



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE  
CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA**



**WILLIAM JOAQUIM SANTOS DE SANTANA**

**A NOÇÃO DE ECOLOGIA DO OBJETO  
QUADRILÁTERO: UM ESTUDO A PARTIR DAS TRÊS  
DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO**

São Cristóvão - SE  
Abril, 2024

**WILLIAM JOAQUIM SANTOS DE SANTANA**

**A NOÇÃO DE ECOLOGIA DO OBJETO  
QUADRILÁTERO: UM ESTUDO A PARTIR DAS TRÊS  
DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, da Universidade Federal de Sergipe – PPGECIMA/UFS, pela linha de pesquisa **Currículo, didáticas e métodos de ensino das ciências naturais e matemática**, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

**ORIENTADORA: Profa. Dra. Denize da Silva Souza**

São Cristóvão – SE  
Abril, 2024

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237f Santana, William Joaquim Santos de  
A noção de ecologia do objeto quadrilátero: um estudo a partir das três dimensões do problema didático / William Joaquim Santos de Santana; orientadora Denize da Silva Souza. – São Cristóvão, SE, 2024.  
112 f.; il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Didática. 3. Quadrilátero. I. Souza, Denize da Silva, orient. II. Título.

CDU 51:37



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGEICIMA



WILLIAM JOAQUIM SANTOS DE SANTANA

**A NOÇÃO DE ECOLOGIA DO OBJETO QUADRILÁTERO: UM ESTUDO A PARTIR  
DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO**

APROVADO PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM  
05 DE ABRIL DE 2024

Prof. Dra. Denize da Silva Souza (Orientadora)  
PPGECIMA/UFS

Prof. Dr. Carlos Alberto de Vasconcelos (Membro interno)  
PPGECIMA/UFS

Documento assinado digitalmente

gov.br

CARLONEY ALVES DE OLIVEIRA

Data: 05/04/2024 13:47:29-0300

Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira (Membro externo à Instituição)  
Universidade Federal de Alagoas - UFAL

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, quero expressar minha imensa gratidão ao meu Deus todo poderoso que permitiu tudo até aqui.

À minha orientadora, Profa. Dra. Denize da Silva Souza pela sua orientação sábia, apoio incansável e crença constante em meu potencial. Seu comprometimento em meu crescimento acadêmico e profissional foi verdadeiramente inspirador.

Aos membros da banca examinadora, desejo estender meu profundo apreço pelas suas contribuições que foram fundamentais para a minha compreensão e desenvolvimento desde a qualificação até a defesa.

À minha família, especialmente para minha mãe, Ana Cristina Santos, expresso minha gratidão eterna pelo seu amor incondicional. Ao meu companheiro, Diogenes dos Santos, pelo encorajamento constante e apoio emocional, sendo meu alicerce durante os desafios desta jornada.

Aos meus amigos, em especial, Diana Wellen e Vanessa Machado, por cada palavra de incentivo, cada gesto de encorajamento, foi um raio de luz que me impulsionou adiante nos momentos de dúvida.

Este mestrado não é apenas uma conquista individual, mas o resultado de um esforço coletivo. Cada pessoa mencionada e muitas outras não mencionadas desempenharam um papel importante nesta jornada. Sou profundamente grato por sua presença em minha vida e por contribuírem para o meu crescimento pessoal e acadêmico.

Obrigado por fazerem parte desta jornada inesquecível!

## RESUMO

Neste estudo, o foco foi direcionado para o objeto quadrilátero, explorando-o sob a ótica da ecologia do didático, conceito integrante de uma das principais teorias desenvolvidas por Yves Chevallard, a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Para tanto, definiu-se como questão de pesquisa: Como o objeto quadrilátero é abordado nos documentos curriculares nacionais e livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, considerando as três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela TAD? Para respondê-la, delineou-se a natureza da pesquisa como qualitativa e com uma abordagem bibliográfica a partir dos seguintes objetivos: Caracterizar pesquisas que abordem o estudo de quadriláteros em documentos oficiais e em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, preferencialmente, sob a perspectiva Ecológica do Didático; Averiguar como o objeto quadrilátero está presente nos documentos oficiais (PCN, BNCC, PNLD); Analisar as praxeologias presentes no objeto quadrilátero de duas coleções de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, entre aquelas que apresentaram maior frequência de aprovação dos PNLDs no período compreendido entre 2002 a 2020. Assim, são apresentadas as três dimensões fundamentais do problema didático enunciadas por Gascón. A dimensão epistemológica, utilizamos o estudo realizado por Cuellar, apropriando-se do seu modelo epistemológico de referência (MER), o qual possibilita um amplo estudo histórico do objeto. Para a dimensão econômica, traçou-se um sucinto panorama acerca do ensino da geometria no Brasil, examinando a maneira como o objeto quadrilátero é abordado nos documentos curriculares, dando origem a um modelo epistemológico dominante (MED). Na dimensão ecológica, são discutidas as condições e restrições encontradas no ensino do objeto quadrilátero, nos livros didáticos analisados com o intuito de elucidar um modelo praxeológico de referência (MPR) para esse objeto. Modelo este que poderá ser empregado em pesquisas futuras para analisar práticas docentes em relação ao objeto quadrilátero.

**Palavras-chave:** Anos finais do ensino fundamental. Dimensões do problema didático. Ecologia do didático. Quadriláteros.

## ABSTRACT

In this study, the focus was directed towards the quadrilateral object, exploring it through the lens of the ecology of the didactic, a concept integral to one of the main theories developed by Yves Chevallard, the Anthropological Theory of the Didactic (TAD). Therefore, the research question was defined as: How is the quadrilateral object addressed in national curricular documents and mathematics textbooks for the final years of Elementary Education, considering the three fundamental dimensions of the didactic problem supported by TAD? To answer this, the research was outlined as qualitative in nature and with a bibliographic approach based on the following objectives: Characterize research that addresses the study of quadrilaterals in official documents and mathematics textbooks for the final years of Elementary Education, preferably from the Ecological perspective of the Didactic; Investigate how the quadrilateral object is present in official documents (PCN, BNCC, PNLD); Analyze the praxeologies present in the quadrilateral object of two collections of mathematics textbooks for the final years of Elementary Education, among those that had the highest frequency of PNLD approval in the period from 2002 to 2020. Thus, the three fundamental dimensions of the didactic problem enunciated by Gascón are presented. For the epistemological dimension, we used the study conducted by Cuellar, appropriating his reference epistemological model (MER), which enables a broad historical study of the object. For the economic dimension, a brief overview of geometry teaching in Brazil was outlined, examining how the quadrilateral object is addressed in curricular documents, giving rise to a dominant epistemological model (MED). In the ecological dimension, the conditions and constraints found in the teaching of the quadrilateral object in the analyzed textbooks are discussed in order to elucidate a reference praxeological model (MPR) for this object. This model can be employed in future research to analyze teaching practices in relation to the quadrilateral object.

**Keywords:** Final years of elementary school. Dimensions of the didactic problem. Didactic ecology. Quadrilaterals.

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FP	Formação de Professores
IFS	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe
LD	Livro Didático
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MPR	Modelo Praxeológico de Referência
MMM	Movimento da Matemática Moderna
MS	Mato Grosso do Sul
NCPPEM	Núcleo Colaborativo de Práticas e Pesquisas em Educação Matemática
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
OMP	Organização Matemática Pontual
OML	Organização Matemática Local
OMR	Organização Matemática Regional
OMG	Organização Matemática Global
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN-Matemática	Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PNLD	Plano Nacional do Livro e Material Didático
PPGECIMA	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
PRP	Programa Residência Pedagógica
RI	Repositório Institucional
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TTD	Teoria da Transposição Didática
UFS	Universidade Federal de Sergipe
SP	São Paulo

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Exemplo de uma tarefa sobre quadrilátero no livro didático de matemática (8º ano)	24
<b>Figura 2:</b> Escala dos níveis de codeterminação matemática e didática	26
<b>Figura 3:</b> Desenvolvimento da Geometria no longo da História	38
<b>Figura 4:</b> Tabuletas de argila babilônicas	39
<b>Figura 5:</b> Um quadrilátero de acordo com Pogolérov	40
<b>Figura 6:</b> Tipos de quadrilátero de acordo com Legendre	41
<b>Figura 7:</b> Quadriláteros equidiagonais e ortodiagonais	42
<b>Figura 8:</b> Proposta de MER elaborado por Cuellar	43
<b>Figura 9:</b> Tarefa 64	60
<b>Figura 10:</b> Tarefa 69	61
<b>Figura 11:</b> Tarefa 50	62
<b>Figura 12:</b> Tarefa 69	63
<b>Figura 13:</b> Tarefa 98	65
<b>Figura 14:</b> Tarefa 107	66
<b>Figura 15:</b> Tarefa 108	66
<b>Figura 16:</b> Tarefa 108	67
<b>Figura 17:</b> Tarefa 122	68
<b>Figura 18:</b> Tarefa 1	69
<b>Figura 19:</b> Tarefa 2	70
<b>Figura 20:</b> Tarefa 17	71
<b>Figura 21:</b> Tarefa 21	71
<b>Figura 22:</b> Tarefa 26	72
<b>Figura 23:</b> Tarefa 35	73
<b>Figura 24:</b> Tarefa 14	75
<b>Figura 25:</b> Tarefa 76	77
<b>Figura 26:</b> Tarefa 24	78
<b>Figura 27:</b> Tarefa 76	79
<b>Figura 28:</b> Passo a passo da construção de um quadrado e sugestão de tarefa	82
<b>Figura 29:</b> Tarefa 85	83
<b>Figura 30:</b> Tarefa 85	84
<b>Figura 31:</b> Tarefa 37	86
<b>Figura 32:</b> Tarefa 7	87
<b>Figura 33:</b> Tarefa 38	88
<b>Figura 34:</b> Construção de um quadrado com aplicação de circunferência	90
<b>Figura 35:</b> Tarefa 8	90

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1:</b> Dissertações e teses do banco de dados da BDTD e CAPES .....	28
<b>Quadro 2:</b> Dissertações e Teses do Repositório Institucional da Universidade Federal de Sergipe RI/UFS.....	30
<b>Quadro 3:</b> Pesquisas na revista Caminhos da Educação Matemática em Revista (online) - IFS .....	33
<b>Quadro 4:</b> Ciclos de aprendizagem, segundo os PCN .....	46
<b>Quadro 5:</b> Situações de aprendizagem para desenvolver o pensamento geométrico....	47
<b>Quadro 6:</b> O objeto quadrilátero no bloco Espaço e forma/ unidade temática Geometria 6º e 7º ano .....	49
<b>Quadro 7:</b> O objeto quadrilátero no bloco/unidade temática Grandezas e medidas (6º e 7º anos).....	51
<b>Quadro 8:</b> O objeto quadrilátero no bloco Espaço e forma / unidade temática Geometria (8º e 9º anos) .....	52
<b>Quadro 9:</b> O objeto quadrilátero no bloco/ unidade temática Grandezas e medidas (8º e 9º anos).....	53
<b>Quadro 10:</b> MED do objeto quadrilátero – PCN .....	54
<b>Quadro 11:</b> MED do objeto quadrilátero - BNCC .....	54
<b>Quadro 12:</b> Coleções de livros didáticos de Matemática com maior frequência de aprovação nos PNLD (2002-2020).....	57
<b>Quadro 13:</b> Habilidades da BNCC exploradas no volume 6º ano (edição 2018).....	80
<b>Quadro 14:</b> Habilidades da BNCC exploradas no volume 7º ano (edição 2018).....	85
<b>Quadro 15:</b> Habilidades da BNCC exploradas no volume 8º ano (edição 2018).....	88
<b>Quadro 16:</b> Habilidades da BNCC exploradas no volume 9º ano (edição 2018).....	91
<b>Quadro 17:</b> Níveis de codeterminação para o estudo do objeto quadrilátero no ensino brasileiro .....	92
<b>Quadro 18:</b> Tipos de tarefa, objetos de conhecimento e tema referentes ao estudo do objeto quadrilátero nos anos finais do ensino fundamental.....	94
<b>Quadro 19:</b> MPR do objeto quadrilátero.....	96

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
1.2 PROBLEMÁTICA .....	15
1.3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	17
1.4 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS .....	20
1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	21
<b>2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO</b> .....	23
2.1 REVISÃO DE LITERATURA .....	27
2.2 O PROBLEMA DIDÁTICO E SUAS DIMENSÕES.....	35
2.3 MODELOS DO PROBLEMA DIDÁTICO .....	36
<b>3 ECOLOGIA DO OBJETO QUADRILÁTERO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS E NOS LIVROS DIDÁTICOS</b> .....	37
3.1 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA DO OBJETO QUADRILÁTERO .....	37
3.2 DIMENSÃO ECONÔMICA DO OBJETO QUADRILÁTERO .....	44
<b>3.2.1 O ensino de geometria no Brasil</b> .....	44
<b>3.2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais</b> .....	45
<b>3.2.3 Base Nacional Comum Curricular</b> .....	48
<b>3.2.4 PNLD antes e depois da BNCC</b> .....	55
3.3 DIMENSÃO ECOLÓGICA DO OBJETO QUADRILÁTERO .....	92
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	97
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	99
<b>ANEXOS</b> .....	104

## 1 INTRODUÇÃO

*Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino.*

*Paulo Freire*

Iniciamos nosso texto com o pensamento de Paulo Freire (2010), ao entendermos que pesquisa e ensino estão intrinsecamente associados. Nesse sentido, ao pesquisar podemos descobrir novos conhecimentos que auxiliem no ensino, vice-versa. Apesar das dificuldades que são enfrentadas para pesquisar e, ao mesmo tempo, ensinar, faz-se necessário compreender como sendo um grande desafio para o professor/pesquisador.

Conforme Fiorentini e Lorenzato (2006), são questionáveis o entendimento de aquisição de conhecimento entre o pesquisador e professor, considerando o primeiro com uma visão epistemológica e o segundo com uma óptica de educador matemático. Assim, destaca-se como:

um, de *natureza pragmática*, que tem em vista a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem matemática; outro, de cunho *científico*, que tem em vista o desenvolvimento da Educação Matemática (EM) enquanto campo de investigação e de produção de conhecimentos (Fiorentini; Lorenzato, 2006, p. 10, grifo nosso).

Dessa forma, o docente que fizer uma análise nessas duas perspectivas estará contribuindo positivamente para o ensino de Matemática, em particular, no campo da Geometria que constitui uma parte significativa do currículo escolar. Embora esse campo matemático seja próximo do cotidiano dos alunos, em geral, sua abordagem é afastada do ambiente educacional contemporâneo. Um dos fatores que podem estar associados a essa problemática é sobre a forma como os educadores atuam em sala de aula, quando gera um distanciamento entre o conhecimento científico e o conhecimento do dia a dia dos alunos (Souza, 2021).

Ao observarmos no campo da geometria, o estudo dos quadriláteros, por exemplo, notamos o quanto a abordagem mostra-se distante, visto que em muitas situações os alunos não reconhecem as propriedades desses objetos geométricos, os quais desempenham um papel significativo na compreensão da Geometria Plana. No exercício da sala de aula, sempre nos deparamos com alunos que não sabem que, por exemplo, todo

quadrado é um quadrilátero especial, enquadrando-se nas propriedades de retângulo e losango.

Nessa perspectiva, especificamente, este estudo requereu um olhar mais adequado para os quadriláteros, considerando tanto o seu desenvolvimento enquanto saber matemático, quanto para o ensino e aprendizagem ao se tornar um saber a ser ensinado. Assim, buscou-se realizar um estudo da ecologia do saber referente ao objeto quadrilátero em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Ecologia, pela abordagem teórica escolhida, no sentido de investigar as condições e restrições desse objeto existir no campo da Geometria em livros didáticos, por exemplo. Isso, por considerarmos o fato do livro didático ser um dos recursos que compõe um conjunto de saberes a serem ensinados pelo professor, por conseguinte, estudados pelos alunos quando ensinados ou não. Por sua vez, são os livros didáticos recursos que mais auxiliam professores de Matemática a elaborarem seus respectivos planejamentos.

Para tanto, inicialmente justificamos o estudo sob um formato que visa aproximar o leitor às razões que possibilitaram esta pesquisa acontecer. A primeira refere-se a minha<sup>1</sup> justificativa acadêmica enquanto pesquisador, com o intuito de mostrar as influências que me direcionaram a pesquisar sobre esta temática. A segunda razão diz respeito à problemática que abrange o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. Em continuidade ao texto, nortearemos o leitor quanto aos fundamentos teóricos e metodológicos escolhidos para esta pesquisa.

## 1.1. JUSTIFICATIVA

Durante minha trajetória no curso de licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe (IFS), o campo da Geometria sempre despertava em mim um interesse em estudá-la além da graduação. Nesse percurso, a participação em dois programas de fomento à docência – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e Programa de Residência Pedagógica (PRP) – contribuiu para minha formação e a escolha do objeto matemático voltado à Geometria. Nesse ínterim, fui monitor do Laboratório de Ensino de Matemática

---

<sup>1</sup> Sempre que for retratada a experiência do pesquisador, serão usados neste texto, pronomes e verbos na 1ª pessoa do singular, mesmo respeitando as normas acadêmicas de um texto científico.

(LEM) que realizava diversas atividades, uma delas o ciclo de oficinas de Matemática voltado para o ensino de Geometria.

Após uma experiência no estágio extracurricular, despertou-me a curiosidade de analisar livros didáticos por perceber as diferenças de abordagens quando comparava mais de duas obras na elaboração dos planos de aula. Diante disso, no processo de finalização dessa graduação, decidi pesquisar para meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) a abordagem dos livros didáticos a respeito da interpretação geométrica de sistemas lineares. Apesar desse objeto geométrico associar a outros campos matemáticos, como Álgebra e Aritmética, sua abordagem apresenta-se de forma isolada nos livros didáticos que analisei.

Por conseguinte, na experiência em sala de aula como docente, reforçou o interesse em analisar os livros didáticos por persistir a mesma problemática, em particular, os objetos geométricos, visto que possuem maior disparidade nas comparações. Assim, busquei ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Federal de Sergipe (PPGECIMA/UFS) para analisar livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, precisamente no campo da Geometria.

Além disso, tive o interesse de integrar-me ao grupo de pesquisa denominado Núcleo Colaborativo de Pesquisas e Práticas em Educação Matemática (NCPPEM) que tem como foco principal a pesquisa em Educação Matemática, investigando métodos de ensino, estratégias de aprendizagem, currículos e avaliação com ênfase no ensino de Geometria. Outro fator para participar do NCPPEM foi a aproximação com pesquisadores(as) na área de currículo e ensino de Geometria com mais ênfase em análise de livros didáticos, para assim trocarmos experiências.

No campo geométrico, a escolha do objeto quadrilátero teve influência por identificar em minha prática docente que, parte dos alunos não compreendia as propriedades e classificação dos quadriláteros, quando utilizavam o livro didático como fonte de revisão, sendo necessário o uso de variadas referências. A partir dessa situação, surgiu o interesse em analisar esse objeto geométrico desde sua gênese, para saber como ele vive nas instituições<sup>2</sup> e quais suas condições e restrições para existir. Mas, antes mesmo de apresentar nosso aporte teórico que subsidiou a investigação, destacaremos a problemática que circunda no ensino de objetos geométricos.

---

<sup>2</sup> A partir da perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, instituição refere-se aos livros didáticos de matemática e documentos curriculares nacionais, como também, escola, família etc.

## 1.2 PROBLEMÁTICA

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é um programa do governo brasileiro que tem como objetivo fornecer livros didáticos para as escolas públicas de Ensino Fundamental e Médio. Ele foi instituído em 1985 e passou por diversas transformações ao longo dos anos. Na década de 1980, o programa fornecia livros didáticos apenas para as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, em nível de Ensino Fundamental. Posteriormente, na década de 1990, o programa foi ampliado para incluir outras disciplinas, como História, Geografia e Ciências, por exemplo. Além disso, foram estabelecidos critérios para a seleção dos livros, como a avaliação pedagógica e a adequação ao currículo nacional (Brasil, 2021).

Durante a década de 2000, o PNLD passou a incorporar tecnologias digitais e multimídia, além dos livros físicos, havendo também produção de livros didáticos em braile para alunos cegos<sup>3</sup>. Na década seguinte, passou por uma reformulação significativa, com a criação do PNLD Digital e a inclusão de livros digitais interativos. Acrescentado a isso, foram estabelecidos critérios mais rigorosos para a avaliação e seleção dos materiais didáticos. Atualmente, continua em constante evolução e adaptação às demandas educacionais garantindo a oferta de materiais didáticos alinhados às diretrizes curriculares (Brasil, 2021).

O livro didático (LD) é um instrumento de trabalho importante para o professor, pois encaminha a organização dos conteúdos a serem trabalhados e possíveis estratégias de ensino. Entretanto, é necessário que o docente articule os saberes a ensinar para melhor atender aos seus alunos.

Dessa forma, o livro didático deve ser um meio e não o fim em si mesmo. Com base no conhecimento do aluno e no contexto social em que está inserida a escola, o professor modifica, complementa, insere novos problemas, atividades e exercícios àqueles do livro didático (Dante, 1996, p. 89).

Além disso, outros documentos oficiais<sup>4</sup> também têm relevância na ação didática, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular

---

<sup>3</sup> Os livros em braile são transcritos pelo Instituto Benjamin Constant – instituto para deficiente visuais, como parceria junto ao Ministério da Educação, desde a implementação da Política de Educação Especial em meados da década 1990.

<sup>4</sup> Entende-se como o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

(BNCC). Os PCN são um conjunto de diretrizes e orientações elaboradas pelo Ministério da Educação (MEC), elaborados e disseminados na década 1990 para auxiliar na formulação dos currículos escolares nas diferentes etapas da educação básica. A BNCC, implementada entre os anos 2017 e 2018, é o documento curricular vigente que compreende a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Esse documento define e normatiza um conjunto de conhecimentos, competências e habilidades essenciais para todos os estudantes adquirirem ao longo de sua educação básica. A BNCC serve como referência para a elaboração dos currículos escolares nas redes de ensino de todo o país (Brasil, 2018).

O LD é o material mais acessível ou até mesmo o único para os alunos das redes públicas, ou seja, é necessário que sua organização seja a mais favorável possível para o entendimento de tais conceitos. Nesse caso, é possível dizer que as dificuldades que os alunos têm podem ser influenciadas pelo livro didático, visto que é o principal material utilizado pelo professor para o planejamento didático (Bittar, 2017). Em suma, conhecer o histórico do PNLD é fundamental para compreender o contexto, as políticas educacionais e as implicações na seleção e uso de materiais didáticos, sobretudo, os que são distribuídos gratuitamente nas escolas públicas de nosso país.

Com base em algumas obras didáticas, é possível perceber que a Geometria é frequentemente abordada de forma isolada, ou mesmo sob as estruturas algébricas desvinculando a aprendizagem dos alunos da sua essência representativa – as construções geométricas. Apresentar uma abordagem desses objetos geométricos sem estabelecer conexões com outros campos da Matemática, por exemplo, dificulta a percepção dos alunos sobre a relevância da Geometria em outros campos, como a álgebra, a trigonometria e o cálculo.

Dentre as estratégias desenvolvidas para sanar ou ao menos minimizar essas lacunas, estão as reformulações curriculares apontando a importância de articular o campo geométrico aos demais campos da matemática, a fim de resgatar o ensino desses conteúdos na educação básica (Rosa; Souza; Santos, 2020, p. 18).

A formação de professores também pode influenciar nas dificuldades no ensino de Geometria na educação básica. Em muitos programas de formação de professores, a ênfase é dada à Matemática de forma mais abstrata e teórica, em vez de aspectos mais práticos e visuais, como a Geometria. Isso pode levar os professores a se sentirem menos

confortáveis e menos preparados para ensinar a Geometria, que requer uma abordagem mais visual e espacial.

Dessa forma, é o professor de Matemática da educação básica, o responsável a ensinar Geometria independentemente de seu conhecimento, decidindo como será feita a abordagem em sala (Rosa, Souza, Santos, 2020). A partir disso, Almouloud (2004) ressalta algumas reflexões acerca da formação de professores no ensino de Geometria para o Ensino Fundamental. Nesse sentido, esse autor enfatiza que é necessário despertar uma análise reflexiva das práticas pedagógicas, tornando os professores que ensinam Matemática mais envolvidos e qualificados para estratégias de ensino no campo geométrico.

É importante destacar que a Geometria está presente no cotidiano dos alunos e reforçar isso através de práticas educativas é fundamental. Dante (1996) confirma esse raciocínio ao destacar conceitos que estão presentes no dia a dia de várias maneiras e que desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de habilidades cognitivas, como o pensamento geométrico e a compreensão do mundo ao nosso redor.

Por conseguinte, um material didático que proporcione experiências de aprendizagem diversas e com orientações para a ação didática tornaria o ensino da Geometria mais significativo, prático e efetivo. Diante disso, estudamos do campo geométrico, o objeto quadrilátero, com intuito de compreender as condições e restrições desse objeto existir e como tornar sua transposição didática acessível para o aluno dos anos finais do Ensino Fundamental aprendê-lo de modo mais efetivo e significativo. A seguir, uma apresentação acerca dos fundamentos que nortearam esta pesquisa.

### 1.3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

O termo "transposição didática" teve sua origem na tese de doutorado de Michel Verret, um sociólogo francês. Essa tese, intitulada "*Le temps des études*", foi publicada em 1975 (Chevallard, 1991). Nesse sentido, o intuito do sociólogo era a organização dos horários das atividades escolares, com o objetivo de auxiliar na compreensão dos papéis sociais desempenhados pelos estudantes (Leite, 2007).

Posteriormente, a Teoria da Transposição Didática (TTD) foi desenvolvida por Yves Chevallard como uma abordagem teórica relevante para o campo do ensino e aprendizagem de conteúdos científicos, principalmente em relação aos saberes

matemáticos. Assim, a definição de Chevallard (1991, p. 39) em relação à transposição didática foi:

Um conteúdo do saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto do saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática<sup>5</sup>.

De acordo com Almouloud (2007), essa teoria foi elaborada por Chevallard para diferenciar os níveis dos saberes: saber sábio, saber a ser ensinado e saber ensinado. O saber sábio refere-se ao conhecimento científico formalizado que é construído por especialistas em um determinado campo de estudo. No entanto, quando esse conhecimento científico é transposto para o contexto educacional, torna-se um saber a ser ensinado que, quando transposto ao saber ensinado, será um saber que efetivamente chegará o aluno, mas sem a garantia de como esse saber foi compreendido por esse aluno.

Segundo Lopes (1999), é um processo complexo no qual o conhecimento científico é adaptado e transformado para se adequar ao contexto escolar. Esse conceito destaca a importância de compreender as dificuldades e desafios envolvidos na tarefa de levar o conhecimento científico para a sala de aula, visando uma aprendizagem mais efetiva por parte dos alunos.

Assim, essa teoria revelou-se limitada na classificação dos objetos de conhecimento, entre outras razões, pelas quais Yves Chevallard (1999) ampliou seus estudos sobre a transposição didática, elaborando uma nova teoria – a Teoria Antropológica do Didático (TAD) – que situa a atividade matemática e suas relações com o estudo da Matemática dentro das atividades humanas.

Nesse sentido, a TAD situa a atividade matemática como um processo dinâmico de construção de objetos matemáticos a partir de situações do mundo real. A transposição didática, a praxeologia matemática e o contrato didático são conceitos fundamentais que ajudam a compreender como o conhecimento matemático é desenvolvido, transmitido e internalizado no contexto educacional.

