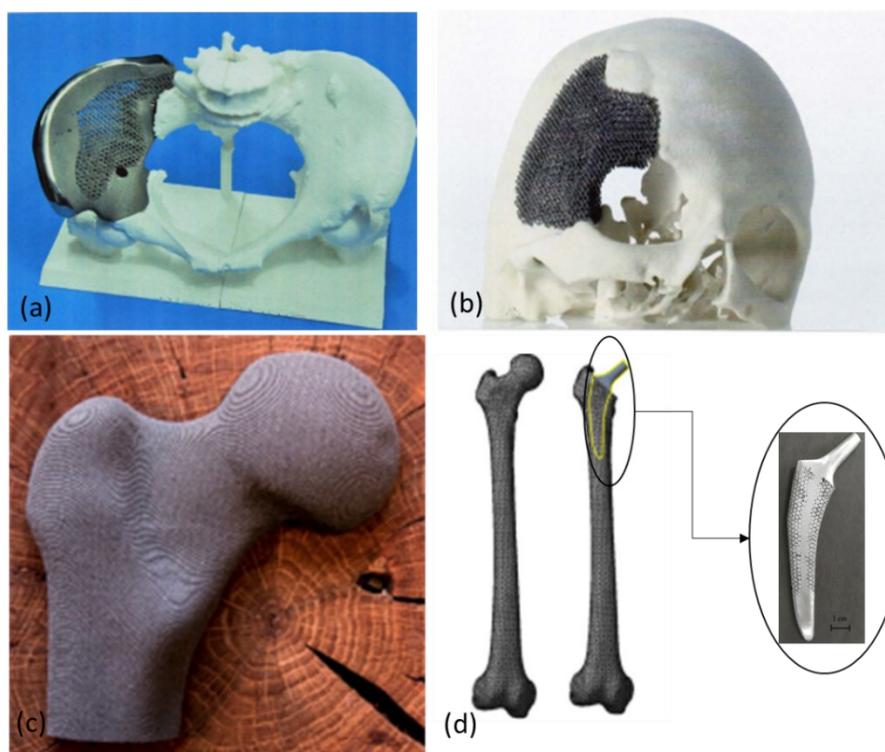
Figura 5- favos de mel aplicados na arquitetura



Fonte: Zhang *et al.*, (2015)

Na área da biomedicina, esses materiais possuem aplicações importantes como fabricação de membrana alveolares (Yuan *et al.*, 2020; Hayashi, et al., 2021; Raza; Niemiec; Kim,2023) e implantes médicos (Ahmadi *et al.*, 2014; Zhang *et al.*, 2018; Yadroitsava; Plessis; Yadroistsev, 2019), conforme evidenciado na Figura 6. Tais materiais são aplicados devido às suas propriedades mecânicas ajustáveis, que podem ser adaptadas ao módulo de elasticidade óssea e favorecer uma integração óssea aprimorada pelo tamanho adequado dos poros (Tan *et al.*, 2017).

Figura 6- favos de mel com aplicação na biomedicina: (a) cintura pélvica híbrida; (b) crânio com malha reticulada; (c) fêmur poroso; (d) implante de quadril dentro do fêmur

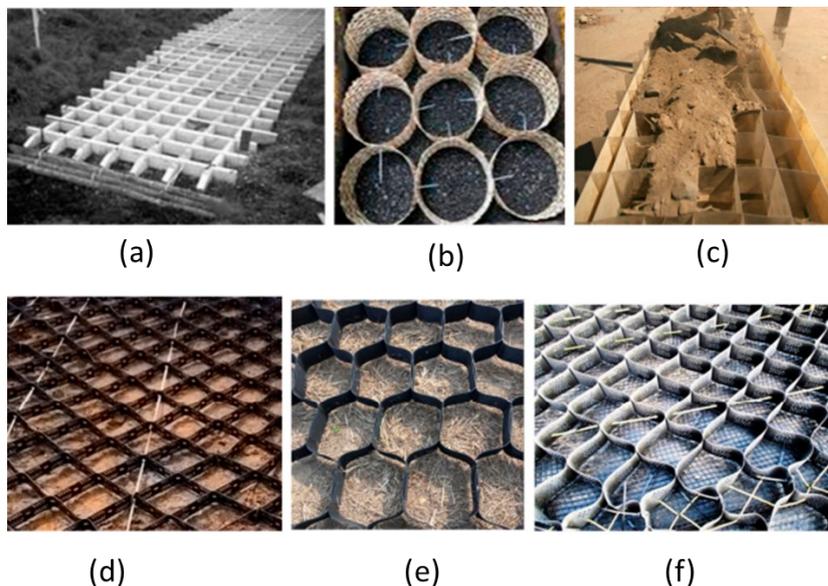


Fonte: Du Plessis *et al.*, (2022); wang *et al.*, (2018).

No contexto da engenharia civil, esses materiais são comumente empregados em na área de geotecnia e estrutura. Na área da geotecnia, os materiais *honeycombs* têm sido amplamente empregados em aterros, fundações, pavimentos, taludes, ferrovias e paredes de terra reforçada (Krishna; Latha, 2023). Suas propriedades como reforço oferecem um conjunto de vantagens substanciais quando comparado com outras metodologias de aprimoramento da capacidade de carga do solo, tais como facilidade de instalação, economia de custos e maior vida útil. Além disso, os materiais favos de mel contribuem

para enriquecimento da rigidez e resistência da camada de base e auxiliar na distribuição uniforme da carga (Al-Shamaa *et al.*, 2021). A versatilidade desses materiais é destacada em diferentes configurações como evidenciada na Figura 7.

Figura 7- favos de mel com diferentes formas celulares: (a) quadrada; (b) circular; (c) retangular; (d) diamante; (e) hexagonal; (f) diamante



Fonte: Krishna e Latha, (2023).

No que tange à área de estruturas, os materiais favos de mel podem ser empregados como reforço estrutural quanto em vigas e em estruturas sanduíches. Como reforço estrutural (Figura 8) esse material em comparação com os polímeros reforçados com fibras, frequentemente utilizados como método de reforço estrutural, oferecem vantagens como alta ductilidade, peso leve, tolerância de espessura controlável e limitada, boa resistência à abrasão e boa resistência ao fogo (Patel; Joshi; Makawana, 2023).

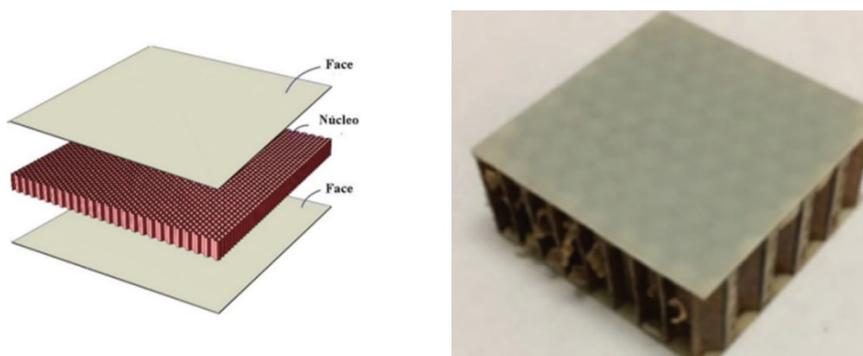
Figura 8- Telas de aço utilizada como reforço estrutural



Fonte: Patel; Joshi e Makawana (2023).

As estruturas sanduíches comumente são compostas por duas camadas externas finas e um núcleo intermediário (Figura 9). Este núcleo pode ser constituído por diversos materiais sendo os favos de mel frequentemente utilizados devido às suas propriedades como rigidez, resistência, capacidade de isolamento térmico e excelente característica de atenuação sonora (Zhang *et al.*, 2020).

Figura 9- Estruturas sanduíches



Fonte: Kim e Sterkenburg (2021); Chen *et al.*, (2020).

A utilização de estrutura sanduíche constituída por materiais favos de mel representa uma abordagem eficaz na engenharia estrutural, oferecendo uma solução econômica e com excelentes propriedades mecânicas. O núcleo deste elemento estrutural em questão pode ser constituído por diferentes geometrias como círculo, hexagonais, triângulos, combinados com uma gama de diversidade de materiais, ampliando assim sua adaptabilidade às necessidades específicas de cada projeto (Sing; Rashid, 2022).

2.2 Fabricação dos materiais Honeycombs

A fabricação de estruturas favos de mel artificiais podem ser realizados de maneiras distintas, dependendo dos materiais empregados e das propriedades almejadas. Os favos de mel convencionais podem ser fabricados por meio da utilização de uma ampla gama de materiais, que abrangem desde o papel, alumínio, aço, polímero e entre outros (Figura 10) (Abdullah *et al.*, 2018).

Figura 10- favos de mel: (a) Papel; (b) Alumínio; (c) aço



Fonte: Abdullah *et al.*, (2018).

De acordo com Britzer (1997), os procedimentos empregados na fabricação desses materiais com matéria prima metal compreendem métodos de colagem adesiva, soldagem por resistência, brasagem, colagem por difusão, fusão térmica, expansão e corrugação. No entanto, destaca-se que os processos de expansão a frios de tiras de metal periodicamente ligadas, ligação adesivo e soldagem de chapas metálicas onduladas são os métodos mais prevalente na indústria para produção de favos de mel comerciais metálicos (Afkhami *et al.*, 2022).

Os materiais favos de mel derivados do papel aramida pode ser fabricados através da utilização de robôs, os quais são programados para manipular materiais de forma precisa e eficiente, contribuindo para produção em larga escala e possibilitando a fabricação de diferentes configurações com custo de processamento reduzido, conforme evidenciado na Figura 11, (Ahmad *et al.*, 2020).

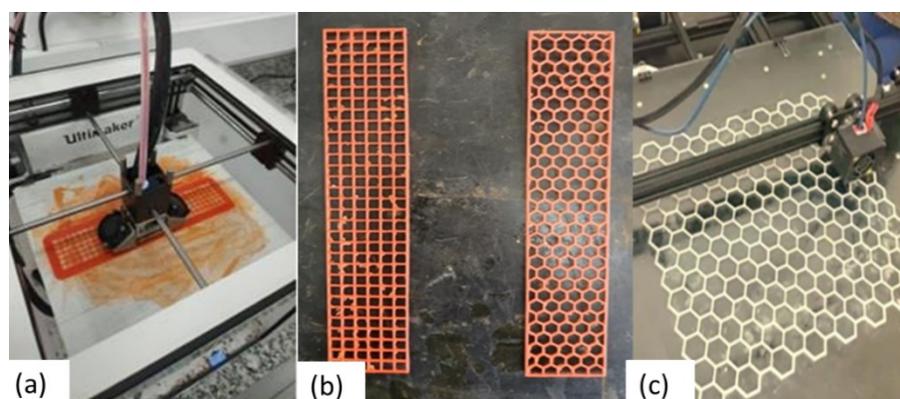
Figura 11- favos de mel impressão com auxílio de um robô



Fonte: Ahmad *et al.*, (2020);

Para os materiais favos de mel utilizando polímeros como matéria-prima, um dos métodos de fabricação é através da utilização da impressora 3D, também conhecida como fabricação aditiva. Este método de fabricação é uma alternativa viável, na qual os favos de mel podem ser produzidos em um único processo, eliminando a necessidade de empilhamento e uso de colas adesivas, resultando em uma abordagem de fabricação ágil e com redução significativa no desperdício de matéria-prima. Além disso, destaca-se a flexibilidade de adaptação do design da célula, o que possibilita a criação de várias seções, como demonstrado na Figura 12 (Yap; Yeong, 2015).

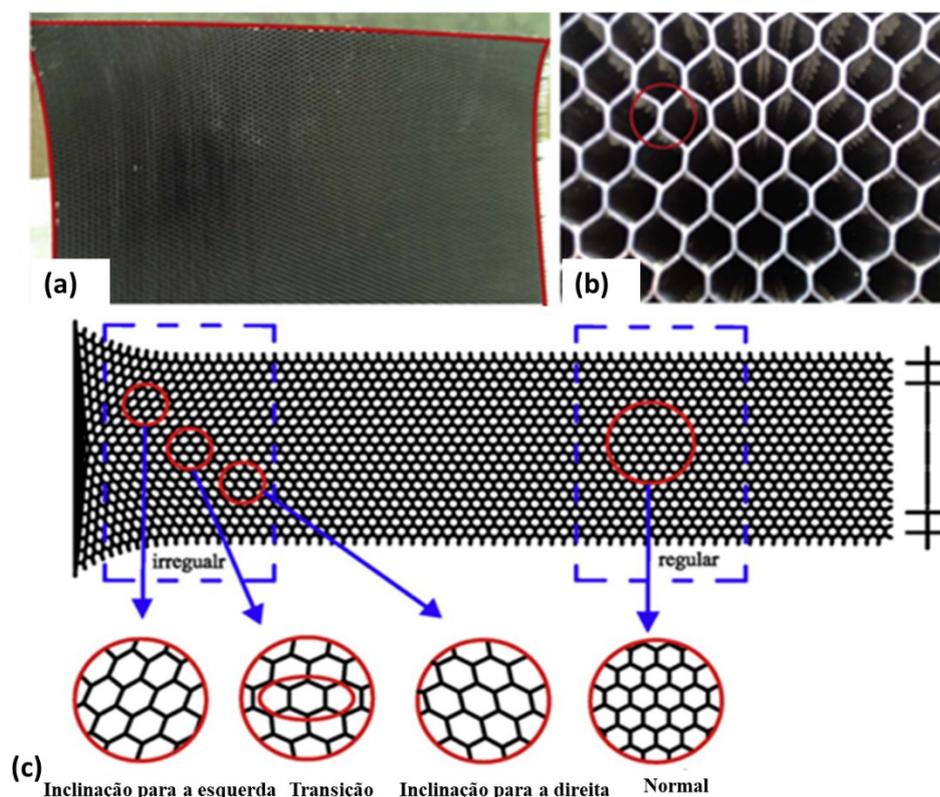
Figura 12- favos de mel impressão 3D



Fonte: Faria, (2020); Arab *et al.*, (2020).

A utilização de estruturas de materiais celulares artificiais apresenta algumas desvantagens, pois estes materiais têm alta sensibilidade, o que pode ocasionar a destruição ou separação de conexões durante a construção ou ao cortar e construir uma estrutura sanduíche. Os defeitos mais comuns de fabricação são a irregularidade das células, a destituição não homogênea e falhas adesivas, que afetam o desempenho mecânico da estrutura de *honeycombs*, como demonstrado na Figura 13. Embora seja amplamente utilizado como uma estrutura intacta para absorção de energia, quaisquer pequenos defeitos podem resultar em baixa capacidade de deformação, causando instabilidade estrutural quando essas estruturas são empregadas em componentes homogêneos (Wang *et al.*, 2018).

Figura 13- Defeitos favos de mel: (a) Malformação; (b) Falha adesiva; (c) esquema de favos de mel irregular e regular



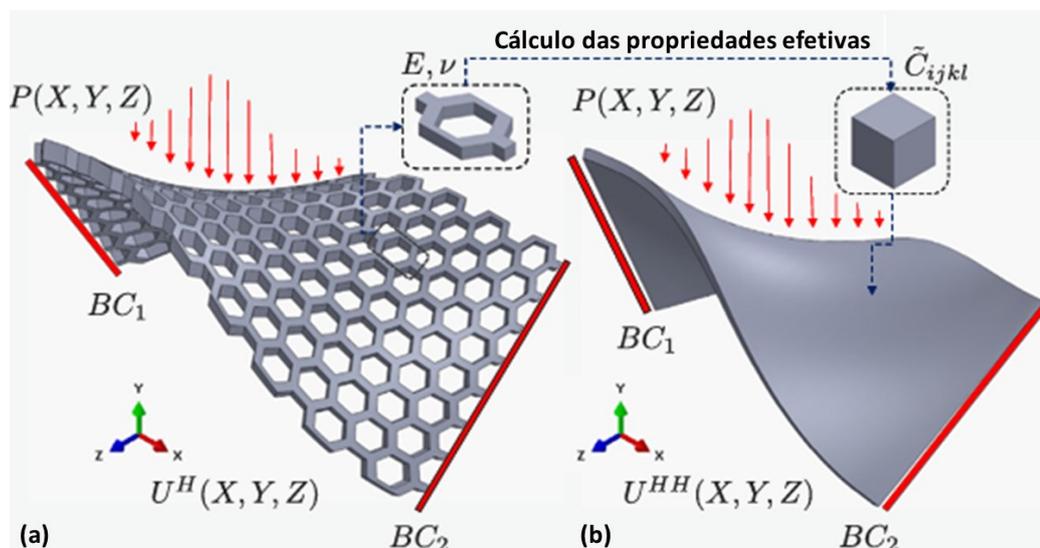
Fonte: Wang *et al.*, (2018).

2.3 Propriedades mecânicas dos materiais favos de mel

As propriedades dos materiais favos de mel podem ser determinadas mediante a aplicação de uma variedade de métodos numéricos e analíticos. Dentro desse escopo, o método de homogeneização surge como uma abordagem proveniente. Este método se fundamenta na representação explícita da microestrutura do material, conduzindo à análise dos campos de tensão e deformação locais para determinar os limites de condições de cargas externas. Posteriormente, a determinação das propriedades efetivas do material é realizada mediante a derivada desses parâmetros, viabilizando uma compreensão aprofundada do comportamento do material em questão (Moeinia; Begonb; Lévesquea, 2022).

Através da homogeneização de células unitárias, todas as propriedades equivalentes da estrutura podem ser determinadas, como evidenciada na Figura 14.

Figura 14- (a) Favos de mel (b) Estrutura homogeneizada



Fonte: Moenina; Begonb; Lévesquea, (2022).

As propriedades mecânicas dos materiais celulares dependem majoritariamente das configurações das células unitárias que formam a estrutura sólida em vez das propriedades dos materiais da matriz. A matriz, neste contexto, é definida como o material sólido que preenche os espaços entre as células unitárias. Isto se deve, pois a geometria das células unitárias apresenta alto desempenho em diversas características mecânicas, como tenacidade à fratura, resistência ao impacto, dissipação de calor, amortecimento de vibrações, entre outras (Qi; Jiang; Yang, 2021).

O campo de pesquisa que engloba os materiais de favos mel apresentou crescimento significativo nas últimas décadas. Diversos estudos se concentram em analisar e desenvolver modelos matemáticos com a finalidade de investigar o comportamento desses materiais sob diferentes condições de carregamentos, como no plano e fora do plano, com cargas quase estáticas ou de impactos. Wang (2019), realizou uma análise abrangente de diferentes tipos de materiais favos de mel por meio de uma revisão na literatura com a finalidade de analisar diversos aspectos relacionados ao desenvolvimento e o desempenho mecânico destes materiais. Ani *et al.* (2022), determinaram a resistência e a capacidade de absorção em estruturas favos de mel em configurações hexagonais fabricados na impressora 3D, submetidos a carregamento fora do plano através de ensaios experimentais. Li *et al.* (2023), realizaram uma pesquisa que combinou o método dos elementos finitos com ensaios experimentais para analisar o comportamento do material favos de mel submetidos a carregamento no plano e fora do plano.

