UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e Análise de Blow-up de Métricas Conformes com Curvaturas Escalar e Média Prescritas

Dalton da Silva Gomes

São Cristóvão – SE, Brasil

Agosto de 2024

Existência e Análise de Blow-up de Métricas Conformes com Curvaturas Escalar e Média Prescritas

Dalton da Silva Gomes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática - PROMAT, da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão – SE, Brasil

Agosto de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

G633e

Gomes, Dalton da Silva
Existência e análise de blow-up de métricas conformes com curvaturas escalar e média prescritas / Dalton da Silva Gomes ; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2024.
127 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Geometria diferencial. 2. Curvatura. 3. Riemann, Superfícies de. I. Santos, Almir Rogério Silva orient. II. Título.

CDU 514.7

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Existência e Análise de Blow-up de Métricas Conformes com Curvaturas Escalar e Média Prescritas

por

Dalton da Silva Gomes

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALMIR ROGERIO SILVA SANTOS
Data: 21/08/2024 14:37:20-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
FRANCIELE CONRADO DOS SANTOS
Data: 22/08/2024 18:00:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Franciele Conrado dos Santos - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br
CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ
Data: 21/08/2024 15:14:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL
Segundo Examinador

São Cristóvão, 05 de Agosto de 2024

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marcelo Déda Chagas, s/n - Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887 CEP: 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Lúcio e Maria de Fátima, que, na medida do possível, sempre pude contar com o apoio aos meus estudos e ao meu desenvolvimento como um todo. Agradeço aos meus irmãos Bruno, Daniela, Leandro e Felipe, em especial a Bruno e Daniela, que foram essenciais com imenso apoio e incentivo de várias formas em inúmeros momentos desse caminho. Agradeço a Felipe, que, além de tudo, é o irmão que tem convivido comigo de perto em praticamente toda a trajetória até aqui e contribuiu bastante das mais variadas maneiras nesse processo.

Agradeço ao professor Almir Rogério por ter aceitado me orientar nesta dissertação de mestrado, pela paciência, apoio e por ter sido sempre solícito em todo este longo processo, pelas valiosas e numerosas reuniões que tivemos e que contribuíram amplamente para o desenvolvimento desta dissertação. Com certeza, tudo isto foi imprescindível para a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos professores Cícero Tiarlos, Franciele Conrado, Rayssa Caju e Maria por aceitarem participar da banca na minha defesa de mestrado e por contribuírem também no trabalho.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROMAT), que fizeram parte da minha formação no mestrado e que, indubitavelmente, foram essenciais em todo o curso. Agradeço, principalmente, ao professor Zaqueu por todo o aprendizado, dedicação, apoio e incentivo no mestrado e na continuidade deste caminho acadêmico. Agradeço também aos professores Arlúcio, Angelo, Cayo, Jônison e Samuel pelos bons conselhos e ideias, seja em aulas ou em alguns momentos no ambiente do DMA e PROMAT.

Agradeço aos colegas e amigos do PROMAT pelas valiosas conversas, estudos, parcerias e bons momentos vividos, em especial a Lucas, Júnior, Samorane, Adriana, Amanda, Jardel, Marília, Jeverson, Gerônimo, Virgínia, Edivangel e tantos outros que conheci durante o mestrado. Agradeço, principalmente, a Lucas, que esteve amplamente presente neste processo do mestrado como um todo, e à Jéssica, que também esteve presente em alguns momentos.

Agradeço ao pessoal da secretaria do PROMAT, em especial a Igor e Neto, por estarem sempre dispostos a ajudar, solucionar as dúvidas surgidas e pelo serviço prestado.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram direta e indiretamente nesse caminho.

“O presente trabalho contou com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.”

Resumo da Dissertação apresentada ao PROMAT/UFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre (Me.)

Existência e Análise de Blow-up de Métricas Conformes com Curvaturas Escalar e Média Prescritas

Dalton da Silva Gomes

Agosto/2024

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

O objetivo desta dissertação é apresentar com nuances os resultados obtidos em [9], no qual estuda o problema de prescrever as curvaturas escalar e média em variedades Riemannianas com fronteira ∂M e de dimensão $n \geq 3$ através de métricas conformes. Este é um problema variacional cuja análise está atrelada a uma relação entre as funções que queremos prescrever como curvaturas escalar e média. Esta relação é dada por uma certa função $\mathfrak{D}_n$ definida na fronteira ∂M. Se $\mathfrak{D}_n < 1$, a solução é encontrada através de minimização de um certo funcional. O caso em que $\mathfrak{D}_n > 1$ em algum ponto, é necessário uma análise de blow-up. Neste caso, alguns resultados são obtidos apenas para dimensão 3.

Palavras-chaves: Curvatura Escalar, Curvatura Média, Métricas Conformes, Prescrição de Curvaturas, Análise de Blow-up.

Abstract of Dissertation presented to PROMAT/UFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master

Existence and Blow-up Analysis of Metrics Conforming to Prescribed Scalar and Mean Curvatures

Dalton da Silva Gomes

August/2024

Advisor: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

The objective of this dissertation is to present with nuances the results obtained in [9], in which it studies the problem of prescribing the scalar and mean curvatures in Riemannian manifolds with boundary ∂M and dimension $n \geq 3$ through of conformal metrics. This is a variational problem whose analysis is linked to a relationship between the functions that we want to prescribe as scalar and mean curvatures. This relationship is given by a certain function $\mathfrak{D}_n$ defined on the boundary ∂M. If $\mathfrak{D}_n < 1$, the solution is found through minimization of a certain functional. The case where $\mathfrak{D}_n > 1$ at some point requires a blow-up analysis. In this case, some results are only obtained for dimension 3.

Keywords: Scalar Curvature, Mean Curvature, Conformal Metrics, Curvature Prescription, Blow-up Analysis.

Sumário

Introdução

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira ∂M e de dimensão n. Associadas à métrica g, existem duas importantes funções suaves, S_g definida em M, chamada de curvatura escalar, e h_g definida em ∂M, chamada de curvatura média da fronteira. Podemos nos perguntar se dadas funções $K \in C^\infty(M)$ e $H \in C^\infty(\partial M)$, existe alguma função $u \in C^\infty(M)$ tal que a métrica $\widetilde{g} = e^u g$ possui curvaturas escalar e média exatamente iguais a K e H, respectivamente. As métricas g e $\widetilde{g}$ são ditas métricas conformes.

O problema de prescrever a curvatura de uma variedade foi iniciado por Berger em [4]. Nesse trabalho, ele investigou o problema de prescrever a curvatura Gaussiana em uma superfície fechada com característica de Euler negativa. Posteriormente, Kazdan e Warner, ao longo de uma série de trabalhos na década de 1970, exploraram o problema da prescrição da curvatura escalar ou Gaussiana, obtendo vários resultados significativos. Desde então, o problema de prescrição de curvatura tem sido intensamente estudado em suas diversas versões, dependendo das condições impostas à variedade ou às métricas. Neste trabalho, estudaremos o problema de prescrição da curvatura em variedades compactas com fronteira e de dimensão $n \geq 3$.

O problema a ser estudado neste trabalho consiste no seguinte: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira e de dimensão $n \geq 3$. Considere uma métrica conforme $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, com $u : M \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. É bem conhecido que as curvaturas escalar e média das métricas g e $\widetilde{g}$ estão relacionadas através das seguintes equações (veja [7]):

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\widetilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + h_g u = h_{\widetilde{g}} u^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial M. \end{cases} \tag{1}$$

Existem diversos problemas relacionados a equação (1) na literatura, ao contrário do caso sem fronteira, ainda existem casos importantes em aberto. Quando a variedade é fechada e $S_{\widetilde{g}}$ é constante o problema é chamado de Problema de Yamabe, o qual é conhecido a existência de solução, veja [20]. Um problema análogo para o caso com fronteira, é estudar (1) quando $S_{\widetilde{g}}$ e $h_{\widetilde{g}}$ são constantes. Um primeiro critério para existência de soluções foi dado em [7], embora dependam de multiplicadores de Lagrange desconhecidos.

Nosso objetivo nesta dissertação é estudar resultados de existência de soluções para a equação (1) obtidos em [9].

Podemos simplificar este problema a uma situação mais simples utilizando um resultado dado por Escobar no Lema 1.1, presente em [13]. Assim, sem perda de generalidade, através de uma transformação conforme, (M, g) denotará, ao longo deste trabalho, uma variedade Riemanniana compacta com fronteira que possui curvatura escalar S que não muda de sinal e curvatura média $h_g \equiv 0$.

Dadas funções $K \in C^\infty(M)$ e $H \in C^\infty(\partial M)$, em vista do problema (1), soluções positivas do problema a seguir nos fornecem uma métrica conforme a g com curvaturas escalar e média K e H, respectivamente. Desta forma, se u é uma solução positiva de

$$\begin{cases} -\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S\,u = K\,u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = H\,u^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial M, \end{cases} \tag{2}$$

obtemos que a métrica $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}\,g$ possui curvatura escalar igual a K e curvatura média igual a H.

Soluções para o problema (2) podem ser obtidas como *pontos críticos* do seguinte *funcional energia* $I : H^1(M) \to \mathbb{R}$, definido como

$$I(u) = \frac{2\,(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_M S\,u^2 - \frac{n-2}{2n}\int_M K\,|u|^{\frac{2n}{n-2}} - (n-2)\int_{\partial M} H\,|u|^{\frac{2\,(n-1)}{n-2}}. \tag{3}$$

A natureza do funcional é determinada, em parte, por um quociente que nos dá a relação entre as curvaturas prescritas. Por conveniência, definimos a seguinte função $\mathfrak{D}_n : \partial M \to \mathbb{R}$ por

$$\mathfrak{D}_n(x) = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{H(x)}{\sqrt{|K(x)|}}\,. \tag{4}$$

A depender se $\mathfrak{D}_n$ é estritamente menor que 1 ou não, encontramos situações totalmente diferentes. Sobre certas condições, assumindo que $\mathfrak{D}_n(x) < 1$ para todo $x \in \partial M$, obtemos que o funcional é *coercivo* e um minimizador global pode ser encontrado. Enquanto que, se $\mathfrak{D}_n(x) \geq 1$ para todo $x \in \partial M$, uma análise mais refinada é necessária.

O primeiro resultado de existência de soluções é o seguinte teorema.

Teorema 1. *Suponha que $K < 0$ e que $\mathfrak{D}_n(x) < 1$ para todo $x \in \partial M$. Então, se $S < 0$ temos que (2) admite uma solução.*

A demonstração deste teorema consiste em encontrar um ponto de mínimo do funcional energia I dado em (3). Se $S = 0$, hipóteses extras são necessárias para descartar a possibilidade do minimizador ser identicamente nulo. Assim a solução que obtém-se é geometricamente admissível. O segundo resultado principal deste trabalho lida exatamente com esta situação, que é o teorema a seguir.

Teorema 2. *Suponha que $K < 0$ em M, e que $\mathfrak{D}_n < 1$ em ∂M. Então, se $S = 0$ e $\int_{\partial M} H > 0$, temos que (2) admite uma solução.*

Observe que os teoremas anteriores lidam com o caso em que $\mathfrak{D}_n < 1$. Se existe um ponto $p \in \partial M$ tal que $\mathfrak{D}_n(p) > 1$, a demonstração de existência de soluções de (2) é mais delicada. Será necessário utilizar o Teorema do Passo da Montanha, o Truque de Monotonicidade de Struwe e uma análise de blow-up de sequências de soluções do problema (2) perturbado. Com esta análise, prova-se o seguinte teorema.

Teorema 3. *Seja $n = 3$. Assuma que $S = 0$, $K < 0$ e que H é tal que*

(i) $\int_{\partial M} H < 0$,

(ii) $\mathfrak{D}_n(p) > 1$ *para algum* $p \in \partial M$,

(iii) 1 *é valor regular para a função* $\mathfrak{D}_n : \partial M \to \mathbb{R}$.

Então, temos que (2) *admite uma solução positiva.*

Como dito anteriormente, para a demonstração do Teorema 3 é necessário uma análise de blow-up. Para tal fim, seja $(K_i)_i$ uma sequência de funções suaves em M tal que $K_i \to K$ em $\mathcal{C}^2(M)$ e seja $(H_i)_i$ uma sequência de funções suaves em ∂M tal que $H_i \to H$ em $\mathcal{C}^2(\partial M)$. Dada uma sequência de números reais $p_i \nearrow \dfrac{n+2}{n-2}$, considere o seguinte problema perturbado

$$\begin{cases} -\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Delta_g u_i \,+\, S\,u_i = K_i\,u_i^{p_i} & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u_i}{\partial \eta} = H_i\,u_i^{\frac{p_i+1}{2}} & \text{em } \partial M. \end{cases} \tag{5}$$

Soluções de (5) são pontos críticos do funcional energia I_i abaixo:

$$I_i(u) \;=\; \frac{2\,(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_M S\,u^2 - \frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\,|u|^{p_i+1} - \frac{4\,(n-1)}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\,|u|^{\frac{p_i+3}{2}}, \tag{6}$$

O objetivo principal é encontrar soluções de (2), porém, em geral, estudar tal problema é difícil. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma perturbação como em (5) para a qual a existência de uma solução positiva u_i seja menos árdua, e então garantir que o limite da sequência de soluções (u_i) exista. Da teoria de regularidade elíptica, para que tal limite exista é necessário apenas garantir que a sequência (u_i) seja uniformemente limitada em i.

Considere uma sequência (u_i) de soluções para o problema (5), e defina seu *conjunto singular* como sendo

$$\mathcal{P} \;=\; \{p \in M : \exists\, x_i \to p \text{ tal que } u_i(x_i) \text{ é não limitada}\}\,.$$

O último resultado deste trabalho é o teorema a seguir.

Teorema 4. *Suponha que $K < 0$. Seja uma sequência (u_i) de soluções do problema (5), e seja $\mathcal{P}$ o conjunto singular associado. Então, temos que*

(1) $\mathcal{P} \subset \{p \in \partial M : \mathfrak{D}_n(p) \geq 1\}$.

Portanto, podemos escrever $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$, *com* $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n = 1\}$ *e* $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n > 1\}$. *Em dimensão $n = 3$, vale as seguintes afirmações:*

(2.1) $\mathcal{P}_1$ *é um conjunto finito.*

(2.2) Se $S \leq 0$, *então* $\mathcal{P}_1 = \varnothing$.

(2.3) Se $I_i(u_i)$ *é uniformemente limitada e 1 é valor regular de* $\mathfrak{D}_n$, *então* $\mathcal{P}_0 = \varnothing$.

Vale destacar que a restrição na dimensão $n = 3$ no Teorema 3 é devido a restrição a esta dimensão no Teorema 4. Esta, por sua vez, é devido ao fato que só foi possível mostrar que um ponto de blow-up isolado em $\mathcal{P}_1$ é um ponto de blow-up isolado simples em dimensão 3, que é a Proposição 3.16 neste trabalho.

Esta dissertação está dividida em três capítulos e um apêndice. No Capítulo 1, estabelecemos a base para entendermos o problema (2) e toda a discussão apresentada acima. Começamos apresentando as notações que serão utilizadas. Após isso, exibimos definições e teoremas importantes relacionados a variedades, como, por exemplo, as definição de métrica Riemanniana, curvaturas escalar e média, operadores diferenciáveis e espaços de funções relevantes para o estudo do problema. Além disso, apresentamos alguns resultados da teoria de regularidade elíptica, o Teorema do Passo da Montanha, estudamos o problema limite e suas soluções relacionado ao problema (2) e, por fim, o Princípio Variacional de Ekeland.

O Capítulo 2 é dedicado à demonstrar os três primeiros resultados mencionados acima. Para tal objetivo, estabelecemos, nas duas primeiras seções deste capítulo, resultados importantes sobre variações de domínio e faremos um estudo variacional do funcional energia I, definido em (3). Nas Seção 2.3, provaremos os Teoremas 1 e 2. Na Seção 2.4, provaremos o Teorema 3.

No Capítulo 3, estudamos o comportamento dos pontos de blow-up do problema (5). Diante de tal objetivo, construiremos alguns resultados sobre o funcional energia I e, após isso, demonstramos o Teorema 4. Para clarificar melhor a demonstração, a dividiremos em subseções para cada um dos itens deste teorema.

No Apêndice, demonstramos o Lema 2.9, enunciado no Capítulo 2.

1 Preliminares

Neste capítulo dissertamos sobre alguns conceitos e resultados preliminares que constituem-se peças fundamentais no cerne das ideias que, posteriormente, serão desenvolvidas ao longo deste trabalho. Apresentaremos conceitos básicos relacionados às variedades Riemannianas, geometria conforme, alguns espaços de funções, regularidade elíptica, Princípio do Máximo, dentre outros tópicos.

Para elucidar melhor e otimizar a escrita em alguns momentos, começaremos descrevendo algumas notações que serão essenciais.

1.1 Notações

Reunimos aqui notações que ajudarão a estabelecer um alicerce para as ideias posteriores. Em algumas ocasiões, almejando facilitar os cálculos e a escrita, usaremos as notações

$$C_n = \frac{4(n-1)}{n-2}, \quad 2^* = \frac{2n}{n-2} \quad \text{e} \quad 2^\# = \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Denote por M uma variedade com fronteira ∂M. Seja $\Omega \subset M$. Adotaremos as seguintes notações:

- $\partial_0\Omega = \overline{\Omega} \cap \partial M$.
- $\partial^+\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_0\Omega$.
- $\Omega_+ = \Omega \setminus \partial M$.
- $B(p,r)$ denota uma bola centrada em p e de raio r.
- $\mathfrak{X}(M)$ é o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M,
- $\mathcal{C}^\infty(M)$ é o conjunto de todas as funções suaves definidas em M,

- η é o vetor normal unitário apontando para fora ao longo de ∂M,

- Para funções definidas em ∂M, denotaremos suas derivadas com um T sobrescrito. Por exemplo, $\nabla\psi$ denota o gradiente de ψ em M e $\nabla^T\psi$ o gradiente de ψ em ∂M,

- Eventualmente utilizaremos as letras c e C, com ou sem índices, para representar diferentes constantes, mesmo que em uma mesma linha.

- $f = O(g)$, significa que $|f(x)| < C\,|g(x)|$, para alguma constante $C > 0$.

- $f = o(g)$, significa que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

- Em relação a integrais, consideraremos o elemento de volume associado à métrica inicial e, a menos dos casos em que se faça muito necessário, omitiremos os elementos de volume e de área afim de evitar uma escrita túrbida.

