



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sobre equações diferenciais parabólicas semilineares

FABÍOLA SILVA DE TEIVE E ARGOLO

PROFESSORA DRA. GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA
ORIENTADORA

São Cristóvão-SE, 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Sobre equações diferenciais parabólicas semilineares

por

FABÍOLA SILVA DE TEIVE E ARGOLO

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

PROFESSORA DRA. GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA
ORIENTADORA

São Cristóvão-SE
2021

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

A693s Argolo, Fabíola Silva de Teive e
Sobre equações diferenciais parabólicas semilineares / Fabíola
Silva de Teive e Argolo ; orientador Giovana Siracusa Gouveia. –
São Cristóvão, 2021.
106 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2021.

1. Equações diferenciais parabólicas. 2. Cauchy, Problemas
de. I. Gouveia, Giovana Siracusa orient. II. Título.

CDU 517.93



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

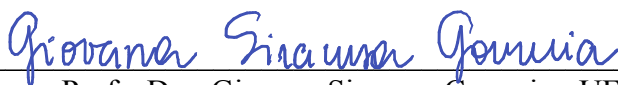
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Sobre equações diferenciais parabólicas semilineares

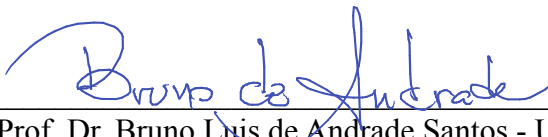
por

Fabíola Silva de Teive e Argolo

Aprovada pela banca examinadora:



Prof. Dra. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Orientadora



Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Agosto de 2021

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e sabedoria.

Ao meu companheiro Juan Pablo, por todo o apoio, compreensão e parceria em todos momentos. E por sempre acreditar em mim, até mesmo quando eu desacreditei, e estar sempre me incentivando a persistir nos meus sonhos.

Aos meus familiares.

Aos meus professores e colegas da pós-graduação, por todas as trocas de experiências.

Aos membros da banca avaliadora, Prof^o Dr. Bruno de Andrade e Prof^o Dr. Flank Bezerra, por terem aceito avaliar o meu trabalho.

A minha orientadora Prof^a. Dr^a Giovana Siracusa Gouveia, por ter me orientado nesse trabalho, e por toda a paciência e palavras de otimismo, e por acreditar em mim.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos existência, unicidade e dependência contínua de soluções de uma classe de equações diferenciais parabólicas semilineares. A abordagem utilizada foi teoria de semigrupos, operadores setoriais e potência fracionária de operadores.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parabólicas; Operadores Setoriais; Potência Fracionária de Operadores

Abstract

In this work, we study the existence, uniqueness and continuous dependence of solutions for a class of semilinear parabolic differential equations. The approach used was semigroup theory, sectorial operators and fractional power of operators.

Keywords: Parabolic Differential Equations; Sectorial Operators; Fractional Power Operators

Sumário

1	Preliminares	3
1.1	Semigrupos Uniformemente Contínuos de Operadores Lineares Limitados	3
1.2	Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados	10
1.3	O Teorema de Hille-Yosida	19
1.4	O Teorema de Lumer Phillips	33
1.5	Caracterização dos geradores infinitesimais de C_0 semigrupos	40
1.6	A transformada inversa de Laplace e a fórmula exponencial	46
1.7	Potências Fracionárias de Operadores	49
2	Existência, unicidade e dependência contínua da equação abstrata	77
2.1	Problema Linear de Cauchy	77
2.2	Existência local e unicidade do problema não linear	81
2.3	Dependência contínua e diferenciável de soluções	88
2.4	Ação de suavidade da equação diferencial	91
3	Aplicações	94
3.1	Exemplos	94
3.1.1	Equação do calor	94

3.1.2	Fluxo de elétrons e buracos em um semicondutor	95
3.1.3	Reações químicas em um pellet de catalisador	95
3.1.4	População genética	96
3.1.5	Dinâmica do reator nuclear	96
3.1.6	Navier-Stokes e equações relacionadas	97
3.2	Equação do calor não-linear	98
3.3	Outra não linearidade	100
3.4	A equação de Navier-Stokes	101
4	Apêndice	104
	Referências Bibliográficas	106

Introdução

O estudo de equações diferenciais é de grande importância, visto que essas equações são ferramentas para a modelagem de diversos tipos de problemas na matemática, física, química, biologia, entre outros. Muitos fenômenos físicos podem ser descritos por equações diferenciais parciais.

Este trabalho teve como foco as equações diferenciais do tipo parabólicas semilineares. Trabalhamos com problemas que variam com o tempo, como por exemplo a equação do calor. O objetivo é trazer uma abordagem teórica de semigrupos de operadores lineares, operadores setoriais, potências fracionárias e aplicá-la em problemas com equações diferenciais parabólicas.

Estudamos problemas de existência e unicidade de solução para equações abstratas da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

onde X é um espaço de Banach, $A : D(A) : X \rightarrow X$ é um operador setorial, f é uma função não linear, $x_0 \in X$ é um dado inicial e $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função desconhecida com $t_0 \in I$. A abordagem desse problema será via Teoria dos Semigrupos de Operadores Lineares. A seguir, apresentamos a estrutura da dissertação.

No Capítulo 1, estudamos conteúdos preliminares que compõem toda a base teórica desse trabalho, são eles, teoria de semigrupos de operadores lineares e potências fracionárias. Neste capítulo trabalhamos com caracterização dos geradores de semigrupos lineares, vimos o Teorema de Hille-Yosida e o Teorema de Lumer-Phillips, os quais nos permite caracterizar o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração. No Capítulo 2, apresentamos o problema do valor inicial e resultados envolvendo existência, unicidade e dependência contínua da solução. Já no Capítulo 3, expomos vários exemplos de aplicações das equações diferenciais parabólicas e também aplicamos a teoria vista nos Capítulos 1 e 2 em problemas específicos envolvendo equações diferenciais parabólicas,

dentre elas a equação do calor e a equação de Navier-Stokes.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo serão abordados definições e resultados de conteúdos que servirão como base para o nosso trabalho.

1.1 Semigrupos Uniformemente Contínuos de Operadores Lineares Limitados

Essa primeira seção será dedicada ao estudo sobre Semigrupos de Operadores Lineares limitados.

Definição 1.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

- (i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade de X);
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 1.2. *Um semigrupo de operadores lineares limitados, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Chamamos de gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, ao operador A definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0},$$

com domínio definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Observação 1.1. Da Definição 1.2, segue que se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares, então

$$\lim_{t \rightarrow s} \|T(t) - T(s)\| = 0.$$

De fato, considere $t \geq s$, então existe $u \geq 0$ tal que $t = s + u$. Assim,

$$\begin{aligned} \|T(t) - T(s)\| &= \|T(s + u) - T(s)\| \\ &= \|T(s)T(u) - T(s)\| \\ &= \|T(s)(T(u) - I)\| \\ &\leq K\|T(u) - I\|, \end{aligned}$$

onde K é uma constante. Fazendo $t = s + u \rightarrow s \Rightarrow u \rightarrow 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow s} \|T(t) - T(s)\| \leq K \lim_{u \rightarrow 0} \|T(u) - I\| = 0.$$

□

Teorema 1.1. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja A um operador linear limitado em X , vamos mostrar que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Considere

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

e A um operador linear limitado.

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ é convergente, para todo $t \geq 0$. De fato, como $A \in \mathcal{L}(X)$, da desigualdade

$$\frac{(\|tA\|)^n}{n!} \leq \frac{(\|t\|\|A\|)^n}{n!}, \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots,$$

segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\|t\|\|A\|)^n}{n!}$ converge. Pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge,

e como $\mathcal{L}(X)$ é de Banach, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ é convergente. Logo, $T(t) = e^{tA}$ está bem definido para todo $t \geq 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n A^n\|}{n!} \\ &\leq e^{|t| \|A\|}. \end{aligned}$$

O que garante que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ define um operador linear limitado $T(t)$, para todo t . Além disso, note que

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

é um semigrupo de operadores lineares. De fato,

(i) $T(0) = e^{0A} = I + 0A + \frac{0^2 A^2}{2!} + \dots = I$

(ii) Para $s, t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} T(t)T(s) = e^{tA}e^{sA} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \frac{(sA)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \frac{(tA)^l}{l!} \frac{(sA)^{n-l}}{(n-l)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} t^l s^{n-l} A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n \\ &= e^{(t+s)A} \\ &= T(t+s). \end{aligned}$$

Portanto, $T(t) = e^{tA}$ é um semigrupo de operadores lineares.

Como $T(t)$ é limitado, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ converge uniformemente. De fato, por hipótese temos que $A \in \mathcal{L}(X)$, $t \leq 0$, e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^n}{n!}$ é uma série convergente de números reais com

$$\frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} \geq 0 \text{ e } \frac{\|t^n A^n\|}{n!} \leq \frac{(|t| \|A\|)^n}{n!} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } t \geq 0.$$

Assim, pelo Teste de Weierstrass,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n A^n\|}{n!} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

são uniformemente convergentes.

Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ é uniformemente convergente.

Afirmamos que $T(t) = e^{tA}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. De fato, seja

$$\begin{aligned} S_k(t) &= \sum_{n=1}^k \left\| \frac{t^n A^n}{(n-1)!} \right\| = \sum_{n=1}^k \frac{\|t^{n-1} A A^{n-1}\|}{(n-1)!} \\ &\leq \|A\| \sum_{n=1}^k \frac{(|t| \|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \|A\| \sum_{n=0}^k \frac{(|t| \|A\|)^n}{n!} \\ &\leq \|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^n}{n!} \\ &= \|A\| e^{|t| \|A\|}. \end{aligned}$$

Daí, segue que,

$$\begin{aligned} \|e^{tA} - I\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq |t| \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= |t| \|A\| e^{|t| \|A\|}. \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\|e^{tA} - I\| \leq |t| \|A\| e^{|t| \|A\|}.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{tA} - I\| \rightarrow 0.$$

Logo, $T(t) = e^{tA}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X .

Além disso, note que

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(tA)^n\|^n}{n!} - I - A \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{I + \frac{tA}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I}{t} - A \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\
&\leq tA^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|tA\|^2}{n!} \\
&\leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\| \|e^{tA} - I\| = \|A\| \|T(t) - I\|,$$

o que implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Logo, temos que A é o operador infinitesimal do semigrupo $T(t) = e^{tA}$.

($\Rightarrow$) Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, vamos mostrar que A é um operador linear limitado.

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X . Então temos que $\|T(t) - I\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Disso, segue que existe $\rho > 0$ (suficientemente pequeno) tal que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) dt - I \right\| \leq \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \|T(t) - I\| dt < 1.$$

Pelo Teorema 4.4 (ver Teorema 3.1, pag 35, de [11]), temos que o operador $\left[I - \left(I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) dt \right) \right]$ é invertível. Ou seja, $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) dt \in \mathcal{L}(X)$ é invertível, e portanto o operador $\int_0^\rho T(t) dt$ também o é.

Dado $h > 0$,

$$\frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^\rho T(t+h) dt - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(t) dt,$$

fazendo a mudança de variável $s = t + h$ na primeira integral do lado direito da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(t) dt &= \frac{1}{h} \int_h^{\rho+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s) ds \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^{\rho+h} T(t) dt - \int_0^h T(t) dt \right] - \frac{1}{h} \left[\int_0^{\rho+h} T(t) dt - \int_\rho^{\rho+h} T(t) dt \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} T(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h T(t) dt$$

Então,

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left[\frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} T(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h T(t) dt \right] \cdot \left[\int_0^{\rho} T(t) dt \right]^{-1}.$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$, temos

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^{\rho} T(t) dt \right)^{-1}.$$

Portanto, $A \in \mathcal{L}(X)$.

□

Da Definição 1.1, está claro que um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tem um único gerador infinitesimal. Por outro lado, todo operador linear limitado A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Uma questão que surge é se tal semigrupo é único.

A resposta é afirmativa, e será provada no Teorema a seguir.

Teorema 1.2. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t}, \quad (1.1)$$

então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Vamos mostrar que dado $T > 0$, $S(t) = T(t)$ para $0 \leq t \leq T$.

Como as aplicações $t \mapsto \|T(t)\|$ e $t \mapsto \|S(t)\|$ são contínuas, existe uma constante C tal que

$$\|T(t)\| \|S(s)\| \leq C, \text{ para } 0 \leq s \text{ e } t \leq T.$$

Dado $\varepsilon > 0$, segue de 1.1 que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{h} \|T(h) - S(h)\| \leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| + \left\| \frac{S(h) - I}{h} - A \right\| < \frac{\varepsilon}{TC} \text{ para } 0 \leq h \leq \delta. \quad (1.2)$$

Seja $0 \leq t \leq T$ e escolha $n \geq 1$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Pela propriedade do semigrupo e por 1.2, segue que

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n \frac{t}{n}\right) - S\left(n \frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq Cn \frac{\varepsilon}{TC} \frac{T}{n} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Como tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que $T(t) = S(t)$ para $0 \leq t \leq T$.

□

Corolário 1.3. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então*

- (a) *Existe uma constante $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$;*
- (b) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$;*
- (c) *O operador A do item (b) é o gerador infinitesimal de $T(t)$;*
- (d) *$t \mapsto T(t)$ é diferenciável na norma e $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$.*

Demonstração: (a) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|T(t) - I\| \leq \varepsilon, \text{ para todo } t, \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta,$$

e como

$$\|T(t)\| - \|I\| \leq \|T(t) - I\|,$$

tem-se

$$\|T(t)\| \leq 1 + \varepsilon = K, \text{ para todo } t, \text{ tal que } 0 \leq t < \delta.$$

Além disso, para cada $t \geq 0$, existe um inteiro não negativo n , tal que $t = n\delta + r$, onde $0 \leq r < \delta$.

Daí, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\delta + r)\| \\ &= \|T(\delta)^n T(r)\| \\ &\leq \|T(\delta)^n\| \|T(r)\| \\ &\leq K^{n+1} \\ &\leq KK^{\frac{1}{\delta}} \\ &= Ke^{wt}, \end{aligned}$$

onde $W = \delta^{-1} \ln K > 0$.

(b) Note que o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um operador linear limitado A , que também

é o gerador infinitesimal de e^{tA} definido por $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$. Portanto, pelo Teorema 1.2 , segue que

$$T(t) = e^{tA}.$$

(c) Segue da demonstração do item (b).

(d) Seja $t > 0$ fixado. Para todo $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} T(t) \\ &= AT(t) \\ &= T(t)A. \end{aligned}$$

□

1.2 Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados

Definição 1.3. Um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X,$$

isto é,

$$\|T(t)x - x\|_X \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X é chamado de semigrupo de classe C_0 , ou simplesmente um C_0 -semigrupo.

Teorema 1.4. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt},$$

para $0 \leq t < \infty$.

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $0 \leq t \leq \delta$. Isto é, que

$$\|T(t)\| \leq M, \text{ para todo } t \in [0, \delta], \text{ com } M \geq 1.$$

De fato, vamos supor que $\|T(t)\|$ seja ilimitado para todo $\delta > 0$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{t_n\} < \frac{1}{n}$ tal que $\|T(t_n)\| \geq n$. Daí, pelo Teorema da Limitação Uniforme *, segue que existe $x \in X$ tal que $\|T(t_n)x\| \geq n\|x\|$. Isto é, $\|T(t_n)x\|$ é ilimitado. Mas isso contradiz a continuidade forte de $T(t)$ em $t = 0$. Portanto, existe número real M tal que $\|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \delta]$ e como $\|T(0)\| = 1$, temos que $M \geq 1$.

Além disso, dado $t > 0$, temos $t = n\delta + r$, para algum inteiro não negativo n , e algum número real r tal que $0 \leq r < \delta$.

Se considerarmos $w = \delta^{-1} \ln M \geq 0$, então $e^{wt} = M^{\frac{t}{\delta}}$, para todo $t \geq 0$.

Portanto, pela propriedade de semigrupo, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\delta + r)\| \\ &= \|T(\delta)^n T(r)\| \\ &\leq \|T(\delta)\|^n \|T(r)\| \\ &\leq M^{n+1} \\ &= MM^n \\ &\leq MM^{\frac{1}{\delta}} \\ &= Me^{wt}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 1.5. Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então para todo $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é uma função contínua de $\mathbb{R}^+$ em X .

Demonstração: Para cada $x \in X$, defina a função

$$\begin{aligned} f: [0, \infty) &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto f(t) = T(t)x \end{aligned}$$

Vamos mostrar que f é contínua. Para isso, considere $t \geq 0$ e $h \geq 0$, com $t \geq h$. Dessa forma, tem-se

$$\|f(t+h) - f(t)\| = \|T(t+h)x - T(t)x\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\
&= \|T(t)(T(h)x - x)\| \\
&\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq Me^{wt} \|T(h)x - x\|.$$

Segue que $\|f(t+h) - f(t)\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0^+$. O que mostra a continuidade à direita de t . Para a continuidade à esquerda, sejam $t > 0$ e $h > 0$

$$\begin{aligned}
\|f(t) - f(t-h)\| &= \|T(t)x - T(t-h)x\| \\
&= \|T(t+h-h)x - T(t-h)x\| \\
&= \|T(h)T(t-h)x - T(t-h)x\| \\
&= \|T(t-h)\| \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{w(t-h)} \|T(h)x - x\|.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|f(t) - f(t-h)\| &\leq Me^{w(t-h)} \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\|.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\|f(t) - f(t-h)\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0^+.$$

Portanto, temos que f é contínua.

□

O seguinte resultado é muito importante para cálculos que envolvam semigrupo.

Teorema 1.6. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então*

$$(a) \text{ Para } x \in X, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x;$$

$$(b) \text{ Para } x \in X, \int_0^t T(s)x ds \in D(A) \text{ e}$$

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x;$$

(c) Para $x \in D(A)$, $T(x)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

$$(d) \text{ Para } x \in D(A), T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Demonstração: (a) Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, segue que existe $\tau \in [t, t+h]$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} T(\tau)x h ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} T(\tau)x, \quad \tau \in [t, t+h] \\ &= T(t)x. \end{aligned}$$

(b) Seja $x \in X$ e $h > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h)T(s)x - T(s)x) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h+s)x - T(s)x) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds. \end{aligned}$$

Aplicando o limite com $h \rightarrow 0^+$ em ambos os lados da igualdade acima, e utilizando o (a), temos

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x,$$

como queríamos provar.

(c) Seja $x \in D(A)$ e $h > 0$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} T(t)x &= \frac{T(h)T(t)x - T(0)T(t)x}{h} \\ &= T(t) \left(\frac{T(h) + T(0)}{h} \right) x \rightarrow T(t)Ax, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(t)x \in D(A) \text{ e } \frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Resta mostrar que para $t > 0$, a derivada à esquerda de $T(t)x$ existe e é igual a $T(t)Ax$.

De fato, $z \leq h \leq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0^+} (T(t-h)Ax - T(t)Ax) = 0. \end{aligned}$$

Note que o primeiro termo do lado direito da igualdade acima é zero, pois $x \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|$ é limitado para $0 \leq h \leq t$, e o segundo termo é zero pela continuidade de $T(t)$.

(d) Integrando a derivada no item (c) de s a t , segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} \int_s^t \frac{d}{dt} T(\tau)x d\tau &= \int_s^t AT(\tau)x d\tau \\ &= \int_s^t T(\tau)Ax d\tau. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} T(t)x - T(s)x &= \int_s^t AT(\tau)x d\tau \\ &= \int_s^t T(\tau)Ax d\tau. \end{aligned}$$

□

Observação 1.2. *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dito fechado, se para cada sequência $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ em $D(A)$ que converge para um ponto $x \in X$ tal que $Ax_n \rightarrow y \in X$, tem-se que:*

$$x \in D(A) \text{ e } Ax = y.$$

Corolário 1.7. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então $D(A)$, o domínio de A , é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Para cada $x \in X$, considere

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds.$$

Do item (b) do Teorema 1.6, temos que $x_t \in D(A)$, para todo $t > 0$, e pelo item (a) do mesmo Teorema, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = T(0)x = x.$$

Portanto, $x_t \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0$. Assim, temos que $\overline{D(A)} = X$. Isto é, $D(A)$ é denso em X .

Mostremos então que A é um operador fechado. De fato, tome $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$.

Do item (d) do Teorema 1.6, temos que

$$T(t)x_n - T(0)x_n = \left(\int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau \right), \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Note que

$$T(\tau)Ax_n \rightarrow T(\tau)y, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em 1.3, temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)y d\tau.$$

E pelo item (a) do Teorema 1.6, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y d\tau = T(0)y = y.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = yAx = y.$$

Logo, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. O que mostra que A é fechado.

□

Teorema 1.8. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

Demonstração: Seja $x \in D(A) = D(B)$. Pelo item (c) do Teorema 1.6, segue que a função

$$s \mapsto T(t-s)S(s)x$$

é diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x - T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante e em particular, isto é,

$$T(t)S(0)x = T(0)S(t)x.$$

O que implica que

$$T(t)x = S(t)x, \text{ para todo } x \in D(A), \quad t \geq 0.$$

Como $D(A)$ é denso em X , implica que para todo $x \in X$, existe $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Queremos mostrar que $T(t)x = S(t)x$, para todo $x \in X$.

Note que $T(t)x_n - S(t)x_n = 0$, pois $x_n \in D(A)$. Daí, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T(t)x_n - S(t)x_n) = 0.$$

O que implica que $T(t)x - S(t)x = 0$. E portanto, temos

$$T(t)x = S(t)x, \text{ para todo } x \in X.$$

□

Teorema 1.9. *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n , então $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .*

Demonstração: Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as funções C^∞ de valores complexos em $(0, \infty)$ de suporte compacto. Para $x \in X$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, considere

$$y = x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x \, ds.$$

Se $h > 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} y &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x - T(s)x] \, ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{h} [\varphi(s-h) - \varphi(s)]T(s)x \, ds. \end{aligned}$$

O integrando do lado direito da igualdade acima converge uniformemente para $-\varphi'(s)T(s)x$ em $[0, \infty)$ quando $h \rightarrow 0$. Portanto $y \in D(A)$ e

$$Ay = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} y = - \int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x \, ds.$$

Observe que, se $\varphi \in \mathcal{D}$ então $\varphi^{(n)}$, a n -ésima derivada de φ , também pertence a $\mathcal{D}$, para $n = 1, 2, \dots$. Daí, repetindo o procedimento anterior, temos que $y \in D(A^n)$.

$$A^n y = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)x \, ds, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

e conseqüentemente $y \in \cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.

Seja Y um espaço gerado por $\{x(\varphi); x \in X, \varphi \in \mathcal{D}\}$. Dessa forma, Y é uma variedade linear. E pelo que provamos até agora, segue que $Y \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.

Para concluir a prova, vamos mostrar que Y é denso em X . Suponha que Y não seja denso em X , então pelo Corolário 1.8 de [3], existe um funcional $x^* \in X^*$, com $x^* \neq 0$ tal que $x^*(y) = 0$, para todo $y \in Y$. Portanto,

$$\int_0^\infty \varphi(s) x^*(T(s)x) ds = x^* \left(\int_0^\infty \varphi(s) T(s)x ds \right) = 0, \quad \forall x \in X, \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1.4)$$

Isso implica que a função contínua $s \mapsto x^*(T(s)x)$ deve ser identicamente nula em $[0, \infty)$, pois caso contrário, seria possível escolher $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que o lado esquerdo de 1.4 não se anulasse. Portanto, em particular para $s = 0$, $x^*(x) = 0$. Isso segue para todo $x \in X$ e portanto teríamos $x^* = 0$, contrariando a hipótese de x^* . Portanto, temos que Y é denso em $\cap_{n=1}^\infty D(A^n)$.

□

Lema 1.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$. Se $x \in D(A^2)$, então*

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2x\| \|x\|.$$

Demonstração: Ver Lema 2.8 de [10].

□

Exemplo 1.1. *Seja X o espaço de Banach de funções limitadas uniformemente contínuas em $(-\infty, \infty)$ com a norma do supremo. Para $f \in X$ definimos*

$$(T(t)f)s = f(t+s)$$

Mostremos inicialmente que $T(t)$ é limitado. Para isto, considere $f \in X$, $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ arbitrários. Temos,

$$\begin{aligned} \|T(t)f\| &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |(T(t)f)(s)| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(t+s)| \\ &= \|f\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|(T(t)f)\| = \|f\|$ e $\|T(t)\| = \sup_{f \in X} \|T(t)f\| = \sup_{f \in X} \|f\| = 1$. Daí, segue que $\|T(t)\| = 1$.

Afirmamos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo. De fato, dados $f \in X$ e $s \in \mathbb{R}$, arbitrários, temos
(i) $(T(0)f)(s) = f(0+s) = f(s)$, para todo $s \geq 0$. Daí, segue que $T(0)f = f$, para todo $f \in X$. Logo, $T(0) = I$.

(ii) Dados $t_1, t_2 \in [0, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}(T(t_1 + t_2)f)(s) &= f(t_1 + t_2 + s) \\ &= (T(t_1)f)(t_2 + s) \\ &= T(t_1)(T(t_2)f)(s).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2).$$

Portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo.

Por fim, afirmamos que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo. De fato,

$$|(T(t)f)(s) - f(s)| = |f(s + t) - f(s)|,$$

como $|t + s - s| = |t|$, e sabendo que, por hipótese, f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta$ implica que

$$|f(s + t) - f(s)| < \varepsilon,$$

ou seja, $|t| < \delta$, implica que

$$|(T(t)f)(s) - f(s)| < \varepsilon.$$

Portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados, satisfazendo $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Observação 1.3. A linearidade de $T(t)$ segue da soma e produto por escalar de funções.