Essas análises e modelos desenvolvidos para explicar as geometrias dos materiais favos de mel têm contribuído de maneira significativa para ampliação do conhecimento e compreensão das respostas mecânicas da estrutura celular submetida a diferentes condições de carregamento. Salienta-se que estes trabalhos apresentaram limitações em relação aos métodos aplicados para descrever o comportamento mecânico dos materiais *honeycombs*. Diante disso, o presente trabalho aborda as propriedades mecânicas dos materiais favos de mel no plano através da teoria de flexão de Timoshenko para pórticos planos.

3 TEORIA DE PÓRTICOS

3.1 Pórticos Elásticos

Neste subitem, são abordados os conceitos fundamentais da teoria da elasticidade. São apresentados diversos tópicos, incluindo a notação de Powell (1969) utilizada para representar os elementos de pórticos. Além disso, são discutidas as variáveis cinemáticas e estáticas de pórticos planos que descrevem o comportamento dos sistemas estruturais. Por fim, é explanada a lei constitutiva que define as relações de deformações e de tensões desse elemento estrutural específico.

3.1.1 Notação de Powell

Com o intuito de analisar diversos tipos de não linearidades relacionados a grande deslocamentos e elasticidade em estruturas, Powell (1969) propôs uma formulação que assume que as deformações no elemento são pequenas, apesar dos deslocamentos serem grandes. Embora originalmente aplicada em elementos de pórticos, essa teoria pode ser ampliada para outros elementos finitos, como elementos de placas submetidas à flexão, assim como para tensões planas e tridimensionais.

Neste trabalho, a notação de Powell (1969) é usada considerando-se pequenos deslocamentos e pequenas deformações, sendo aplicada a elementos elásticos de pórtico plano por meio da teoria de flexão de viga de Timoshenko. A formulação proposta por Timoshenko (1921) considera a rotação adicional da seção transversal no cálculo das deformações e tensões da viga, considerando os efeitos da deformação por cisalhamento, ou seja, esse modelo considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal.

Com base nas hipóteses expostas, a determinação do momento de fletor, esforço cortante e força axial são apresentadas a seguir:

$$M(x) = EI\chi = EI \frac{d\beta}{dx} \quad (1)$$

$$V(x) = k_s GA\gamma = k_s GA \left(\beta - \frac{dw}{dx} \right) \quad (2)$$

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} \quad (3)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal, I o momento de inércia da seção transversal, χ a curvatura, β é a rotação da seção, w é o deslocamento transversal, k_s o fator de correção ao cisalhamento, sendo igual a 5/6 para seções retangulares e 9/10 para seções circulares (Gere; Timoshenko, 1991); A área da seção transversal, γ é a deformação angular e G o módulo de elasticidade transversal do material, dado por:

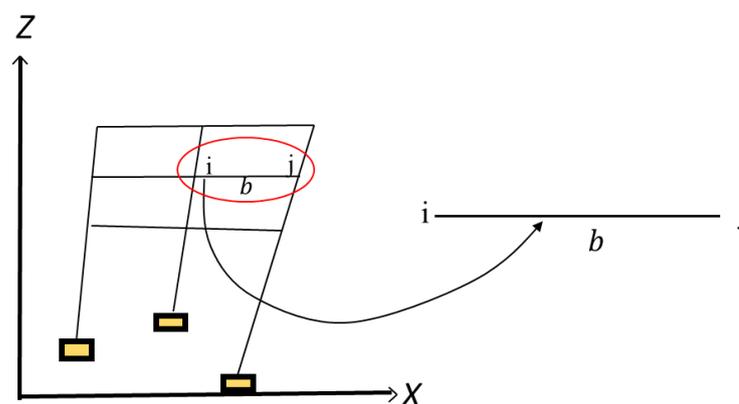
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson.

3.1.2 Cinemática de pórticos planos

Considere o pórtico representado na Figura 15, composto por um conjunto de m elementos, conectados por n nós.

Figura 15- Representação do elemento b



Fonte: Autor (2024).

A matriz de deslocamentos generalizados do nó i do elemento b é determinada pela Equação (5).

$$\{q\}_{bi} = \{u_i \ w_i \ \theta_i\}^T \quad (5)$$

em que, u_i e w_i são deslocamentos apresentados na direção do eixo global X e Z , respectivamente, e θ_i é a rotação do nó no plano XZ . De maneira similar, é definida a matriz de deslocamentos para o nó j . A matriz de deslocamentos generalizados do elemento b , conectado pelos nós i e j , como apresentado na Figura 15, é determinada a partir da Equação (6).

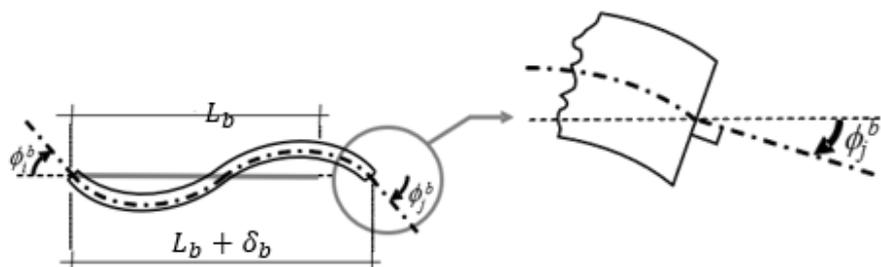
$$\{q\}_b = \{u_i \ w_i \ \theta_i \ u_j \ w_j \ \theta_j\}^T \quad (6)$$

Os deslocamentos generalizados globais são obtidos considerando a quantidade de nós que compõem a estrutura, como evidenciado na Equação (7).

$$\{U\} = \{u_i \ w_i \ \theta_i \ u_j \ w_j \ \theta_j \ \dots \ u_n \ w_n \ \theta_n\}^T \quad (7)$$

A matriz de mudança de forma não descreve o comportamento deformável da estrutura, descreve somente os deslocamentos e as rotações nodais do corpo rígido. Para descrever as modificações de forma e o comportamento elástico, é preciso utilizar um segundo conjunto de variáveis cinemáticas, denominadas como deformações generalizadas (Amorim, 2016). Considere um elemento estrutural, composto por dois nós i e j , respectivamente, conforme apresentado na Figura 16.

Figura 16- Deformações generalizadas do elemento b conectado pelos nós i e j



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015).

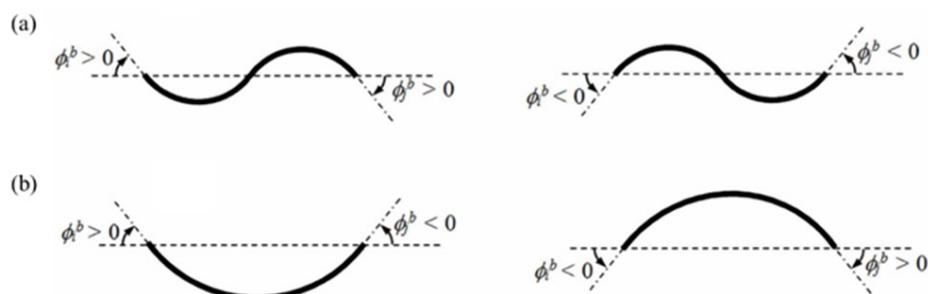
A matriz de mudança de forma do elemento b é determinada através da Equação (8).

$$\{\Phi_b\} = \{\Phi_i^b \ \Phi_j^b \ \delta_b\}^T \quad (8)$$

sendo Φ_i^b e Φ_j^b as rotações relativas das seções transversais do elemento b , em relação a seções transversais dos nós i e j da corda, respectivamente, e δ_b alongamento do elemento, ou seja, a deformação axial do elemento.

A matriz de mudança de forma para um movimento de corpo rígido do elemento de pórtico é nula. Caso haja alguma deformação, é possível verificar o novo formato do elemento através das componentes de rotações relativas, apresentadas na Figura 4. Se os termos das rotações relativas dos nós i e j possuem o mesmo sinal, o elemento apresenta uma deformação em forma de “S” (evidenciado na Figura 17(a)). Por outro lado, se as componentes de deformações tiverem sinais opostos, o elemento apresenta uma forma final semelhante à de um semicírculo, como demonstrado na Figura 17(b) (Flórez-Lopez; Marante; Picón, 2015).

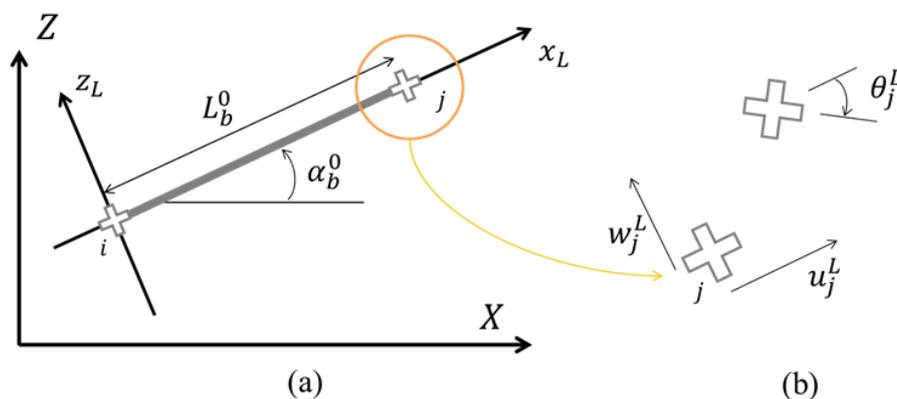
Figura 17-(a) Deformada de um elemento com sinais iguais; (b) Deformada do elemento com sinais opostos



Fonte: Amorim (2016).

Para representar os deslocamentos generalizados, pode-se utilizar as coordenadas globais e locais. Considere um elemento de pórtico b que está conectado aos nós i e j , que possuem coordenadas globais no eixo XZ e locais no eixo $X_L Z_L$, como evidenciado na Figura 18. O ângulo formado pelo elemento em sua configuração inicial em relação ao eixo da coordenada global X é representado por α_b^0 e o comprimento do elemento sem sofrer esforço axial é denotado por L_b^0 .

Figura 18 - (a) Elemento b em coordenadas locais; (b) Deslocamentos generalizados do nó j



Fonte: Amorim (2016).

Os deslocamentos podem ser representados pelas expressões descritas nas Equações (9) a (13), correspondentes aos eixos das coordenadas globais e locais. Para obter o deslocamento no eixo global, a partir das coordenadas locais, faz-se necessário realizar uma rotação de eixos.

$$u_j = u_j^L \cos \alpha_b^0 - w_j^L \sin \alpha_b^0 \quad (9)$$

$$w_j = w_j^L \cos \alpha_b^0 - u_j^L \sin \alpha_b^0 \quad (10)$$

$$u_n^L = u_n \cos \alpha_b + w_n \sin \alpha_b \quad (11)$$

$$w_n^L = w_n \cos \alpha_b - u_n \sin \alpha_b \quad (12)$$

$$\theta_n^L = \theta_n \quad (13)$$

onde n é igual a i e j , pois são os nós que estão conectados no elemento de pórtico b . Os deslocamentos locais do componente analisado podem ser obtidos através da rotação dos eixos, que é expressa pelo produto da matriz de transformação e de deslocamentos dos nós do elemento em sistemas globais, de acordo com que é apresentado na Equação (14).

$$\{q^L\}_b = [T]_b \{q\}_b \quad (14)$$

em que $\{q^L\}_b$ é a matriz de deslocamentos generalizados do elemento b em coordenadas locais, ou seja, $\{q^L\}_b = \{u_i^L \ w_i^L \ \theta_j^L \ u_j^L \ w_j^L \ \theta_j^L\}$. $[T]_b$ é a matriz de transformação, que depende do ângulo α_b definida de acordo com a Equação (15).

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A configuração da deformada de um elemento de pórticos depende do incremento infinitesimal do deslocamento generalizado aplicado em cada nó, como evidenciado na Figura 19 (Amorim, 2016). Quando o elemento é submetido a um incremento de deslocamento generalizado du_i^L , há uma atenuação ou um acréscimo no tamanho da barra

como evidenciado na Figura 19(a) e 19(d). As deformações infinitesimais resultantes da aplicação do deslocamento no nó i e j estão dispostas nas Equações (16) e (17).

$$d\Phi_i = 0 \quad d\Phi_j = 0 \quad d\delta = -du_i^L \quad (16)$$

$$d\Phi_i = 0 \quad d\Phi_j = 0 \quad d\delta = du_j^L \quad (17)$$

Ao se aplicar um incremento de deslocamento dw_n^L no nó i e j , (Figura 19(b) e 19(e)), admite-se que esses deslocamentos e os ângulos são muito pequenos, portanto, podem ser desprezados. Nesse caso não há modificação no comprimento do elemento e as deformações correspondentes são dadas por:

$$d\Phi_i = -\frac{dw_i^L}{L_b} \quad d\Phi_j = -\frac{dw_i^L}{L_b} \quad d\delta = 0 \quad (18)$$

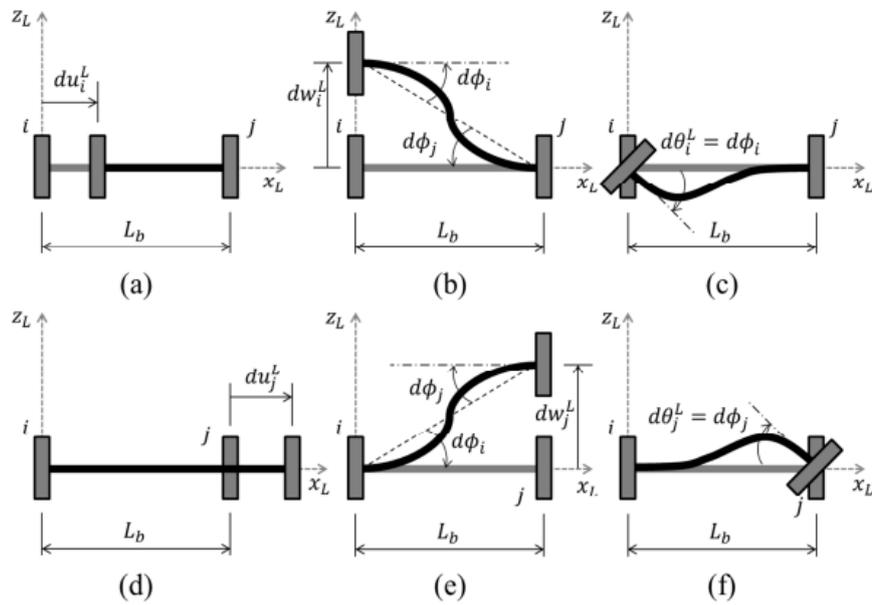
$$d\Phi_i = \frac{dw_j^L}{L_b} \quad d\Phi_j = \frac{dw_j^L}{L_b} \quad d\delta = 0 \quad (19)$$

Aplicando uma rotação infinitesimal aos nós do elemento de pórtico, como apresentado nas Figuras 19(c) e 19(f), a barra sofre somente um incremento da rotação relativa no nó i e j , respectivamente, mediante a aplicação da rotação.

$$d\Phi_i = d\theta_i^L \quad d\Phi_j = 0 \quad d\delta = 0 \quad (20)$$

$$d\Phi_i = 0 \quad d\Phi_j = d\theta_j^L \quad d\delta = 0 \quad (21)$$

Figura 19- (a) Incremento de deslocamento no nó i na coordenada x_L ; (b) Incremento de deslocamento no nó i na coordenada Z_L ; (c) Aplicação da rotação no nó i ; (d) Aplicação do deslocamento no nó j ; (e) Aplicação do deslocamento no nó j ; (f) Aplicação da rotação no nó j ;



Fonte: Amorim (2016).

Admitindo-se que todos os incrementos de deslocamentos horizontais, verticais e rotações relativas acontecem simultaneamente, obtêm-se os seguintes incrementos de deformações generalizadas:

$$d\Phi_i = -\frac{dw_i^L}{L_b} + \frac{dw_j^L}{L_b} + d\theta_i^L \quad (22)$$

$$d\Phi_j = -\frac{dw_i^L}{L_b} + \frac{dw_j^L}{L_b} + d\theta_j^L \quad (23)$$

$$d\delta = -du_i^L + du_j^L \quad (24)$$

A relação entre os deslocamentos generalizados e as deformações generalizadas obtidas através das coordenadas locais podem ser escritas de forma vetorial como evidenciada na Equação (25).

$$\{d\Phi\}_b = [B(q^L)]_b \{dq^L\}_b \quad (25)$$

sendo $[B(q^L)]_b$ a matriz de transformação cinemática local do elemento b que depende do comprimento do elemento finito descrita como:

$$[B(q^L)]_b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_b} & 1 & 0 & \frac{1}{L_b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_b} & 0 & 0 & \frac{1}{L_b} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

A matriz de mudança de forma global do elemento em análise pode ser obtida através da matriz cinemática local, aplicando a rotação de eixos, conforme apresentado nas Equações (27) e (28).

$$\{d\Phi\}_b = [B(q^L)]_b [T]_b \{dq\}_b = [B(q)]_b \{dq\}_b \quad (27)$$

$$[B(q)]_b = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 \\ \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 \\ -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

onde $[B(q)]_b$ é a matriz de transformação global do elemento b . A matriz de mudança de forma generalizada global é válida para caso não lineares, uma vez que, em geral, as estruturas são tão rígidas que as modificações de comprimento e orientação dos elementos podem ser negligenciados ao calcular a matriz de transformação (Flórez-Lopez; Marante; Picón, 2015). Nestes casos, a relação cinemática pode ser reescrita como:

$$\alpha_b \cong \alpha_b^0 \quad L_b \cong L_b^0 \quad \{\Phi\}_b \cong [B^0]_b \{q\}_b \quad (29)$$

em que $[B^0]_b$ é a matriz de transformação cinemática correspondente à configuração inicial do elemento (Amorim, 2016).