- O símbolo $\fint_\Omega f$ será utilizado para denotar a o valor médio de f, isto é,

$$\fint_\Omega f = \frac{1}{vol(\Omega)}\int_\Omega f\,.$$

Convenientemente, em algumas vezes faremos uso da notação de Einstein, que diz-nos que índices repetidos acima e abaixo representam somas variando de 1 até a dimensão da variedade, como, por exemplo,

$$u^i v_j = \sum_{i,j=1}^{n} u^i v_j.$$

Ressaltamos aqui que assumimos os conhecimentos prévios de Geometria Diferencial e Variedades Diferenciáveis, para consultar detalhes veja [12], [18] e [19].

1.2 Métrica Riemanniana

Introduziremos as principais noções de variedade Riemanniana que serão necessários. Iniciemos com a definição de métrica Riemanniana.

Definição 1.1. *Seja M uma variedade suave com ou sem fronteira. Uma* ***métrica Riemanniana*** *em M é um tensor suave $g \in \mathcal{T}^{(2,0)}(M)$ tal que em cada ponto $p \in M$, a aplicação associada $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é um produto interno no espaço tangente T_pM. Uma* ***variedade Riemanniana (com fronteira)*** *é um par (M, g) onde M é uma variedade suave e g é uma métrica Riemanniana em M.*

Dada a definição de métrica Riemanniana, o resultado a seguir nos diz sobre a existência de tal métrica em váriedades suaves.

Teorema 5. *Toda variedade suave M com ou sem fronteira admite uma métrica Riemanniana.*

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) orientada de dimensão $n \geq 1$, o *elemento de volume* de M, denotado por dv_g, é dado, em coordenadas, por

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx.$$

Por conseguinte, o volume da variedade M é igual a

$$vol_g(M) = \int_M dv_g.$$

Definição 1.2. *Uma* ***conexão afim*** *∇ em uma variedade suave M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

denotado por $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_X Y$ é $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear em X, ou seja,

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\,\nabla_X Z + g\,\nabla_Y Z, \qquad \text{para todo } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

(ii) $\nabla_X Y$ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* Y*, ou seja,*

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z\,, \qquad \textit{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

(iii) ∇ *satisfaz a regra do produto,*

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \qquad \textit{para todo } f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

A conexão afim $\nabla_X Y$ *é chamada a* ***derivada covariante*** *de* Y *na direção* X *para a conexão* ∇*.*

Teorema 6. *(**Conexão de Levi-Civita**) Dada uma variedade Riemanniana* (M, g)*, existe uma única conexão afim satisfazendo as condições a seguir:*

(i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica);*

(ii) $X\,g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ *(compatível com a métrica Riemanniana).*

Esta conexão que satisfaz estes itens é chamada de **conexão de Levi-Civita** ou **conexão Riemanniana**. Assim, a menos que se diga o contrário, quando falarmos em conexão, daqui para frente, estaremos nos referindo a conexão de Levi-Civita.

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização de M. Os **símbolos de Christoffel** são definidos como as *componentes* da conexão de Levi-Civita definidos em U por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

onde temos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} + \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right),$$

com (g_{ij}) sendo as componentes da métrica g nesse sistema de coordenadas e (g^{ij}) é a sua inversa. Dada uma variedade Riemanniana (M, g), temos que a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

é um *tensor* do tipo $(3,1)$. Utilizando a métrica g, definimos o **tensor curvatura (de Riemann)** Rm como o tensor do tipo $(4,0)$ dado por

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$$

com $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$. Suas componentes em um sistema de coordenadas são dadas por

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^{n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

e

$$R_{ijks} := Rm\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = R_{ijk}^{n}\, g_{ns}\,.$$

Em coordenadas, segue que

$$R_{ijk}^{t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^{t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^{t} + \Gamma_{jk}^{p}\,\Gamma_{ip}^{t} - \Gamma_{ik}^{p}\,\Gamma_{jp}^{t}\,.$$

Definição 1.3. *(**Tensor de Ricci e Curvatura Escalar**) O **tensor de Ricci**, denotado por Ric, ou Ric_g para denotar a dependência da métrica, é o tensor do tipo $(2,0)$ definido como*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \longmapsto R(Z,X)Y).$$

As componentes de Ric, denotadas por R_{ij}, são dadas por

$$R_{ij} = g^{kt}\, R_{kijt}\,.$$

*A **curvatura escalar** de M, denotada por S ou por R_g, é a função definida como o traço do tensor de Ricci, ou seja, é dada por*

$$S = tr(Ric_g) = g^{ij}\, R_{ij}\,.$$

1.3 Subvariedades

Sejam M e $\widetilde{M}$ variedades suaves com ou sem fronteira, de dimensões iguais a n e $n+m$, respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M \to \widetilde{M}$ é uma **imersão** se a diferencial $d\varphi_p : T_pM \to T_p\widetilde{M}$ é *injetiva* para todo $p \in M$. Desta forma, se φ é uma imersão, então, pelo Teorema da Função Inversa, temos que para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M tal que $\varphi : U \to \widetilde{M}$ é um *mergulho*, ou seja, φ é um homeomorfismo de U sobre $\varphi(U) \subset \widetilde{M}$. Assim, temos que $\varphi(U)$ é uma *subvariedade mergulhada* de $\widetilde{M}$, Como $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um difeomorfismo local, então para cada $p \in M$ a aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\varphi(U)$ é um isomorfismo. Com isso, podemos identificar U com $\varphi(U)$ e campos de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ com $d\varphi(X) \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$. Além disso, se $(\widetilde{M}, g)$ é uma variedade Riemanianna, então a métrica g induz uma métrica φ^*g em M, onde φ^*g é o *pullback* de g por φ, e neste caso temos uma **imersão isométrica**. No que se segue, consideraremos que $M \subset \widetilde{M}$.

Notemos que, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\widetilde{M}$ induz uma decomposição de $T_p\widetilde{M}$ na soma direta

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\widetilde{M}$. Assim, dado $v \in T_p\widetilde{M}$, pode-se escrever que

$$v = v^\top + v^\perp.$$

onde $v^\top \in T_pM$ é a *componente tangencial* de v e $v^\perp \in (T_pM)^\perp$ é a *componente normal* de v. Dado um aberto $U \subset M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, sejam as extensões locais $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ a $\widetilde{M}$ dos campos de vetores X e Y, respectivamente. Se $\widetilde{\nabla}$ e ∇ são as conexões de Levi-Civita das variedades suaves $\widetilde{M}$ e M, respectivamente, é um fato bem conhecido que

$$\nabla_X Y = \left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^\top.$$

Definição 1.4. *Sejam M e $\widetilde{M}$ variedades suaves com ou sem fronteira, de dimensões n e $n+m$, respectivamente. A **segunda forma fundamental** de M em $\widetilde{M}$ é a aplicação bilinear $\sigma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^\perp(M)$ dada por*

$$\sigma(X, Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y$$

onde $\mathfrak{X}^\perp(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : X(p) \in (T_pM)^\perp \text{ para todo } p \in M\}$.

A aplicação σ da Definição 1.4 é uma forma bilinear simétrica. A demonstração deste fato pode ser encontrada, por exemplo, na Proposição 2.1 do Capítulo 6 em [11]. Pode-se mostrar também que σ não depende das extensões locais dos campos de vetores X e Y. Além disso, o valor de $\sigma(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Dados $p \in M$ e $\mathfrak{n} \in (T_pM)^{\perp}$, defina a aplicação linear $S_{\mathfrak{n}} : T_pM \to T_pM$ por

$$S_{\mathfrak{n}}(u) = -\left(\widetilde{\nabla}_u N\right)^{\top} \tag{1.1}$$

onde $(\cdot)^{\top}$ denota a componente tangencial e N é uma extensão local do vetor $\mathfrak{n}$ normal à M. Notemos que a aplicação $S_{\mathfrak{n}}$ satisfaz

$$\langle S_{\mathfrak{n}}(u), v\rangle = \langle \sigma(u,v), \mathfrak{n}\rangle$$

para todo $u, v \in T_pM$. Além disso, como σ é simétrica, segue que $S_{\mathfrak{n}}$ é auto-adjunta.

Definição 1.5. *(**Curvatura Média**) Seja uma subvariedade Riemanniana $M \subset \widetilde{M}$. Considere, para todo $p \in M$ e todo $\mathfrak{n} \in (T_pM)^{\perp}$, o traço da aplicação $S_{\mathfrak{n}}$, que é dada por (1.1). Dizemos que este traço é a **curvatura média** H_g de M com respeito a $\mathfrak{n}$.*

Dado um *referencial ortonormal* local $e_1, \dots e_n$ de campos de vetores normais a M, definimos o **vetor curvatura média**, denotado por $\mathbf{H}$, da subvariedade $M \subset \widetilde{M}$ como

$$\mathbf{H} = \sum_i^n H_{e_i} e_i \,.$$

É possível mostrar também que o vetor curvatura média não depende da escolha do refencial.

1.4 Operadores Diferenciáveis

Definição 1.6. *Seja M uma variedade Riemanniana com ou sem fronteira e seja $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$. O **gradiente** de f, denotado por $\nabla_g f$, é o único campo de vetores em M tal que*

$$g(\nabla_g f, X) = X(f) = df(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Em coordenadas, temos que

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Definição 1.7. *Seja M uma variedade Riemanniana com ou sem fronteira, e sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O* ***divergente*** *do campo de vetores X é dado por*

$$\operatorname{div}_g X = tr\left(Y \longmapsto \nabla_Y X\right) = g^{ij}\, g(\nabla_{e_i} X, e_j)\,.$$

Se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal, então temos que

$$\operatorname{div}_g X = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)\,.$$

Em coordenadas, se $X = v^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, segue que

$$\operatorname{div}_g X = \frac{\partial v^{\hat{\imath}}}{\partial x_i} + v^j\, \Gamma^i_{ij}.$$

Definição 1.8. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. O* ***laplaciano*** *de f, denotado por $\Delta_g f$, é a aplicação $\Delta_g f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta_g f = \operatorname{div}_g(\nabla_g f).$$

Observe que, em coordenadas, temos

$$\Delta_g f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \Gamma^k_{ii} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} f\right) \tag{1.2}$$

onde $|g| = \det(g_{ij})$. Além disso, para quaisquer $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ vale as seguintes propriedades:

(i) $\Delta_g(f + h) = \Delta_g(f) + \Delta_g(h)$;

(ii) $\Delta_g(f\,h) = f\,\Delta_g(h) + h\,\Delta_g(f) + 2\,(\nabla_g f \cdot \nabla_g h)$.

O teorema a seguir é um dos mais importantes na teoria de integração em variedades Riemannianas e, também pela grande utilidade, vale a pena relembrarmos.

Teorema 7. *(**Teorema da Divergência**) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada com fronteira ∂M. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ possui suporte compacto em M, então temos que*

$$\int_M \big(\operatorname{div}_g X\big)\, dv_g = \int_{\partial M} X \cdot \eta \, dv_h \,,$$

onde η é o vetor normal unitário apontando para fora ao longo de ∂M, e h é a métrica Riemanniana induzida em ∂M.

Corolário 1.9. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta orientada com fronteira ∂M. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ possui suporte compacto em M e $\varphi \in C^\infty(M)$, então*

$$\int_M \varphi \operatorname{div}_g X \, dv_g \;=\; - \int_M \nabla_g \varphi \cdot X \, dv_g \;+\; \int_{\partial M} \varphi X \cdot \eta \, dv_h \,.$$

1.5 Geometria Conforme

Vejamos o conceito de métricas conformes que está na essência do problema estudado neste trabalho.

Definição 1.10. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dizemos que outra métrica $\widetilde{g}$ em M é uma **métrica conforme** à métrica g se ela pode ser escrita da forma $\widetilde{g} = f\, g$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função positiva diferenciável que é chamada de fator conforme. Denotamos por $[g]$ a família de métricas conformes a g em M.*

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. O elemnto de volume de M, denotado por dv_g, é dado, em coordenadas, por

$$dv_g \;=\; \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx \,.$$

O volume da variedade M é dado por

$$vol_g(M) \;=\; \int_M dv_g \,.$$

Observemos que quando multiplica-se a métrica g por uma função λ obtemos a seguinte relação entre os volumes:

$$vol_{\lambda g}(M) \;=\; \lambda^{\frac{n}{2}}\, vol_g(M) \,.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} dv_{\lambda g} &= \sqrt{\det \lambda\, g}\, dx \\ &= \sqrt{\lambda^n \det g}\, dx \\ &= \lambda^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det g}\, dx \\ &= \lambda^{\frac{n}{2}}\, dv_g(M)\,. \end{aligned}$$

Agora, notemos que se $\widetilde{g} \in [g]$ podemos escrever $\widetilde{g} = e^u\, g$, onde u é uma função suave em M. No que se segue, os objetos geométricos relativos a métrica $\widetilde{g}$ são denotados com "~", por exemplo, $Ric_{\widetilde{g}} = \widetilde{Ric}$ e $S_{\widetilde{g}} = \widetilde{S}$ são o *tensor de Ricci* e a *curvatura escalar* de $\widetilde{g}$, respectivamente.

Proposição 1.11. *Se $\widetilde{g} = e^{2u}\, g$ para alguma função $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então*

$$Ric_{\widetilde{g}} = Ric_g - (n-2)\nabla_g^2 u - \left(\Delta_g u + (n-2)\,|\nabla_g u|^2\right) g + (n-2)\, du \otimes du$$

e

$$\widetilde{S} = e^{-2u}\left(S - 2\,(n-1)\Delta_g u - (n-1)\,(n-2)\,|\nabla_g u|^2\right).$$

A proposição a seguir é um resultado conhecido e bastante importante para o nosso estudo neste trabalho.

Proposição 1.12. *Se $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}\, g$, para alguma função $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ com $u > 0$ e $n \geq 3$, então*

$$-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S\,u = \widetilde{S}\,u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad em\ M$$

e

$$\frac{2}{n-2}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + h\,u = \widetilde{h}\,u^{\frac{n}{n-2}} \quad em\ \partial M\,,$$

onde S e $\widetilde{S}$ são curvaturas escalares em M advindas das métricas conformes g e $\widetilde{g}$, e, analogamente, h e $\widetilde{h}$ são curvaturas médias de ∂M.

1.6 Espaços de Banach e de Hilbert

Vejamos os conceitos de espaço de Banach e espaço de Hilbert, além de outros relacionados, que serão bastante relevantes para o nosso propósito.

Definição 1.13. *(**Espaço de Banach**) Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Defina uma distância d em E como $d(x,y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in E$. Se o espaço métrico (E, d) é completo, isto é, toda sequência de Cauchy converge, então dizemos que $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Considere $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. É um fato bem conhecido que a aplicação $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$, para todo $x \in E$, define uma norma no espaço E. Tal norma é chamada de **norma induzida** pelo produto interno.

Definição 1.14. *(**Espaço de Hilbert**) Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Se E é um espaço de Banach com respeito a norma induzida pelo produto interno, então dizemos que E é um espaço de Hilbert.*

Definição 1.15. *(**Coercividade**) Seja E um espaço normado. Dizemos que uma aplicação $I : E \to \mathbb{R}$ é **coerciva** se, e somente se, temos que*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} I(x) = +\infty .$$

Definição 1.16. *(**Aplicação Compacta**) Sejam E e F espaços de Banach. Uma aplicação linear $T : E \to F$ é dita **compacta** se a imagem de um conjunto limitado em E é relativamente compacta em F, ou seja, se temos que $\overline{T(A)} \subset F$ é compacto para todo conjunto limitado $A \subset E$.*

Definição 1.17. *(**Convergência Fraca**) Seja E um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência (x_n) em E **converge fracamente** para $x \in E$ se $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ para todo $y \in E$. Neste caso, denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ a convergência fraca.*

A seguinte proposição é um resultado clássico que pode ser encontrado em diversas referências de análise funcional, por exemplo, veja em [5].

Proposição 1.18. *Seja E um espaço de Hilbert. Se uma sequência (x_n) em E é tal que $x_n \rightharpoonup x$, com $x \in E$, então temos que*

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\| .$$

Proposição 1.19. *Sejam E um espaço de Hilbert e F um espaço de Banach tais que $E \subset F$ seja uma inclusão compacta, isto é, a aplicação inclusão $i : E \to F$ é compacta. Então, dada uma sequência limitada (x_n) em E existe uma subsequência (x_{n_k}) e um ponto $x \in E$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em E e $x_{n_k} \to x$ em F.*

Definição 1.20. *(**Sequência de Palais-Smale**) Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que uma sequência (x_n) em E é uma **sequência de Palais-Smale** do funcional I se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $I(x_n) \to a$ e $I'(x_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.*

Definição 1.21. *(**Condição de Palais-Smale**) Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I satisfaz a **condição de Palais-Smale** se toda sequência (x_n) de Palais-Smale do funcional I possui subsequência convergente em E.*

1.7 Espaços de Funções

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Apresentamos os seguintes espaços de funções:

- Para cada $1 \leq p < \infty$ defina o **espaço** $L^p(M)$ como o espaço quociente

$$L^p(M) = \left\{ u : M \to \mathbb{R} \text{ integrável } : \int_M |u|^p \, dv_g < \infty \right\} / \sim$$

  onde a relação de equivalência $\sim$ é tal que duas funções são equivalentes se elas são iguais em *quase toda parte*. Defina uma norma $\|\cdot\|_{L^p}$ em $L^p(M)$ como

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Observe que uma função em $L^p(M)$ é uma classe de equivalência formada por funções que coincidem em quase toda parte. Desta forma, para definir o espaço $L^\infty(M)$, primeiro definimos o *supremo essencial* de uma função $u : M \to \mathbb{R}$ como segue:

$$\operatorname{ess\,sup} u := \inf\{c \in \mathbb{R} : \text{a medida } \mu(\{p \in M : u(p) > c\}) = 0\}.$$

Desta forma, definimos a norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ como sendo

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} |u|.$$

O espaço $(L^p(M), \|\cdot\|_{L^p})$ é um *espaço de Banach* para todo $1 \le p \le \infty$. Apenas o espaço $L^2(M)$ munido do produto interno

$$\langle f, h\rangle_2 := \int_M fh \, dv_g$$

é um *espaço de Hilbert*.

- Sejam $1 \le p < \infty$ e $k \ge 0$ inteiro. O **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(M)$ é o completamento do espaço $\mathcal{C}^\infty(M)$ com a norma

  $$\|u\|_{W^{k,p}(M)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_M |\nabla^j u|^p \, dv_g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

  Utilizamos a notação $H^k(M) = W^{k,2}(M)$. Em particular, a norma do espaço de Sobolev $H^1(M)$ é dada por

  $$\|u\|_{H^1}^2 = \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + \int_M u^2 \, dv_g \, .$$

  É um fato bem conhecido que $u \in W^{k,p}(M)$ se, e somente se, a função u possui derivada generalizada até a ordem k pertencente ao espaço $L^p(M)$.

- O espaço $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ é o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty(M)$ com suporte compacto contido no interior de M.