A seguir apresentamos o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Para isso, considere $f \in D(A)$, $s \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ quaisquer. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} f(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)f(s) - T(0)f(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(s + h) - f(s)}{h} \\ &= f'(s).\end{aligned}$$

Portanto,

$$A(f(s)) = f'(s), \text{ para todo } f \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}.$$

Note que, como $\|T(t)\| \leq 1$, segue do Lema 1.1, que

$$(\sup|f'|)^2 \leq 4(\sup|f''(s)|)(\sup|f(s)|).$$

Essa última desigualdade é denominada Desigualdade de Landau, onde o $\sup$ é tomado sobre $(-\infty, \infty)$.

Observação 1.4. *Esse exemplo pode ser modificado para o caso onde $X = L^p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$.*

1.3 O Teorema de Hille-Yosida

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Do Teorema 1.4, segue que existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para $t \geq 0$. Se $w = 0$, $T(t)$ é chamado uniformemente limitado, e se além disso $M = 1$, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado de um C_0 -semigrupo de contração.

Essa seção é voltada para a caracterização dos geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de contração. Condições no comportamento do resolvente de um operador A , que são necessárias e suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contração, são dadas. Lembrando que se A é um operador linear em X , não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é invertível, isto é, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em X .

A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, com $\lambda \in \rho(A)$, de operadores lineares limitados é denominada uma família de operadores resolventes de A .

Teorema 1.10. (Hille-Yosida) *Um operador(ilimitado) linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $t \geq 0$ se e somente se*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda \geq 0$*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) (i) Seja A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X , então pelo Corolário 1.7, temos que A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.

(ii) Para todo $\lambda > 0$ e $x \in X$, defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Como a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ dada por $f(t) = T(t)x$, para todo $x \in X$, é contínua, a integral imprópria $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ está bem definida e define um operador linear $R(\lambda)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\| dt \\ &= \|x\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \|x\|, \forall x \in X. \end{aligned}$$

Pois,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-\lambda b}}{-\lambda} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{-\lambda e^{\lambda b}} \right|_0^b \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\|R(\lambda)x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

O que implica que

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad (1.5)$$

ou seja, $R(\lambda)$ é um operador linear limitado.

Afirmamos que $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, para cada $\lambda > 0$. De fato, sejam $\lambda > 0$ e $h > 0$ quaisquer. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)(T(h) - I)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)T(h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $s = t + h$ na primeira integral do lado direito da igualdade anterior, temos

$$\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s + \lambda h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \left(\frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right) - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite com $h \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R(\lambda)x - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right) \\
&= \lambda R(\lambda)x - x.
\end{aligned}$$

Pois, pelo Teorema 1.6 (a), temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda(0+h)} - e^{\lambda 0}}{h} = (e^{\lambda t})' \Big|_{t=0} = \lambda e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = \lambda$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_0^{0+h} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right] = x.$$

O que implica que $R(\lambda)x \in D(A)$, para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, e

$$\begin{aligned}
AR(\lambda)x &= \lambda R(\lambda)x - x \\
\Rightarrow AR(\lambda) &= \lambda R(\lambda) - I \\
\Rightarrow (\lambda I - A)R(\lambda) &= I.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Por outro lado, para quaisquer $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned}
R(\lambda)(Ax) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)A(x) \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} A(T(t)x) \, dt \\
&= A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right) \\
&= A(R(\lambda)x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\lambda)(Ax) = A(R(\lambda)x).$$

Assim, pela identidade 1.6, para todo $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
R(\lambda)(\lambda I - A)x &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)(Ax) \\
&= \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x \\
&= (\lambda I - A)R(\lambda)x \\
&= x.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I. \quad (1.7)$$

Por 1.6 e 1.7, implica que $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)$.

Portanto, como por definição, $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, com $\lambda > 0$, segue que

$$R(\lambda) = R(\lambda : A).$$

E de 1.5, concluimos que

$$\|R(\lambda)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Logo, temos

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ para todo } \lambda > 0,$$

como queríamos demonstrar.

□

Lema 1.2. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 1.10 e seja $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para } x \in X.$$

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned}
I\lambda &= I\lambda - A + A \\
&= (I\lambda - A) + A.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda(I\lambda - A)^{-1} = I + AR(\lambda : A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Assim, dado qualquer $x \in D(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\lambda R(\lambda : A)x - x| &= |AR(\lambda : A)x| \\
&= |R(\lambda : A)Ax| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}|Ax| \rightarrow 0, \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty;
\end{aligned}$$

Observe que $D(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq 1$, donde segue que

$$\lambda R(\lambda : A)x \rightarrow x, \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty \text{ para todo } x \in X,$$

ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

□

Definição 1.4. Definimos, para todo $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Observe que A_λ é uma aproximação de Yosida no sentido do resultado a seguir.

Lema 1.3. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 1.10. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \text{ para } x \in D(A).$$

Demonstração: Para $x \in D(A)$, pelo Lema 1.2 e a definição de A_λ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A\lambda R(\lambda : A)x \\ &= Ax. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$.

□

Lema 1.4. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 1.10. Se A_λ é a Aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contração e^{tA_λ} . Além disso, para todo $x \in X$, e $\lambda, \mu > 0$, temos*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração: Da definição da Aproximação de Yosida, temos que A_λ é um operador linear limitado. Pelo Teorema 1.1, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo

$$\{T(t) = e^{tA_\lambda}; t > 0\} = \Gamma_\lambda.$$

Afirmamos que Γ_λ é um semigrupo uniformemente contínuo de contrações. De fato, para qualquer $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I)}\| \\
&= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} e^{-t(\lambda I)}\| \\
&\leq e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n \|R(\lambda:A)^n\|}{n!} \\
&\leq e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n \frac{1}{\lambda^n}}{n!} \\
&= e^{t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{\lambda^n n!} \\
&= e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|e^{tA_\lambda}\| = 1$. Além disso, notemos que, para quaisquer $x \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, tem-se

$$e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu} = \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) ds,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) t ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\| \|A_\lambda x - A_\mu x\| ds \\
&\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|$.

□

Finalmente, vamos provar a volta do Teorema 1.10.

Demonstração: Inicialmente, provemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Para isso, sejam $x \in D(A)$, $\lambda, \mu > 0$ arbitrários, pelo Lema 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &= \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \\
&\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \\
&= t \|A_\lambda x - Ax + Ax - A_\mu x\| \\
&\leq t \|A_\lambda x - Ax\| + t \|A_\mu x - Ax\|.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

De 1.8 e pelo Lema 1.3, segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \text{ para todo } x \in X, \quad (1.9)$$

em que a convergência é uniforme em intervalos limitados. Além disso, para cada $\lambda > 0$, $T_\lambda(t)$ é um semigrupo. Assim, para todo $x \in X$ e $t, s \geq 0$,

- $T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x = Ix = x$;
- $T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x = T(t)T(s)x$.

Além disso,

$$\|T(t)\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} \right\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA_\lambda}\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Portanto,

$$\|T(t)\| \leq 1.$$

Como $T_\lambda(t)x \rightarrow T(t)x$ uniformemente, então $T_\lambda(t)x$ é contínua, para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, daí segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = T(0)x = Ix = x.$$

Portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações.

Mostraremos a seguir que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Para isto, seja $x \in D(A)$ qualquer, por 1.9 e pela segunda parte do item (d) do Teorema 1.6, segue que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds \right) \\ &= \int_0^t T(s)Ax \, ds, \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde essa última igualdade ocorre em virtude do Lema 1.3 e da convergência $e^{tA_\lambda}A_\lambda x \rightarrow T(t)Ax$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$.

Suponha que o operador $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, assim, para qualquer $x \in D(A)$, de 1.10 obtemos pelo Teorema 1.6 (a), que

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \, ds = Ax,$$

donde $D(A) \subset D(B)$ e, conseqüentemente $A = B \Big|_{D(A)}$. Além disso, como B é o gerador infinitesimal de $T(t)$, então $1 \in \rho(B)$, ou seja $I - B$ é invertível. Por outro lado, pela hipótese (ii), temos que $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$, donde $1 \in \rho(A)$, logo $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Assim,

$$(I - A)(D(A)) = X \text{ e } (I - B)(D(B)) = X$$

e de $A = B \Big|_{D(A)}$, obtemos

$$(I - B)(D(A)) = X \text{ e } (I - A)(D(A)) = X,$$

donde $D(A) = (I - B)^{-1}x = D(B)$. Disso, e como $A = B \Big|_{D(A)}$, segue que $A = B$. Portanto, A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

□

Vejamos algumas conseqüências do Teorema 1.10.

Corolário 1.11. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x \text{ para } x \in X.$$

Demonstração: Da prova do Teorema 1.10, segue que da igualdade acima que $S(t)$ define um C_0 -semigrupo de contração, cujo gerador infinitesimal é A . Então do Teorema 1.8, temos que $T(t) = S(t)$.

□

Corolário 1.12. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. O conjunto resolvente de A contém o semi plano direito aberto, isto é, $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ e para tal λ*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Demonstração: Inicialmente note que o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

está bem definido para λ satisfazendo $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Além disso, na prova da ida do Teorema 1.10, foi mostrado que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ e portanto

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}.$$

Além disso, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right\| \\
&\leq \int_0^\infty e^{\operatorname{Re}(-\lambda)t} \|T(t)\| \|x\| \, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{\operatorname{Re}(-\lambda)t} \|x\| \, dt \\
&= \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \|x\|.
\end{aligned}$$

Ademais, $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, donde segue que $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$.

□

Exemplo 1.2. Seja $X = B \cup (0, \infty)$, isto é, o espaço de todas as funções uniformemente contínuas limitadas em $[0, \infty)$. Defina

$$(T(t)f)(s) = f(t+s).$$

No Exemplo 1.1 já mostramos que $\|T(t)\| = 1$, ou seja, que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de contração em X . Também, ainda pelo exemplo 1.1, temos que o gerador infinitesimal A de $T(t)$ tem domínio descrito por

$$D(A) = \{f : f, f' \in X\} \text{ e } (Af)(s) = f'(s) \text{ para } f \in D(A).$$

Do Corolário 1.12, sabemos que $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Além disso, para todo número complexo λ , a equação $(\lambda - A)\varphi_\lambda = 0$ tem solução não trivial $\varphi_\lambda(s) = e^{\lambda s}$. Se $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, $\varphi_\lambda \in X$ e portanto o meio plano esquerdo fechado está no espectro $\sigma(A)$ de A .

Observação 1.5. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ (para algum $w \geq 0$). Considere

$$S(t) = e^{-wt}T(t).$$

Note que $S(t)$ é um C_0 -semigrupo de contração. De fato, como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ e consequentemente, $\{S(t); t \geq 0\} \subseteq \mathcal{L}(X)$. E mais, para quaisquer $t, s \geq 0$ temos

- $S(0) = e^{-w \cdot 0}T(0) = I$;
- Sejam $s, t \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
S(s+t) &= e^{-w(s+t)}T(s+t) \\
&= e^{-wt}e^{-ws}T(t)T(s) \\
&= (e^{-wt}T(t))(e^{-ws}T(s)) \\
&= S(t)S(s).
\end{aligned}$$

- Para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
|S(t)x - x| &= |e^{-tw}T(t)x - x| \\
&= |e^{-tw}T(t)x - e^{-wt}x + e^{-wt}x - x| \\
&\leq |e^{-tw}T(t)x - e^{-wt}x| + |e^{-tw}x - x| \\
&= |e^{-wt}| |T(t)x - x| + |e^{-wt} - 1| |x| \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.
\end{aligned}$$

- $\|S(t)\| = \|e^{-wt}T(t)\| \leq e^{-wt}e^{wt} = e^0 = 1$.

De (i)-(iv), segue que $S(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações.

Suponhamos $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de $S(t)$, assim,

$$D(B) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}, \text{ e para todo } x \in X,$$

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)x - x}{h} &= \frac{e^{-wt}T(h)x - x}{h} \\
&= \frac{e^{-wh}T(h)x - e^{-wh}x}{h} + \frac{e^{-wh}x - x}{h} \\
&= \frac{e^{-wt}(T(h)x - x)}{h} + \frac{(e^{-wh} - 1)x}{h}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Logo, para todo $x \in D(B)$, temos de 1.11 que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[e^{wt} \left(\frac{S(h)x - x}{h} \right) - e^{wt} \left(\frac{e^{-wh} - 1}{h} \right) x \right] = Bx + wx, \text{ para todo } x \in D(B),$$

$$\text{já que } \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{wt} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-wh} - 1}{h} = -w \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Bx, \text{ para todo } x \in D(B).$$

Se $x \in D(B)$, então $x \in D(A)$, ou seja, $D(B) \subseteq D(A)$ e

$$\begin{aligned}
Ax &= Bx + wx \\
\Rightarrow Bx &= Ax - wx, \text{ para todo } x \in D(A).
\end{aligned}$$

Agora, seja $x \in D(A)$ qualquer. De 1.11, de maneira análoga,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-wh}(T(h)x - x)}{h} + \frac{(e^{-wh} - 1)x}{h} = Ax - wx, \text{ donde } x \in D(B).$$

Logo, $D(A) \subseteq D(B)$ e $Bx = Ax - wx$.

Assim, $D(A) = D(B)$ e, para todo $x \in D(B) = D(A)$, tem-se

$$Bx = Ax - wx \Rightarrow B = A - wI.$$

Observação 1.6. Se A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então $A - wI$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Por outro lado, se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, então $A + wI$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.

Essas observações nos levam a caracterização dos geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.

Corolário 1.13. Um operador A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ se, e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) O resolvente $\rho(A)$ de A contém o raio $\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda > w\}$ e para tal λ

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) O item (i) segue diretamente do Corolário 1.7.

Provemos o item (ii). Para $\operatorname{Re} \lambda > w$, defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Esta integral está bem definida, pois por hipótese $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ e a função dada por $f(x) = e^{-\lambda t} T(t)x$ é contínua, para todo $t \geq 0$. Temos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \\ &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}\| \|T(t)\| x dt \\ &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}\| e^{wt} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(w-\lambda)t} dt. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{(w-\lambda)t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(w-\lambda)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{e^{(w-\lambda)b}}{w-\lambda} - \frac{1}{w-\lambda} dt \\ &= \frac{1}{\lambda - w}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

De 1.12 e 1.13, temos que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

($\Leftarrow$) Suponha que as condições (i) e (ii) sejam válidas. Então, as condições (i) e (ii) do Teorema 1.10 são verificadas por $A - wI$, pois $D(A) = D(A - wI)$ e

$$R(\lambda + w : A) = R(\lambda : A - wI),$$

para todo $\lambda > 0$.

Como consequência, $A - wI$ é o operador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração que denotaremos por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Fazendo o mesmo processo realizado no início da prova, é possível mostrar que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t) = e^{wt}S(t)$. E mais, naturalmente $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$.

□

Essa seção será concluída com um resultado que muitas vezes é útil para provar que um determinado operador A satisfaz as condições suficientes do Teorema 1.10, e portanto, é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração.

Definição 1.5. *Seja X um espaço de Banach e X^* seu dual. Nós denotamos o valor de $x^* \in X^*$, para $x \in X$, por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Se A é um operador linear, sua imagem numérica $S(A)$ é o conjunto*

$$S(A) = \{\langle x^*, Ax \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = 1\}.$$

Teorema 1.14. *Seja A um operador linear fechado com domínio $D(A)$ denso em X . Seja $S(A)$ a imagem numérica de A , e seja Σ o complemento de $S(A)$ em $\mathbb{C}$. Se $\lambda \in \Sigma$, então $\lambda I - A$ é injetiva e tem imagem fechada. Além disso, se Σ_0 é um componente de Σ satisfazendo $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, então o espectro de A está contido no complemento S_0 de Σ_0 , e*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})},$$

onde $d(\lambda : \overline{S(A)})$ é a distância de λ a $\overline{S(A)}$.

Demonstração: Seja $\lambda \in \Sigma = \mathbb{C} - \overline{S(A)}$. Se $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = 1$, ou seja, $\langle x^*, Ax \rangle \in S(A)$ (pela definição de $S(A)$), em particular, $\langle x^*, Ax \rangle \in \overline{S(A)}$, já que

$$S(A) \subseteq \overline{S(A)}.$$

Por definição, sabemos que $d(\lambda : \overline{S(A)}) = \inf \{ |\lambda - z|, z \in \overline{S(A)} \}$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 < d(\lambda : \overline{S(A)}) &\leq |\lambda - \langle x^*, Ax \rangle| = |\langle x^*, \lambda x - Ax \rangle| \\ &\leq \|x^*\| \|\lambda x - Ax\| \\ &= \|\lambda x - Ax\|, \end{aligned}$$

isto é, $\|(\lambda I - A)x\| > 0$. Logo, $(\lambda - A)$ é injetiva, pois caso contrário, $(\lambda I - A)(x) = 0$ para algum $x \neq 0$, o que é uma contradição.

Afirmamos que $Im(\lambda - A) \subset X$ é fechado. De fato, seja $\{y_n\} \subseteq Im(\lambda - A)$ tal que $y_n \rightarrow y$ para algum $y \in X$. Temos que provar que $y \in Im(\lambda - A)$.

Para isso, para $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in D(A)$ tal que $y_n = (\lambda - A)x_n$. Então, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$0 < d(\lambda : \overline{S(A)}) \leq \left\| (\lambda - A) \left(\frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|} \right) \right\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 < d(\lambda : \overline{S(A)}) \cdot \|x_n - x_m\| &\leq \|(\lambda - A)(x_n - x_m)\| \\ &= \|y_n - y_m\|. \end{aligned}$$

Como $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$, também temos que $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, isto é, $\{x_n\} \subset D(A)$ é de Cauchy. Então a sequência $\{x_n, (\lambda - A)x_n\} \subset \text{Gráfico}(\lambda - A)$ converge para (x, y) . Visto que $\text{Gráfico}(\lambda - A)$ é fechado, $(x, y) \in \text{Gráfico}(\lambda - A)$. O que implica que $y = (\lambda - A)x \in Im(\lambda - A)$.

Além disso, para $\lambda \in \rho(A)$ (ou seja, $(\lambda I - A)^{-1}$ existe), temos

$$\begin{aligned} d(\lambda : \overline{S(A)}) &\leq \|\lambda x - Ax\| = \|(\lambda I - A)x\| \\ &\leq \|\lambda I - A\| \|x\| \\ &= \|\lambda I - A\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})} \geq \frac{1}{\|(\lambda I - A)\|} = \|(\lambda I - A)^{-1}\| = \|R(\lambda : A)\|.$$

Isto é,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})} \text{ e } d(\lambda : \overline{S(A)}) \leq \|R(\lambda : A)\|^{-1}.$$

Resta mostrar que se Σ_0 é uma componente de Σ que tem uma interseção não vazia com o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A , então $\sigma(A) \subseteq S_0$.

Para tanto, considere o conjunto $\rho(A) \cap \Sigma_0$. Sabemos que $\rho(A)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Logo, $\rho(A) \cap \Sigma_0$ é aberto em Σ_0 (definição de aberto relativo).

Mostremos que $\rho(A) \cap \Sigma_0$ é fechado em Σ_0 . Para isto, considere $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma_0$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \Sigma_0$. Dai, para n suficientemente grande, temos

$$d(\lambda_n : \overline{S(A)}) > \frac{1}{2}d(\lambda : \overline{S(A)}) > 0. (I)$$

E conseqüentemente, para n suficientemente grande, também temos que

$$|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n : \overline{S(A)}). (II)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \bullet d(\lambda_n : \overline{S(A)}) &= \inf \left\{ |\lambda_n - z_n|; z_n \in \overline{S(A)} \right\} \\ &= |\lambda_n - z_n| \\ &= |\lambda_n - \lambda + \lambda - z_n| \\ &\geq |\lambda_n - \lambda| - |\lambda - z_n|. \quad (A) \\ \bullet d(\lambda : \overline{S(A)}) &= \inf \left\{ |\lambda - z_n|; z_n \in \overline{S(A)} \right\} \\ &= |\lambda - z_n| \\ &= |\lambda - \lambda_n + \lambda_n - z_n| \\ &\geq |\lambda - \lambda_n| - |\lambda_n - z_n|. \quad (B) \end{aligned}$$

Fazendo $(A) - (B)$, obtemos

$$d(\lambda_n : \overline{S(A)}) - d(\lambda : \overline{S(A)}) \geq -|\lambda - z_n| + |\lambda_n - z_n|.$$

Para n suficientemente grande, temos que $\lambda_n \rightarrow \lambda$, logo,

$$-|\lambda - z_n| + |\lambda_n - z_n| \rightarrow 0.$$

Ou seja, para n grande, temos

$$d(\lambda_n : \overline{S(A)}) > \frac{1}{2}d(\lambda : \overline{S(A)}) > 0.$$

Provando assim (II).

Para mostrar (II), note que $d(\lambda : \overline{S(A)}) > 0$, daí, para n grande

$$|\lambda - \lambda_n| < \frac{d(\lambda : \overline{S(A)})}{2} \leq \frac{d(\lambda_n : \overline{S(A)})}{2} \leq d(\lambda_n : \overline{S(A)}),$$

assim temos (II).

Sabemos que a "distância" é contínua, logo para n grande, temos que

$$d(\lambda_n : \overline{S(A)}) \rightarrow d(\lambda : \overline{S(A)}), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Mas, $d(\lambda : \overline{S(A)}) \leq \|R(\lambda : A)\|^{-1}$, então temos que para n grande

$$|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n : \overline{S(A)}) \leq \|R(\lambda_n : A)\|^{-1}.$$

E disso segue que λ está na bola de raio $\|R(\lambda_n : A)\|^{-1}$ centrada em λ_n , o que implica que $\lambda \in \rho(A)$, pois $\rho(A)$ é um conjunto aberto e $\lambda_n \in \rho(A)$, e portanto $\rho(A) \cap \Sigma_0$ é fechado em Σ_0 . Como Σ_0 é uma componente conexa, e $\rho(A) \cap \Sigma_0$ é um subconjunto de Σ_0 aberto e fechado em Σ_0 , segue que

$$\rho(A) \supseteq \rho(A) \cap \Sigma_0 = \Sigma_0 \text{ ou } \rho(A) \cap \Sigma_0 = \emptyset.$$

Mas por hipótese, $\rho(A) \supseteq \Sigma_0$, ou seja

$$(\rho(A))^c \subseteq (\Sigma_0)^c \Rightarrow \sigma(A) \subseteq S_0.$$

□

1.4 O Teorema de Lumer Phillips

Na seção anterior vimos a caracterização de Hille-Yosida do gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração. Nessa seção veremos uma caracterização diferente para tais geradores infinitesimais.

Para provar o resultado principal dessa seção, precisamos de algumas preliminares.

Seja X um Espaço de Banach e seja x^* seu dual. Denotamos o valor de $x^* \in X^*$ para $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para todo $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \left\{ x^* \in X^* \text{ e } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Note que do Teorema de Hahn-Banach(ver [3]), segue que $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$.

Definição 1.6. Um operador linear A é dito dissipativo, se para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

O resultado a seguir, nos dá uma caracterização para operadores dissipativos.

Teorema 1.15. *Um operador linear A é dissipativo se, e somente se, $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como A é um operador dissipativo, com $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, então existe $x^* \in F(x)$ tal que $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\| \|x\| &\geq | \langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle | \\ &\geq Re \langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle \\ &= Re \langle \lambda x, x^* \rangle - Re \langle Ax, x^* \rangle \\ &= Re(\lambda \langle x, x^* \rangle - \langle x^*, Ax \rangle) \\ &\Rightarrow \|(\lambda I - A)x\| \|x\| \geq Re(\lambda \|x\|^2 - \langle x^*, Ax \rangle) \\ &= \lambda \|x\|^2 - Re \langle x^*, Ax \rangle \geq \lambda \|x\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(\lambda I - A)x\| \|x\| \geq \lambda \|x\|^2.$$

O que implica que,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

($\Leftarrow$) Seja $x \in D(A)$, e assumamos que $\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|$, para todo $\lambda > 0$. Se $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$, então $\|z_\lambda^*\| = 1$ e

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| &= \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &= \lambda Re \langle x, z_\lambda^* \rangle - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &\leq \lambda \|x\| - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle, \forall \lambda > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda \|x\| \leq \lambda \|x\| - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| - \lambda \|x\| &\leq -Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ 0 &\leq -Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ 0 &\geq Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle. \end{aligned}$$

Portanto temos $Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq 0$.

E dessas desigualdades acima, temos

$$Re \langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\|, \text{ para todo } \lambda > 0. \quad (1.14)$$

Como a bola unitária de X^* é compacta na topologia fraca (ver [3]) de X^* , temos que existe $z^* \in X^*$, $\|z^*\| \leq 1$, e a sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$ tal que $z_{\lambda_n}^* \rightarrow z^*$.

De 1.14, segue que

$$Re \langle Ax, z^* \rangle \leq 0 \text{ e } Re \langle x, z^* \rangle \geq \|x\|.$$

Mas $Re \langle x, z^* \rangle \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \|x\|$, e portanto, $\langle x, z^* \rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = \|x\| z^*$, temos $x^* \in F(x)$ e $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Logo, para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Portanto, A é dissipativo.