Na TAD, o objeto matemático refere-se ao conhecimento matemático em si, que é a matéria-prima do ensino. Esse objeto pode ser um conceito, uma técnica, uma propriedade ou qualquer componente da Matemática. O processo de matematização que envolve a transformação de situações do mundo real em objetos matemáticos, torna-se

---

<sup>5</sup> Tradução livre.

crucial para o aluno construir seu próprio conhecimento matemático. A atividade matemática é, portanto, vista como um processo dinâmico de transformação e construção de objetos matemáticos a partir de situações do cotidiano.

Assim como mencionado anteriormente em relação à Teoria da Transposição Didática, a TAD também reconhece a importância da transposição didática na atividade matemática. Isso implica que o conhecimento matemático, enquanto objeto matemático, precisa ser adaptado e transformado para ser ensinado de maneira eficaz. O conceito de praxeologia matemática se refere ao conjunto de práticas e regras que guiam a atividade matemática. Isso inclui não apenas a resolução de problemas matemáticos, mas também a forma como os conceitos são apresentados, justificados e aplicados.

Outro conceito importante na TAD é o contrato didático. Esse contrato é um conjunto de acordos entre professor e alunos sobre o que é esperado em termos de ensino e de aprendizagem. Ele influencia a maneira como a atividade matemática é conduzida na sala de aula e como os alunos se envolvem com o conhecimento matemático.

Nesse contexto, insere-se uma abordagem – a Ecologia do Saber – que para Yves Chevallard, por meio dessa ecologia, o pesquisador busca compreender o processo de ensino e aprendizagem em sua complexidade. Por essa abordagem, o didata francês considera o conhecimento como um ecossistema dinâmico, no qual diferentes elementos interagem e se influenciam mutuamente. Nos estudos sob a perspectiva da TAD, busca-se entender não apenas o que é ensinado, mas também como esse conhecimento é construído, transmitido e assimilado na humanidade.

A metáfora da ecologia destaca a interdependência e as relações dinâmicas entre os diferentes elementos do processo educativo. Assim como em um ecossistema, no qual as diversas espécies interagem e se adaptam ao ambiente, na Ecologia do Saber, os elementos do conhecimento, tais como conceitos, propriedades, métodos e práticas, estão interconectados e moldam-se mutuamente. O autor considera a ecologia do saber matemático como o estudo do habitat e nicho desse saber, reconhecendo a influência do contexto cultural, social e institucional na construção desse saber.

Desse modo, toma-se como ponto de partida que a aprendizagem não ocorre isoladamente, mas é fortemente influenciada pelo ambiente em que ocorre, ou seja, pelas relações que ocorrem nas instituições em que determinado saber existe. Como os sistemas de ensino apresentam o currículo, como os saberes são abordados nos livros didáticos, por sua vez, como o professor concebe esses saberes e os ensina, por conseguinte, para também entender como esses saberes são compreendidos pelos alunos.

Entretanto, nesses estudos, se faz necessário pesquisadores seguirem procedimentos metodológicos sistemáticos segundo a perspectiva do teórico. Trata-se de uma teoria em evolução, cujos procedimentos têm aproximações a outras teorias da Didática da Matemática<sup>6</sup>, como situações didáticas defendidas por Guy Brousseau e engenharia didática, autoria de Michele Artigue.

#### 1.4 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

De acordo com Gil (2002, p.17), define-se “pesquisa como o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos”. Nessa perspectiva, o intuito deste estudo foi analisar como o objeto quadrilátero está presente nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, com base nas três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela TAD. Assim, a natureza da pesquisa é qualitativa e com abordagem bibliográfica.

Refere-se a uma pesquisa bibliográfica, pois coleta e analisa fontes históricas do objeto em estudo, neste caso, o quadrilátero. Consequentemente, utiliza-se da literatura disponível como livros, artigos científicos, dissertações e teses. Além disso, apresenta os principais dados mediante os documentos oficiais, assim como, os livros didáticos (para este estudo, dos anos finais do Ensino Fundamental) que estejam relacionados por seguirem recomendações específicas na orientação ao trabalho docente. Dessa forma, é possível compreender a evolução do objeto ao longo do tempo e como isso influencia nos diferentes aspectos relacionados a ele, fornecendo uma visão mais completa possível e aprofundada.

A questão norteadora que visamos responder é: Como o objeto quadrilátero é abordado nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, considerando as três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela TAD?

A partir disso, traçamos como objetivo geral deste trabalho: analisar a ecologia do saber quadrilátero nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental que foram aprovados pelo PNL D seguindo as orientações dos PCN e da

---

<sup>6</sup> A Didática da Matemática se constitui por um conjunto de teorias de pesquisadores franceses, aplicadas no Brasil, enquanto linhas de pesquisa da Educação Matemática. Na França é considerada como Educação Matemática.

BNCC. É fundamental, também, destacar alguns objetivos específicos com a finalidade de delimitar a pesquisa:

1. Caracterizar pesquisas que abordem o estudo de quadriláteros em documentos oficiais e em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, preferencialmente, sob a perspectiva Ecológica do Didático;
2. Averiguar como o objeto quadrilátero está presente nos documentos oficiais (PCN, BNCC, PNLD);
3. Analisar as praxeologias presentes no objeto quadrilátero de duas coleções de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, entre aquelas que apresentaram maior frequência de aprovação dos PNLD's no período compreendido entre 2002 a 2020.

### 1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação conta com quatro seções, a primeira refere-se a esta Introdução, na qual foram apresentadas a justificativa pessoal, a problemática, bem como os fundamentos teóricos e metodológicos; além desta subseção, que orienta a estrutura do texto. A escolha por essa estrutura foi de acordo com as pesquisas que fazem parte da mesma teoria, pela qual busca-se compreender quais razões do pesquisador em analisar as condições e restrições do objeto matemático existir, neste caso, no âmbito dos anos do Ensino Fundamental.

Para a segunda seção, buscamos apresentar nossos estudos sobre a Teoria Antropológica do Didático relacionados com o objeto quadrilátero incluindo uma revisão de literatura com intuito de caracterizar pesquisas que abordem o estudo de quadriláteros em documentos oficiais e/ou livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, preferencialmente, sob a perspectiva Ecológica do Didático e o padrão heurístico do problema didático proposto por Gascón (2011) e suas dimensões e modelos.

Na terceira seção, tem-se o estudo das três dimensões do objeto quadrilátero: epistemológica, econômica e ecológica. Cada dimensão é abordada em subseções distintas, explorando como o objeto é tratado e contextualizado nos diferentes âmbitos. Na dimensão epistemológica, foi realizado o estudo do Modelo Epistemológico de Referência (MER) criado por Cuellar (2021). Na dimensão econômica, discutimos sobre o ensino de Geometria no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Base Nacional Comum Curricular e o Programa Nacional do Livro Didático antes e depois da Base

Nacional Comum Curricular, considerando que tais documentos guiam os tipos de abordagens dos objetos matemáticos em livros didáticos de Matemática.

## 2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Nos estudos voltados à TAD, teoria desenvolvida por Yves Chevallard (2018, p.31), considera-se que “tudo é objeto, incluindo as pessoas” e que “qualquer produto intencional da atividade humana, é um objeto”. A partir disso, são identificados três conceitos fundamentais: os Objetos (O), as Instituições (I) e as Pessoas (X) que se relacionam  $R(O, I)$ ;  $R(X, O)$ ;  $R(X, I)$ , o que engloba a relação pessoal  $R(X, O)$  e a relação institucional  $R(I, O)$ . Na relação pessoal, são todos os sistemas de interações que X pode ter com O, assim como, na relação institucional obedece aos sistemas de interações que O existe para I.

Segundo a perspectiva da TAD, todo conhecimento representa o saber associado, no mínimo, a uma instituição específica; um determinado objeto de conhecimento pode coexistir em diversas instituições distintas e, para ser acolhido por uma delas, o conhecimento deve obedecer a certas exigências, resultando em sua própria transformação e mudanças ao longo do tempo. Com isso, analisa-se também quem colabora para sua presença e se essa colaboração se estende a outro objeto.

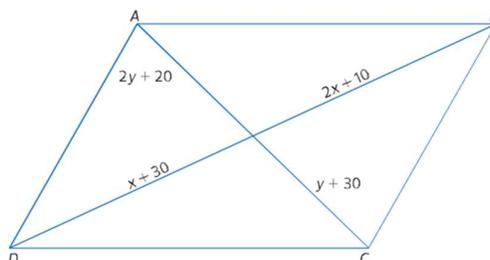
Tais inquietações abarcam a compreensão dos princípios da Ecologia do saber. No nosso contexto, por exemplo, colocamos como um dos objetivos, mostrar de que forma os quadriláteros vivem nos LDs e documentos oficiais. Assim, temos como instituição – os livros didáticos de Matemática e documentos oficiais – e como objeto – quadriláteros. Para Almouloud (2007), a análise, no âmbito dessa ecologia, expande o escopo de investigação permitindo a abordagem de questões que surgem entre distintos objetos do saber a ensinar. Essa abordagem é devidamente estruturada “em torno de dois conceitos: o *habitat* que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual desse objeto de saber, e o nicho que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage” (Almouloud, 2015, p.15).

Em Chevallard (1999), toda atividade humana pode ser descrita por uma tarefa, seguindo de uma organização praxeológica para descrevê-la, seja ela uma atividade matemática ou não. Em decorrência, uma organização praxeológica possui quatro noções: tipos de tarefa (T), técnica ( $\tau$ ), tecnologia ( $\theta$ ) e teoria ( $\Theta$ ). Essas noções designam uma organização praxeológica completa  $[T/ \tau/ \theta/ \Theta]$  dividida em dois blocos: o saber-fazer (práxis) é indicado por  $[T/ \tau]$  e o do saber (logos) designado por  $[\theta/ \Theta]$ . Dada uma tarefa (T), identificada por um verbo de ação, é necessário para sua realização, um método ou

até mesmo uma estratégia, determinada por uma técnica ( $\tau$ ). Ademais, para justificação da sua resposta é indispensável uma tecnologia ( $\theta$ ) e, em seguida, toda tecnologia precisa de uma justificativa, denominada de teoria ( $\Theta$ ).

**Figura 1:** Exemplo de uma tarefa sobre quadrilátero no livro didático de matemática (8º ano)

99. Calcule a medida de cada uma das diagonais do paralelogramo da figura.



Fonte: Dante (2015, p. 116)

Assim, na Figura 1, podemos determinar a organização praxeológica da seguinte forma:

- T: Calcular a medida de cada uma das diagonais do paralelogramo da figura;
- $\tau_1$ : Igualar as duas medidas das mesmas diagonais para encontrar o valor de x e y;

Diagonal <u>AC</u>	Diagonal <u>BD</u>
$2x + 10 = x + 30$	$2y + 20 = y + 30$
$2x - x = 30 - 10$	$2y - y = 30 - 20$
$x = 20$	$y = 10$

- $\tau_2$ : Substituir os valores encontrados nas medidas das diagonais (AC e BD):

Diagonal <u>AC</u>		Diagonal <u>BD</u>	
$2x + 10$	$x + 30$	$2y + 20$	$y + 30$
$2 \cdot 20 + 10$	$20 + 30$	$2 \cdot 10 + 20$	$10 + 30$
$40 + 10$	$50$	$20 + 20$	$40$
$50$		$40$	

- $\tau_3$ : Somar as medidas encontradas em cada diagonal;

Diagonal <u>AC</u>	Diagonal <u>BD</u>
$\underline{AC} = 50 + 50 \Rightarrow \underline{AC} = 100$	$\underline{BD} = 40 + 40 \Rightarrow \underline{BD} = 80$

- $\theta$ : Propriedade dos paralelogramos;

- $\Theta$ : Geometria plana.

Dessa forma, as praxeologias (ou organizações) relacionadas a um saber matemático se dividem em dois tipos: organizações matemáticas (OM) e organizações didáticas (OD), “que permitem descrever, respectivamente, escolhas matemáticas e didáticas em uma determinada instituição” (Bittar, 2017, p. 369). As OMs se referem às formas como o conhecimento matemático é estruturado e organizado em sistemas de representação, símbolos, regras e relações. A partir disso, exibem um nível de complexidade que aumenta gradualmente, e tal complexidade é categorizada em níveis.

Organização Matemática Pontual (OMP)  $[T / \tau / \theta / \Theta]$ , quando são formadas por apenas um tipo de tarefa; Organização Matemática Local (OML)  $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ , decorre da integração de várias praxeologias pontuais e destaca a tecnologia  $\theta$ ; Organização Matemática Regional (OMR)  $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$ , é obtida com a articulação de praxeologias locais referentes à mesma teoria matemática, ou seja, traz a teoria para o primeiro plano  $\Theta$ ; Organização Matemática Global (OMG)  $[T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k]$ , obtido, em uma dada instituição, pela agregação de várias praxeologias regionais correspondentes a várias teorias  $\Theta_k$ . (Chevallard, 1999, p. 2).

Ademais, no processo de evolução das praxeologias matemáticas, Chevallard também introduz os termos ostensivo e não-ostensivo, que, de acordo com Almouloud (2007), desempenham um papel fundamental na execução de qualquer tipo de tarefa. Em conformidade com L. Santos (2021, p. 20)<sup>7</sup>, “na matemática, os sinais, símbolos e figuras, por exemplo, são objetos ostensivos que representam e revelam os conceitos (objetos não ostensivos)”. Por exemplo, dada uma figura determinada como um quadrado (objeto ostensivo), a partir dela, podemos calcular a área (objeto não ostensivo), pois precisaremos de conceitos para realização do cálculo.

Em paralelo, as ODs são vistas como a maneira pela qual o conhecimento matemático é transmitido aos alunos, transformando em experiências concretas de aprendizagem. Para Cavalcante (2018, p. 135), “revelam as escolhas feitas pelo professor para que seus alunos possam construir ou reconstruir determinadas OM previstas no currículo”. Por conseguinte, será possível analisarmos nos LDs as escolhas matemáticas e didáticas na construção do ensino de quadriláteros, apresentando o contexto prático-técnico e tecnológico-teórico. Como também analisar nos documentos oficiais de que

---

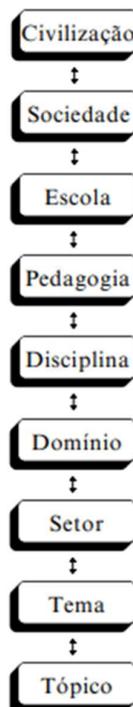
<sup>7</sup> Convém destacar nossa escolha em identificar referências de estudos que tenham seus autores com mesmo sobrenome, inserindo a inicial do prenome para distinguir tais estudos, independentemente do ano de publicação.

forma as orientações curriculares favorecem para que este quarteto praxeológico seja bem estruturado.

Em relação à ecologia do saber<sup>8</sup>, Chevallard (2002) expandiu a escala dos níveis de codeterminação didática e matemática com intuito de facilitar a identificação das condições e restrições que influenciam nos processos de ensino e aprendizagem. Logo, classificou em dois níveis: os superiores (pedagogia, escola, sociedade e civilização) e os inferiores (domínio, setor, tema e tópico). O primeiro nível, de acordo com N. Santos (2021, p. 47), “impõe restrições e condições relativas à própria instituição educacional” e o segundo refere-se as “restrições para uma organização matemática”.

Os níveis superiores e inferiores, estão inseridos nos níveis da noosfera<sup>9</sup> e da determinação matemática, respectivamente. A partir disso, constitui-se uma fronteira entre esses níveis, determinado como disciplina (Chevallard, 2002).

**Figura 2:** Escala dos níveis de codeterminação matemática e didática



Fonte: Adaptação de N. Santos (2021, p. 48).

<sup>8</sup> [...] “se refere à vida e à sobrevivência de conceitos e noções matemáticas dentro das instituições” (Figueiredo e Coutinho, 2021, p. 11).

<sup>9</sup> Segundo o pensamento de Chevallard (1986): A entidade que valida a existência de objetos que precisam ser reconhecidos ou serão reconhecidos por instituições oficiais de ensino.

Ao analisar a Figura 2, como referência Oliveira (2023), podemos determinar os níveis de codeterminação para o estudo do objeto quadrilátero no ensino brasileiro. Assim, nos níveis da noosfera, a civilização corresponde ao Ocidente, na sociedade são os PCN, BNCC e o Currículo de Sergipe, na escola os anos finais do Ensino Fundamental e na pedagogia, o livro didático. A fronteira é determinada pela disciplina Matemática. Nos níveis de determinação matemática, o domínio é categorizado pela Geometria, no setor, a Geometria Plana, no tema é o objeto quadrilátero, por fim, no tópico, estão as diferentes definições e propriedades sobre os quadriláteros.

Em seguida, apresentaremos as seguintes subseções: revisão de literatura para identificar trabalhos correlacionados a esta pesquisa, apresentação do problema didático e suas dimensões (epistemológica, econômica e ecológica) e os modelos que pertencem ao problema didático.

## 2.1 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta subseção, destacamos as principais pesquisas acerca do tema visando justificar a relevância do estudo e buscar responder à questão norteadora - Como o objeto quadrilátero é abordado nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, considerando as três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela TAD? – assim, foi essencial examinar as teses e dissertações, a fim de promover uma busca e análise mais precisa, permitindo-nos aprofundar nossa compreensão e discussão de forma adequada.

Inicialmente foram realizadas buscas em duas bases de dados bibliográficos, na Biblioteca Digital Brasileira de Dissertações e Teses (BDTD) e no catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior (CAPES) para compor o mapeamento.

Desta maneira, organizamos cinco combinações de palavras chaves para identificar trabalhos relacionados com esta pesquisa: “Quadriláteros” *and* “Livros didáticos”; “Quadriláteros” *and* “Teoria Antropológica do Didático”; “Quadriláteros” *and* “Programa Nacional do Livro Didático”; “Quadriláteros” *and* “Parâmetro Curricular Nacional”; “Quadriláteros” *and* “Base Nacional Comum Curricular”. Em consequência, encontramos três pesquisas, sendo duas teses e uma dissertação.

É importante destacar que não houve delimitação temporal, com o intuito de abranger mais pesquisas com essas combinações. Além disso, todas as combinações foram

associadas ao objeto de estudo – quadriláteros, propositalmente para abranger mais pesquisas semelhantes a este estudo.

**Quadro 1:** Dissertações e teses do banco de dados da BDTD e CAPES

PESQUISAS	AUTORAS / ANO	TÍTULO	IES/UF
Teses	Daysi Julissa García-Cuéllar (García-Cuéllar, 2021)	Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros	Doutorado em Educação Matemática; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP
	Maridete Brito Cunha Ferreira (Ferreira, 2016)	Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas	Doutorado em Educação Matemática; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP
Dissertação	Cleide Ribeiro Mota Arinos (Arinos, 2018)	Um estudo da potencialidade das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do ensino fundamental	Mestrado em Educação Matemática; Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, MS

Fonte: elaboração do autor (julho, 2023).

Apesar das pesquisas apresentadas no Quadro 1 possuírem o mesmo objeto de estudo, as finalidades são distintas que se caracterizam pela metodologia de pesquisa. Em Cuéllar (2021), foi elaborado um Percurso de Estudo e Pesquisa para formação continuada de professores – PEP-FP. É importante destacar que a autora realizou o estudo das três dimensões didáticas dos quadriláteros - epistemológica, econômica e ecológica propostas por Gascón (2011) possibilitando uma análise mais completa e contextualizada do tema, na qual, forneceu dados importantes para esta pesquisa.

Como resultado, foi satisfatório pois contribuiu na formação continuada de professores especificamente para o ensino de quadriláteros, cujo propósito foi tornar os alunos protagonistas de sua própria aprendizagem. No entanto, o grupo de professores notificou que precisam de mais experiências com o PEP para que a aplicação em sala tenha êxito com base nessas vivências.

Na segunda pesquisa, teve-se como objetivo investigar uma proposta didática, cujas tarefas articulam provas e demonstrações (Ferreira, 2016). Esta autora se propôs em

diminuir as dificuldades dos alunos do curso de licenciatura em matemática no assunto de quadriláteros. Apesar de adotar a engenharia didática como metodologia de pesquisa, utilizou-se da TAD para fundamentar suas análises.

Em continuidade, a autora investigou as concepções dos alunos em relação a provas e demonstrações, como também a análise de três livros de geometria utilizados no curso de licenciatura. Em síntese, mostrou que as tarefas que envolviam provas e demonstrações possibilitaram aos alunos poderem vivenciar as fases da teoria das situações didáticas. Além disso, promoveu a conversão de representação semiótica e tratamentos da teoria de Raymond Duval.

No caso da pesquisa de Arinos (2018), apesar de não possuir nenhuma relação com a TAD, o objetivo foi investigar aprendizagens por alunos do quinto e sexto ano do Ensino Fundamental diante de situações envolvendo representações semióticas diversas na abordagem de áreas de triângulos e quadriláteros. Percebe-se que apenas há relação em partes, no objeto de estudo, ou seja, entre as pesquisas identificadas, essa última se distancia do presente estudo pelos objetivos e metodologia.

É notório que o objeto de estudo em relação à análise e investigação por meio da TAD é pouco pesquisado, pela quantidade de dissertações e teses encontradas nos dois maiores bancos de dados de pesquisas nacionais, principalmente com o foco de nosso estudo – os quadriláteros. Por conseguinte, vimos ser importante apresentar estudos locais para ampliar o embasamento teórico e metodológico.

Assim, buscamos no repositório institucional de teses e dissertações da UFS trabalhos que se relacionam com o tema em questão ou com a TAD. Dessa forma, decidimos realizar duas combinações “teoria antropológica do didático”; “quadriláteros” *and* “teoria antropológica do didático” encontrando um total de dezesseis (16) dissertações<sup>10</sup> e uma (1) tese<sup>11</sup>. A partir disso, foi realizada uma análise e seleção dessas pesquisas para destacar aquelas que mais se entrelaçam com a teoria em estudo. Nesta seleção, optamos por pesquisas que abordem a TAD e tenham como objeto de estudo, os objetos geométricos resultando em cinco trabalhos destacados a seguir.

---

<sup>10</sup> Todas dissertações encontradas pertencem ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMA/UFS).

<sup>11</sup> A tese pertence ao Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGED/UFS).

**Quadro 2:** Dissertações e Teses do Repositório Institucional da Universidade Federal de Sergipe RI/UFS

PESQUISAS	TÍTULO	AUTORAS / ANO	OBJETIVO
D I S S E R T A Ç Õ E S	Mecanismos atencionais esperados no processo de aprendizagem de alunos surdos em matemática: uma investigação em livros didáticos do PNLD 2017	Alanne de Jesus Cruz (Cruz, 2019)	Articular interesses da didática da matemática aos interesses da Neurociência Cognitiva, identificando mecanismos atencionais presentes no objeto matemático Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo possíveis de auxiliar a aprendizagem de alunos surdos, a partir dos objetos ostensivos e não ostensivos presente nas praxeologias de livros didáticos de matemática do 9º no ensino fundamental, aprovados pelo PNLD/2017
	Uso dos objetos ostensivos e não ostensivos para o ensino do princípio aditivo voltado ao(à) aluno(a) com deficiência visual dos anos iniciais do ensino fundamental	Luciene dos Santos (L. Santos, 2021)	Investigar como o uso dos objetos ostensivos e não ostensivos pode contribuir no processo de ensino do princípio aditivo voltado ao(à) aluno(a) com deficiência visual que estuda nos primeiros anos do ensino fundamental.
	Praxeologia para ensinar sólidos geométricos: o caso de uma bolsista residente do curso Licenciatura em Matemática da UFS	Nailys Melo Sena Santos (N. Santos, 2021)	Analisar as praxeologias adotadas por uma licencianda em matemática, participante do Programa Residência Pedagógica (RP) vinculado à Universidade Federal de Sergipe, para ensinar sólidos geométricos em uma turma do 6º ano do ensino fundamental.
	Uma análise praxeológica sobre a presença de sólidos geométricos em provas do ENEM de 2017-2020	Valéria de Jesus Padilha (Padilha, 2022)	Analisar quais são as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020.
	A mobilização para aprender a ensinar matemática e desenvolver o universo cognitivo de pibidianos da UFS: uma análise a partir das relações propostas na TAD	Narinha Mylena Rocha da Silva (Silva, 2022)	Analisar como o Pibid-Matemática (UFS/Campus São Cristóvão) constituiu e/ou modificou o universo cognitivo de pibidianos, no que diz respeito ao processo de construção do aprender a ensinar objetos de conhecimentos matemáticos.

Fonte: Elaborado pelo autor (agosto, 2023).

Dentre as dezessete (17) pesquisas, foram selecionadas as cinco (5), como destacado no Quadro 2. Outra pesquisa que não consta neste RI, mas que está em fase de publicação tem como título “A noção de ecologia do saber: um estudo sobre o objeto triângulo em documentos oficiais e em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental” da autora Oliveira (2023). Além disso, é relevante salientar que Oliveira (2023), Silva (2022), N. Santos (2021), Padilha (2022) e Cruz (2019) são também integrantes do NCPPEM, cujas pesquisas são vinculadas ao PPGECIMA. A partir disso, apresentaremos uma síntese das pesquisas citadas, com o intuito de aproximar ao nosso estudo.

Cruz (2019) e L. Santos (2021) realizaram um estudo dos objetos ostensivos e não ostensivos. A primeira teve como objetivo auxiliar a aprendizagem para alunos surdos e a outra, investigar o uso para contribuir no processo de ensino para alunos com deficiência visual, respectivamente. Especificamente, Cruz (2019) realizou uma análise de livros didáticos do 9º do ensino fundamental para verificar os objetos ostensivos e não ostensivos presentes nas praxeologias do objeto matemático Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

Silva (2022) analisou como um programa institucional teve impacto na formação cognitiva dos participantes, tanto ao constituir quanto ao modificar seus conhecimentos no processo de aprendizagem para ensinar os conteúdos matemáticos a partir das relações propostas na TAD. Obteve como resultado que a estrutura da instituição em estudo, aliada aos seus objetivos institucionais, criou um cenário propício. As relações interpessoais desenvolvidas pelos participantes tiveram uma influência direta na formação e/ou transformação do conhecimento desses indivíduos. Esse processo visou a preparação para o ensino da matemática.

N. Santos (2021) e Padilha (2022), ambas analisaram as praxeologias de sólidos geométricos baseando-se no estudo das três dimensões do problema didático. Diferenciam-se que a primeira analisa as praxeologias matemáticas e didáticas adotadas por uma licencianda em matemática e a segunda analisa as praxeologias matemáticas presentes em provas do Enem em edições específicas, respectivamente. Assim, observa-se que a metodologia de análise no qual este trabalho seguiu se aproxima mais destas autoras, distinguindo-se particularmente no objeto de estudo que é quadrilátero. Nas dimensões, seguimos com as mesmas elaborações de um modelo epistemológico de

referência (MER); explicitamos um modelo epistemológico dominante (MED) e elaboramos um modelo praxeológico de referência (MPR).

Apesar de Oliveira (2023) ainda não constar no RI, sabemos que possui grande relevância para este trabalho, visto ter sido delineado por meio dos mesmos caminhos metodológicos e teóricos, apenas sendo distinto o objeto de estudo. Entretanto, suas contribuições quanto à análise de documentos oficiais como PCN e BNCC valerem por se tratar do mesmo campo de estudo – Geometria.