- O espaço $H_0^1(M)$ é o completamento de $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ com respeito a norma $\|u\|_{H^1}^2$. Com isto, note ainda que $H_0^1(M) \subset H^1(M)$.

1.8 Regularidade Elíptica

Agora, vejamos algumas definições e resultados de suma importância para a teoria de equações diferencias parciais.

Definição 1.22. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Um* ***operador diferencial linear*** *$\mathfrak{L}$ de ordem $2m$ em M, escrito em relação a uma carta coordenada (U,φ), é uma expressão da forma*

$$\mathfrak{L}(u) = \sum_{k=0}^{2m} a_{i_1\ldots i_k}\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_k}u$$

onde $a_{i_1\ldots i_k}$ são funções suaves em U e $u\in\mathcal{C}^{2m}(M)$. Os termos de maior ordem, que são os de ordem $2m$, são chamados de termo líder, assumindo que a_{2m} é não nulo.

Definição 1.23. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e $\mathfrak{L}$ um operador diferencial linear de ordem $2m$ em M. Dizemos que $\mathfrak{L}$ é um* ***operador diferencial elíptico*** *em um ponto $p\in U$ se existe $\lambda(p)\geq 1$ tal que*

$$||v||^{2m}\lambda(p)^{-1} \leq a_{i_1\ldots i_{2m}}v_{i_1}\ldots v_{i_{2m}} \leq \lambda(p)\,||v||^{2m}$$

para todos os vetores v.

O próximo resultado é de grande importância pois trata dos *mergulhos de Sobolev*. Pode ser encontrado na Seção 3.3 em [16].

Teorema 8. *(**Mergulhos de Sobolev**) Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se considerarmos $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, então temos o seguinte:*

(i) Se $n\geq 3$, então $H^1(M)\subset L^p(M)$ para todo $1\leq p\leq 2^*$. O mergulho de $H^1(M)$ em $L^p(M)$ é contínuo se $1\leq p\leq 2^*$, e compacto se $1\leq p<2^*$.

(ii) Se $n=2$, então $H^1(M)\subset L^p(M)$ para todo $1\leq p<\infty$, e o mergulho de $H^1(M)$ em $L^p(M)$ é contínuo e compacto.

Proposição 1.24. *(**Desigualdade Poincaré**) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in W_0^{1,k}(U)$ tem média zero para algum $1 \leq p < n$, então*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(U)} \qquad \text{para todo } 1 \leq q \leq \frac{n\,p}{n-p},$$

onde a constante C depende de p, q, n e U.

Proposição 1.25. *(**Desigualdade de Poincaré**) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Então, existe $C > 0$ tal que para toda $f \in H^1(M)$ segue que*

$$\int_M (f - \overline{f})^2 \leq C \int_M |\nabla_g f|^2$$

onde

$$\overline{f} = \fint_M f\,.$$

Combinando as *desigualdades de Poincaré* com os *mergulhos de Sobolev*, obtemos a desigualdade de Poincaré-Sobolev, que é expressa no teorema a seguir.

Teorema 9. *(**Desigualdade Poincaré-Sobolev**) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Então, para todo $1 \leq p \leq 2^*$, existe uma constante positiva C, que depende de M e p, tal que para toda $u \in H^1(M)$ temos que*

$$\left(\int_M |u - \overline{u}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_M |\nabla_g u|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

Além disso, se $n = 2$ então esta desigualdade é válida para todo $1 \leq p < \infty$.

O teorema abaixo é um importante resultado para variedades Riemannianas com fronteira, e pode ser consultado no Teorema 6.2 em [22].

Teorema 10. *(**Desigualdade Traço**) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n com fronteira ∂M. Se considerarmos $2^\# = \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, então obtemos que:*

(i) Se $n \geq 3$, então o operador traço definido de $H^1(M)$ para $L^p(\partial M)$, agindo como $u \mapsto u|_{\partial M}$, é contínuo para todo $1 \leq p \leq 2^\#$, e compacto se $1 \leq p < 2^\#$.

(ii) *Se* $n = 2$*, então o operador traço definido de* $H^1(M)$ *para* $L^p(\partial M)$*, agindo como* $u \mapsto u|_{\partial M}$*, é contínuo e compacto para todo* $1 \leq p < \infty$*.*

1.9 Teorema do Passo da Montanha e Monotonicidade de Struwe

Consideremos um espaço de Banach E e denote o dual deste espaço por E^{-1}, os conceitos a seguir são imprescindíveis para os principais teoremas que desejamos mostrar neste trabalho.

Definição 1.26. *Seja* E *um espaço de Banach. Dizemos que um funcional* $I \in \mathcal{C}^1(E;\mathbb{R})$ *possui a* ***geometria do passo da montanha*** *se* $I(0) = 0$ *e satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Existem* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que para todo* $u \in E$*, com* $\|u\| = \varepsilon$*, tem-se que* $I(u) > \delta$*,*

(2) *Existe* $v \in E$ *com* $\|v\| > \varepsilon$ *tal que* $I(v) \leq 0$*.*

Suponha que I possui a geometria do passo da montanha e seja o conjunto dos caminhos $\Lambda = \{\lambda \in \mathcal{C}([0,1], E) : \lambda(0) = 0 \text{ e } \lambda(1) = v\}$. O valor $c \in \mathbb{R}$ dado por

$$c = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{t \in [0,1]} I(\lambda(t)) > 0 \tag{1.4}$$

é chamado o *nível do passo da montanha*, e este c é um bom candidato a ser um ponto crítico do funcional I. O célebre Teorema do Passo da Montanha, que pode ser consultado em [1], nos fornece o resultado a seguir.

Teorema 11. *(**Passo da Montanha**) Suponha que o funcional* $I \in \mathcal{C}^1(E;\mathbb{R})$ *possui a geometria do passo da montanha. Seja* $c \in \mathbb{R}$ *como definido em (1.4), e suponha que toda sequência* (u_i) *de Palais-Smale em* E *satisfazendo* $I(u_i) \to c$ *e* $I'(u_i)(v) \to 0$*, para todo* $v \in E$*, possui uma subsequência convergente. Então existe* $x \in E$ *tal que* $I(x) = c$ *e também* $I'(x) = 0$*.*

O *Truque de Monotonicidade de Struwe*, que surgiu originalmente em [23], é uma ferramenta relevante ao problema de fornecer condições para o funcional I de tal forma que garanta a existência de uma sequência de Palais-Smale limitada. A seguir, inspirado em [17], temos uma versão do resultado de Struwe apropriada ao nosso contexto.

Teorema 12. *(**Monotonicidade de Struwe**) Sejam E um espaço de Banach e $J \subset \mathbb{R}_+$ um intervalo. Considere uma família $(I_\alpha)_{\alpha \in J}$ de funcionais de classe $\mathcal{C}^1(E;\mathbb{R})$ da forma*

$$I_\alpha(u) = A(u) - \alpha B(u) \quad \text{para todo} \;\; \alpha \in J\,, \tag{1.5}$$

onde ou $A(u) \geq 0$ ou $B(u) \geq 0$ para todo $u \in E$ e tal que ou $A(u) \to +\infty$ ou $B(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_E \to +\infty$. Suponha que, para todo $\alpha \in J$, as propriedades na Definição 1.26 sejam satisfeitas e c_α é o nível do passo da montanha associado a I_α, como definido em (1.4). Então, para quase todo $\alpha \in J$, existe uma sequência (u_i) em E tal que:

(i) (u_i) *é limitada,*

(ii) $I_\alpha(u_i) \to c_\alpha$,

(iii) $I'_\alpha(u_i)(v) \to 0$ *para todo* $v \in E$.

1.10 Princípio do Máximo

O seguinte Princípio do Máximo de Hopf pode ser encontrado na Seção 8 do Capítulo 3 em [2].

Teorema 13. (***Princípio do Máximo de Hopf***) *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta com ou sem fronteira, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ não positiva. Suponha que $u \in \mathcal{C}^2(M)$ satisfaz*

$$\Delta_g u + \langle X, \nabla_g u\rangle + h(x)u \geq 0\,.$$

Se $u \leq m$ onde $m \geq 0$, então temos que:

(i) $u \equiv m$, *ou*

(ii) $u(x) < m$ *para todo* $x \in IntM$.

Além disso, se $p \in \partial M$*, a função* u *é contínua e* $u(p) = m \geq 0$*, então se* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p)$ *existir irá satisfazer que* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p) > 0$*, desde que* p *pertença a fronteira de uma bola contida em* M*. Mais ainda, se* $h \equiv 0$ *então a mesma conclusão é verdadeira para* $m < 0$.

Como um resultado preliminar, vejamos uma versão do Princípio do Máximo que pode ser consultado, assim como sua prova, na página 539 em [15].

Teorema 14. *Sejam* Ω *um domínio limitado no* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira suave por partes dada por* $\partial\Omega = \partial_1\Omega \bigcup \partial_2\Omega$*,* $V \in L^\infty(\Omega)$ *e* $w \in L^\infty(\partial_1\Omega)$*. Suponha que* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \bigcap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*, com* $u > 0$*, satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u + Vu \leq 0 & em\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \geq wu & em\ \partial_1\Omega \end{cases}$$

e que $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \bigcap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta v + Vv \leq 0 & em\ \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \geq wv & em\ \partial_1\Omega \\ v \geq 0 & em\ \partial_2\Omega \end{cases}$$

onde η *é a normal unitária para fora ao longo da fronteira* $\partial_1\Omega$*. Então, temos que* $v \geq 0$ *em* $\overline{\Omega}$.

1.11 O Problema Limite e Suas Soluções

Quando fazemos análise de blow-up, geralmente nos preocupamos com certos problemas limites após um reescalonamento adequado de soluções. Neste caso, estamos interessados em soluções com curvaturas constantes no semiespaço $\mathbb{R}^n_+$. Devido a este propósito, faremos a análise a seguir para encontrar as soluções adequadas.

Dadas funções $K \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, seja $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma solução do problema

$$\begin{cases} -\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Delta_g u + Su = K\,u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } M\,, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = H\,u^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial M\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Dado um ponto $p \in \partial M$, considere coordenadas x centradas em p definidas em $B(0,r)$. Dado $\lambda > 0$, defina

$$w_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}}\,u(\lambda\,x) \quad \text{para} \quad x \in B\Big(0, \frac{r}{\lambda}\Big)_+\,, \tag{1.7}$$

Desta forma, por (1.7), segue que

$$\partial_j w_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n}{2}}\,\partial_j u(\lambda\,x) \tag{1.8}$$

e

$$\partial_i\,\partial_j w_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n+2}{2}}\,\partial_i\,\partial_j u(\lambda\,x)\,. \tag{1.9}$$

Devido a (1.2), segue que

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\Big(\sqrt{|g|}\,g^{ij}\partial_j u\Big) = g^{ij}\,\partial_i\,\partial_j u + \frac{\partial_i\Big(\sqrt{|g|}\,g^{ij}\Big)}{\sqrt{|g|}}\,\partial_j u\,.$$

Por simplicadade, escreva $F = \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\,g^{ij}\right)}{\sqrt{|g|}}$. Então, por (1.8) e (1.9), temos

$$\begin{aligned} \Delta_g u(\lambda\,x) &= g^{ij}(\lambda\,x)\,\partial_i\,\partial_j u(\lambda\,x) + F(\lambda\,x)\,\partial_j u(\lambda\,x) \\ &= \overline{g}^{\,ij}(x)\,\lambda^{-\frac{n+2}{2}}\,\partial_i\,\partial_j w_\lambda(x) + F(\lambda\,x)\,\lambda^{-\frac{n}{2}}\,\partial_j w_\lambda(x)\,, \end{aligned} \tag{1.10}$$

com $\overline{g}(x) = g(\lambda\,x)$. Desta forma, de (1.6), segue que

$$\begin{aligned} &-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Big(\overline{g}^{\,ij}(x)\,\lambda^{-\frac{n+2}{2}}\,\partial_i\,\partial_j w_\lambda(x) + F(\lambda\,x)\,\lambda^{-\frac{n}{2}}\,\partial_j w_\lambda(x)\Big) + S(\lambda\,x)\,u(\lambda\,x) \\ &= K(\lambda\,x)\,u(\lambda\,x)^{\frac{n+2}{n-2}}\,, \end{aligned}$$

ou seja, como por (1.7) tem-se $u(\lambda\,x) = \lambda^{-\frac{n-2}{2}}\,w_\lambda(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} &-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Big(\overline{g}^{\,ij}(x)\,\lambda^{-\frac{n+2}{2}}\,\partial_i\,\partial_j w_\lambda(x) + F(\lambda\,x)\,\lambda^{-\frac{n}{2}}\,\partial_j w_\lambda(x)\Big) + S(\lambda\,x)\,\lambda^{-\frac{n-2}{2}}\,w_\lambda(x) \\ &= K(\lambda\,x)\,\lambda^{-\frac{n+2}{2}}\,w_\lambda(x)^{\frac{n+2}{n-2}}\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Multiplicando (1.11) por $\lambda^{\frac{n+2}{2}}$, resulta em

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Big(\overline{g}^{\,ij}(x)\,\partial_i\,\partial_j w_\lambda(x) + F(\lambda\,x)\,\lambda\,\partial_j w_\lambda(x)\Big) + S(\lambda\,x)\,\lambda^2\,w_\lambda(x)\\
&= K(\lambda\,x)\,w_\lambda(x)^{\frac{n+2}{n-2}}\,, \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

para todo $x \in B\Big(0,\frac{r}{\lambda}\Big)_+$. Notemos que, quando $\lambda \to 0$, temos $B\Big(0,\frac{r}{\lambda}\Big)_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ e também que a métrica $\overline{g}(x) \longrightarrow \delta(x)$, onde δ é a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n_+$. Suponha que, quando $\lambda \to 0$, tem-se

$$w_\lambda \xrightarrow[\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)]{} v\,.$$

Isso implica que, quando $\lambda \to 0$, a equação (1.12) resulta em

$$-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\,\Delta v(x) = K(0)\,v(x)^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n_+\,. \qquad (1.13)$$

Agora, analisando a equação na fronteira em (1.6), observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_\lambda}{\partial \eta}(x) &= \lambda^{\frac{n}{2}}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}(\lambda\,x)\\
&= \lambda^{\frac{n}{2}}\,\frac{n-2}{2}\,H(\lambda\,x)\,u(\lambda\,x)^{\frac{n}{n-2}}\,.
\end{aligned}
$$

Por (1.7), temos

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial \eta}(x) = \lambda^{\frac{n}{2}}\,\frac{n-2}{2}\,H(\lambda\,x)\,\lambda^{-\frac{n}{2}}\,w_\lambda(x)^{\frac{n}{n-2}}\,,$$

ou seja,

$$\frac{2}{n-2}\,\frac{\partial w_\lambda}{\partial \eta}(x) = H(\lambda\,x)\,w_\lambda(x)^{\frac{n}{n-2}} \quad \text{em} \quad \partial B\Big(0,\frac{r}{\lambda}\Big)_+\,. \qquad (1.14)$$

Analogamente, quando $\lambda \to 0$ temos que $\partial B\Big(0,\frac{r}{\lambda}\Big)_+ \longrightarrow \partial\mathbb{R}^n_+$. Suponha que, quando $\lambda \to 0$, tem-se $w_\lambda \xrightarrow[\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)]{} v$. Então, quando $\lambda \to 0$, a equação (1.14) resulta-se em

$$\frac{2}{n-2}\,\frac{\partial v}{\partial \eta}(x) = H(0)\,v(x)^{\frac{n}{n-2}} \quad \text{em} \quad \partial\mathbb{R}^n_+\,, \qquad (1.15)$$

onde $H(0)$ é constante.

Portanto, devido a essa discussão feita, que resultou nas equações (1.13) e (1.15), concluímos que, para o *problema limite*, obtemos

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta v = K\, v^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } \mathbb{R}^n_+, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = H\, v^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{1.16}$$

onde K e H são constantes.

O resultado a seguir, que foi obtido em [8], classifica as soluções do problema (1.16).

Proposição 1.27. *Dado o problema (1.16), defina $\mathfrak{D}_n$ como*

$$\mathfrak{D}_n = \sqrt{n(n-1)}\frac{H}{\sqrt{|K|}}\,.$$

Temos o seguinte:

(1) Se $\mathfrak{D}_n < 1$, então (1.16) não possui solução,

(2) Se $\mathfrak{D}_n = 1$, então as únicas soluções são dadas por:

$$v(x) = v_\alpha(x) := \left(\frac{2}{\sqrt{n(n-2)}}x_n + \alpha\right)^{-\frac{n-2}{2}} \tag{1.17}$$

para algum $\alpha > 0$,

(3) Se $\mathfrak{D}_n > 1$, então as soluções são chamadas bolhas e dadas por

$$v(x) = b_\beta(x) := \frac{(n(n-2))^{\frac{n-2}{4}}\beta^{\frac{n-2}{2}}}{(|x - x_0(\beta)|^2 - \beta^2)^{\frac{n-2}{2}}}\,, \tag{1.18}$$

com $x_0(\beta) = -\mathfrak{D}_n\,\beta\, e_n \in \mathbb{R}^n$, para $\beta > 0$ arbitrário. Neste caso, destacamos o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^{n-2}\, b_\beta(x) = (n(n-2))^{\frac{n-2}{2}}\beta^{\frac{n-2}{2}}\,. \tag{1.19}$$

Observação 1.28. *Observe que, colocando β em evidência na função b_β, podemos escrever que*

$$b_\beta(x) = \beta^{\frac{2-n}{2}}\, b_1(\beta^{-1}x)\,.$$

1.12 Blow-up com Conjunto Singular Infinito

Considere uma sequência (u_i) de soluções para o problema (5), e defina seu *conjunto singular* como

$$\mathcal{P} = \{p \in \overline{M} : \exists\, x_i \to p \text{ tal que } u_i(x_i) \text{ é não limitada}\}.$$

Lembrando que $\mathfrak{D}_n(x) = \sqrt{n(n-1)}\frac{H(x)}{\sqrt{|K(x)|}}$, mostraremos agora um exemplo em que a *cardinalidade* do conjunto singular $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n = 1\}$ pode ser *infinita.*

Exemplo 1. *Seja $\rho > 1$ e a função $u_\rho : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$u_\rho = \left(\frac{2\rho}{\rho^2 - |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

Então, temos que a função u_ρ é solução do problema

$$\begin{cases} -\frac{4\,(n-1)}{n-2}\,\Delta u = -n\,(n-1)\,u^{\frac{n+2}{n-2}} & em \quad B(0,1)\,, \\ \frac{2}{n-2}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + u = H_\rho\, u^{\frac{n}{n-2}} & em \quad \partial B(0,1)\,, \end{cases}$$

onde $H_\rho = \dfrac{\rho^2+1}{2\rho}$. Observe que quando $\rho \to 1$, tem-se $H_\rho \to 1$ mas $K = -n\,(n-1)$, e isso implica que, no limite, temos $\mathfrak{D}_n = 1$. Desta forma, note que u_ρ diverge em toda a fronteira $\partial B(0,1) = \mathcal{P}_0$.