□

Teorema 1.16. (Lumer-Phillips): Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X :

(a) Se A é dissipativo, e existe um $\lambda_0 > 0$, tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A)$ de $\lambda_0 I - A$ é X , então A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contração em X ;

(b) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração em X , então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$, e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in D(A)$ e para todo $x^* \in F(x)$, $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Demonstração: (a) Seja $\lambda > 0$, como A é dissipativo, pelo Teorema 1.15, implica que

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|, \forall \lambda > 0 \text{ e } x \in D(A). \quad (1.15)$$

Também temos, por hipótese, que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 I - A) = X$. De 1.15, com $\lambda = \lambda_0$, implica que $(\lambda_0 - A)$ é injetor, e portanto existe $(\lambda_0 - A)^{-1}$. Também por 1.15, temos

$$\|x\| = \|(\lambda_0 - A)(\lambda_0 - A)^{-1}x\| \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 - A)^{-1}x\|,$$

o que mostra que $(\lambda_0 - A)^{-1}$ é um operador linear limitado com $\|(\lambda_0 - A)^{-1}\| = R(\lambda : A) \leq \lambda_0^{-1}$. Logo, $\lambda_0 \in \rho(A)$ ($\rho(A) \supseteq (0, \infty)$) e A é fechado, já que é um operador linear limitado. Daí, segue do Teorema 1.10 de Hille Yosida que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração em X .

Para completar a prova de (a), resta mostrar que $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Para isto, considere o conjunto

$$\Lambda = \{\lambda : 0 < \lambda < \infty \text{ e } R(\lambda I - A) = X\} \text{ ou } \Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty).$$

Seja $\lambda \in \Lambda$, por 1.15, temos que $\lambda \in \rho(A)$. Como $\rho(A)$ é aberto, uma vizinhança de λ está em $\rho(A)$. Note que a interseção dessa vizinhança com a reta real está em Λ , e portanto Λ é aberto.

Por outro lado, seja $\lambda_n \in \Lambda$, tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$. Para todo $y \in X$, existe um $x_n \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - Ax_n = y. \quad (1.16)$$

Disto, segue que $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C$, para algum $C > 0$. Agora,

$$\begin{aligned} \lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\| \\ &\leq C |\lambda_n - \lambda_m|. \end{aligned}$$

Portanto, x_n é uma sequência de Cauchy.

Seja $x_n \rightarrow x$, então por 1.16, $Ax_n \rightarrow \lambda x - y$.

Como A é fechado, $x \in D(A)$ e $\lambda x - Ax = y$, temos que $R(\lambda I - A) = X$ e $\lambda \in \Lambda$. Daí, segue que λ também é fechado em $(0, \infty)$, e como $\lambda_0 \in \Lambda$ por suposição $\lambda \neq \emptyset$, e portanto, $\Lambda = (0, \infty)$ (λ em $(0, \infty)$ é aberto e fechado). Isso completa a prova de (a).

(b) Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $T(t)$ em X . Pelo Teorema de Hille-Yosida, temos que $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$, e portanto $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disso, se $x \in D(A)$ e $x^* \in F(x)$, então

$$| \langle T(t)x, x^* \rangle | \leq \|T(t)x\| \|x^*\| \leq \|x\|^2, \quad t > 0,$$

e portanto,

$$Re \langle T(t)x - x, x^* \rangle = Re \langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0. \quad (1.17)$$

Dividindo 1.17 por t , temos

$$Re \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle \leq 0.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow 0^+$, concluímos que $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Isso vale para qualquer que seja $x^* \in F(x)$.

□

Corolário 1.17. *Seja A um operador linear fechado densamente definido. Se ambos, A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração em X .*

Demonstração: Pelo Teorema 1.16 (a), basta provar que $R(I - A) = X$.

Como, por hipótese, A é dissipativo e fechado, implica que $R(I - A) \subset X$ é um subespaço fechado de X . Suponha que $R(I - A) \neq X$, ou seja, $X \not\subset R(I - A)$. Então, pelo Corolário 1.8, pag 8 de [3], existe x^* , com $x^* \neq 0$, tal que

$$\langle x^*, x - A(x) \rangle = 0, \forall x \in D(A).$$

E portanto

$$\langle x^*, x \rangle - \langle x^*, A(x) \rangle = 0.$$

Isto é,

$$\langle x^*, x \rangle = \langle x^*, A(x) \rangle.$$

Logo,

$$A^*(x) = x^* \Rightarrow x^* - A^*(x^*) = 0.$$

Como, por hipótese, A^* também é dissipativo, pelo Teorema 1.15, obtemos

$$0 = |(I - A^*)x^*|_* \geq \|x^*\|_* \Rightarrow \|x^*\| = 0 \Rightarrow x^* = 0.$$

Mas isso é uma contradição. Portanto, temos que $R(I - A) = X$, e daí segue o resultado.

□

Nós concluímos essa seção com algumas propriedades de operadores lineares dissipativos.

Teorema 1.18. *Seja A um operador dissipativo em X .*

(a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

(b) *Se A é fechável, então $\overline{A}$, o fecho de A , também é dissipativo.*

(c) *Se $\overline{D(A)} = X$, então A é fechável (ver Definição 4.1 no apêndice).*

Demonstração: O item (a) já foi provado na parte (a) do Teorema 1.16.

(b) Seja $x \in D(\overline{A})$, assim $y = \overline{A}(x)$. Pela definição de $\overline{A}$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$x_n \rightarrow x \text{ e } A(x_n) \rightarrow y = \overline{A}(x), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como A é dissipativo, do Teorema 1.15, segue que $\|\lambda x_n - A(x_n)\| \geq \lambda \|x_n\|$, para todo $\lambda > 0$. Logo, para todo $x \in D(A)$, temos

$$\|\lambda x - \overline{A}(x)\| \geq \lambda \|x\| \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Portanto, de 1.18, e usando novamente o Teorema 1.15, temos que $\overline{A}$ é dissipativo.

(c) Suponha que A é não fechável, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$x_n \rightarrow 0 \text{ e } A(x_n) \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para algum $y \in X$, com $\|y\| = 1$. Como, por hipótese, A é dissipativo, pelo Teorema 1.15, para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \left(x + \frac{1}{t} x_n \right) - tA \left(x + \frac{1}{t} x_n \right) \right\| &= \left\| t \left[\frac{1}{t} \left(x + \frac{1}{t} x_n \right) - A \left(x + \frac{1}{t} x_n \right) \right] \right\| \\ &\geq \frac{t}{t} \left\| x + \frac{1}{t} x_n \right\| \\ &= \left\| x + \frac{1}{t} x_n \right\|. \end{aligned}$$

Logo, temos $\left\| \left(x + \frac{1}{t} x_n \right) - tA \left(x + \frac{1}{t} x_n \right) \right\| \geq \left\| x + \frac{1}{t} x_n \right\|$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|x - tAx - y\| \geq \|x\|, \forall x \in D(A). \quad (1.19)$$

Fazendo $t \rightarrow 0$ nessa desigualdade 1.19, obtemos $\|x - y\| \geq \|x\|$, $\forall x \in D(A)$. Mas isso é um absurdo, já que por hipótese $D(A)$ é denso em X . Portanto, temos que A é fechável.

□

Teorema 1.19. Seja A dissipativo com $R(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.

Demonstração: Seja $x^* \in X^*$ tal que $\langle x^*, x \rangle = 0$, para todo $x \in D(A)$. Mostremos que $x^* = 0$. Como $R(I - A) = X$, é suficiente mostrar que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ implica $\langle x^*, x \rangle - \langle x^*, Ax \rangle = 0$, para todo $x \in D(A)$. Assim, é suficiente mostrar que $\langle x^*, Ax \rangle = 0$, para todo $x \in D(A)$.

Seja $x \in D(A)$, então pelo Teorema 1.18 (a), existe um x_n tal que

$$x = x_n - \frac{1}{n} Ax_n.$$

Como o ponto $A(x_n) = n(x_n - x) \in D(A)$, temos que $x_n \in D(A^2) = x \in D(A)$, e

$$Ax = Ax_n - \frac{1}{n}A^2x_n \text{ ou } Ax = \left(I - \frac{1}{n}A\right)Ax_n.$$

Do Teorema 1.15, temos que

$$\left\| \left(I - \frac{1}{n}A\right) \right\| \geq 1.$$

Logo, $\|Ax\| \geq \|Ax_n\|$. Além disso,

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{n} \|Ax_n\| \leq \frac{1}{n} \|Ax\|,$$

e portanto $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$.

Como $\|Ax_n\| \leq C$ e X é reflexivo, então pelo Teorema 3.18 de [3], pag 69, existe uma subsequência Ax_{n_k} de Ax_n tal que $Ax_{n_k} \rightarrow y$ fracamente. Como A é fechado (pelo Teorema 1.16 (a)), segue que

$$y = Ax.$$

Finalmente, como $\langle x^*, z \rangle = 0$ para cada $z \in D(A)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle x^*, Ax_{n_k} \rangle &= n_k \langle x^*, x_{n_k} - x \rangle \\ &= n_k \langle x^*, x_{n_k} \rangle - n_k \langle x^*, x \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle x^*, Ax_{n_k} \rangle = 0.$$

Fazendo $n_k \rightarrow \infty$ em 1.20, obtemos

$$\langle x^*, Ax \rangle = 0.$$

Isto vale para todo $x \in D(A)$, e portanto, $x^* = 0$ e $\overline{D(A)} = X$.

□

Exemplo 1.3. Seja $X = C([0, 1])$, isto é, as funções contínuas em $[0, 1]$ com a norma do supremo. Seja $D(A) = \{u : u \in C^1([0, 1]) \text{ e } u(0) = 0\}$ e $Au = -u'$, para $u \in D(A)$. Para todo $f \in X$, a equação $\lambda u - Au = f$ tem uma solução u dada por

$$u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} f(\xi) d\xi. \quad (1.20)$$

Esse exemplo mostra que o Teorema 1.19 não é verdadeiro para Espaços de Banach gerais.

Para essa solução u , basta usar o método do fator integrante na equação diferencial de primeira ordem $u' + \lambda u = f$.

Mostremos que $\text{Im}(\lambda I - A) = X$. De fato, note que $X \subseteq \text{Im}(\lambda I - A)$, pois para $f \in X$, existe $u \in D(A)$, tal que $(\lambda I - A)u = f$. E $\text{Im}(\lambda I - A) \subseteq X$ é direto.

Mostremos que A é dissipativo. De fato, de 1.20, segue que

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} f(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int_0^x |e^{\lambda(\xi-x)}| |f(\xi)| d\xi \\ &\leq \|f\| \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda} \|f\| (1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda |u(x)| \leq (1 - e^{-\lambda x}) \|f\| \leq \|\lambda u - Au\|.$$

Tomando o supremo sobre $x \in [0, 1]$ no lado esquerdo da desigualdade acima, temos que

$$\lambda \|u\| \leq \|\lambda u - Au\|,$$

e portanto, pelo Teorema 1.15 temos que A é dissipativo, mas $\overline{D(A)} = \{u : u \in X \text{ e } u(0) = 0\} \neq X = C([0, 1])$.

1.5 Caracterização dos geradores infinitesimais de C_0 semigrupos

Nas seções 1.3 e 1.4 vimos caracterizações do gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupos de contrações. Já nesta seção, apresentamos uma caracterização para semigrupos quaisquer. Isso será feito a partir de uma renormalização do espaço de Banach X de forma que tal semigrupo seja um C_0 -semigrupo de contrações, e assim possamos usar os resultados já conhecidos das seções anteriores.

Lema 1.5. *Seja A um operador linear tal que $\rho(A) \supset (0, \infty)$. Se*

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n\| \leq M, \text{ para } n = 1, 2, \dots, \lambda > 0,$$

então existe uma norma $|\cdot|$ em X que é equivalente a norma original $\|\cdot\|$ em X e satisfaz

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\|, \text{ para } x \in X,$$

e

$$|\lambda R(\lambda : A)x| \leq |x|, \text{ para } x \in X, \text{ e } \lambda > 0.$$

Demonstração: Ver página 17 de [10].

Teorema 1.20. *Um operador linear A é o operador infinitesimal de um C_0 semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$, com $M \geq 1$, se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $D(A)$ é denso em X .*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Demonstração: Ver página 19 de [10].

Observação 1.7. *Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo qualquer em X , então, segue pelo Teorema 1.4 que existem constantes $M \geq 1$ e $W \geq 0$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Considere o C_0 -semigrupo $S(t) = e^{-wt}T(t)$, então $\|S(t)\| \leq M$ e como já foi visto na Seção 1.3, A é o gerador infinitesimal de $T(t)$ se, e somente se $A - wI$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Usando a Observação 1.7 anterior e o Teorema 1.20, temos o resultado a seguir.

Teorema 1.21. *(Teorema de Feller-Miyadera-Phillips) Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, se e somente se,*

(i) *A é fechado e $D(A)$ é denso em X .*

(ii) *O resolvente $\rho(A)$ de A contém o raio (w, ∞) e para $\lambda > w$, temos*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

Demonstração: Ver página 20 de [10].

Observação 1.8. *A condição de que todo real λ , com $\lambda > w$, está no conjunto resolvente de A , junto com a estimativa 1.21 implica que todo complexo λ satisfazendo $\operatorname{Re} \lambda > w$ está no conjunto resolvente de A e para $\operatorname{Re} \lambda > w$, temos*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Concluimos essa seção com a expansão da fórmula do Corolário 1.11 para o caso geral.

Teorema 1.22. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X . Se A_λ é a aproximação de Yosida de A (ver definição 1.4), então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x.$$

Demonstração: Inicialmente consideremos o caso em que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$ e algum $M \geq 1$.

Na prova do Teorema 1.20 (ver [10], página 19), foi exibida uma norma $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ equivalente a norma original $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, de modo que $T(t)$ seja um C_0 semigrupo de contrações. Logo, usando o Corolário 1.11, segue que para todo $x \in X$,

$$|e^{tA_\lambda}x - T(t)x| \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Portanto, para $x \in X$ e $t \geq 0$, também temos que

$$\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty,$$

já que as normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes. Daí, segue que $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x$, para todo $x \in X$.

Provemos agora para o caso geral, onde temos $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$, $M \geq 1$, e $w > 0$. Para isso, afirmamos que a função $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$f(\lambda) = \|e^{tA_\lambda}\|,$$

é limitada, para todo $\lambda > 2w$. De fato, para todo $\lambda > 2w$, temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= \left\| e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I)} \right\| \\ &= e^{-\lambda t} \left\| e^{\lambda^2 R(\lambda:A)t} \right\| \\ &\leq e^{-t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \|R(\lambda:A)^k\|}{k!}, \end{aligned}$$

dessa desigualdade, e pelo Teorema 1.21 (ii), segue que

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &\leq e^{-t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \frac{M}{(\lambda-w)^k} \frac{1}{k!} \\ &= e^{-t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda-w}\right)^k M}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} e^{t\left(\frac{\lambda^2}{\lambda-w}\right)} M \\ &= M e^{t\left(\frac{\lambda^2}{\lambda-w} - \lambda\right)} \\ &= M e^{t\left(\frac{\lambda w}{\lambda-w}\right)}. \end{aligned}$$

Então, temos

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq Me^{t(\frac{\lambda w}{\lambda-w})}.$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned} \lambda > 2w &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} > w \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} - \lambda > w - \lambda \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda}{2} > w - \lambda \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} > \lambda - w \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda w}{\lambda - w} < \frac{\lambda w}{\frac{\lambda}{2}} = 2w \end{aligned}$$

temos que

$$Me^{t(\frac{\lambda w}{\lambda-w})} \leq Me^{2wt}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Portanto,

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq Me^{2wt}. \quad (1.22)$$

Consideremos o semigrupo uniformemente limitado $S(t) = e^{-wt}T(t)$ que tem como gerador infinitesimal $A - wI$. Assim, para todo $x \in X$, temos

$$T(t) = e^{wt}S(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

E portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{wt}S(t)x.$$

Como, para todo $t \geq 0$, temos que $\|S(t)\| \leq M$ e pelo caso inicial, segue que

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{wt}e^{t(A-wI)_\lambda + wt}x, \text{ para todo } x \in X. \quad (1.23)$$

Afirmamos que $(A - wI)_\lambda + wI = A_{\lambda+w} + H(\lambda)$, onde

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 2wI - w(w + 2\lambda)R(\lambda(\lambda + w : A)) \\ &= w[wR(\lambda(\lambda + w : A) - 2AR(\lambda + w : A))]. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (A - wI)_\lambda + wI &= \lambda^2 R(\lambda : A - wI) - \lambda I + wI \\ &= \lambda^2 (\lambda I - (A - wI))^{-1} - \lambda I + wI \\ &= \lambda^2 ((\lambda + w)I - A)^{-1} - \lambda I + wI \\ &= \lambda^2 R(\lambda + w : A) - \lambda I + wI. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
A_{\lambda+w} + H(\lambda) &= (\lambda + w)^2 R(\lambda + w : A) - (\lambda + w)I + 2wI + (-w^2 - 2w\lambda)R(\lambda + w : A) \\
&= (\lambda + w)^2 R(\lambda + w : A) - \lambda I - wI + 2wI - w^2 R(\lambda + w : A) - 2wIR(\lambda + w : A) \\
&= (\lambda^2 + 2w\lambda + w^2)R(\lambda + w : A) - \lambda I - wI + 2wI - w^2 R(\lambda + w : A) \\
&\quad - 2wIR(\lambda + w : A) \\
&= \lambda^2 R(\lambda + w : A) + 2wR(\lambda + w : A) + w^2 R(\lambda + w : A) \\
&\quad - \lambda I - wI + 2wI - w^2 R(\lambda + w : A) - 2wR(\lambda + w : A) \\
&= \lambda^2 R(\lambda + w : A) - \lambda I + wI.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$(A - wI)_\lambda + wI = A_{\lambda+w} + H(\lambda).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)\| &= \|2wI - w(w + 2\lambda)R(\lambda + w : A)\| \\
&= \|2wI - w^2 R(\lambda + w : A) - 2w\lambda R(\lambda + w : A)\| \\
&\leq 2w + w^2 \|R(\lambda + w : A)\| + 2w\lambda \|R(\lambda + w : A)\| \\
&\leq 2w + w^2 \frac{M}{\lambda - w + w} + 2w\lambda \frac{M}{\lambda + w - w} \\
&= 2w + w^2 \frac{M}{\lambda} + 2w\lambda \frac{M}{\lambda} \\
&= 2w + w^2 \frac{M}{\lambda} + 2Mw \\
&= 2w + (w^2 \lambda^{-1} + 2w)M.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\|H(\lambda)\| \leq 2w + (w^2 \lambda^{-1} + 2w)M.$$

Para $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)x\| &= \|w[wR(\lambda + w : A)x - 2A(R(\lambda + w : A)x)]\| \\
&= \|w^2 R(\lambda + w : A)x - 2wAR(\lambda + w : A)x\| \\
&\leq w^2 \|R(\lambda + w : A)\| \|x\| + 2 \|R(\lambda + w : A)x\| \\
&\leq M \frac{w^2}{\lambda + w - w} \|x\| + 2w \|A(x)R(\lambda + w : A)\| \\
&\leq \frac{M}{\lambda} w^2 \|A(x)\| \frac{M}{\lambda + w - w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{\lambda} w^2 + 2w \|A(x)\| \frac{M}{\lambda} \\
&= \frac{M}{\lambda} (w^2 + 2w \|A(x)\|).
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\|H(\lambda)x\| \leq \frac{M}{\lambda} (w^2 + 2w \|A(x)\|) \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Como

$$\begin{aligned}
\|e^{tH(\lambda)}x - x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsH(\lambda)}x) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 (tH(\lambda)e^{tsH(\lambda)}x) ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|tH(\lambda)e^{tsH(\lambda)}x\| ds \\
&= \|tH(\lambda)x\| \int_0^1 \|e^{tsH(\lambda)}\| ds \\
&\leq \|tH(\lambda)x\| \int_0^t e^{s\|H(\lambda)\|} ds \\
&= \|tH(\lambda)x\| e^{t\|H(\lambda)\|}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|e^{tH(\lambda)}x - x\| \leq \|tH(\lambda)x\| e^{t\|H(\lambda)\|},$$

temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tH(\lambda)}x = x, \text{ para todo } x \in X. \quad (1.24)$$

Finalmente, como $H(\lambda)$ e $A_{\lambda+w}$ comutam, para quaisquer $\lambda > 0$ e $w \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda} - T(t)x\| &= \left\| e^{tA_\lambda}x + e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - T(t)x \right\| \\
&\leq \left\| e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - e^{tA_\lambda}x \right\| + \left\| e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - T(t)x \right\| \\
&= \left\| e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - T(t)x \right\| + \left\| e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - e^{tA_\lambda}x \right\| \\
&\leq \left\| e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - T(t)x \right\| + \|e^{tA_\lambda}\| \left\| e^{tH(\lambda-w)}x - x \right\|.
\end{aligned}$$

Quando $\lambda \rightarrow \infty$, o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima tende a zero, em virtude da igualdade 1.23. Já o segundo termo tende a zero, em razão das desigualdades 1.22 e 1.24. Logo, para todo $x \in X$, e $t \geq 0$, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x.$$

Então, em qualquer um dos casos, segue o resultado.

□

1.6 A transformada inversa de Laplace e a fórmula exponencial

Nesta seção, estudamos a transformada inversa de Laplace, a qual relaciona um semigrupo $T(t)$ com o resolvente $R(\lambda : A)$.

A relação entre o semigrupo e seu gerador infinitesimal é um dos problemas fundamentais na teoria de semigrupos. Nesta seção, trabalhamos a representação de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em termos de seu gerador infinitesimal.

Como já foi visto na Seção 1.1, dado um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, o seu gerador infinitesimal é obtido como

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para } x \in D(A).$$

Uma forma diferente para obter o resolvente de A , é pela Observação 1.8 e Teorema de Hille-Yosida, onde mostramos que se $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, então para $x \in X$,

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \text{ para } \operatorname{Re} \lambda > w. \quad (1.25)$$

Ao pensarmos nas aplicações em equações diferenciais parciais, é mais interessante obter $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ do seu gerador infinitesimal, já que a solução de um problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

é dada por $T(t)x$, onde $x \in D(A)$.

No Teorema 1.22 foi mostrada uma maneira de fazer essa representação do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em termos de seu gerador infinitesimal. Aqui nesta seção será usado um método diferente.

Se $T(t)$ satisfaz $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ então o resolvente de A satisfaz a igualdade 1.25, isto é, o resolvente de A é a transformada de Laplace de um semigrupo. Assim, desejamos obter o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ através do resolvente de A invertendo a transformada de Laplace.

Lema 1.6. *Seja B um operador linear limitado. Se $\gamma > \|B\|$, então*

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda. \quad (1.26)$$

A convergência em 1.26 está na topologia do operador uniforme e é uniformemente em t em intervalos limitados.

Demonstração: Ver página 26 de [10].

Lema 1.7. *Seja A o operador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Seja μ real, tal que $\mu > w \geq 0$, e seja*

$$A_\mu = \mu AR(\lambda : A) = \mu^2 R(\mu : A) - \mu I$$

a aproximação de Yosida de A . Então para $Re\lambda > \frac{w\mu}{(\mu-w)}$, temos

$$R(\lambda : A_\mu) = (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R\left(\frac{\mu\lambda}{\mu + \lambda} : A\right)$$

e

$$\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq \mu \left(Re\lambda - \frac{w\mu}{\mu - w} \right)^{-1}.$$

Para $Re\lambda > \varepsilon + \frac{w\mu}{(\mu-w)}$ e $\mu > 2w$, existe uma constante C dependendo somente de M e ε , tal que para todo $x \in D(A)$, temos

$$\|R(\lambda : A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|).$$

Demonstração: Ver página 26 de [10].

Lema 1.8. *Seja A como no Lema 1.7, e $\lambda = \gamma + i\eta$, com $\gamma > w + \varepsilon$ fixado. Para todo $x \in X$, temos*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R(\lambda : A_\mu)x = R(\lambda : A)x,$$

e para todo $Y > 0$, o limite é uniforme em η , para $|\eta| \leq Y$.

Demonstração: Ver página 27 de [10].

Teorema 1.23. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, e seja $\gamma > \max(0, w)$. Se $x \in D(A)$, então*

$$\int_0^t T(s)x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \frac{d\lambda}{\lambda},$$

e a integral do lado direito da igualdade acima converge uniformemente em t , para t em intervalos limitados.

Demonstração: Ver página 28 de [10].

Corolário 1.24. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Seja $\gamma > \max(0, w)$. Se $x \in D(A^2)$, então*

$$T(t)x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda,$$

e para todo $\delta > 0$, a integral converge uniformemente em t , para todo $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$.

Demonstração: Ver página 29 de [10].

Corolário 1.25. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Seja $\gamma > \max(0, w)$. Para todo $x \in X$, temos*

$$\int_0^t (t-s)T(s)x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

e a convergência é uniforme em t para intervalos limitados.

Demonstração: Ver página 29 de [10].

Teorema 1.26. *Seja A um operador densamente definido em X , satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *Para algum $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\rho \supset \sum_\delta = \{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$.*

(ii) *Existe uma constante M tal que,*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \text{ para } \lambda \in \sum_\delta, \lambda \neq 0.$$

Então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$, para alguma constante C . Além disso,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda, \quad (1.27)$$

onde Γ é uma curva suave em $\sum_\delta$ de $\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$, para $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$. A integral 1.27 converge para $t > 0$ na topologia do operador uniforme.