Para complementar o levantamento bibliográfico, buscou-se no periódico Caminhos da Educação Matemática em Revista (online) do Instituto Federal de Sergipe (IFS) trabalhos relacionados à TAD e com autores que são destaques nesse campo de pesquisa como Artaud (2021); Bittar (2014, 2019, 2021); Bellemain (2021); D. Souza (2014). Foram identificados sete (7) artigos em edições variadas, como destacados a seguir.

**Quadro 3:** Pesquisas na revista Caminhos da Educação Matemática em Revista (online) - IFS

<b>TÍTULO</b>	<b>AUTORES (AS) / ANO</b>	<b>OBJETIVO</b>
A redução ostensiva no estudo das operações de adição e de subtração em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais	Danielly Kaspary; Marilena Bittar (Bittar e Kaspary, 2014)	Discutir acerca do papel dos ostensivos na atividade matemática, em especial aqueles empregados no estudo das operações de adição e subtração dos números naturais.
Estudo dos triângulos sob a perspectiva da teoria antropológica do didático: uma análise do livro didático “a conquista da matemática”	Maria Tânia Souza Santos; Denize da Silva Souza (M. Santos e D. Souza, 2014)	Apresentar um recorte da análise do capítulo Estudo de Triângulos apresentado pelo livro didático “A Conquista da Matemática”, identificando a praxeologia desse conteúdo referente a situações que enfatizem tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria.
As praxeologias do estudo sobre triângulos no livro didático “tudo é matemática”	Maria de Fátima Costa Santos; Denize da Silva Souza (M. Santos e D. Souza, 2014)	Investigação sobre o estudo de Triângulos no livro didático “Tudo é Matemática” (Dante, 2010), volume do 8º ano do Ensino Fundamental.
Estudo sobre circunferência e círculo no livro didático “a conquista da matemática”, sob a perspectiva da teoria antropológica do didático	Valderson Atanzio Santos Souza; Denize da Silva Souza (V. Souza e D. Souza, 2014)	Apresentar um recorte da análise do livro didático “A Conquista da Matemática” referente ao 8º ano do Ensino Fundamental, com foco no conteúdo “Circunferência e Círculo”, como fruto do trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.
A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas	Hamid Chaachoua; Marilena Bittar (Bittar e Chaachoua, 2019)	Apresentar os conceitos centrais e as grandes questões que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria Antropológica do Didático (TAD) desde o início dos anos 1990.
A TAD como ambiente para o estudo da atividade das instituições didáticas	Michèle Artaud; Gisèle Cirade (Artaud e Cirade, 2021)	Evidenciar a eficácia da TAD (Teoria da Antropológica do Didático) na identificação das condições e restrições geradas pelas instituições didáticas que impactam o trabalho do pesquisador.
Um estudo sobre o desenvolvimento da TAD no Brasil	Marilena Bittar; Paula Moreira Baltar Bellemain (Bellemain e Bittar, 2021)	Destacar e questionar um conjunto de pesquisas brasileiras (mestrado e doutorado) cujo enquadramento teórico é o da Teoria Antropológica do Didático (TAD) <sup>12</sup>

Fonte: elaborado pelo autor (março, 2023).

<sup>12</sup> Os textos de Artaud e Cirad (2021); Bittar e Bellemain (2021) foram traduzidos de francês para português (tradução nossa).

Em M. T. S. Silva e D. Souza (2014), M. F. C. Santos e D. Souza (2014), V. Souza e D. Souza (2014) compartilham a característica de analisar a abordagem de objetos geométricos, especificamente relacionados aos triângulos e à circunferência/círculo, em livros didáticos de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental. Eles buscaram entender como esses tópicos são apresentados aos alunos, levando em consideração diferentes aspectos da praxeologia, como tarefas, técnicas, tecnologias e teoria.

Chaachoua e Bittar (2019), no seu texto, abordam conceitos iniciais da TAD como as relações entre pessoa, objeto e instituição. Em seguida, discutem a abordagem praxeológica e a diferenciação entre organizações matemáticas e didáticas. A partir disso, comentam sobre os níveis de codeterminação e como está a hierarquização. Por fim, em sua obra é possível identificar ideias e noções primordiais para entendimento inicial da TAD, que muito contribuíram para a escrita desta pesquisa.

Os artigos de Kasparly e Bittar (2014); Artaud e Cirade (2021); Bittar e Bellemain (2021) possuem grande relevância para o campo acadêmico, entretanto, para esta pesquisa optou-se por não debruçar sobre eles para não destoar do objetivo de pesquisa. Para concluir a revisão sistemática, buscamos também em outra fonte, trabalhos relacionados com a TAD e com aproximações ao nosso objeto de estudo – quadriláteros.

Dessa forma, foi identificado que a Revista Educação Matemática Pesquisa/PUC-SP em seu número especial v. 20 n. 3 (ano 2018) concentra exclusivamente artigos que empregam a TAD em suas análises. Foram identificadas, nessa edição, quinze (15) artigos, sendo apenas selecionado um (1) pela aproximação a nossa temática. É importante destacar que a escolha dessa revista teve influência pelo editor chefe Almouloud, um dos maiores responsáveis pela vasta disseminação da TAD no Brasil.

O texto escolhido tem como título “Polígono: uma linha ou uma região?” dos autores Silva e Jesus (2018). O objetivo da pesquisa foi “analisar elementos históricos, epistemológicos e didáticos sobre a definição de polígonos”. Assim, realizaram uma análise institucional com base na TAD sobre Os Elementos, livros específicos de Geometria, Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular e um livro didático de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental. Dessa forma, este artigo nos orienta caminhos favoráveis para a construção das dimensões do problema didático – epistemológica, econômica e ecológica.

## 2.2 O PROBLEMA DIDÁTICO E SUAS DIMENSÕES

Em Gascón (1999), um problema didático pode surgir das preocupações dos professores sobre o que ensinar, como ensinar e por que ensinar um conteúdo matemático. No entanto, apenas isso não é o bastante para abordar plenamente a dimensão do problema didático. Para considerá-lo adequadamente, é essencial incorporar, no mínimo, a dimensão epistemológica. Essa dimensão procura compreender a razão ou razões por trás de um determinado conhecimento matemático, a partir de um estudo histórico que investiga o seu desenvolvimento.

Segundo as afirmações de Gascón (2011), é possível ilustrar a evolução do problema didático por meio do esquema (ou padrão) heurístico.

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

Sendo  $P_0$ , o ponto de partida viável que fundamentará uma determinada pesquisa, é possível referir-se a ele como o problema relacionado ao ensino. Além do mais,  $P_1, P_2$  e  $P_3$  denotam as dimensões epistemológica, econômica e ecológica, respectivamente. Nesta representação, o símbolo  $\oplus$  representa a incompletude de  $P_0$ , sendo, portanto, fundamental possuir ao menos a dimensão epistemológica para ser classificado como um problema didático.

Em seguida, o símbolo  $\hookrightarrow$  é empregado para expressar uma hierarquia entre as dimensões. O problema didático, é simbolizado por  $P_\delta$ , que engloba as três dimensões fundamentais e as relações entre elas. E, adicionalmente, às novas questões que estão implicitamente presentes (Gascón, 2011).

Na nossa pesquisa, o ponto de partida para o seu desenvolvimento surgiu devido à seguinte questão: Como o objeto quadrilátero é abordado nos documentos oficiais e livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, considerando as três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela Teoria Antropológica do Didático (TAD)? Dessa forma, é necessária uma compreensão mais abrangente de quadriláteros, ou seja, “há a necessidade de olhar para a dimensão epistemológica e investigar a razão de ser desse objeto matemático” (Padilha, p. 35, 2022).

Na dimensão econômica-institucional ( $P_2$ ), de acordo com Gascón (2011, p. 2013, tradução nossa), abarca-se “o sistema de regras e princípios que regulam a organização e o funcionamento das OM e OD envolvidas em um problema didático”. Nesta dimensão, preocupa-se em analisar as instituições envolvidas, como o livro didático e os documentos oficiais. Por fim, a dimensão ecológica ( $P_3$ ), tem o propósito de verificar quais restrições

e condições do objeto matemático, ou seja, é investigado como ele vive e sobrevive na instituição investigada – em nosso caso, livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, editados no período de 2002 a 2020.

### 2.3 MODELOS DO PROBLEMA DIDÁTICO

No estudo das dimensões epistemológica, econômica e ecológica são desenvolvidos três modelos específicos, o Modelo Epistemológico de Referência (MER), Modelo Epistemológico Dominante (MED) e Modelo Praxeológico de Referência (MPR), respectivamente.

Em nossa pesquisa, utilizamos o MER criado por Cuellar (2021), visto que a pesquisadora também investigou o objeto do saber quadriláteros. Apesar de sua pesquisa envolver os quadriláteros do nível secundário no Peru, para desenvolver o MER não há distinção entre os níveis de ensino e a nacionalidade, pois é feita a realização de um estudo histórico aprofundado referente ao saber em jogo. Entretanto, não é possível executar o estudo nas outras dimensões, por causa das instituições analisadas serem distintas.

O MED, é similar ao MER, visto que realiza uma análise epistemológica. Ainda assim, se diferem pelo motivo que o MED desenvolve uma investigação nas instituições em que o objeto do saber está em jogo para verificar suas condições e restrições de sobrevivência. O outro modelo definido como MPR, é capaz de analisar a operação do sistema didático em sala de aula, ou seja, caracterizando e analisando as praxeologias a ensinar acerca do referido objeto matemático.

Na próxima seção, será apresentada a ecologia do objeto quadrilátero nos documentos oficiais e nos livros didáticos, a partir do estudo realizado sob as três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica), pelo qual criou-se modelos específicos.

### **3 ECOLOGIA DO OBJETO QUADRILÁTERO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS E NOS LIVROS DIDÁTICOS**

Nesta seção, serão apresentadas as três dimensões fundamentais do problema didático. A dimensão epistemológica, adotando o MER de Cuellar (2021). A dimensão econômica, expondo um breve histórico sobre o ensino da Geometria no Brasil, analisando a abordagem do objeto quadrilátero em documentos oficiais, cuja análise resultou em um MED. Na dimensão ecológica, são apresentadas algumas condições e restrições que existem no ensino do objeto quadrilátero, de modo a explicitar um MPR sobre esse objeto.

#### **3.1 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA DO OBJETO QUADRILÁTERO**

Nesta subseção, a pesquisa de Cuellar (2021) será destaque por descrever a dimensão epistemológica com a proposta do MER com o mesmo objeto do saber – quadriláteros. Para isso, apoiou-se nas seguintes questões: “Q<sub>1</sub>: Por que é importante o estudo de quadriláteros?”; “Q<sub>2</sub>: O que é quadrilátero?”; “Q<sub>3</sub>: Quais são os tipos de quadriláteros?”; “Q<sub>4</sub>: Como os quadriláteros são classificados?”. A partir disso, será apresentada a resolução de cada questão para o estudo da dimensão epistemológica, conforme as fontes que a referida autora utilizou.

##### **Q<sub>1</sub>: Por que é importante o estudo de quadriláteros?**

Para a resolução dessa pergunta, busca-se aprofundar conhecimento sobre as razões de ser dos quadriláteros em Geometria, com o intuito de identificar a evolução dos conceitos geométricos ao referido objeto em estudo. Assim, Cuellar (2021) utilizou-se dos estudos de Perez de Moya (1573), Pomodoro (1603), Goulard-Henrionnet (1849) e Eves (1992). Inicialmente, a autora buscou destacar a relevância do desenvolvimento da Geometria ao longo da história, como representado na Figura 3.

**Figura 3:** Desenvolvimento da Geometria no longo da História

Fonte: Cuellar (2021, p. 66)

Para Eves (2011), a Geometria subconsciente é a mais antiga, e está relacionada a sua origem por meio das simples observações decorrentes da capacidade humana em reconhecer e identificar arranjos físicos, associar formas e dimensões. No entanto, a Geometria científica, segundo Eves (2011, p. 695), é a “fase em que a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de um conjunto de relações geométricas concretas, extrair relações abstratas gerais (leis geométricas) que incluíam as anteriores como casos particulares”.

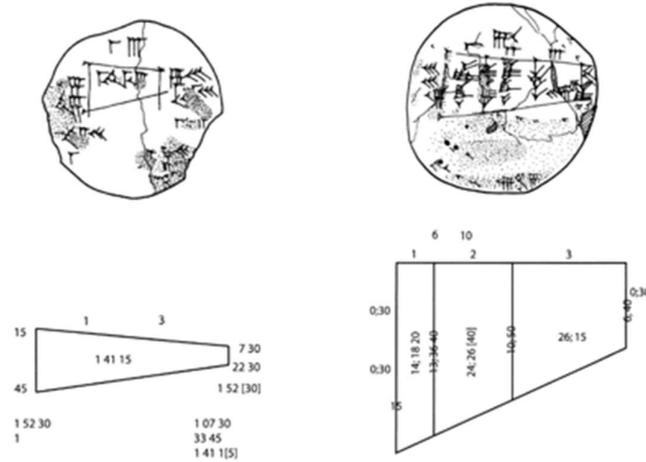
Em seguida, a Geometria demonstrativa surgiu como solução para algumas indagações que a Geometria científica não seria suficiente em respondê-las, assim, “algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano” (Eves, 2011, p. 94). Além disso, atribui-se a Tales de Mileto como um dos sábios que iniciou os estudos da Geometria demonstrativa e associa a ele várias descobertas matemáticas.

Referente à Geometria Axiomática material, Cuellar (2021 *apud* Eves, 1992)<sup>13</sup> destaca que sua evolução foi dada pelos gregos, relacionada ao espaço físico considerando um discurso concreto. Em seguida, a Geometria axiomática formal fornecia uma forma de discurso abstrato, considerando-se primeiramente os postulados.

Diante do exposto, Cuellar (2021) apresenta dois questionamentos. O primeiro, trata-se do surgimento do estudo de quadriláteros e, o segundo, quais as questões que levaram ao estudo de quadriláteros. Assim, como já foi apresentado, a Geometria iniciou com conceitos subconscientes, ou seja, pelas simples observações de suas adjacências.

Segundo Cuellar (2021, p. 67), foram apresentados “os primeiros registros que quadriláteros aparecem em tabuletas babilônicas do período de 2000-1600 a.C, duas tabuletas e as representações atuais dos quadriláteros tratados”, conforme mostra a Figura 4.

<sup>13</sup> Não tivemos acesso a obra original, mas por considerar relevante a citação, utilizamos *apud*.

**Figura 4:** Tabuletas de argila babilônicas

Fonte: <http://www.beanlogic.es/sumerios/matematicas.php>

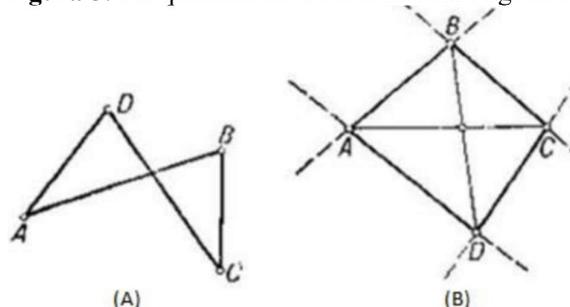
### Q2: O que é quadrilátero?

Nesta questão, Cuellar (2021) se apropriou das definições de Euclides (2009), Legendre (1809), Pogorélov (1974) e Usiskin e Griffin (2008). A partir disso, justifica a escolha de cada autor para nortear a resolução da questão.

Os dois primeiros por serem matemáticos, Euclides por ter sido o primeiro a sistematizar a geometria de seu tempo e Legendre por apresentar a geometria no início do século XIX, Pogorélov por apresentar a geometria elementar a ser ensinada no ensino superior e em escolas técnicas e Usiskin e Griffin por apresentarem um estudo da definição de quadriláteros em livros didáticos de 1833 a 2004 (Cuellar, 2021, p.73).

Nesse sentido, destacaremos a definição conforme Pogorélov (1974), que determina um quadrilátero através da união de segmentos [Figura 5 (A)]. Entretanto, não é considerado para o cálculo de medida da área, somente da medida do perímetro. Além disso, apresenta o teorema para a medida das diagonais do quadrilátero convexo, como mostra na Figura 5 (B).

**Figura 5:** Um quadrilátero de acordo com Pogolérov



Fonte: Pogolérov (1974, p. 76)

Assim, as definições de quadriláteros, de acordo com Usiskin e Griffin (2008) são expostas por Cuellar (2021, p. 74):

- 1) Polígono de quatro lados.
- 2) A união de quatro segmentos de linha que se juntam em quatro pontos coplanares, não sendo três deles colineares, cada segmento é interceptando exatamente com outros dois, em um ponto terminal.
- 3) Uma figura plana fechada de quatro lados.
- 4) Uma porção de um plano delimitado por quatro retas.
- 5) Uma figura fechada com quatro segmentos de linha reta.

A partir disso, a autora relacionou algumas definições com os autores analisados. As definições 1, 2 e 4 relacionam-se com Legendre, Pogolérov e Euclides, respectivamente. As definições 3 e 5, tratam o quadrilátero como uma figura plana e fechada, no entanto, não é determinado se são superfícies.

### **Q3: Quais são os tipos de quadriláteros?**

Para responder essa questão, a autora utilizou as definições de Euclides (2009), Legendre (1809), Pastor e Adam (1959), De Villiers (1994) e Josefsson (2012 e 2014). Dessa forma, apresentaremos todas as definições que a autora utilizou para resolver a pergunta. Vale ressaltar que as definições a serem apresentadas podem ser encontradas no trabalho de Cuellar (2021), no entanto, para esta pesquisa optamos em usar a fonte primária.

Do livro I Os Elementos, que data dos anos 300 a.C., Euclides apresenta a definição 22:

E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um

lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios s. (Euclides, 2009, p. 98).

Em Legendre (1809, p. 3), na definição VII é exposto que:

Entre os quadriláteros se distingue:

O quadrado (fig. 11.) que tem os lados iguais e os ângulos retos. [...]

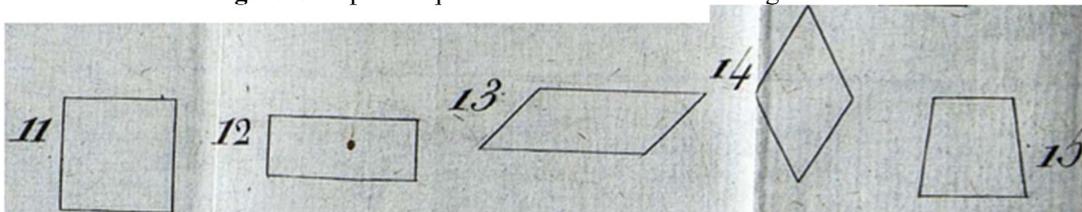
O retângulo (fig. 12) que tem os ângulos retos e não tem os lados iguais. [...]

O paralelogramo ou rombo (fig. 13) que tem os lados opostos paralelos.

O losango (fig. 14) que tem os lados iguais, mas os ângulos não são retos.

Finalmente o trapézio (fig. 15) que só tem dois lados paralelos.

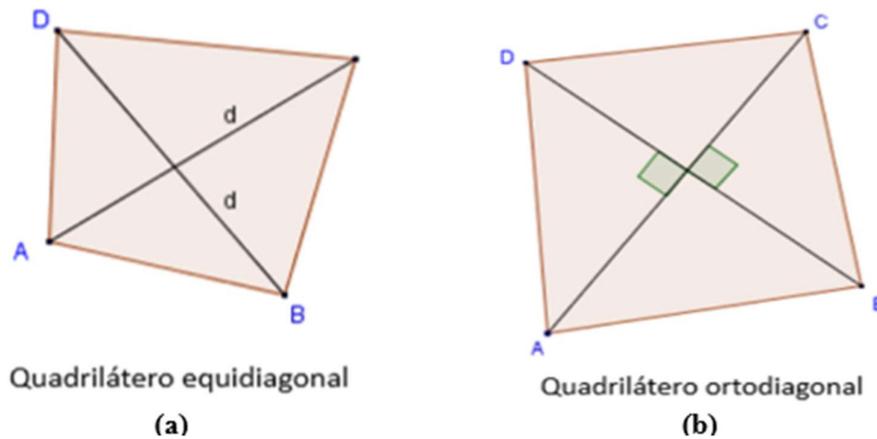
**Figura 6:** Tipos de quadrilátero de acordo com Legendre



Fonte: Legendre (1809, p. 355)

Os autores Pastor e Adam (1959) apresentam a lição 17 para estudo dos quadriláteros em que os quadriláteros são classificados com base na posição dos lados. Se ambos os pares de lados opostos são paralelos, o quadrilátero é chamado de paralelogramo. Se apenas um par de lados opostos é paralelo, é chamado de trapézio. Quando nenhum par de lados opostos é paralelo, o quadrilátero é chamado de trapezoide.

Além disso, Cuellar (2021) exemplifica a definição de Josefsson (2012, 2014) referente aos quadriláteros de acordo com as diagonais (Figura 7). Dessa forma, subdivide em quadriláteros equidiagonais (a) que possuem diagonais congruentes e os quadriláteros ortodiagonais (b) os que possuem diagonais perpendiculares.

**Figura 7:** Quadriláteros equidiagonais e ortodiagonais

Fonte: Cuellar (2021, p. 77).

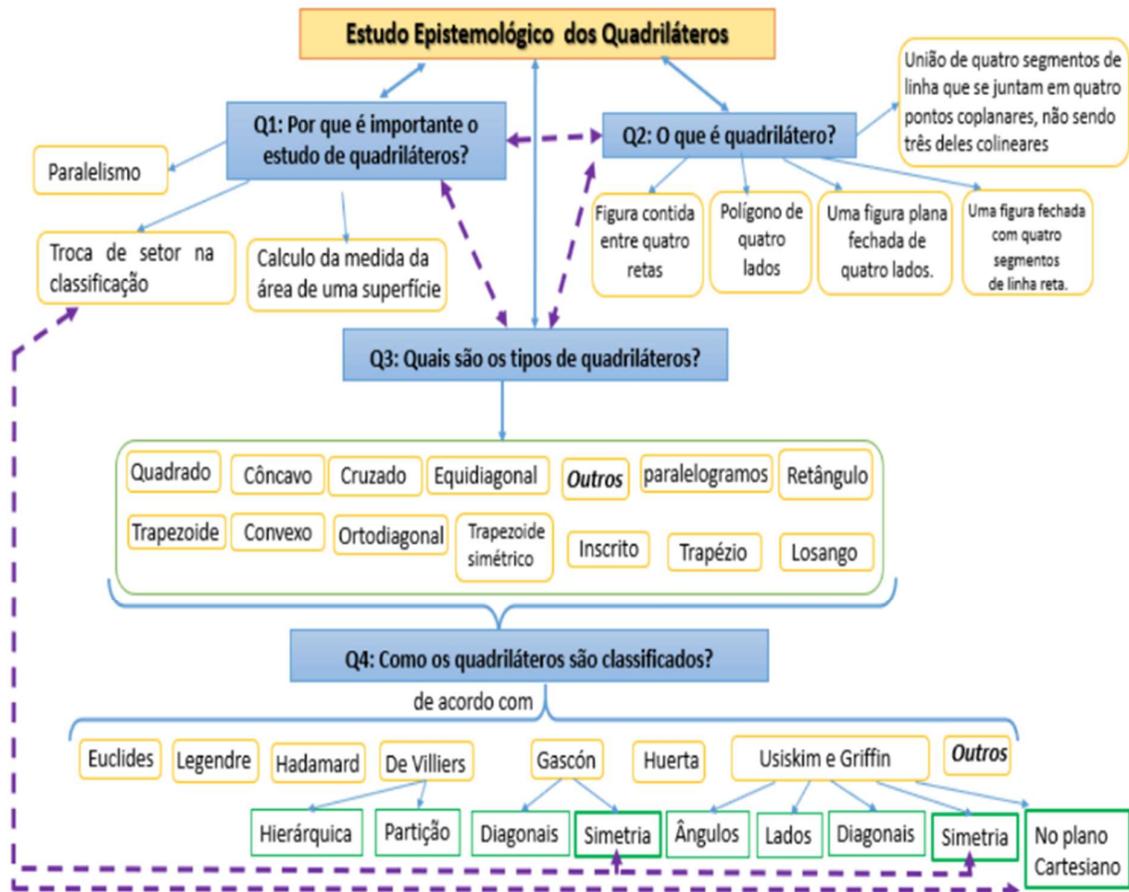
Diante do exposto, compreendemos que existem diferentes tipos de quadriláteros, sendo eles quadrado, retângulo, trapézio, paralelogramo e losango. Mas, o “fundamental é assumir uma definição, para cada um deles, para então verificar e justificar suas propriedades” Cuellar (2021, p. 77).

#### **Q4: Como os quadriláteros são classificados?**

Para responder à questão, Cuellar (2021) utilizou as classificações de acordo com a definição que cada autor aborda, dentre eles, Euclides (2009), Legendre (1809), De Villiers (1994), Huerta (1996), Gascón (2003), Usiskin e Griffin (2008) e Vásquez de Tapia (1993). Em seguida, representou todas as questões no Modelo Epistemológico de Referência (MER – Figura 19) relacionando a Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub> e Q<sub>4</sub>. A primeira questão fazendo referência às razões de ser e as demais centralizadas na organização matemática do objeto matemático.

No MER representado, a autora destaca a relação entre as questões Q<sub>1</sub> e Q<sub>2</sub> (representada na Figura 19 pela seta de cor roxa). Em Q<sub>1</sub>, orienta estudos de paralelismo e cálculo da medida de área de uma superfície; na Q<sub>2</sub>, são expostas as diferentes definições de quadriláteros. Posteriormente, em Q<sub>3</sub>, são destacados os tipos de quadriláteros considerando as questões Q<sub>1</sub> e Q<sub>2</sub>.

Figura 8: Proposta de MER elaborado por Cuellar



Fonte: Cuellar (2021, p. 91)

Cuellar (2021), na Q<sub>4</sub>, discute as classificações dos quadriláteros de acordo com a definição que cada autor referido atribui. Ao complementar, indica setas de cor roxa para significar a mudança de setor nos níveis de codeterminação. A partir das interpretações e relações entre as questões do MER, iremos examinar quais dos seus elementos se encontram na Matemática escolar, observando aqueles que não se manifestam ou são raramente utilizados.

Em síntese, estas análises são primordiais na construção do estudo das dimensões econômica e ecológica em relação ao problema didático –Como o objeto quadrilátero é abordado nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, considerando as três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela TAD??. A seguir, abordaremos a dimensão econômica do objeto quadrilátero destacando como as praxeologias se expressam nas instituições analisadas.

### 3.2 DIMENSÃO ECONÔMICA DO OBJETO QUADRILÁTERO

Nesta dimensão, busca-se verificar de que maneira as praxeologias se manifestam dentro de uma instituição específica. Para isso, a dimensão econômica é composta das questões relacionadas às condições que regulam a organização e de como essas praxeologias operam na instituição mencionada. Isto é, as considerações sobre o conjunto de regras, princípios e leis (normas) que orientam a vida institucional dessa entidade.

#### 3.2.1 O ensino de geometria no Brasil

A história do ensino de Geometria no Brasil ao longo das décadas, reflete uma evolução gradual marcada por mudanças nas políticas educacionais, nas abordagens pedagógicas e nas influências culturais. O início remonta ao período colonial, caracterizado por uma educação fortemente influenciada pelas práticas religiosas. Durante esse período, as instituições de ensino estavam predominantemente sob o comando de ordens religiosas, e o foco principal era a instrução voltada para a leitura, escrita e conteúdos de natureza religiosa.