1.13 Princípio Variacional de Ekeland

O teorema abaixo é uma potente ferramenta para conseguirmos contornar certos obstáculos que surgem em determinados contextos na análise de blow-up, como veremos no caso do estudo neste trabalho. Pode ser consultado, por exemplo, no Capítulo 1 em [24].

Teorema 15. *(**Princípio Variacional de Ekeland**) Seja (X,d) um espaço métrico completo e $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente, limitado inferiormente e não identicamente igual a $+\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $x \in X$ tal que $\varphi(x) \le \inf_X \varphi + \varepsilon$. Então, para todo $\lambda > 0$, existe $x_\lambda \in X$ tal que:*

(1) $\varphi(x_\lambda) \leq \varphi(x)$,

(2) $d(x_\lambda, x) \leq \lambda$,

(3) $\varphi(x_\lambda) < \varphi(y) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x_\lambda, y)$, *para todo* $y \neq x_\lambda$.

2 Resultados de Existência

Almejamos aqui desenvolver alguns resultados essenciais que nos conduzirá a provar os Teoremas 1 e 2 e, por fim, o Teorema 3. Para isso, desenvolveremos alguns resultados de existência de soluções através do estudo de variações de domínio e o estudo variacional do funcional energia I definido em (3).

2.1 Variações de Domínio

Iniciemos relembrando o resultado dado por Escobar no Lema 1.1 em [13].

Lema 2.1. *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta com fronteira e $n \geq 3$, então existe uma métrica conforme a g cuja curvatura escalar não muda de sinal e a fronteira é uma subvariedade mínima, ou seja, a curvatura média da fronteira é zero.*

Desta forma, sem perda de generalidade, doravante assumiremos que a fronteira ∂M é mínima e a curvatura escalar S não muda de sinal. Por conseguinte, se $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ é uma métrica conforme a g com curvatura escalar $K \in \mathcal{C}^2(M)$ e curvatura média $H \in \mathcal{C}^2(\partial M)$, então u satisfaz a equação abaixo:

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + Su = Ku^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = Hu^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial M. \end{cases}$$

Com o propósito de obter propriedades globais na análise de blow-up para o nosso problema, provaremos os resultados a seguir.

Lema 2.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional com fronteira, funções $f, \psi : M \to \mathbb{R}$ e $0 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}$. Considere uma solução positiva $u \in \mathcal{C}^2(M)$ da equação*

$$-C_n \Delta_g u + \psi u = f u^p \quad em \;\; M. \tag{2.1}$$

Seja $F \in \mathfrak{X}(M)$, então temos que

$$
\begin{aligned}
C_n \int_M DF(\nabla_g u, \nabla_g u) - \frac{C_n}{2} \int_M |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F - \frac{1}{p+1} \int_M f F \cdot \nabla_g (u^{p+1}) \\
+ \frac{1}{2} \int_M \psi\, F \cdot \nabla_g (u^2) = C_n \int_{\partial M} (\nabla_g u \cdot F) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{C_n}{2} \int_{\partial M} |\nabla_g u|^2 F \cdot \eta
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

onde, em coordenadas, temos $DF(\nabla_g u, \nabla_g u) := \sum_i g^{mj}\, \partial_j F_i\, \partial_i u\, \partial_m u$.

Demonstração. Comecemos definindo o seguinte campo de vetores:

$$
Y = (\nabla_g u \cdot F) \nabla_g u - \frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 F\,.
$$

Assim, calculando o divergente de Y obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} Y &= \operatorname{div}\Big((\nabla_g u \cdot F) \nabla_g u - \frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 F \Big) \\
&= \operatorname{div}_g \Big((\nabla_g u \cdot F) \nabla_g u \Big) - \operatorname{div}_g \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 F \right) \\
&= \nabla_g (\nabla_g u \cdot F) \cdot \nabla_g u + (\nabla_g u \cdot F) \operatorname{div}_g \nabla_g u - \frac{1}{2} \nabla_g \left(|\nabla_g u|^2 \right) \cdot F \\
&\quad - \frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F \\
&= \nabla_g (\nabla_g u \cdot F) \cdot \nabla_g u + (\nabla_g u \cdot F) \Delta_g u - \frac{1}{2} \nabla_g \left(|\nabla_g u|^2 \right) \cdot F \\
&\quad - \frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F\,.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Fazendo $F = \sum_k F_k\, \partial_k$ e $\nabla_g u = g^{ij}\, \partial_i u\, \partial_j$, em coordenadas, temos que

$$
\nabla_g u \cdot F = g^{ij}\, g_{jk}\, F_k\, \partial_i u = \sum_i F_i\, \partial_i u
\tag{2.4}
$$

e

$$
|\nabla_g u|^2 = g^{ij} g^{kl} g_{jl}\, \partial_i u\, \partial_k u = g^{ik}\, \partial_i u\, \partial_k u\,.
\tag{2.5}
$$

Então, por (2.5), temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_g (|\nabla_g u|^2) = g^{ml}\, \partial_m |\nabla_g u|^2\, \partial_l &= g^{ml}\, \partial_m \left(g^{ik}\, \partial_i u\, \partial_k u \right) \partial_l \\
&= g^{ml}\, g^{ik} \left(\partial_m \partial_i u\, \partial_k u + \partial_i u\, \partial_m \partial_k u \right) \partial_l \\
&= g^{ml}\, g^{ik}\, \partial_m \partial_i u\, \partial_k u\, \partial_l + g^{ml}\, g^{ik}\, \partial_i u\, \partial_m \partial_k u\, \partial_l \\
&= 2\, g^{ml}\, g^{ik} \partial_m \partial_i u\, \partial_k u\, \partial_l\,,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\nabla_g(|\nabla_g u|^2)\cdot F &= 2\, g^{ml}\, g^{ik}\, \partial_m\, \partial_i u\, \partial_k u\, g_{lr}\, F_r \\ &= 2\sum_m g^{ik} F_m\, \partial_m\, \partial_i u\, \partial_k u \\ &= 2\sum_m g^{ik} F_m\, \partial_k\, \partial_m u\, \partial_i u\,.\end{aligned}$$

Agora, por (2.4), segue que

$$\nabla_g(\nabla_g u\cdot F) = g^{kl}\, \partial_l \Big(\sum_i F_i\, \partial_i u\Big)\, \partial_k = g^{kl} \sum_i \Big(\partial_l F_i\, \partial_i u + F_i\, \partial_l\, \partial_i u\Big)\, \partial_k\,,$$

o que implica que, para o primeiro termo no lado direito de (2.3), temos

$$\begin{aligned}\nabla_g(\nabla_g u\cdot F)\cdot\nabla_g u &= g^{kl}\, g_{kj} \sum_i\Big(\partial_l F_i\, \partial_i u + F_i\, \partial_l\, \partial_i u\Big)\, g^{mj}\, \partial_m u \\ &= g^{mj}\sum_i\Big(\partial_j F_i\, \partial_i u + F_i\, \partial_j\, \partial_i u\Big)\, \partial_m u \\ &= \sum_i g^{mj}\, \partial_j F_i\, \partial_i u\, \partial_m u + \sum_i g^{mj}\, F_i\, \partial_j \partial_i u\, \partial_m u \\ &= DF(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}\nabla_g(|\nabla_g u|^2)\cdot F\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Desta forma, substituindo (2.6) em (2.3), obtém-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} Y &= DF(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}\nabla_g(|\nabla_g u|^2)\cdot F + (\nabla_g u\cdot F)\Delta_g u - \frac{1}{2}\,\nabla_g\,(|\nabla_g u|^2)\cdot F \\ &\quad - \frac{1}{2}\,|\nabla_g u|^2\, \operatorname{div}_g F \\ &= DF(\nabla_g u, \nabla_g u) + (\nabla_g u\cdot F)\Delta_g u - \frac{1}{2}\,|\nabla_g u|^2\, \operatorname{div}_g F\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora, multiplicando a equação (2.1) pelo fator $(\nabla_g u\cdot F)$ segue que

$$-C_n\,(\nabla_g u\cdot F)\,\Delta_g u + \psi\, u\,(\nabla_g u\cdot F) = f\, u^p\,(\nabla_g u\cdot F).$$

Integrando esta última equação, obtém-se, por (2.7), que:

$$\begin{aligned}
\int_M f u^p(\nabla_g u\cdot F) &= -C_n\int_M(\nabla_g u\cdot F)\Delta_g u + \int_M \psi\, u\,(\nabla_g u\cdot F)\\
&= C_n\int_M\Big(DF(\nabla_g u,\nabla_g u) - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2\operatorname{div}_g F - \operatorname{div}_g Y\Big)\\
&\quad + \int_M \psi\, u\,(\nabla_g u\cdot F)\\
&= C_n\int_M DF(\nabla_g u,\nabla_g u) - \frac{C_n}{2}\int_M|\nabla_g u|^2\operatorname{div}_g F - C_n\int_M \operatorname{div}_g Y\\
&\quad + \int_M \psi\, u\,(\nabla_g u\cdot F)\,. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_M f u^p(\nabla_g u\cdot F) = \frac{1}{p+1}\int_M fF\cdot\nabla_g(u^{p+1})\,. \qquad (2.9)$$

Além disso, para o terceiro termo no lado direito de (2.8), obtemos, pelo Teorema Divergência, que é o Teorema 7, que

$$\begin{aligned}
-C_n\int_M \operatorname{div}_g Y &= -C_n\int_M\operatorname{div}_g\Big((\nabla_g u\cdot F)\nabla_g u - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2F\Big)\\
&= -C_n\int_{\partial M}\Big((\nabla_g u\cdot F)\nabla_g u - \frac{1}{2}|\nabla_g u|^2F\Big)\cdot\eta\\
&= -C_n\int_{\partial M}(\nabla_g u\cdot F)\,(\nabla_g u\cdot\eta) + \frac{C_n}{2}\int_{\partial M}|\nabla_g u|^2F\cdot\eta\\
&= -C_n\int_{\partial M}(\nabla_g u\cdot F)\,\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{C_n}{2}\int_{\partial M}|\nabla_g u|^2F\cdot\eta\,. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Para o quarto termo no lado direito de (2.8), segue que

$$\int_M \psi u(\nabla_g u\cdot F) = \frac{1}{2}\int_M \psi F\cdot\nabla_g(u^2)\,. \qquad (2.11)$$

Portanto, substitutindo (2.9), (2.10) e (2.11) na identidade (2.8), concluímos que

$$\begin{aligned}
&C_n\int_M DF(\nabla_g u,\nabla_g u) - \frac{C_n}{2}\int_M|\nabla_g u|^2\operatorname{div}_g F - \frac{1}{p+1}\int_M fF\cdot\nabla_g(u^{p+1})\\
&+\frac{1}{2}\int_M\psi F\cdot\nabla_g(u^2) = C_n\int_{\partial M}(\nabla_g u\cdot F)\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{C_n}{2}\int_{\partial M}|\nabla_g u|^2F\cdot\eta\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Antes do corolário deste lema, façamos a definição a seguir.

Definição 2.3. *Sejam um ponto $p \in \partial M$, uma função $u : M \to \mathbb{R}$ e um campo de vetores $F \in \mathfrak{X}(M)$. Defina uma função $B_p(u,F) : \partial M \to \mathbb{R}$ como*

$$\begin{aligned} B_p(u,F)(x) &= C_n\, d(x,p)\left((F(x)\cdot\eta(x))^2 - \frac{1}{2}|F(x)|^2\right) \\ &\quad + 2\,(n-1)\,u(x)\,F(x)\cdot\eta(x) \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde η é a normal unitária apontando para fora ao longo de ∂M.

Quando o ponto p estiver claro a partir da notação, então omitiremos o subscrito e escreveremos apenas $B(u,F)$.

Corolário 2.4. *Seja $\Omega \subset M$ uma vizinhança de algum ponto em ∂M, difeomorfa a $B(0,r)_+ \subset \mathbb{R}^n_+$. Sejam u como no Lema 2.2, e $0 \le q \le \frac{n}{n-2}$. Defina*

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\Omega(u) &= \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} X\cdot\nabla_g f + \left(\frac{n}{p+1} - \frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega f u^{p+1} \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 X\cdot\nabla_g\psi - \int_\Omega \psi\, u^2 + \frac{r}{2}\int_{\partial^+\Omega}\psi\, u^2 - \frac{r}{p+1}\int_{\partial^+\Omega} f u^{p+1}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde X é o vetor posição. Então, se a função u também é solução da equação

$$\frac{2}{n-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = h\, u^q \quad \text{em } \partial M\,,$$

obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\Omega(u) &= \int_{\partial^+\Omega} B(u,\nabla_g u) + 2\,(n-1)\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n-1}{q+1}\right)\int_{\partial_0\Omega} h\, u^{q+1} \\ &\quad + \frac{2\,(n-1)}{q+1}\int_{\partial(\partial_0\Omega)} h u^{q+1}(X\cdot\nu) - \frac{2\,(n-1)}{q+1}\int_{\partial_0\Omega} u^{q+1}(\nabla_g^T h\cdot X), \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde ν é a normal unitária apontando para fora na fronteira de $\partial_0\Omega$.

Demonstração. Para começar, aplique o Lema 2.2 com o campo de vetores $F = X$. Note que $\operatorname{div}_g X = n$ e $DX(\nabla_g u, \nabla_g u) = |\nabla_g u|^2$. Assim, temos

$$\begin{aligned} & -2\,(n-1)\int_\Omega |\nabla_g u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega f X\cdot\nabla_g(u^{p+1}) + \frac{1}{2}\int_\Omega \psi X\cdot\nabla_g(u^2) \\ &= C_n\int_{\partial\Omega}(\nabla_g u\cdot X)\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{C_n}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla_g u|^2\,(X\cdot\eta)\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para o *primeiro termo* no lado esquerdo de (2.15) temos o seguinte: multiplicando a equação (2.1) por u, e depois integrando o resultado analogamente ao que fizemos na demonstração do Lema 2.2, segue que

$$-2\,(n-1)\int_\Omega |\nabla_g u|^2 = -\frac{n-2}{2}\int_\Omega f u^{p+1} + \frac{n-2}{2}\int_\Omega \psi u^2 - 2\,(n-1)\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\eta}. \quad (2.16)$$

Agora, para o *segundo termo* no lado esquerdo de (2.15), utilizando o Corolário 1.9 obtemos que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega fX\cdot\nabla_g(u^{p+1}) &= \int_\Omega u^{p+1}\operatorname{div}_g(fX) - \int_{\partial\Omega} fu^{p+1}X\cdot\eta \\ &= \int_\Omega u^{p+1}X\cdot\nabla_g f + n\int_\Omega fu^{p+1} - \int_{\partial\Omega} fu^{p+1}X\cdot\eta. \quad (2.17)\end{aligned}$$

Para o *terceiro termo* no lado esquerdo de (2.15), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi X\cdot\nabla_g(u^2) &= -\int_\Omega u^2\operatorname{div}_g(\psi X) + \int_{\partial\Omega}\psi\, u^2 X\cdot\eta \\ &= -\int_\Omega u^2 X\cdot\nabla_g\psi - n\int_\Omega \psi\, u^2 + \int_{\partial\Omega}\psi\, u^2X\cdot\eta. \quad (2.18)\end{aligned}$$

Substituindo o primeiro, segundo e terceiro termos no lado esquerdo da equação (2.15) por (2.16), (2.17) e (2.18), respectivamente, concluímos que:

$$\begin{aligned} &-\frac{n-2}{2}\int_\Omega fu^{p+1} + \frac{n-2}{2}\int_\Omega \psi u^2 - 2\,(n-1)\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}X\cdot\nabla_g f \\ &+\frac{n}{p+1}\int_\Omega fu^{p+1} - \frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega} fu^{p+1}X\cdot\eta - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2X\cdot\nabla_g\psi - \frac{n}{2}\int_\Omega \psi\,u^2 \\ &+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\psi\,u^2X\cdot\eta = C_n\int_{\partial\Omega}(\nabla_g u\cdot X)\,\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{C_n}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla_g u|^2\,(X\cdot\eta)\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}X\cdot\nabla_g f + \left(\frac{n}{p+1} - \frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega fu^{p+1} - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2X\cdot\nabla_g\psi \\ &-\int_\Omega \psi\,u^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\psi\,u^2X\cdot\eta - \frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega} fu^{p+1}X\cdot\eta \\ =\ & C_n\int_{\partial\Omega}(\nabla_g u\cdot X)\,\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{C_n}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla_g u|^2\,(X\cdot\eta) + 2\,(n-1)\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\eta}. \quad (2.19)\end{aligned}$$

Observe que o vetor normal apontando para fora em $\partial\Omega$ satisfaz

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{r}, & \text{se } x \in \partial^{+}\Omega \\ -e_n, & \text{se } x \in \partial_0\Omega \end{cases}. \tag{2.20}$$

Devido a (2.20), vamos analisar o que acontece com o fator $X \cdot \eta$ nas integrais em (2.13). Se $x \in \partial^{+}\Omega$, então temos $X \cdot \eta = \dfrac{|x|^2}{r} = \dfrac{r^2}{r} = r$. Se $x \in \partial_0\Omega$, então $X \cdot \eta = 0$. Como consequência disso, para o *quinto termo* no lado esquerdo da identidade (2.19), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \psi\, u^2 X \cdot \eta &= \frac{1}{2}\int_{\partial^{+}\Omega} \psi\, u^2 X \cdot \eta + \frac{1}{2}\int_{\partial_0\Omega} \psi\, u^2 X \cdot \eta \\ &= \frac{r}{2}\int_{\partial^{+}\Omega} \psi\, u^2 . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para o *sexto termo* no lado esquerdo da identidade (2.19), temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega} f u^{p+1} X \cdot \eta &= -\frac{1}{p+1}\int_{\partial^{+}\Omega} f u^{p+1} X \cdot \eta - \frac{1}{p+1}\int_{\partial_0\Omega} f u^{p+1} X \cdot \eta \\ &= -\frac{r}{p+1}\int_{\partial^{+}\Omega} f u^{p+1} . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Substituindo (2.21) e (2.22) na identidade (2.19), encontramos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p+1}\int_{\Omega} u^{p+1} X \cdot \nabla_g f + \left(\frac{n}{p+1} - \frac{n-2}{2}\right)\int_{\Omega} f u^{p+1} - \frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2 X \cdot \nabla_g \psi \\ &- \int_{\Omega} \psi\, u^2 + \frac{r}{2}\int_{\partial^{+}\Omega} \psi\, u^2 - \frac{r}{p+1}\int_{\partial^{+}\Omega} f u^{p+1} \\ = &\; C_n \int_{\partial\Omega} (\nabla_g u \cdot X)\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{C_n}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla_g u|^2 (X \cdot \eta) + 2(n-1)\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Notemos que o lado esquerdo desta identidade (2.23) é exatamente igual a definição da função $\mathfrak{B}_{\Omega}(u)$, dada em (2.13). Então, podemos escrever (2.23) como

$$\mathfrak{B}_{\Omega}(u) = C_n \int_{\partial\Omega} (\nabla_g u \cdot X)\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{C_n}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla_g u|^2 (X \cdot \eta) + 2(n-1)\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{2.24}$$