Demonstração: Ver página 30 de [10].

O próximo resultado é dedicado ao problema de representar o C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em termos do seu gerador infinitesimal. Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é igual em algum sentido a e^{tA} onde A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. A igualdade segue se A é um operador linear limitado.

Teorema 1.27. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 semigrupo em X . Se*

$$A(h)x = \frac{T(h)x - x}{h},$$

então para todo $x \in X$, temos

$$T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA(h)}x,$$

e o limite é uniforme em t em qualquer intervalo limitado $[0, T]$.

Demonstração: Seja $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ com $w \geq 0$ e seja A o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Como para todo $h > 0$, $A(h)$ é limitado, o semigrupo $e^{tA(h)}$ está bem definido. Além disso, $A(h)$ e $T(h)$ comutam, logo o mesmo ocorre com $e^{tA(h)}$ e $T(t)$. Ainda

$$\|e^{tA(h)}\| \leq e^{\frac{-t}{h}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right) \frac{\|T(hk)\|}{k!} \leq Me^{\frac{t}{h}(e^{wh}-1)}.$$

Portanto, para $0 < h \leq 1$, temos

$$\|e^{tA(h)}\| \leq Me^{t(e^w-1)}.$$

É fácil ver que para $x \in D(A)$, $e^{(t-s)A(h)}T(s)x$ é diferenciável em s , e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(e^{(t-s)A(h)}T(s)x) &= -A(h)e^{(t-s)A(h)}T(s)x + e^{(t-s)A(h)}AT(s)x \\ &= e^{(t-s)A(h)}(Ax - A(h)x). \end{aligned}$$

Consequentemente, para $0 < h \leq 1$ e $x \in D(A)$ temos

$$\begin{aligned} \|T(t)x - e^{tA(h)}x\| &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{(t-s)A(h)}T(s)x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\| \|T(s)\| ds \|Ax - A(h)x\| \\ &\leq tM^2 e^{t(e^w+w-1)} + \|Ax - A(h)x\|. \end{aligned}$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$ obtemos para $x \in D(A)$. Como $\|e^{tA(h)}\|$ e $\|T(t)\|$ são uniformemente limitados em um intervalo finito de tempo, e como $D(A)$ é denso em X obtemos que vale para todo $x \in X$.

□

1.7 Potências Fracionárias de Operadores

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, e consideremos o problema:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Veremos que se A pertencer a uma classe especial de operadores lineares, então o problema 1.28 terá uma solução u contínua em $t_0 = 0$ e analítica em $(0, +\infty)$, para cada $u_0 \in X$.

Definição 1.7. Um operador linear A em um Espaço de Banach X é denominado um operador setorial, se A é um fechado densamente definido tal que para algum $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e um número real a , o setor

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \mid \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está no conjunto resolvente de A , e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \text{ para todo } \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Exemplo 1.4. (1) Se A é um operador linear limitado em um Espaço de Banach, então A é setorial.

(2) Se A é um operador auto adjunto densamente definido em um Espaço de Hilbert, e se A é limitado inferiormente, então A é setorial.

(3) Se A é setorial em X , e B é setorial em Y , então $A \times B$ é setorial em $X \times Y$, onde $(A \times B)(x, y) = (Ax, By)$ para $x \in D(A)$ e $y \in D(B)$.

(4) Se A é setorial em X e B é um operador linear com $D(B) \supseteq D(A)$, e para todo $x \in D(A)$ $\|Bx\| \leq \epsilon \|Ax\| + K(\epsilon) \|x\|$ (para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno), então $A + B$ é setorial.

Teorema 1.28. Suponha que A é um operador setorial e $\|A(\lambda - A)^{-1}\| \leq C$ para $|\arg \lambda| \geq \phi_0$, $|\lambda| \geq R_0$ para alguma constante positiva R_0, C e $\phi_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Suponha também que B é um operador linear tal que $D(B) \supset D(A)$ com $\|Bx\| \leq \epsilon \|Ax\| + K \|x\|$ para todo $x \in D(A)$ e ϵ, K são constantes positivas com $\epsilon C < 1$; Então $A + B$ é setorial.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \|B(\lambda - A)^{-1}\| &\leq \epsilon \|A(\lambda - A)^{-1}\| + K \|(\lambda - A)^{-1}\| \\ &\leq \epsilon C + K \|\lambda^{-1}[(\lambda - A) + A](\lambda - A)^{-1}\| \\ &\leq \epsilon C + K |\lambda^{-1}| \|I + A(\lambda - A)^{-1}\| \\ &\leq \epsilon C + \frac{K(1 + C)}{|\lambda|} \end{aligned} \tag{1.29}$$

para $|\arg \lambda| \geq \phi_0$ e $|\lambda| \geq R_0$.

Então

$$\begin{aligned} \|(\lambda - (A + B))^{-1}\| &= \|((\lambda - A) - B)^{-1}\| \\ &= \|(I - B(\lambda - A)^{-1})(\lambda - A)^{-1}\| \\ &= \|((\lambda - A)^{-1}(I - B(\lambda - A)^{-1})^{-1}\| \\ &\leq \|((\lambda - A)^{-1}\| \|(I - B(\lambda - A)^{-1})^{-1}\|. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Para $|\arg \lambda| \geq \phi_0$ e $|\lambda|$ suficientemente grande. Em 1.30, vamos fazer uma estimativa para

$$\|(I - B(\lambda - A)^{-1})^{-1}\|.$$

Usando Desigualdade Triangular e a desigualdade 1.29, temos que

$$\begin{aligned}\|(I - B(\lambda - A)^{-1})\| &\geq \|I\| - \|(B(\lambda - A)^{-1})\| \\ &\geq 1 - \varepsilon C + \frac{K(1+C)}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|(I - B(\lambda - A)^{-1})^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \left(\varepsilon C + \frac{K(1+C)}{|\lambda|}\right)} \\ &= \left(1 - \varepsilon C - \frac{K(1+C)}{|\lambda|}\right)^{-1}.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Daí, usando 1.31 em 1.30, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\lambda|} \left(1 - \varepsilon C - \frac{K(1+C)}{|\lambda|}\right)^{-1} &\leq \frac{1+C}{|\lambda|} \left(1 - \varepsilon C - \frac{K(1+C)}{|\lambda|}\right)^{-1} \\ &\leq \frac{L}{|\lambda|},\end{aligned}$$

onde L é a constante $\frac{1-\varepsilon C}{1+C} - \frac{K}{R_0}$, para $|\arg \lambda| \geq \phi_0$ e $|\lambda|$ suficientemente grande.

Disso segue que $A + B$ é setorial.

□

Teorema 1.29. *Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$, onde*

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} dt,\tag{1.32}$$

e $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \rho(-A)$ é a curva definida por

$$\Gamma(s) = \begin{cases} Re^{is} - a, & \text{se } s \in [-\theta, \theta] \\ \frac{s}{\theta} Re^{i\theta} - a, & \text{se } s \in [\theta, +\infty) \\ -\frac{s}{\theta} Re^{i\theta} - a, & \text{se } s \in (-\infty, -\theta] \end{cases}\tag{1.33}$$

com $R > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$.

Além disso, a função $t \rightarrow e^{-tA}$, com $t \in (0, +\infty)$, pode ser estendida para uma função analítica

$$z \rightarrow e^{-zA},$$

onde $z \in \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Temos também que se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, isto é, se $\operatorname{Re} \lambda > b$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|e^{-tA}\| \leq C e^{-bt} \text{ e } \|A e^{-tA}\| \leq \frac{C}{t} e^{-bt}, \text{ para todo } t > 0.\tag{1.34}$$

Por fim, temos que

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}) = -Ae^{-tA}, \text{ para todo } t > 0.$$

Demonstração: Inicialmente, consideramos $a = 0$. Dessa forma, fixando $t > 0$, vamos provar que a integral em 1.32 é convergente. Para isso, é suficiente mostrar que as integrais

$$\int_{\Gamma_1} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \text{ e } \int_{\Gamma_2} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

são convergentes, onde as curvas

$$\Gamma_1 : [\theta, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \text{ e } \Gamma_2 : (-\infty, -\theta] \rightarrow \mathbb{C}$$

são definidas por

$$\Gamma_1(s) = \frac{s}{\theta} R e^{i\theta} \text{ e } \Gamma_2(s) = -\frac{s}{\theta} R e^{-i\theta}.$$

Como A é um operador setorial, note que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \|(\lambda + A)^{-1}\| |e^{\lambda t}| |d\lambda| &\leq \int_{\Gamma_1} \frac{M}{|\lambda|} |e^{\lambda t}| |d\lambda| \\ &= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma_1(s)|} |e^{\Gamma_1(s)t}| |\Gamma_1'(s)| ds \\ &= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma_1(s)|} e^{Re(\Gamma_1(s))t} |\Gamma_1'(s)| ds \\ &= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\frac{s}{\theta} R e^{i\theta}|} e^{Re(\frac{s}{\theta} R e^{i\theta})t} \frac{R}{\theta} e^{i\theta} ds \\ &= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{s} e^{(\frac{s}{\theta} R \cos \theta)t} ds \\ &\leq \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{\theta} e^{(\frac{t}{\theta} R \cos \theta)s} ds < \infty, \end{aligned}$$

já que $\frac{t}{\theta} R \cos \theta < 0$. Logo, temos que

$$\int_{\Gamma_1} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

converge absolutamente e portanto converge.

Analogamente, temos que a integral

$$\int_{\Gamma_2} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

converge.

Vamos mostrar que a integral em 1.32 pode ser considerada na curva $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(s) = \Gamma(s) + k,$$

onde $k > 0$ é uma constante escolhida de modo que

$$\{\Gamma(s) : s \in \mathbb{R}\} \cap \{\Gamma(s) + k : s \in \mathbb{R}\} = \emptyset.$$

Ou seja, vamos mostrar que

$$\int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \int_{\Phi} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda. \quad (1.35)$$

De fato, dado $N > \theta$, sejam $\Gamma_N = \Gamma|_{[-N, N]}$, $\Phi_N = \Phi|_{[-N, N]}$ e defina $\gamma_N^1, \gamma_N^2 : [0, k] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\gamma_N^1(s) = \frac{N}{\theta} Re^{-i\theta} + ks \text{ e } \gamma_N^2(s) = \frac{N}{\theta} Re^{i\theta} + ks.$$

Pelo Teorema de Cauchy, temos que

$$\left(\int_{\gamma_N^1} + \int_{\Phi_N} - \int_{\gamma_N^2} - \int_{\Gamma_N} \right) (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = 0 \quad (1.36)$$

já que a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t}$ é analítica.

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_N^1} \|(\lambda + A)^{-1}\| |e^{\lambda t}| |d\lambda| &\leq \int_{\gamma_N^1} \frac{M}{|\lambda|} e^{Re(\lambda t)} |d\lambda| \\ &\leq \int_0^k \frac{M}{|\gamma_N^1(s)|} e^{Re(\gamma_N^1(s)t)} \|(\gamma_N^1)'(s)\| ds \\ &\leq \int_0^k \frac{M}{|\gamma_N^1(s)|} e^{Re(\gamma_N^1(s)t)} \|(\gamma_N^1)'(s)\| ds \end{aligned}$$

daí segue que $\int_{\gamma_N^1} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Analogamente, $\int_{\gamma_N^2} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Logo, fazendo $N \rightarrow \infty$ em 1.36, temos 1.35.

Mostraremos que e^{-tA} é um semigrupo analítico. Fixado $s, t > 0$, segue que

$$\begin{aligned} e^{-tA} e^{-sA} &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi} (\mu + A)^{-1} e^{\mu s} d\mu \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Phi} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} (\mu + A)^{-1} e^{\mu s} d\mu \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Phi} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} [(\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1}] d\mu \right) d\lambda, \quad (1.37) \end{aligned}$$

usando a seguinte identidade do resolvente, $R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A)$. Mostraremos que para quaisquer $\lambda \in \Gamma$ e $\mu \in \Phi$, temos que

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = 0 \quad (1.38)$$

e

$$\int_{\Phi} e^{\mu s} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu = 2\pi i e^{\lambda s}. \quad (1.39)$$

Para isso, considere $N > \theta$, e $\gamma_N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma_N(w) = \frac{N}{\theta} e^{i\theta} (1 - w) + \frac{N}{\theta} e^{-i\theta} w.$$

Do teorema de Cauchy, segue que

$$\left(\int_{\gamma_N} + \int_{\Gamma_N} \right) e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = 0, \quad (1.40)$$

pois a função $(\mathbb{C} \setminus \{\mu\}) \ni \lambda \rightarrow e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} \in \mathbb{C}$ é analítica. Além disso, considerando N suficientemente grande, temos $|\mu - \lambda| \geq 1$ se $\lambda \in \gamma_N$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda \right| &\leq \int_{\gamma_N} |e^{\lambda t}| |(\mu - \lambda)|^{-1} |d\lambda| \\ &\leq \int_{\gamma_N} |e^{\lambda t}| |d\lambda| \\ &= \int_{\gamma_N} e^{t \operatorname{Re} \lambda} |d\lambda| \\ &= \int_{\gamma_N} e^{t \frac{N}{\theta} R \cos \theta} |d\lambda| \\ &= e^{t \frac{N}{\theta} R \cos \theta} \left(2 \frac{N}{\theta} R \sin \theta \right). \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\gamma_N} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Portanto segue 1.38. A prova de 1.39 é similar.

De 1.37, 1.38, 1.39 e do teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned} e^{-tA} e^{-sA} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Phi} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} [(\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1}] d\mu \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[\int_{\Gamma} \left(\int_{\Phi} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} (\lambda + A)^{-1} d\mu \right) d\lambda \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma} \left(\int_{\Phi} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} (\mu + A)^{-1} d\mu \right) d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Phi} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} (\lambda + A)^{-1} d\lambda \right) d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Phi} \left(\int_{\Gamma} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} (\mu + A)^{-1} d\lambda \right) d\mu \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \left(\int_{\Phi} e^{\mu s} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu \right) (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\
& - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Phi} e^{\mu s} \left(\int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda \right) (\mu + A)^{-1} d\mu \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} 2\pi i e^{\lambda s} (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\
& = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{\Gamma} e^{\lambda t + \lambda s} (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\
& = e^{-A(t+s)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $e^{-At}e^{-As} = e^{-(t+s)A}$.

Seja $\varepsilon < \min \left\{ \theta - \frac{\pi}{2}, \pi - \theta \right\}$, nesta etapa mostraremos que podemos estender a aplicação $(0, +\infty) \ni t \mapsto e^{-tA}$ para o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\}$.

De fato, seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $|\arg(z)| < \varepsilon$, então

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_1} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \right| & \leq \int_{\Gamma_1} |(\lambda + A)^{-1}| |e^{\lambda z}| |d\lambda| \\
& \leq \int_{\Gamma_1} \frac{M}{|\lambda|} |e^{Re(\lambda z)}| |dz| \\
& = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma_1(s)|} e^{Re[\Gamma_1(s)z]} |(\Gamma_1)'(s)| ds \\
& = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{\left| \frac{s}{\theta} Re^{i\theta} \right|} e^{Re[s\theta^{-1} Re^{i\theta} |z| e^{i Arg(z)}]} \left| \frac{R}{\theta} e^{i\theta} \right| ds \\
& = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{s} e^{s\theta^{-1} R|z| \cos[\theta + Arg(z)]} ds \\
& < \infty.
\end{aligned}$$

A convergência segue do fato de $\theta + Arg(z) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, e portanto $\cos(\theta + Arg(z)) < 0$. Mostremos que a aplicação

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\} \ni z \mapsto e^{-zA}$$

é analítica. Para isso, fixe $N > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|arg(z)| < \varepsilon$. Dado $\lambda \in \Gamma([-N, N])$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\| (\lambda + A)^{-1} \left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0} \right) - (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z_0} \right\| & = \left\| (\lambda + A)^{-1} \right\| \left| \frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0} - \lambda e^{\lambda z_0} \right| \\
& = \left\| (\lambda + A)^{-1} \right\| \left| \frac{\lambda e^{\lambda z_0} (e^{\lambda(z-z_0)} - 1)}{\lambda(z - z_0)} - \lambda e^{\lambda z_0} \right| \\
& = \left\| (\lambda + A)^{-1} \right\| |\lambda e^{\lambda z_0}| \left| \frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{\lambda(z - z_0)} - 1 \right|. \quad (1.41)
\end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto $\Gamma([-N, N])$ é compacto, segue que a aplicação $\lambda \mapsto \|(\lambda + A)^{-1}\| |\lambda e^{\lambda z_0}|$ é contínua. Portanto, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| |\lambda e^{\lambda z_0}| \leq C_1 \text{ e } |\lambda||z - z_0| \leq C_2|z - z_0|,$$

para todo $\lambda \in \Gamma([-N, N])$.

Além disso, como $(e^z - 1)z^{-1} \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow 0$. Então, dado $\varepsilon' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| < \frac{\varepsilon'}{C_1},$$

sempre que $0 < |z| < \delta$. Dessa forma, para qualquer $\lambda \in \Gamma([-N, N])$, tem-se

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| |\lambda e^{\lambda z_0}| \left| \frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{\lambda(z-z_0)} - 1 \right| \leq C_1 \left| \frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{\lambda(z-z_0)} - 1 \right|$$

sempre que $|z - z_0| < \frac{\delta}{C_2}$. Segue que de 1.41 que $(\lambda + A)^{-1} \left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0} \right)$ converge uniformemente para $(\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z_0}$ quando $z \rightarrow z_0$ com $\lambda \in \Gamma([-N, N])$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda - \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z_0} d\lambda \right) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} \left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0} \right) d\lambda \\ &= \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z_0} d\lambda, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\} \mapsto \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$ é analítica. Dado $K \subset \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\}$ um conjunto compacto, mostraremos que a convergência

$$\int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \rightarrow \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$$

é uniforme sobre K .

Como $d(0, K) > 0$, existe $r > 0$ tal que,

$$K \subset \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\} \cap [\mathbb{C} \setminus B(0, r)].$$

Por outro lado, dado $z \in K$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda - \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\Gamma(s) + A)^{-1} e^{\Gamma(s)z} \Gamma'(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{-N}^N (\Gamma(s) + A)^{-1} e^{\Gamma(s)z} \Gamma'(s) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{-N} + \int_N^{+\infty} (\Gamma(s) + A)^{-1} e^{\Gamma(s)z} \Gamma'(s) ds \right| \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_N^{+\infty} \right) \|(\Gamma(s) + A)^{-1}\| |e^{\Gamma(s)z}| |\Gamma'(s)| ds \\
&\leq 2 \int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)re^{-i\varepsilon}}| |\Gamma'(s)| ds, \tag{1.42}
\end{aligned}$$

observe que a última desigualdade ocorre pois para todo $s \in [\theta, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned}
|e^{\Gamma(s)z}| &= e^{\operatorname{Re}(\Gamma(s)z)} \\
&= e^{|\Gamma(s)z| \cos(\theta + \arg z)} \\
&\leq e^{|\Gamma(s)r| \cos(\theta + \arg z)} \\
&\leq e^{|\Gamma(s)r| \cos(\theta - \varepsilon)} \\
&= |e^{\Gamma(s)re^{-i\varepsilon}}|
\end{aligned}$$

uma vez que $\frac{\pi}{2} < \theta - \varepsilon < \theta + \arg(z) < \pi$, logo $\cos(\theta + \arg(z)) < \cos(\theta - \varepsilon)$. Analogamente, usando $-\pi < \arg(z) - \theta < \varepsilon - \theta < -\frac{\pi}{2}$, concluimos que $|e^{\Gamma(-s)z}| \leq |e^{\Gamma(s)re^{-i\varepsilon}}|$ para todo $s \in [0, +\infty)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-N} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)z}| |\Gamma'(s)| ds &\leq \int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(-s)|} |e^{\Gamma(-s)z}| |\Gamma'(-s)| ds \\
&\leq \int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)re^{-i\varepsilon}}| |\Gamma'(s)| ds
\end{aligned}$$

e

$$\int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)z}| |\Gamma'(s)| ds \leq \int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)re^{-i\varepsilon}}| |\Gamma'(s)| ds.$$

Por fim, como $(\theta - \varepsilon) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ temos que $\cos(\theta - \varepsilon) < 0$ e então

$$\int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)re^{-i\varepsilon}}| |\Gamma'(s)| ds \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Tal integral não depende de $z \in k$, logo de segue o que queríamos.

Portanto, a aplicação $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\} \mapsto \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$ é analítica.

Além disso,

$$\int_{\Gamma_N} \frac{d}{dz} (e^{-zA}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z} d\lambda = \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z} d\lambda.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z} d\lambda &= \int_{\Gamma} ((\lambda + A)(\lambda + A)^{-1} - A(\lambda + A)^{-1}) e^{\lambda z} d\lambda \\
&= \int_{\Gamma} I e^{\lambda z} d\lambda - \int_{\Gamma} A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \\
&= - \int_{\Gamma} A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -A \left(\int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \right) \\
&= -A e^{-zA}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dz}(e^{-zA}) = -A e^{-zA}, \text{ para todo } z \in \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\}.$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}) = -A e^{-tA}, \text{ para todo } t > 0.$$

Mostraremos as Desigualdades 1.34. Para isto, considere $t > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\|e^{-tA}\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{t\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right\|.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Afirmamos que

$$\int_{t\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu = \int_{\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu. \tag{1.44}$$

De fato, suponha $t \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{t\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu - \int_{\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \\
&= \left(\int_{t\Gamma|_{(-\infty, -t^{-1}\theta]}} + \int_{t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta, t^{-1}\theta]}} + \int_{t\Gamma|_{(-t^{-1}\theta, +\infty)}} \right) \left[\left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right] \\
&- \left(\int_{\Gamma|_{(-\infty, -\theta]}} + \int_{\Gamma|_{(-\theta, -\theta]}} + \int_{\Gamma|_{(\theta, \infty)}} \right) \left[\left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right] \\
&= \left(\int_{t\Gamma|_{(-\infty, -t^{-1}\theta]}} - \int_{\Gamma|_{(-\infty, -\theta]}} \right) \left[\left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right] \\
&+ \left(\int_{t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta, t^{-1}\theta]}} - \int_{\Gamma|_{(-\theta, \theta]}} \right) \left[\left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right] \\
&+ \left(\int_{t\Gamma|_{(-t^{-1}\theta, \infty)}} - \int_{\Gamma|_{(\theta, \infty)}} \right) \left[\left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right] = 0,
\end{aligned}$$

note que $t\Gamma|_{(-\infty, -t^{-1}\theta]}$ e $t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta, +\infty)}$ são reparametrizações de $\Gamma|_{(-\infty, -\theta]}$ e $\Gamma|_{(\theta, \infty]}$, respectivamente, e $t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta, t^{-1}\theta]}$, $-\Gamma|_{[-\theta, \theta]}$ formam uma curva fechada. Logo, podemos aplicar o teorema de Cauchy, já que o integrando é uma função analítica. De modo análogo, mostramos que 1.44 ocorre se $t \geq 1$.

Então, de 1.43 e 1.44 segue que

$$\begin{aligned}
\|e^{-tA}\| &= \left\| \int_{\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\| \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} \right\| \frac{|e^{\mu}|}{t} d\mu \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu}{\left| \frac{\mu}{t} \right|} \frac{|e^{\mu}|}{t} d\mu \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu}{|\mu|} |e^{\mu}| d\mu = C.
\end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos, temos

$$\begin{aligned}
\|Ae^{-tA}\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{t\Gamma} A \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{1}{t} d\mu \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi t} \left\| \int_{t\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} + A \right) e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} - \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} e^{\mu} d\mu \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi t} \left\| \int_{t\Gamma} \left[I - \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} \right] e^{\mu} d\mu \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi t} \left\| \int_{\Gamma} \left[I - \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} \right] e^{\mu} d\mu \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi t} \int_{\Gamma} \left\| I - \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} \right\| |e^{\mu}| d\mu \\
&\leq \frac{1}{2\pi t} \int_{\Gamma} \left(1 + \left| \frac{\mu}{t} \right| \frac{\mu}{\left| \frac{\mu}{t} \right|} \right) |e^{\mu}| d\mu \\
&\leq \frac{1+M}{2\pi t} \int_{\Gamma} |e^{\mu}| d\mu \\
&\leq \frac{C}{t}.
\end{aligned}$$

Mostraremos que $e^{-tA}x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $x \in X$. Para isto, suponha inicialmente que $x \in D(A)$. Note que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \lambda^{-1} x d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \lambda^{-1} x d\lambda \right) x = x.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\|e^{-tA}x - x\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \lambda^{-1} x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\lambda t} [(\lambda + A)^{-1} - \lambda^{-1}] x d\lambda \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} [I - (\lambda + A)\lambda^{-1}] x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda + A)^{-1} A x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{t\Gamma} e^{\mu} \frac{t}{\mu} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} A x \frac{1}{t} d\mu \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\mu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{t} + A \right)^{-1} A x d\mu \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|} \frac{M}{\left| \frac{\mu}{t} \right|} \|A x\| |d\mu| \\
&= \left(\frac{M \|A x\|}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|^2} |d\mu| \right) t.
\end{aligned}$$

Portanto, $e^{-tA}x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $x \in D(A)$.