Caldatto e Pavanello (2015) discutem que, com a chegada da Família Real Portuguesa ao Brasil em 1808, houve uma mudança significativa nas estruturas educacionais. A abertura de escolas, a vinda de intelectuais europeus e a criação de academias contribuíram para a introdução de disciplinas mais avançadas, incluindo a Geometria, nos currículos educacionais.

No início do século XX, houve um aumento na preocupação com a instrução pública, com a criação de escolas e o acesso gradual de diferentes camadas sociais à educação básica. A criação de escolas normais, especialmente a partir da década de 1930, influenciou a formação de professores evocando mudanças nas abordagens pedagógicas para o ensino, e como consequência, para a Geometria, também.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi uma transformação educacional que ocorreu principalmente nas décadas de 1950 e 1960, buscando renovar o ensino de Matemática. Priorizou o entendimento das estruturas matemáticas subjacentes, em vez de apenas a memorização de procedimentos; valorizou a abstração, encorajando os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos em um nível mais complexo; introduziu e promoveu o uso de linguagem simbólica e notação matemática

avançada desde as séries iniciais, visando familiarizar os alunos com representações mais formais (Santos, 2021).

Para Konzen et al. (2017), houve transformação na abordagem do ensino de Geometria, sendo incorporados conceitos de Geometria mais avançada. Ou seja, este movimento teve impactos significativos em abordagens pedagógicas e conteúdos matemáticos, enfatizando uma visão mais abstrata e estrutural da disciplina.

Durante esta década, ocorreram reformas educacionais significativas no Brasil, incluindo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB - Lei nº 9.394/1996), que impactou o ensino de Geometria ao enfatizar a contextualização e a interdisciplinaridade. Nesse contexto, o ensino de Geometria passou a ser visto não apenas como a aprendizagem de fórmulas e teoremas, mas como um instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de resolver problemas, ou seja, uma expansão na visão da Educação Matemática.

A formação de professores para o ensino de Geometria enfrenta desafios específicos, considerando a necessidade de proporcionar uma Educação Matemática de qualidade e o desenvolvimento eficaz do pensamento geométrico nos alunos. Nesse sentido, formações continuadas são necessárias para a prática pedagógica no ensino de Geometria, visando identificar os níveis de pensamento dos alunos e auxiliá-los a avançar de nível, além de construir tarefas adequadas a esses níveis (Colli et. al., 2022).

De acordo com Cardoso (2022), a formação inicial em Matemática pode não ser suficiente para o ensino da Geometria com abordagens diversificadas. Assim, se fazem necessárias atualizações constantes diante das mudanças nas abordagens pedagógicas e nos objetos a serem ensinados.

Outro desafio para muitos professores é a incorporação efetiva de tecnologia, embora recursos digitais possam enriquecer a aprendizagem, a falta de familiaridade ou acesso a esses recursos pode ser um obstáculo. Dessa forma, a transição de uma abordagem mais tradicional e teórica para uma prática, contextual e baseada em resolução de problemas é um desafio. Muitos professores podem sentir dificuldade em conectar os conceitos geométricos a situações reais para tornar o aprendizado de seus alunos mais significativo.

### **3.2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são vários volumes que formam um conjunto de diretrizes educacionais desenvolvidas no Brasil, durante duas décadas (final do século XX e início do século XXI) para orientar a elaboração dos currículos escolares em todo o país. Eles foram criados como parte da política educacional brasileira para melhorar a qualidade do ensino nas escolas públicas e privadas.

Em 1996, o Ministério de Educação (MEC) lançou os PCN como uma forma de oferecer orientações para os currículos das escolas de Ensino Fundamental e Médio em todo o Brasil. Os PCN eram divididos em diferentes áreas do conhecimento, como língua portuguesa, matemática, ciências, entre outras. Eles também abordaram temas transversais, como ética, meio ambiente e pluralidade cultural (Brasil, 1998).

**Quadro 4:** Ciclos de aprendizagem, segundo os PCN

<b>NÍVEL DE ENSINO</b>	<b>CICLO DE APRENDIZAGEM</b>	<b>SÉRIE ESCOLAR CORRESPONDENTE</b>
Anos iniciais do Ensino Fundamental	1º Ciclo	1ª e 2ª séries
	2º Ciclo	3ª e 4ª séries
Anos finais do Ensino Fundamental	3º Ciclo	5ª e 6ª séries
	4º Ciclo	7ª e 8ª séries

Fonte: Brasil (1998)

De acordo com os ciclos de aprendizagem, como apresentado no Quadro 4, trataremos com mais destaque o nível do Ensino Fundamental anos finais – 3º e 4º ciclos. O documento que contém os PCN no componente curricular Matemática é dividido em duas partes<sup>14</sup>. Na primeira parte, discute a Matemática no Ensino Fundamental com uma análise da trajetória das reformas curriculares; a importância de relacionar a Matemática com temas transversais; as relações entre: professor e o saber matemático, aluno e o saber matemático e entre pares; objetivos do nível de ensino e seus respectivos conteúdos selecionados; dentre outros assuntos que influenciam no ensino e aprendizagem do saber matemático.

No caso dos anos finais, correspondentes aos 3º e 4º ciclos, encontra-se a segunda parte evidenciando os objetivos, conceitos a serem compreendidos pelos estudantes e critérios avaliativos. É importante ressaltar que, nesses ciclos, os conteúdos são organizados em quatro (4) blocos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas, e Tratamento da informação.

<sup>14</sup> Doravante, sempre que for utilizada a sigla PCN será usada a expressão PCN-Matemática para os casos específicos ao componente curricular Matemática, tendo em vista o volume analisado para esta pesquisa (Matemática do Ensino Fundamental – 3º e 4º ciclos).

Em relação aos blocos “espaço e forma” e “grandezas e medidas”, abordaremos com maior ênfase, uma vez que nosso objeto de estudo está relacionado à Geometria. Nos terceiro e quarto ciclos, são destacados os objetivos que o ensino de Matemática deve ter para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, a partir da exploração de situações de aprendizagem que conduzam o aluno a:

**Quadro 5:** Situações de aprendizagem para desenvolver o pensamento geométrico

TERCEIRO CICLO	QUARTO CICLO
Resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas.	Interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano.
Estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações.	Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança.
Resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.	Ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Fonte: Brasil (1998, p. 64,65,81,82).

Nesses blocos, os conceitos geométricos estão presentes e constituem uma parte importante do currículo de Matemática do Ensino Fundamental. Além disso, “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (Brasil, 1998, p. 51).

Entretanto, os PCN, de modo geral, eram muito prescritivos e não levavam em consideração as diferenças regionais do Brasil. Dessa forma, ao longo dos anos, os PCN passaram por revisões e atualizações para se adaptarem às mudanças na sociedade e na educação. Foram criadas versões revisadas dos PCN, conhecidas como "PCN+", que buscaram tornar as diretrizes mais flexíveis e adequadas às realidades locais (Brasil, 2021).

Em 2017, o Ministério da Educação (MEC) introduziu a BNCC como uma nova diretriz educacional. A BNCC estabeleceu os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que todos os estudantes brasileiros devem desenvolver em cada etapa da educação básica, substituindo os PCN, de modo geral, para toda a educação básica. Logo,

é a principal referência para a elaboração dos currículos escolares em todo o país, a seguir, trataremos de sua implementação e desenvolvimento.

### **3.2.3 Base Nacional Comum Curricular**

A BNCC é uma referência nacional que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes da educação básica no Brasil devem desenvolver ao longo de sua vida escolar. O processo de desenvolvimento da BNCC envolveu uma ampla participação de diversos atores da sociedade, incluindo educadores, pesquisadores, gestores de educação, pais e alunos. Foram realizadas consultas públicas, audiências e debates para coletar contribuições e opiniões (Brasil, 2018).

Em dezembro de 2017, o governo federal homologou a versão final da BNCC para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental. Essa versão estabeleceu os objetivos de aprendizagem, as competências e as habilidades que todos os alunos brasileiros deveriam desenvolver. A BNCC para o Ensino Médio foi desenvolvida em um processo separado. Em 2018, o MEC divulgou a versão preliminar da BNCC para o Ensino Médio e, após discussões e contribuições, a versão final foi homologada em 2018 (Brasil, 2018).

Para a implementação da BNCC, requereu-se a adaptação dos currículos escolares das redes estaduais e municipais de ensino. Cada estado e município passou a ser o responsável por elaborar seus currículos, levando em consideração as diretrizes da BNCC. Esse documento normativo também influenciou a adaptação e atualização de instrumentos de avaliação da educação básica no Brasil, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), que passou a ser mais alinhado com as competências e habilidades definidas na BNCC.

A estrutura da BNCC é composta por elementos que especificam os objetivos de aprendizagem para cada etapa da Educação Básica, as quais são: a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Especificamente para o foco deste estudo, na etapa do Ensino Fundamental, são apresentadas oito competências que devem ser garantidas aos alunos. No que diz respeito à área de Matemática do Ensino Fundamental são 08 competências específicas da área. Para tanto, foram estabelecidas cinco unidades temáticas pelas quais são apresentados os objetos de conhecimento (objetos matemáticos entre conceitos, definições, propriedades, axiomas, teoremas) e as habilidades correspondentes a esses objetos que devem desenvolvidas pelos estudantes ao longo desta etapa.

Assim, as unidades temáticas apresentadas são, Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. No caso de nosso estudo, a unidade temática relacionada é a Geometria, pela qual, o ensino deverá voltar-se para o aluno “estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos” (Brasil, 2018, p. 271). Reforça também a ideia que a Geometria não deve ser apenas a aplicação de fórmulas ou de teoremas, sem necessariamente instigar o desenvolvimento do pensamento geométrico (Brasil, 2018).

Ao destacar o Ensino Fundamental (anos finais), no referido documento, cada unidade temática é apresentada com respectivos objetos de conhecimento e habilidades correspondentes. Para isso, é utilizado um código alfanumérico para representar a habilidade, por exemplo, EF06MA01. Nessa representação, EF (ensino fundamental), 06 (sexto ano), MA (matemática) e 01 (habilidade específica). Para o trabalho docente, tais habilidades tornam-se primordiais, no sentido de o professor buscar investigar como os seus alunos estão se desenvolvendo no âmbito de cada unidade temática corresponde aos anos finais.

Dessa forma, como a BNCC foi um aprimoramento dos PCN, buscamos analisar em ambos documentos o objeto do saber em jogo. Entretanto, no Quadro 6, os PCN-Matemática são apresentados como bloco Espaço e forma contendo oito orientações. Na BNCC, trata-se como unidade temática Geometria, contendo dez habilidades.

**Quadro 6:** O objeto quadrilátero no bloco Espaço e forma/ unidade temática Geometria 6º e 7º ano

DOCUMENTOS	A PRESENÇA DO OBJETO QUADRILÁTERO
PCN-Matemática	Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
	Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: [...], polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
	Composição e decomposição de figuras planas.
	Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
	Construção da noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
	Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
	Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem

	invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
	Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
BNCC	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou <i>softwares</i> para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado

Fonte: elaboração do autor (setembro, 2023).

De acordo com o Quadro 6, é possível identificar os diversos gêneros de tarefas presentes tanto nos PCN-Matemática, quanto na BNCC. Em relação aos PCN-Matemática, no bloco espaço e forma do terceiro ciclo estão mais presentes os tipos de gêneros: quantificar, construir e classificar. Na BNCC, os gêneros de tarefas são claramente delineados, evidenciados pelas habilidades que os estudantes deverão desenvolver na unidade temática de geometria nos 6º e 7º anos. Desse modo, é possível enumerar todos os 12 gêneros de tarefas identificados, sendo "reconhecer" o mais frequente entre eles.

**Associar – Construir – Descrever – Utilizar – Reconhecer – Classificar**  
**Nomear – Realizar – Identificar – Calcular – Comparar – Estabelecer**

Em seguida, trataremos do objeto quadrilátero presente no bloco/unidade temática Grandezas e medidas do 6º e 7º anos. Como citado anteriormente, os PCN-Matemática contêm menos orientações, sendo comparados à BNCC, entretanto, nosso intuito é analisar os gêneros de tarefas que estão presentes nos dois documentos norteadores. Seguem, no Quadro 7, as análises sobre o bloco (PCN-Matemática) e unidade temática (BNCC), Grandezas e Medidas, verifica-se que na primeira unidade contém duas orientações e na segunda, sete habilidades. É importante destacar que em relação aos PCN-Matemática, o objeto em jogo está direcionado ao 3º ciclo e, na BNCC, aos 6º e 7º anos.

**Quadro 7:** O objeto quadrilátero no bloco/unidade temática Grandezas e medidas (6º e 7º anos)

<b>DOCUMENTOS</b>	<b>A PRESENÇA DO OBJETO QUADRILÁTERO</b>
<b>PCN-Matemática</b>	Compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras.
	Cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas.
<b>BNCC</b>	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
	(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.
	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
	(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
	(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
	(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Fonte: Elaboração do autor (setembro, 2023).

Os tipos de tarefas presentes nos PCN-Matemática, conforme indicado no Quadro 7, são **compreender** e **calcular**. Em contraste, a BNCC engloba um total de sete gêneros de tarefas distintos, sendo que os mais recorrentes são **resolver** e **elaborar**. Ao fazer uma comparação, é evidente que ambos os documentos têm como objetivo principal promover a prática de realizar cálculos.

De forma similar às análises anteriores, apenas alterando para o 4º ciclo, no caso dos PCN-Matemática; e 8º e 9º anos, em relação à BNCC. No Quadro 8, foram identificadas oito orientações e seis habilidades, conforme descrito a seguir.

**Quadro 8:** O objeto quadrilátero no bloco Espaço e forma / unidade temática Geometria (8º e 9º anos)

DOCUMENTOS	A PRESENÇA DO OBJETO QUADRILÁTERO
PCN-Matemática	Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.
	Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
	Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.
	Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
	Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
	Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
	Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.
	Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
BNCC	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse

	conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
--	--

Fonte: Elaboração do autor (setembro, 2023).

Os gêneros de tarefas delineados nos PCN-Matemática, como evidenciado no Quadro 8, consistem em **verificar**, **determinar** e **desenvolver**. Por outro lado, a BNCC abarca um conjunto de seis gêneros de tarefas diferentes, com cada um deles aparecendo uma vez em habilidades específicas.

Em seguida, também será exposto como o objeto quadrilátero é apresentado no bloco/unidade temática Grandezas e medidas no último ciclo, correspondente aos 8º e 9º anos. Nota-se que existem mais orientações nos PCN-Matemática comparando-se às habilidades da BNCC, contendo cinco orientações e três habilidades, ambas correlacionadas com o objeto quadrilátero.

**Quadro 9:** O objeto quadrilátero no bloco/ unidade temática Grandezas e medidas (8º e 9º anos)

DOCUMENTOS	A PRESENÇA DO OBJETO QUADRILÁTERO
<b>PCN-Matemática</b>	Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.
	Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
	Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).
	Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.
	Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo.
<b>BNCC</b>	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
	(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
	(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Fonte: Elaboração do autor (setembro, 2023).

Os tipos de tarefas especificados nos PCN-Matemática, conforme apresentados no Quadro 9, abrangem **calcular**, **analisar** e **relacionar**. Em contrapartida, à BNCC inclui dois gêneros de tarefas distintos, os quais são: **resolver** e **elaborar**. Ao comparar,

fica claro que o principal objetivo de ambos os documentos é incentivar a prática de efetuar cálculos por meio das fórmulas relacionadas às medidas de perímetro e de área.

A partir dos dados analisados, podemos construir o MED do objeto quadrilátero em relação ao PCN, como também, o MED do objeto quadrilátero em relação à BNCC. É fundamental destacar que neste modelo serão apresentadas as noções presentes, quem se alimenta dessas noções e quem são alimentadas por elas, nos PCN (Quadro 10) e BNCC (Quadro 11).

**Quadro 10:** MED do objeto quadrilátero – PCN

<b>NICHOS</b>	<b>OBJETOS</b>
Noções presentes nas orientações	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elementos e classificações dos quadriláteros;</li> <li>• Soma dos ângulos internos de um quadrilátero;</li> <li>• Propriedades dos quadriláteros;</li> </ul>
Alimentam as noções presentes nas orientações	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polígonos: elementos e classificações;</li> <li>• Construção da noção de ângulo;</li> <li>• Soma dos ângulos internos de um polígono convexo;</li> <li>• Transformação geométrica;</li> </ul>
Alimentadas pelas noções presentes nas orientações	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Composição e decomposição de figuras planas;</li> <li>• Ampliação e redução de figuras;</li> <li>• Planificação de poliedros;</li> <li>• Prisma e pirâmide;</li> <li>• Secções de figuras tridimensionais;</li> <li>• Teorema de Pitágoras.</li> </ul>

Fonte: Elaboração do autor (setembro, 2023).

Com base no MED (Quadro 10), podemos verificar as relações das noções que estão em consonância com o objeto quadrilátero. Assim, existem três noções diretamente ligadas ao objeto nos PCN, quatro noções que alimentam as noções presentes (principalmente, o objeto polígono) e seis noções que são alimentadas pelo objeto quadrilátero. A seguir, será exposto o MED criado em relação à BNCC, possibilitando comparar ao MED anterior e verificar quais objetos deixaram de existir ou que sofreram modificações no documento curricular atual.

**Quadro 11:** MED do objeto quadrilátero - BNCC

<b>NICHOS</b>	<b>OBJETOS</b>
Noções presentes nas orientações	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Classificação dos quadriláteros: quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, losango;</li> <li>• Intersecção de classes entre os quadriláteros: paralelogramos e trapézios;</li> <li>• Expressões de cálculo de área de quadriláteros;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Decomposição de áreas de figuras através de quadriláteros;</li> <li>• Propriedades dos quadriláteros;</li> <li>• Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo;</li> <li>• Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e softwares.</li> </ul>
Alimentam as noções presentes nas orientações	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plano cartesiano, ponto e retas;</li> <li>• Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares;</li> <li>• Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação;</li> </ul>
Alimentadas pelas noções presentes nas orientações	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ampliação e redução de figuras</li> <li>• Teorema de Pitágoras</li> <li>• Sólidos geométricos</li> </ul>

Fonte: Elaboração do autor (setembro, 2023).

Ao analisar o Quadro 11, verificamos que possui mais noções presentes na BNCC em relação aos PCN. Assim, existem sete objetos correlacionados com o objeto quadrilátero, isso permite que os alunos tenham um conhecimento amplo deste objeto. Com base nisso, podemos afirmar que as diretrizes da BNCC proporcionam uma abordagem mais abrangente e detalhada para o ensino de quadriláteros, facilitando uma compreensão mais profunda e conectada dos conceitos geométricos.

Segundo Lorenzato (2006), "a formação continuada de professores e a utilização de uma base curricular sólida são fundamentais para garantir que os alunos desenvolvam um entendimento significativo da geometria e de suas aplicações no cotidiano." Essa perspectiva reforça a importância do papel do professor na mediação e transposição didática dos conteúdos, assegurando que os estudantes possam não apenas identificar e classificar quadriláteros, mas também compreender suas propriedades e relações dentro da geometria.

### 3.2.4 PNLD antes e depois da BNCC

O Quadro 12, a seguir, representa uma análise realizada nos PNLDs compreendidos entre o período 2002 – 2020<sup>15</sup>. Nesse quadro, há indicação de obras didáticas para o ensino de Matemática voltadas aos anos finais do Ensino Fundamental aprovadas nos PNLDs correspondentes à vigência, tanto dos PCN-Matemática, quanto da

<sup>15</sup> Neste período tem os seguintes PNLDs: PNLD 2002, PNLD 2005, PNLD 2008, PNLD 2011, PNLD 2014, PNLD 2017, PNLD 2020.

BNCC. Dessa forma, destacamos as obras que mais foram adotadas nas escolas estaduais do município de Aracaju-SE, o qual por ser a capital do estado, contempla um número maior de unidades escolares da referida rede.

Uma observação importante é que ocorreram diversas modificações, como os títulos das obras, editoras e autores. No entanto, direcionamos nossa pesquisa em relação ao(s) autor(es) de cada Coleção, uma vez que compreendemos, por meio de nossa prática docente, muitos professores tomarem essa decisão com base nesse critério.

**Quadro 12:** Coleções de livros didáticos de Matemática com maior frequência de aprovação nos PNLD (2002-2020)

COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS	AUTOR(ES)	EDITORA	ANO-PNLD DE APROVAÇÃO DA COLEÇÃO	FREQUÊNCIA
Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2005, 2008, 2011	6
Projeto Teláris - Matemática			2014, 2017	
Teláris Matemática		Ática S. A.	2020	
Matemática na Medida Certa	José Jakubovic Marcelo Cestari Terra Lellis Marília Ramos Centurión	Scipione	2002, 2005, 2008	6
Matemática na Medida Certa	José Jakubovic Marília Ramos Centurión		2011	
Matemática: teoria e contexto		Saraiva	2014	
Matemática nos Dias de Hoje - Na medida certa		Leya	2017	
Matemática	Luiz Márcio Pereira Imenes Marcelo Cestari Terra Lellis	Scipione	2002	5
Matemática Para Todos			2005, 2008	
Matemática - Imenes & Lellis		Moderna	2011, 2014	
Matemática	Edwaldo Roque Bianchini	Moderna	2011	4
Matemática - Bianchini			2014, 2017	
		Moderna LTDA	2020	
Novo Praticando Matemática	Álvaro Andrini Maria José C. de Vasconcelos Zampirolo	Editora do Brasil	2005, 2008	4
Praticando Matemática - Edição Renovada	Miguel Asis Name Maria José C. de Vasconcelos Zampirolo		2014	
	Álvaro Andrini Maria José C. de Vasconcelos Zampirolo		2017	

A Conquista da Matemática Nova	José Ruy Giovanni Benedicto Castrucci	FTD	2002	4
A Conquista da Matemática A + Nova	José Ruy Giovanni Júnior		2005	
A Conquista da Matemática - Edição Renovada	José Ruy Giovanni Júnior Benedicto Castrucci		2011	
A Conquista da Matemática		FTD S. A.	2020	
Projeto Araribá - Matemática	Editora Moderna	Moderna	2008	4
	Fabio Martins de Leonardo		2014	
	Mara Regina Garcia Gay		2017	
Araribá Mais - Matemática	Mara Regina Garcia Gay Willian Raphael Silva	Moderna LTDA	2020	

Fonte: Elaboração do autor (setembro, 2023).

A análise do Quadro 11 revela que as coleções de livros didáticos mais frequentemente aprovadas nos PNLD (2002-2020) apresentam os seguintes autores: Jakubovic, Lellis, Centurión (com mudanças de títulos, editoras e autores) e Dante (com mudanças de títulos, porém permanecendo com o mesmo autor). Ambas as coleções possuem a maior repetição dentre as analisadas. A partir dessas duas obras com mais repetições, optamos por realizar análise das obras de Dante, uma vez que há obras que seguem tanto as orientações do PCN (PNLD 2017) quanto as da BNCC (PNLD 2020).

A finalidade é estabelecer uma comparação entre as diretrizes educacionais das duas edições da referida coleção do livro didático: Projeto Teláris - Matemática (edição 2015) e Teláris Matemática (edição 2018). Nos estudos de Fonseca e Vilela (2014), também possui como objetivo a comparação entre livros didáticos, entretanto com enfoque no Ensino Médio. As autoras discutem a organização, sequência e as tendências que ocorrem em determinadas obras reafirmando que “os livros didáticos analisados apresentam bastante semelhança tanto na estrutura como nas propostas dos autores” pois serão avaliados pelo mesmo programa que contém as regras bem definidas.

Dessa forma, buscamos identificar qual o habitat do objeto quadrilátero nos livros das coleções Projeto Teláris - Matemática (edição 2015) e Teláris Matemática (edição 2018), voltados aos anos finais do Ensino Fundamental. Da mesma forma também se tornou imprescindível a identificação do seu nicho, dos tipos de tarefa (T) e técnicas ( $\tau$ ) presentes nessas obras. A análise ocorreu em todos os livros do 6º ao 9º ano do ensino fundamental nas duas edições citadas.

### **Coleção Projeto Teláris - Matemática (edição 2015)**

Na coleção Projeto Teláris - Matemática (edição 2015), cada volume está diluído em 4 unidades, as quais estão subdivididas em 9 capítulos. Em relação aos tipos de tarefa (T), encontram-se em seções intituladas como Exercícios, Conexões, Desafios, Exercícios e problemas, Jogos, Raciocínio lógico, Tratamento da informação, Outros contextos, Praticando um pouco mais, e Revisão cumulativa. Assim, apresentaremos individualmente como as obras (cada volume do livro didático dessa coleção) estão organizadas, enfatizando o saber em questão.

- Livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental

O livro didático de Matemática ‘Projeto Teláris’ do 6º ano do Ensino Fundamental possui 360 páginas, neste, o objeto quadrilátero está presente no capítulo 3 (tópico 8, intitulado “Polígonos”). Além do capítulo 3, os quadriláteros aparecem também no capítulo 8 (tópico 5, nomeado “Grandeza superfície”). Esse é o habitat do objeto quadrilátero nesse volume referente ao 6º ano.

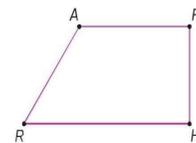
No capítulo 3, anterior ao tópico 8, são explorados alguns conceitos importantes para o aluno compreender o polígono. Alguns desses conceitos são, ponto, plano e reta; ângulos e suas classificações quanto às medidas, lado e vértice; noção de regiões planas, contorno e linha fechada. A partir disso, no tópico 8, define-se o polígono como “toda linha fechada formada apenas por segmentos de reta que não se cruzam” (Dante, 2015, p. 98).

Em seguida, são apresentados os elementos do polígono: lados, vértices e ângulos internos. Além disso, apresenta os tipos de polígonos que são classificados de acordo com o número de lados e recebem um nome especial. Nesse sentido, destacamos o polígono denominado quadriláteros que recebe a seguinte definição “são polígonos de quatro lados e, por isso, de quatro vértices e quatro ângulos internos” (Dante, 2015, p. 104). Por conseguinte, são propostas algumas tarefas para validação do conhecimento adquirido.

Nessas tarefas, observa-se os seguintes gêneros de tarefas: indicar, classificar e identificar. Assim, podemos determinar a organização praxeológica da seguinte forma:

**Figura 9: Tarefa 64**

**64.** Indique quais são os lados, os vértices e os ângulos internos do quadrilátero ao lado. Escreva também o tipo de cada ângulo.



Fonte: Dante (2015, p.104).

- $T_{1.1}$ : Indicar os lados, vértices e os ângulos internos do quadrilátero;
- $\tau_{1.1}$ : Identificar que lados são os segmentos que formam o contorno do quadrilátero, vértices são os pontos de intersecção desses segmentos e ângulos internos é a abertura formada pelos lados.
- $T_{1.2}$ : Classificar cada ângulo interno;
- $\tau_{1.2}$ : Verificar a abertura formada pelos lados e classifique como ângulo reto, agudo ou obtuso.
- $\theta_{1.1}$ : Elementos de um polígono;

- $\theta_{1,2}$ : Classificação de ângulos;
- $\Theta$ : Geometria plana.