A equação cinemática escrita em termos da matriz de deslocamento é dada por:

$$\{d\Phi\}_b \cong [B_E(U)]_b \{dU\}; \quad \{\Phi\}_b \cong [B_E^0]_b \{U\} \quad (30)$$

sendo $[B_E(U)]_b = [B_E^0]_b$ correspondente à matriz de transformação cinemática expandida, para considerar simultaneamente todos os elementos, a fim de analisar a estrutura completa, onde colunas de zeros são inseridas nas posições que não correspondem aos deslocamentos do elemento em questão.

$$[B_E^0]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & -\frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & -\frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & \frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & -\frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & -\frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & \frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\text{cos}\alpha_b & -\text{sen}\alpha_b & 0 & \dots & \text{cos}\alpha_b & \text{sen}\alpha_b & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \dots \quad u_i \quad w_i \quad \theta_i \quad \dots \quad u_j \quad w_j \quad \theta_j \quad \dots$$

3.1.3 Estática de pórticos planos

As variáveis estáticas de pórticos são subdivididas em matrizes de forças externas e de tensões que estão relacionadas por meio das equações de equilíbrio. O equilíbrio estático de uma estrutura é obtido com base nos princípios dos trabalhos virtuais, equiparando o trabalho virtual interno com o trabalho virtual externo, para quaisquer deslocamentos virtuais impostos, conforme a Equação (32).

$$w_{def}^* = w_{ext}^* \quad \forall \{U\}^* \quad (32)$$

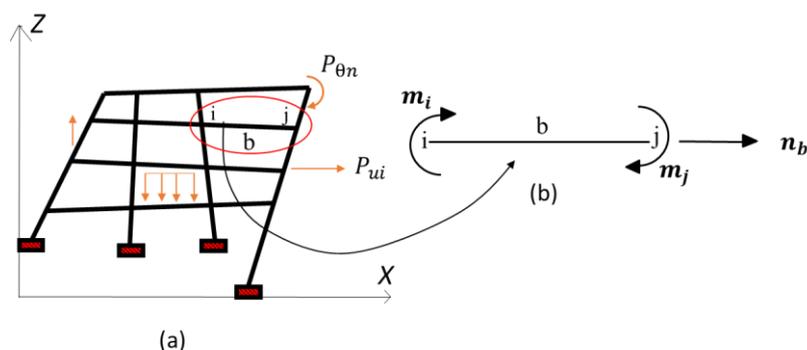
O trabalho virtual de deformações ou trabalho virtual interno (w_{def}^*) é determinado pelas tensões generalizadas ou esforços generalizados. Essas grandezas estão relacionadas às deformações generalizadas de uma estrutura, como apresentado na Figura 20 (a). De acordo com Powell (1969) os nós são entidades rígidas que apresentam apenas deslocamentos, enquanto os elementos são os responsáveis pela deformabilidade da estrutura, ou seja, são responsáveis pelo aspecto deformada da estrutura. Diante disso, o trabalho de deformações é descrito como:

$$w_{def}^* = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^t \{M\}_b \quad (33)$$

em que $\{\Phi^*\}_b^t$ é a matriz de deformações que representa os esforços virtuais atuantes na estrutura, $\{M\}_b$ é a matriz de tensões generalizadas, descrita como $\{M^*\}_b^t = \{m_i, m_j, n_b\}$, onde m_i e m_j são os momentos fletores nos nós i e j do elemento, respectivamente e n_b é a carga axial (Figura 20 (b)). Substituindo, a matriz de deformações Equação (30), o trabalho virtual interno é dado por:

$$w_{def}^* = \sum_{b=1}^m [B_E^0]_b^t \{U^*\}^t \{M\}_b \quad (34)$$

Figura 20– (a) Forças externas aplicadas ao pórtico; (b) Tensões generalizada em um membro da estrutura



Fonte: Adaptada de Amorim (2016).

O trabalho virtual externo é determinado pelo produto entre as forças externas e os deslocamentos, apresentado na Equação (35).

$$w_{ext}^* = \{U^*\}^t \{P\} \quad (35)$$

As forças externas aplicadas $\{P\}$ são compostas por forças e momentos distribuídos ou concentrados ao longo das estruturas. As ações distribuídas podem ser substituídas por forças nodais equivalentes, as quais são aplicadas nos nós do elemento e reunidas em uma matriz de forças nodais generalizadas, apresentada na Equação (36) (Amorim, 2016).

$$\{P\}^t = \{p_{ui}, p_{wi}, p_{\theta i}, \dots, p_{uj}, p_{wj}, p_{\theta j}, \dots, p_{un}, p_{wn}, p_{\theta n}\} \quad (36)$$

O segundo índice das forças nodais externas está relacionado aos nós, enquanto o primeiro índice refere-se às direções globais das forças. Utiliza-se, u para representar a força horizontal, w para a força vertical e θ para os momentos fletores.

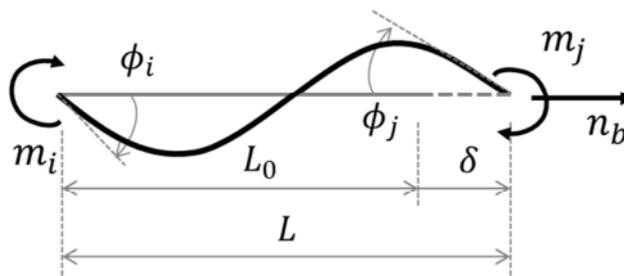
Portanto, as equações de equilíbrio são obtidas substituindo as Equações (34) e (35) na Equação (32), obtendo a Equação (37).

$$\sum_{b=1}^m [B_E^0]_b^t \{M\}_b = \{P\} \quad (37)$$

3.1.4 Relação Constitutiva

A relação entre matrizes de tensões e deformações é estabelecida por meio das leis constitutivas, em que as deformações generalizadas são compostas por duas rotações de flexão (Φ_i, Φ_j) , e um alongamento do elemento (δ) . Conjugadas às deformações generalizadas, o elemento apresenta os esforços generalizados, que são constituídas por dois momentos fletores e uma força axial (m_i, m_j, n_b) , conforme evidenciado na Figura 21.

Figura 21– Tensões e deformações do elemento de pórtico.



Fonte: Adaptada de Amorim (2016).

Ao determinar as deformações generalizadas em cada elemento de barra, é possível obter os deslocamentos generalizados nos nós, ou seja, a representação dos deslocamentos axiais e transversais em qualquer ponto do elemento, pode ser expressa em termos das deformações generalizadas (Amorim, 2016).

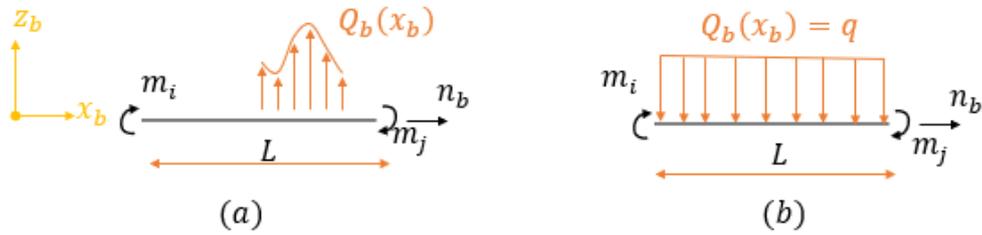
As relações constitutivas abordadas nesta pesquisa são fundamentadas na teoria clássica de viga de Timoshenko, as quais descrevem o comportamento de um elemento de pórtico evidenciada na Figura 22 (a). A teoria de Timoshenko é empregada para modelar o comportamento de vigas de modo a considerar tanto a deformação por esforço de flexão, quanto a deformação por esforço de cisalhamento. Esse processo é viabilizado por meio de um conjunto de equações derivadas das condições de equilíbrio e da análise cinemática, descrita a seguir:

$$Q_b(x) = \frac{dV_b(x)}{dx} \quad (38)$$

$$V_b(x) = \frac{dM_b(x)}{dx} \quad (39)$$

sendo $Q_b(x_b)$ a carga distribuída ao longo do elemento, $M_b(x_b)$ a distribuição do momento fletor ao longo do elemento. Por simplificação, admite-se que a carga é distribuída de forma uniforme em todo o elemento é igual a q , ou seja, $Q_b(x_b) = q$, como demonstrado na Figura 22 (b).

Figura 22– Forças locais no elemento b.



Fonte: Adaptada de Amorim (2016).

A equação que descreve o momento atuante no elemento é determinada através de uma integração dupla da carga distribuída, como evidenciado na Equação 40.

$$M_b(x_b) = \iint q \, dx = \frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2 \quad (40)$$

em que C_1 e C_2 são constantes de integração e seus valores são encontrados aplicando as condições de contorno, conforme apresentado na Equação (38). Essas condições de contorno são provenientes da análise da Figura 22 (b), na qual são considerados os momentos fletores em dois pontos cruciais: o início do elemento, caracterizado pelo momento igual a m_i^b e o comprimento total do elemento em que o momento atuante é equivale a $-m_j^b$, ou seja, $M(0) = m_i^b$ e $M(L_b) = -m_j^b$. Desta forma, é possível obter as constantes de integração:

$$C_1 = \frac{-m_i^b - m_j^b}{L_b} - \frac{qL_b}{2}; \quad C_2 = m_i^b \quad (41)$$

A partir da relação momento-curvatura, evidenciado na Equação (1), é possível determinar a rotação da seção transversal do elemento de pórtico. Essa relação é primordial, pois expressa a variação angular da seção transversal ao longo do comprimento do elemento de pórtico.

$$\beta(x_b) = \int M(x) dx = \frac{qx^3}{6EI} + \frac{C_1x^2}{2EI} + \frac{C_2x}{EI} + \frac{C_3}{EI} \quad (42)$$

O deslocamento transversal do elemento, $w(x)$, é determinado através da formulação do esforço cortante, expressa na Equação (2).

$$w(x) = -k_sGA \left(\frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2 \right) + \left(\frac{qx^4}{24EI} + \frac{C_1x^3}{6EI} + \frac{C_2x^2}{2EI} + \frac{C_3x}{EI} \right) + C_4 \quad (43)$$

sendo C_i , com i variando de 1 a 4, constantes de integração e seus valores são encontrados aplicando as condições de contorno, cujos os valores são apresentados nas Equações (41) e (44). Essas condições de contorno são estabelecidas com base na análise da Figura 10 (b), em que deslocamentos transversais na extremidade e no comprimento total da barra são iguais a zero ($W(0) = W(L_b) = 0$).

$$C_3 = \frac{EI}{k_sGAL_b} (-m_i^b - m_j^b) + \frac{qL_b^3}{24} + \frac{m_i^b L_b}{3} + \frac{m_j^b L_b}{6}; \quad C_4 = m_i^b \quad (44)$$

Ao aplicar as condições de contorno na Equação (42), sabendo que $\beta(0) = -\phi_i$ e $\beta(L_b) = -\phi_j$, é possível determinar as rotações relativas das seções transversais dos nós que compõem o elemento de pórtico, ou seja, as rotações relativas do nó i e j .

$$\phi_i = \left(\frac{1}{L_b k_s GA} + \frac{L_b}{3EI} \right) m_i^b + \left(\frac{1}{L_b k_s GA} - \frac{L_b}{6EI} \right) m_j^b - \frac{qL_b^3}{24EI} \quad (45)$$

$$\phi_j = \left(\frac{1}{L_b k_s GA} - \frac{L_b}{6EI} \right) m_i^b + \left(\frac{1}{L_b k_s GA} + \frac{L_b}{3EI} \right) m_j^b + \frac{qL_b^3}{24EI} \quad (46)$$

Para completar o conjunto de equações que compõem as deformações generalizadas, o alongamento do elemento ou deformação axial da barra (δ), é determinado pela Equação (47).

$$\delta = \frac{n_b L_b}{EA} \quad (47)$$

Segundo Perdomo *et al.* (2013), a relação entre matrizes de deformações generalizadas, $\{\Phi^e\}_b$, e de tensões generalizadas, $\{M\}_b$, do elemento b podem ser descritas em forma matricial, como apresentado na Equação (48).

$$\{\Phi^e\}_b = [F_0]_b \{M\}_b \quad (48)$$

onde $[F_0]_b$ é a matriz de flexibilidade de elástica, a qual é determinada através dos conceitos de teoria clássica de vigas de Timoshenko como evidenciada a seguir:

$$[F_0]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI} & -\frac{L_b}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI} & \frac{L_b}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{EA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{k_s GAL_b} & \frac{1}{k_s GAL_b} & 0 \\ \frac{1}{k_s GAL_b} & \frac{1}{k_s GAL_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

3.2 Plasticidade uniaxial

3.2.1 *Pórticos elastoplásticos*

A teoria da plasticidade tem como finalidade caracterizar as deformações elásticas e plásticas em um material. As deformações elásticas, são aquelas em os elementos que analisados recuperam suas propriedades após a retirada do carregamento, enquanto que nas deformações plásticas o material não retorna para sua configuração inicial, ou seja, o material apresenta deformações permanentes.

O material que apresenta como resposta mecânica ambas as formas de deformações são denominadas como materiais elastoplásticos. Diante disto, a deformação total do elemento é definida como o somatório das deformações plásticas e elásticas, conforme evidenciado na Equação (50).

$$\varepsilon_T = \varepsilon_p + \varepsilon_e \quad (50)$$

A teoria da plasticidade fornece modelos matemáticos que descrevem aproximadamente o comportamento dos materiais. Esses modelos são regidos por três principais conceitos: lei de elasticidade, regra de encruamento e critérios de falha.

A lei de elasticidade estabelece a relação linear entre tensão e deformação elástica que ocorre dentro da região linearmente elástica de um material. Essa lei é descrita pela lei de Hooke, apresentada na Equação (51). Contudo, essa formulação não é integralmente suficiente para abranger o comportamento do material, cuja limitação reside no fato de que os valores das grandezas pertinentes não são preestabelecidos a priori. Portanto, para uma modelagem mais precisa, torna-se necessário introduzir novas formulações que atuam em consonância com a lei de elasticidade. Tais formulações, são denominadas como lei de evolução, caracterizada pelo seu vínculo à função de escoamento do material (Flórez-Lopez; Marante; Picón, 2015).

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon_T - \varepsilon_p) \quad (51)$$

sendo σ tensão aplicada ao material, ε_T é a deformação total do material e ε_p é a deformação plástica do elemento. Por simplificação, assume-se que o material é homogêneo e se comporta de maneira idêntica quando submetido a esforços em diferentes direções.

A função de escoamento é um conceito fundamental, pois define critérios para o início das deformações plásticas em um material. Essa função estabelece uma relação entre o estado de tensão do material com um valor de escoamento. No caso um estado de

tensão uniaxial em que o material está submetido a uma única direção de tensão, a tensão de escoamento representa a transição entre o comportamento elástico e plástico, ou seja, indica o início das deformações permanentes (Pessoa, 2011).

A lei de evolução tem como finalidade descrever como as propriedades plásticas do material evoluem ao longo do processo de deformações plásticas. Para ilustrar a função de escoamento e a lei de evolução, considere o modelo elastoplástico perfeito, apresentado a seguir:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (52)$$

$$\begin{cases} d\varepsilon_p = 0 & \text{se } f < 0 \\ d\varepsilon_p \neq 0 & \text{se } f = 0 \end{cases} \quad (53)$$

em que f é a função de escoamento, σ_y tensão de escoamento $d\varepsilon_p$ incremento de deformações plásticas.

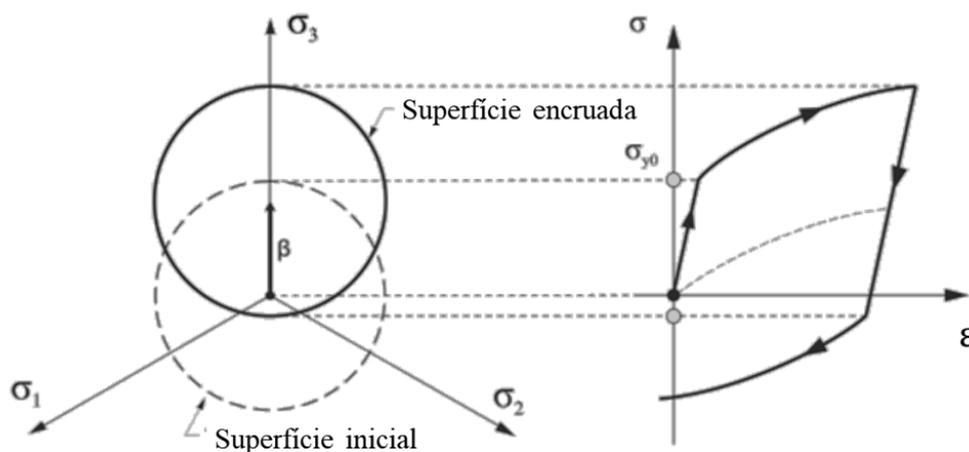
Através da análise da lei de evolução, percebe-se que quando a função de escoamento é menor que zero, o material não apresenta incremento de deformações plásticas, mantendo-se em um comportamento elástico. Por outro lado, quando a função de escoamento é igual a zero, o material passa a apresentar um comportamento plástico, ou seja, deformações permanentes começam a ocorrer. Ressalta-se, que a lei de evolução e a função de escoamento variam de acordo com o tipo de material e das condições de carregamento.

Entre os modelos elastoplásticos, dois aspectos importantes devem ser considerados, o encruamento e o efeito de Bauschinger. Estes efeitos são observados em situações de carregamentos cíclicos, nos quais as reversões de carga influenciam o limite de escoamento na direção oposta, resultando em uma translação constante da superfície de escoamento a cada mudança de direção (Lopes, 2014). Esse fenômeno está relacionado à redução da tensão de escoamento, quando o material é submetido a um carregamento em sentido oposto após a deformação plástica, por causa dos rearranjos estruturais das imperfeições.

A incorporação do efeito de Bauschinger na modelagem numérica para descrever o comportamento estrutural, é primordial, pois permite uma previsão com mais precisão das redistribuições do estado de tensões em materiais submetidos a carregamentos cíclicos. Destaca-se que, à medida que a intensidade ou nível de interferência entre os carregamentos ou forças aplicadas se intensifica, a deformação plástica amplifica, conseqüentemente, a magnitude desse efeito sobre a resposta da estrutura é maior (Hu; Penumarthy, 2014).

Por sua vez, o encruamento é descrito como um aumento da resistência mecânica do material após a deformação. Salienta-se que a regra de encruamento é primordial para modelar as alterações na superfície de escoamento durante a trajetória do encruamento, delineando as modificações que ocorrem no material. Essa regra é fundamental na previsão do comportamento mecânico de materiais submetidos a carga cíclicas (Chintankumar; Gandhi, 2018). Neste contexto, destaca-se o encruamento cinemático evidenciado na Figura 23, onde se assume que a superfície de escoamento mantém uma invariabilidade em seu tamanho e se desloca no espaço de tensões à medida que a progressão do escoamento se desenvolve.

Figura 23– Modelo elastoplástico com encruamento cinemático



Fonte: Lopes (2011).

3.2.2 Critério de falha

Os critérios de falha são empregados para determinar o limite de quando um material alcançar um estado de tensão em que não é mais capaz de suportar as condições

de carga sem manifestar falhas. Entre os diversos critérios de falha disponíveis na literatura, com diferentes mecanismos de ruptura, tem-se, o critério de Tresca, critério de von Misses, critério de Tsai-Hill, critério de Hashin, critério de Hoffman, Critério de Puck e de Hill.

No âmbito desta pesquisa, a ênfase será direcionada ao critério de Hill quadrática no plano, com a finalidade de avaliar a resistência e a estabilidade dos materiais favos de mel, as quais exibem comportamento anisotrópico em resposta à diversidade de condições de carregamento. A escolha desse critério como abordagem analítica emerge como uma decisão estratégica, objetivando proporcionar uma compreensão das reações dos materiais analisados quando submetidos às solicitações multiaxiais.