Fixado $y \in X$ e dado $\varepsilon > 0$, como $\overline{D(A)} = X$, seja $x \in D(A)$ tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2(c+1)}$. Do que já foi provado, existe $\delta > 0$ tal que $\|e^{-At}x - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $t \in (0, \delta)$. Segue então que

$$\begin{aligned}
\|e^{-tA}y - y\| &\leq \|e^{-tA}y - e^{-tA}x\| + \|e^{-tA}x - x\| + \|x - y\| \\
&\leq \|e^{-tA}x\| \|x - y\| + \|e^{-tA}x - x\| + \|x - y\| \\
&= (\|e^{-tA}\| + 1) \|x - y\| + \|e^{-tA}x - x\| \\
&< (C + 1) \frac{\varepsilon}{2(C + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $t \in (0, \delta)$. Portanto, $e^{-tA}y \rightarrow y$ quando $t \rightarrow 0^+$. Concluimos então que $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo analítico.

Provemos que $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$. Para isto, considere $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{-tA}x) = -Ae^{-tA}x &= - \int_{\Gamma} A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} x d\lambda \\
&= - \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} A x d\lambda \\
&= -e^{-tA} A x.
\end{aligned}$$

Seja $\phi : [0, +\infty) \rightarrow X$ definida por

$$\phi(s) = - \int_0^s e^{-tA} A x.$$

Então

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = -e^{-tA} A x = \frac{d}{dt}\phi(t), \text{ para todo } t > 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe $y \in X$ tal que

$$e^{-tA}x - \phi(t) = y, \text{ para todo } t > 0.$$

Como a aplicação $[0, \infty) \ni t \mapsto e^{-tA}x - \phi(t) \in X$ é contínua, temos que $e^{-tA}x - \phi(t) = y$, para todo $t \geq 0$ e $y = e^{-0A}x - \phi(0) = x$. Logo a aplicação

$$[0, \infty) \ni t \mapsto e^{-At}x \in X$$

é diferenciável em $t = 0$ e

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}x)(0) = -e^{-0A}Ax = -Ax.$$

Portanto se L é o gerador infinitesimal de $\{e^{-tA}\}_{t \leq 0}$, segue que $D(A) \subset D(L)$ e $L = -A$ em $D(A)$. Por fim, seja $T : X \rightarrow X$ o operador linear definido por

$$Tx = \int_0^{+\infty} e^{-tA}x dt. \quad (1.45)$$

Como $\|e^{-tA}\| \leq C$ para todo $t \leq 0$, note que a integral 1.45 converge e portanto T está bem definido. Dado $x \in X$ já provamos que $e^{-tA}x \in D(A)$ para todo $t > 0$. Como A é fechado, dado $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}e^{-tA}x dt \in D(A) \text{ e } A \left(\int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}e^{-tA}x dt \right) = \int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}Ae^{-tA}x dt.$$

Usando integração por partes, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} A \left(\int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}e^{-tA}x dt \right) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}Ae^{-tA}x dt \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} A \left((-e^{-t}e^{-tA}x) \Big|_{\frac{1}{j}}^j - \int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}e^{-tA}x dt \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} A \left(e^{-\frac{1}{j}}e^{-A\frac{1}{j}}x - e^{-j}e^{-Aj}x - \int_{\frac{1}{j}}^j e^{-t}e^{-tA}x dt \right) \\ &= x - \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-tA}x dt \\ &= x - Tx. \end{aligned}$$

Novamente do fato de A ser fechado, segue que $Tx \in D(A)$ e $A(Tx) = x - Tx$. Dado $x \in D(L)$ temos que $e^{-tA}x \in D(A) \subset D(L)$ e

$$Le^{-tA}x = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-sA}e^{-tA}x - e^{-tA}x}{s}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-tA} e^{-sA} x - e^{-tA} x}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} e^{-tA} \left(\frac{e^{-sA} x - x}{s} \right) \\
&= e^{-tA} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-sA} x - x}{s} \\
&= e^{-tA} Lx.
\end{aligned}$$

Assim, se $x \in D(L)$ temos que

$$\begin{aligned}
T(Lx) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-tA} Lx dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} L e^{-tA} x dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} (-A) e^{-tA} x dt \\
&= -A \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-tA} x dt \right) \\
&= -A(Tx) \\
&= -x + Tx.
\end{aligned}$$

Portanto $T(Lx) = -x + Tx$ e $x = -T(Lx) + Tx \in D(A)$. Logo, $D(L) \subset D(A)$. Ou seja, $D(L) = D(A)$ e $L = -A$.

Para o caso $a \in \mathbb{R}$ qualquer, temos que

$$\begin{aligned}
e^{-tA} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda + a) + (-a + A)]^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} [\mu + (-a + A)]^{-1} e^{(\mu-a)t} d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} e^{-at} \int_{\tilde{\Gamma}} [\mu + (-a + A)]^{-1} e^{\mu t} d\mu,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\Gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é definido por $\tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s) + a$. Seja $\tilde{A} = -aI + A$, temos que $\tilde{A}$ é um operador setorial com vértice $a = 0$ e $\tilde{\Gamma}$ é exatamente a curva Γ quando tomamos $a = 0$, portanto podemos aplicar o que já foi provado, ao semigrupo analítico $T(t)_{t \leq 0}$ definido por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+a} (\mu + (-a + A))^{-1} e^{\mu t} d\mu$$

de onde todas as afirmações do teorema seguem. □

Seja A um operador setorial com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, é possível definir o operador de potência fracionária $A^{-\alpha}$ com $\alpha > 0$ através dos operadores e^{-At} . Para mostrar essa definição, consideremos a é um escalar positivo, então $a^{-\alpha}$ é a potência usual $(-\alpha)$ de a . Escrevemos

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-at} dt, \quad (1.46)$$

onde a função gama $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-at} dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-x} \frac{1}{a} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} a^{-\alpha+1} e^{-x} a^{-1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} a^{-\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} a^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \\ &= a^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Seja A é um operador setorial, como já definimos o operador e^{-tA} , podemos usar a igualdade 1.46 para definir $A^{-\alpha}$. A condição $a > 0$ se traduz para $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$.

Definição 1.8. *Suponha que A é um operador setorial e $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, definimos*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt. \quad (1.47)$$

Exemplo 1.5. *Temos que A^{-1} dado pela definição 1.8 é o operador inverso de A . De fato, dado $x \in D(A)$ temos*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-At} x dt &= (-A^{-1} e^{-At} x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-A^{-1} e^{-At} x) + A^{-1} x \\ &= A^{-1} x. \end{aligned}$$

Como a integral $\int_0^{\infty} e^{-At} dt$ e A^{-1} são operadores lineares contínuos sobre X que coincidem no subespaço denso $D(A)$, segue que eles são iguais.

Teorema 1.30. *Se A é um operador setorial em X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado e injetivo em X e satisfaz $A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ para quaisquer $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Também, para $0 < \alpha < 1$, tem-se*

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda. \quad (1.48)$$

Demonstração: Para algum $\delta > 0$, $\operatorname{Re}\sigma(A) > \delta$. Então, pelo Teorema 1.43, tem-se

$$\|e^{-At}\| \leq Ce^{-\delta t},$$

para $t > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}x\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} x dt \right\| \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\delta t} dt \|x\| \end{aligned}$$

e portanto $A^{-\alpha}$ é limitada quando $\alpha > 0$. Para $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt \right) \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} e^{-As} ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} \left(\int_0^\infty s^{\beta-1} e^{-As} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-A(t+s)} ds \right) dt. \end{aligned}$$

Para cada $t > 0$ fixado, fazendo a mudança de variável $\mu = t + s \Rightarrow s = \mu - t$ obtemos

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-A(t+s)} ds = \int_t^\infty t^{\alpha-1} (\mu - t)^{\beta-1} e^{-A\mu} d\mu.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_t^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-A(t+s)} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^\mu t^{\alpha-1} (\mu - t)^{\beta-1} e^{-A\mu} dt \right) d\mu. \end{aligned}$$

Para cada $\mu > 0$ fixado, fazendo $t = \mu v$ temos

$$\int_0^\mu t^{\alpha-1} (\mu - t)^{\beta-1} e^{-A\mu} dt = \int_0^1 (\mu v)^{\alpha-1} (\mu - \mu v)^{\beta-1} e^{-A\mu} \mu dv.$$

Logo

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^1 (\mu v)^{\alpha-1} (\mu - \mu v)^{\beta-1} e^{-A\mu} \mu dv \right) d\mu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^1 v^{\alpha-1} (1 - v)^{\beta-1} dv \right) \mu^{\alpha+\beta-1} e^{-A\mu} d\mu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\int_0^1 v^{\alpha-1} (1 - v)^{\beta-1} dv \right) \left(\int_0^\infty \mu^{\alpha+\beta-1} e^{-A\mu} d\mu \right) \\ &= A^{-(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

usando $\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Para um inteiro $n > \alpha$,

$$A^{-n} = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}.$$

Como $A^{-1} : X \longrightarrow X$ é injetivo, então $A^{-n} = (A^{-1})^n$, que corresponde a n -ésima potência de A^{-1} , também é injetiva. Por fim, dado $\lambda \geq 0$, temos que pela

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-At}e^{-\lambda t}dt$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1}d\lambda &= \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} \left(\int_0^\infty e^{-At}e^{-\lambda t}dt \right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}e^{-At}e^{-\lambda t}dt \right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}e^{-At}e^{-\lambda t}d\lambda \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-At} \left(\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda t}d\lambda \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-At} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mu}{t} \right)^{-\alpha} e^{-\mu} \frac{1}{t} d\mu \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-At} t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty \mu^{-\alpha} e^{-\mu} d\mu \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-At} t^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) dt \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)A^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Por fim, usando a seguinte identidade,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}, \text{ para } 0 < \alpha < 1,$$

temos

$$\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1}d\lambda = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}A^{-\alpha}.$$

Portanto,

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1}d\lambda.$$

□

Definição 1.9. Dado $\alpha > 0$, definimos $A^{-\alpha}$ como sendo o operador inverso de A^α , $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$ e A^0 como sendo o operador identidade $I : X \longrightarrow X$.

Exemplo 1.6. A^1 é igual ao inverso de A^{-1} , ou seja, $A^1 = A$.

De fato, temos que $D(A^1) = R(A^{-1}) = D(A)$ e $A^1 = (A^{-1})^{-1} = A$.

Propriedades:

- (1) Se $\alpha > 0$, A^α é fechado e densamente definido;
- (2) Se $\alpha > \beta$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$;
- (3) $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ no $D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$;
- (4) $A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha$ no $D(A^\alpha)$, $t > 0$.

Teorema 1.31. Suponha que A seja setorial e $\operatorname{Re}\sigma(A) > \delta > 0$. Para $\alpha \geq 0$, existe $C_\alpha < \infty$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \text{ para } t > 0,$$

e se $0 < \alpha \leq 1$, $x \in D(A^\alpha)$,

$$\|(e^{-At} - 1)x\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Além disso, C_α é limitado para α em qualquer intervalo compacto de $(0, \infty)$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.29, temos que

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-\delta t}, \quad \|A e^{-At}\| \leq C t^{-1} e^{-\delta t}, \text{ para } t > 0.$$

Então, para $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$\begin{aligned} \|A^\alpha e^{-At}\| &= \|(A e^{-A \frac{t}{\alpha}})^\alpha\| \\ &\leq \|A e^{-A \frac{t}{\alpha}}\|^\alpha \\ &\leq \left[C \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{-1} e^{-\delta \frac{t}{\alpha}} \right]^\alpha \\ &= C^\alpha \frac{t^{-\alpha}}{\alpha^{-\alpha}} e^{-\delta t} \\ &= C^\alpha \alpha^\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \\ &= (C\alpha)^\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Se $0 < \beta < 1$, $t > 0$,

$$\begin{aligned} \|A^\beta e^{-At}\| &= \|A^{\beta-1+1} e^{-At}\| \\ &= \|A A^{-(1-\beta)} e^{-At}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| A e^{-At} A^{-(1-\beta)} \right\| \\
&\leq \left\| A e^{-At} \right\| \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty s^{-\beta} \left\| e^{-As} \right\| ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty s^{-\beta} \left\| A e^{-A(t+s)} \right\| ds.
\end{aligned}$$

Dado $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned}
-\int_0^t A^{1-\alpha} e^{-Aw} A^\alpha x dw &= e^{-At} x - \lim_{w \rightarrow 0^+} e^{-Aw} x \\
&= e^{-At} x - x \\
&= (e^{-At} - I)x,
\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{-At} x) &= -A e^{-At} x \\
&= -A^{1-\alpha} A^\alpha e^{-At} x \\
&= -A^{1-\alpha} e^{-At} A^\alpha x, \text{ para todo } t > 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|(e^{-At} - I)x\| &= \left\| \int_0^t A^{1-\alpha} e^{-Aw} A^\alpha x dw \right\| \\
&\leq \int_0^t \|A^{1-\alpha} e^{-Aw}\| \|A^\alpha x\| dw \\
&\leq \left(\int_0^t C w^{-(1-\alpha)} e^{-\delta w} dw \right) \|A^\alpha x\| \\
&\leq C \left(\int_0^t w^{-(1-\alpha)} dw \right) \|A^\alpha x\| \\
&\leq C \left(\frac{w^\alpha}{\alpha} \Big|_0^t \right) \|A^\alpha x\| \\
&= \frac{1}{\alpha} C t^\alpha \|A^\alpha x\|.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.32. Se $0 \leq \alpha \leq 1$, $x \in D(A)$, então existe $C > 0$, tal que

$$\|A^\alpha x\| \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}. \quad (1.49)$$

Além disso, existe uma constante $C' > 0$, tal que

$$\|A^\alpha x\| \leq C' \left(\varepsilon \|Ax\| + \varepsilon^{-\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \|x\| \right), \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

(obs: Aqui C e C' são constantes independentes de α)

Demonstração: Pelo Teorema 1.29, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|e^{-At}\| \leq C, \text{ para todo } t > 0.$$

Dados $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\alpha)A^{-\alpha}x\| &= \left\| \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} x dt \right\| \\ &= \left\| \left(\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{+\infty} \right) t^{\alpha-1} e^{-At} x dt \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^\varepsilon t^{\alpha-1} e^{-At} x dt \right\| + \left\| \int_\varepsilon^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} x dt \right\| \\ &\leq \int_0^\varepsilon t^{\alpha-1} \|e^{-At}\| \|x\| dt \\ &\quad + \left\| \left(-\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-1} A^{-1} e^{-At} x \right) + \varepsilon^{\alpha-1} e^{-A\varepsilon} A^{-1} x + \int_\varepsilon^{+\infty} (\alpha-1) t^{\alpha-2} e^{-At} A^{-1} x dt \right\| \\ &\leq \int_0^\varepsilon t^{\alpha-1} C \|x\| dt + \|\varepsilon^{\alpha-1} e^{-A\varepsilon} A^{-1} x\| + \left\| \int_\varepsilon^{+\infty} (\alpha-1) t^{\alpha-2} e^{-At} A^{-1} x dt \right\| \\ &\leq C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1} + (\alpha-1) \int_\varepsilon^{+\infty} t^{\alpha-2} C \|A^{-1}x\| dt \\ &\leq C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Fixados $x \in X \setminus \{0\}$ e $\alpha \in (0, 1)$, como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1} = +\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1}$$

e a aplicação $\varepsilon \mapsto C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1} \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon \in (0, +\infty)$ é contínua, segue que ela possui um ponto de mínimo. Além disso, tal aplicação é C^1 e para obter o ponto de mínimo considere

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1} \right) = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C \|x\| \varepsilon^{\alpha-1} + 2C \|A^{-1}x\| (\alpha-1) \varepsilon^{(\alpha-2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow C \|x\| \varepsilon^{\alpha-1} &= -2C \|A^{-1}x\| (\alpha-1) \varepsilon^{(\alpha-2)} \\ \Leftrightarrow \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{\varepsilon^{\alpha-2}} &= \frac{-2C \|A^{-1}x\| (\alpha-1)}{C \|x\|} \\ \Leftrightarrow \varepsilon &= \frac{2 \|A^{-1}x\| (1-\alpha)}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Assim, o ponto de mínimo da função $C \|x\| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1} \in \mathbb{R}$ é

$$\varepsilon_0 = \frac{2 \|A^{-1}x\| (1-\alpha)}{\|x\|},$$

e o valor mínimo dessa aplicação é

$$\begin{aligned}
C \|x\| \frac{\varepsilon_0^\alpha}{\alpha} + 2C \|A^{-1}x\| \varepsilon_0^{\alpha-1} &= \frac{C \|x\|}{\alpha} \left(\frac{2 \|A^{-1}x\| (1-\alpha)}{\|x\|} \right)^\alpha \\
&+ 2C \|A^{-1}x\| \left(\frac{2 \|A^{-1}x\| (1-\alpha)}{\|x\|} \right)^{\alpha-1} \\
&= \frac{C}{\alpha} \|x\|^{1-\alpha} 2^\alpha \|A^{-1}x\|^\alpha (1-\alpha)^\alpha \\
&+ 2^\alpha C \|A^{-1}x\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} \\
&= \left(\frac{C}{\alpha} [2(1-\alpha)]^\alpha + 2C [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \right) \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|\Gamma(\alpha)A^{-\alpha}x\| \leq \left(\frac{C}{\alpha} [2(1-\alpha)]^\alpha + 2C [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \right) \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|A^{-\alpha}x\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C}{\alpha} [2(1-\alpha)]^\alpha + 2C [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \right) \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C}{\alpha} \frac{[2(1-\alpha)]^\alpha}{1-\alpha} + \frac{2C [2(1-\alpha)]^{\alpha-1}}{\alpha} \right) \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2C}{\alpha} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} + \frac{2C}{\alpha} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \right) \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha \\
&= \frac{4C}{\Gamma(\alpha)\alpha} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha \\
&= \frac{4C}{\Gamma(\alpha+1)} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha.
\end{aligned}$$

Afirmamos que existe uma constante K tal que

$$\frac{4C}{\Gamma(\alpha+1)} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} \leq K, \text{ para todo } \alpha \in (0, 1).$$

De fato, basta notar que a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \frac{4C}{\Gamma(\alpha+1)} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 4C, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

é contínua, já que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} [2(1-\alpha)]^{\alpha-1} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} e^{\ln([2(1-\alpha)]^{\alpha-1})} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} e^{(\alpha-1)\ln(2(1-\alpha))} = 1.$$

Assim,

$$\|A^{-\alpha}x\| \leq K \|x\|^{1-\alpha} \|A^{-1}x\|^\alpha$$

para quaisquer $x \in X$ e $\alpha \in (0, 1)$. Portanto, dado $x \in D(A)$ e $\alpha \in (0, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}\|A^\alpha x\| &= \|A^{-(1-\alpha)}(Ax)\| \\ &\leq K \|Ax\|^{1-(1-\alpha)} \|A^{-1}(Ax)\|^{1-\alpha} \\ &= K \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha},\end{aligned}$$

considerando $K = C$, provamos a Desigualdade 1.49. Além disso, dados $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, de 1.50 temos que

$$\|A^{-\alpha}x\| \leq \frac{C \|x\| \varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2C}{\Gamma(\alpha)} \|A^{-1}x\| \varepsilon^{\alpha-1}.$$

Então, dados $w \in (0, 1)$, $\delta > 0$ e $y \in D(A)$, considerando $\varepsilon = \delta^{\frac{1}{1-w}}$, $x = Ay$ e $\alpha = 1 - w$ na estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned}\|A^w y\| &= \|A^{-(1-w)} Ay\| \\ &\leq \frac{C \|Ay\| \delta}{\Gamma(2-w)} + \frac{2C}{\Gamma(1-w)} \|A^{-1}Ay\| \delta^{-\frac{w}{1-w}} \\ &\leq C'(\delta \|Ay\| + \delta^{-\frac{w}{1-w}} \|y\|),\end{aligned}$$

já que $\inf \{\Gamma(\alpha) : \alpha \in (0, +\infty)\} > 0$. Daí, concluímos a segunda parte do teorema. □

Observação 1.9. *Pelo Teorema 1.29, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-\delta t} \text{ e } \|Ae^{-At}\| \leq C t^{-1} e^{-\delta t}, \text{ para todo } t > 0,$$

e além disso, pelo Teorema 1.32, temos

$$\|A^\alpha x\| \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}, \text{ para quaisquer } x \in D(A) \text{ e } \alpha \in [0, 1],$$

Disso segue que

$$\begin{aligned}\|A^\alpha e^{-At}\| &\leq C \|Ae^{-At}\|^\alpha \|e^{-At}\|^{1-\alpha} \\ &\leq C (C t^{-1} e^{-\delta t})^\alpha (C e^{-\delta t})^{1-\alpha} \\ &= C C^\alpha t^{-\alpha} e^{-\alpha \delta t} C^{1-\alpha} e^{-(1-\alpha)\delta t} \\ &= C^2 t^{-\alpha} e^{-\delta t}.\end{aligned}$$

Corolário 1.33. *Se A é um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, e se B é um operador linear tal que $BA^{-\alpha}$ é limitado em X , para algum α em $[0, 1)$, então $A + B$ é setorial.*

Demonstração: Como A é setorial e $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, existe um ângulo $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e uma constante M tais que o setor

$$S_{0,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \phi\}$$

está contido em $\rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in S_{0,\phi}.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} \|A(\lambda - A)^{-1}\| &= \|[\lambda - (\lambda - A)](\lambda - A)^{-1}\| \\ &= \|\lambda(\lambda - A)^{-1} - I\| \\ &\leq |\lambda| \|(\lambda - A)^{-1}\| + 1 \\ &\leq |\lambda| \frac{M}{|\lambda|} + 1 \\ &= M + 1. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 1.32, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|Bx\| &= \|BA^{-\alpha}A^{\alpha}x\| \\ &\leq \|BA^{-\alpha}\| \|A^{\alpha}x\| \\ &\leq \|BA^{-\alpha}\| C \left(\varepsilon \|Ax\| + \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|x\| \right) \\ &= \|BA^{-\alpha}\| C\varepsilon \|Ax\| + \|BA^{-\alpha}\| C\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|x\|, \end{aligned} \tag{1.51}$$

para quaisquer $x \in D(A)$ e $\varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon < [\|BA^{-\alpha}\| C(M + 1)]^{-1}$ na estimativa 1.60 acima, segue do Teorema 1.28 que $A + B$ é setorial.

□

Teorema 1.34. *Suponha que A e B são operadores setoriais em X com $D(A) = D(B)$, $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) > 0$, e para algum α em $[0, 1)$, $(A - B)A^{-\alpha}$ é limitado em X . Então, para qualquer β em $[0, 1]$, $D(A^{\beta}) = D(B^{\beta})$ e $A^{\beta}B^{-\beta}$ e $B^{\beta}A^{-\beta}$ são limitados em X .*

Demonstração: Pelo Teorema 1.32, temos que

$$\begin{aligned} \|A^{\beta}(\lambda + A)^{-1}x\| &\leq \|A(\lambda + A)^{-1}x\|^{\beta} \|(\lambda + A)^{-1}x\|^{1-\beta} \\ &\leq (\|A(\lambda + A)^{-1}\| \|x\|)^{\beta} (\|(\lambda + A)^{-1}\| \|x\|)^{1-\beta} \\ &\leq [(M + 1) \|x\|]^{\beta} \left(\frac{M}{|\lambda|} \|x\| \right)^{1-\beta} \\ &\leq (M + 1) |\lambda|^{\beta-1} \|x\|, \end{aligned}$$

para $0 \leq \beta \leq 1$, $|\pi - \arg \lambda| \geq \phi$, $\phi < \frac{\pi}{2}$, $x \in X$ e $\lambda > 0$.