Agora, vamos analisar o lado direito de (2.24). Analisando o *primeiro termo* no lado direito de (2.24), lembrando que u satisfaz $\dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = h\, u^q$ em ∂M e também aplicando o Corolário 1.9 apropriadamente, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial_0\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\,(X\cdot\nabla_g^T u) &= \frac{n-2}{2}\int_{\partial_0\Omega} h\,u^q\,(X\cdot\nabla_g^T u)\\
&= \frac{n-2}{2\,(q+1)}\int_{\partial_0\Omega} hX\cdot\nabla_g^T(u^{q+1})\\
&= \frac{n-2}{2\,(q+1)}\left(\int_{\partial(\partial_0\Omega)} h\,u^{q+1}(X\cdot\nu) - \int_{\partial_0\Omega} u^{q+1}\,\mathrm{div}_g^T(hX)\right)\\
&= \frac{n-2}{2\,(q+1)}\left(\int_{\partial(\partial_0\Omega)} h\,u^{q+1}(X\cdot\nu) - \int_{\partial_0\Omega} u^{q+1}X\cdot\nabla_g^T h - (n-1)\int_{\partial_0\Omega} h\,u^{q+1}\right).
\end{aligned}
$$

Desta forma, para o *primeiro termo* no lado esquerdo de (2.24), obtemos

$$
\begin{aligned}
C_n\int_{\partial\Omega}(\nabla_g u\cdot X)\,\frac{\partial u}{\partial\eta} &= C_n\int_{\partial^+\Omega} r\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2 + C_n\int_{\partial_0\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}(X\cdot\nabla_g^T u)\\
&= C_n\,r\int_{\partial^+\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{2\,(n-1)}{q+1}\int_{\partial(\partial_0\Omega)} h\,u^{q+1}(X\cdot\nu)\\
&\quad - \frac{2\,(n-1)}{q+1}\int_{\partial_0\Omega} u^{q+1}(X\cdot\nabla_g^T h) - \frac{2\,(n-1)^2}{q+1}\int_{\partial_0\Omega} h\,u^{q+1}. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Agora, para o *segundo termo* no lado direito de (2.24), podemos ver que, devido a (2.20), temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{C_n}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla_g u|^2\,(X\cdot\eta) &= -\frac{C_n}{2}\int_{\partial^+\Omega}|\nabla_g u|^2\,(X\cdot\eta) + -\frac{C_n}{2}\int_{\partial_0\Omega}|\nabla_g u|^2\,(X\cdot\eta)\\
&= -\frac{C_n}{2}\,r\int_{\partial^+\Omega}|\nabla_g u|^2. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Para o *terceiro termo* no lado direito de (2.24), temos

$$
2\,(n-1)\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\eta} = 2\,(n-1)\int_{\partial^+\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\eta} + (n-1)(n-2)\int_{\partial_0\Omega} h\,u^{q+1}. \qquad (2.27)
$$

Logo, substituindo o primeiro, segundo e terceiro termos no lado direito de (2.24) por (2.25), (2.26) e (2.27), respectivamente, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}_\Omega(u) &= C_n\,r\left(\int_{\partial^+\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2 - \frac{1}{2}\int_{\partial^+\Omega}|\nabla_g u|^2\right) + 2\,(n-1)\int_{\partial^+\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\\
&\quad + 2\,(n-1)\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n-1}{q+1}\right)\int_{\partial_0\Omega} h\,u^{q+1} + \frac{2\,(n-1)}{q+1}\int_{\partial(\partial_0\Omega)} h\,u^{q+1}(X\cdot\nu)\\
&\quad - \frac{2\,(n-1)}{q+1}\int_{\partial_0\Omega} u^{q+1}(X\cdot\nabla_g^T h). \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Note que, a soma dos dois primeiros termos no lado direito de (2.28) é exatamente igual a $\int_{\partial^+\Omega} B(u, \nabla_g u)$, onde a função $B(u, \nabla_g u)$ é dada por (2.12), na Definição 2.3. Portanto, podemos escrever (2.28) como a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\Omega(u) &= \int_{\partial^+\Omega} B(u, \nabla_g u) + 2(n-1)\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n-1}{q+1}\right)\int_{\partial_0\Omega} h\, u^{q+1} \\ &+ \frac{2(n-1)}{q+1}\int_{\partial(\partial_0\Omega)} h\, u^{q+1}(X\cdot\nu) - \frac{2(n-1)}{q+1}\int_{\partial_0\Omega} u^{q+1}(\nabla_g^T h\cdot X).\end{aligned}$$

□

Agora, seja $a > 0$ uma constante e defina uma função $G : B(0,r)_+ \to \mathbb{R}$ como $G(x) = a\,|x|^{2-n}$. Então, tem-se

$$\begin{aligned}\nabla G(x) &= a\,(2-n)\,|x|^{1-n}\,\nabla|x| \\ &= a\,(2-n)\,|x|^{-n}\,x.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Para $x \in \partial^+ B(0,r)_+$ temos, por (2.20), que $\eta(x) = \dfrac{x}{r}$ com $|x| = r$, o que implica

$$\begin{aligned}\nabla G(x)\cdot\eta(x) &= \left(a\,(2-n)\,|x|^{-n}\,x\right)\cdot\frac{x}{r} \\ &= a\,(2-n)\,|x|^{-n+1},\end{aligned} \tag{2.30}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}\left(\nabla G(x)\cdot\eta(x)\right)^2 - \frac{1}{2}|\nabla G(x)|^2 &= a^2\,(2-n)^2\,|x|^{-2n+2} - \frac{1}{2}a^2\,(2-n)^2\,|x|^{-2n+2} \\ &= \frac{1}{2}a^2\,(2-n)^2\,|x|^{-2n+2}.\end{aligned}$$

Assim, de (2.12), segue que

$$\begin{aligned}B(G,\nabla G)(x) &= \frac{4(n-1)}{n-2}\,d(x,0)\left(\left(\nabla G(x)\cdot\eta(x)\right)^2 - \frac{1}{2}|\nabla G(x)|^2\right) \\ &\quad + 2(n-1)\,G(x)\left(\nabla G(x)\cdot\eta(x)\right) \\ &= -\frac{4(n-1)}{2-n}\,|x|\left(\frac{1}{2}a^2\,(2-n)^2\,|x|^{-2n+2}\right) \\ &\quad + 2(n-1)\,a\,|x|^{2-n}\,a\,(2-n)\,|x|^{-n+1} \\ &= -2(n-1)(2-n)\,a^2\,|x|^{-2n+3} + 2(n-1)(2-n)\,a^2\,|x|^{-2n+3} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Proposição 2.5. *Dada uma função* $b \in \mathcal{C}^1(\overline{B(0,r)_+})$, *defina* $h : B(0,r)_+ \to \mathbb{R}$ *como*

$$h(x) = G(x) + b(x)\,.$$

Então, temos que

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial^+ B(0,r)_+} B(h,\nabla h) = -a\,(n-1)\,(n-2)\,\omega_{n-1} b(0)\,.$$

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
B(h,\nabla h) &= B(G+b,\nabla(G+b))\\
&= C_n\, d(\cdot,0)\Big(\big(\nabla(G+b)\cdot\eta\big)^2 - \frac{1}{2}|\nabla(G+b)|^2\Big)\\
&\quad + 2\,(n-1)\,(G+b)\big(\nabla(G+b)\cdot\eta\big)\\
&= C_n\, d(\cdot,0)\Big((\nabla G\cdot\eta\, +\, \nabla b\cdot\eta)^2 - \frac{1}{2}|\nabla G+\nabla b|^2\Big)\\
&\quad + 2\,(n-1)\Big(G(\nabla G\cdot\eta)\, +\, b\,(\nabla G\cdot\eta)\, +\, G\,(\nabla b\cdot\eta)\, +\, b\,(\nabla b\cdot\eta)\Big)\\
&= C_n\, d(\cdot,0)\Big((\nabla G\cdot\eta)^2 + 2\,(\nabla G\cdot\eta)\,(\nabla b\cdot\eta) + (\nabla b\cdot\eta)^2 - \frac{(\nabla G)^2}{2}\\
&\quad - \nabla G\cdot\nabla b - \frac{(\nabla b)^2}{2}\Big) + 2\,(n-1)\,G\,(\nabla G\cdot\eta)\, +\, 2\,(n-1)\,b\,(\nabla G\cdot\eta)\\
&\quad + 2\,(n-1)\,G\,(\nabla b\cdot\eta) + 2\,(n-1)\,b\,(\nabla b\cdot\eta)\\
&= C_n\, d(\cdot,0)\Big((\nabla G\cdot\eta)^2 - \frac{(\nabla G)^2}{2}\Big) + 2\,(n-1)\,G\,(\nabla G\cdot\eta)\\
&\quad + C_n\, d(\cdot,0)\Big((\nabla b\cdot\eta)^2 - \frac{(\nabla b)^2}{2}\Big) + 2\,(n-1)\,b\,(\nabla b\cdot\eta)\\
&\quad + C_n\, d(\cdot,0)\Big(2\,(\nabla G\cdot\eta)\,(\nabla b\cdot\eta) - \nabla G\cdot\nabla b\Big) + 2\,(n-1)\,b\,(\nabla G\cdot\eta)\\
&\quad + 2\,(n-1)\,G\,(\nabla b\cdot\eta)\\
&= B(G,\nabla G)\, +\, B(b,\nabla b)\, +\, C_n\, d(\cdot,0)\Big(2\,(\nabla G\cdot\eta)\,(\nabla b\cdot\eta) - \nabla G\cdot\nabla b\Big)\\
&\quad + 2\,(n-1)\,b\,(\nabla G\cdot\eta)\, +\, 2\,(n-1)\,G\,(\nabla b\cdot\eta)\,.
\end{aligned}$$

Mas, como vimos em (2.31) que $B(G,\nabla G) = 0$, então

$$\begin{aligned}
B(h,\nabla h) &= B(b,\nabla b)\, +\, C_n\, d(\cdot,0)\Big(2\,(\nabla G\cdot\eta)\,(\nabla b\cdot\eta) - \nabla G\cdot\nabla b\Big)\\
&\quad + 2\,(n-1)\,b\,(\nabla G\cdot\eta) + 2\,(n-1)\,G\,(\nabla b\cdot\eta)\,.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, substituindo (2.29) e (2.30) nesta identidade (2.32), segue, para $|x| = r$, que

$$\begin{aligned} B(h,\nabla h)(x) &= B(b,\nabla b) + \frac{4\,(n-1)}{n-2}\,|x|\,\Big(2\,a\,(2-n)\,|x|^{-n+1}\Big(\nabla b\cdot\frac{x}{r}\Big)\Big) \\ &\quad - \frac{4\,(n-1)}{n-2}\,|x|\Big(a\,(2-n)\,|x|^{-n}\,x\cdot\nabla b\Big) + 2\,(n-1)\,b(x)\,a\,(2-n)\,|x|^{-n+1} \\ &\quad + 2\,(n-1)\,a\,|x|^{2-n}\Big(\nabla b\cdot\frac{x}{r}\Big) \\ &= B(b,\nabla b) - \frac{8\,a\,(n-1)\,r^{-n+2}}{r}(\nabla b\cdot X) + 4\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}\,(\nabla b\cdot X) \\ &\quad + 2\,a\,(n-1)\,(2-n)\,b(x)\,r^{-n+1} + \frac{2\,a\,(n-1)\,r^{2-n}}{r}\,(\nabla b\cdot X) \\ &= B(b,\nabla b) - 8\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}(\nabla b\cdot X) + 4\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}\,(\nabla b\cdot X) \\ &\quad + 2\,a\,(n-1)\,(2-n)\,b(x)\,r^{-n+1} + 2\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}\,(\nabla b\cdot X) \\ &= B(b,\nabla b) - 2\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}(\nabla b\cdot X) + \frac{2\,a\,(n-1)\,(2-n)}{r^{n-1}}\,b(x). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Integrando esta equação (2.33) sobre $\partial^+ B(0,r)_+$, e lembrando que o volume de $\partial^+ B(0,r)$ é igual a $\dfrac{1}{2}\,\omega_{n-1}\,r^{n-1}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ B(0,r)} B(h,\nabla h) &= \int_{\partial^+ B(0,r)} B(b,\nabla b) - \int_{\partial^+ B(0,r)} 2\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}(\nabla b\cdot X) \\ &\quad + \int_{\partial^+ B(0,r)} \frac{2\,a\,(n-1)\,(2-n)}{r^{n-1}}\,b(x) \\ &= \int_{\partial^+ B(0,r)} B(b,\nabla b) - 2\,a\,(n-1)\,r^{-n+1}\int_{\partial^+ B(0,r)} \nabla b\cdot X \\ &\quad + \frac{2\,a\,(n-1)\,(2-n)}{r^{n-1}}\int_{\partial^+ B(0,r)} b(x) \\ &= \int_{\partial^+ B(0,r)} B(b,\nabla b) - a\,(n-1)\,\omega_{n-1}\,⨍_{\partial^+ B(0,r)} \nabla b\cdot X \\ &\quad - a\,(n-1)\,(n-2)\,\omega_{n-1}\,⨍_{\partial^+ B(0,r)} b(x)\,, \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde X é o vetor posição. Finalmente, apliquemos o limite em (2.34) com $r \to 0$. Dado isto, temos, por (2.12), que $B(b,\nabla b) \to 0$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e, como $r \to 0$ implica que $\nabla b\cdot X \to 0$, podemos concluir que

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial^+ B(0,r)_+} B(h,\nabla h) = -\,a\,(n-1)\,(n-2)\,\omega_{n-1}\,b(0)\,.$$

□

2.2 Estudo Variacional do Funcional Energia

Com o propósito de demonstrar o Teorema 1 e o Teorema 2, analizaremos nesta seção as propriedades geométricas do funcional energia I definido em (3).

Proposição 2.6. *Sejam $K \in \mathcal{C}^2(M)$ e $H \in \mathcal{C}^2(\partial M)$ tais que $H \not\equiv 0$ e $K < 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\partial M} H\,|u|^{2^{\#}} \leq (\overline{D} + \varepsilon)\left(\frac{2}{(n-2)^2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2n\,(n-1)}\int_M |K|\,|u|^{2^*}\right) + C\int_M |u|^{2^{\#}}, \tag{2.35}$$

onde $\overline{D} = \max\limits_{x\in\partial M}\{0, \mathfrak{D}_n(x)\}$, com $\mathfrak{D}_n$ definido em (4). Lembrando que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e $2^{\#} = \dfrac{2\,(n-1)}{n-2}$.

Demonstração. Considere uma partição da unidade $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ em M e um campo de vetores $N \in \mathfrak{X}(M)$ com $|N| \leq 1$ e $N = \eta$ na fronteira ∂M. Então, para todo $1 \leq i \leq m$ e toda função $u \in H^1(M)$, obtemos

$$\int_{\partial M} \varphi_i |u|^{2^{\#}} = \int_{\partial M} \varphi_i |u|^{2^{\#}}(N\cdot\eta). \tag{2.36}$$

Assim, pelo Teorema da Divergência, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M}\left(\varphi_i |u|^{2^{\#}} N\right)\cdot\eta &= \int_M \operatorname{div}\left(\varphi_i|u|^{2^{\#}}N\right)\\
&= \int_M \nabla(\varphi_i|u|^{2^{\#}})\cdot N + \int_M \varphi_i|u|^{2^{\#}}\operatorname{div} N\\
&= \int_M \left(\varphi_i \frac{2\,(n-1)}{n-2}|u|^{\frac{n}{n-2}}\nabla|u| + |u|^{2^{\#}}\nabla\varphi_i\right)\cdot N + \int_M \varphi_i\,|u|^{2^{\#}}\operatorname{div} N\\
&= \int_M \left(\varphi_i \frac{2\,(n-1)}{n-2}|u|^{\frac{n}{n-2}}\frac{u}{|u|}\nabla u + |u|^{2^{\#}}\nabla\varphi_i\right)\cdot N + \int_M \varphi_i\,|u|^{2^{\#}}\operatorname{div} N\\
&= \int_M\left(\varphi_i \operatorname{div} N + \nabla\varphi_i\cdot N\right)|u|^{2^{\#}} + \frac{2\,(n-1)}{n-2}\int_M \varphi_i\,|u|^{\frac{2}{n-2}}\,u\,\nabla u\cdot N\\
&\leq C_0\int_M |u|^{2^{\#}} + \frac{2\,(n-1)}{n-2}\int_M \varphi_i\,|u|^{\frac{n}{n-2}}\,|\nabla u|.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Agora, seja $\mathfrak{D}_n(x) = \sqrt{n\,(n-1)}\,\frac{H(x)}{\sqrt{|K(x)|}}$, como definimos em (4), e defina também $H_i = \max\{H(x) : x \in \operatorname{supp}\varphi_i\}$ e $|K|_i = \min\{|K(x)| : x \in \operatorname{supp}\varphi_i\} > 0$. Então, observe que, por (2.36) e (2.37), temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
(n-2)\int_{\partial M} H|u|^{2^{\#}} &= (n-2)\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial M}\varphi_i\, H\,|u|^{2^{\#}} \\
&\leq (n-2)\sum_{i=1}^{m} H_i\int_{\partial M}\varphi_i\,|u|^{2^{\#}} \\
&\leq (n-2)\sum_{i=1}^{m} H_i\left(C_0\int_M |u|^{2^{\#}} + \frac{2\,(n-1)}{n-2}\int_M \varphi_i\,|u|^{\frac{n}{n-2}}\,|\nabla u|\right) \\
&\leq C_0\,(n-2)\,\|H\|_\infty\int_M |u|^{2^{\#}} \\
&\quad + 2\,(n-1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{H_i}{\sqrt{|K|_i}}\right)\int_M |u|^{\frac{n}{n-2}}\,|\nabla u|\sqrt{|K|} \\
&\leq C_1\int_M |u|^{2^{\#}} + 2\,\frac{1}{\sqrt{n\,(n-1)}}\,(\overline{D}+\varepsilon)\int_M |u|^{\frac{n}{n-2}}\,|\nabla u|\sqrt{|K|} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n\,(n-1)}}\,(\overline{D}+\varepsilon)\left(\frac{\delta}{2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\delta}\int_M\left(|u|^{\frac{n}{n-2}}\sqrt{|K|}\right)^2\right) \\
&\quad + C_1\int_M |u|^{2^{\#}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n\,(n-1)}}\,(\overline{D}+\varepsilon)\left(\frac{\delta}{2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\delta}\int_M |u|^{2^*}\,|K|\right) \\
&\quad + C_1\int_M |u|^{2^{\#}}
\end{aligned}
$$

para todo $\delta > 0$. Agora, escolhendo $\delta = \dfrac{2\sqrt{n\,(n-1)}}{n-2}$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
(n-2)\int_{\partial M} H\,|u|^{2^{\#}} &\leq \frac{2}{\sqrt{n\,(n-1)}}\,(\overline{D}+\varepsilon)\left(\frac{\sqrt{n\,(n-1)}}{n-2}\int_M |\nabla u|^2\right) \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{n\,(n-1)}}\,(\overline{D}+\varepsilon)\left(\frac{n-2}{4\sqrt{n\,(n-1)}}\int_M |K|\,|u|^{2^*}\right) + C_1\int_M |u|^{2^{\#}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos que

$$
\int_{\partial M} H\,|u|^{2^{\#}} \leq (\overline{D}+\varepsilon)\left(\frac{2}{(n-2)^2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2n\,(n-1)}\int_M |K|\,|u|^{2^*}\right) + C\int_M |u|^{2^{\#}}.
$$