3.2.2.1 Critério de Hill quadrática no plano

A função de escoamento quadrática de Hill (1948), apresentada na Equação (54), é uma ferramenta capaz de analisar as tensões planas e descrever a anisotropia plástica de um material. Essa abordagem possibilita considerar a influência das tensões em diferentes orientações, sendo fundamental para descrever o comportamento mecânico dos materiais que apresentam respostas distintas em diferentes direções.

$$Y^2 = \sigma_1^2 + \left(\frac{2R_0}{1 + R_0} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{1 + R_{90}}{1 + R_0} \right) \frac{R_0}{R_{90}} \sigma_2^2 \quad \forall \sigma_3 = 0 \quad (54)$$

sendo σ_1 e σ_2 os valores principais do tensor de tensão em cada direção de aplicação, R_0 e R_{90} a razão de deformações plásticas ao longo da largura e espessura, também denominados como coeficiente de Lankford.

Os coeficientes de Lankford são empregados em análises de materiais que apresentam anisotropia plástica. Tais constantes são definidas como a razão de deformação plástica ao longo da largura e da espessura da estrutura analisada durante ensaios de tração ou compressão (Ghosh; Miroux; Kestens, 2015).

4 METODOLOGIA

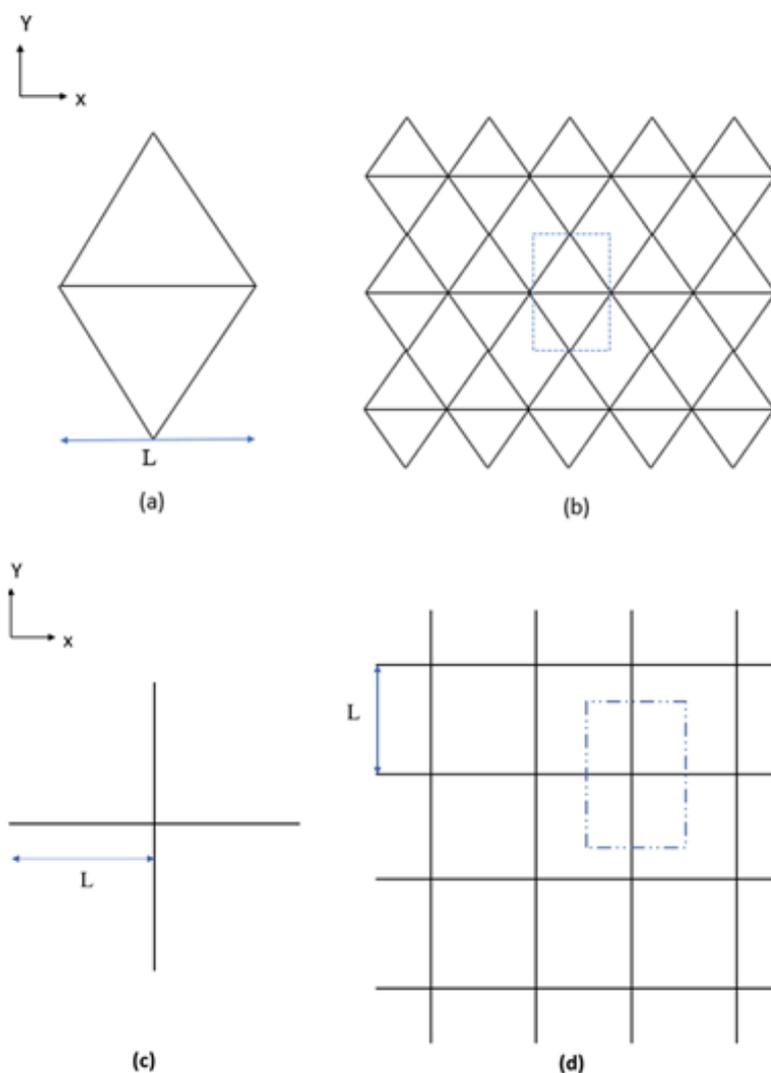
4.1 Propriedades Elásticas

Nesta pesquisa, um dos objetivos é investigar as propriedades mecânicas dos materiais favos de mel. Para esse fim, a análise será realizada utilizando a teoria de pórticos planos, apresentada no Capítulo 3. Para viabilizar esta abordagem, torna-se imprescindível a definição da topologia da célula unitária, seguida da determinação da conectividade dos nós.

4.1.1 Topologia

Inicialmente, foram consideradas duas configurações distintas de células unitárias para análise: diamante e cruz. Ressalta-se que as propriedades mecânicas estão inter-relacionadas com a configuração da célula unitária. A Figura 24 evidencia a célula unitária e a supercélula para ambas configurações.

Figura 24– (a) Célula unitária Diamante; (b) Supercélula Diamante; (c) Célula unitária cruz; (d) Supercélula Quadrangular

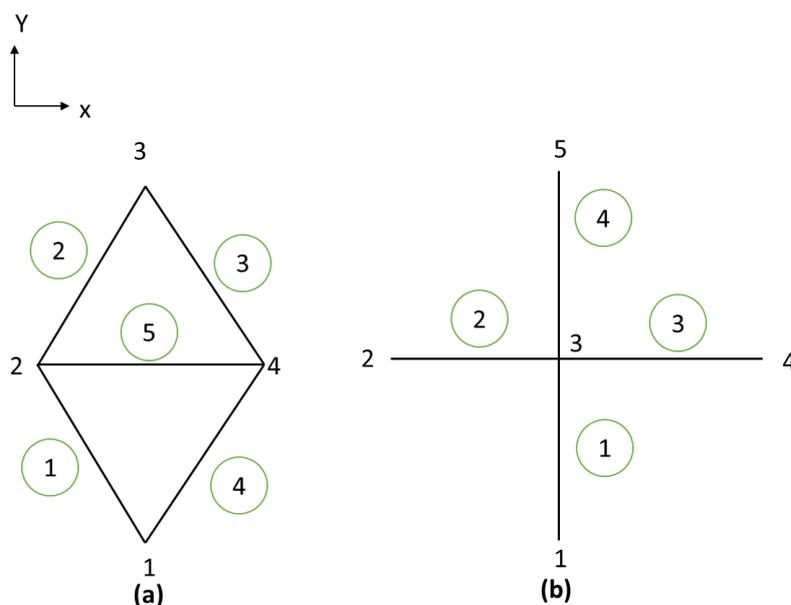


Fonte: Autor (2024).

4.1.2 Aplicação da teoria de Pórticos

Para aplicação dos conceitos de pórticos planos, é essencial a enumeração dos elementos e o estabelecimento das conectividades dos nós, conforme ilustrado na Figura 25. Destaca-se, que essa etapa metodológica é importante para garantir uma representação precisa, além de facilitar a análise da estrutura, tanto na configuração da célula unitária diamante como na quadrangular, que neste estudo em particular é referida como célula unitária cruz. Para as Células unitárias em estudos, observa-se que o diamante é constituído por 5 elementos e 4 nós, enquanto, a célula unitária cruz possui 4 elementos e 5 nós.

Figura 25– (a) Célula unitária Diamante; (b) Célula unitária Cruz



Fonte: Autor (2024).

A consideração da conectividade facilita na obtenção da matriz de deslocamentos generalizados e matriz de forças externas que atuam na estrutura. Além disso, tal abordagem possibilita a determinação das matrizes de deformações generalizadas, tensões generalizadas e a formulação das equações cinemáticas para cada elemento da célula em análise.

Após a obtenção dessas matrizes, procedeu-se a determinação da equação de equilíbrio e da matriz de flexibilidade para cada barra que constitui a configuração, em estudo. Ressalta-se, que para a determinação da matriz de flexibilidade é necessário considerar o fator de correção relacionado ao cisalhamento, o qual está intrinsecamente vinculado à geometria da seção transversal de cada célula unitária. Neste estudo, optou-se por utilizar seções transversais retangulares para as células unitárias em configurações de diamante e circulares para as células unitárias em forma de cruz.

4.1.3 Condições de contorno

Após a obtenção de todos esses parâmetros relevantes descritos nos tópicos acima, torna-se necessário aplicar as condições de contorno e de equilíbrio à estrutura, levando em consideração os esforços atuantes na mesma. Essa etapa é fundamental para determinar as respostas mecânicas da estrutura sob condições de aplicação de esforços e

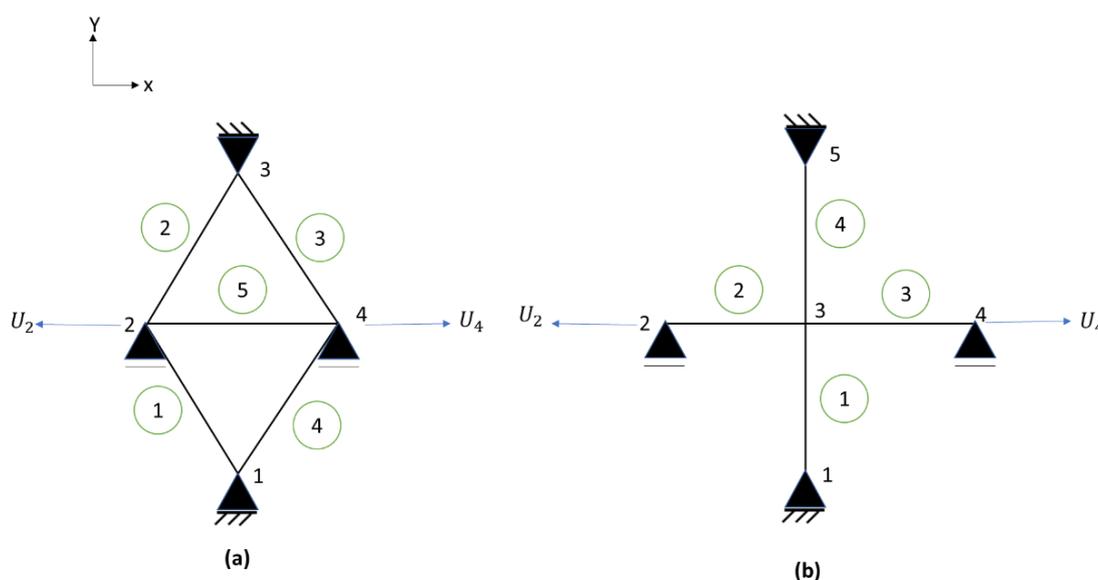
restrições, possibilitando uma análise abrangente da estabilidade e desempenho do sistema estrutural.

4.1.3.1 Condições de contorno para tração Horizontal

Para simular o comportamento de uma estrutura periódica sujeita a carregamento de tração horizontal, no contexto da célula unitária do diamante, adotou-se premissas que consideram as restrições de deslocamentos tanto na direção horizontal e vertical nos nós 1 e 3 da célula unitária. Adicionalmente, foram impostos os deslocamentos no nó pertencente ao elemento 5, que é constituído pelos nós 2 e 4, juntamente com a restrição de deslocamento vertical nesses respectivos nós. Esta análise teve como escopo a garantia do equilíbrio estrutural subjacente. A Figura 26 (a) ilustra de maneira elucidativa as condições de contorno pertinente à célula unitária do diamante.

De maneira análoga, a análise foi conduzida para a célula unitária da configuração tipo cruz, na qual se considerou a restrições de deslocamentos nas direções horizontal e vertical nos nós 1 e 5, enquanto que nos nós 2 e 4 os deslocamentos foram limitados unicamente na direção vertical. Ademais, foram introduzidos nos nós 2 e 4 um deslocamento horizontal, como demonstrado na Figura 26 (b). Salienta-se que, tanto na Célula unitária diamante quanto na cruz, as rotações são permitidas.

Figura 26– Tração Horizontal célula unitária:(a) Diamante; (b) Cruz



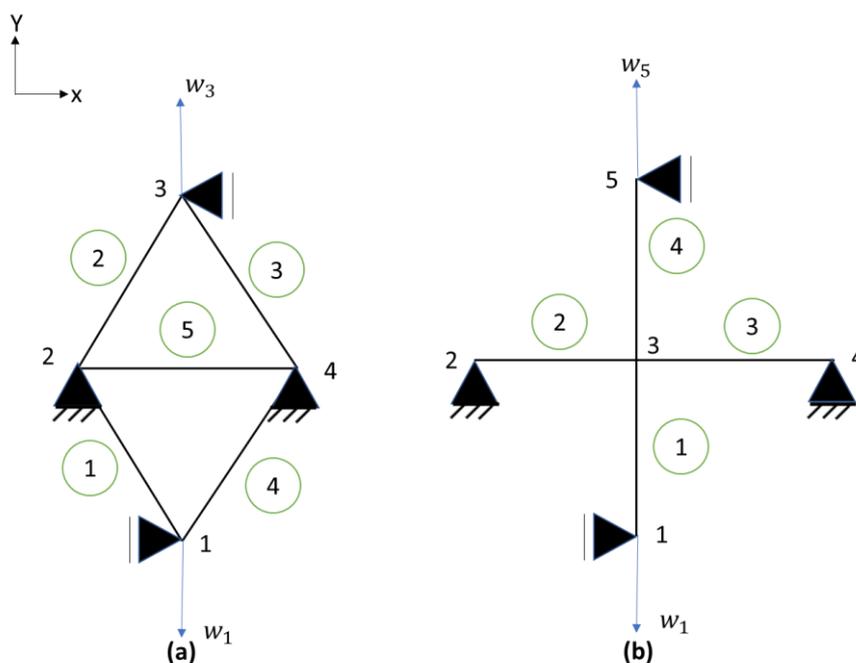
Fonte: Autor (2024).

4.1.3.2 Condições de contorno para tração vertical

Para tração vertical, na célula unitária diamante, foram impostas restrições na direção horizontal nos nós 1 e 3. Além disso, deslocamentos foram aplicados na direção vertical a esses mesmos nós. No que se refere aos nós 2 e 4, foram impostas as restrições na direção horizontal quanto na vertical, como evidenciado na Figura 27 (a).

Para a célula unitária configurada em cruz, e também sujeita à tração vertical, foram aplicadas restrições de deslocamentos na direção horizontal nos nós 1 e 5. Adicionalmente, nestes respectivos nós, foram introduzidos os deslocamentos na direção vertical. Nos nós 2 e 4, por sua vez, restringem-se os deslocamentos na direção horizontal quanto na vertical, conforme demonstrado na Figura 27 (b).

Figura 27–Tração Vertical célula unitária: (a) Diamante; (b) Cruz



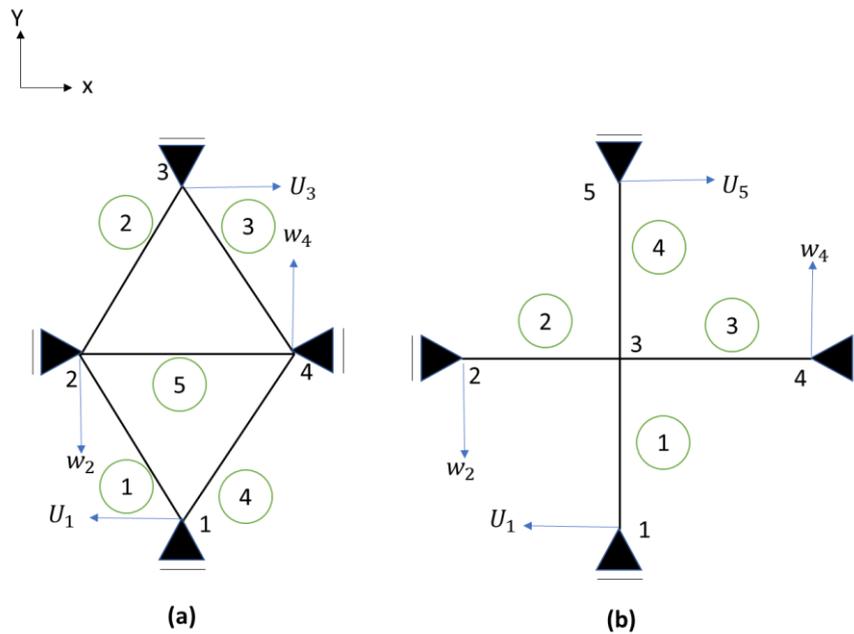
Fonte: Autor (2024).

4.1.3.3 Condições de contorno para Cisalhamento

No contexto do material submetido ao esforço de cisalhamento aplicado à célula unitária do diamante, foram aplicados deslocamentos na direção horizontal nos nós 1 e 3, conjuntamente com os deslocamentos verticais nos nós 2 e 4, conforme exposto na Figura 28 (a).

Por outro lado, na célula unitária cruz sob carregamento por cisalhamento, impõem-se um deslocamento horizontal nos nós 1 e 5. Simultaneamente, os deslocamentos verticais foram aplicados nos nós 2 e 4. Adicionalmente, foram impostas restrições de deslocamentos horizontais nos nós 2 e 4, enquanto restrições verticais foram impostas nos nós 1 e 5, como demonstrado na Figura 28 (b).

Figura 28–Cisalhamento aplicado na Célula unitária: (a) Diamante; (b) Cruz



Fonte: Autor (2024).

4.1.4 Deslocamento imposto

Os deslocamentos impostos foram obtidos mediante a aplicação dos conceitos da teoria da elasticidade, com ênfase na relação entre tensão e deformação de um material em regime elástico linear, na qual é descrita através da formulação matricial da Lei de Hooke, representada na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

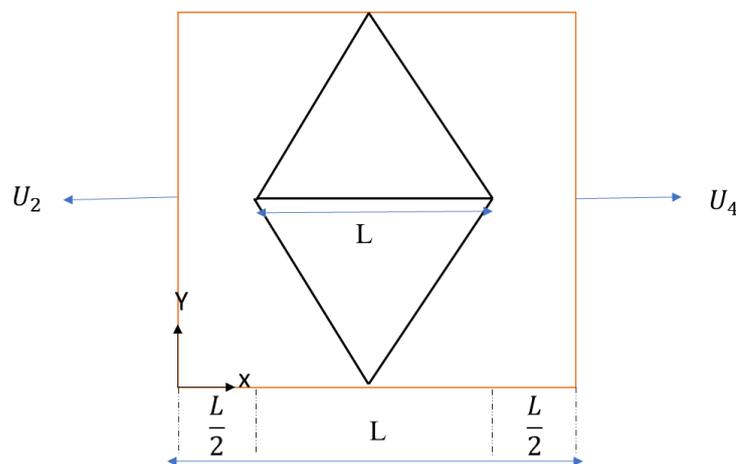
onde σ é o tensor de tensões, τ_{xy} é o tensor de cisalhamento, C é a matriz constitutiva, que contém as constantes elásticas do material, definida na Equação (56).

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (56)$$

em que G_{12} é o módulo de cisalhamento. Essa formulação encontra-se amplamente deduzida em diversos trabalhos na literatura, que explana sobre as propriedades mecânicas do material, como o de Reddy (2013), Mase; Smelser e Rossmann (2020).

Para atender a finalidade desta pesquisa, optou-se, por adotar uma deformação unitária como premissa fundamental. Para exemplificar esse conceito, considere a célula unitária no formato diamante, demonstrada na Figura 29, submetida a um carregamento de tração horizontal.