Logo, para $\lambda > 0$, temos que $A^\beta(\lambda + A)^{-1}$ é limitado em X e

$$\left\| A^\beta(\lambda + A)^{-1} \right\| \leq (M + 1)|\lambda|^{\beta-1}. \quad (1.52)$$

De maneira análoga, temos que $B^\beta(\lambda + B)^{-1}$ é limitado em X e

$$\left\| B^\beta(\lambda + B)^{-1} \right\| \leq (M + 1)|\lambda|^{\beta-1}, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Além disso, dado $\lambda > 0$, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1} &= (\lambda + A)^{-1}[(\lambda + B) - (\lambda + A)](\lambda + B)^{-1} \\ &= (\lambda + A)^{-1} - (\lambda + B)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Assim,

$$\begin{aligned} [I + A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}]A^\alpha(\lambda + B)^{-1} &= A^\alpha(\lambda + B)^{-1} + A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1} \\ &= A^\alpha(\lambda + B)^{-1} + A^\alpha(\lambda + A)^{-1} - A^\alpha(\lambda + B)^{-1} \\ &= A^\alpha(\lambda + A)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Como $\left\| A^\alpha(\lambda + A)^{-1} \right\| \leq (M + 1)|\lambda|^{\alpha-1}$, e $(B - A)A^{-\alpha}$ é limitado, temos que

$$\left\| A^\alpha(\lambda + A)^{-1} \right\| \left\| (B - A)A^{-\alpha} \right\| \leq (M + 1)|\lambda|^{\alpha-1}K.$$

E note que

$$\begin{aligned} (M + 1)|\lambda|^{\alpha-1}K &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow |\lambda|^{\alpha-1} &< \frac{1}{2K(M + 1)} \\ \Leftrightarrow |\lambda| &> (2K(M + 1))^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\| A^\alpha(\lambda + A)^{-1} \right\| \left\| (B - A)A^{-\alpha} \right\| \leq \frac{1}{2}, \text{ para todo } \lambda \geq (2K(M + 1))^{1-\alpha}. \quad (1.55)$$

Então, para $\lambda \geq (2K(M + 1))^{1-\alpha}$ temos que $[I + A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}]$ é bijetivo, logo

$$A^\alpha(\lambda + B)^{-1} = [I + A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}]^{-1}A^\alpha(\lambda + A)^{-1}. \quad (1.56)$$

Note ainda que de 1.55, temos

$$\begin{aligned} \left\| [I + A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}]^{-1} \right\| &\leq (1 - \left\| A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha} \right\|)^{-1} \\ &\leq (1 - \left\| A^\alpha(\lambda + A)^{-1} \right\| \left\| (B - A)A^{-\alpha} \right\|)^{-1} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{-1} \\ &= 2. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Assim, para $\lambda \geq (2K(M+1))^{1-\alpha}$, de 1.56, 1.57 e 1.52 temos que

$$\begin{aligned}\|A^\alpha(\lambda+B)^{-1}\| &\leq \| [I + A^\alpha(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-\alpha}]^{-1} \| \|A^\alpha(\lambda+A)^{-1}\| \\ &\leq 2(M+1)|\lambda|^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Dado $\beta \in (0, 1)$, da Identidade 1.48 ($A^{-\alpha} = \frac{\text{sen}\pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}d\lambda$), e de 1.53, segue que

$$\begin{aligned}A^{-\beta} - B^{-\beta} &= \frac{\text{sen}\pi\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta}[(\lambda+A)^{-1} - (\lambda+B)^{-1}]d\lambda \\ &= \frac{\text{sen}\pi\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1}d\lambda.\end{aligned}\tag{1.58}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\left\| \int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} A^\beta(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1}d\lambda \right\| \\ &\leq \left(\int_0^R + \int_R^{+\infty} \right) \left\| \lambda^{-\beta} A^\beta(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1} \right\| d\lambda \\ &= \int_0^R \left\| \lambda^{-\beta} A^{\beta-1} A(\lambda+A)^{-1}(B-A)B^{-1}B(\lambda+B)^{-1} \right\| d\lambda \\ &\quad + \int_R^{+\infty} \left\| \lambda^{-\beta} A^\beta(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-\alpha}A^\alpha(\lambda+B)^{-1} \right\| d\lambda \\ &\leq \int_0^R \lambda^{-\beta} \left\| A^{\beta-1} \right\| \left\| A(\lambda+A)^{-1} \right\| \left\| (B-A)B^{-1} \right\| \left\| B(\lambda+B)^{-1} \right\| d\lambda \\ &\quad + \int_R^{+\infty} \lambda^{-\beta} \left\| A^\beta(\lambda+A)^{-1} \right\| \left\| (B-A)A^{-\alpha} \right\| \left\| A^\alpha(\lambda+B)^{-1} \right\| d\lambda \\ &\leq \int_0^R \lambda^{-\beta} \left\| A^{\beta-1} \right\| (M+1) \left\| (B-A)B^{-1} \right\| (M+1) d\lambda \\ &\quad + \int_R^{+\infty} \lambda^{-\beta} (M+1) \lambda^{\beta-1} \left\| (B-A)A^{-\alpha} \right\| 2(M+1) \lambda^{\alpha-1} d\lambda \\ &= \left\| A^{\beta-1} \right\| (M+1)^2 \left\| (B-A)B^{-1} \right\| \int_0^R \lambda^{-\beta} d\lambda \\ &\quad + 2(M+1)^2 \left\| (B-A)A^{-\alpha} \right\| \int_R^{+\infty} \lambda^{\alpha-2} d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Logo, a integral

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} A^\beta(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1}d\lambda$$

é convergente. Como A^β é um operador fechado, e dado $x \in X$ as integrais

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1}xd\lambda \\ &\int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta}A^\beta(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1}xd\lambda\end{aligned}$$

são convergentes, segue que

$$\left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} (\lambda + A)^{-1} (B - A) (\lambda + B)^{-1} x d\lambda \right) \in D(A^\beta)$$

e

$$A^\beta \left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} (\lambda + A)^{-1} (B - A) (\lambda + B)^{-1} x d\lambda \right) = \int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} A^\beta (\lambda + A)^{-1} (B - A) (\lambda + B)^{-1} x d\lambda.$$

Portanto, dado $x \in X$

$$\begin{aligned} B^{-\beta} x &= A^{-\beta} x - (A^{-\beta} - B^{-\beta}) x \\ &= \left(A^{-\beta} x - \frac{\operatorname{sen}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} (\lambda + A)^{-1} (B - A) (\lambda + B)^{-1} x d\lambda \right) \in D(A^\beta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^\beta B^{-\beta} x &= A^\beta [A^{-\beta} - (A^{-\beta} - B^{-\beta})] \\ &= \left(I - \frac{\operatorname{sen}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\beta} A^\beta (\lambda + A)^{-1} (B - A) (\lambda + B)^{-1} x d\lambda \right) \end{aligned}$$

é limitado em X . Então concluímos que $D(B^\beta) \subset D(A^\beta)$ (lembrar que $D(B^\beta) = R(B^{-\beta})$) e $A^\beta B^{-\beta}$ é limitado em X para qualquer $\beta \in (0, 1)$. Em particular, obtemos que

$$(B - A)B^{-\alpha} = -[(A - B)A^{-\alpha}][A^\alpha B^{-\alpha}]$$

é limitado em X .

Portanto, pela parte do teorema já provada, trocando A por B em 1.58 segue que $D(A^\beta) \subset D(B^\beta)$ e $B^\beta A^{-\beta}$ é limitado em X , para quaisquer $\beta \in (0, 1)$, o que prova o teorema para $\beta \in (0, 1)$. O caso $\beta = 0$ é imediato e para o caso $\beta = 1$, basta notar que

$$\begin{aligned} BA^{-1} &= I - (A - B)A^{-1} \\ &= I - (A - B)A^{-\alpha} A^\alpha A^{-1} \\ &= I - [(A - B)A^{-\alpha}][A^\alpha A^{-1}] \end{aligned}$$

é limitado em X , e que $BA^{-1} : X \rightarrow X$ é bijetivo, com inverso $AB^{-1} : X \rightarrow X$. Logo, pelo teorema da aplicação aberta, AB^{-1} é limitado em X .

□

Definição 1.10. Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X , defina para cada $\alpha \geq 0$,

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha) \text{ com a norma } \|\cdot\|_\alpha \text{ definida por } \|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|_x, \quad x \in X^\alpha, \quad (1.59)$$

onde $A_1 = A + aI$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Re}\sigma(A_1) > 0$.

Denominamos X^α de espaço de potência fracionária associado ao operador A_1 .

Observação 1.10. X^α não depende da escolha de $a \in \mathbb{R}$. De fato, seja A um operador setorial e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$A_1 = A + a_1 I \text{ e } A_2 = A + a_2 I, \text{ com } \operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0 \text{ e } \operatorname{Re} \sigma(A_2) > 0.$$

Como

$$(A_1 - A_2)A^0 = (a_1 - a_2)I, \quad (1.60)$$

segue pelo Teorema 1.34 que

$$D(A_1^\alpha) = D(A_2^\alpha) \text{ para qualquer } \alpha \in [0, 1].$$

Vamos supor que para algum $K \in \mathbb{N}$ tenhamos $D(A_1^\alpha) = D(A_2^\alpha)$, para qualquer $\alpha \in [0, K]$. Então, dado $\alpha \in [K, K+1]$ e $x \in D(A_1^\alpha) = R(A_1^{-\alpha})$, existe $y \in X$ tal que $x = A_1^{-\alpha}y = A_1^{-1}(A_1^{1-\alpha}y)$, logo

$$A_1 x = A_1^{1-\alpha}y \in R(A_1^{1-\alpha}) = D(A_1^{\alpha-1}) = D(A_2^{\alpha-1}).$$

Além disso, por 1.60

$$A_2 x = A_1 x + (a_2 - a_1)x \in D(A_2^{\alpha-1}),$$

pois $x \in D(A_1^\alpha) \subset D(A_1^{\alpha-1}) = D(A_2^{\alpha-1})$. Então existe $z \in X$ tal que $A_2 x = A_2^{1-\alpha}z$, logo

$$x = A_2^{-1}A_2^{1-\alpha}z = A_2^{-\alpha}z.$$

Portanto, temos que $x \in D(A_2^\alpha)$. Provando que

$$D(A_1^\alpha) \subset D(A_2^\alpha).$$

De maneira análoga, mostra-se que $D(A_2^\alpha) \subset D(A_1^\alpha)$. Portanto, segue que

$$D(A_1^\alpha) = D(A_2^\alpha), \text{ para qualquer } \alpha \geq 0.$$

Observação 1.11. A topologia de X^α independe da escolha de $a \in \mathbb{R}$, isto é, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\|A_1^\alpha x\| \leq C_1 \|A_2^\alpha x\| \text{ e } \|A_2^\alpha x\| \leq C_2 \|A_1^\alpha x\|, \text{ para todo } x \in X^\alpha.$$

De fato, dado qualquer $\alpha \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} A_1 A_2^{-\alpha} &= (a_1 I + A) A_2^{-\alpha} \\ &= [(a_1 - a_2)I + a_2 I + A] A_2^{-\alpha} \\ &= [(a_1 - a_2)I + A_2] A_2^{-\alpha} \\ &= (a_1 - a_2) A_2^{-\alpha} + A_2 A_2^{-\alpha} \\ &= A_2^{-\alpha} (a_1 - a_2) I + A_2^{-\alpha} A_2 \\ &= A_2^{-\alpha} [(a_1 - a_2)I + A_2] \\ &= A_2^{-\alpha} A_1. \end{aligned}$$

Assim, segue por indução sobre K , que

$$A_1^K A_2^{-\alpha} = A_2^{-\alpha} A_1^K, \text{ para qualquer } K \in \mathbb{N} \text{ e } \alpha \geq 0.$$

Logo, dado $\alpha \geq 0$, seja $K = \max \{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : j \leq \alpha\}$ e como $(\alpha - K) \in [0, 1]$, temos pelo Teorema 1.34 que

$$\begin{aligned} A_1^\alpha A_2^{-\alpha} &= A_1^{\alpha-K} (A_1^K A_2^{-(\alpha-K)}) A_2^{-K} \\ &= A_1^{\alpha-K} A_2^{-(\alpha-K)} A_1^K A_2^{-K} \\ &= (A_1^{\alpha-K} A_2^{-(\alpha-K)}) (A_1 A_2^{-1})^K \end{aligned}$$

é limitado. Assim, dado $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned} \|A_1^\alpha x\| &\leq \|A_1^\alpha A_2^{-\alpha} A_2^\alpha x\| \\ &\leq \|A_1^\alpha A_2^{-\alpha}\| \|A_2^\alpha x\|, \text{ para todo } x \in X^\alpha. \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que

$$\|A_2^\alpha x\| \leq \|A_2^\alpha A_1^{-\alpha}\| \|A_1^\alpha x\|, \text{ para todo } x \in X^\alpha.$$

Teorema 1.35. Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X , então X^α munido com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ é um espaço de Banach, para $\alpha \geq 0$.

Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^α é um subespaço denso de X^β , e a aplicação inclusão de X^α em X^β ($X^\alpha \subset X^\beta$) é contínua. Além disso, se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.

Por fim, se A_1, A_2 são operadores setoriais de X tal que $D(A_1) = D(A_2)$, $\operatorname{Re} \sigma(A_j) > 0$, com $j = 1, 2$ e $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha} : D(A_1^{-\alpha}) \rightarrow X$ é um operador limitado para algum $\alpha < 1$, então denotando por X_j^β o espaço de potência fracionária associado ao operador A_j , ou seja, $X_j^\beta = D(A_j^\beta)$ com $j = 1, 2$, temos que $X_1^\beta = X_2^\beta$ e as normas nesses espaços são equivalentes para qualquer $\beta \in [0, 1]$.

Demonstração: Como $A^\alpha : X^\alpha \rightarrow X$ é uma isometria sobrejetora, a completude de X^α segue imediatamente da completude de X . Portanto X^α é um espaço de Banach.

Seja $\alpha \geq \beta \geq 0$ e $J : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ a inclusão, concluímos que

$$J = A^{-\beta} A^\beta A^{-\alpha} A^\alpha = A^{-\beta} A^{\beta-\alpha} A^\alpha.$$

Como $A^\alpha : X^\alpha \rightarrow X$ e $A^{-\beta} : X \rightarrow X^\beta$ são isometrias e $A^{\beta-\alpha}$ é limitado, se A tem resolvente compacto, então $A^{\beta-\alpha}$ é um operador compacto, logo $J = A^{-\beta} A^{\beta-\alpha} A^\alpha$ é um operador compacto. E as últimas afirmações seguem imediatamente do Teorema 1.34.

□

Capítulo 2

Existência, unicidade e dependência contínua da equação abstrata

Neste capítulo, será estudado o problema de valor inicial para uma classe de equações diferenciais abstratas, incluindo equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais parabólicas semilineares, bem como existência, unicidade e dependência contínua da solução do problema de valor inicial.

2.1 Problema Linear de Cauchy

Inicialmente considere o problema homogêneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = 0, & \text{para } t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde A é um operador setorial em um espaço de Banach X e $x_0 \in X$ é dado.

Definição 2.1. A solução de 2.1 é uma função contínua $x : [0, T) \rightarrow X$ continuamente diferenciável no intervalo aberto $(0, T)$, com $x(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$, e satisfazendo 2.1 em $(0, T)$ com $x(t) \rightarrow x_0$ em X quando $t \rightarrow 0^+$.

Do Teorema 1.29, note que $x(t) = e^{-At}x_0$ é uma solução de 2.1. Afirmamos ainda que essa solução é única. De fato, seja $0 \leq s \leq t < T$ e

$$y(t, s) = e^{-A(t-s)}x(s),$$

onde $x(\cdot)$ é uma solução qualquer de 2.1 em $(0, T)$. Portanto, temos que $s \rightarrow y(t, s)$ é contínua em $0 \leq s \leq t$, e continuamente diferenciável em $0 < s < t$ com

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(t, s)}{\partial s} &= e^{-A(t-s)} \frac{dx(s)}{ds} + A e^{-A(t-s)} x(s) \\ &= e^{-A(t-s)} \frac{dx(s)}{ds} + e^{-A(t-s)} A x(s) \\ &= e^{-A(t-s)} \left(\frac{dx(s)}{ds} + A x(s) \right) = 0\end{aligned}$$

para $0 < s < t$, então $y(t, 0) = y(t, t)$, isto é

$$e^{-At} x_0 = x(t)$$

o que implica que $y = e^{-At} x_0$.

A seguir, apresentamos o problema não homogêneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t), & \text{para } 0 < t < T \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde A é um operador setorial e f uma função apropriada.

Lema 2.1. *Seja $f : (0, T) \rightarrow X$ uma função localmente Hölder contínua com*

$$\int_0^\rho \|f(s)\| ds < \infty, \text{ para algum } \rho > 0.$$

Defina

$$F(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds, \text{ para } 0 \leq t < T,$$

então $F(\cdot)$ é contínua em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, com $F(t) \in D(A)$, $\frac{dF(t)}{dt} + AF(t) = f(t)$ em $0 < t < T$, e $F(t) \rightarrow 0$ em X quando $t \rightarrow 0^+$.

Demonstração: Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, defina

$$F_\rho(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds, & \text{para } \rho \leq t < T, \\ 0, & \text{para } 0 \leq t < \rho. \end{cases}$$

Então (definindo $f(s) = 0$ para $s < 0$)

$$\|F(t) - F_\rho(t)\| \leq \int_{t-\rho}^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds$$

que tende a 0 quando $\rho \rightarrow 0^+$, uniformemente em $0 \leq t \leq t_0$ para qualquer $t_0 < T$. Além disso, F_ρ é contínua, já que

$$F_\rho(t+h) - F_\rho(t) = (e^{-Ah} - I) \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds + \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-A(t+h-s)} f(s) ds,$$

considerando $0 \leq t \leq t_h \leq t_0$, que tende para zero quando $h \rightarrow 0$. Portanto, F é contínua de $[0, T]$ em X , e

$$\|F(t)\| \leq \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Além disso, se $0 \leq s < t$, então $e^{-A(t-s)} f(s)$ está em $D(A)$, então a soma de Riemann para $F_\rho(t)$,

$$\sum_{t-s \geq \rho} e^{-A(t-s_j)} f(s_j) \Delta s_j,$$

estão em $D(A)$, e

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} A \sum_{s \leq t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) \Delta s = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Daí, como A é fechado, $F_\rho(t) \in D(A)$ e

$$\begin{aligned} AF_\rho(t) &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s) ds \\ &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t) + f(t)\} ds \\ &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds + \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(t) ds \\ &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds + e^{-A(t-s)} f(t) \Big|_0^{t-\rho} \\ &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds + e^{-A(t-t+\rho)} f(t) - e^{-A(t)} f(t) \\ &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds + \{e^{-A\rho} - e^{-At}\} f(t). \end{aligned}$$

Agora, $\|A e^{-A(t-s)}\| = O((t-s)^{-1})$, $\|f(s) - f(t)\| = O(|t-s|^\theta)$ para algum $\theta > 0$ quando $s \rightarrow t^-$, portanto como $\rho \rightarrow 0^+$,

$$AF_\rho(t) \rightarrow \int_0^t A e^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds + \{I - e^{-At}\} f(t).$$

Assim, novamente do fato de A ser fechado, $F(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$.

Considere qualquer intervalo estritamente interior $[t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1 < T$, então

$$AF_\rho(t) \rightarrow AF(t)$$

uniformemente em $t_0 \leq t \leq t_1$, desde que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq K|t - s|^\theta \text{ para } t, s \in [t_0, t_1], \text{ e algum } \theta > 0,$$

então

$$\begin{aligned} \|AF_\rho(t) - AF(t)\| &= \left\| \{-I + e^{-A\rho}\} f(t) + \int_{t-\rho}^t Ae^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds \right\| \\ &\leq \left\| \{e^{-A\rho} - I\} f(t) \right\| + C \int_{t-\rho}^t (t-s)^{-1+\theta} ds \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\rho \rightarrow 0^+$ uniformemente em $t_0 \leq t \leq t_1$.

Finalmente, $F_\rho(t)$ é diferenciável quando $t > \rho$, com

$$\frac{dF_\rho(t)}{dt} = -AF_\rho(t) + e^{-A\rho} f(t - \rho), \quad \rho < t < T.$$

O lado direito converge uniformemente para $-AF(t) + f(t)$ em $T_0 \leq t \leq t_1$ ($0 < t_0 < t_1 < T$) quando $\rho \rightarrow 0^+$, então F é continuamente diferenciável no intervalo $(0, T)$, com $\frac{dF(t)}{dt} + AF = f(t)$.

□

Definição 2.2. Uma função $x : [0, T] \rightarrow X$ é uma solução (clássica) de 2.2 em $[0, T]$ se é contínua nesse intervalo, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $x(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e que satisfaz 2.2 em $[0, T]$.

Considerando A um operador setorial, então A gera o semigrupo e^{-At} . Então considerando x uma solução de 2.2, temos que a função $g(s) = e^{-A(t-s)}x(s)$ é diferenciável para $0 < s < t$ e

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -Ae^{-A(t-s)}x(s) + e^{-A(t-s)}x' \\ &= -Ae^{-A(t-s)}x(s) + e^{-A(t-s)}Ax(s) + e^{-A(t-s)}f(s) \\ &= e^{-A(t-s)}f(s). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se $f \in L^1(0, T; X)$, então $e^{-A(t-s)}f(s)$ é integrável, e integrando 2.3 de 0 a t , temos

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds.$$

A partir desta observação, temos um novo conceito de solução, descrito a seguir.

Definição 2.3. Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo e^{-At} , $x_0 \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $x \in C([0, T] : X)$ dada por

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é a solução branda do problema de valor inicial não homogêneo 2.2 em $[0, T]$.

A partir do Lema 2.1, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Suponha que A é um operador setorial em X , $x_0 \in X$, $f : (0, T) \rightarrow X$ é localmente Hölder contínua e $\int_0^\rho \|f(t)\| dt < \infty$ para algum $\rho > 0$; Então existe uma única solução (forte) $x(\cdot)$ de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t), 0 < t < T \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

que é

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds.$$

2.2 Existência local e unicidade do problema não linear

Considere a equação não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde A é um operador setorial tal que a potência fracionária de $A_1 = A + aI$, com $a \in \mathbb{R}$, está bem definida e o espaço $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ com a norma $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ está bem definido para $\alpha \geq 0$. Assumimos que f aplica algum conjunto aberto $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ em X , para algum α em $(0, 1)$, e f é localmente Hölder contínuo em t e localmente Lipchitz em x . Mais precisamente, se $(t_1, x_1) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, x_1) tal que para $(t, x) \in V$, $(s, y) \in V$,

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s|^\theta + \|x - y\|_\alpha),$$

para as constantes $L > 0$ e $\theta > 0$.

Definição 2.4. *Uma solução do problema de valor inicial de Cauchy em (t_0, t_1) é uma função contínua $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ tal que $x(t_0) = x_0$ e em (t_0, t_1) , temos $(t, x(t)) \in U$, $x(t) \in D(A)$, $\frac{dx}{dt}$ existe, $t \rightarrow f(t, x(t))$ é localmente Hölder contínua, e*

$$\int_{t_0}^{t_0-\rho} \|f(t, x(t))\| dt < \infty \text{ para algum } \rho > 0,$$

e a equação diferencial 2.5 é satisfeita em (t_0, t_1) .

Lema 2.2. *Se x é uma solução de 2.5 em (t_0, t_1) , então*

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (2.6)$$

Reciprocamente, se x é uma função contínua de (t_0, t_1) em X^α , e $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s, x(s))\| d(s) < \infty$ para algum $\rho > 0$, se a equação 2.6 vale para $t_0 < t < t_1$, então $x(\cdot)$ é uma solução do PVI 2.5 em (t_0, t_1) .

Demonstração: A primeira afirmação segue imediatamente da Definição 2.4 e Teorema 2.1. Suponha que x é uma solução da Equação Integral 2.6 e $x \in C([t_0, t_1]; X^\alpha)$. Primeiro vamos provar que x é localmente Hölder contínua de (t_0, t_1) em X^α . Se $t_0 < t < t+h < t_1$, então

$$x(t+h) - x(t) = (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s, x(s))ds.$$

Se $0 < \delta < 1 - \alpha$, então para qualquer $z \in x$,

$$\left\| (e^{-Ah})e^{-A(t-s)}z \right\|_\alpha \leq C(t-s)^{-(\alpha+\delta)}h^\delta e^{a(t-s)} \|z\|. \quad (\text{Ver Teorema 1.31})$$

Portanto, para $t \in [t_0^*, t_1^*] \subset (t_0, t_1)$,

$$\|x(t+h) - x(t)\|_\alpha \leq kh^\delta, \text{ com } k \text{ constante.}$$

Disso segue que $t \rightarrow f(t, x(t))$ é localmente Hölder contínua em (t_0, t_1) . Então, pelo Teorema 2.1, x é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Ay = f(t, x(t)), & t_0 < t < t_1 \\ y(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

Portanto, x também é uma solução de 2.5 em (t_0, t_1) .

□

Teorema 2.2. *Assuma que A é um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, e $f : U \rightarrow X$, sendo U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em X . Então, para qualquer $(t_0, x_0) \in U$ existe $T = T(t_0, x_0) > 0$ tal que o Problema de Valor Inicial 2.5 tem uma única solução em $(t_0, t_0 + T)$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.2, é suficiente provar o resultado correspondente para a equação integral 2.6, que é conhecida como a "fórmula de variação de constantes". Com esse objetivo, escolha $\delta > 0$, $\tau > 0$, tal que o conjunto

$$V = \{(t, x)/t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \|x - x_0\|_\alpha \leq \delta\}$$

está contido em U , e como f é localmente Lipschitz, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|_\alpha \text{ para } (t, x_1), (t, x_2) \in V.$$

Seja $B = \max_{[t_0, t_0+\tau]} \|f(t, x_0)\|$ e escolha T tal que $0 < T \leq \tau$ e

$$\|(e^{-Ah} - I)x_0\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2} \text{ para } 0 \leq h \leq T,$$

$$M(B + L\delta) \int_0^T u^{-\alpha} e^{au} du \leq \frac{\delta}{2},$$

onde $\|A_1^\alpha e^{-At}\| \leq Mt^{-\alpha} e^{at}$ para $t > 0$.

Se S denota o conjunto das funções contínuas $y : [t_0, t_0 + T] \rightarrow X^\alpha$ tal que $\|y(t) - x_0\|_\alpha \leq \delta$ em $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ com a norma do supremo usual

$$\|y\|_T = \sup \{ \|y(t)\|_\alpha, t_0 \leq t \leq t_0 + T \},$$

então S é um espaço métrico completo. Para $y \in S$ defina $G(y) : [t_0, t_0 + T] \rightarrow X$ por

$$G(y)(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, y(s))ds.$$

Vamos mostrar que G aplica S em S e é uma contração estrita. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - x_0\|_\alpha &= \left\| e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, y(s))ds - x_0 \right\| \\ &\leq \left\| (e^{-A(t-t_0)} - I)x_0 \right\|_\alpha + \left\| \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, y(s))ds \right\| \\ &\leq \left\| (e^{-A(t-t_0)} - I)x_0 \right\|_\alpha + \int_{t_0}^t \left\| e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \left\| (e^{-A(t-t_0)} - I)x_0 \right\|_\alpha + \int_{t_0}^t \left\| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \right\| (B + L\delta) ds \\ &\leq \frac{\delta}{2} + M(B + L\delta) \int_{t_0}^{t_0+T} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \leq \delta, \end{aligned}$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. É fácil notar também que $G(y)$ é contínua de $[t_0, t_0 + T]$ em X^α . Então G aplica S em S .