$\square$

2.3 Prova dos Teoremas 1 e 2

Provaremos agora a *coercividade* e a existência de um *minimizador global* do funcional energia I. Assim, estaremos aptos a demonstrar os dois primeiros resultados principais deste trabalho. Lembre-se que a função $\mathfrak{D}_n : \partial M \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathfrak{D}_n(x) = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{H(x)}{\sqrt{|K(x)|}}\,.$$

Proposição 2.7. *Suponha que $K < 0$ em M, e que $\mathfrak{D}_n < 1$ em ∂M. Então, o funcional energia I, definido em (3), é limitado inferiormente e possui um minimizador global não negativo.*

Demonstração. A Desigualdade de Young afirma que para todo $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ com $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale a desigualdade

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Para $\delta > 0$, considere $a = |u|^{2^\#}\,\delta^{\frac{2^\#}{2^*}\,\frac{2^*}{2^\#}^{\frac{2^\#}{2^*}}}$, $b = \left(\delta^{\frac{2^\#}{2^*}\,\frac{2^*}{2^\#}^{\frac{2^\#}{2^*}}}\right)^{-1}$ e $p = \frac{2^*}{2^\#} = \frac{n}{n-1} > 1$. Lembre-se que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e $2^\# = \dfrac{2\,(n-1)}{n-2}$. Então, temos

$$\int_M |u|^{2^\#} \leq \delta \int_M |u|^{2^*} + C_0\,,$$

para alguma constante C_0. Como $\mathfrak{D}_n < 1$, então temos $\overline{D} = \max_{x \in \partial M}\{0, \mathfrak{D}_n(x)\} < 1$. Agora, para todo $\gamma > 0$, temos, pela Desigualdade de Young, que

$$|S|\,u^2 \leq \gamma\,|u|^{2^*} + C_\gamma\,,$$

para alguma constante C_γ. Por conseguinte, obtemos

$$-\int_M S\,u^2 \leq \int_M |S|\,u^2 \leq \gamma \int_M |u|^{2^*} + C_\gamma\,,$$

ou seja,

$$\int_M S\,u^2 \geq -\gamma \int_M |u|^{2^*} - C_\gamma\,. \tag{2.38}$$

Pela Proposição 2.6, e a desigualdade (2.38), segue que o funcional energia I satisfaz o seguinte:

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_M Su^2 - \frac{1}{2^*}\int_M K|u|^{2^*} - (n-2)\int_{\partial M} H|u|^{2^\#} \\
&\geq \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\left(-\gamma\int_M |u|^{2^*} - C_\gamma\right) + \frac{n-2}{2n}\int_M |K||u|^{2^*} \\
&\quad - (\overline{D}+\varepsilon)\left(\frac{2}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{n-2}{2n(n-1)}\int_M |K||u|^{2^*}\right) - (n-2)C\int_M |u|^{2^\#} \\
&= -\frac{\gamma}{2}\int_M |u|^{2^*} - \frac{C_\gamma}{2} + \frac{2}{n-2}\left(n-1-\overline{D}-\varepsilon\right)\int_M |\nabla u|^2 \\
&\quad + \frac{n-2}{2n(n-1)}\left(n-1-\overline{D}-\varepsilon\right)\int_M |K||u|^{2*} - C(n-2)\int_M |u|^{2^\#} \\
&\geq -\frac{\gamma}{2}\int_M |u|^{2^*} - \frac{C_\gamma}{2} + \frac{2}{n-2}\left(n-1-\overline{D}-\varepsilon\right)\int_M |\nabla u|^2 \\
&\quad + \frac{n-2}{2n(n-1)}\left(n-1-\overline{D}-\varepsilon\right)\int_M |K||u|^{2*} - C(n-2)\left(\delta\int_M |u|^{2^*} + C_0\right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como $n-1>1>\overline{D}$, segue que $n-1-\overline{D}>0$. Fixe $0<\varepsilon<n-1-\overline{D}$. Como $K<0$, então $|K|>c>0$. Assim, escolha $\delta>0$ e $\gamma>0$ suficientemente pequeno. Consequentemente, temos que

$$I(u) \geq \lambda\int_M |\nabla u|^2 + \lambda\int_M |K||u|^{2*} - C_1\,. \tag{2.40}$$

com $\lambda>0$. Observe que, por (2.40), o funcional energia I é limitado inferiormente. Provaremos agora que um *minimizador global* para I pode sempre ser encontrado. Defina α tal que

$$\alpha = \inf\{I(u) : u \in H^1(M)\}\,.$$

Seja (u_i) uma sequência minimizante em $H^1(M)$, isto é, $I(u_i)\to\alpha$. Por (2.40), segue que a sequência (u_i) é limitada em $L^{2^*}(M)$. Mas, como $L^{2^*}(M)\subset L^2(M)$, isso implica que a sequência (u_i) é limitada em $L^2(M)$. Novamente de (2.40) temos que (∇u_i) é limitada em $L^2(M)$. Desta forma, (u_i) é limitada em $H^1(M)$. Então, como a inclusão $H^1(M)\subset L^2(M)$ é compacta, temos, pela Proposição 1.19, que estes fatos garantem a existência de uma subsequência (u_{i_k}) de (u_i) tal que $u_{i_k} \rightharpoonup u$ em $H^1(M)$ e $u_{i_k} \to u$ em $L^2(M)$.

Pelos resultados obtidos por Brezis-Lieb, veja a expressão (2) em [6], podemos então escrever $I(u_i)$ como $I(u_i) = I(u) + I(u_i - u) + o_i(1)$. Pela desigualdade (2.39), e também do fato que o mergulho $H^1(M) \subset L^q(M)$ é contínuo para todo $2 \leq q \leq 2^*$, segue que:

$$I(u_i - u) \geq \mu\left(\int_M |\nabla(u_i - u)|^2 + \int_M |K|\,|u_i - u|^{2^*}\right) + o_i(1)$$

para algum $\mu > 0$. Desta forma, se $\int_M |\nabla(u_i - u)|^2 > c > 0$, para todo i, teríamos que $I(u_i) \geq I(u) + \mu c + o_i(1)$. Passando o limite, obtemos que

$$\alpha \geq I(u) + \mu c > I(u)\,,$$

o que é uma contradição. Então, temos que $u_i \to u$ em $H^1(M)$. Logo u é um *minimizador* para o funcional energia I em $H^1(M)$. Finalmente, notemos que $I(u) = I(|u|)$, então concluímos que o minimizador u é não-negativo.

□

A Proposição 2.7 nos mostra que o *minimizador* u satisfaz $u \geq 0$. Provaremos que, sob as condições de cada um dos dois teoremas a seguir, obtém-se $u > 0$.

Teorema 16. *(**Teorema** 1) Suponha que $K < 0$, e que $\mathfrak{D}_n(x) < 1$ para todo $x \in \partial M$. Então, se $S < 0$ temos que (2) admite uma solução.*

Demonstração. Seja u o minimizador global dado pela Proposição 2.7, vamos mostrar que u não é identicamente nulo. Para todo $\varepsilon > 0$, observe que

$$I(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{2^*}}{2^*}\int_M |K| - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_M |S| - \varepsilon^{2^\#}(n-2)\int_{\partial M} H\,.$$

Neste caso, no lado direito da igualdade acima, quando $\varepsilon \to 0$, o termo líder é o segundo termo $-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_M |S| < 0$. Assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos $I(\varepsilon) < 0$. Entao $\alpha = \inf I < 0$. Como $I(0) = 0$, obtemos que u não é identicamente nulo. Como $I(u) = I(|u|)$, podemos supor que $u \geq 0$. Para mostrar que $u > 0$ em M, antes relembre que u é solução do problema

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S u = K u^{\frac{4}{n-2}} u & \text{em } M \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = H u^{\frac{2}{n-2}} u & \text{em } \partial M \end{cases}. \tag{2.41}$$

Assim, considere o operador elíptico

$$T(\phi) = \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g \phi + K u^{\frac{4}{n-2}} \phi .$$

Vamos aplicar o Princípio do Máximo de Hopf, que é o Teorema 13, ao operador T com $h = K u^{\frac{4}{n-2}} \leq 0$. Note que $T(-u) = -S u \geq 0$. Se existe um ponto $x \in \mathrm{Int}M$ com $u(x) = 0$, então $-u$ atinge seu máximo em $\mathrm{Int}M$ e isto implica que $u \equiv 0$, o que é uma contradição.

Se existisse $x_0 \in \partial M$ com $u(x_0) = 0$, então, devido a equação na fronteira ∂M em (2.41), teríamos que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = 0$, o que seria uma contradição com o Princípio do Máximo de Hopf. Portanto, podemos concluir que $u > 0$.

□

Teorema 17. *(**Teorema** 2) Suponha que $K < 0$ em M, e que $\mathfrak{D}_n < 1$ em ∂M. Então, se $S = 0$ e $\int_{\partial M} H > 0$, temos que (2) admite uma solução.*

Demonstração. Seja u o minimizador global dado pela Proposição 2.7. Mostraremos que u não é identicamente nulo. Para todo $\varepsilon > 0$ tem-se

$$I(\varepsilon) = \frac{n-2}{2n}\varepsilon^{2^*}\int_M |K| - (n-2)\varepsilon^{2^\#}\int_{\partial M} H .$$

Observe que, quando $\varepsilon \to 0$, o segundo termo no lado direito é o termo líder pois, como $2^\# < 2^*$, segue que $\varepsilon^{2^\#} > \varepsilon^{2^*}$. Assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos $I(\varepsilon) < 0$. Entao $\alpha = \inf I < 0$. Como $I(0) = 0$, obtemos que u não é identicamente nulo. Como $I(u) = I(|u|)$, podemos supor que $u \geq 0$. Para mostrar que $u > 0$ em M, antes relembre que u é solução do problema

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u = K u^{\frac{4}{n-2}} u & \text{em } M \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = H u^{\frac{2}{n-2}} u & \text{em } \partial M \end{cases}. \tag{2.42}$$

Agora, considere o operador elíptico

$$L(\psi) = \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g \psi + K u^{\frac{4}{n-2}}\psi\,.$$

Vamos aplicar o Princípio do Máximo de Hopf, que é o Teorema 13, ao operador L com $h = K\,u^{\frac{4}{n-2}} \leq 0$. Note que $L(-u) = 0$. Se existe um ponto $x \in \mathrm{Int}M$ com $u(x) = 0$, então $-u$ atinge seu máximo em $\mathrm{Int}M$ e isto implica que $u \equiv 0$, o que é uma contradição.

Se existisse $x_0 \in \partial M$ com $u(x_0) = 0$, então, devido a equação na fronteira ∂M em (2.42), teríamos que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = 0$, o que seria uma contradição com o Princípio do Máximo de Hopf. Portanto, podemos concluir que $u > 0$.

□

2.4 Prova do Teorema 3

Começaremos provando que o funcional energia I, dado em (3), possui a geometria do passo da montanha, isto é, o funcional energia I satisfaz as propriedades apresentadas na Definição 1.26.

Lema 2.8. *Suponha que $K < 0$, $S = 0$ e $\int_{\partial M} H < 0$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $\delta > 0$ tal que para toda função $u \in H^1(M)$, com $\|u\|_{H^1} = \varepsilon$, tem-se que $I(u) > \delta$.*

Demonstração. Podemos escrever $u = \overline{u} + \widetilde{u}$, onde

$$\overline{u} = \frac{1}{vol(M)}\int_M u$$

e tem-se

$$\widetilde{u} = u - \overline{u}\,.$$

Note que $\overline{u} \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\int_M \widetilde{u} = 0$. Como $K < 0$, $S = 0$ e $\nabla u = \nabla \widetilde{u}$, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 - (n-2)\int_{\partial M} H\,|u|^{2^\#} \\
&= \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 - (n-2)\int_{\partial M} H\,|u|^{2^\#} + (n-2)\int_{\partial M} H|\overline{u}|^{2^\#} \\
&\quad -(n-2)\int_{\partial M} H\,|\overline{u}|^{2^\#} \\
&= \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 - (n-2)\,|\overline{u}|^{2^\#}\int_{\partial M} H - (n-2)\int_{\partial M} H\big(|u|^{2^\#} - |\overline{u}|^{2^\#}\big) \\
&= \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 + C\,|\overline{u}|^{2^\#} - (n-2)\int_{\partial M} H\big(|\overline{u}+\widetilde{u}|^{2^\#} - |\overline{u}|^{2^\#}\big), \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

já que $\displaystyle\int_{\partial M} H < 0$. Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(|\overline{u}+t\,\widetilde{u}|^{2^\#}\big) &= 2^\#\,|\overline{u}+t\,\widetilde{u}|^{2^\#-1}\,\frac{\overline{u}+t\,\widetilde{u}}{|\overline{u}+t\,\widetilde{u}|}\,\widetilde{u} \\
&= 2^\#\,|\overline{u}+t\,\widetilde{u}|^{2^\#-1}\,\widetilde{u}\,.
\end{aligned}
$$

Com isso, temos

$$
\begin{aligned}
|\overline{u}+\widetilde{u}|^{2^\#} - |\overline{u}|^{2^\#} &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(|\overline{u}+t\,\widetilde{u}|^{2^\#}\big)\,dt \\
&= 2^\#\int_0^1 |\overline{u}+t\,\widetilde{u}|^{2^\#-1}\,\widetilde{u}\;dt \\
&\leq C\int_0^1 \big(|\overline{u}|^{2^\#-1} + t\,|\widetilde{u}|^{2^\#-1}\big)\,\widetilde{u}\;dt \\
&= C\,|\widetilde{u}|\,\Big(|\overline{u}|^{2^\#-1} + |\widetilde{u}|^{2^\#-1}\Big).
\end{aligned}
$$

Assim, podemos estimar o terceiro termo no lado direito em (2.43) como o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial M} H\big(|\overline{u}+\widetilde{u}|^{2^\#} - |\overline{u}|^{2^\#}\big)\right| &\leq \|H\|_{L^\infty}\int_{\partial M} C\,|\widetilde{u}|\,\Big(|\widetilde{u}|^{2^\#-1} + |\overline{u}|^{2^\#-1}\Big) \\
&\leq C_0\int_{\partial M} |\widetilde{u}|^{2^\#} + C\int_{\partial M} |\widetilde{u}|\,|\overline{u}|^{2^\#-1}. \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Vamos estimar o primeiro termo no lado direito desta desigualdade (2.44). Pela Desigualdade Traço, vista no Teorema 10, temos $\|\widetilde{u}\|_{L^{2^\#}(\partial M)} \leq C\,\|\widetilde{u}\|_{H^1(M)}$. Mas, como tem-se $\int_M \widetilde{u} = 0$, segue da Desigualdade de Poincaré, vista no Teorema 1.25, que $\int_M \widetilde{u}^2 \leq C \int_M |\nabla \widetilde{u}|^2$. Assim, temos

$$||\widetilde{u}||^{2^\#}_{L^{2^\#}(\partial M)} \leq C \left(\int_M |\nabla \widetilde{u}|^2 \right)^{\frac{2^\#}{2}} \tag{2.45}$$

Estimaremos o segundo termo no lado direito da desigualdade (2.44): dado $\gamma > 0$, a Desigualdade de Young nos diz que $a\, b \leq \gamma \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{\gamma^{\frac{q}{p}}\, q}$. Então, fazendo $a = |\widetilde{u}|$, $b = |\overline{u}|^{2^\# - 1}$, $p = 2^\#$ e $q = \frac{2^\#}{2^\# - 1}$, obtemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}|\, |\overline{u}|^{\,2^\# - 1} &\leq \gamma \frac{|\widetilde{u}|^p}{p} + \frac{\left(|\overline{u}|^{\,2^\# - 1}\right)^q}{\gamma^{\frac{q}{p}}\, q} \\ &= \gamma \frac{|\widetilde{u}|^{\,2^\#}}{2^\#} + \frac{\left(|\overline{u}|^{\,2^\# - 1}\right)^{\frac{2^\#}{2^\# - 1}}}{\gamma^{\frac{q}{p}}\, \frac{2^\#}{2^\# - 1}} \\ &= \frac{\gamma}{2^\#} |\widetilde{u}|^{\,2^\#} + \frac{2^\# - 1}{\gamma^{\frac{q}{p}}\, 2^\#} |\overline{u}|^{\,2^\#}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Desta forma, por (2.46) e (2.45), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} |\widetilde{u}|\, |\overline{u}|^{\,2^\# - 1} &\leq \int_{\partial M} \left(\frac{\gamma}{2^\#} |\widetilde{u}|^{\,2^\#} + \frac{2^\# - 1}{\gamma^{\frac{q}{p}}\, 2^\#} |\overline{u}|^{\,2^\#} \right) \\ &= \frac{\gamma}{2^\#} \int_{\partial M} |\widetilde{u}|^{\,2^\#} + C_\gamma\, |\overline{u}|^{\,2^\#} \int_{\partial M} 1 \\ &\leq \frac{\gamma}{2^\#} C \left(\int_M |\nabla \widetilde{u}|^2 \right)^{\frac{2^\#}{2}} + C_\gamma\, |\overline{u}|^{\,2^\#}\, vol\big(\partial M\big). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Notemos que

$$||\widetilde{u}||^2_{H^1(M)} = ||\widetilde{u}||^2_{L^2(M)} + ||\nabla \widetilde{u}||^2_{L^2(M)} \geq ||\widetilde{u}||^2_{L^2(M)}, \tag{2.48}$$

e

$$\varepsilon^2 = ||u||^2_{H^1(M)} = ||u||^2_{L^2(M)} + ||\nabla \widetilde{u}||^2_{L^2(M)} \geq ||\nabla \widetilde{u}||^2_{L^2(M)}.$$

ou seja, obtemos

$$||\nabla \widetilde{u}||^2_{L^2(M)} = \varepsilon^2 - ||u||^2_{L^2(M)}. \tag{2.49}$$