Figura 29– Deformação na Célula unitária Diamante



Fonte: Autor (2024).

Neste contexto, ao se considerar uma deformação igual a 1mm, torna-se possível empregar a relação intrínseca demonstrada na Equação (55). Por conseguinte, viabiliza-se o cálculo preciso do deslocamento imposto neste exemplo, conforme demonstrado na Figura referida e na Equação (57).

$$\varepsilon_x = \frac{2L - L}{L} = 1, \quad U_2 = \frac{L}{2}, \quad U_4 = -\frac{L}{2} \quad (57)$$

Destaca-se, que esse procedimento é análogo e foi empregado para determinação dos demais deslocamentos aplicados na tração vertical e cisalhamento da célula unitária na configuração diamante. A mesma abordagem também foi utilizada no cálculo dos deslocamentos impostos na análise da Célula unitária em forma de cruz.

4.2 Propriedades Plásticas

Com base nos conceitos explanados neste trabalho, visando aplicar a lei de plasticidade em materiais periódicos favos de mel, tornou-se necessário a determinação dos valores principais do tensor de tensão ao longo de cada direção de aplicação de esforços. Para tal propósito, é essencial estabelecer a lei de elasticidade e a função de escoamento, inerente ao modelo elastoplástico adotado. Ressalta-se que o modelo elastoplástico com encruamento cinemático é a abordagem adotada no âmbito desta pesquisa.

A lei de elasticidade é conceituada mediante a aplicação dos conceitos da lei de Hooke. Essa lei estabelece relação entre a força normal, deformação e o deslocamento, como apresentado a seguir:

$$Le = n = EA \left(\frac{\delta}{L} - \varepsilon_p \right) \quad (58)$$

onde n é a força normal (tração ou compressão) aplicada ao elemento estrutural, δ é o deslocamento no elemento estrutural; ε_p é a extensão plástica acumulada, ou seja, é uma medida da deformação do elemento em resposta à carga aplicada. L representa o comprimento original do elemento estrutural antes da aplicação da carga e EA é rigidez axial do material, ou seja, o produto do módulo de elasticidade longitudinal e a área da seção transversal.

A função de escoamento, derivada da Equação (52), tem como finalidade determinar o início da deformação plástica nos materiais. Essa formulação é expressa de forma reiterada na Equação (59).

$$f(\sigma) = |\sigma A| - \sigma_0 A = |n| - \sigma_0 A \quad (59)$$

em que σ_0 é a tensão de escoamento do material.

Salienta-se, que a lei de elasticidade e a função de escoamento são estabelecidas após a equação de equilíbrio e subsequente a isso, é delineado o primeiro passo elástico. A evolução prossegue até que a tensão de escoamento seja alcançada, marcando o início das deformações plásticas no material. Estas deformações se acumulam até que o material alcance sua tensão última. Diante disso, torna-se viável o cálculo da tensão de escoamento e da tensão de ruptura.

Após a obtenção dessas tensões, torna-se possível aplicar o critério de falha de Hill quadrática no plano, com o propósito de avaliar a resistência e a estabilidade dos materiais, englobando células unitárias na configuração de diamante e cruz. Essa formulação é delineada na Equação (54) e reescrita na Equação (60).

$$Y^2 = \sigma_1^2 + \left(\frac{2R_0}{1+R_0} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{1+R_{90}}{1+R_0} \right) \frac{R_0}{R_{90}} \sigma_2^2 \quad \forall \sigma_3 = 0 \quad (60)$$

onde Y representa a componente de tensão normal no plano X ou Y, ou a componente de tensão de cisalhamento, ou seja, ao aplicar o critério de Hill no eixo X, a Equação (60) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{11}^2 = \sigma_1^2 + \left(\frac{2R_0}{1+R_0} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{1+R_{90}}{1+R_0} \right) \frac{R_0}{R_{90}} \sigma_2^2 \quad (61)$$

Os valores das tensões principais (σ_1 e σ_2) são determinados através da Equação (62).

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (62)$$

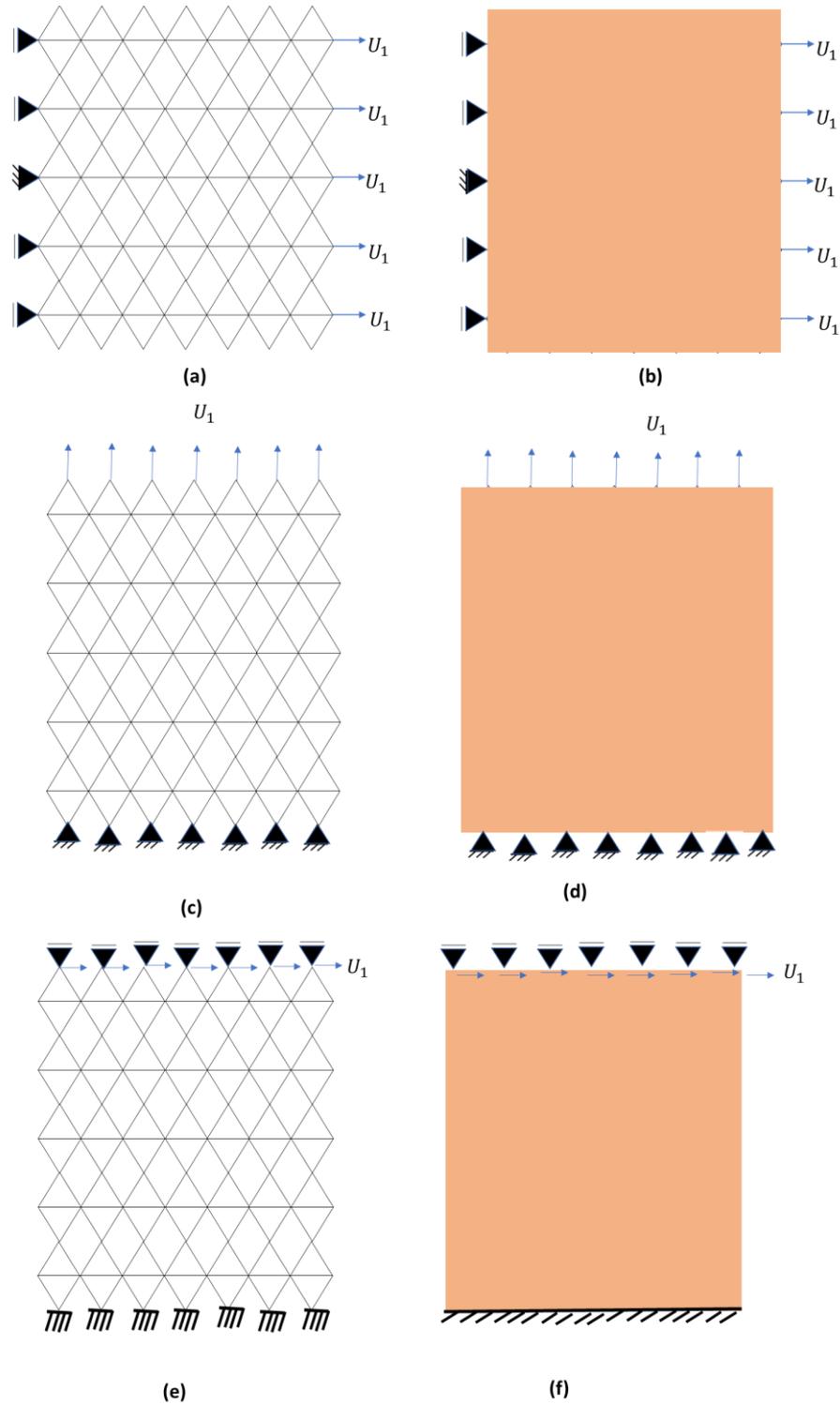
em que σ_i é a tensão principal na direção do plano, σ_{11} e σ_{22} são as componentes de tensões do plano do eixo X e Y e τ_{xy} é a tensão de cisalhamento.

4.3 Validação da metodologia aplicada

Para os exemplos analisados, a validação da metodologia empregada neste estudo foi conduzida mediante a comparação entre as forças calculadas no software de álgebra computacional e as obtidas com *software* que utiliza os métodos dos elementos finitos. Essa análise comparativa foi realizada para a célula unitária nas duas configurações em estudo. Diante disso, foram selecionados os nós 2 e 3 da célula diamante para análise, e os nós 2 e 5 da célula cruz. Enfatiza-se que a escolha desses pontos de análises foi feita de maneira aleatória.

A segunda etapa de validação se deu mediante a extensão dos resultados obtidos a partir da célula unitária para uma configuração de supercélula, tanto na topologia do diamante quanto na quadrangular. Essa extensão foi empregada sob as aplicações de condições de contornos e de equilíbrio idênticas, mantendo o comprimento e largura iguais para a supercélula e a estrutura homogeneizada aplicando um deslocamento unitário em ambas configurações, ou seja, $U_1 = 1 \text{ mm}$. Tal procedimento possibilitou uma análise precisa dos esforços resultantes ao se empregar a comparação dos resultados obtidos da supercélula e em contraposição da estrutura considerando homogênea. A supercélula e a estrutura homogeneizada para tração horizontal, tração vertical e cisalhamento da célula unitária diamante encontra-se evidenciada na Figura 30. Ressalta-se, que essa análise foi realizada para tração horizontal, tração vertical e cisalhamento de ambas configurações.

Figura 30—Tração Horizontal : (a) Supercélula; (b) Estrutura Homogeneizada; Tração Vertical: (c) Supercélula; (d) Estrutura Homogeneizada; Cisalhamento: (e) Supercélula; (f) Estrutura Homogeneizada



Fonte: Autor (2024).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são discutidas as análises das propriedades mecânicas dos favos de mel, considerando as configurações de diamante e cruz. A análise dessas propriedades é conduzida com auxílio de dois recursos computacionais de relevância acadêmica: um ambiente de álgebra computacional e um *software* especializado na execução de simulações utilizando o método dos elementos finitos.

5.1 Exemplos acadêmicos

Neste segmento, são delineados exemplos acadêmicos que ilustram as propriedades elásticas inerentes à célula unitária em configurações diamante e cruz, juntamente com as análises de tensões de escoamento e de ruptura.

5.1.1 Propriedades elásticas

Para investigar as propriedades elásticas da célula unitária diamante e cruz com seção transversal retangular, através da aplicação da teoria de pórticos planos, foram adotados parâmetros específicos, tendo em consideração o material empregado, aço A36, conforme evidenciados na Tabela 1.

Tabela 1-Parâmetros das células unitárias

Parâmetros	Configuração		Unidades
	Diamante	Cruz	
Comprimento de cada barra (L)	1	0,5	mm
Módulo de elasticidade (E)	207		GPa
Fator de correção ao cisalhamento (k_s)	5/6		–
Base da seção transversal	1		mm
Altura da seção transversal (h)	0,15		mm
Tensão de escoamento do material (σ_0)	248		MPa
coeficiente de Poisson (ν)	0,3		–

Fonte: Autor (2024).

Através da aplicação desses parâmetros, aliado aos procedimentos explanados na metodologia foi possível obter as propriedades elásticas dos materiais favos de mel submetidos a solicitações de tração horizontal, tração vertical e cisalhamento. As

formulações derivadas dessas análises estão apresentadas na Tabela 2 para a configuração diamante e na Tabela 3 para configuração em Cruz.

Tabela 2-Valores das propriedades elásticas da célula unitária Diamante

Solicitações	Tração Horizontal	Tração vertical	Cisalhamento
Constantes elásticas na direção (x)	$C_{11} = \frac{5bhE\sqrt{3}}{12L}$	$C_{12} = \frac{bhE\sqrt{3}}{4L}$	$C_{13} = 0$
Constantes elásticas na direção (y)	$C_{21} = \frac{bhE\sqrt{3}}{4L}$	$C_{22} = \frac{3bhE\sqrt{3}}{4L}$	$C_{23} = 0$
Constantes elásticas na direção (xy)	$C_{13} = 0$	$C_{23} = 0$	$C_{33} = \frac{bhE}{L}$

Fonte: Autor (2024).

Tabela 3-Valores das propriedades elásticas da célula unitária Cruz

Solicitações	Tração Horizontal	Tração vertical	Cisalhamento
Constantes elásticas na direção x	$C_{11} = \frac{bhE}{L}$	$C_{12} = 0$	$C_{13} = 0$
Constantes elásticas na direção y	$C_{12} = 0$	$C_{22} = \frac{bhE}{L}$	$C_{23} = 0$
Constantes elásticas na direção xy	$C_{13} = 0$	$C_{23} = 0$	$C_{33} = \frac{3bhE^3}{4(h^2 + 12)L^3}$

Fonte: Autor (2024).

Os resultados apresentados nas Tabela acima expressam os valores das constantes elásticas nas direções x , y e xy , representando a tração horizontal, tração vertical e cisalhamento, respectivamente. Tais valores são determinados em função dos parâmetros geométricos da célula unitária (b e h), módulo de elasticidade do material (E) e o comprimento de cada elemento (L).

Como denotado, a formulação evidenciada na Tabela 2, que descreva o comportamento da célula unitária em configuração diamante, possui propriedades anisotrópicas. Mediante a isso, as constantes elásticas apresentam diferentes valores quando submetidos a diferentes solicitações, ou seja, o material apresenta uma resposta mecânica distinta dependendo da orientação das forças aplicadas. Enquanto, o material na configuração em cruz apresenta um comportamento mecânico ortotrópico, onde as

propriedades mecânicas no plano são idênticas, mas se diferenciam em direções ortogonais ao plano.

Além disso, observou-se uma simetria no comportamento mecânico dessa célula unitária em relação às direções x e y . Esta simetria indica que não há contribuição para a deformação de cisalhamento quando a célula unitária é submetida a solicitações de tração horizontal e vertical, respectivamente.

Ressalta-se que para a célula unitária com topologia de diamante, pode ser calculada também como treliça, tendo em vista, que nesse caso o momento de inércia é muito pequeno e pode ser desprezado. Destaca-se também que os resultados obtidos na configuração de cruz quando solicitados para tração horizontal e vertical são os mesmos apresentados no estudo de Wang e McDowell (2004), corroborando a validade e a relevância dos resultados nesta pesquisa.

Em relação a formulação obtida no cisalhamento, o valor difere do estudo de Wang e McDowell (2004) devido à adoção de diferentes teorias. Enquanto, os autores no seu estudo consideraram a teoria de viga de Euler-Bernoulli, nesta pesquisa utilizou-se a teoria de viga de Timoshenko a qual leva em conta os efeitos do cisalhamento.

Após a determinação das constantes elásticas, procedeu-se à validação dos resultados por meio da comparação das forças obtidas utilizando um *software* de álgebra computacional com aquelas obtidas por meio de um *software* especializado em simulações empregando o método dos elementos finitos. Os resultados desta etapa são apresentados na Tabela 4 para configuração diamante e Tabela 5 para configuração em cruz. Por simplificação, os resultados obtidos com o *software* de álgebra computacional são referenciados como cálculo manual, enquanto os resultados provenientes do *software* que utiliza os métodos dos elementos finitos são denominados como cálculo por elementos finitos.

Tabela 4- Comparação das forças da Célula unitária Diamante

Solicitações	Cálculo manual (kN)	Cálculo por elementos finitos (kN)
Tração Horizontal	$P_{U2} = -38,813$ $P_{v3} = 13,445$	$P_{U2} = -38,813$ $P_{v3} = 13,445$
Tração vertical	$P_{U2} = -23,287$ $P_{v3} = 40,335$	$P_{U2} = -23,287$ $P_{v3} = 40,335$
Cisalhamento	$P_{v2} = -53,780$ $P_{u3} = 31,050$	$P_{v2} = -53,780$ $P_{u3} = 31,050$

Fonte: Autor (2024).

Tabela 5- Comparação das forças da Célula unitária Cruz

Solicitações	Cálculo manual (kN)	Cálculo por elementos finitos (kN)
Tração Horizontal	$P_{U2} = -31,05$ $P_{v1} = 0$	$P_{U2} = -31,05$ $P_{v3} = 0$
Tração vertical	$P_{U2} = 0$ $P_{v1} = -31,05$	$P_{U2} = 0$ $P_{v1} = -31,05$
Cisalhamento	$P_{u1} = 0,6927$ $P_{v2} = 0,6927$	$P_{v2} = 0,6872$ $P_{u3} = 0,6872$

Fonte: Autor (2024).

Os resultados dispostos nas Tabelas 4 e 5, reforçam a eficácia da metodologia adotada para determinação das propriedades elásticas dos materiais favos de mel. Salienta-se, que P_{Ui} indica força na direção horizontal e P_{vi} denota a força na direção vertical, onde o índice i representa o número do nó em análise. As escolhas de análise das forças na direção horizontal ou na direção vertical foram realizadas mediante as observações das condições de equilíbrio aplicadas aos elementos para os cálculos.

Ao analisar os resultados, é evidente que as diferenças entre os valores fornecidos pelos dois *softwares* são mínimas, indicando uma consistência notável nos cálculos e fortalecendo a confiabilidade dos resultados e validando a abordagem metodológica adotada. Enfatiza-se que quando o material é solicitado ao cisalhamento tanto na configuração diamante e na cruz apresenta um erro relativo de 0,8%.

Adicionalmente, foi realizada uma análise comparativa dos deslocamentos horizontais (U) e deslocamentos verticais (W), com os valores obtidos através dos softwares como demonstrado na Tabela 6 e Tabela 7.

Tabela 6-Comparação dos deslocamentos da Célula unitária Diamante

Solicitações	Cálculo manual (mm)	Cálculo por elementos finitos (mm)
Tração Horizontal	$U_2 = 0,5$	$U_2 = 0,5$
Tração vertical	$w_1 = 0,866$	$w_1 = 0,866$
Cisalhamento	$U_1 = 0,5$ $w_2 = 0,866$	$U_1 = 0,5$ $w_2 = 0,866$

Fonte: Autor (2024).