De acordo com a tarefa 64 (Figura 9), podemos identificar a relação direta com os conceitos e procedimentos apresentados como orientações didática no bloco Espaço e Forma que consistem em “[...] número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados” (Brasil, 1998, p. 73). Assim, mostra-se alinhado à orientação dos PCN-Matemática, pois a tarefa em jogo solicita justamente tais conceitos e procedimentos. A edição deste volume ainda foi durante a vigência desses PCN.

Após a definição de quadriláteros e das tarefas, são abordadas as distinções entre os quadriláteros denominados trapézios e aqueles designados como paralelogramos. Logo, “aos quadriláteros que têm só um par de lados paralelos chamamos de trapézios” e “aos que têm dois pares de lados paralelos chamamos de paralelogramos” (Dante, 2015, p. 105). Por conseguinte, são propostas tarefas relacionadas com essas denominações de quadriláteros. Vejamos a seguir uma organização praxeológica de uma tarefa para relacionar as definições apresentadas na obra.

**Figura 10:** Tarefa 69

- 69.** Identifique as afirmações verdadeiras.
- |                                    |                               |
|------------------------------------|-------------------------------|
| a) Todo retângulo é paralelogramo. | d) Todo quadrado é retângulo. |
| b) Todo quadrilátero é trapézio.   | e) Todo quadrado é losango.   |
| c) Todo retângulo é quadrado.      | f) Todo losango é retângulo.  |

Fonte: Dante (2015, p.106).

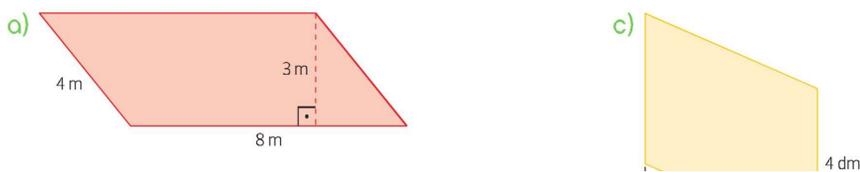
- $T$ : Identificar as relações entre os quadriláteros;
- $\tau$ : Identificar e relacionar cada tipo de quadrilátero com base nas suas propriedades.
- $\theta$ : Classificação e propriedades dos quadriláteros;
- $\Theta$ : Geometria plana.

Nesta tarefa 69, é visível a mobilização dos saberes apresentados de acordo com as propriedades de cada quadrilátero que os diferenciam gerando a classificação. Dessa forma, permite-se ao aluno estabelecer as diferenças entre os tipos de quadriláteros apesar de não exibir visualmente as figuras planas mencionadas na referida tarefa.

No capítulo 8, são discutidos os conceitos e medida de perímetro e medida de área relativos ao bloco Grandezas e medidas. Antes do tópico 5, são revisitadas as noções de grandeza e unidades de medida de comprimento. Assim, propicia ao aluno uma melhor compreensão do estudo da medida de área presente no tópico 5. A noção da medida de área é expandida para alguns quadriláteros como retângulo, quadrado, paralelogramo, trapézio e losango. A seguir, analisemos uma estrutura praxeológica de uma das tarefas que visa estabelecer conexões entre as definições previamente adquiridas.

**Figura 11: Tarefa 50**

**50.** Calcule a área das regiões planas representadas abaixo, que têm como contorno um paralelogramo.



Fonte: Dante (2015, p. 269).

- $T$ : Calcular a medida de área do paralelogramo;
- $\tau$ : Utilizar a definição para o cálculo da medida de área de um paralelogramo;
- $\theta_{1,1}$ : Polígonos;
- $\theta_{1,2}$ : Medida de área de uma região plana;
- $\Theta$ : Geometria plana; Grandezas e medidas.

Observa-se que para utilizar a técnica apropriada, se faz necessário o professor fazer uma retomada ao conceito do cálculo da medida de área fazendo relação com o conceito de multiplicação, sem necessariamente, ir diretamente ao uso da fórmula.

Outro aspecto importante a destacar é que ao analisar as demais tarefas neste capítulo, o gênero de tarefas que estão mais presentes são: calcular e determinar. Dessa forma, entende-se que há um reforço ao mero uso operatório do que mesmo a compreensão quanto à aplicabilidade do uso da medida de área. Como também associa à unidade temática Grandezas e medidas.

Pode-se notar que, embora os conceitos abordados acerca do quadrilátero nesta obra estejam alinhados com as orientações estabelecidas pelo PCN-Matemática para o terceiro ciclo, mantém-se a cultura da maioria dos autores em evidenciar suas praxeologias, muito mais ao cálculo, reforçando o uso de fórmulas. Apesar das orientações nesse documento curricular também suscitar a contextualização, as

evidências focam muito mais nos gêneros de tarefas citados – calcular e determinar valores. Entretanto, no decorrer dos tipos de tarefas, pode-se observar que os tipos de praxeologias se diferenciam na medida que os conceitos vão se aprofundando. Apresentamos nesta análise, dois tipos de praxeologias: regional (técnica justificada por distintas tecnologias) e global (técnica justificada por distintas tecnologias e teorias).

- Livro didático de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental

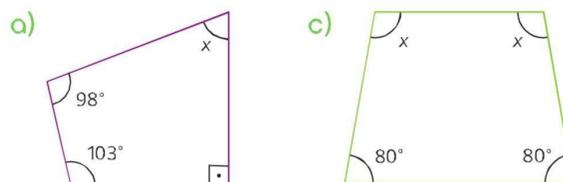
O livro didático ‘Projeto Teláris - Matemática’ do 7º ano do Ensino Fundamental possui 336 páginas. Nele, o objeto quadrilátero está presente no capítulo 6 (tópico 3, intitulado “Polígonos”). Anterior ao tópico, é exposto o conceito de ângulo e suas particularidades como tipos de ângulos, posições relativas de duas retas em um plano, medida de ângulo, ângulos congruentes, ângulos adjacentes, ângulos complementares e suplementares, ângulos opostos pelo vértice e bissetriz de um ângulo. Uma forma escolhida pelo autor como revisitação de conceitos necessários ao estudo de Polígonos.

Em consequência, são explorados os polígonos; no entanto, o foco será direcionado aos ângulos do polígono. Assim, no que se refere aos quadriláteros, temos a seguinte definição: “em todo quadrilátero convexo, a soma das medidas dos quatro ângulos internos é igual a  $360^\circ$ ” (Dante, 2015, p. 204).

Como ilustração, apresentamos a análise de uma organização praxeológica de uma tarefa, cujo propósito é estabelecer relação entre a definição apresentada sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo. É pertinente destacar a importância de reconhecer os ângulos internos de um polígono para determinar a medida indicada.

**Figura 12:** Tarefa 69

**69.** Determine a medida  $x$  de cada ângulo sem usar transferidor.



Fonte: Dante (2015, p. 204).

- $T$ : Determinar o ângulo do quadrilátero;
- $\tau$ : Utilizar a definição para determinar o ângulo indicado;

- $\theta$ : Polígonos e seus ângulos;
- $\Theta$ : Geometria plana.

Nas demais tarefas do tópico em questão, o gênero de tarefas predominante é determinar e calcular; ademais, em relação aos quadriláteros, aborda-se exclusivamente a definição apresentada. Dessa forma, a maior preocupação em relação ao objeto é o cálculo algébrico em relação aos ângulos, devido aos gêneros de tarefas identificados. Ao concatenar a análise dos PCN-Matemática relacionada com esta obra, identificamos a correlação a respeito da presença do cálculo com expressões algébricas, tornando o estudo do objeto geométrico com prevalência ao uso das estruturas algébricas. Desse modo, prevalecem as praxeologias pontuais.

- Livro didático de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental

O livro didático ‘Projeto Teláris - Matemática’ do 8º ano do Ensino Fundamental possui 376 páginas, no qual, o objeto quadrilátero está presente no capítulo 3 (tópico 7, intitulado “Ampliando o estudo dos quadriláteros”). Além do capítulo 3, os quadriláteros aparecem também no capítulo 7 (nos tópicos 5 e 6, nomeados “Fórmulas para indicar perímetro” e “Fórmulas para indicar área”, respectivamente). Esse é o habitat nesse volume em questão.

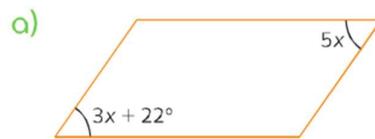
Nesta obra, observa-se o aprofundamento em relação aos quadriláteros e suas propriedades. Destacamos o tópico 7, que, desde o início, revisita a definição e os tipos de quadriláteros. Em relação aos paralelogramos, são apresentadas três definições:

- I. Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos são congruentes (medidas iguais) e dois ângulos não opostos são suplementares (soma das medidas:  $180^\circ$ );
- II. Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes;
- III. Em todo paralelogramo, as diagonais cortam-se ao meio. (Dante, 2015, p. 115)

Sendo assim, selecionamos uma tarefa que pudesse utilizar mais de uma propriedade para ser resolvido. A partir desta seleção, realizaremos a análise praxeológica da tarefa 98 que mobiliza as definições apresentadas.

**Figura 13:** Tarefa 98

**98.** Calcule as medidas dos quatro ângulos internos dos seguintes paralelogramos:



Fonte: Dante (2015, p. 116).

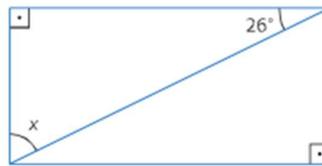
- $T$ : Calcular a medida dos ângulos internos do paralelogramo;
- $\tau_1$ : Utilizar propriedade de congruência de ângulos opostos de um paralelogramo;
- $\tau_2$ : Resolver a equação polinomial do 1º grau para determinar o valor desconhecido de cada ângulo interno;
- $\theta_{1.1}$ : Congruência de ângulos opostos de um paralelogramo;
- $\theta_{1.2}$ : Teorema do feixe de retas paralelas;
- $\theta_{1.3}$ : Equação polinomial do 1º grau;
- $\theta_{1.1}$ : Geometria plana
- $\theta_{1.2}$ : Equações polinomiais.

Nesse sentido, é observado que para resolver tal tarefa, se faz necessário usar a propriedade de congruência de ângulos opostos de um paralelogramo, além de resolver uma equação polinomial do 1º grau. No entanto, o professor poderá aproveitar a oportunidade para apresentar mais uma tecnologia que justifica a técnica para resolver a tarefa – o teorema da proporcionalidade do feixe de paralelas, mostrando aos alunos o que são ângulos alternos internos, ângulos opostos pelo vértice. São estratégias que oportuniza o aluno ir além do que é dado como propriedade no livro didático, imaginando ser única opção para resolver a referida tarefa. Temos então, uma praxeologia global por abranger dois campos matemáticos.

Em sequência ao que é abordado pelo autor, são apresentadas outras propriedades referentes aos retângulos e aos losangos: “as diagonais de um retângulo são congruentes e cortam-se ao meio” e “as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango”, respectivamente (Dante, 2015, p. 116, 117).

**Figura 14:** Tarefa 107

**107.** Determine o valor da medida  $x$  no retângulo abaixo.



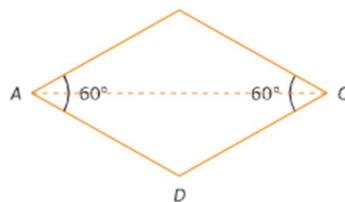
Fonte: Dante (2015, p. 118).

- $T$ : Determinar a medida do ângulo interno do retângulo;
- $\tau_1$ : Utilizar a propriedade dos ângulos internos do retângulo, observando-se que o retângulo é formado por quatro ângulos retos;
- $\tau_2$ : Utilizar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, considerando que a diagonal do retângulo forma dois triângulos congruentes;
- $\theta_{1,1}$ : Propriedade da diagonal dos retângulos;
- $\theta_{1,2}$ : Soma dos ângulos internos de um triângulo;
- $\Theta$ : Geometria plana.

Nesta tarefa, verifica-se que para resolvê-la, o aluno poderá aplicar duas possíveis técnicas distintas: a propriedade da diagonal do retângulo e por meio da relação entre os triângulos formados pelas diagonais e a soma dos ângulos internos. Ou seja, é um exemplo de tarefa que dá mais de uma possibilidade de o aluno desenvolver. A seguir, mostraremos também outro tipo de tarefa com possibilidade de usar diferentes técnicas para sua resolução.

**Figura 15:** Tarefa 108

**108.** Os ângulos opostos agudos de um losango medem  $60^\circ$ . A diagonal maior desse losango separa-o em dois triângulos congruentes. Quais são as medidas dos ângulos internos desses triângulos?



Fonte: Dante (2015, p. 118).

- $T$ : Calcular a medida dos ângulos internos do losango;
- $\tau_1$ : Utilizar a definição de ângulos internos de um quadrilátero convexo para determinar os ângulos internos indicados;
- $\tau_2$ : Utilizar a soma dos ângulos internos de um triângulo, a partir do enunciado informando que a diagonal do losango divide os ângulos em dois outros ângulos congruentes;
- $\theta_{1,1}$ : Soma dos ângulos internos de um triângulo;
- $\theta_{1,2}$ : Ângulos internos de um quadrilátero;
- $\Theta$ : Geometria plana

A técnica destacada está direcionada à definição dos ângulos internos de um quadrilátero convexo, assunto no qual o aluno estudou anteriormente, como destacado em exercícios anteriores. Contudo, o estudante também poderá considerar os triângulos formados pelas diagonais e relacionar com a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Assim, verificamos que não se restringe apenas ao conhecimento dos quadriláteros, mas também dos triângulos. Nesse caso, temos uma praxeologia regional.

Por fim, em relação aos trapézios, são definidos dois tipos, o “Trapézio retângulo é aquele que tem dois ângulos internos retos” e “Trapézio isósceles é aquele que tem os dois lados não paralelos congruentes, isto é, de medidas iguais” (DANTE, 2015, p. 120). No que diz respeito ao trapézio retângulo, escolhemos um tipo de tarefa que tem relação direta com a definição. Para isso, se faz necessário que o professor retoma conhecimentos prévios dos alunos quanto às propriedades de ângulos.

**Figura 16:** Tarefa 108

**115.** Responda:

- a) Em um trapézio retângulo, um dos ângulos internos mede  $53^\circ$ . Quanto medem os outros três?

Fonte: Dante (2015, p. 120).

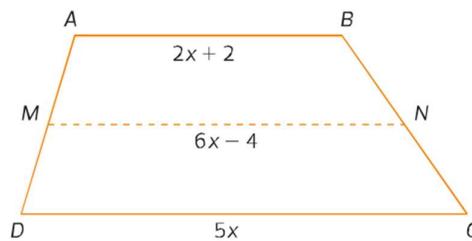
- $T$ : Calcular a medida dos ângulos internos do trapézio retângulo;
- $\tau$ : Utilizar a definição de trapézio retângulo para determinar os ângulos internos indicados;
- $\theta_{1,1}$ : Trapézios;

- $\theta_{1.2}$ : Soma dos ângulos internos de um quadrilátero;
- $\Theta$ : Geometria plana.

Além disso, para expandir ainda mais o conhecimento sobre os trapézios, é dado o conceito de base média de um trapézio, “em todo trapézio, a medida da base média é igual à média aritmética das medidas das bases maior e menor do trapézio” (Dante, 2015, p. 121). Segue um tipo de tarefa para ilustração.

**Figura 17:** Tarefa 122

**122.** Determine o valor de  $x$  no trapézio abaixo, sendo  $\overline{MN}$  a base média:



Fonte: Dante (2015, p. 121).

- $T$ : Calcular o valor desconhecido por meio da base média do trapézio;
- $\tau$ : Utilizar o cálculo da média aritmética, conforme a definição base média de um trapézio para determinar o valor desconhecido;
- $\theta_{1.1}$ : Propriedade dos trapézios;
- $\theta_{1.2}$ : Média aritmética;
- $\Theta_{1.1}$ : Geometria plana;
- $\theta_{1.2}$ : Medidas de tendência central.

Para a resolução dessa tarefa, se faz necessário o aluno saber como calcular a média aritmética. Isso significa que não é suficiente ter apenas conhecimento sobre o quadrilátero; outros saberes são necessários para resolver a tarefa. Essa praxeologia como outras apresentadas nos tipos de tarefas, envolve não somente tipos distintos de técnicas que são justificadas por diferentes tecnologias, as quais por sua vez, formam praxeologias que envolvem diferentes teorias.

Nesse livro didático do 8º ano, de modo geral, por haver maior ênfase nos objetos matemático em relação às estruturas algébricas, observamos que as praxeologias também voltam-se a essas estruturas, havendo tipos de tarefas locais (diferentes técnicas com mesmo discurso tecnológico-teórico); regionais (diferentes técnicas e tecnologias numa

mesma teoria – Geometria plana) e globais (apresentando diferentes possibilidades para resolução e articulando diferentes saberes matemáticos para o aluno perceber o quanto a matemática se articula entre si).

- Livro didático de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental

O livro didático ‘Projeto Teláris - Matemática’ do 9º ano do Ensino Fundamental possui 400 páginas. Nesse volume, o objeto quadrilátero tem como habitat o capítulo 8 (nos tópicos 2 e 3, nomeados “Retomando e aprofundando o cálculo de perímetros” e “Retomando e aprofundando o cálculo de área”, respectivamente).

O autor destaca que serão retomadas algumas ideias já estudadas, iniciando com uma situação-problema que envolve o cálculo da medida do perímetro de um polígono acrescentando a isso, novos tipos de tarefas. Dessa forma, como nosso intuito é verificar como o objeto quadrilátero vive nesta instituição, apresentaremos alguns itens que abordam essa classificação de polígono.

#### Figura 18: Tarefa 1

1. Carlos quer colocar uma cerca, do tipo alambrado, no pasto onde fica seu gado. O pasto tem forma retangular de dimensões 100 m por 140 m. Ele pretende pôr um mourão a cada 20 m para prender a cerca. Quantos metros de cerca e quantos mourões Carlos precisa comprar?

Fonte: Dante (2015, p. 285).

- $T_1$ : Calcular o perímetro da região retangular;
- $\tau_1$ : Utilizar o cálculo da medida de perímetro de uma região retangular;
- $T_2$ : Determinar o número de mourões a partir da medida do perímetro encontrado;
- $\tau_2$ : Fazer o cálculo da divisão de números naturais, dividindo-se o valor encontrado para o perímetro pelo número 20 (distância entre os mourões);
- $\theta_1$ : Medida de perímetro;
- $\theta_2$ : Operação da divisão;
- $\theta_{1.1}$ : Geometria plana;
- $\theta_{1.2}$ : Grandezas e medidas;
- $\theta_2$ : Operações de números naturais.

Esse tipo de exercício é uma praxeologia simples, porém, do tipo global. Ela requer do aluno familiaridade com a linguagem matemática quanto às formas geométricas, mas por sua vez, requer conhecimento prévio em relação às operações fundamentais e medidas de grandezas. Em relação à forma retangular, por exemplo, precisa entender que estamos tratando de um retângulo, das suas dimensões também. Por outro lado, a partir do enunciado, serão resolvidos dois tipos de tarefas, considerando que primeiramente deve-se calcular a medida do perímetro para depois encontrar o número de mourões a ser fincados na cerca. A tarefa, portanto, articula distintos campos matemáticos, contemplando as orientações didáticas previstas nos PCN-Matemática.

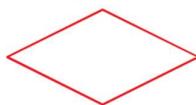
**Figura 19:** Tarefa 2

2. Escreva uma fórmula para determinar o perímetro em relação às medidas dos lados (em centímetros) de cada polígono. Antes, atribua letras para representar essas medidas.

a) Paralelogramo



b) Losango



c) Triângulo equilátero



d) Hexágono regular



Fonte: Dante (2015, p. 285).

- $T$ : Escrever uma fórmula que determine o perímetro de cada polígono;
- $\tau$ : Aplicar o conceito de perímetro em um polígono qualquer;
- $\theta_1$ : Medida de perímetro;
- $\theta_2$ : Linguagem matemática;
- $\theta_{1.1}$ : Geometria plana;
- $\theta_{1.2}$ : Grandezas e medidas;
- $\theta_2$ : Expressões algébricas.

Esse tipo de tarefa também busca familiarizar o aluno com a linguagem matemática, fazendo relação entre diferentes discursos tecnológico-teóricos. Ao fazer relação da geometria plana com as fórmulas para o cálculo da medida de perímetros das figuras geométricas, os alunos recorrem ao conhecimento de expressões algébricas, fazendo uso da linguagem matemática. Seguem outros exemplos reforçando essas articulações.

**Figura 20:** Tarefa 17

**17.** Determine a área de uma região quadrada sabendo que seu lado mede:

- a) 17 cm;                      b) 8,5 cm;                      c)  $\sqrt{7}$  cm;                      d)  $2\sqrt{3}$  cm.

Fonte: Dante (2015, p. 292).

- $T$ : Calcular a medida de área do quadrado sabendo a medida do seu lado;
- $\tau_1$ : Reconhecer a forma quadrada como sendo o quadrado;
- $\tau_2$ : Efetuar o cálculo de cada medida de área;
- $\theta$ : Medida de área;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_2$ : Grandezas e medidas.

Para esta tarefa, a partir da interpretação de que cada medida dada é um lado do quadrado, a técnica a ser utilizada refere-se ao cálculo da medida de área. Para tanto, requer de o professor considerar que os alunos façam associação ao produto apenas, não precisando memorizar fórmula.

**Figura 21:** Tarefa 21

**21.** Nair vai colocar carpete em seu consultório, que mede 4,5 m por 3,5 m. O preço do metro quadrado do carpete é R\$ 54,00. Quanto Nair vai gastar?

Fonte: Dante (2015, p. 294).

- $T_1$ : Calcular a medida de área de um retângulo sabendo a medida de seus lados;
- $\tau_1$ : Efetuar o cálculo da medida de área do carpete conforme os dados do enunciado;
- $T_2$ : Calcular operação da multiplicação para identificar o valor a ser gasto na compra do carpete;
- $\tau_2$ : Fazer a multiplicação da medida encontrada pelo valor do metro quadrado;
- $\theta_1$ : Medida de área;
- $\theta_2$ : Operação da multiplicação de números naturais;
- $\theta_{1.1}$ : Geometria plana;
- $\theta_{1.2}$ : Grandezas e medidas;
- $\theta_2$ : Operações com números naturais.

Nesse tipo de tarefa, embora seja dado o valor em reais sobre o metro quadrado, é importante o professor questionar ao aluno sobre quais figuras o problema estará tratando. A abordagem do valor do metro quadrado, fundamental lembrar que há relações entre ambas figuras – todo quadrado é um retângulo. Desse modo, vale dizer que o metro quadrado tem determinado valor para a compra de um tapete retangular. Assim, os alunos fazem as relações entre as figuras e depois passa a fazer os devidos cálculos: medida de área e multiplicação.

**Figura 22:** Tarefa 26

**26.** A área de uma região limitada por um paralelogramo é de  $58,80 \text{ m}^2$ . Considerando-se que uma de suas bases mede  $10,50 \text{ m}$ , qual é a medida da altura correspondente a essa base?

Fonte: Dante (2015, p. 295).

- $T$ : Calcular a medida da altura de um paralelogramo sabendo a medida de um dos lados e da área;
- $\tau_1$ : Reconhecer que o paralelogramo é um retângulo;
- $\tau_2$ : Utilizar o cálculo da medida de área para encontrar o valor da medida da altura solicitada;
- $\theta$ : Medida de área de um retângulo (ou paralelogramo);
- $\theta_{1.1}$ : Geometria plana;
- $\theta_{1.2}$ : Grandezas e medidas.

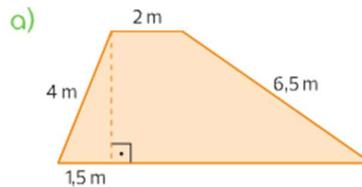
Observa-se que nessa tarefa, o problema não solicita a medida de área, mas sim, a medida da altura do paralelogramo. Para tanto, novamente requer reconhecer os conceitos de quadriláteros, fazendo uso das propriedades que os classificam. Esses tipos de tarefas ajudam ao aluno fazer relações e compreender a inclusão de classes dos quadriláteros. Desse modo, mesmo apresentando um dos lados como sendo a base do paralelogramo e solicitando a medida da altura, para efetuar o cálculo da medida de área, efetua-se a divisão dessa medida dada pela medida da base, encontrando-se assim, a medida solicitada – a altura.

Entende-se ser uma tarefa que simplesmente, poderia apenas ser resolvida com uso da fórmula, mas fazer relações e apresentar a figura, mostrando que o cálculo é multiplicar base por altura, o aluno terá mais oportunidade em aprender de modo mais significativo. Contudo, dependerá do professor, aplicar meramente a fórmula em tipos de

tarefas assim, em que o aluno deixará de reconhecer e aprender significativamente as propriedades dos quadriláteros.

**Figura 23:** Tarefa 35

**35.** Determine a área da região limitada pelo trapézio, em cada caso.



Fonte: Dante, (2015, p. 299).

- $T_1$ : Diluir a região apresentada em três figuras geométricas (2 triângulos e um retângulo)
- $T_{2,1}$ : Determinar a medida de área de cada triângulo: triângulo 1 – para achar a medida da altura;
- $T_{2,2}$ : Determinar a medida de área de cada triângulo: triângulo 2 – para encontrar a medida de um dos lados;
- $\tau_1$ : Efetuar o cálculo da medida de área dos triângulos;
- $\tau_2$ : Utilizar os dados encontrados para identificar a medida da altura e da base maior do trapézio;
- $\tau_3$ : Efetuar o cálculo da medida de área do trapézio, a partir das medidas encontradas (altura, base menor, base maior);
- $\theta_{1,1}$ : Elementos de figuras planas (altura, lados e base);
- $\theta_2$ : Medida de área;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_{,2}$ : Grandezas e medidas.

Nesse tipo de tarefa, exige-se conhecimentos além do cálculo da medida de área do trapézio, uma vez que na figura não há indicação da medida da altura. Para resolver essa tarefa, o aluno deve levar em consideração o triângulo retângulo formado e calcular a altura do triângulo, a qual coincide com a altura do trapézio. Com esse novo dado, deverá também calcular a medida de área do outro triângulo formado para encontrar a medida de um dos lados. Esse novo valor encontrado, completa a medida da base maior do trapézio, o que lhe dá condições de efetuar o cálculo da medida de área de toda região.

Outra possibilidade é somar as três medidas de áreas que se pode encontrar: triângulo menor (1) + retângulo + triângulo maior (2).

Essas e outros tipos de tarefas identificadas na ‘Coleção Projeto Teláris - Matemática’, edição 2015, nos revelam que os quadriláteros podem ser encontrados nos quadros volumes dos dois últimos ciclos do Ensino Fundamental, seguindo as orientações dos PCN-Matemática, vigente à época dessa edição. O que mais predomina são gêneros de tarefa – calcular e determinar. No entanto, observamos que conforme o volume, as praxeologias podem variar bastante. É possível encontrar todo tipo de praxeologia – pontual – local – regional e global. Observamos também, que o volume do 8º ano contempla mais variedade de praxeologia, considerando a articulação com objetos matemáticos entre três blocos de conteúdo, segundo os PCN-Matemática: Geometria, Álgebra e Grandezas e medidas. Mas, também são identificados tipos de tarefas os quais envolvem outros blocos: Números e operações; e Tratamento da informação (hoje, considera-se Estatística e Probabilidade).

Segundo os estudos levantados para nosso mapeamento, Oliveira (2023) também aborda a mesma análise como resultado, entretanto em relação ao objeto triângulo. Além disso, em seus estudos não foram realizados em todas as obras do 6º ao 9º ano, porém ao comparar percebemos que manteve a predominância de alguns gêneros de tarefa, como calcular e determinar.