Observe que $\|u\|^2_{L^2(M)} = \|\overline{u} + \widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} = \|\overline{u}\|^2_{L^2(M)} + \|\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)}$, então

$$\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + \|\overline{u}\|^2_{L^2(M)} = \varepsilon^2 - \|\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)}\,.$$

Além disso, note que $\|\widetilde{u}\|_{L^2(M)} = \|u - \overline{u}\|_{L^2(M)} \leq C\,\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^2(M)}$. Desta forma, retornando à desigualdade (2.43), e utilizando as estimativas encontradas em (2.44), (2.45), (2.47), (2.48) e (2.49), podemos então concluir que para certas constantes $c_0 > 0$ e $C_1 > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
I(u) \;&\geq\; \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 + C\,|\overline{u}|^{2^\#} - (n-2)\int_{\partial M} H\big(|\overline{u}+\widetilde{u}|^{2^\#} - |\overline{u}|^{2^\#}\big)\\
&\geq\; \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 + C\,|\overline{u}|^{2^\#} - (n-2)\left(C_0\int_{\partial M}|\widetilde{u}|^{2^\#} + C\int_{\partial M}|\widetilde{u}|\,|\overline{u}|^{2^\#-1}\right)\\
&\geq\; \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla\widetilde{u}|^2 + C\,|\overline{u}|^{2^\#} - (n-2)\,C_0\,C\left(\int_M|\nabla\widetilde{u}|^2\right)^{\frac{2^\#}{2}}\\
&\quad - (n-2)\left(\frac{\gamma}{2^\#}C\left(\int_M|\nabla\widetilde{u}|^2\right)^{\frac{2^\#}{2}} + C_\gamma\,|\overline{u}|^{2^\#}\,vol\big(\partial M\big)\right)\\
&\geq\; \frac{2(n-1)}{n-2}\,\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + C\,|\overline{u}|^{2^\#} - (n-2)\,C_\gamma\,|\overline{u}|^{2^\#}\,vol\big(\partial M\big)\\
&\quad - (n-2)\,\frac{\gamma}{2^\#}\,C\Big(\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)}\Big)^{\frac{2^\#}{2}} - (n-2)\,C_0\,C\Big(\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)}\Big)^{\frac{2^\#}{2}}\\
&=\; \frac{2(n-1)}{n-2}\,\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + \big(C - C_1(\gamma)\big)\,|\overline{u}|^{2^\#} - C_2(\gamma)\,\|\nabla\widetilde{u}\|^{2^\#}_{L^2(M)}\\
&\geq\; \left(\frac{2(n-1)}{n-2} - C_2(\gamma)\,\|\nabla\widetilde{u}\|^{\frac{2}{n-2}}_{L^2(M)}\right)\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + C\,|\overline{u}|^{2^\#}\\
&\geq\; \left(\frac{2(n-1)}{n-2} - C_2(\gamma)\,\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}\right)\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + C\,|\overline{u}|^{2^\#},
\end{aligned}$$

ou seja, vemos que

$$I(u) \geq C_3\,\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + C\,|\overline{u}|^{2^\#}\,.$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $C_3\,\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + C\,|\overline{u}|^{2^\#} > \delta$, para todo $u \in H^1(M)$ com $\|u\|_{H^1(M)} = \varepsilon$. De fato, pois, caso contrário, existiria uma sequência (u_i) em $H^1(M)$, com $\|u_i\|_{H^1(M)} = \varepsilon$, tal que $C_3\,\|\nabla\widetilde{u}\|^2_{L^2(M)} + C\,|\overline{u}|^{2^\#} \to 0$. Como $\|u_i\|_{H^1(M)} = \varepsilon$, temos, a menos de uma subsequência, que existe $u_0 \in H^1(M)$ tal que $u_i \rightharpoonup u_0$ em

$H^1(M)$ e $u_i \to u_0$ em $L^2(M)$. Isto implica que $\overline{u}_i \to \overline{u}_0$. Porém, como $\overline{u}_i \to 0$, então $\overline{u}_0 = 0$. Pela Desigualdade de Poincaré, vista na Proposição 1.24, temos

$$\|\widetilde{u}_i\|_{L^2(M)} = \|u_i - \overline{u}_i\|_{L^2(M)} \leq C\,\|\nabla\widetilde{u}_i\|_{L^2(M)}\,,$$

o que nos fornece que $u_i - \overline{u}_i \to 0$ em $L^2(M)$. Então, vemos que $u_i \to 0$ em $L^2(M)$. Isto nos diz que $u_0 = 0$. Agora, note que

$$\varepsilon^2 = \|u_i\|^2_{H^1(M)} = \|u_i\|^2_{L^2(M)} + \|\nabla\widetilde{u}_i\|^2_{L^2(M)} \longrightarrow 0\,,$$

o que é uma contradição.

□

O lema a seguir mostra que, sob as hipóteses do Teorema 3, o funcional energia I não é limitado inferiormente. A prova deste lema será feita no apêndice deste trabalho.

Lema 2.9. *Suponha que $\mathfrak{D}_n(p) > 1$ para algum ponto $p \in \partial M$. Então pode-se encontrar uma sequência de funções (φ_k) em $H^1(M)$ tal que $\varphi_k > 0$ e $I(\varphi_k) \to -\infty$ quando temos $k \to +\infty$.*

Como acabamos de ver, pelos Lemas 2.8 e 2.9, o funcional energia I possui a geometria do passo da montanha, que apresentamos na Definição 1.26. A partir disso, vejamos abaixo a Proposição 2.10 que é um primeiro passo na direção da demonstração do Teorema 3.

Proposição 2.10. *Suponhamos que $S = 0$, $K < 0$ e que H satisfaz*

(i) $\displaystyle\int_{\partial M} H < 0$,

(ii) $\mathfrak{D}_n(\overline{p}) > 1$ *para algum* $\overline{p} \in \partial M$.

Considere uma sequência de expoentes $p_i \nearrow \frac{n+2}{n-2}$. Então, existem $\kappa_i \to 1$ e soluções positivas u_i do problema perturbado abaixo:

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u = K u^{p_i} & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \kappa_i H u^{\frac{p_i+1}{2}} & \text{em } \partial M. \end{cases} \tag{2.50}$$

Além disso, as soluções u_i têm energia limitada, ou seja, $I_i(u_i)$ é limitado, onde

$$I_i(u) = \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{p_i+1}\int_M |K|\,|u|^{p_i+1} - \kappa_i \frac{4(n-1)}{p_i+3}\int_{\partial M} H\,|u|^{\frac{p_i+3}{2}}. \tag{2.51}$$

Demonstração. Por continuidade, temos que o funcional energia I_i satisfaz as propriedades da geometria do passo da montanha, vista na Definição 1.26, desde que κ_i esteja próximo de 1 e q_i esteja próximo de $\frac{n+2}{n-2}$. Fixando um índice $i \in \mathbb{N}$, observe que, de (2.51), temos que I_i satisfaz as condições da expressão (1.5), com $A(u) = \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{p_i+1}\int_M |K|\,|u|^{p_i+1} \geq 0$, $\alpha = \kappa_i$ e $B(u) = \frac{4(n-1)}{p_i+3}\int_{\partial M} H\,|u|^{\frac{p_i+3}{2}}$. Estes fatos implicam que, pelo *truque de Monotonicidade de Struwe*, enunciado no Teorema 12. existiria uma sequência (u_k^i) de Palais-Smale limitada em $H^1(M)$ para o funcional I_i para algum κ_i com $|\kappa_i - 1| < \dfrac{1}{i}$, tal que:

(1) $\|u_k^i\|_{H^1}$ é uniformemente limitada em k.

(2) $I_i(u_k^i) \to c_i$ quando $k \to \infty$, onde a constante $c_i > 0$, definida como em (1.4), é o nível do passo da montanha associado a I_i, que é limitada em i.

(3) $I_i'(u_k^i) \to 0$ em $H^{-1}(M)$. Isto é, tem-se que $\lim\limits_{k\to+\infty} I'(u_k^i)[v] = 0$ para todo $v \in H^1(M)$.

Para prosseguirmos devemos encontrar uma solução positiva u^i tal que ela seja o limite forte da sequência (u_k^i), em $H^1(M)$, quando $k \to \infty$.

Do item (1) acima, segue que existe $u^i \in H^1(M)$ tal que $u_k^i \rightharpoonup u^i$ em $H^1(M)$. Mais ainda, do item (2) acima, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u_k^i|^2 \;+\; \frac{1}{p_i+1}\int_M |K|\,|u_k^i|^{p_i+1} \;-\; \kappa_i\frac{4(n-1)}{p_i+3}\int_{\partial M} H|u_k^i|^{\frac{p_i+3}{2}}\\ &= c_i \;+\; o_k(1)\,.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Note que $0 < p_i + 1 < 2^*$. Então, pelo item (i) do Teorema 8, temos a compacidade do mergulho $H^1(M) \hookrightarrow L^{p_i+1}(M)$. Isto implica que, a menos de uma subsequência, temos $u_k^i \to u^i$ em $L^{p_i+1}(M)$. Em particular, encontra-se que

$$\int_M |K|\,|u_k^i|^{p_i+1} \longrightarrow \int_M |K|\,|u^i|^{p_i+1}$$

quando $k \to \infty$. Agora, observe que $1 < \frac{p_i+3}{2} < 2^{\#}$. Assim, pelo item (i) do Teorema 10, temos a compacidade do operador traço $H^1(M) \hookrightarrow L^{\frac{p_i+3}{2}}(\partial M)$. Isto implica que, a menos de uma subsequência, temos $u_k^i \to u^i$ em $L^{\frac{p_i+3}{2}}(M)$. Em particular, segue que

$$\int_{\partial M} H|u_k^i|^{\frac{p_i+3}{2}} \longrightarrow \int_{\partial M} H|u^i|^{\frac{p_i+3}{2}}$$

quando $k \to \infty$. Agora, devido a (2.51), observe que

$$I_i'(u)[v] = \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int_M |K|\,|u|^{p_i-1}u\,v - \kappa_i\,2(n-1)\int_{\partial M} H\,|u|^{\frac{p_i-1}{2}}\,u\,v\,.$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} I_i'(u_k^i)[u_k^i - u^i] &= \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M \left\langle \nabla u_k^i, \nabla(u_k^i - u^i)\right\rangle + \int_M |K|\,|u_k^i|^{p_i-1}\,u_k^i\,(u_k^i - u^i) \\ &\quad - \kappa_i\,2(n-1)\int_{\partial M} |u_k^i|^{\frac{p_i-1}{2}}\,u_k^i\,(u_k^i - u^i) \\ &= \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M \left(|\nabla u_k^i|^2 - \left\langle \nabla u_k^i, \nabla u^i\right\rangle\right) + \int_M |K|\,|u_k^i|^{p_i-1}\,u_k^i\,(u_k^i - u^i) \\ &\quad - \kappa_i\,2(n-1)\int_{\partial M} |u_k^i|^{\frac{p_i-1}{2}}\,u_k^i\,(u_k^i - u^i)\,. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Mas, como vimos que $u^i \in H^1(M)$ é tal que $u_k^i \rightharpoonup u^i$, segue da compacidade do mergulho $H^1(M) \hookrightarrow L^2(\partial M)$ que (2.53) nos fornece que

$$I_i'(u_k^i)[u_k^i - u^i] = \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M \left(|\nabla u_k^i|^2 - \left\langle \nabla u_k^i, \nabla u^i\right\rangle\right) + o_k(1)\,. \tag{2.54}$$

Como $I_i'(u_k^i) \to 0$ em $H^{-1}(M)$ e também $u_k^i - u^i$ é limitado em $H^1(M)$, podemos concluir que $I_i'(u_k^i)[u_k^i - u^i] \to 0$ quando $k \to \infty$. Por conseguinte, da igualdade (2.54), temos

$$\int_M |\nabla u_k^i|^2 \longrightarrow \int_M |\nabla u^i|^2$$

quando $k \to \infty$. Tudo isso implica a convergência $u_k^i \to u^i$ em $H^1(M)$ quando $k \to \infty$. Desta forma, temos que $I(u_k^i) \to I(u^i)$ e, pelo item (2) acima, segue que $I(u^i) = c_i > 0$. Portanto, a função $u^i \in H^1(M)$ é uma solução não trivial do problema

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u^i = K|u^i|^{p_i-1}u^i & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u^i}{\partial \eta} = \kappa_i H|u^i|^{\frac{p_i-1}{2}}u^i & \text{em } \partial M. \end{cases} \tag{2.55}$$

Ainda temos que mostrar que $u_i > 0$. Do Lema 2.9, existe uma função $\psi > 0$ com $I_i(\psi) < 0$. Defina a curva contínua $\alpha : [0,1] \to H^1(M)$ dada por $\alpha(t) = t\,\psi$.

Como é bem conhecido, sequências de Palais-Smale podem ser tomadas muito próximas a família de curvas dada pelas deformações da curva α sob o fluxo gradiente de I_i,veja em [14]. Assim, podemos utilizar o fato de que o fluxo gradiente de I_i deixa invariante o cone de funções não negativas para concluir que o limite u^i da sequência de Palais-Smale é não negativo. Veja o item (a) do Lema 4.1 em [3]. Isto implica que $u_i \geq 0$. Finalmente, utilizando o Princípio do Máximo, como na parte final da demonstração do Teorema 16, segue que $u^i > 0$.

□

Por fim, demonstraremos o seguinte teorema, para o qual assumiremos os resultados do próximo capítulo.

Teorema 18. *(**Teorema** 3) Seja $n = 3$. Assuma que $S = 0$, $K < 0$ e que H é tal que*

(i) $\displaystyle\int_{\partial M} H < 0$,

(ii) $\mathfrak{D}_n(p) > 1$ *para algum* $\overline{p} \in \partial M$,

(iii) 1 *é valor regular para a função* $\mathfrak{D}_n : \partial M \to \mathbb{R}$.

Então, temos que (2) *admite uma solução positiva.*

Demonstração. Assumindo os resultados provados no próximo capítulo, temos o seguinte: Pela Proposição 2.10, existem $\kappa_i \to 1$ e soluções positivas do problema (2.50). Além disso, estas soluções u_i são tais que $I_i(u_i)$ é limitado, onde $I_i(u)$ é dado por (2.51). Assim, como $S = 0$, temos, pelo item (2.2) do Teorema 4, que $\mathcal{P}_1 = \varnothing$. Agora, pela Proposição 2.10, e pelo item (2.3) do Teorema 4, obtemos $\mathcal{P}_0 = \varnothing$. Desta forma, segue que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \bigcup \mathcal{P}_1 = \varnothing$. Assim, temos que existe uma função v positiva tal que a sequência (u_i) de soluções do problema (2.50) satisfaz $u_i \to v$, com v sendo solução do problema (2.50) com $\kappa_i = 1$. Portanto, temos que (2) admite uma solução positiva.

□

3 Análise de Blow-up

Estudaremos, de maneira geral, o comportamento dos pontos de blow-up. Diante de tal objetivo, construiremos alguns resultados sobre o funcional energia I e, após isso, demonstraremos o Teorema 4. Para clarificar melhor a demonstração, a dividiremos em subseções para cada um dos itens do teorema apresentando nelas os respectivos resultados e estimativas necessários para prová-los.

Para o restante desta seção vamos supor que $K_i \in \mathcal{C}^2(M)$ e $H_i \in \mathcal{C}^2(\partial M)$ são tais que $K_i \to K$ em $\mathcal{C}^2(M)$ e $H_i \to H$ em $\mathcal{C}^2(\partial M)$. Assuma que $K < 0$ e que a curvatura escalar S não muda de sinal. Seja (u_i) uma sequência de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u_i + S u_i = K_i u_i^{p_i} & \text{em } M, \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial u_i}{\partial \eta} = H_i u_i^{\frac{p_i+1}{2}} & \text{em } \partial M, \end{cases} \tag{3.1}$$

com $p_i \nearrow \frac{n+2}{n-2}$. As soluções u_i são pontos críticos do funcional energia I abaixo:

$$I_i(u) = \frac{2(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_M S\, u^2 - \frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\, |u|^{p_i+1} - \frac{4(n-1)}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\, |u|^{\frac{p_i+3}{2}}.$$

3.1 Prova do Teorema 4

Aqui provaremos o Teorema 4. Dividiremos a demonstração deste teorema em lemas e proposições que, ao longo de cada subseção a seguir, provará cada um dos itens do Teorema 4 à medida que construirmos as bases para demonstrá-los. Relembremos que a definição do conjunto singular $\mathcal{P}$ é

$$\mathcal{P} = \{p \in \overline{M} : \exists\,(x_i) \to p \text{ tal que } u_i(x_i) \text{ é não limitada}\}.$$

Agora, lembremos o que afirma o Teorema 4.

Teorema 19. *(**Teorema** 4) Suponha que $K < 0$. Seja uma sequência (u_i) de soluções do problema (3.1), e seja $\mathcal{P}$ o conjunto singular associado. Então, temos que:*

(1) $\mathcal{P} \subset \{p \in \partial M : \mathfrak{D}_n(p) \geq 1\}$.

Portanto, podemos escrever $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$*, com* $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n = 1\}$ *e* $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n > 1\}$*. Em dimensão* $n = 3$*, vale as seguintes afirmações:*

(2.1) $\mathcal{P}_1$ *é um conjunto finito.*

(2.2) Se $S \leq 0$*, então* $\mathcal{P}_1 = \varnothing$*.*

(2.3) Se $I_i(u_i)$ *é uniformemente limitada e* 1 *é valor regular de* $\mathfrak{D}_n$*, então* $\mathcal{P}_0 = \varnothing$*.*

3.1.1 Prova do Item 1

Provaremos agora o **item** (1) do Teorema 19, que nos fornece uma importante caracterização dos pontos do conjunto singular.

Proposição 3.1. $\mathcal{P} \subset \{p \in \partial M : \mathfrak{D}_n(p) \geq 1\}$

Demonstração. Seja $p \in \mathcal{P}$. Considere coordenadas geodésicas normais centrada em p, uma bola geodésica $B(p,r)$ de raio r, e uma sequência (y_i) na bola $B(0,r)$ com $y_i \to 0$ tal que $u_i(y_i) \to +\infty$. Defina

$$\varepsilon_i := u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \to 0\,.$$

Vamos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland, que vimos no Teorema 15, fazendo $\varphi = u_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$ e $\lambda = \sqrt{\varepsilon_i}$. Desta forma, obtemos que existe uma sequência (z_i) tal que

(1) $u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$. Então, temos $u_i(y_i) \leq u_i(z_i)$ e, consequentemente, $u_i(z_i) \to +\infty$,

(2) $d(z_i, y_i) \leq \sqrt{\varepsilon_i}$. Em particular, temos que $z_i \to 0$,

(3) $u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} < u_i(z)^{-\frac{p_i-1}{2}} + \sqrt{\varepsilon_i}\, d(z_i, z)$ para todo $z \neq z_i$.