Tabela 7-Comparação dos deslocamentos da Célula unitária Cruz

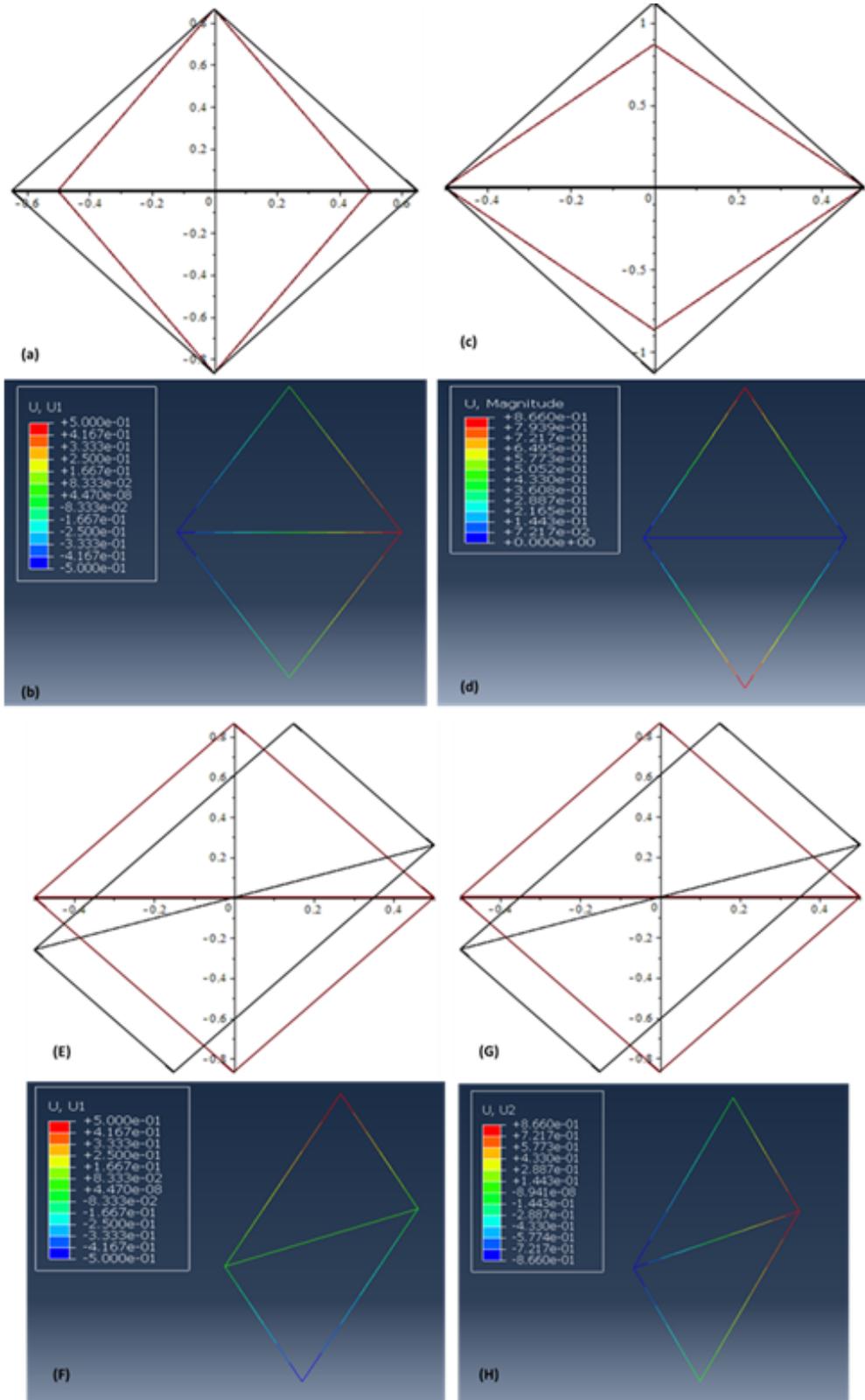
Solicitações	Cálculo manual (mm)	Cálculo por elementos finitos (mm)
Tração Horizontal	$U_2 = 0,5$	$U_2 = 0,5$
Tração vertical	$w_1 = 0,5$	$w_1 = 0,5$
Cisalhamento	$U_1 = 0,25$ $w_2 = 0,25$	$U_1 = 0,25$ $w_2 = 0,25$

Fonte: Autor (2024).

Essa congruência nos resultados apresentados na Tabela 6 e 7 é uma validação da precisão dos cálculos realizados em ambos os *softwares*. Os valores dos deslocamentos foram obtidos utilizando os parâmetros específicos mencionados anteriormente.

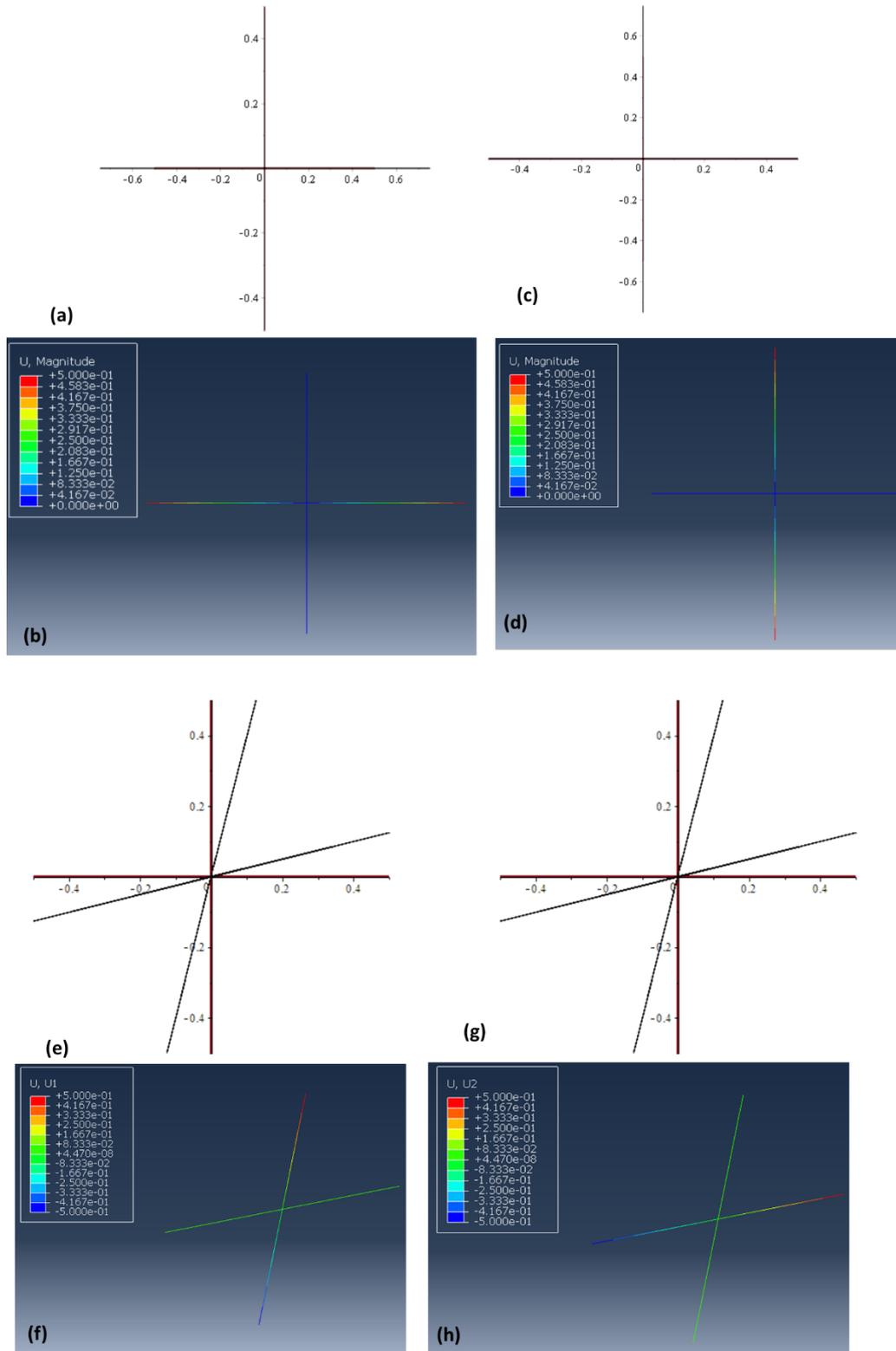
A comparação dos deslocamentos obtidos nos dois *softwares*, para tração horizontal, tração vertical e cisalhamento, também pode ser analisado visualmente a validação dos resultados dos deslocamentos e a coerência entre a abordagem utilizada dos resultados apresentado nas tabelas acima, podem ser evidenciados na Figura 31 e Figura 32. Enfatiza-se, que no primeiro *software*, o valor de deslocamento foi multiplicado por um fator de escala com o propósito de realçar sua magnitude na ilustração.

Figura 31- Deslocamentos horizontais: (a) cálculo manual; (b) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos verticais: (c) cálculo manual; (d) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo X (e) cálculo manual; (f) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo Y: (g) cálculo manual; (H) cálculo por elementos finitos



Fonte: Autor (2024).

Figura 32- Deslocamentos horizontais: (a) cálculo manual; (b) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos verticais: (c) cálculo manual; (d) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo X (e) cálculo manual; (f) cálculo por elementos finitos; Deslocamentos cisalhamento no eixo Y: (g) cálculo manual; (H) cálculo por elementos finitos



Fonte: Autor (2024).

A validação da metodologia adotada também pode ser justificada mediante a comparação das forças resultantes obtidas entre a supercélula e a estrutura homogeneizada, como evidenciadas na Tabela 8 e na Tabela 9.

Tabela 8- Comparação das forças resultantes da Célula unitária Diamante

Solicitações	Quantidades de células unitárias	Força (kN) Supercélula	Força (kN) Estrutura Homogeneizada	Erro relativo (%)
Tração Horizontal	3 x 3	23,3100	23,3177	0,03%
	7 x 7	31,0388	31,05	0,037%
	7 x 8	27,1569	27,1688	0,043%
	20 x 20	32,05	32,8426	2,41%
Tração Vertical	3 x 3	25,5787	25,6225	0,17%
	7 x 7	18,9155	19,0946	0,94%
	7 x 8	21,6844	21,8997	0,98%
	20 x 20	18,99	18,0224	5,09%
Cisalhamento	3 x 3	5,1605	8,4259	38,75%
	7 x 7	3,1734	4,4205	28,21%
	7 x 8	21,6844	21,8997	40,29%
	20 x 20	3,2827	3,8669	15,09%

Fonte: Autor (2024).

Como observado na Tabela acima, a metodologia adotada consegue descrever o comportamento mecânico da célula unitária em configuração diamante quando submetido a tração horizontal e vertical. No entanto, surgem discrepâncias significativas quando a

estrutura é submetida a esforço de cisalhamento, evidenciadas pela diferença entre as forças cisalhantes obtidas pela supercélula em comparação com a estrutura homogeneizada.

Esta discrepância aponta a necessidade de um estudo adicional para aprofundar o comportamento dos materiais favos de mel nessa configuração específica quando submetidos a esforço de cisalhamento no plano. Esta investigação é crucial para compreender as razões subjacentes a essa discrepância, incluindo a análise da distribuição do cisalhamento ao longo da estrutura e a consideração de outros fatores potenciais que podem ter contribuído com o erro dos resultados obtidos. Entre esses fatores estão o tamanho da célula unitária, as condições de contorno aplicadas, as propriedades do material utilizados na simulação, a qualidade da malha de elementos finitos e quaisquer outras simplificações assumidas durante o processo de modelagem.

Tabela 9-Comparação das forças resultantes da Célula unitária Cruz

Solicitações	Quantidades de células unitárias	Força (kN) Supercélula	Força (kN) Estrutura Homogeneizada	Erro relativo (%)
Tração Horizontal	3 x 3	31,05	31,05	0%
	7 x 7	31,05	31,05	0%
	7 x 8	31,05	31,05	0%
	20 x 20	31,05	31,05	0%
Tração Vertical	3 x 3	31,05	31,05	0%
	7 x 7	31,05	31,05	0%
	7 x 8	31,05	31,05	0%
	20 x 20	31,05	31,05	0%
Cisalhamento	3 x 3	3,13383	3,26236	3,94%
	7 x 7	3,75545	3,77862	0,61%
	7 x 8	3,26079	3,2741	0,41%
	20 x 20	3,25409	3,26087	0,20%

Fonte: Autor (2024).

Os resultados apresentados na Tabela 9, que compara as forças resultantes da célula unitária cruz, sob diversas solicitações e configurações, evidencia a consistência dos resultados entre a supercélula e a estrutura homogeneizada, com erro relativo mínimo. Diante disso, é possível inferir que a metodologia em questão apresenta robustez e aplicabilidade prática para determinar as propriedades elásticas de estruturas constituída por essa célula unitária quando submetidas a solicitações de tração horizontal, tração vertical e cisalhamento, sem demandar altos custos computacionais.

5.1.2 Propriedades elastoplásticas

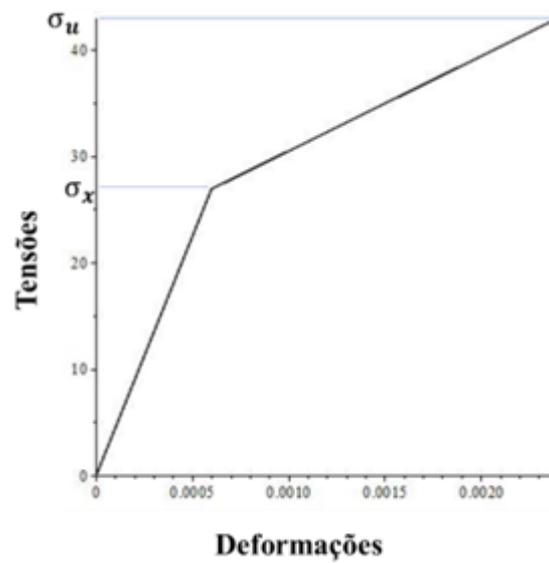
Os resultados decorrentes da aplicação da lei de plasticidade são evidenciados nas Tabela 10, na qual são destacadas as formulações de tensões de escoamento e de tensão de ruptura dos materiais favos de mel na configuração diamante, levando em consideração o encruamento do material. Essa propriedade foi calculada para cada sollicitação, seja de tração horizontal, tração vertical ou de cisalhamento. Essas constatações foram obtidas mediante a utilização do *software* de álgebra computacional.

Tabela 10-Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária diamante

Solicitações	Tensão Escoamento (MPa)	Tensão de Ruptura (MPa)
Tração Horizontal	$\sigma_x = \frac{5bh\sigma_0\sqrt{3}}{12L}$	$\sigma_{ux} = \frac{2bh\sigma_0\sqrt{3}}{3L}$
Tração vertical	$\sigma_y = \frac{bh\sigma_0}{L}$	$\sigma_{uy} = \frac{bh\sigma_0}{L}$
Cisalhamento	$\tau_{xy} = \frac{bh\sigma_0}{L}$	$\tau_{xy} = \frac{bh\sigma_0}{L}$

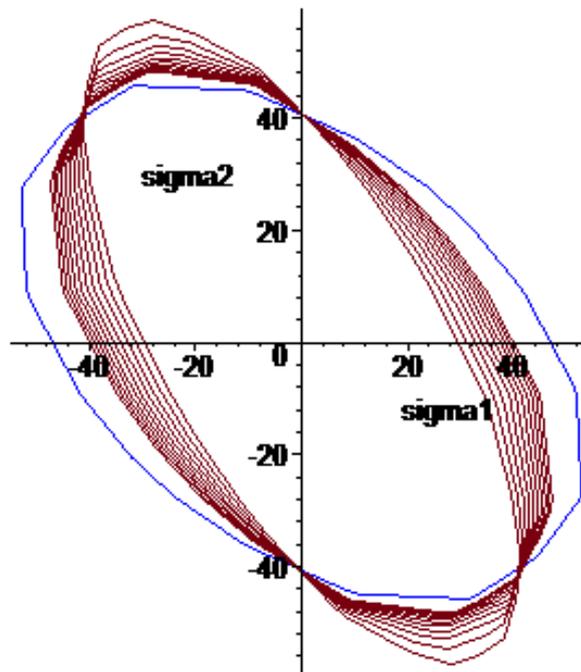
Fonte: Autor (2024).

Ao analisar os resultados dispostos na Tabela 10, é notável que os materiais favos de mel na configuração diamante alcançaram a tensão de escoamento seguida por um colapso imediato, quando solicitados aos esforços de tração vertical e cisalhamento. Destaca-se que para tração horizontal, tornou-se possível construir um gráfico de Tensões vs Deslocamentos (Figura 33), em que se pode averiguar o comportamento elastoplástico do material em análise.

Figura 33–Gráfico Tensão VS Deformação

Fonte: Autor (2024).

Adicionalmente, com os dados obtidos, foi aplicado o critério de falha de Hill (1948) com a finalidade de avaliar a capacidade dos materiais favos de mel em suportar a carga específicas, sem apresentar falhas, como evidenciado na Figura 34.

Figura 34–Critério de falha célula unitária Diamante

Fonte: Autor (2024).

O gráfico demonstrado na Figura 34, representa o critério de falha de Hill, em que a parte de vermelho indica que o material alcançou um estado crítico em termos de resistência, ou seja, ao material atingiu o estado de escoamento e começou a apresentar encruamento até atingir a tensão de ruptura. A parte de azul, por outro lado, denota uma condição inicial, onde existe o potencial para a falha, indicando que as tensões estão se aproximando do valor da tensão de escoamento. Os valores de carga que levam a estrutura a atingir a tensão de escoamento e a tensão de ruptura estão apresentados na Tabela 11.

Tabela 11-Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária diamante

Solicitações	Tensão Escoamento (MPa)	Tensão de Ruptura (MPa)
Tração Horizontal	$p_x = 52,5 N$	$p_{ux} = 84 N$
Tração vertical	$p_y = 72,75 N$	$p_{uy} = 72,75 N$
Cisalhamento	$p_{xy} = 72,75 N$	$p_{xy} = 72,75 N$

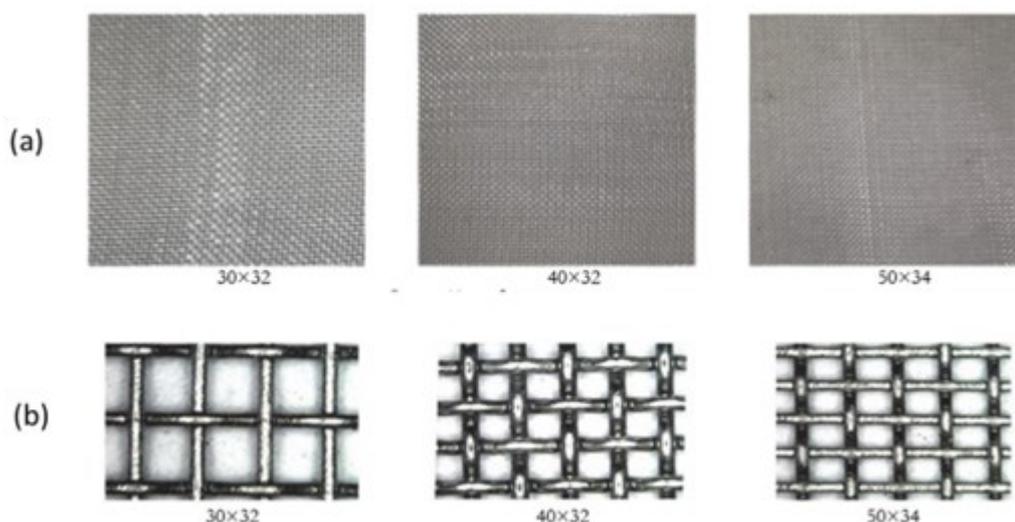
Fonte: Autor (2024).