A seguir, apresentaremos uma análise de outra coleção do mesmo autor e editora, entretanto, orientada pela BNCC. Nosso intuito, será apresentar as proximidades entre as obras e as competências e habilidades propostas no atual documento curricular brasileiro.

### **Coleção Teláris Matemática (edição 2018)**

Na coleção de livros didáticos de matemática ‘Teláris Matemática’ (edição 2018), as obras estão diluídas da seguinte forma: 6º e 7º anos do Ensino Fundamental com 10 capítulos cada; 8º ano do Ensino Fundamental, com 8 capítulos; e 9º ano do Ensino Fundamental, com 9 capítulos. Em relação aos tipos de tarefa (T), encontram-se em partes intituladas como “Explorar e descobrir”, “Atividades”, “Revisando seus conhecimentos”, “Testes oficiais”, “Verifique o que estudou”, “Leitura”, “Matemática e Tecnologia”.

É importante destacar que esta coleção foi editada sob as orientações estabelecidas pela BNCC, pois é o documento curricular vigente na época de sua edição. Portanto, analisamos as competências e habilidades de acordo com o respectivo ano escolar de cada

livro do Ensino Fundamental. Além disso, também apresentaremos algumas análises praxeológicas de tarefas que abrangem mais de um tipo de habilidade.

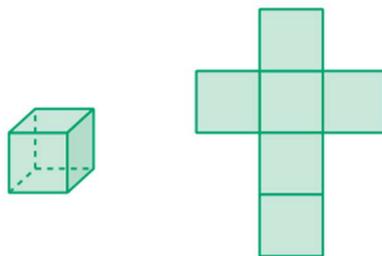
- Livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental

O livro didático de matemática ‘Teláris Matemática’ do 6º ano do Ensino Fundamental possui 328 páginas, no qual o objeto quadrilátero está presente no capítulo 3 (tópicos 1 e 2, intitulados “Sólidos geométricos” e “Prismas e pirâmides”, respectivamente), no capítulo 5 (tópicos 4 e 5, intitulados “Regiões planas e contornos” e “Polígonos”, respectivamente) e capítulo 8 (tópicos 2, 3 e 4, intitulados “Grandeza perímetro”, “Grandeza área” e “Outras situações envolvendo as grandezas perímetro e área”, respectivamente).

No capítulo 3, o primeiro tópico é apresentado por meio de exemplos de sólidos geométricos como o paralelepípedo, cubo e pirâmide. Estes conceitos iniciais se alimentam do objeto quadrilátero, pois em seus elementos podem apresentar pelo menos um quadrilátero como face. Vejamos a seguir uma tarefa que mobiliza o conhecimento dos elementos de um cubo, como também, a identificação das figuras planas que o compõe.

**Figura 24:** Tarefa 14

- 14 ▶** Examine a imagem de um cubo e da planificação da superfície dele e responda no caderno.



- Quantos vértices, arestas e faces o cubo tem?
- Qual é a forma geométrica das faces?
- Em que o cubo é semelhante aos demais blocos retangulares?
- Em que ele é diferente dos demais blocos retangulares?

Fonte: Dante (2018, p. 83).

- $T_1$ : Examinar a imagem de um cubo e a planificação de sua superfície para responder:
- $T_{1.1}$ : Determinar número de vértices, arestas e faces do cubo (a);
- $T_{1.2}$ : Determinar a forma geométrica das faces (b);
- $T_{1.3}$ : Determinar a semelhança do cubo aos demais blocos retangulares c);
- $T_{1.4}$ : Determinar as diferenças entre o cubo e os blocos retangulares (d).
- $\tau_{1.1}$ : Visualizar a imagem do cubo para identificar os seus elementos (vértices, arestas e faces) e quantificá-los;
- $\tau_{1.2}$ : Visualizar a imagem do cubo e sua planificação para identificar a forma geométrica das faces;
- $\tau_{1.3,4}$ : Visualizar a imagem do cubo e a planificação de sua superfície para identificar semelhanças e diferenças entre o cubo e os blocos retangulares;
- $\theta$ : Planificação de sólidos geométricos;
- $\Theta$ : Geometria espacial.

Embora, seja uma tarefa apenas de visualização, requer do aluno atenção para reconhecer as dimensões de uma figura plana e uma figura espacial. Em seguida, no segundo tópico, segue o mesmo procedimento. São apresentadas as definições de prismas e pirâmides, enfatizando a classificação e seus elementos que também se alimentam do mesmo objeto. Conforme a BNCC, a habilidade (EF06MA17) está com maior ênfase nessas tarefas. Além disso, os gêneros de tarefas que estão mais presentes são: escrever, examinar e observar. Explora-se as habilidades de visualização e análise, princípios básicos para fortalecer o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos nesse nível de ensino (6º ano do Ensino Fundamental).

Por fim, neste capítulo 3, são explorados alguns recursos para a construção de quadriláteros, poliedros, retas paralelas e perpendiculares, entre outros. Esses recursos podem ser por meio de materiais físicos como régua e compassos ou com *softwares* educacionais, ao exemplo do *geogebra*, sendo especificamente expresso na habilidade EF06MA22.

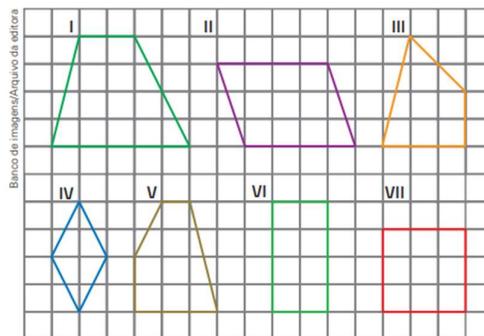
Em diante, no capítulo 5 anterior ao tópico 4, são determinados alguns conceitos primordiais para o estudo das regiões planas. Conceitos como ponto, plano, reta, ângulos, retas paralelas e retas concorrentes. Dessa forma, no capítulo 4, o tópico “regiões planas e contornos” é composto por tarefas práticas como dobraduras com as regiões planas do

tangram, desenho do contorno de objetos geométricos que resultam no contorno de figuras planas.

No tópico seguinte, denominado “polígonos” estão presentes as noções que constituem o objeto quadrilátero. Entre as noções, estão as definições de cada quadrilátero com tarefas que mobilizem a diferenciação entre eles. A partir disso, iremos apresentar a praxeologia de uma tarefa que mobiliza o conhecimento das classificações de cada quadrilátero.

**Figura 25:** Tarefa 76

76 ▶ Analise com atenção estes polígonos.



- Quais são quadriláteros?
- Quais são trapézios?
- Quais são paralelogramos?
- Quais são retângulos?
- Quais são losangos?
- Quais são quadrados?

Fonte: Dante (2018, p. 154).

- $T$ : Analisar e classificar qual o tipo de quadrilátero;
- $\tau$ : Verificar por meio visualização, qual posição relativa dos lados;
- $\theta$ : Classificação de quadriláteros;
- $\Theta$ : Geometria plana.

Ao analisar as demais tarefas associadas ao objeto quadrilátero, observa-se a prevalência dos gêneros: identificar, analisar e escrever. Além disso, há destaque nesse capítulo ao que tange às habilidades estabelecidas na unidade temática Geometria da BNCC. Tais habilidades (EF06MA18; EF06MA20 e EF06MA22) favorecem ao aluno desenvolver seu pensamento geométrico de modo a consolidar a construção do conhecimento do objeto em jogo.

No capítulo 8, está presente a unidade temática Grandezas e medidas, com a abordagem dos conceitos e as medidas de perímetro e área, explorando e estimulando a

realização de cálculo algébrico, ou seja, os gêneros de tarefas com maior frequência são: determinar e calcular. Além disso, é notável a prevalência de mais questões nesses tópicos com o intuito do aluno praticar as diferentes formas de tarefas que podem surgir. A seguir, apresentaremos a análise praxeológica de uma tarefa envolvendo a grandeza perímetro.

**Figura 26:** Tarefa 24

**24 ▶** *Mona Lisa*, ou *La Gioconda*, é o nome de uma das obras de arte de Leonardo da Vinci que está exposta, atualmente, no Museu do Louvre, em Paris (França).

Sabendo que as dimensões dessa obra medem 0,77 m por 0,53 m, determine a medida de perímetro dela.



Reprodução/Museu do Louvre, Paris

*Mona Lisa*. 1503-1506.  
Leonardo da Vinci.  
Óleo sobre madeira,  
0,77 m × 0,53 m.

Fonte: Dante (2018, p. 253).

- $T$ : Determinar a medida do perímetro sabendo das dimensões;
- $\tau$ : Identificar o tipo de quadrilátero e calcular a medida do perímetro;
- $\theta$ : Medida do perímetro;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_2$ : Grandezas e medidas.

É importante ressaltar que no tópico “grandeza área” é exposta a definição e fórmula das áreas de alguns quadriláteros: retângulo, quadrado e paralelogramo. Ademais, no tópico “outras situações envolvendo as grandezas perímetro e área”, o tipo de tarefa é contextualizado e relacionado a outros conhecimentos prévios dos alunos. Vejamos a seguir uma tarefa envolvendo o cálculo de medida de área e média (saber prévio), para assim, descrevermos sua praxeologia.

**Figura 27:** Tarefa 76

- 76** ▶ Para calcular a medida aproximada da área do terreno de contorno irregular representado pela figura 1, Maurício calculou a média das medidas de área das regiões determinadas pelos 2 retângulos em azul na figura 2. No caderno, calcule você também a medida aproximada da área desse terreno.

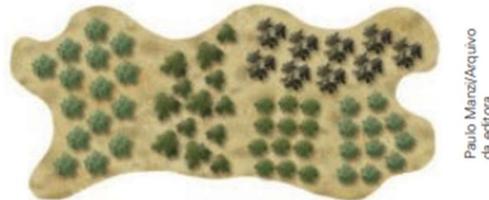


Figura 1.

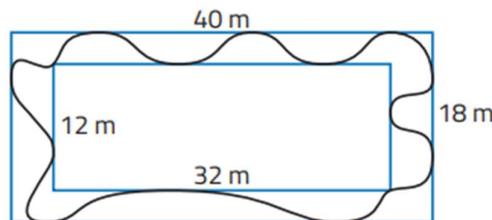


Figura 2.

Fonte: Dante (2018, p. 266).

- $T_{1,1}$ : Calcular as medidas de áreas do retângulo 1 e do retângulo 2;
- $T_{1,2}$ : Calcular a média das medidas de áreas encontradas;
- $\tau_1$ : Efetuar o cálculo da medida de área, dados dois retângulos
- $\tau_2$ : Efetuar o cálculo da média entre as duas medidas de área encontradas;
- $\theta_1$ : Medida de área;
- $\theta_2$ : Média aritmética;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_2$ : Grandezas e medidas;
- $\theta_3$ : Geometria plana;
- $\theta_3$ : Estatística e probabilidade.

Na tarefa 76, podemos observar que o aluno seguirá os passos descritos, ou seja, calcular a medida de área das duas regiões retangulares e a média aritmética entre elas. Assim, o aluno reconhece que a figura por se tratar de um contorno irregular é necessário seguir os procedimentos para calcular a medida aproximada da área desse terreno. Além disso, identificamos as habilidades da BNCC que foram exploradas nesta coleção, com o

intuito de relacionar as noções que constituem o objeto quadrilátero e que se alimentam deste.

**Quadro 13:** Habilidades da BNCC exploradas no volume 6º ano (edição 2018)

CAPÍTULO	TÓPICOS	HABILIDADES DA BNCC
3 – “Sólidos geométricos”	1 – “Sólidos geométricos”	EF06MA17 EF06MA22
	2 – “Prismas e pirâmides”	
5 – “Ângulos e polígonos”	4 – “Regiões planas e contornos”	EF06MA18 EF06MA20 EF06MA22
	5 – “Polígonos”	EF06MA18 EF06MA20 EF06MA25
8 – “Grandezas geométricas: comprimento, perímetro e área”	2 – “Grandeza perímetro”	EF06MA29
	3 – “Grandeza área”	EF06MA24 EF06MA29
	4 – “Outras situações envolvendo as grandezas perímetro e área”	EF06MA24 EF06MA28

Fonte: Elaborado pelo autor (fevereiro, 2024).

No Quadro 13, observa-se que podem ser mobilizadas pelo aluno, 9 tipos de habilidades distintas com uma relação direta ou indireta ao objeto quadrilátero. Entre elas, três habilidades (EF06MA18; EF06MA20 e EF06MA22) apresentam-se como maior frequência na unidade temática Geometria. Em relação à unidade temática de Grandezas e medidas, as habilidades de maior frequência foram EF06MA24 e EF06MA29.

- Livro didático de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental

O livro didático de matemática ‘Teláris Matemática’ do 7º ano do Ensino Fundamental possui 312 páginas, no qual, o objeto quadrilátero tem seu *habitat* em dois capítulos. No capítulo 5 (tópicos 3 e 4, denominados “polígono” e “soma das medidas de abertura dos ângulos de um polígono”, respectivamente) e no capítulo 10 (tópicos 1, 2 e

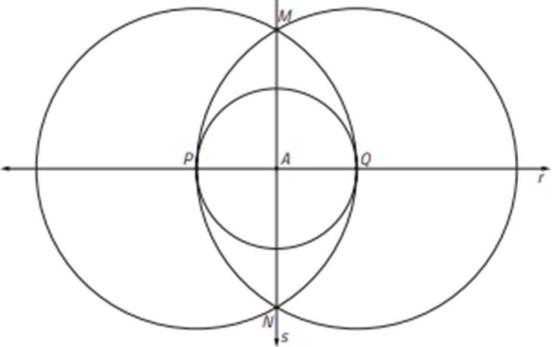
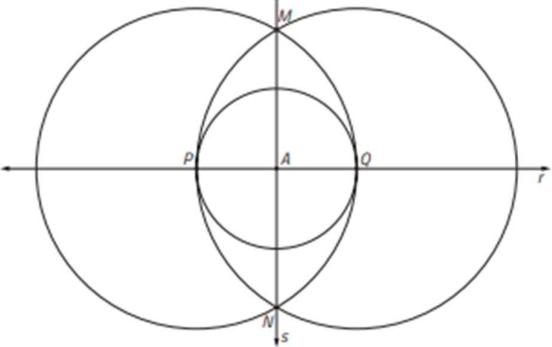
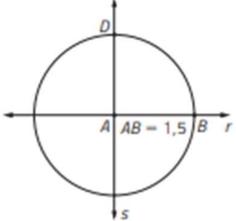
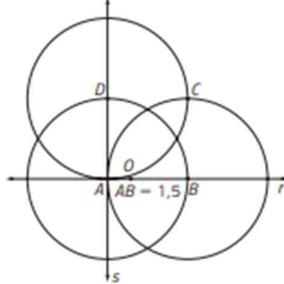
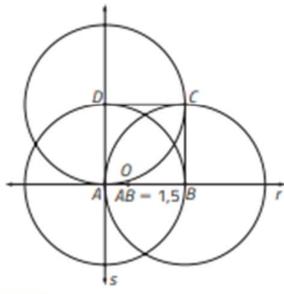
3, denominados “perímetro”, “área” e “volume”, respectivamente). Anterior aos tópicos destacados no capítulo 5, são retomados alguns conceitos já estudados no 6º ano do Ensino Fundamental, como a ideia de ângulos, classificações de acordo com sua abertura, as classificações para linhas (abertas ou fechadas, simples ou não simples), polígono a partir de linha poligonal e polígonos convexos e não convexos.

Diante disso, nota-se que a obra propicia ao aluno revisitar os conceitos aprendidos, de modo que nos seguintes tópicos, a construção do conhecimento seja mais efetiva. De acordo com a BNCC, o capítulo 5 é referente à unidade temática Geometria, no qual são exploradas outras habilidades para ampliar os saberes geométricos, como a ideia de ângulos e suas classificações, por exemplo.

Desse modo, temos como exemplo, a construção de quadrados, para a qual os alunos necessariamente devem saber construir retas paralelas e retas perpendiculares. Portanto, é demonstrada uma tarefa passo a passo de como construir um quadrado, de modo que os alunos também possam construí-lo seguindo os mesmos passos (Figura 28).

**Figura 28:** Passo a passo da construção de um quadrado e sugestão de tarefa

Manuel construiu um quadrado com lados de medidas de comprimento de 1,5 cm. Veja como ele fez.

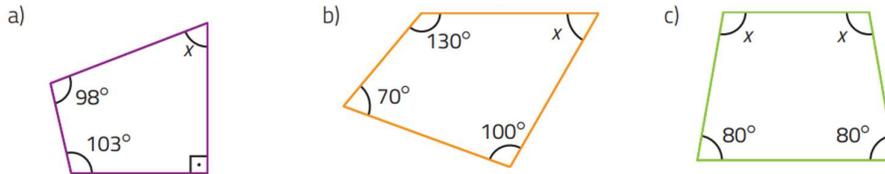
<p>1) Ele traçou uma reta <math>r</math> no caderno e marcou um ponto <math>A</math> na reta.</p>		
<p>2) Para traçar a reta perpendicular a <math>r</math> no ponto <math>A</math>, ele colocou a ponta-seca do compasso no ponto <math>A</math> e traçou uma circunferência de tamanho qualquer. Os pontos de intersecção entre a circunferência e a reta <math>r</math> são <math>P</math> e <math>Q</math>.</p>		
<p>3) Depois, ele colocou a ponta-seca do compasso em <math>P</math> e traçou uma circunferência com medida de comprimento do raio igual à do segmento de reta <math>PQ</math>. Analogamente, traçou outra circunferência com centro em <math>Q</math> e medida de comprimento do raio igual à do segmento de reta <math>PQ</math>. Os pontos de intersecção das circunferências são <math>M</math> e <math>N</math> e a reta que passa por eles é perpendicular à reta <math>r</math>. Essa é a reta <math>s</math>. Em seguida, Manuel apagou as circunferências construídas, deixando apenas as retas <math>r</math> e <math>s</math> e o ponto <math>A</math>, para ficar com uma imagem mais "limpa".</p>		
<p>4) Usando uma régua graduada, ele abriu o compasso com a medida de comprimento de 1,5 cm, colocou a ponta-seca do compasso sobre o ponto <math>A</math> e traçou uma circunferência. O ponto de intersecção entre a circunferência e a reta <math>r</math>, à direita do ponto <math>A</math>, é o ponto <math>B</math>. O ponto de intersecção entre a circunferência e a reta <math>s</math>, acima da reta <math>r</math>, é o ponto <math>D</math>.</p>	<p>5) Com o compasso aberto na medida de comprimento de 1,5 cm, ele colocou a ponta-seca no ponto <math>B</math> e traçou uma circunferência. Analogamente, traçou outra circunferência, com mesma medida de comprimento do raio, com centro em <math>D</math>. O ponto de intersecção entre essas 2 circunferências é o ponto <math>C</math>.</p>	<p>6) Por fim, ele traçou os segmentos de reta <math>BC</math> e <math>CD</math> e obteve o quadrado <math>ABCD</math>.</p>
		 <p><b>Bate-papo</b> Resposta pessoal.</p> <p>Faça no caderno a mesma construção com <math>AB = 5</math> cm. O quadrilátero que você obteve é um quadrado? Compare com a construção de um colega e conversem sobre o porquê de esse procedimento funcionar.</p>

Fonte: Dante (2018, p. 163).

Em seguida, no próximo tópico do mesmo capítulo dar-se ênfase à soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo com a seguinte definição: “Em todo quadrilátero convexo, a soma das medidas de abertura dos 4 ângulos internos é igual a  $360^\circ$ ” (Dante, 2018, p. 169). Posteriormente, têm-se tipos de tarefas que requerem dessa definição para resolvê-las, especificando o não uso de transferidor. Ou seja, para o aluno, por meio de cálculos algébricos, encontrar a resposta. A seguir, apresentaremos uma análise praxeológica da tarefa 85.

**Figura 29:** Tarefa 85

**85 ▶** No caderno, determine a medida de abertura  $x$ , em graus, em cada quadrilátero, sem usar transferidor.



Fonte: Dante (2018, p. 169).

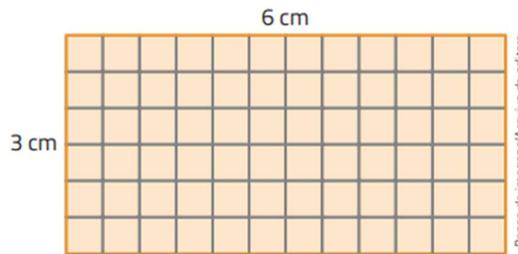
- $T$ : Determinar a medida de abertura  $x$ , em graus, de cada quadrilátero, sem usar transferidor;
- $\tau$ : Utilizar a propriedade da soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo;
- $\theta$ : Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo;
- $\Theta$ : Geometria plana.

Para resolver essa tarefa, há duas possibilidades para o aluno pensar na resolução. A primeira, por meio de uma equação; a segunda, simplesmente com operações básicas utilizando seu raciocínio lógico. Além disso, ao decorrer desse tópico, novamente reforça-se os dois tipos de gêneros de tarefas predominantes: determinar e calcular. Dessa forma, notamos a preferência por resoluções que requerem o cálculo algébrico, além do uso de materiais como o transferidor.

No capítulo 10, os objetos envolvidos correspondem à unidade temática Grandezas e medidas, retomando as medidas de perímetro e área, como também, o cálculo da medida de volume é explorado. Ao analisar este capítulo, notamos a inserção da equivalência entre as medidas de perímetros e áreas. Diante disso, selecionamos uma tarefa que envolve essas grandezas e medidas com o intuito de realizar a análise praxeológica.

**Figura 30:** Tarefa 85

- 20 ▶ Observe esta região retangular que tem medida de área de  $18 \text{ cm}^2$ .



- Usando apenas números naturais para as medidas de comprimento dos lados, em centímetros, escreva no caderno quantas e quais regiões retangulares podem ser construídas com medida de área igual a  $18 \text{ cm}^2$ .
- Desenhe uma delas em papel quadriculado, recorte e cole no caderno.
- Escreva no caderno em ordem crescente e os números naturais encontrados no item **a**.
- Que números são esses?

Fonte: Dante (2018, p. 287).

- $T$ : Determinar regiões retangulares que possuem medida de área igual a  $18 \text{ cm}^2$ ;
- $\tau_1$ : Utilizar a definição de equivalência entre áreas;
- $\tau_2$ : Desenhar uma das regiões correspondentes a medida de área encontrada;
- $\tau_3$ : Escrever em ordem crescente os números correspondentes aos divisores de 18;
- $\theta_1$ : Medida de área;
- $\theta_2$ : Divisores de um número;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_2$ : Grandezas e medidas;
- $\theta_3$ : Números naturais.

Diante disso, ao realizar a praxeologia e analisar a tarefa anterior, identificamos que outros saberes são necessários para a resolução, como, por exemplo, escrever em ordem crescente e os números naturais. Assim, é um tipo de tarefa que possui diferentes gêneros próprios, os quais são: visualizar, escrever e desenhar. A seguir, será apresentada as habilidades que foram mais exploradas neste volume, conforme o capítulo e tópico analisados.

**Quadro 14:** Habilidades da BNCC exploradas no volume 7º ano (edição 2018)

<b>CAPÍTULO</b>	<b>TÓPICOS</b>	<b>HABILIDADES DA BNCC</b>
5 - “Geometria: circunferência, ângulo e polígono”	3 - “Polígono”	EF07MA27 EF07MA28
	4 - “Soma das medidas de abertura dos ângulos de um polígono”	EF07MA27
10 - “Perímetro, área e volume”	1 - “Perímetro”	EF07MA29
	2 - “Área”	EF07MA29 EF07MA31 EF07MA32
	3 - “Volume”	EF07MA29 EF07MA30

Fonte: Elaborado pelo autor (fevereiro, 2024).

No Quadro 14, foram identificados um total de 6 habilidades, sendo as de maiores frequências EF07MA27 e EF07MA29. É importante destacar, que as unidades temáticas Geometria e Grandezas e medidas estão apresentando as noções em relação direta ao objeto quadrilátero. Isso aproxima ainda mais o saber para os discentes. Além disso, em relação aos três tópicos do capítulo 10, o último apresenta uma predominância maior de questões para que os alunos possam exercitar ainda mais as noções estudadas.

- Livro didático de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental

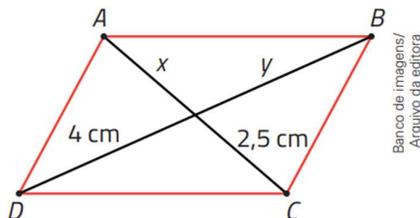
O livro didático de matemática ‘Teláris Matemática’ do 8º ano do Ensino Fundamental possui 264 páginas. O objeto quadrilátero está presente no capítulo 4 (tópico 2, intitulado “ampliando o estudo dos quadriláteros”) e capítulo 6 (tópicos 1 e 2, denominados “retomando e aprofundando o cálculo de medida de área” e “retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade”, respectivamente).

No capítulo 4, nota-se o estudo aprofundado com o objeto quadriláteros, pois são discutidos os tipos de quadriláteros, características de um quadrilátero convexo, paralelogramos, propriedades dos paralelogramos, propriedades dos retângulos, propriedades dos losangos, tipos de trapézio e base média de um trapézio. A cada noção apresentada, são propostas tarefas como forma de validar o conhecimento aprendido. Em

sua maioria, os gêneros de tarefas envolvidos com maior frequência são: determinar, responder e desenhar. Eis uma ilustração, a seguir.

**Figura 31:** Tarefa 37

**37** ▶ Determine as medidas de comprimento  $x$  e  $y$  neste paralelogramo  $ABCD$ .



Fonte: Dante (2018, p. 123).

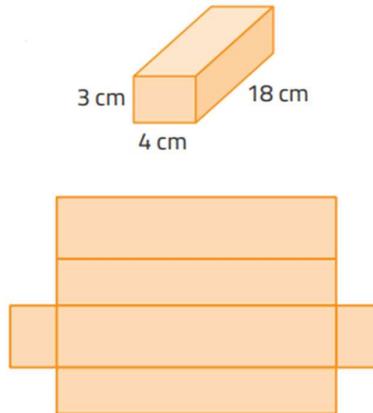
- $T$ : Determinar a medida do comprimento  $x$  e  $y$ , dado o paralelogramo  $ABCD$ ;
- $\tau$ : Utilizar a propriedade das diagonais do paralelogramo;
- $\theta$ : Propriedade das diagonais do paralelogramo;
- $\Theta$ : Geometria plana.

A tarefa 37 é a aplicação direta da propriedade que foi destacada no livro didático analisado: “em todo paralelogramo, as diagonais se intersectam no ponto médio delas” (Dante, 2018, p. 123). Assim, após a compreensão desta propriedade, a tarefa indicada pode ser respondida de forma efetiva, tendo em vista que requer do alunos dois dos conhecimentos prévios – o conceito de ponto médio de um segmento e as diagonais que são segmentos de reta.

No próximo capítulo, estão os saberes relacionados à unidade temática de Grandezas e medidas. Além disso, retoma-se novamente, o cálculo da medida de área e as medidas de volume e capacidade que foram abordados inicialmente no 7º ano nesta coleção. Logo, o capítulo 6, referente ao tópico 1, está organizado com as definições de área conforme cada tipo de quadrilátero. As tarefas propostas têm como gênero, em sua grande parte, calcular e determinar. A partir disso, selecionamos uma tarefa para análise de sua praxeologia.