Seja $y, z \in S$ então para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$,

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - G(z)(t)\|_\alpha &= \left\| e^{-A(t_0-t)} + \int_t^{t_0} e^{-A(t-s)}f(s, y(s))ds - e^{-A(t_0-t)} - \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, z(s))ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, y(s))ds - \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, z(s))ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \left\| e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \left\| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\
&\leq ML \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \|y - z\|_T.
\end{aligned}$$

Então

$$\|G(y) - G(z)\|_T \leq \frac{1}{2} \|y - z\|_T, \text{ para todo } y, z \in S.$$

Pelo teorema da Contração (Teorema 4.2), G tem um único ponto fixo x em S , que é uma solução contínua da Equação Integral 2.6 e $f(t, x(t))$ é limitado quando $t \rightarrow t_0^+$. Além disso, pelo Lema 2.2, essa é a única solução de 2.5 em $(t_0, t_0 + T)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$.

□

Teorema 2.3. *Assuma que A e f são como no Teorema 2.2, que para todo conjunto fechado limitado $B \subset U$, $f(B)$ seja limitada em X . Se x é uma solução de 2.5 em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, então $t_1 = +\infty$ ou existe uma sequência $t_n \rightarrow t_1^-$ quando $n \rightarrow +\infty$ tal que $(t_n, x(t_n)) \rightarrow \partial U$. (Se U é ilimitado, o ponto no infinito está incluído em ∂U).*

Demonstração: Vamos supor que $t_1 < +\infty$, mas $(t, x(t))$ não está em uma vizinhança N de ∂U para $t_2 \leq t \leq t_1$. Podemos tomar N da forma $U \setminus B$, onde B é um subconjunto fechado de U , e $(t, x(t)) \in B$ para $t_2 \leq t \leq t_1$. Basta provarmos que existe $x_1 \in B$ tal que $x(t) \rightarrow x_1$ em X^α quando $t \rightarrow t_1^-$, o que implica que a solução poderia ser estendida além do tempo t_1 (com $x(t_1) = x_1$), pelo Teorema 2.2, o que contradiz a maximalidade de t_1 . Ou seja, $t_1 < +\infty$ garante a existência de tal vizinhança.

Seja $C = \sup \{\|f(t, x)\|, (t, x) \in B\}$. Mostraremos inicialmente que $\|x(t)\|_\beta$ permanece limitada quando $t \rightarrow t_1^-$, para qualquer $\beta < 1$. Note que se $\alpha \leq \beta < 1$, $t_2 \leq t < t_1$, temos

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_\beta &= \left\| e^{-A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)} x(t_0) \right\| + \left\| \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)} \right\| \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \left\| e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s, x(s))\| ds \\
&\leq \left\| A_1^{\beta-\alpha} e^{-A(t-t_0)} \right\| \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \left\| A_1^\beta e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s, x(s))\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} e^{a(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t M(t-s)^{-\beta} e^{a(t-s)} \|f(s, x(s))\| ds \\
&\leq k \left\{ (t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} \|x(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta} ds \right\}, \text{ onde } k \text{ é uma constante,}
\end{aligned}$$

que é limitado quando $t \rightarrow t_1^-$. Suponha $t_2 \leq \tau < t < t_1$, então

$$\begin{aligned}
x(t) - x(\tau) &= e^{-A(\tau-t_0)} [e^{-A(t-\tau)} - I] x(t_0) + \int_{\tau}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \\
&+ \left(e^{-A(t-\tau)} - I \right) \int_{t_0}^{\tau} e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \\
&= \left[e^{-A(t-\tau)} - I \right] \left[e^{-A(\tau-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} e^{-A(\tau-s)} f(s, x(s)) ds \right] \\
&+ \int_{\tau}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \\
&= \left[e^{-A(t-\tau)} - I \right] x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds.
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x(\tau)\|_\alpha &\leq C_1(t-\tau)^{\beta-\alpha} \|x(\tau)\|_\beta + C_2 \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha} ds \\
&\leq C_3(t-\tau)^{\beta-\alpha}, \quad (\alpha < \beta < 1).
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t)$ existe em X^α , e a prova está completa. □

Corolário 2.4. *Seja A um operador setorial, $U = (\tau, \infty) \times X^\alpha$, f localmente Hölder contínua em t , localmente Lipschitz em x para $(t, x) \in U$, e também*

$$\|f(t, x)\| \leq K(t)(1 + \|x\|_\alpha)$$

para todo $(t, x) \in U$, onde $K(\cdot)$ é contínuo em (τ, ∞) . Se $t_0 > \tau$, e $x_0 \in X^\alpha$, existe única solução de 2.5 para todo $t \geq t_0$.

Demonstração: Aplicando o Teorema 2.3, esse Corolário pode falhar somente se existir $t_n \rightarrow t_1 < \infty$ tal que $\|x(t_n)\|_\alpha \rightarrow +\infty$. Contudo,

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_\alpha &= \left\| e^{-A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)} x_0 \right\| + \left\| \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)}x_0 \right\| + \int_{t_0}^t \left\| e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s, x(s))\| ds \\
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)}x_0 \right\| + \int_{t_0}^t \left\| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \right\| K(s)(1 + \|x(s)\|_\alpha) ds.
\end{aligned}$$

O que implica que $\|x(t)\|_\alpha$ permanece limitado quando $t \rightarrow t_1$, pela Desigualdade de Gronwall (Teorema 4.3).

□

Teorema 2.5. *Considere A e f como no Teorema 2.2, assuma também que A tem resolvente compacto e f aplica todos os conjuntos $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, onde B é fechado e limitado, em conjuntos limitados em X . Se x é uma solução do problema de valor inicial 2.5 em (t_0, ∞) com $\|x(t)\|_\alpha$ limitado quando $t \rightarrow +\infty$, então $\{x(t)\}_{t > t_0}$ está em um conjunto compacto em X^α .*

Demonstração: Se $\alpha < \beta < 1$, então $X^\beta \subset X^\alpha$ tem inclusão compacta (pelo Teorema 1.35) e isso é suficiente para mostrar que $\|x(t)\|_\beta$ é limitado para $t \geq t_0 + 1$. Mas podemos supor, sem perda de generalidade, que $\operatorname{Re}\sigma(A) > \delta > 0$, e $\|f(t, x(t))\| \leq C$ para todo $t \geq t_0$, daí

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_\alpha &= \left\| e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s)ds \right\| \\
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)}x_0 \right\| + \left\| \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s)ds \right\| \\
&= \left\| e^{-A(t-t_0)}x_0 \right\| + \int_{t_0}^t \left\| e^{-A(t-s)}f(s) \right\| ds \\
&\leq \left\| e^{-A(t-t_0)} \right\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t \left\| e^{-A(t-s)} \right\| \|f(s)\| ds \\
&\leq \left\| A_1^{\beta-\alpha} e^{-A(t-t_0)} \right\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t \left\| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \right\| C ds. \\
&\leq M(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} e^{-\delta(t-t_0)} \|x_0\|_\alpha + MC \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta} e^{-\delta(t-s)} ds.
\end{aligned}$$

que é limitado para $t \geq t_0 + 1$.

□

Observação 2.1. *O argumento acima demonstra um grau de "suavidade", mesmo sem assumir a compacidade do resolvente: se a solução é limitada em X^α , então ela é limitada em X^β com $\alpha < \beta < 1$.*

Exemplo 2.1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x, u(x, t)) \\ u(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) = 0, \quad (0 < x < \pi, t > 0) \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável em X , localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz contínua em u , uniformemente em X , com

$$|f(t, x, u)| \leq h(x)g(t, |u|),$$

$h \in L^2(0, \pi)$, g contínua e crescente na segunda coordenada. Tome $X = L^2(0, \pi)$, $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ com domínio $H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$, e $D(A)^{\frac{1}{2}} = H_0^1(0, \pi)$.

Provaremos que $F : \mathbb{R}^+ \times H_0^1(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$, dada por

$$F(t, \phi)(x) = -\phi(x)\phi'(x) + f(t, x, \phi(x)), \quad 0 < x < \pi,$$

satisfaz as hipóteses dos Teoremas 2.2 e 2.3. Primeiramente note que para $\phi \in H_0^1(0, \pi)$, $\phi(x) = \int_0^x \phi'(\xi)d\xi$, ϕ é absolutamente contínua com

$$\sup |\phi(x)| \leq \sqrt{\pi} \|\phi\|_{\frac{1}{2}}$$

e

$$\begin{aligned} \|F(t, \phi)\| &= \|-\phi(x)\phi'(x) + f(t, x, \phi(x))\|_{L^2(0, \phi)} \\ &\leq \|-\phi(x)\phi'(x)\|_{L^2(0, \pi)} + \|f(t, x, \phi(x))\|_{L^2(0, \pi)} \\ &\leq \|-\phi(x)\phi'(x)\|_{L^2(0, \pi)} + h(x)g(t, |\phi(x)|) \\ &\leq \sqrt{\pi} \|\phi\|_{\frac{1}{2}}^2 + \|h(x)\|_{L^2(0, \pi)} g(t, \sqrt{\pi} \|\phi\|_{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

e F aplica conjuntos limitados de $\mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}}$ em conjuntos limitados de X . Também, se $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}}$, com ϕ_0 contínua, então existe uma vizinhança V de um conjunto compacto $\{(t_0, x, \phi_0(x)) : 0 \leq x \leq \pi\}$ em $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times X^{\frac{1}{2}}$ e constantes positivas L, θ tal que para $(t_1, x, u_1) \in V$, $(t_2, x, u_2) \in V$,

$$|f(t_1, x, u_1) - f(t_2, x, u_2)| \leq L(|t_1 - t_2|^\theta + |u_1 - u_2|).$$

Portanto, existe uma vizinhança U de (t_0, ϕ_0) em $\mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}}$ tal que $(t, \phi) \in U$ implica $(t, x, \phi(x)) \in V$ para a.e $0 \leq x \leq \pi$, e se $(t_1, \phi_1) \in U$, $(t_2, \phi_2) \in U$ temos

$$\|f(t_1, \cdot, \phi_1(\cdot)) - f(t_2, \cdot, \phi_2(\cdot))\|_{L^2(0, \pi)} \leq \sqrt{\pi} L \left(|t_1 - t_2|^\theta + \sqrt{\pi} \|\phi_1 - \phi_2\|_{\frac{1}{2}} \right).$$

Também, para qualquer ϕ_1, ϕ_2 em $X^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}
\|\phi_1\phi'_1 - \phi_2\phi'_2\|_{L^2(0,\pi)} &= \|\phi_1\phi'_1 - \phi_1\phi'_2 + \phi_1\phi'_2 - \phi_2\phi'_2\|_{L^2(0,\pi)} \\
&= \|\phi_1(\phi'_1 - \phi'_2) + (\phi_1 - \phi_2)\phi'_2\|_{L^2(0,\pi)} \\
&\leq \|\phi_1(\phi'_1 - \phi'_2)\|_{L^2(0,\pi)} + \|(\phi_1 - \phi_2)\phi'_2\|_{L^2(0,\pi)} \\
&\leq \|\phi_1\| \|\phi'_1 - \phi'_2\|_{L^2(0,\pi)} + \|\phi_1 - \phi_2\| \|\phi'_2\|_{L^2(0,\pi)} \\
&\leq \sqrt{\pi} \|\phi_1\|_{\frac{1}{2}} \|\phi_1 - \phi_2\|_{\frac{1}{2}} + \|\phi_2\|_{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^2(0,\pi)} \\
&\leq \sqrt{\pi} \left(\|\phi_1\|_{\frac{1}{2}} + \|\phi_2\|_{\frac{1}{2}} \right) \|\phi_1 - \phi_2\|_{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(Alternativamente, $\phi \rightarrow \phi\phi'$ é um polinômio contínuo de $X^{\frac{1}{2}}$ para X). Assim, todas as hipóteses dos Teorema 2.2 e 2.3 são verificadas para esse problema.

2.3 Dependência contínua e diferenciável de soluções

Teorema 2.6. *Suponha que A é um operador setorial. Seja $\{f_n(t, x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma sequência de pontos definidos em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, para algum $\alpha \in [0, 1)$, em X , com cada $f_n(t, x)$ localmente Lipschitz em X , localmente Hölder contínua em t , e tal que*

$$f_0(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, x)$$

uniformemente para (t, x) em uma vizinhança de qualquer ponto de U . Também assuma as convergências $\mu_n \rightarrow \mu_0 > 0$ e $\|x_n - x_0\|_\alpha \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ com $(t_0, x_n) \in U$.

Seja $\phi_n(t)$ solução maximal definida do problema

$$\begin{cases} \frac{d\phi_n}{dt} + \mu_n A\phi_n = f_n(t, \phi_n), t > t_0 \\ \phi_n(t_0) = x_n \end{cases} \quad (2.8)$$

definida em $(t_0, t_0 + T_n)$. Então $T_0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n$ e $\|\phi_n(t) - \phi_0(t)\|_\alpha \rightarrow 0$ uniformemente em subintervalos compactos de $[t_0, t_0 + T_0)$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\mu_0 = 1$, $\frac{1}{2} < \mu_n < 2$, $f_0(t, 0) = 0$ e $\phi_0(t) = 0$ em $[0, t_0)$. Caso contrário, considere as funções

$$\psi_n(t) = \phi_n(t) - \phi_0(\mu_n(t))$$

satisfazendo

$$\frac{d\psi_n}{dt} + \mu_n A\psi_n = f_n(t, \psi_n(t) + \phi_0(\mu_n t)) - \mu_n f_0(\mu_n t, \phi_0(\mu_n t)).$$

Escolha qualquer t_1 em $(0, T_0)$, então $[0, t_1] \times \{0\}$ é um conjunto compacto em U e portanto existem $\delta > 0$ e $L > 0$ tal que

$$\|f_0(t, x_1) - f_0(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|_\alpha$$

para $\|x_1\|_\alpha, \|x_2\|_\alpha \leq \delta$, $0 \leq t \leq t_1$, $\|x\|_\alpha \leq \delta$, e $\|f_n(t, x) - f_0(t, x)\| \rightarrow 0$ uniformemente para $0 \leq t \leq t_1$, $\|x\|_\alpha \leq \delta$.

Para n suficientemente grande, ϕ_n está definido em $[0, t_1]$. De fato, uma vez que $\|\phi_n(s)\|_\alpha \leq \delta$ em $0 \leq s \leq t$, temos

$$\begin{aligned} \|\phi_n(t)\|_\alpha &= \left\| e^{-\mu A(t-t_0)} x_n + \int_{t_0}^t e^{-\mu A(t-s)} f(s, \phi_n(s)) ds \right\|_\alpha \\ &\leq \left\| e^{-\mu A(t-t_0)} \right\|_\alpha \|x_n\|_\alpha + \int_{t_0}^t \left\| e^{-\mu A(t-s)} \right\|_\alpha \|f(s, \phi_n(s))\|_\alpha ds \\ &\leq \left\| A_1^\alpha e^{-\mu A(t-t_0)} \right\|_\alpha \|x_n\|_\alpha + \int_{t_0}^t \left\| A_1^\alpha e^{-\mu A(t-s)} \right\|_\alpha \|f(s, \phi_n(s))\|_\alpha ds \\ &\leq M(t-t_0)^\alpha e^{\mu a(t-t_0)} \|x_n\|_\alpha + \int_{t_0}^t M(t-s)^{-\alpha} e^{\mu a(t-s)} \|f(s, \phi_n(s))\|_\alpha ds \\ &\leq M e^{\mu a t} \|x_n\|_\alpha + M \mu^{-\alpha} \int_0^t M(t-s)^{-\alpha} e^{\mu a(t-s)} \|f_n(s, \phi_n(s)) - f_0(s, \phi_n(s))\|_\alpha ds \\ &\quad + L M \mu^{-\alpha} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{\mu a(t-s)} \|\phi_n(s)\|_\alpha ds \end{aligned}$$

então $\|\phi_n(t)\|_\alpha \leq C(\|x_n\|_\alpha + \Delta_n) e^{Bt}$, $\Delta_n = \sup \{\|f_n(s, x) - f_0(s, x)\| : 0 \leq s \leq t_1, \|x\|_\alpha \leq \delta\}$, onde B e C são independentes do n .

Considerando n é suficientemente grande tal que

$$C e^{Bt_1} (\|x_n\|_\alpha + \Delta_n) < \delta,$$

segue que ϕ_n existe em $[0, t_1]$, e $\|\phi_n(t)\|_\alpha \rightarrow 0$ uniformemente em $0 \leq t \leq t_1$ quando $n \rightarrow \infty$. □

Lema 2.3. *Seja A um operador setorial em X , $0 < T < \infty$ e $0 \leq \beta \leq \alpha < 1 + \beta$. Então, as aplicações*

$$(\mu, \xi) \rightarrow \{e^{-\mu A t} \xi, 0 \leq t \leq T\} : \mathbb{R}^+ \times X^\alpha \rightarrow C([0, T], X^\alpha),$$

e

$$(\mu, g) \rightarrow \left\{ \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} g(s) ds, 0 \leq t \leq T \right\} : \mathbb{R}^+ \times C([0, T], X^\beta) \rightarrow C([0, T], X^\alpha)$$

são analíticas.

Demonstração: Fixando $t > 0$, temos que $(\mu, \xi) \rightarrow e^{-\mu At} \xi$ é analítica com série de Taylor

$$e^{-(\mu+\delta)At} \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-At\delta)^n e^{-\mu At} \xi,$$

convergente para $|\delta|$ pequeno. De fato, note que se $\|e^{-At}\| \leq M$ e $\|Ae^{-At}\| \leq Mt^{-1}$ em $0 < t \leq T$, temos que $t \rightarrow (At)^n e^{-\mu At} \xi$ é contínua em X^α , $0 \leq t \leq T$, (ver exercício 8 da seção 1.4 de [4]) e

$$\frac{1}{n!} \|(-At\delta)^n e^{-\mu At} \xi\|_\alpha \leq \frac{n^n}{n!} \left(\frac{M|\delta|}{\mu} \right)^n \|\xi\|_\alpha,$$

então a série converge uniformemente em $0 \leq t \leq T$ quando $|\delta| < \frac{\mu}{Me}$, provando a convergência em $C([0, T], X^\alpha)$. O outro caso é provado de forma análoga.

□

Lema 2.4. *Sejam X, Y espaços de Banach, U um aberto em X , e J um intervalo compacto em $\mathbb{R}$. Se $F : J \times U \rightarrow Y$ é uma função contínua, a aplicação composição*

$$x \rightarrow F(\cdot, x(\cdot)) : C(J, U) \rightarrow C(J, Y)$$

é contínua.

Se $(t, x) \rightarrow (\frac{\partial}{\partial x})^k F(t, x)$ é contínua em $J \times U$ para $k = 0, 1, \dots, r$, a aplicação composição é C^r . Se isso vale para todo r e a série de Taylor para $x \rightarrow F(t, x)$ converge uniformemente em $t \in J$ próximo de cada $x \in U$, a aplicação composição é analítica.

Demonstração: Se $x_n, x \in C(J, U)$ e $x_n(t) \rightarrow x(t)$ uniformemente em $t \in J$ quando $n \rightarrow \infty$, mas $\|F(\cdot, x_n(\cdot)) - F(\cdot, x(\cdot))\|_{C(J, Y)} \geq \varepsilon > 0$, existe $t_n \in J$ com $\|F(t_n, x_n(t_n)) - F(t_n, x(t_n))\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para n grande. Existe uma subsequência $t'_n \rightarrow t^* \in J$, e contradizemos a continuidade de F para $(t^*, x(t^*))$.

Para cada $1 \leq k \leq r$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}$ satisfaz as hipóteses do caso $r = 0$, e é uniformemente contínua em $\{(t, x(t)), t \in J\}$ se $x \in C(J, U)$. Pela volta do Teorema de Taylor (ver seção 1.2.5 de [4]) segue que a aplicação composição é C^r . Para o caso analítico a estimativa direta do resto de Taylor prova o resultado.

□

2.4 Ação de suavidade da equação diferencial

Lema 2.5. *Suponha que A é um operador setorial, $g : (0, T) \rightarrow X$ satisfaz $\|g(t) - g(s)\| \leq K(s)|t - s|^\gamma$ para $0 < s < t < T < \infty$, onde $K(\cdot)$ é contínuo em $(0, T)$ e $\int_0^T e^{-A(t-s)}g(s)d(s)$. Então $G(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)}g(s)d(s)$, $0 < t < T$, é continuamente diferenciável de um intervalo aberto $(0, T)$ em X^β , dado $0 \leq \beta \leq \gamma$, e*

$$\left\| \frac{dG}{dt} \right\|_\beta \leq Mt^{-\beta} \|g(t)\| + M \int_0^t (t-s)^{\gamma-\beta-1} K(s) d(s)$$

para $0 < t < T$, onde M é uma constante independente de γ, β e $g(\cdot)$. Além disso, $t \rightarrow \frac{dG}{dt}$ é localmente Hölder contínua de $(0, T)$ em X^β , se $\int_0^h K(s)d(s) = O(h^\delta)$ quando $h \rightarrow 0^+$, para algum $\delta > 0$.

Demonstração: Ver página 70 de [4].

Teorema 2.7. *Suponha que A é um operador setorial, $f : U \rightarrow X$ é localmente lipschitziana em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ para algum $0 \leq \alpha < 1$, e suponha que $\bar{x}(\cdot)$ é uma solução em $[t_0, t_1]$ da equação*

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x)$$

com $(t, \bar{x}(t)) \in U$ e $\left\| \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \right\|_\alpha$ limitada em $t_0 \leq t \leq t_1$.

Se $\|x_0 - \bar{x}(t_0)\|_\alpha$ é suficientemente pequeno, existe uma solução $x(\cdot)$ com $x(t_0) = x_0$ em $t_0 \leq t \leq t_1$ e, para qualquer $0 \leq \beta < \gamma < 1$,

$$t \rightarrow \frac{dx(t)}{dt}$$

é localmente Hölder contínua de X^β em $(t_0, t_1]$ e

$$\left\| \frac{dx}{dt}(t) - \frac{d\bar{x}}{dt}(t) \right\|_\beta \leq K(t - t_0)^{\alpha-\beta-1} \|x_0 - \bar{x}(t_0)\|_\alpha^{1-\gamma},$$

para alguma constante K independente de t e x_0 .

Demonstração: A curva $\{(t, \bar{x}(t)), t_0 \leq t \leq t_1\}$ é um subconjunto compacto de U , então existe uma vizinhança V dessa curva, com $V \subset U$ e

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s| + \|x - y\|_\alpha) \text{ para } (t, x) \text{ e } (s, y) \in V. \quad (2.9)$$

Defina

$$g(t, z) = f(t, \bar{x}(t) + z) - f(t, \bar{x}(t)), \quad (2.10)$$

onde $t_0 \leq t \leq t_1$, e $\|z\|_\alpha \leq \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $(t, \bar{x}(t) + z) \in V$. Então $g(t, 0) = 0$, e usando 2.9 e 2.10, temos

$$\begin{aligned}\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| &= \|f(t, \bar{x}(t) + z_1) - f(t, \bar{x}(t)) - f(t, \bar{x}(t) + z_2) + f(t, \bar{x}(t))\| \\ &= \|f(t, \bar{x}(t) + z_1) - f(t, \bar{x}(t) + z_2)\| \\ &\leq L(|t - t| + \|\bar{x}(t) + z_1 - \bar{x}(t) - z_2\|_\alpha) \\ &\leq L\|z_1 - z_2\|_\alpha,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|g(t, z) - g(s, z)\| &= \|f(t, \bar{x}(t) + z) - f(t, \bar{x}(t)) - f(s, \bar{x}(s) + z) + f(s, \bar{x}(s))\| \\ &= \|f(t, \bar{x}(t) + z) - f(t, \bar{x}(t)) + f(t, \bar{x}(s)) - f(t, \bar{x}(s)) - f(s, \bar{x}(s) + z) + f(s, \bar{x}(s))\| \\ &\leq L\|z\|_\alpha + \|f(t, \bar{x}(s)) - f(s, \bar{x}(s) + z)\| + \|f(s, \bar{x}(s)) - f(t, \bar{x}(s))\| \\ &\leq L\|z\|_\alpha + L(|t - s| + \|z\|_\alpha) + L(|t - s|) \\ &= 2L(\|z\|_\alpha + |t - s|) \\ &\leq 2L \min\{\|z\|_\alpha, |t - s|(1 + M)\},\end{aligned}$$

onde $M = \sup\{\|\frac{d\bar{x}}{dt}\|_\alpha, t_0 \leq t \leq t_1\}$. Usando a desigualdade $\min\{a, b\} \leq a^\gamma b^{1-\gamma}$ sempre que $a, b \geq 0$ e $0 \leq \gamma \leq 1$, segue que

$$\|g(t, z_1) - g(s, z_2)\| \leq L_1(\|z_1 - z_2\|_\alpha + \|z_1\|_\alpha^{1-\gamma} |t - s|^\gamma).$$

Se $\|z(t_0)\|_\alpha$ é suficientemente pequeno, então a solução $z(t)$ existe em $[t_0, t_1]$ com $\|z(t)\|_\alpha \leq \delta$. Estimamos a continuidade de Hölder de $z(\cdot)$: se $t_0 < t < t + h < t_1$, então

$$\begin{aligned}z(t + h) - z(t) &= e^{(-At+h-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^{t+h} e^{-A(t+h-s)}g(s, z(s))ds - e^{-A(t-t_0)}z_0 \\ &\quad - \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}g(s, z(s))ds \\ &= (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{-A(t+h-s)}g(s, z(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}\{g(s + h, z(s + h)) - g(s, z(s))\}ds.\end{aligned}$$

Se $\|z_0\|_\alpha$ é suficientemente pequeno, $\|z(t)\|_\alpha \leq k_1\|z_0\|_\alpha$ para $t_0 \leq t \leq t_1$, e então encontramos

$$\|z(t + h) - z(t)\|_\alpha \leq k_2 h^\gamma (t - t_0)^{-\theta} \|z_0\|_\alpha^{1-\gamma},$$

onde $\theta = \max(\alpha, \gamma)$. Se $g(t) = g(t, z(t))$ então em (t_0, t_1)

$$\|g(t) - g(s)\| \leq k_3 (s - t_0)^{-\theta} |t - s|^\gamma \|z_0\|_\alpha^{1-\gamma}$$

e o Lema 2.5 se aplica: $z(t) = e^{-A(t-t_0)}z(t_0) + G(t)$, então

$$\left\| \frac{dz}{dt}(t) \right\|_{\beta} \leq \text{constante } (t - t_0)^{\alpha-\beta-1} \|z_0\|_{\alpha}^{1-\gamma}.$$

□

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, aplicamos a teoria estudada nos capítulos anteriores em problemas abstratos envolvendo equações diferenciais parabólicas. As equações diferenciais parabólicas são ferramentas importantes para a modelagem de diversos problemas, alguns deles apresentados a seguir.