A plasticidade do elemento quadrangular será abordada no tópico seguinte, com a validação através da comparação dos resultados obtidos por meio da comparação de dados experimentais disponíveis na literatura, particularmente os fornecidos por Patel; Joshi e Makawana (2023).

5.2 Plasticidade célula unitária Cruz

Com a finalidade de validar a metodologia adotada para descrever o comportamento mecânico dos materiais favos de mel, procedeu-se à análise de três telas de aço inoxidável denominadas como SSWM (conforme apresentado na Figura 35) as quais são constituídas por células unitárias em configuração de cruz e com seção transversal circular.

Figura 35-(a) SSWM de aço; (b) Visão microscópica das malhas de SSWM.



Fonte: Patel; Joshi e Makawana (2023).

A identificação de telas de aço inoxidável (SSWM) constitui um aspecto importante. Tal processo requer as análises de parâmetros cruciais, tais como a bitola do fio e o número de fios por polegadas. No mercado, existem uma variedade de telas SSWM, identificada pela sua notação convencional SSWM AxB, a letra “A” representa o número de fios de polegadas em ambas direções, enquanto “B” indica a bitola de fio (Patel; Joshi; Makawana, 2023).

Os parâmetros específicos utilizados na modelagem das telas estão evidenciados na Tabela 12, onde são fornecidos o diâmetro, comprimento, coeficiente de Poisson, tensão de escoamento e módulo de elasticidade para cada uma das SSWM analisadas.

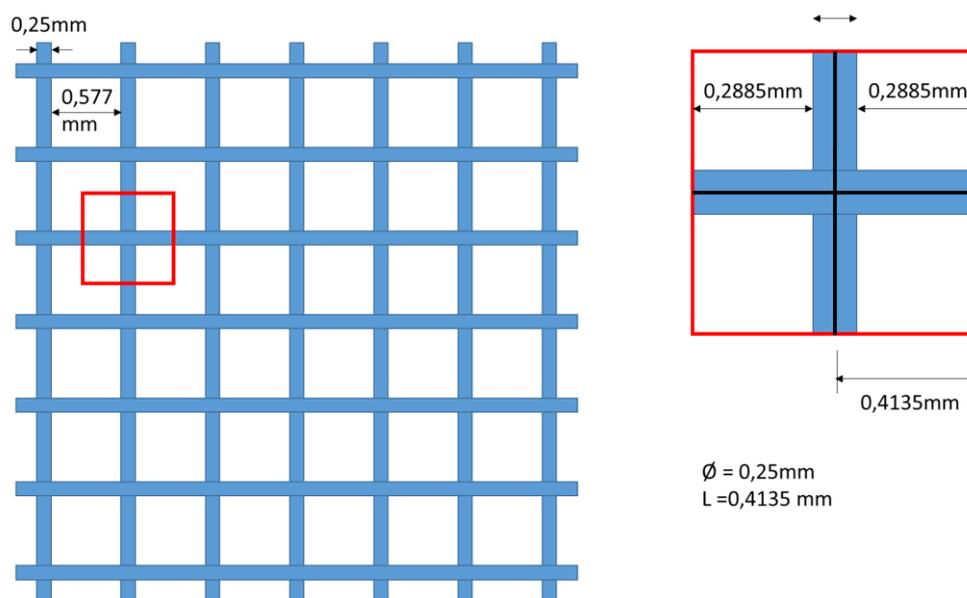
Tabela 12-Parâmetros da célula unitária Cruz

SSWM	Diâmetro (mm)	Tamanho de abertura (mm)	Coefficiente de Poisson	Tensão de escoamento (MPa)	Módulo de elasticidade (GPa)
30x32	0,25	0,577	0,3	306,1224	151
40x32	0,25	0,365	0,3	306,1224	151
50x34	0,23	0,247	0,3	216,3415	151

Fonte: Patel; Joshi e Makawana (2023).

Considerando complexidade da seção transversal das células unitárias, é adotado um fator de correção de cisalhamento transversal igual a 9/10. Além disso, as células unitárias são posicionadas de forma estratégica ao longo do eixo de simetria da seção circular da malha, como demonstrado na Figura 36.

Figura 36- Posicionamento da célula unitária ao longo do eixo de simetria da malha 30x32.



Fonte: Autor (2024).

Destaca-se que esse procedimento foi realizado nas demais malhas e acarretou em ajustes nos comprimentos individuais de cada barra da célula unitária. Os novos comprimentos resultantes da otimização para cada malha são estabelecidos em: 0,4135 mm; 0,3075 mm e 0,2385 para as malhas 30x32, 40x32 e 50x34, respectivamente.

Por meio da aplicação desses parâmetros e dos procedimentos metodológicos, foi possível obter as propriedades elásticas dos materiais favos de mel em configuração cruz, submetidos a solicitações de tração horizontal, tração vertical e cisalhamento. As formulações das constantes elásticas estão apresentadas na Tabela 13.

Tabela 13- Valores das constantes elásticas da célula unitária Cruz

Solicitações	Tração Horizontal	Tração vertical	Cisalhamento
Constantes elásticas na direção x	$C_{11} = \frac{E\pi\Phi^2}{8L}$	$C_{12} = 0$	$C_{13} = 0$
Constantes elásticas na direção y	$C_{12} = 0$	$C_{22} = \frac{E\pi\Phi^2}{8L}$	$C_{23} = 0$
Constantes elásticas na direção xy	$C_{13} = 0$	$C_{23} = 0$	$C_{33} = \frac{15E\pi\Phi^4}{16(27\nu\Phi^2 + 27\Phi^2 + 800)L^3}$

Fonte: Autor (2024).

As formulações delineadas na Tabela 12, são apresentadas de maneira abrangente, englobando as constantes elásticas da célula unitária na configuração cruz com seção transversal circular. Essas formulações evidenciam uma aplicabilidade intrínseca a qualquer magnitude do diâmetro do elemento, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e comprimento da barra. Após a obtenção das propriedades elásticas, procedeu-se à aplicação da plasticidade, cujos os valores de tensão de escoamento e tensão de ruptura para cada solicitação estão apresentados na Tabela 14.

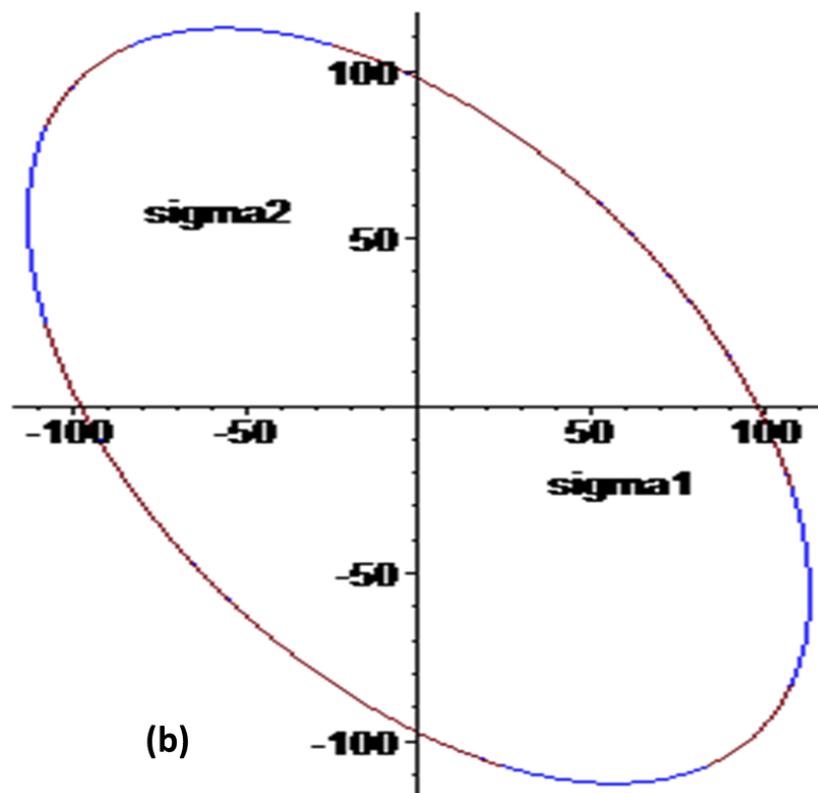
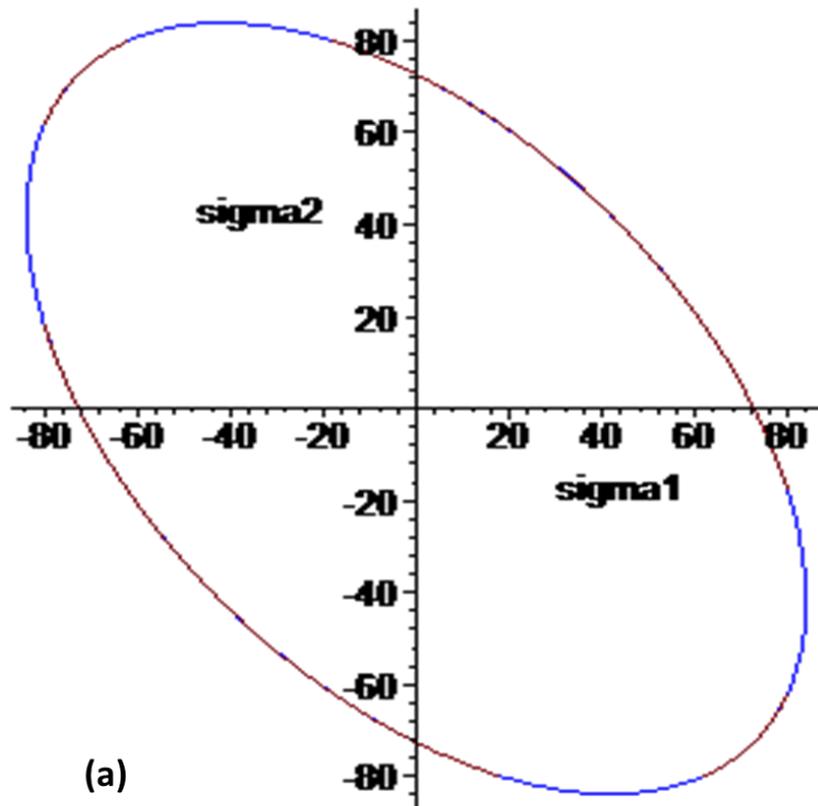
Em seguida, foram aplicados o critério de Hill (1948) em todas as telas de SSWM, com a finalidade de avaliar a capacidade dos materiais favos de mel em suportar a carga sem apresentar falhas, como evidenciado na Figura 37 e Figura 38.

Tabela 14- Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária cruz

Solicitações	Tensão Escoamento (MPa)	Tensão de Ruptura (MPa)
Tração Horizontal	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 E\pi\Phi}{8L}$	$\sigma_{ux} = \frac{\sigma_0 E\pi\Phi}{8L}$
Tração vertical	$\sigma_y = \frac{\sigma_0 E\pi\Phi}{8L}$	$\sigma_{uy} = \frac{\sigma_0 E\pi\Phi}{8L}$
Cisalhamento	$\tau_{xy} = \frac{0,39 \sigma_0 E\pi\Phi}{L}$	$\tau_{xy} = \frac{0,39 \sigma_0 E\pi\Phi}{L}$

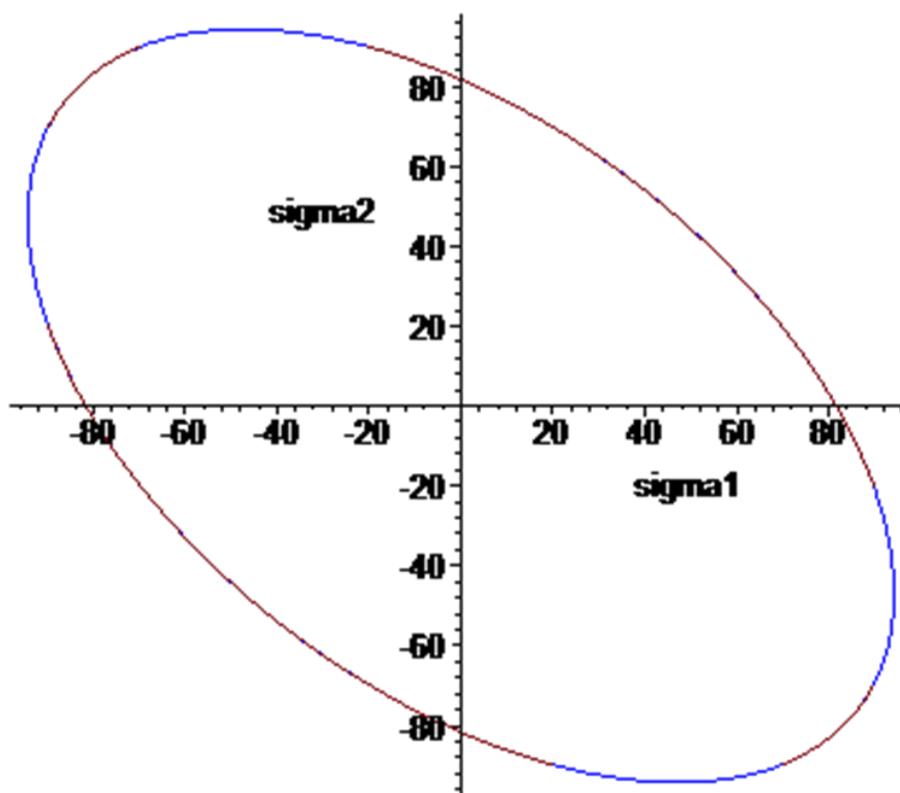
Fonte: Autor (2024).

Figura 37- Critério de falha aplicado:(a) SSWM 30x32; (b) SSWM 40x32;



Fonte: Autor (2024).

Figura 38- Critério d falha aplicado: malha 50x34;



Fonte: Autor (2024).

Os resultados obtidos com aplicação da plasticidade demonstram que a estrutura atingiu tensão de escoamento, seguida pela tensão de ruptura. Nessas condições não há diferença discernível entre a condição atual e seu estado de falha da estrutura, como evidenciado na Tabela 14, na Figuras 37 e na Figura38.

Os valores de carga que levam a estrutura a atingir a tensão de escoamento e a tensão de ruptura estão apresentados na Tabela 15.

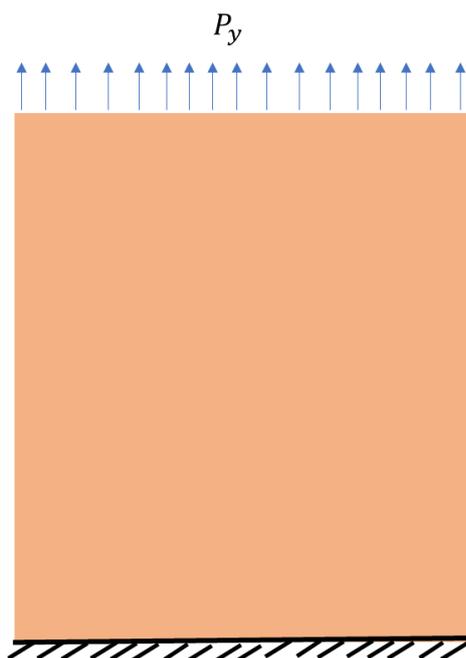
Tabela 15-Tensões de escoamento e ruptura para célula unitária cruz

Solicitações	Malha 30x32	Malha 40x32	Malha 50x34
Tração Horizontal	$P_x = 15,02 N$	$P_x = 15,02 N$	$P_x = 8,99 N$
Tração vertical	$P_y = 15,02 N$	$P_y = 15,02 N$	$P_y = 8,99 N$
Cisalhamento	$p_{xy} = 15,99 N$	$p_{xy} = 15,99 N$	$p_{xy} = 8,97 N$

Fonte: Autor (2024).

Com base dos resultados da análise de plasticidade realizado no *software* de álgebra computacional e um *software* especializado nas execuções de simulação utilizando os métodos dos elementos finitos para a obtenção da curva que descreve a relação entre carga e deslocamento quando o material é submetido à tração horizontal. Para a elaboração desse gráfico, foram considerados a estrutura homogeneizada, engastada na parte inferior e solicitada verticalmente na parte superior, como demonstrado na Figura 39.

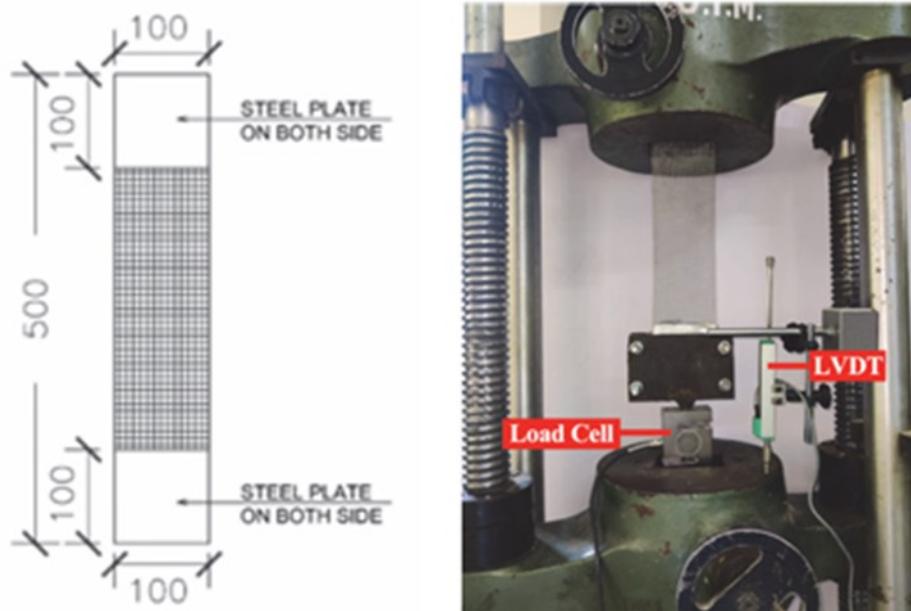
Figura 39- Estrutura Homogeneizada com condições de contorno



Fonte: Autor (2024).

As dimensões da estrutura homogeneizada foram adotadas de acordo com os parâmetros estabelecidos no estudo de Patel; Joshi e Makawana (2023). Este estudo realizou ensaios de tração em três amostras para cada tipo de SSWM, com uma largura de 100 mm e um comprimento total de 500 mm. Para realização desses ensaios, em ambas extremidades foram adicionadas placas de aço com comprimento de 100 mm, resultando em um comprimento efetivo de ensaio de 300 mm, como demonstrado na Figura 40.