**Figura 32:** Tarefa 7

- 7 ▶ Uma caixa de creme dental com a forma de um bloco retangular tem as seguintes medidas de dimensões: 3 cm, 4 cm e 18 cm. Determine no caderno a medida de área da caixa planificada.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: Dante (2018, p. 163).

- $T$ : Determinar a medida da área da caixa planificada;
- $\tau_1$ : Visualizar as dimensões de cada região da caixa planificada, observando quantas são iguais;
- $\tau_2$ : Relacionar as medidas de cada região plana da caixa planificada, conforme as medidas de seus lados;
- $\tau_3$ : Efetuar o cálculo da medida de cada área planificada;
- $\tau_4$ : Efetuar a soma das medidas de área encontradas para obter medida de área total;
- $\theta$ : Medida de área;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_2$ : Grandezas e medidas.

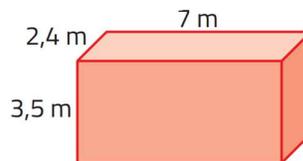
Nesta tarefa 7, exige-se que os alunos relacionem as figuras planas da planificação com suas respectivas medidas, para assim calcular a área de cada região e depois realizar a soma entre elas. Diferentemente das habilidades mobilizadas no 7º ano do Ensino Fundamental, nessa obra, são exploradas outras competências, abordando aspectos mais avançados do conteúdo.

Em seguida, no próximo tópico intitulado “retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade”, há noções que se alimentam do objeto quadrilátero, como por exemplo, o volume do paralelepípedo que pode ser expressa pela

medida da área da base (área do retângulo) multiplicado pela sua altura. Assim, o aluno deverá articular os saberes já estudados para compreender melhor o atual conteúdo. Vejamos como exemplo a tarefa 38, através de sua análise praxeológica.

**Figura 33:** Tarefa 38

- 38** ▶ Calcule no caderno a medida de volume de cada sólido geométrico.
- a) Paralelepípedo.



Fonte: Dante (2018, p. 180).

- $T$ : Calcular a medida de volume do paralelepípedo;
- $\tau$ : Efetuar o cálculo da medida de área da base retangular da figura;
- $\tau$ : Efetuar o produto da medida de área encontrada com a medida da altura do paralelepípedo;
- $\theta$ : Medidas de área; medida de volume;
- $\theta_1$ : Geometria plana;
- $\theta_2$ : Grandezas e medidas.

Na tarefa 38, apesar de se tratar da medida do volume de um paralelepípedo, que é uma figura espacial (tridimensional), são utilizadas noções do objeto quadrilátero. Ou seja, os alunos, para realizarem o cálculo da medida do volume solicitado, deverão inicialmente calcular a medida da área da base, que neste caso é retangular. Em seguida, efetuar o produto dessa medida encontrada pela altura do paralelepípedo. Uma alternativa para não induzir os alunos a memorizar fórmulas. Por fim, ao analisar as demais tarefas desse tópico referente à medida do volume também se predominam os gêneros: calcular e determinar.

**Quadro 15:** Habilidades da BNCC exploradas no volume 8º ano (edição 2018)

CAPÍTULO	TÓPICOS	HABILIDADES DA BNCC
4 - “Triângulos e quadriláteros”	2 - “Ampliando o estudo dos quadriláteros”	EF08MA14

6 - “Área e volume”	1 - “Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área”	EF08MA19
	2 - “Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade”	EF08MA19 EF08MA21

Fonte: Elaborado pelo autor (fevereiro, 2024).

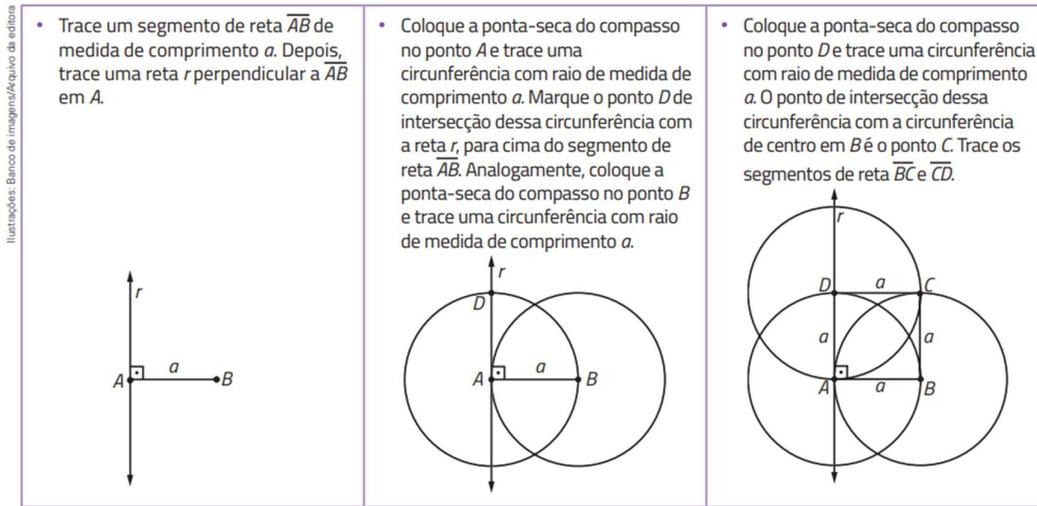
De acordo com o Quadro 15, foram identificadas três habilidades distintas sendo a EF08MA19 com maior frequência. De acordo com a BNCC, a descrição desta habilidade é:

Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (Brasil, 2017, p. 315).

Assim como mencionado anteriormente, a maior ênfase atribuída a esses tópicos é na resolução e elaboração de problemas relacionados à medida de área. Isso permitirá aos alunos desenvolverem estratégias para resolução algébrica, ao efetuar valores desconhecidos, ou mesmo utilizando fórmulas, além de elaborarem problemas para situações envolvendo a determinação de medidas de terrenos.

- Livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental

O livro didático de matemática ‘Teláris Matemática’ do 9º ano do Ensino Fundamental possui 312 páginas, neste, o objeto quadrilátero está presente no capítulo 7 (tópico 2, denominado “Circunferências, retas e polígonos”) e capítulo 8 (tópico 1, denominado “Grandezas e medidas no plano cartesiano”). No capítulo 7, no tópico indicado, tem-se uma aplicação de circunferência na construção do quadrado com o auxílio do compasso. Assim, é abordado o passo a passo e como sugestão a criação de um quadrado seguindo as orientações informadas, conforme a figura a seguir.

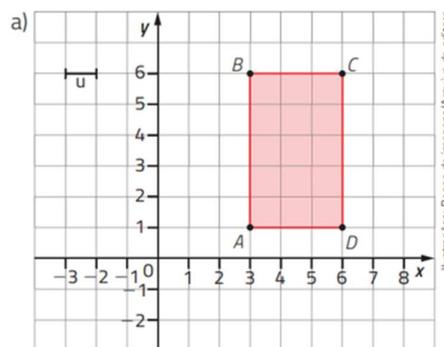
**Figura 34:** Construção de um quadrado com aplicação de circunferência

Fonte: Dante (2018, p. 219).

Além da construção manual, é sugerido também realizar a construção por meio de *softwares* de geometria dinâmica como o *Geogebra*, ferramenta que possibilita ainda mais o envolvimento dos alunos na tarefa. No próximo capítulo, o tópico intitulado “grandezas e medidas no plano cartesiano” trata-se das medidas de perímetro e área que estão relacionadas diretamente com o objeto quadrilátero. Vejamos a seguir a praxeologia de uma tarefa correspondente.

**Figura 35:** Tarefa 8

- 8 ▶ Determine no caderno a medida de perímetro e a medida de área destas regiões retangulares, sendo  $u$  e  $u^2$  as unidades de medida, respectivamente.



Fonte: Dante (2018, p. 243).

- $T$ : Determinar a medida de perímetro e área da região retangular;
- $\tau$ : Aplicar o conceito de unidades de medidas ( $u$  e  $u^2$ );
- $\theta$ : Medidas de perímetro e de área;
- $\theta_1$ : Geometria plana;

- $\theta_2$ : Grandezas e medidas;

Nessa última tarefa, não querer aplicação de fórmula, apenas a contabilização da unidade de medida adotada. Assim, as tarefas respondidas ajudam na resolução como também a mediação do professor no momento da explicação. A seguir, estão destacadas as habilidades que foram mobilizadas nos tópicos analisados.

**Quadro 16:** Habilidades da BNCC exploradas no volume 9º ano (edição 2018)

CAPÍTULO	TÓPICOS	HABILIDADES DA BNCC
7 – “Circunferências e círculos”	2 – “Circunferências, retas e polígonos”	EF09MA15
8 – “Grandezas e medidas”	1 – “Grandezas e medidas no plano cartesiano”	EF09MA16

Fonte: Elaborado pelo autor (fevereiro, 2024).

Conforme o Quadro 16, são apresentadas as duas habilidades que manipulam os saberes relacionados ao objeto quadrilátero. Assim, com o intuito de demonstrar sua aproximação, destacaremos a descrição das duas habilidades de acordo com a BNCC.

EF09MA15: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

EF09MA16: Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano (Brasil, 2017, p. 319).

Portanto, podemos observar que o capítulo analisado está em conformidade com a orientação estabelecida na BNCC, possibilitando aos alunos desenvolver as habilidades necessárias neste ano escolar. Além disso, ao comparar as habilidades dispostas nos quatro anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), verificamos que no último ano escolar do Ensino Fundamental envolve menos habilidades relacionadas ao objeto quadrilátero.

Nos estudos de Padilha (p. 97, 2022), ao analisar o livro didático especificamente as tarefas que envolvem os sólidos geométricos constata-se que “apesar do número significativo, as tarefas eram muito parecidas, modificando as situações, mas em geral,

voltadas para o cálculo das medidas de área e de volume” sendo que o mesmo ocorre em nosso presente estudo, em relação ao objeto quadrilátero.

A seguir, será apresentada a dimensão ecológica do objeto quadrilátero com as relações entre os tipos de tarefa, objeto de conhecimento e tema. Como também, o Modelo Praxeológico de Referência (MPR) do objeto quadrilátero, com as noções que constituem o objeto quadrilátero, alimento para o quadrilátero e o quadrilátero como alimento.

### 3.3 DIMENSÃO ECOLÓGICA DO OBJETO QUADRILÁTERO

A finalidade da dimensão ecológica é investigar as restrições e condições que afetam a presença do objeto matemático na instituição. Assim, em nossa pesquisa, o intuito foi investigar quais as restrições e condições para que o objeto quadrilátero exista ou não uma das instituições voltada para os anos finais do Ensino Fundamental – o livro didático de matemática. Por sua vez, buscamos considerar como isso acontece e quais foram os motivos que resultaram em possíveis mudanças ou ausências.

No volume da edição de 2016, analisamos que o objeto quadrilátero tem como *habitat* o 8º ano do Ensino Fundamental, cujo *nichos* das noções que estão presentes nas orientações são: elementos e classificações dos quadriláteros; soma dos ângulos internos de um quadrilátero; propriedades dos quadriláteros.

No volume da edição de 2018, analisamos que o objeto quadrilátero tem como *habitat* o 7º ano do Ensino Fundamental, cujo *nichos* das noções que estão presentes nas orientações são: classificação dos quadriláteros: quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, losango; intersecção de classes entre os quadriláteros: paralelogramos e trapézios; Expressões de cálculo de área de quadriláteros; decomposição de áreas de figuras através de quadriláteros; propriedades dos quadriláteros; soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo; construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.

Assim, para este estudo “os níveis de codeterminação indicam uma escala inter-relacionada de instâncias que influenciam nas condições para que o objeto [...] viva em determinada instituição” Cavalcante (2018, p. 27). Portanto, apresentaremos o Quadro 17 com os níveis de codeterminação para este estudo:

**Quadro 17:** Níveis de codeterminação para o estudo do objeto quadrilátero no ensino brasileiro

	Civilização	Ocidente
--	-------------	----------

<b>Níveis da noosfera</b>	Sociedade	Educação brasileira
	Escola	Anos finais do ensino fundamental
	Pedagogia	Documentos curriculares (BNCC, PCN, PNL D)
<b>Fronteira</b>	Disciplina	Matemática
<b>Níveis de determinação matemática</b>	Domínio	Geometria
	Setor	Geometria Plana
	Tema	Quadrilátero
	Tópico	Conceitos e propriedades sobre quadrilátero: classificação de quadriláteros, ângulos internos de um quadrilátero convexo, base média do trapézio, perímetro e área.

Fonte: Adaptação de Dias, Santos Júnior (2018, p. 541).

Dias e Santos Júnior (2018), apoiados nos estudos de Chevallard, discutem que na maioria das vezes, os professores abordam principalmente os níveis de tópico e tema, negligenciando a identificação desses níveis nos contextos de setor e domínio. Dessa forma, essa preferência metodológica aplicada pode provocar ausência de mobilização por parte dos alunos para resolver os tipos de tarefas que estão nos níveis superiores, ou seja, nos setores e domínios onde estão localizadas as tarefas motivadoras das praxeologias matemáticas.

Essas maneiras de estruturar as praxeologias resultam em um ensino mecânico, ou seja, ensinando um objeto após o outro sem estabelecer conexões entre eles ou contextualizá-los dentro do mesmo campo de estudo (domínio) e com outros campos, como por exemplo, Geometria e Medidas e grandezas. Como exemplo, identificamos diferentes tipos de tarefas em ambas as edições analisadas.

Além disso, referente aos níveis da noosfera (civilização, sociedade, escola e pedagogia) são "considerados como níveis pedagógicos no sentido não matemático [...], incluem restrições que têm forte impacto na matemática escolar e, portanto, devem fazer parte do objeto de estudo da Didática da Matemática" (Gascón, 2011, p. 218). Desse modo, em nossa pesquisa, também foi realizado o estudo do objeto quadrilátero nestes níveis, verificando quais restrições são impostas para sua sobrevivência.

Diante disso, a partir do estudo das dimensões epistemológica e econômica, agrupamos os tipos de tarefas presentes no livro didático associadas ao objeto quadrilátero para identificarmos os objetos de conhecimento correspondentes a cada tipo tarefa.

**Quadro 18:** Tipos de tarefa, objetos de conhecimento e tema referentes ao estudo do objeto quadrilátero nos anos finais do ensino fundamental

TIPOS DE TAREFA	OBJETO DE CONHECIMENTO	TEMA
Indicar os lados, vértices e os ângulos internos do quadrilátero	Elementos dos quadriláteros	Quadrilátero
Classificar os tipos de quadriláteros	Classificação dos quadriláteros	
Determinar a medida do perímetro de um quadrilátero	Medida de perímetro de uma região plana	
Calcular a medida da área de um quadrilátero	Medida de área de uma região plana	
Determinar a medida do ângulo interno de um quadrilátero convexo	Propriedades dos quadriláteros	
Determinar as medidas das diagonais de um quadrilátero		
Determinar a medida de comprimento da base média de um trapézio	Base média de um trapézio	

Fonte: Elaborado pelo autor (março, 2024).

Assim, com base no Quadro 18, elencamos as restrições que identificamos nestes níveis de codeterminação, que incluem:

1) Verificamos que nos PCN-Matemática (Brasil, 1998), não há orientações de forma direta para o objeto quadrilátero, entretanto, aborda-se sobre figuras bidimensionais ou figuras planas sendo exposto de forma mais ampla. Sendo assim, como o quadrilátero é uma figura plana, bidimensional, podemos dizer que as orientações também abrangem esse objeto. Todavia, nos objetos de conhecimento e nas habilidades da BNCC (Brasil, 2018), é apresentado de forma explícita, tratando-se exatamente do objeto quadrilátero especificando aos professores a importância deste.

2) O uso de *softwares* para o ensino e aprendizagem é abordado nos PCN-Matemática de forma direta para a criação de planilhas, gráficos e algumas transformações geométricas, o que se pode compreender, considerando a época da edição e implementação do referido documento. Porém, foi possível identificar em algumas obras de livros didáticos de matemática, na edição do ano 2015, alguns *softwares* que possuem mais opções além destas destacadas nos PCN-Matemática. Diferentemente, na BNCC, o uso de *softwares* é sugerido como uma ferramenta que permite aos alunos a

construir figuras bidimensionais e tridimensionais. Nos livros didáticos de matemática (edição 2018), orientados por este documento, possuem indicação de aplicativos, conforme as possibilidades descritas na BNCC, como o *software* de geometria dinâmica *Geogebra*.

É importante destacar que os saberes podem deixar de existir ou passarem a existir em outras instituições, para isso, consideram-se as mudanças ocorridas na sociedade que interferem nos documentos curriculares. Analogamente, um determinado saber pode existir em um *habitat* e devido as mudanças passar a existir em outro *habitat*, como exemplificado a seguir:

3) Os conceitos de polígonos convexos e não convexos, bem como os polígonos regulares e não regulares, não estão presentes nos PCN-Matemática. Portanto, verifica-se que a coleção de livros da edição de 2015, na obra do 7º ano do Ensino Fundamental inclui a abordagem de polígonos convexos e não convexos e na obra do 8º ano do Ensino Fundamental aborda ambos conceitos. No entanto, na BNCC, essas noções estão presentes e, conseqüentemente, são abordadas explicitamente na coleção de livros de matemática (edição de 2018), especialmente no livro do 6º ano do Ensino Fundamental.

4) O saber polígonos, na edição 2015, vivia do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental, porém na mudança para edição 2018, deixou de viver no 8º ano do Ensino Fundamental, ou seja, na edição mais recente, o estudo de polígonos vive apenas no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental.

5) A abordagem dos ângulos opostos pelo vértice e dos ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal tinha como *habitat* o 8º ano do Ensino Fundamental na edição de 2016. No entanto, na edição de 2018, esse estudo passou a ter como *habitat* o 7º ano do Ensino Fundamental. Na BNCC, é considerado como teorema da proporcionalidade do feixe de retas paralelas, a habilidade que especifica este teorema possui o seguinte código EF07MA23.

Nesse sentido, é importante ressaltar que o saber que passa a existir em um *habitat*, é resultante das interações entre o objeto e a instituição. Nesta situação, é a maneira como os organizadores e elaboradores dos documentos curriculares conectam a relação entre o objeto quadrilátero a outras noções que determina esse saber específico. Nesse sentido, os estudos de (N. Santos, 2021) e (Padilha, 2022) reforçam este pensamento em que o saber é dinâmico e está relacionado diretamente com as influências de seu meio, principalmente das instituições que são regidas por regras e restrições.

De acordo com as três dimensões do problema didático do objeto quadrilátero, construímos nosso MPR (Quadro 19), no qual apresentamos as noções que constituem o objeto quadrilátero, as noções que servem como alimento para o quadrilátero e as noções que possuem o quadrilátero como alimento. É importante destacar que o modelo escolhido para a representação do MPR segue o mesmo padrão utilizado em nosso MED.

**Quadro 19:** MPR do objeto quadrilátero

<p><b>Noções que constituem o objeto quadrilátero</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Quadriláteros: elementos e características;</li> <li>● Paralelogramos: qualquer, retângulo, quadrado e losango;</li> <li>● Trapézios: qualquer, retângulo e isósceles.</li> <li>● Propriedades dos paralelogramos.</li> </ul>
<p><b>Alimento para o quadrilátero</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Ponto, plano e reta;</li> <li>● Regiões planas e contornos;</li> <li>● Polígonos;</li> <li>● Plano cartesiano;</li> <li>● Estudo do ângulo;</li> <li>● Bissetriz de um ângulo.</li> </ul>
<p><b>Quadrilátero como alimento</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Sólidos geométricos: Poliedros</li> <li>● Prismas e pirâmides</li> <li>● Ampliação e redução de figuras planas</li> <li>● Grandeza área: Cálculo de área</li> <li>● Soma dos ângulos internos de polígonos Convexos.</li> </ul>

Fonte: Elaborado pelo autor (março, 2024).

Assim, a finalidade do MPR é caracterizar e analisar praxeologias a ensinar. Com base na construção desse modelo praxeológico referente ao objeto matemático, é possível analisar o funcionamento do sistema didático em sala de aula (praxeologia didática). Uma alternativa para pesquisas futuras.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O campo da Geometria possui um grande destaque no desenvolvimento da humanidade, como também está presente no cotidiano das pessoas. Dessa forma, é fundamental apresentar esse campo relacionado a outros campos da Matemática, como Grandezas e Medidas. Assim, é primordial que os documentos curriculares e os livros didático norteiem as ações pedagógicas que favoreçam estas práticas.

Desse modo, esta pesquisa buscou analisar como o objeto quadrilátero está presente nos documentos oficiais e em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, com base nas três dimensões fundamentais do problema didático apoiadas pela TAD. A partir deste objetivo, foi escolhida uma teoria que auxiliasse na análise que busca identificar onde esse objeto matemático vive, como vive, qual é a função que exerce e como se relaciona com os demais objetos matemáticos. Assim, a Teoria Antropológica do Didático sustentou todas as indagações evocadas, com base na problemática ecológica e em suas três dimensões: epistemológica, econômica e ecológica.

Para a dimensão epistemológica, utilizamos o Modelo Epistemológico de Referência (MER) criado por Cuellar (2021). Para a criação desse modelo, se fez necessário identificar as razões de ser do objeto quadrilátero. Logo, a autora, com base na resolução das questões relacionadas ao objeto, criou um esquema para representação do MER. Na dimensão econômica, analisamos os PCN-Matemática e a BNCC com o intuito de verificar como esse objeto é exposto nestes documentos norteadores. Entretanto, é necessário conhecer como esse documento sobreviveu ou sobrevive nas instituições em que são impostas suas regras.

Dessa forma, elaboramos dois Modelos Epistemológicos Dominantes (MED), sendo um associado ao PCN-Matemática (Brasil, 1998) e outro direcionado à BNCC (Brasil, 2018), para então, identificarmos a presença do objeto quadrilátero nesses documentos norteadores. Situação primordial para analisar os gêneros de tarefas que estão presentes nas orientações de cada documento analisado. Além disso, verificamos que nos PCN-Matemática são expostas situações de aprendizagem para desenvolver o pensamento geométrico, das quais, podemos perceber praxeologias que os professores podem adotar em sala de aula.

Esses documentos norteadores regem o PNLD, que por sua vez, orientam os autores dos livros didáticos com regras e critérios para aprovação da obra. No total, foram analisados sete PNLDs, dentre eles, selecionamos duas obras com o mesmo autor e

editora. Sendo que, uma obra orientada, ainda pela vigência dos PCN – “Projeto Teláris” (edição 2015) e outra pela atual vigência da BNCC – “Teláris-Matemática” (edição 2018). Nessas duas obras, analisamos os gêneros de tarefas, caracterizando o tipo de praxeologia ao qual pertence (pontual, local, regional, global).

Nesse sentido, mesmo sendo edições diferentes, notamos que a organização dos objetos é semelhante, ainda que os documentos norteadores sejam distintos. Apesar de alguns objetos de conhecimento mudar de *habitat*, ou prevalecer em apenas um ano escolar, a organização não se difere. Os gêneros de tarefa que são mais preponderantes em ambas edições analisadas são: calcular e determinar. Embora, outros gêneros tenham aparecido, na tentativa de haver articulação entre os diferentes campos matemáticos nas duas coleções analisadas: Geometria, Grandezas e medidas, Números e operações, Álgebra, Estatística e probabilidade.

O estudo da dimensão ecológica, possibilitou a criação de um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) que busca responder como esse saber vive e sobrevive nas instituições que está vinculado, e quais as restrições e condições. Portanto, esses modelos criados resultam em questionamentos acerca do trabalho do professor de Matemática ao ensinar o objeto quadrilátero. Logo, são necessários outros estudos que busquem observar e caracterizar o sistema didático direcionado ao objeto quadrilátero.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 27, p. 94-108, 2004.
- ALMOULOUD, S. A. Teoria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Unión**, 42, p. 9-32, 2015.
- ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- ARINOS, C. R. M. **Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental**. 2018. 287f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2018.
- ARTAUD, M.; CIRADE, G. *La tad comme milieu pour l'étude de l'activité des institutions didactiques*. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**. v. 11, n. 1, 2021.
- BITTAR, M. A teoria antropológica do didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, v. 25, n. 3, p. 364-387, 27 dez. 2017.
- BITTAR, M; BELLEMAIN, B. M. P. *Une etude sur le developpement de la tad au brasil*. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**. v. 11, n. 1, 2021.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.
- BRASIL. MEC. FNDE. **Histórico**. Gov, 2021. Disponível em: Histórico — Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (www.gov.br). Acesso em: 22/09/2023.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília, 1998.
- CALDATTO, M. E. PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, Vol. XXIV, No 1, 2015.
- CAVALCANTE, Jose Luiz. **A dimensão cognitiva na teoria antropológica do didático**: reflexão teórico-crítica no ensino de probabilidade na licenciatura em matemática. 2018. 482 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018.
- CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, 2019.
- CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: SADDO, A. A.; FARIAS, L. M. S. e HENRIQUES, A. (Org.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos** 1. ed. Curitiba; CRV, 2018..
- CHEVALLARD, Y. *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, França, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

- CHEVALLARD, Y. Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possible. Conférence prononcée le 24 octobre 1985 aux Journées de l'APMEP (Port-Barcarès, 24-26 octobre 1985). Texte paru dans le Bulletin de l'APMEP, 352 (février 1986), pp. 32-50.
- CHEVALLARD, Y. *Organiser l'étude 3. Écologie & régulation*. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Eds.), *Actes de la 11<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques*, p. 41 – 56. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 2002.
- CHEVALLARD, Yves. *La Transposición Didáctica: del saber sábio al saber enseñado*. Argentina: Aique, 1991.
- COLLI, M. D., TORTOLA, E., & ROCHA, Z. de F. D. C. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico**: aprendizagens e contribuições de um curso de formação continuada. *Revista Paranaense De Educação Matemática*, 11(26), p. 518–541, 2022.
- CRUZ, Alanne de Jesus. **Mecanismos atencionais esperados no processo de aprendizagem de alunos surdos em matemática**: uma investigação em livros didáticos do PNLD 2017. 2019. 139 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2019.
- DANTE, L. R. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, p. 83-97, jan./mar. 1996.
- DANTE, L. R. **Projeto Teláris**. 6<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. **Projeto Teláris**. 7<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. **Projeto Teláris**. 8<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. **Projeto Teláris**. 9<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 6<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2018.
- DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 7<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2018.
- DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 8<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2018.
- DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 9<sup>o</sup> ano. Ensino fundamental. Anos finais. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2018.
- DIAS, M. A.; SANTOS JÚNIOR, V. B. dos. Elementos da teoria antropológica do didático para análise das propostas institucionais brasileiras e metodologias de atividades e percursos de estudo e de pesquisa. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (orgs.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1. ed. Curitiba-PR: CRV, 2018, p. 523-549.
- EUCLIDES, H. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

- EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. Geometria. Tradução: Domingues, Higyno. São Paulo: Atual editorial, 1992.
- EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.
- FIGUEIREDO, C. A.; COUTINHO, S. Q. C.; Perspectivas para a educação financeira em um livro didático de matemática no ensino médio. In: **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. A. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores associados, 2006.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2010.
- FONSECA, A. G.; VILELA, D. S. **Livros Didáticos e Apostilas: o currículo de matemática e a dualidade do ensino médio**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 28, n. 49, 2014.
- GARCÍA-CUÉLLAR, D. J. **Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros**. 2021. 200 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.
- GASCÓN, J. *Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T.* (Editor): In: *Actas del III Simposio de la SEIEM, Valladolid*, p. 129-150, 1999.
- GASCÓN, J. *Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: el caso del álgebra elemental*. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa** Cidade do México, v. 14, n. 2, p. 203-231, 2011.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- JOSEFSSON, M. *Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals*. **Forum Geometricorum**, 12 (1), p. 13 – 25, 2012.
- JOSEFSSON, M. *Properties of Equidiagonal Quadrilaterals*. **Forum Geometricorum**, 14 (1), p. 129 – 144, 2014.
- KASPARY, D.; BITTAR, M. A redução ostensiva no estudo das operações de adição e de subtração em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 2, p. 3-16, 2014.
- KONZEN, S. ET AL. O campo de geometria no Brasil: do Brasil colônia ao período do regime militar. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**. Santa Catarina, 2017.
- LEGENDRE, A. **Elementos de geometria**. Tradução de Ferreira de Araujo, Nanoel, Rio de Janeiro: S.A.R., 1809.
- LEITE, Miriam Soares. **Recontextualização e transposição didática: introdução à leitura de Basil Bernstein e Yves Chevallard**. Araraquara, SP: Junqueira & Marin, 2007.