3.1 Exemplos

Esta seção é dedicada à apresentar modelos concretos de equações diferenciais parabólicas com o objetivo de mostrar a aplicabilidade da teoria estudada na dissertação.

3.1.1 Equação do calor

A condução de calor em um meio estacionário é descrita pela equação diferencial

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(K \nabla T) + \rho q,$$

onde T é a temperatura, ρ é a densidade, C_p o calor específico, K a condutividade, e q a taxa de produção de calor por unidade de massa, onde esta última pode ser dependente ou independente de T .

Se o meio está se movendo com dada velocidade $v(x, t)$, então equação do calor será dada por

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right) = \operatorname{div}(K \nabla T) + \rho q.$$

Equações similares a esta descrevem a difusão de um fluido (líquido ou gás) em um meio poroso, mas nessas aplicações a difusão K frequentemente depende da concentração do fluido, que é T nas

equações acima, se tornando uma equação quase linear ao invés de semilineares. Uma maneira de reduzir o problema quase linear a um problema semilinear, é o seguinte:

suponha que $K = K(T)$ é uma função escalar positiva suave, e mudamos a variável de tempo para s , e então temos um sistema de equações diferenciais parciais e ordinárias semilineares acopladas,

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial s} = \Delta T + \frac{K'(T)}{K(T)} |\nabla T|^2 + \frac{\rho q}{K(T)} \\ \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{K(T)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.2 Fluxo de elétrons e buracos em um semicondutor

Seja p e n concentrações de buracos e elétrons, respectivamente, e V o potencial elétrico, temos a seguinte equação

$$\begin{cases} \Delta V = -q(p - n + D) \\ \frac{\partial n}{\partial t} = \text{div } q \mu_n (\alpha_n \nabla n - n \nabla V) - R_n(n, p) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \text{div } q \mu_p (\alpha_p \nabla p + p \nabla V) - R_p(n, p), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde D , q , μ_p , μ_n , α_p , α_n são constantes positivas e R_n , R_p são as taxas de recombinação.

A primeira equação, dadas as condições de fronteira apropriadas, dá V como uma função de p e n :

$$V = qG(p - n + D),$$

onde G é a função de Green apropriada. Substituindo esse V nas outras equações, temos um par de equações diferenciais parciais parabólicas semilineares acopladas, onde os termos de ordem inferior envolvem o operador integral G .

3.1.3 Reações químicas em um pellet de catalisador

Suponha que $M_1, \dots, M_N$ são as N espécies químicas envolvidas em R reações independentes $\sum_{i=1}^N \nu_{ij} M_i = 0$, para $j = 1, \dots, R$. Seja C_i a concentração de M_i , e T a temperatura, tem-se

$$\begin{cases} \varepsilon_p \frac{\partial C_i}{\partial t} = \text{div}(D_i \nabla C_i) + \sum_{j=1}^R \nu_{ij} f_j \quad (i = 1, \dots, N) \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(K \nabla T) - \sum_{j=1}^R \sum_{i=1}^N \nu_{ij} H_i f_j, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $f_j = f_j(C_1, \dots, C_N, T)$ é a taxa da j -ésima reação e H_i é a entalpia molar parcial de i -ésima espécie (constante assumida).

3.1.4 População genética

Suponha que A_1 e A_2 são os dois alelos numa população em um único gene do locus para $0 \leq p, x \leq 1$ e $t > 0$, $\phi(x, t; p)dx$ é a probabilidade que a frequência em A_1 no momento em que t está em $(x, x + dx)$, dado que a A_1 -frequência é p para o tempo $t = 0$. Então ϕ satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (V(x, t)\phi) - \frac{\partial}{\partial x} (M(x, t)\phi),$$

onde M, V são a média e a variância da mudança na frequência do gene por geração (i.e por unidade de tempo).

Se a densidade populacional for grande o suficiente para que a "lei dos grandes números" possa ser utilizada em populações locais, obtemos equações da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{m^2}{2\Delta N} + g(N, p)N \\ \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{m^2}{2\Delta N} + b(N, p)\frac{M}{(1-s(1-p))} - d(N, p)M, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $p = \frac{M}{2N}$ é a frequência local do gene A_1 , N e M são a população genética e A_1 -densidades genéticas, $g = b - d$ é a taxa de crescimento, m é a taxa de migração, e s é a vantagem seletiva de A_1 , assumindo que A_1 é dominante. Desde que s seja pequeno, essas equações tem quase a mesma forma e podemos substituir a segunda equação pela seguinte equação, considerando $p = \frac{M}{2N}$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{m^2}{2N^2} \right) \text{div}(N^2 \text{grad} p) + b(N, p)sp \frac{(1-p)}{[1-s(1-p)]}.$$

Equações similares tem sido usadas para estudar dispersão de plantas e animais, e a propagação geográfica de epidemias.

3.1.5 Dinâmica do reator nuclear

Seja ψ_j o fluxo de nêutrons no j -ésimo grupo de energia, $\psi = \text{col}(\psi_1, \dots, \psi_n)$, $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_m)$, onde V_j é a velocidade do grupo de energia j , C_i a densidade do precursor para o i -ésimo grupo de nêutrons atrasados, com $i = 1, \dots, N$ e as matrizes A, f, X , e D medem absorção menos espalhamento, fissão, espectro de emissão e difusão para várias classes de partículas, respectivamente, então

$$\begin{cases} V^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{div}(D \text{grad} \psi) + ((1 - \beta)x F^T - A)\psi + \sum_{i=1}^N \lambda_i X_i C_i \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} = \beta_i F T_\psi - \lambda_i C_i, \text{ com } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.5)$$

O controle do reator é exercido por mudanças na matriz A .

3.1.6 Navier-Stokes e equações relacionadas

Um importante sistema de equações, é o sistema de equações de Navier-Stokes, o qual descreve o fluxo de um fluido viscoso incompressível, que obviamente não se enquadra nessa classe de equações parabólicas semilineares, que é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0, \end{cases}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade, p é a pressão, e ρ, ν são constantes positivas dadas, que representam a densidade e a viscosidade cinemática, respectivamente. A segunda equação não envolve a derivada no tempo, e a quantidade desconhecida p nunca aparece com a derivada no tempo.

Os sistemas relacionados são estudados da mesma maneira. Acoplando as equações de Navier-Stokes com a equação do calor, e incluindo um termo convecção na equação do calor e um termo de flutuação na equação de Navier-Stokes nos são fornecidas as equações de Boussinesq:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + Gr \theta \vec{g} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{Pr} \Delta \theta + \vec{v} \cdot \vec{g}, \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $\vec{g}$ é a direção da gravidade.

Para o fluxo e o campo magnético dentro da Terra, temos o seguinte sistema: (ver R.Hide [5])

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda \Delta \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \\ \operatorname{div} \vec{v}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

Essas equações provavelmente admitem um tratamento semelhante.

As próximas seções são dedicadas a aplicar a teoria estudada nos capítulos anteriores, a fim de obter resultados qualitativos para os modelos apresentados.

3.2 Equação do calor não-linear

Considere a equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(t, x, u, \nabla u), & \text{para } t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + a(x)u = 0, & \text{em } \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, $f(t, x, u, p)$, $p \in \mathbb{R}^3$, é localmente lipschitziana em todas as suas coordenadas, e para algum k real em $1 \leq k < 3$, e alguma função $B(t, r)$ contínua

$$\begin{aligned} |f(t, x, u, p)| &\leq B(t, |u|)(1 + |p|^k) \\ |f(t, x, u, p) - f(t, x, u, q)| &\leq B(t, |u|)(1 + |p|^{k-1} + |q|^{k-1})|p - q| \\ |f(t, x, u, p) - f(t, x, v, p)| &\leq B(t, |u| + |v|)(1 + |p|^k)|u - v|. \end{aligned}$$

Além disso assumimos que $a(x)$ é continuamente diferenciável em $\partial\Omega$ e $a(x) > 0$. Com o objetivo de aplicar os resultados obtidos na seção 2.2, consideramos $X = L^2(\Omega)$, $Au = g$, onde a função g foi dada no Lema 2.5, quando $u \in H^1(\Omega)$ e para todo $v \in H^1(\Omega)$, segue do teorema de Green a seguinte identidade

$$\int_{\Omega} g(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} a(x)u(x)v(x)ds.$$

Então A é auto-adjunto e definido positivo, e $D(A)$ contém todo $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial n} + au = 0$ em $\partial\Omega$, neste caso

$$Au = -\Delta u \text{ em } \Omega.$$

De fato,

$$D(A) = \left\{ u \in W^{2,2}(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial n} + au = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\},$$

uma vez que esse é um problema de fronteira regular para um operador fortemente elíptico (ver [2]). Segue que $X^\alpha \subset W^{1,q}(\Omega)$ se $\alpha > \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{q} > \frac{5-4\alpha}{6}$, e $X^\alpha \subset L^\infty(\Omega)$ se $\alpha > \frac{3}{4}$. Portanto, se $1 > \alpha > \max\left(\frac{3}{4}, \frac{(5k-3)}{4k}\right)$, temos

$$X^\alpha \subset W^{1,2k}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

com inclusão contínua. Então, quando $u \in X^\alpha$, e

$$F(t, u)(x) = f(t, x, u(x), \nabla u(x)), \quad x \in \Omega,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\|F(t, u)\|_{L^2(\Omega)} &= \|f(t, x, u(x), \nabla u(x))\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_{\Omega} |f(t, x, u(x), \nabla u(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} B(t, |u|)^2 (1 + |\nabla u(x)|^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq B(t, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) (\mu(\Omega))^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{W^{1,2k}(\Omega)}^k,
\end{aligned}$$

onde μ é a medida de Lebesgue.

As outras estimativas são similares e vemos que as hipóteses dos teoremas 2.2 e 2.3 são verificadas, então quando $u_0 \in X^\alpha$, existe uma única solução $u(t; u_0)$ em algum intervalo maximal $0 \leq t < t_1$ e $t_1 = +\infty$ ou $\|u(t; u_0)\|_\alpha \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_1^-$.

Portanto, temos uma solução da forma abstrata da equação do calor. Mas, de fato, quando $t > 0$, $u(t; u_0) \in D(A)$ e $t \rightarrow \frac{du}{dt} \in X^\alpha$ é localmente Hölder contínua quando $t > 0$, pelo teorema 2.7, então

$$(t, x) \rightarrow u(t, x; u_0), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x; u_0)$$

também são contínuas em $t_0 < t < t_1$ e $x \in \bar{\Omega}$.

Além disso, $u \in D(A)$ implica $\nabla u \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, então

$$Au = F(t, u) - \frac{du}{dt} \in L^{\frac{6}{k}}(\Omega).$$

Isso implica que $u \in W^{2, \frac{6}{k}}(\Omega)$, então $\nabla u \in W^{\frac{1}{6k}}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ se $\frac{1}{q} > \frac{k-2}{6}$. Se $k < 2$, $\nabla u(t, \cdot)$ é Hölder contínua.

Se $u(t, \cdot) \in W^{2, P_n}(\Omega)$ então (como acima) $u(t, \cdot) \in W^{2, P_{n+1}}(\Omega)$ se $\frac{1}{P_{n+1}} > k(\frac{1}{P_n} - \frac{1}{3})$ e se $1 \leq k < 3$ eventualmente temos $P_n > 3$ e $\nabla u(t, \cdot)$ Hölder contínua então $F(t, u) \in C^\delta(\Omega)$ para algum $\delta > 0$ e $u(t, \cdot) \in C^{2+\delta}(\Omega)$.

Portanto, para $t > 0$, $(t, x) \rightarrow u(t, x; u_0)$ é continuamente diferenciável em t , duas vezes continuamente diferenciável em x , e nós temos uma solução clássica.

3.3 Outra não linearidade

Considere o seguinte problema do valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \lambda u^3, & \text{para } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde λ é uma constante não negativa fixada e u_0 é uma dada função suave em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $2 \leq p < \infty$ com $p > \frac{n}{2}$.

Para fazermos uso dos resultados obtidos na seção 2.2, considere $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ e seja A o fecho em X do operador diferencial $-\Delta = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja $A_1 = A + I$ e $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$, com $\alpha \geq 0$. Então $X^\alpha = L_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^n)$, o Espaço de Bessel, que tem as seguintes propriedades:

- quando $2\alpha = k$ é um inteiro ≥ 0 , $X^\alpha = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$;
- quando $2p\alpha < n$, $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{2\alpha}{n}$, $\infty > q \geq p$, $X^\alpha \subset L^q(\mathbb{R}^n)$;
- quando $2p\alpha > n$, $0 \leq \nu < 2\alpha - \frac{n}{p}$, $X^\alpha \subset C^\nu(\mathbb{R}^n)$;
- quando $0 \leq k \leq 2\alpha$ e $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{2\alpha-k}{n}$, $X^\alpha \subset W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$.

Se $1 > \alpha > \frac{n}{2p}$, temos

$$\begin{aligned} \|u^3 - v^3\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \|u - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_1 (\|u\|_\alpha^2 + \|v\|_\alpha^2) \|u - v\|_\alpha \\ \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^3 &\leq C_1 \|u\|_\alpha^3 \end{aligned}$$

então as hipóteses da seção 2.2 são verificadas, e temos existência local e unicidade. Note, entretanto, que o resolvente de A não é compacto. Provaremos a existência global quando $\lambda \geq 0$. Contanto que a solução exista, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{3p} dt &= 3p \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{3p-2} u (\Delta u - \lambda u^3) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (3p\lambda |u|^{3p+2} + 3p(3p-1) |u|^{3p-2} |\nabla u|^2) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{3p} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^{3p} dx \\ &\leq C \|u(\cdot, 0)\|_\alpha^{3p}, \text{ para todo } t > 0, \end{aligned}$$

contanto que a solução exista, então a solução existe para todo $t > 0$ (exercício 1, seção 3.3 de [4]). De fato, a solução tem $\|u(\cdot, t)\|_\beta$ limitado para todo $t \geq 1$ e para qualquer $\beta < 1$, para

$$u(t+1) - e^{-A}u(t) = -\lambda \int_t^{t+1} e^{-A(t+1-s)} u^3(s) ds,$$

então $\|u(t+1) - e^{-A}u(t)\|_\beta$ é limitado para $t \geq 0$. Mas $\|u(t)\| = \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ é também limitado para todo $t \geq 0$, como acima, daí para $t \geq 0$, temos

$$\|u(t+1)\|_\beta \leq \|e^{-A}u(t)\|_\beta + C \leq C_1.$$

Agora a não-linearidade, $-\lambda u^3$, é uma aplicação polinomial limitada de X^α em X , então a solução depende analiticamente em $t > 0$ e $u_0 \in X^\alpha$, com valor em X^α . Podemos também estabelecer suavidade na variável x . Por exemplo, $u \in X^{1+\alpha}$ implica

$$\begin{aligned} \|Au^3\|_{L^p} = \|3u^2\Delta u - 6u|\nabla u|^2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq 3\|u\|_{L^\infty}^2 \|Au\| + 6\|u\|_{L^\infty} \|u\|_{W^{1,2p}(\mathbb{R}^n)}^2 \|u\|_{W^{1,2p}(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq C \|u\|_{1+\alpha}^3 \end{aligned}$$

para alguma constante C , desde que $Au \in X^\alpha \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ implica $u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $p \leq q < \infty$. Daí segue que $u(t) \in X^{1+\alpha}$ para qualquer $t > 0$, e por argumentos similares, para qualquer $\beta \geq \alpha$,

$$t \rightarrow u(t) \in X^\beta$$

é contínua quando $t > 0$ (ver exemplo 1 e 2, seção 3.5 de [4]).

Portanto, temos uma solução u existente para todo $t > 0$, dado $u(0) \in X^\alpha$, e tal que $(t, x) \rightarrow u(t, x)$ é analítica em $t > 0$ e frequentemente infinitamente diferenciável em $x \in \Omega$; em particular, temos uma solução clássica, que é limitada para todo $t > 0$.

3.4 A equação de Navier-Stokes

Considere para $t > t_0$,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + f_j(x, t)$$

para $j = 1, 2, 3$,

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

com valor de fronteira $u = 0$ em $\partial\Omega \times [t_0, \infty)$ e valor inicial $u(x, t_0) = u_0(x)$ para $x \in \Omega$, onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ com $\partial\Omega$ suave.

À primeira vista, a teoria da Seção 2.2 não se aplica, já que uma das quantidades desconhecidas p (a pressão) não aparece com uma derivada de tempo, e uma das equações ($\operatorname{div} u = 0$) também não tem derivada de tempo. No entanto, escolheremos o espaço X de modo que $\operatorname{div} u = 0$ automaticamente, e dessa forma, o termo de pressão sai das equações.

Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é continuamente diferenciável, $\operatorname{div} u = 0$, e o componente normal u_n desaparece em $\partial\Omega$, então para qualquer escalar $\phi \in C^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u \nabla \phi \, dx = 0.$$

Por outro lado, um campo de vetor suave u , que é ortogonal para todos os gradientes, deve satisfazer $\operatorname{div} u = 0$ em Ω , $u_n = 0$ em $\partial\Omega$.

Seja H_{π} o fecho $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de $\{\nabla \phi / \phi \in C^1(\Omega)\}$, e seja H_{σ} o fecho $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de

$$\{u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) / \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega, u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Então H_{π} , H_{σ} são subespaços ortogonais fechados em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. De fato,

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) = H_{\pi} \oplus H_{\sigma}.$$

Para provar isso, é suficiente mostrar que todo $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave, $u = 0$ próximo de $\partial\Omega$, tem a forma $u = v + \nabla \phi$ com $v \in H_{\sigma}$ e $\nabla \phi \in H_{\pi}$. Mas podemos escolher que ϕ seja uma solução de

$$\begin{cases} \Delta \phi = \operatorname{div} u, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

então ϕ é suave e $v = u - \nabla \phi$ também é suave, $\operatorname{div} v = 0$ em Ω , $v_n = 0$ em $\partial\Omega$.

Denote P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ em H_{σ} . Projetando a equação de Navier-Stokes em H_{σ} , obtemos formalmente

$$\frac{dv}{dt} + \mu A v = N(v) + f_{\sigma}(t), \quad v(t) \in H_{\sigma},$$

onde $\mu = \frac{1}{Re}$ (Re - número de Reynolds), $A = -P\Delta$ com dados de fronteira zero, $N(v) = -P(v \operatorname{grad})v$, e $f_{\sigma}(t) = P f(\cdot, t)$.

Seja $u, v \in C_0^3(\Omega) \cap H_{\sigma}$, um subespaço denso de H_{σ} , então $Au \in H_{\sigma}$,

$$\begin{aligned} (Au, v) &= (u, Av) \\ (Au, u) &= (-\Delta u, u) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos supor que A é um operador auto-adjunto densamente definido em H_σ . No trabalho de Odqvist ([9]) foi investigado o problema de valor de fronteira $Au = f$, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f, \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.11)$$

pelos métodos da teoria potencial, e estimativas obtidas para a função de Green que prova que

$$H_\sigma^1 = D(A) \subset W^{2,2}(\Omega) \cap H_\sigma$$

com inclusão contínua (ver [65]). Ou seja, se

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, H_\sigma^\alpha \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ dado } \frac{1}{q} > \frac{(5-4\alpha)}{6}, \text{ e } \frac{3}{4} < \alpha < 1, \\ H_\sigma^\alpha \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Agora considere o termo não linear:

$$\|N(v)\| \leq \|v\|_{L^\infty} \|\nabla v\|_{L^2} \leq C \|v\|_\alpha^2 \text{ se } \alpha > \frac{3}{4},$$

então N é um polinômio limitado de H_σ^α em H_σ , se $\alpha > \frac{3}{4}$.

Segue do teorema 2.2 que se $v(t_0) \in H_\sigma^\alpha$ e $t \rightarrow f_\sigma(\cdot, t)$ é Hölder contínua em H_σ para $t \geq t_0$, existe uma única solução $v(t)$ em algum intervalo maximal $t_0 \leq t < t_1$, e a solução depende analiticamente de $v(t_0)$ e o número de Reynolds $Re = \frac{1}{\mu} > 0$.

Suponha de fato que, na equação original, $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ é $C^{1+\delta}$, para algum $\delta > 0$, $x \in \Omega$, e $t_0 \leq t < t_1$; então $(x, t) \rightarrow f_\sigma(x, t)$ ($f_\sigma = Pf$) é lipschitziana em (x, t) . Mostramos que temos uma solução clássica do sistema original.

Argumentando como nos exemplos acima, se $t > t_0$, $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ é $C^{2+\delta}$ em x , $C^{1+\delta}$ em t , para algum $\delta > 0$, então

$$P \left\{ \frac{\partial v}{\partial t}(\cdot, t) - \mu \Delta v(\cdot, t) - (v \operatorname{grad})v + f(\cdot, t) \right\} = 0.$$

Mas a quantidade entre colchetes é Hölder contínua em Ω , então é o gradiente de uma função $C^{1+\delta}$, $p(\cdot, t)$, para cada t , que também é contínua em t .

Capítulo 4

Apêndice

Teorema 4.1. *(Teorema da Limitação uniforme) Seja E e F dois espaços de Banach e seja $(T_i)_{i \in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares contínuos de E em F . Assuma que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \forall x \in E.$$

Então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty.$$

Em outras palavras, existe uma constante c tal que

$$\|T_i x\| < c \|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

Obs: A demonstração está na página 32 do Brezis (Teorema 2.2)

Teorema 4.2. *(Teorema da Contração) Seja X um espaço métrico completo compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que f é uma contração se:*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X \text{ com } x \neq y.$$

Existe um único ponto z tal que

$$f(z) = z.$$

Teorema 4.3. *(Desigualdade de Grönwall) Se, para $t_0 \leq t \leq t_1$, $\phi(t) \geq 0$ e $\psi(t) \geq 0$ são funções contínuas tais que a desigualdade*

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds$$

se mantenha em $t_0 \leq t \leq t_1$, com K e L sendo constantes positivas, então

$$\phi(t) \leq K \exp \left(L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right),$$

sendo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Teorema 4.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$, onde X é um espaço de Banach. Se $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado.*

Definição 4.1. *Um operador T é dito fechável, se existe alguma extensão S de T que é fechado. Ou seja, $T \subset S$ e S é fechado.*

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A. and FOURNIER, J. F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, N.Y., 1975.
- [2] AGMON, S., DOUGLIS, A. and NIRENBERG, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying, general boundary conditions*, I., Comm. Pure Appl. Math. 12, 1959, 623-727.
- [3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* .2010, Springer: USA.
- [4] HENRY, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [5] HIDE, R., *On planetary atmospheres and interiors*, In *Mathematical Problems in the Geophysical Sciences*, 1, W.H., ed. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.
- [6] JORGENS, K., *Nonlinear wave equations*, University of Colorado, Department of Mathematics, Colorado, USA, 1970.
- [7] LORENO, G., *Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais parciais funcionais neutras com impulsos via teoria de semigrupos*, Dissertação de Mestrado, Maringá, 2019.
- [8] MACEDO, B., *Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais*, Dissertação de Mestrado; São Carlos, SP, 2016.
- [9] ODQVIST, F. K. G., *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten*, Math. Zeit, 32, 1930, 329-375.
- [10] PAZY, A., *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] SILVA PEREZ, S., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações*, Dissertação de Mestrado; Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2012.
- [12] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton U. Press, Princeton, New Jersey, 1970.