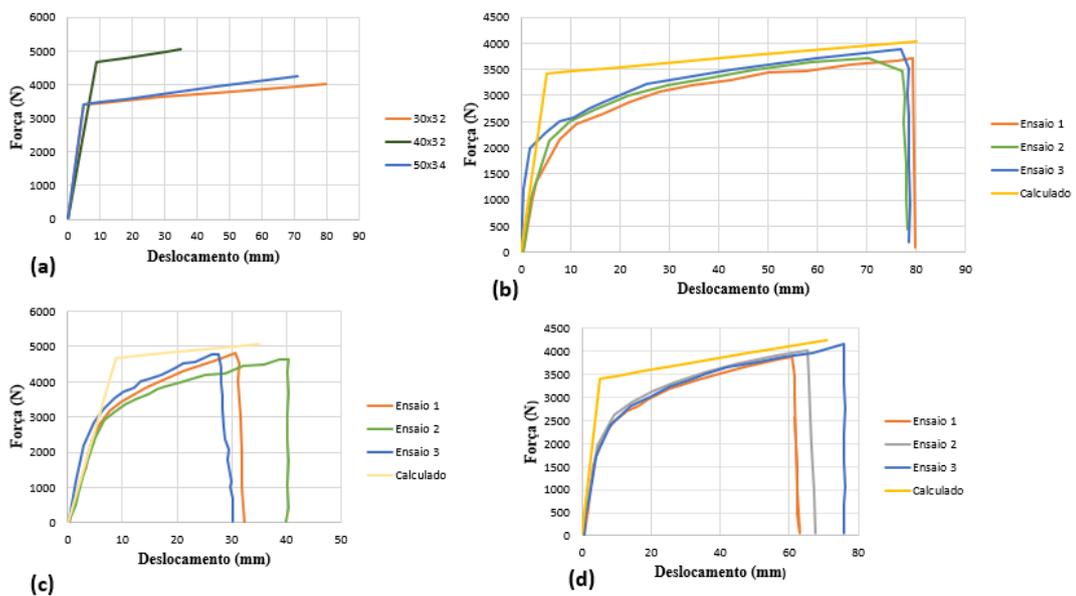
Figura 40- Ensaio de tração da SSWM



Fonte: Patel; Joshi e Makawana (2023).

Em seguida, os resultados calculados foram comparados com os dados experimentais apresentados na pesquisa de Patel; Joshi e Makawana (2023), como demonstrado na Figura 41.

Figura 41- Carga vs deslocamento:(a) Todas as malhas obtidas no *software*; (b) SSWM 30x32; (c) SSWM 40x32; (d) SSWM 50x34



Fonte: Autor (2024).

Ao analisar a Figura 41, é possível observar que a abordagem utilizada nesta pesquisa permite uma descrição aproximada do comportamento da supercélula quadrangular. Em conjunto, os resultados obtidos evidenciam uma abordagem metodológica rigorosa na avaliação das propriedades mecânicas dos favos de mel em configuração cruz, empregando recursos computacionais sem alto custo.

6 CONCLUSÃO

O presente estudo tem como finalidade contribuir com a análise das propriedades mecânicas no plano dos materiais favos de mel nas configurações das células unitárias diamante e cruz através da aplicação da teoria de pórticos planos embasada na lei de elasticidade e plasticidade via teoria de viga de Timoshenko.

Os resultados obtidos comprovam que a metodologia adotada descreve com precisão satisfatória o comportamento dos materiais favos de mel na configuração unitária cruz, quando solicitadas as diferentes solicitações. Além disso, demonstram a relevância do modelo proposto que permite descrever de maneira precisa a transição do comportamento elástico dos materiais *honeycombs* nessa topologia.

Por outro lado, na configuração unitária diamante, a precisão da descrição do comportamento do material foi observada apenas quando solicitado o esforço de tração horizontal e tração vertical, necessitando, portanto, de estudos adicionais para compreender o comportamento desses materiais quando submetidos a esforço de cisalhamento no plano.

Além disso, destaca-se que existe uma ampla área de investigação para expandir o conhecimento sobre as propriedades mecânicas desses materiais. Sugere-se para futuras pesquisas:

- Explorar outras configurações de células unitárias, a fim de avaliar como a geometria influencia as propriedades mecânicas dos materiais favos de mel;
- Investigar a viabilidade da aplicação da metodologia de pórticos planos com diferentes critérios de falha;
- Realizar experimentos para validar o modelo desenvolvido para célula unitária diamante.
- Analisar os materiais favos de mel sobre variação de carregamento com cargas dinâmicas.

REFERÊNCIAS

ABDULLAH, Z. T.; MOHAMMED, R. H.; SHENG, G. S.; YUN, S. B. End-of-life Vehicles Steel Sections Reclamation into Honeycomb Sandwich Panels. **Current Journal of Applied Science and Technology**, v. 29, n. 5, p. 1-20, 2018.

AFKHAMI, S.; MOHSEN, A.; GARDNER, L.; PIILI, H.; WADEE, M.A.; SALMINEN, A.; BJORK, T. Mechanical performance and design optimisation of metal honeycombs fabricated by laser powder bed fusion. **Thin-Walled Structures**, v. 180, p. 109864, 2022.

AHMADI, S. M.; CAMPOLIA, G.; YAVARIA, S. A.; SARJADIA, B.; WAUTHELEB, R.; SCHROOTEND, J.; WEINANSA, H.; ZADPOOR, A.A. Mechanical behavior of regular open-cell porous biomaterials made of diamond lattice unit cells. **Journal of the mechanical behavior of biomedical materials**, v. 34, p. 106-115, 2014.

AHMAD, S.; ZHANG, J.; FENG, P.; YU, D.; WU, Z.; KE, M. Processing technologies for Nomex honeycomb composites (NHCs): A critical review. **Composite Structures**, v. 250, p. 112545, 2020.

AL-SHAMAA, M. F.; SHEIKHA, A. A.; KARKUSH, M. O.; JABBAR, M. S.; AL-RUMAITHI, A. A. Numerical modeling of honeycombed geocell reinforced soil. In: **Modern Applications of Geotechnical Engineering and Construction: Geotechnical Engineering and Construction**. Springer Singapore, 2021. p. 253-263.

AMORIM, D. L. N. F. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses: new developments and applications**. 2016. 193 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

ANNI, I. A.; UDDIN, K. Z.; PAGLIOCCA, N.; SINGH, N.; RAHMAN, O.; YOUSSEF, G.; KOOHBOR, B. Out-of-plane load-bearing and mechanical energy absorption properties of flexible density-graded TPU honeycombs. **Composites Part C: Open Access**, v. 8, p. 100284, 2022.

ARAB, M. G.; OMAR, M.; ALOTAIBI, E.; MOSTAFA, O.; NAEEM, M.; BADR, O. Bio-inspired 3D-printed honeycomb for soil reinforcement. In: **Geo-Congress 2020**. Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 2020. p. 262-271.

BITZER, T. N. **Honeycomb technology: materials, design, manufacturing, applications and testing**. Springer Science & Business Media, 1997.

CHEN, S.; MCGREGOR, O. P. L.; ENDRUWEIT, A.; HARPER, L. T.; WARRIOR, N. A. Simulation of the forming process for curved composite sandwich panels. **International Journal of Material Forming**, v. 13, p. 967-980, 2020.

CHINTANKUMAR, P.; GANDHI, A. H. (2018). Bauschinger Effect in spring Back Prediction of High Strength Steel: A Theoretical Approach.

CRUZ, G. G.; DE SOUZA, C. P. G. Análise Comparativa das Teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko via Método Das Diferenças Finitas com Implementação Computacional em Scilab. **Revista Tecnologia**, v. 39, n. 1, p. 1-12, 2018.

Du Plessis, A.; Razavi, N.; Benedetti, M.; Murchio, S.; Leary, M.; Watson, M.; Bhate, D.; BERTO, F. Properties and applications of additively manufactured metallic cellular materials: A review. **Progress in Materials Science**, v. 125, p. 100918, 2022.

FARACI, D.; DRIEMEIER, L.; COMI, C. Bending-dominated auxetic materials for wearable protective devices against impact. **Journal of Dynamic Behavior of Materials**, v. 7, p. 425-435, 2021.

Faria, L. E. R. **Análise do comportamento dinâmico de vigas sanduíche com núcleo honeycomb preenchido com gel magneto reológico**. 2020. 126 P. Tese (Mestrado) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2020.

FENG, Y.; SUN, X.; CHEN, B.; NI, F. Optimal Design of Honeycomb Beams with Unit Cell Structure Based on Multiobjective Optimization Algorithm. **Security and Communication Networks**, v. 2022, 2022.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application**. Hershey: IGI Global, 2015.

GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. **Mechanics of Materials**. Springer, United Kingdom. 1991.

GERE, J.M. **Timoshenko resistencia de materiales**. Paraninfo, 2004.

GIBSON, L. J.; ASHBY, M. F.; SCHAJER, G. S.; ROBERTSON, C. I. The mechanics of two-dimensional cellular materials. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 382, n. 1782, p. 25-42, 1982.

GIBSON, L. J.; ASHBY, M. F. **Cellular Solids: Structure and Properties—Second Edition**. University of Cambridge, Cambridge, UK, 1997.

GHOSH, M.; MIROUX, A.; KESTENS, L. A. I. Correlating r-value and through thickness texture in Al–Mg–Si alloy sheets. **Journal of Alloys and Compounds**, v. 619, p. 585-591, 2015.

GURA, L.; BRINKER, M.; MARSCHALIK, P.; KALAB, F.; JUNKES, B.; JUNKES, H.; HEYDES, M.; FREUND, H. J. The real honeycomb structure—From the macroscopic down to the atomic scale. **Journal of Applied Physics**, v. 133, n. 21, 2023.

HAYASHI, K.; SHIMABUKURO, M.; KISHIDA, R.; TSUCHIYA, A.; ISHIKAWA, K. Honeycomb scaffolds capable of achieving barrier membrane-free guided bone regeneration. **Materials Advances**, v. 2, n. 23, p. 7638-7649, 2021.

HILL, Rodney. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 193, n. 1033, p. 281-297, 1948.

HU, Z.; PENUMARTHY, C. Computer modeling and optimization of swage autofrettage process of a thick-walled cylinder incorporating bauschinger effect. **American Transactions on Engineering & Applied Sciences**, v. 3, p. 31-63, 2014.

ISANAKA, B. R.; MUKHOPADHYAY, T.; VARMA, R. K.; KUSHVAHA, V. On exploiting machine learning for failure pattern driven strength enhancement of honeycomb lattices. **Acta Materialia**, v. 239, p. 118226, 2022.

KIM, G.; STERKENBURG, R. Investigating the effects aviation fluids have on the flatwise compressive strength of Nomex® honeycomb core material. **Journal of Sandwich Structures & Materials**, v. 23, n. 1, p. 365-382, 2021.

KRISHNA, A.; LATHA, G. M. Evolution of Geocells as Sustainable Support to Transportation Infrastructure. **Sustainability**, v. 15, n. 15, p. 11773, 2023.

LOPES, J. P. **Implementação implícita do modelo de plasticidade cíclica de Chaboche**. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF. 106 p, 2014.

LI, X.; LU, Z.; YANG, Z.; YANG, C. Anisotropic in-plane mechanical behavior of square honeycombs under off-axis loading. **Materials & Design**, v. 158, p. 88-97, 2018.

LI, T.; SUN J.; LENG, J.; LIU, Y. In-plane mechanical properties of a novel cellular structure for morphing applications. **Composite Structures**, v. 305, p. 116482, 2023.

MASTERS, I. G.; EVANS, K. E. Models for the elastic deformation of honeycombs. **Composite structures**, v. 35, n. 4, p. 403-422, 1996.

MASE, G. T.; SMELSER, R. E.; ROSSMANN, J. Stroud. **Continuum mechanics for engineers**. CRC press, 2020.

MISHRA, T.; ROOIJ, M.; SHISODE, M.; HARZRATI, J.; SCHIPPER, D.J. Characterization of yield criteria for zinc coated steel sheets using nano-indentation with knoop indenter. **Surface and coatings technology**, v. 381, p. 125110, 2020.

MOHAMMADI, H.; AHMAD, Z.; PETRU, M.; MAZLAN, S. A.; JOHARI, M. A. F.; HATAMI, H.; KOLOOR, S. S. R. An insight from nature: honeycomb pattern in advanced structural design for impact energy absorption. **Journal of Materials Research and Technology**, v. 22, p. 2862-2887, 2023.

MOEINI, M.; BEGON, M.; LÉVESQUE, M. Numerical homogenization of a linearly elastic honeycomb lattice structure and comparison with analytical and experimental results. **Mechanics of Materials**, v. 167, p. 104210, 2022.

PATEL, P.; JOSHI, D.; MAKAWANA, R. Experimental studies to evaluate tensile and bond strength of Stainless-Steel Wire Mesh (SSWM). **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 17, n. 65, p. 257-269, 2023.

PESSOA, T. F. P. **Análise Numérica de Medidas de Contenção de Sólidos em Rochas Produtoras de Óleo do Brasil. 2011. 142 f.** 2011. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado)-Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

PERDOMO, M. E.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; HILD, F.; ROUX, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. **Engineering Structures**, v. 46, p. 407-416, 2013.

POWELL, H. G. Theory for nonlinear elastic structures. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 95, ST12, p. 2687-2701, 1969.

QI, C.; JIANG, F.; YANG, S. Advanced honeycomb designs for improving mechanical properties: A review. **Composites Part B: Engineering**, v. 227, p. 109393, 2021.

RAZA, U.; NIEMIEC, M.; KIM, K. Polyisobutylene Encapsulated PEDOT: Pss Electrode Honeycomb Skeleton Electrolyte for Moisture Resistant Electro-Ionic Soft Artificial Muscles. **Advanced Materials Technologies**, p. 2301584, 2023.

REDDY, Junuthula Narasimha. **An introduction to continuum mechanics**. Cambridge university press, 2013.

RODRÍGUEZ-RAMÍREZ, J. D.; CASTANIÉ, B.; BOUVET, C. Damage Mechanics Modelling of the shear nonlinear behavior of Nomex honeycomb core. Application to sandwich beams. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 27, n. 1, p. 80-89, 2020.

RUAN, D.; LU, G.; WANG, B.; YU, T.X. In-plane dynamic crushing of honeycombs—a finite element study. **International journal of impact engineering**, v. 28, n. 2, p. 161-182, 2003.

SINGH, R.; RASHID, F. M. Numerical investigation on the effect of different face sheet materials and core designs on the ballistic response of sandwich structures under low-velocity impact. **Materials Today: Proceedings**, v. 56, p. 3520-3526, 2022.

SOUZA, M. R. A.; MENDONÇA, A. V. Análise Dinâmica De Uma Viga De Timoshenko Apoiada Sobre Base Elástica Utilizando Equações Integrais: Um Caso Particular. **Natal: Ermac**, 2008.

SURJADI, J. U.; GAO, L.; DU, H.; LI, Y.; XIONG, X.; FANG, N.; LU, Y. Mechanical metamaterials and their engineering applications. **Advanced Engineering Materials**, v. 21, n. 3, p. 1800864, 2019.

TAN, X. P.; TAN, Y. J.; CHOW, C. S. L.; TOR, S. B.; YEONG, W. Y. Metallic powder-bed based 3D printing of cellular scaffolds for orthopaedic implants: A state-of-the-art review on manufacturing, topological design, mechanical properties and biocompatibility. **Materials Science and Engineering: C**, v. 76, p. 1328-1343, 2017.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**, 1921, p. 744.

THOMAS, T.; TIWARI, G. Crushing behavior of honeycomb structure: a review. **International journal of crashworthiness**, v. 24, n. 5, p. 555-579, 2019.

WANG, Zhonggang. Recent advances in novel metallic honeycomb structure. **Composites Part B: Engineering**, v. 166, p. 731-741, 2019.

WANG, Z.; LI, Z.; ZHOU, W.; HUI, D. On the influence of structural defects for honeycomb structure. **Composites Part B: Engineering**, v. 142, p. 183-192, 2018.

WANG, A.-J.; MCDOWELL, D. L. In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs. **J. Eng. Mater. Technol.**, v. 126, n. 2, p. 137-156, 2004.

WANG, A.-J.; MCDOWELL, D. L. Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density. **International Journal of Plasticity**, v. 21, n. 2, p. 285-320, 2005.

WANG, Y.; ARABNEJAD, S.; TANZER, M.; PASINI, D. Hip implant design with three-dimensional porous architecture of optimized graded density. **Journal of Mechanical Design**, v. 140, n. 11, p. 111406, 2018.

WANG, Q.; LAI, Z.; LUO, C.; ZHANG, J.; CAO, X.; LIU, J.; MU, J. Honeycomb-like activated carbon with microporous nanosheets structure prepared from waste biomass cork for highly efficient dye wastewater treatment. **Journal of hazardous materials**, v. 416, p. 125896, 2021.

WAN, T.; LIU, Y.; ZHOU, C.; CHEN, X.; LI, Y. Fabrication, properties, and applications of open-cell aluminum foams: A review. **Journal of Materials Science & Technology**, v. 62, p. 11-24, 2021.

WEI, X.; LI, D.; XIONG, J. Fabrication and mechanical behaviors of an all-composite sandwich structure with a hexagon honeycomb core based on the tailor-folding approach. **Composites Science and Technology**, v. 184, p. 107878, 2019.

WU, Y.; LIU, Q.; FU, J.; LI, Q.; HUI, D. Dynamic crash responses of bio-inspired aluminum honeycomb sandwich structures with CFRP panels. **Composites Part B: Engineering**, v. 121, p. 122-133, 2017.

XU, X. F.; QIAO, P.; DAVALOS, J. F. Transverse shear stiffness of composite honeycomb core with general configuration. **Journal of engineering mechanics**, v. 127, n. 11, p. 1144-1151, 2001.

YADROITSAVA, I.; DU PLESSIS, A.; YADROITSEV, I. Bone regeneration on implants of titanium alloys produced by laser powder bed fusion: A review. **Titanium for Consumer Applications**, p. 197-233, 2019.

YAP, Y. L.; YEONG, W. Y. Shape recovery effect of 3D printed polymeric honeycomb: This paper studies the elastic behaviour of different honeycomb structures produced by PolyJet technology. **Virtual and Physical Prototyping**, v. 10, n. 2, p. 91-99, 2015.

YUAN, H.; LI, G.; DAI, E.; LU, G.; HUANG, X.; HAO, L.; TAN, Y. Ordered Honeycomb-Pattern Membrane. **Chinese Journal of Chemistry**, v. 38, n. 12, p. 1767-1779, 2020.

ZHANG, Q.; YANG, X.; LI, P.; HUANG, G.; FENG, S.; SHEN, C.; HAN, B.; ZHANG, X.; FENG, J.; XU, F.; LU, T.J. Bioinspired engineering of honeycomb structure—Using nature to inspire human innovation. **Progress in Materials Science**, v. 74, p. 332-400, 2015.

ZHANG, X. Z.; LEARY, M.; TANG, H. P.; SONG, T.; QIAN, M. Selective electron beam manufactured Ti-6Al-4V lattice structures for orthopedic implant applications: Current status and outstanding challenges. **Current Opinion in Solid State and Materials Science**, v. 22, n. 3, p. 75-99, 2018.

ZHANG, X.; XU, F.; ZANG, Y.; & FENG, W. Experimental and numerical investigation on damage behavior of honeycomb sandwich panel subjected to low-velocity impact. **Composite Structures**, v. 236, p. 111882, 2020.