- LOPES, Alice Ribeiro Casimiro. **Conhecimento escolar: ciência e cotidiano**. Rio de Janeiro: EdUERJ, 1999.
- LORENZATO, S. **Formação continuada de professores de matemática: desafios e perspectivas**. Campinas, SP: Papyrus, 2006.
- OLIVEIRA, Bianca Freitas de. **A noção de ecologia do saber: um estudo sobre o objeto triângulo em documentos oficiais e em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. 2023. 121 f. . Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2023.
- PADILHA, Valéria de Jesus. **Uma análise praxeológica sobre a presença de sólidos geométricos em provas do ENEM de 2017-2020**. 2022. 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2022.
- PASTOR, R.; ADAM, P. **Elementos de geometria**. Madrid: *Colección elemental intuitiva*, 1959.
- POGORÉLOV, A.V. **Geometría elemental**. Editorial MIR, 1974.
- ROSA, M. C.; SOUZA, D. S.; SANTOS, N. M. S. Formação continuada de professores de matemática e o ensino de geometria: um panorama das pesquisas dos últimos anos. In: **Revista Educação Matemática em Pesquisa**. São Paulo, v. 22, n. 2, p. 635-657, 2020.
- SANTOS, C. F. M.; SOUZA, S. D. As praxeologias do estudo sobre triângulos no livro didático “Tudo é Matemática”. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**. v. 2, n. 1, 2014.
- SANTOS, Luciene dos. **Uso dos objetos ostensivos e não ostensivos para o ensino do princípio aditivo voltado ao(à) aluno(a) com deficiência visual dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2021. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2021.
- SANTOS, Nailys Melo Sena. **Praxeologia para ensinar sólidos geométricos: o caso de uma bolsista residente do curso Licenciatura em Matemática da UFS**. 2021. 143 fls. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE: UFS, 2021.
- SANTOS, S. T. M.; SOUZA, S. D. Estudo dos triângulos sob a perspectiva da teoria antropológica do didático: uma análise do livro didático “A Conquista da Matemática”. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 2, n. 1, 2014.
- SILVA, Narinha Mylena Rocha da. **A mobilização para aprender a ensinar matemática e desenvolver o universo cognitivo de pibidianos da UFS: uma análise a partir das relações propostas na TAD**. 2022. 179 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2022.
- SANTOS, E. de J. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: uma renovação do ensino de matemática nas décadas de 1960 a 1980**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 370–379, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2846. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2846>. Acesso em: 16 dez. 2023.
- SILVA, O. J.; JESUS, B. G. Polígono: uma linha ou uma região? **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 3, p. 120-144, 2018.

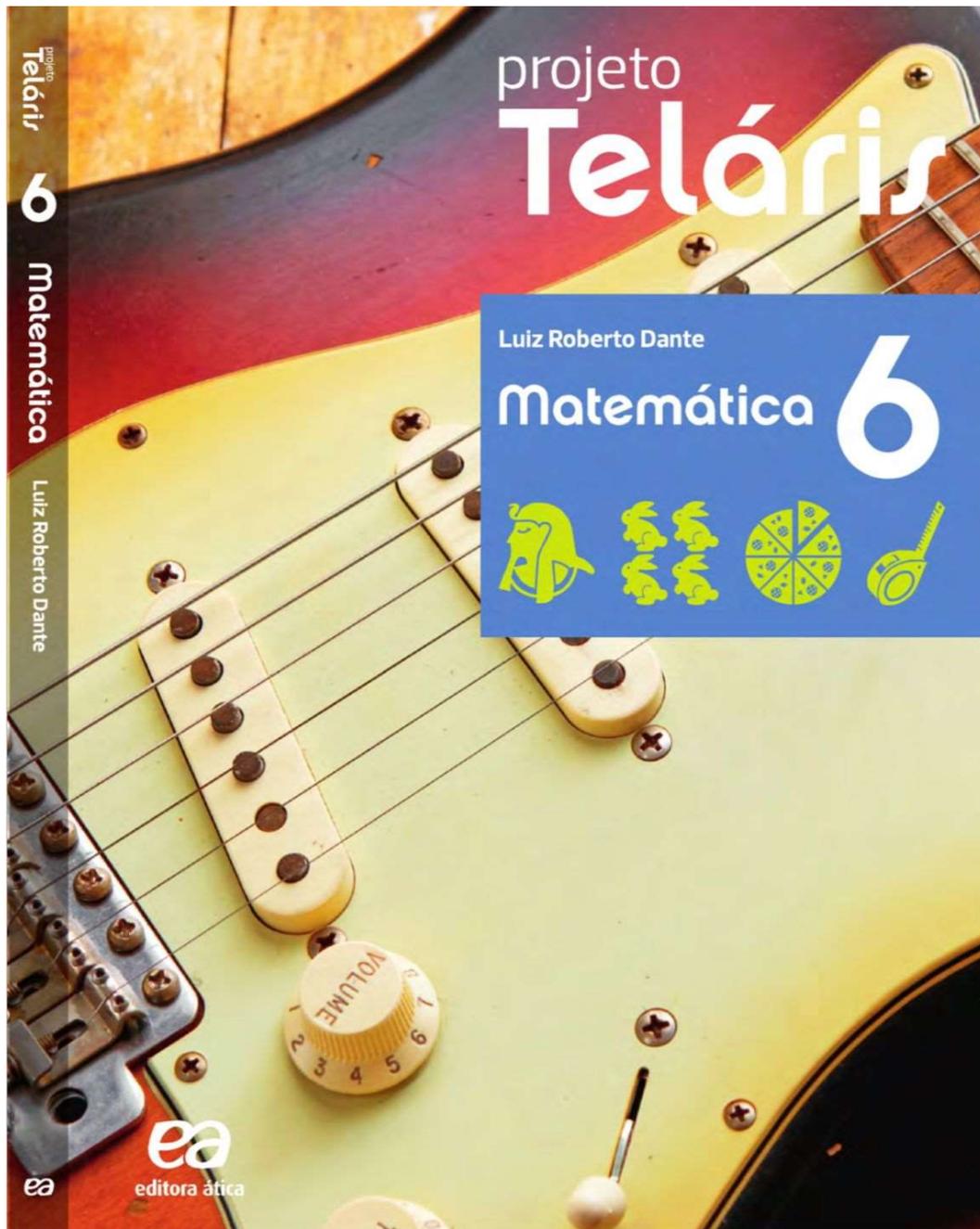
SOUZA, D. S. Problemática do ensino de geometria: desafios, possibilidades e experiências. V. 11, n. 3 (2021): Tecnologias, educação e ensino de ciências e matemática: interfaces e nuances para ensinar e aprender. **Caminhos da educação matemática em revista.** (online)/IFS, v, 11, n. 3, ISSN 2358-4750.7.

SOUZA, S. A. V.; SOUZA, S. D. Estudo sobre circunferência e círculo no livro didático “A Conquista da Matemática”, sob a perspectiva da teoria antropológica do didático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista.** v. 2, n. 1, 2014.

USISKIN, Z.; GRITFFIN, J. *The classification of quadrilaterals: a study of definition.* USA: Information Age Publishing, INC, 2008.

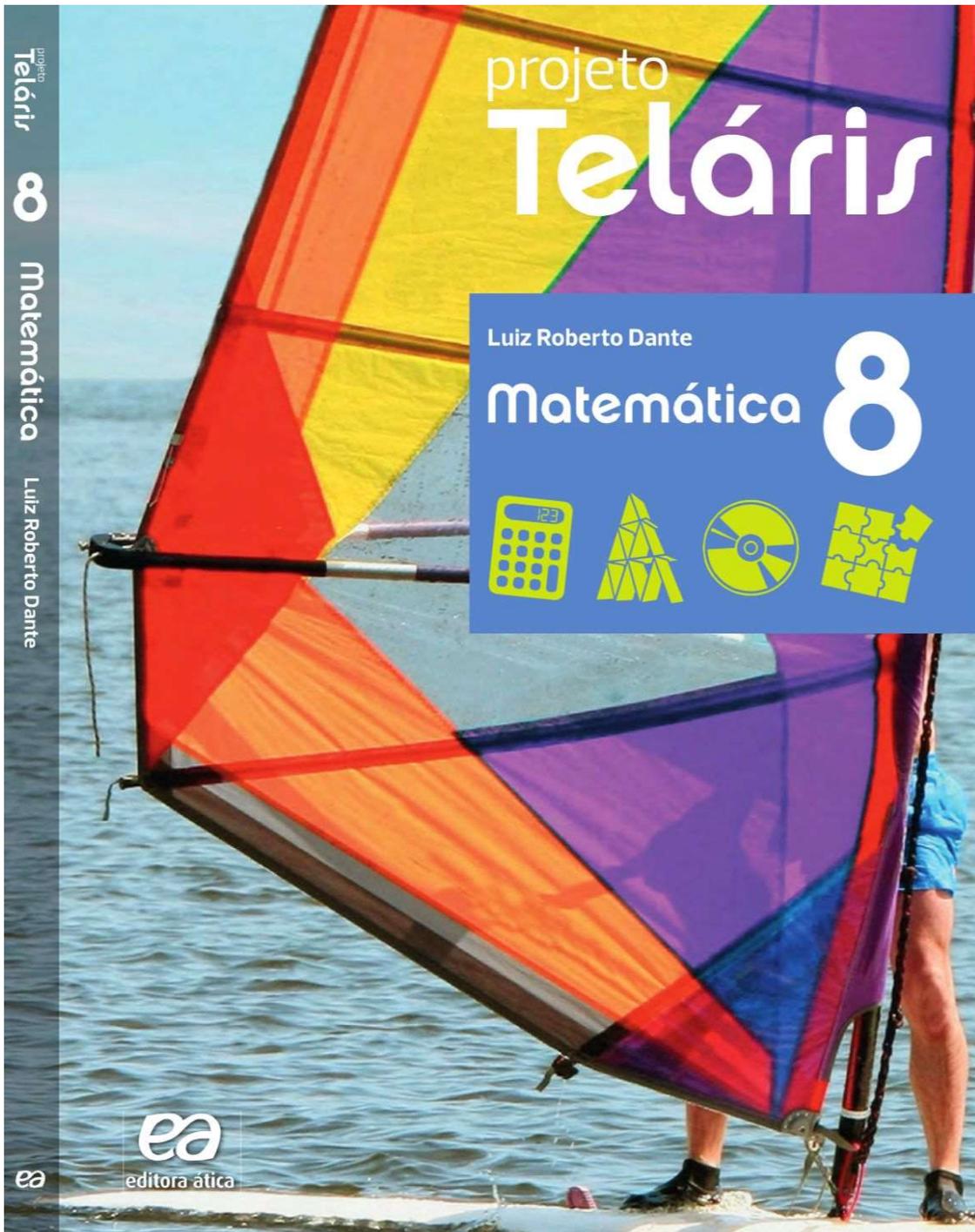
# **ANEXOS**

ANEXO 1

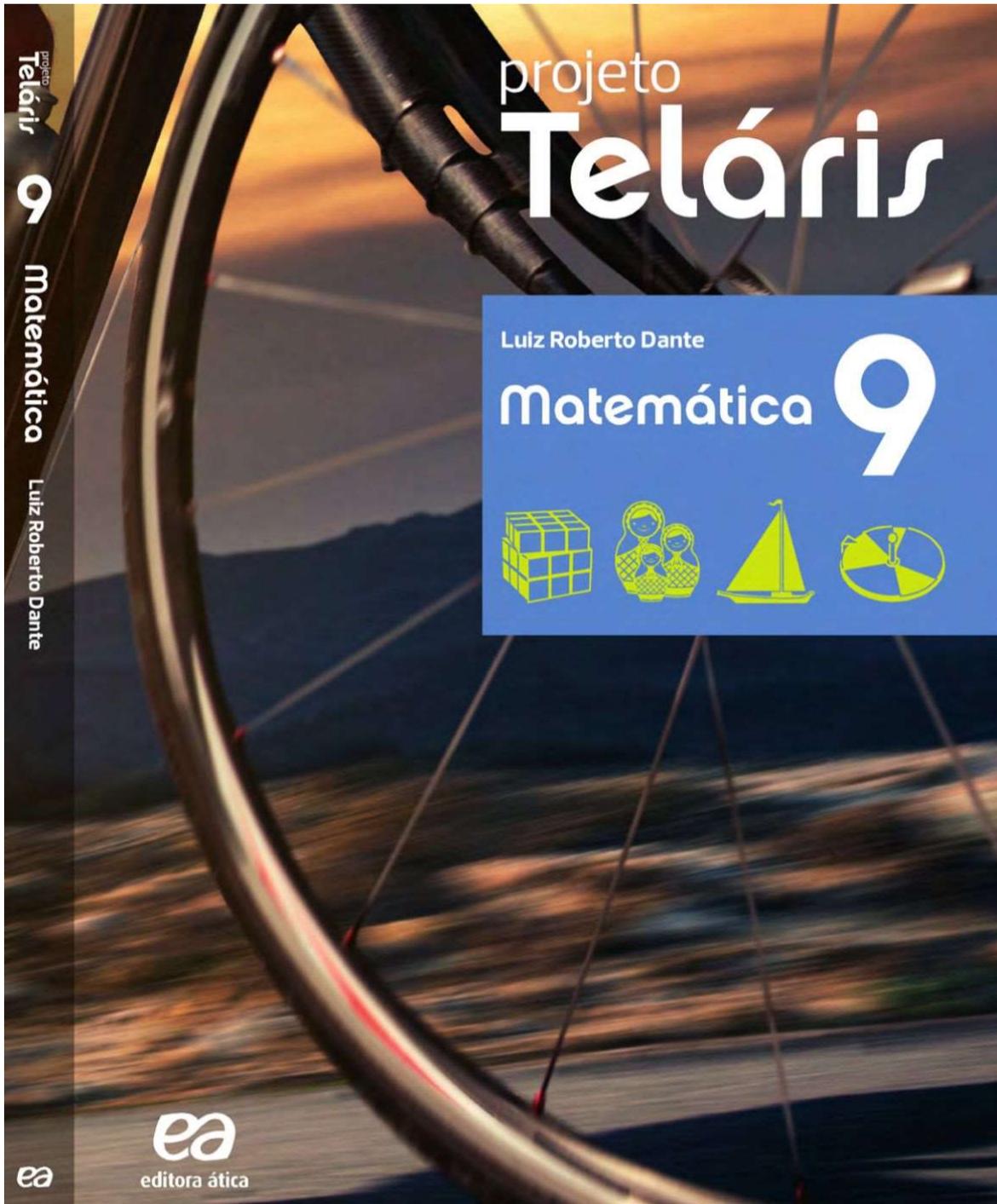




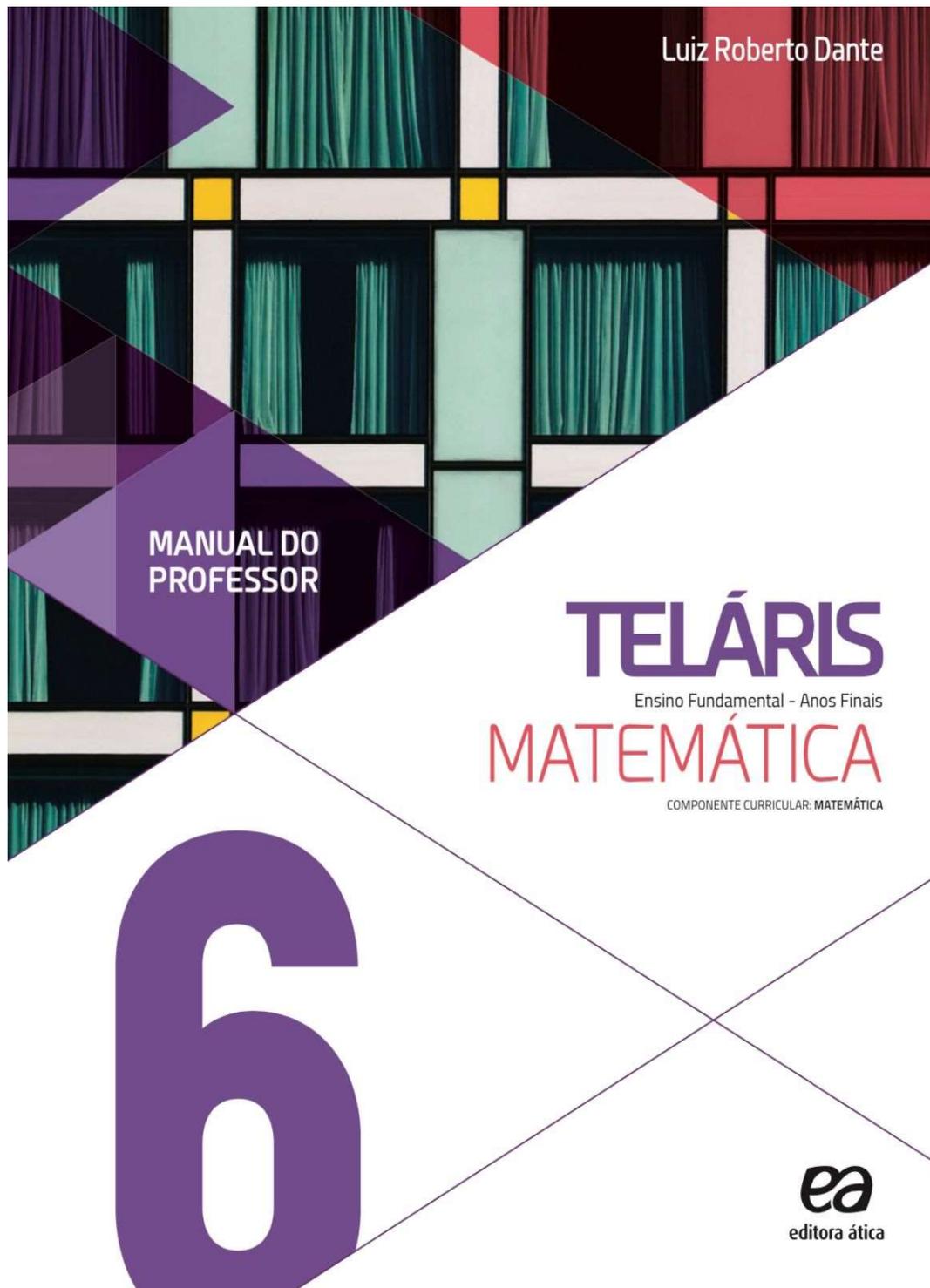
ANEXO 3



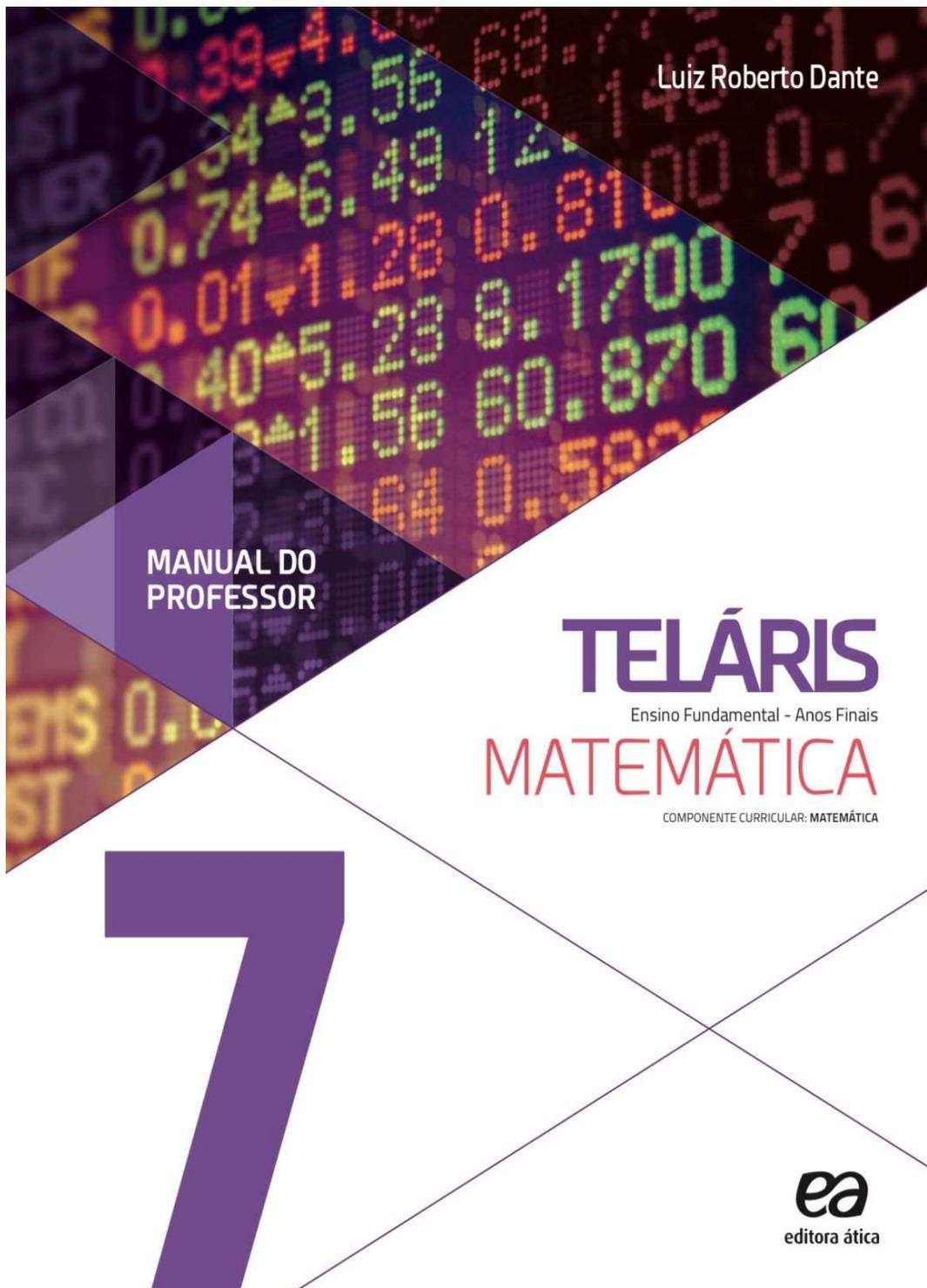
ANEXO 4



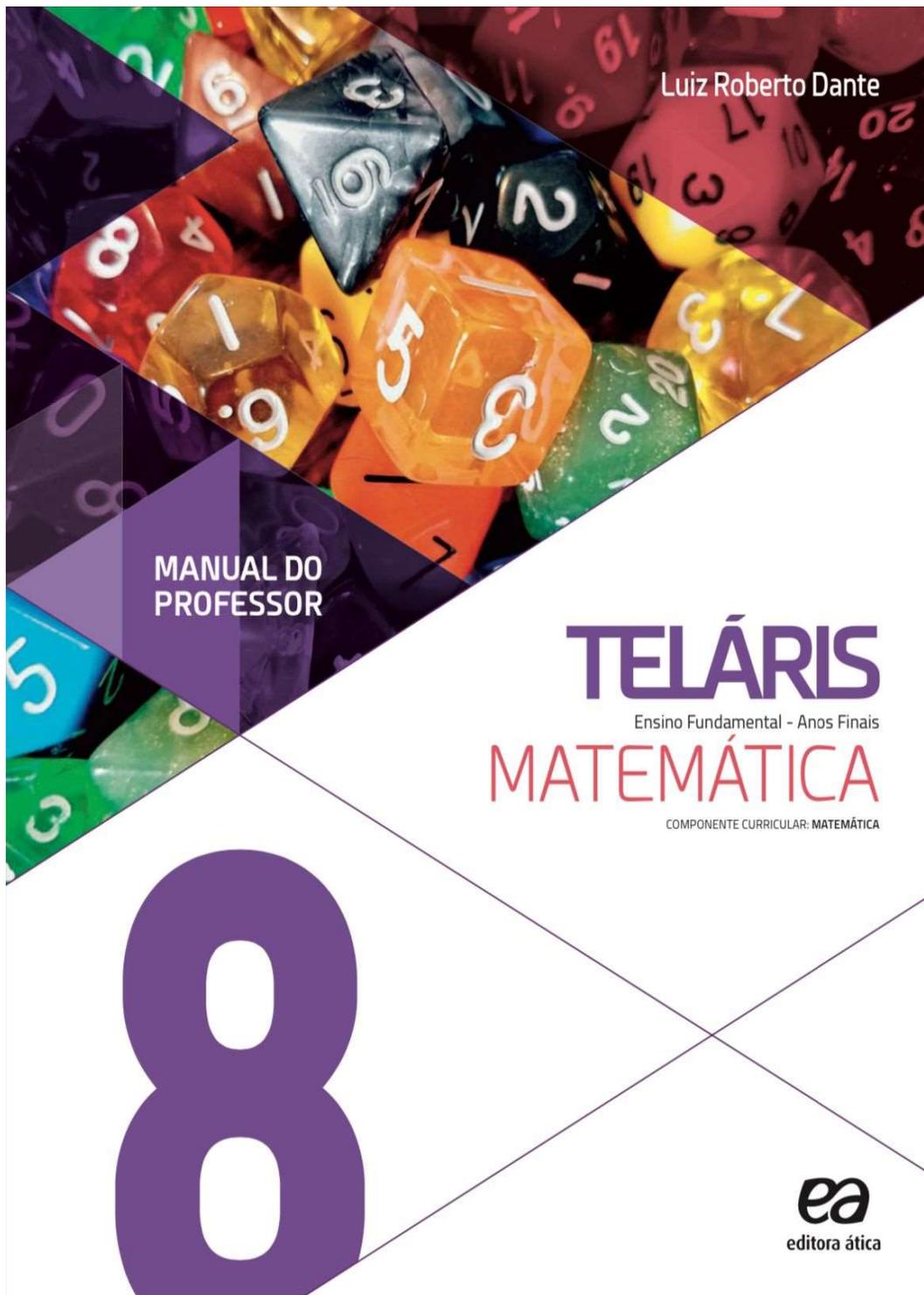
## ANEXO 5



## ANEXO 6



ANEXO 7



Luiz Roberto Dante

MANUAL DO  
PROFESSOR

**TELÁRIS**  
Ensino Fundamental - Anos Finais  
**MATEMÁTICA**  
COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA

8

**ea**  
editora ática

ANEXO 8