Agora, seja $\delta_i = u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \to 0$, $B_i = B(z_i, \frac{r}{2}) \bigcap B(p,r)$ e defina a sequência de funções reescalonadas.

$$v_i(x) \;=\; \delta_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\delta_i x + z_i) \tag{3.2}$$

para todo $x \in \widetilde{B}_i = \dfrac{1}{\delta_i} B_i$. Assim, é direto que

$$v_i(0) \;=\; \frac{u_i(z_i)}{u_i(z_i)} \;=\; 1\,.$$

Afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$ e $R > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0$, a função v_i satisfaz a seguinte limitação uniforme:

$$v_i(x) \,\leq\, 1 + \varepsilon, \;\; \forall x \in \widetilde{B}_i \text{ com } |x| < R\,. \tag{3.3}$$

De fato, se $z = \delta_i x + z_i$ e $|x| < R$, então $d(z_i, z) < R\,\delta_i$ e, do item (3) acima, segue que

$$\begin{aligned} u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \;&<\; u_i(z)^{-\frac{p_i-1}{2}} + \sqrt{\varepsilon_i}\,R\,\delta_i \\ &=\; u_i(z)^{-\frac{p_i-1}{2}} + \sqrt{\varepsilon_i}\,R\,u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} u_i(z)^{-\frac{p_i-1}{2}} \;&>\; u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} - \sqrt{\varepsilon_i}\,R\,u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \\ &=\; u_i(z_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\big(1 - \sqrt{\varepsilon_i}R\big), \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_i(z) \,<\, \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_i}R}\right)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(z_i)\,.$$

Fazendo $z = \delta_i x + z_i$ nesta última desigualdade acima e utilizando (3.2), obtemos

$$v_i(x) \,<\, \frac{1}{\big(1 - \sqrt{\varepsilon_i}\,R\big)^{\frac{2}{p_i-1}}}\,, \tag{3.4}$$

que prova a desigualdade (3.3). Vamos analisar dois casos:

- **Caso 1: $p \in \partial M$ e, a menos de uma subsequência,** $\dfrac{d(z_i, \partial_0 B)}{\delta_i} \to t_o \geq 0.$

Lembremos que u_i é solução positiva de (3.1). Assim como na Seção 1,11 do Capítulo 1, obtemos que a função v_i satisfaz

$$\begin{aligned} &-g^{kl}(\delta_i x + z_i)\,\partial_k\,\partial_l v_i(x) \;-\; \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_k\big(\sqrt{|g|}\,g^{kl}\big)\,(\delta_i x + z_i)\,\delta_i\,\partial_l v_i(x) \\ &+\frac{1}{C_n}\,S(\delta_i x + z_i)\,\delta_i^2\,v_i(x) \;=\; \frac{1}{C_n}\,K_i(\delta_i x + z_i)\,v_i(x)^{p_i}\,, \end{aligned}$$

para todo $x \in \widetilde{B}_i$, e também satisfaz

$$\frac{n}{n-2}\,\eta_k(\delta_i x + z_i)\,\partial_k v_i(x) \;=\; H_i(\delta_i x + z_i)\,v_i(x)^{\frac{p_i+1}{2}}\,,$$

em $\dfrac{1}{\delta_i}\big(B_i \cap \partial M\big)$. Utilizando (3.3) e estimativas de regularidade elípticas obtemos que, a menos de uma subsequência, $v_i \to v$ em $\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$. Note que v é não trivial, já que $v_i(0) = 1$. Assim como na Seção 1.11 do Capítulo 1, segue que v_i é solução para o problema limite (1.16).

Na Proposição 1.27, no Capítulo 1, vimos que este problema admite solução somente quando $\mathfrak{D}_n(p) \geq 1$.

- **Caso 2:** $\dfrac{d(x_k, \partial_0 B)}{\delta_k} \to +\infty$.

Nessa situação, o domínio $\widetilde{B}_i$ exaure todo o $\mathbb{R}^n$. Raciocinando como antes, temos que $v_i \to v$ em $\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, v é solução da seguinte equação:

$$-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Delta v \;=\; K(0)\,v^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Como $v_i(0) = 1$, então v é não trivial. Considere $R > 0$ e o domínio $\Omega = B^n_R(0)$. Como $K < 0$, temos que $\Delta v > 0$ em Ω e, pelo Princípio do Máximo, visto no Teorema 13, não pode atingir seu máximo a menos que seja constante. Contudo, aplicando o limite em (3.4) obtemos que

$$v(x) \leq 1$$

para todo $x \in \Omega$, enquanto que $v(0) = 1$. Logo, o caso 2 não é possível. Portanto, dado tudo isto, a prova da proposição está completada.

□

Agora, temos o seguinte lema que nos fornece informação sobre pontos do conjunto singular $\mathcal{P}_1$.

Lema 3.2. *Seja $p \in \mathcal{P}_1$. Então existe uma sequência $x_i \in \partial M$, com $x_i \to p$, tal que $u_i(x_i) \to +\infty$ é máximo local de u_i. Além disso, dado $\overline{R}_i \to +\infty$ e $\varepsilon_i \searrow 0$ temos, a menos de uma subsequência, que*

$$r_i := \overline{R}_i u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \longrightarrow 0$$

e

$$\left\| u_i(x_i)^{-1} u_i\Big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x + x_i\Big) - b_\beta(x) \right\|_{\mathcal{C}^2(B(0,2\overline{R}_i))} \leq \varepsilon_i$$

onde b_β é dado por (1.18), para algum $\beta > 0$.

Demonstração. Dado um ponto $p \in \mathcal{P}_1$, então estamos na situação do Caso 1 da prova da Proposição 3.1. Desta forma, obtemos que a sequência (v_i) de funções reescalonadas converge localmente no sentido $\mathcal{C}^1$ para a função v em (1.18). Mas, observe que a solução limite (1.18) possui um máximo global e, por conseguinte, cada função v_i atinge seu máximo em um certo ponto $\widetilde{x}_i$. Agora, reescalonando de volta, obtemos então pontos x_i que são máximos locais de u_i.

Note que se i é grande o suficiente, então $x_i \in \partial M$. Isto é uma consequência do fato de que $u_i(x_i)$ é sub-harmônica, pois, devido a hipótese de que $K < 0$, temos

$$-\Delta u_i(x_i) = K(x_i)\, u_i(x_i)^{p_i} - S(x_i)\, u_i(x_i) < 0$$

para i suficientemente grande, pois $u_i(x_i) > 0$ e $p_i > 1$. Isto implica que $\Delta u_i(x_i) > 0$. Então, pelo Princípio do Máximo, visto no Teorema 13, o ponto $x_i \in \partial M$ pois, caso contrário, a função u_i seria constante. A convergência é dada pela convergência da sequência de funções reescalonadas v_i, assim como na prova do Caso 1 na demonstração da Proposição 3.1.

□

Observação 3.3. *Note que, se* $\lambda = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$, *a escolha do reescalonamento de* u_i *feito no Lema 3.2 como*

$$w_i(x) = \lambda^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\lambda x),$$

com $x \in \mathcal{C}^2\big(B(0, 2\overline{R}_i)\big)$, *é interessante, pois temos a invariância nas equações do problema* (1.16) *no sentido de que se uma função* f *é solução do problema* (1.16), *então* $g(x) = \lambda^{\frac{2}{p_i-1}} f(\lambda x)$ *também é solução.*

3.1.2 Prova do Item 2.1

Provaremos agora o **item** (2.1) do Teorema 4. Para isso, faremos uma análise dos pontos de blow-up $x \in \mathcal{P}_1$ e a sequência de máximos $x_1 \to x$ dada pelo Lema 3.2, onde localmente os pontos de blow-up têm seu perfil dado pela equação (1.18). No decorrer desta análise, veremos que existe apenas uma quantidade finita de pontos de blow-up isolados simples. Posteriormente, veremos ainda que, se $n = 3$ então todos os pontos de blow-up de $\mathcal{P}_1$ são isolados simples.

Definição 3.4. *Dizemos que* $p \in \partial M$ *é um ponto de* ***blow-up isolado*** *se existe uma sequência* (x_i) *de máximos locais tal que* $x_i \to p$, $u_i(x_i) \to +\infty$ *e*

$$u_i(y) \leq \frac{C}{d(y, x_i)^{\frac{2}{p_i-1}}}, \quad \text{para todo } y \in B(x_i, R)_+, \tag{3.5}$$

onde C *e* R *são constantes positivas que não dependem de* i.

Definição 3.5. *Sejam as sequências* (u_i), (x_i) *e* $p \in \partial M$ *como na Definição 3.4, e considere a média radial*

$$\overline{u}_i(r) = \fint_{\partial^+ B(x_i, r)_+} u_i.$$

Dizemos que p *é um ponto de* ***blow-up isolado simples*** *se existe* $\rho > 0$, *que não depende de* i, *tal que para* $r \in (0, \rho)$ *as funções*

$$\widehat{u}_i(r) = r^{\frac{2}{p_i-1}} \overline{u}_i(r) \tag{3.6}$$

possuem exatamente um único ponto crítico.

Dadas estas definições, vejamos a seguir uma importante observação sobre a função b_β, dada por (1.18), que vimos na seção Problema Limite e Suas Soluções, no Capítulo Preliminares.

Observação 3.6. *Dada a função b_β como foi definida em (1.18), isto é, dada por*

$$b_\beta(x) = \frac{(n(n-2))^{\frac{n-2}{4}}\beta^{\frac{n-2}{2}}}{(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

com $x_0(\beta) = -\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n \in \mathbb{R}^n$ e $\beta > 0$ arbitrário. Pela Definição 3.5, segue que

$$\begin{aligned}\overline{b_\beta}(r) &= \frac{C(n,\beta)}{r^{n-1}}\int_{\partial^+ B(0,r)_+}\frac{1}{\left(|\theta_r+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}\,d\theta_r\\ &= C(n,\beta)\int_{\partial^+ B(0,1)_+}(|r\theta+\mathfrak{D}_n\beta e_n|-\beta^2)^{\frac{2-n}{2}}\,d\theta\end{aligned}$$

já que, neste caso, $vol\big(\partial^+ B(0,r)_+\big) = C\,r^{n-1}$, para alguma constante $C > 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\hat{b}_\beta(r) &= r^{\frac{n-2}{2}}\overline{b}_\beta(r) = C\int_{\partial^+ B(0,1)_+}\left(|r\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)^{-\frac{n-2}{2}} r^{\frac{n-2}{2}}\,d\theta\\ &= C\int_{\partial^+ B(0,1)_+}\left(\frac{r}{|r\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\,d\theta\end{aligned}$$

Desta forma, observe que

$$\begin{aligned}\hat{b}'_\beta(r) &= \int_{\partial^+ B(0,1)_+}\frac{n-2}{2}\left(\frac{r}{\left(|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)}\right)^{\frac{n-4}{2}}\frac{|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2-2\,r\,\langle r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n,\theta\rangle}{\left(|r\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)^2}\\ &= \frac{n-2}{2}\left(\frac{r}{\left(|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)}\right)^{\frac{n-4}{2}}\frac{r^2+2\,r\,\mathfrak{D}_n\,\beta\,\theta_n+\mathfrak{D}_n^2\,\beta^2-\beta^2-2\,r\big(r+\mathfrak{D}_n\,\beta\,\theta_n\big)}{\left(|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)^2}\\ &= \frac{n-2}{2}\left(\frac{r}{\left(|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)}\right)^{\frac{n-4}{2}}\frac{-r^2+\beta^2(\mathfrak{D}_n-1)}{\left(|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)^2}\\ &= \frac{n-2}{2}\,\frac{r^{\frac{n-4}{2}}\beta^2(\mathfrak{D}_n-1)-r^{\frac{n}{2}}}{\left(|r\,\theta+\mathfrak{D}_n\,\beta\,e_n|^2-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}}}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\hat{b}'_\beta(r) = 0$ *quando* $r^2 = \beta^2(\mathfrak{D}_n - 1)$.

Lembre-se que, pelo Lema 3.2, temos

$$v_i(x) = u_i(x_i)^{-1}\, u_i\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x + x_i\big) \longrightarrow b_\beta(x)$$

com $x \in \mathcal{C}^2(B(0, 2\overline{R}_i))$. *Isto implica que no intervalo* $(0, \overline{R}_i u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}})$ *a função* $\hat{v}_i$ *possui um único ponto crítico.*

3.1.2.1 Uma estimativa superior

A proposição a seguir nos fornece uma versão da famosa *desigualdade de Harnack*. Para consultar os detalhes veja em [15].

Proposição 3.7. ***(Desigualdade de Harnack)*** *Sejam* p *um ponto de blow-up isolado,* $\Omega = B(p, R_0)$ *e uma sequência* (u_i) *de soluções do problema (3.1) com* $p_i \geq 1$. *Sejam* (x_i) *e* $R < R_0$ *como na Definição 3.4. Então, para todo* $0 < r < \frac{R}{4}$, *tem-se que*

$$\max_{B(x_i,2r)_+ \setminus B(x_i,\frac{r}{2})_+} u_i(y) \leq C \min_{B(x_i,2r)_+ \setminus B(x_i,\frac{r}{2})_+} u_i(y),$$

onde C *é uma constante positiva que não depende de* i *nem de* r.

O principal resultado deste estudo das propriedades dos pontos de blow-up isolados simples é a Proposição 3.12, apresentado mais adiante, que é uma descrição da sequência u_i em torno de pontos de blow-up isolados simples.

Para demonstrar este resultado principal, teremos alguns lemas auxiliares que, em conjunto, nos conduzirá a tal objetivo. No que se segue, utilizaremos a versão do Princípio do Máximo, que vimos no Teorema 14 no capítulo Preliminares. Porém, antes temos a seguinte observação que reunirá as hipóteses consideradas nos lemas auxiliares, afim de ser referência e evitar ser demasiado repetitivo nos enunciados.

Observação 3.8. *Considere a bola* $B(0,2)$ *e que* $K_i \to K < 0$ *em* $\mathcal{C}^1(\overline{B(0,2)_+})$ *e que* $H_i \to H$ *em* $\mathcal{C}^2(\overline{\partial_0 B(0,2)})$. *Suponha que, para todo* $i \in \mathbb{N}$, *a função* u_i *é uma solução positiva do problema (3.1) e que* $x_i \to 0$ *com* 0 *sendo um ponto de blow-up isolado simples tal que*

$$u_i(y) \leq C_1 |y - x_i|^{\frac{2}{p_i - 1}}, \quad \text{para todo } x \in B(0,2)_+.$$

Lema 3.9. *Considere as mesmas hipóteses da Observação 3.8. Então, existe $\varepsilon_i > 0$ com $\varepsilon_i = O\big(\overline{R}_i^{-2}\big)$, tal que*

$$u_i(x_i)^{\lambda_i} u_i(y) \le C\,|y - x_i|^{2-n+\varepsilon_i} \quad \textit{para todo } r_i \le |y - x_i| \le 1,$$

onde $\lambda_i = \dfrac{p_i - 1}{2}\big(n - 2 - \varepsilon_i\big) - 1$, *e ainda* $r_i = \overline{R}_i u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \to 0$ *como no Lema 3.2.*

Demonstração. Inspirado em [15], será seguido algumas ideias que estão presentes no Lema 2.2 e Proposição 2.3 em [21], juntamente com a aplicação do Lema 14. Observe que, como $p_i \nearrow \frac{n+2}{n-2}$ e $\varepsilon_i \searrow 0$, então $p_i = \dfrac{n+2}{n-2} + o_i(1)$ e

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{p_i - 1}{2}\big(n - 2 - \varepsilon_i\big) - 1 \\ &= \frac{2}{n-2}\big(n - 2 - \varepsilon_i\big) - 1 + o_i(1) \\ &= 1 + o_i(1)\,. \end{aligned}$$

Note que, para $|y - x_i| = r_i$, encontramos a desigualdade

$$u_i(y) \le C\ u_i(x_i)\,\overline{R}_i^{2-n} \tag{3.7}$$

onde $\overline{R}_i \to +\infty$. De fato, pelo Lema 3.2, temos

$$u_i(x_i)^{-1} u_i\Big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x + x_i\Big) - b_\beta(x) = f_i \tag{3.8}$$

onde $x \in B(0, 2\,\overline{R}_i)$, $|f_i| \le \varepsilon_i$, b_β é dado por (1.18) e $r_i = \overline{R}_i\, u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \to 0$. Porém, relembremos que, por (1.19), temos

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^{n-2}\, b_{\beta_0}(x) = C$$

para alguma constante $C = C(n, \beta) > 0$, isto é, vemos que $b_\beta(x) \le C\,|x|^{2-n}$. Faça $y = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x + x_i$, como $|y - x_i| = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\,|x|$ e também $|y - x_i| = r_i = \overline{R}_i\, u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$, segue que $|x| = \overline{R}_i$. Então, por (3.8), obtém-se

$$u_i(x_i)^{-1}\, u_i(y) = f_i + b_\beta(x) \le C\,|x|^{2-n} + \varepsilon_i\,.$$

Escolha $\varepsilon_i \leq \overline{R}_i^{2-n}$, então temos

$$u_i(y) \leq C\, u_i(x_i)\, \overline{R}_i^{2-n}.$$

Agora, considere a função $\widehat{u}_i(r) = r^{\frac{2}{p_i-1}}\, \overline{u}_i(r)$, com $\overline{u}_i(r)$ como na Definição 3.5. Pelas nossas hipóteses, como $x_i \to 0$ é um ponto de blow-up isolado simples, segue da definição de blow-up isolado simples que existe um único ponto crítico de $\widehat{u}$ no intervalo $(0,1)$. Mais ainda, pelo Lema 3.2 e a Observação 3.6, podemos sempre assumir que para cada índice i muito grande este ponto crítico permanece no intervalo $(0, r_i)$. Devido a estes fatos, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\hat{u}_i(r)$ é estritamente decrescente em $r_i < r < 1$. Dado isso, se y é tal que $r_i < r = |x_i - y| < 1$, então

$$\begin{aligned} |y - x_i|^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(y) &\leq C\, |y - x_i|^{\frac{2}{p_i-1}}\, \overline{u}_i(|y - x_i|) \\ &= C\, r_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, \overline{u}_i(r_i) \\ &= C\, \overline{R}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(x_i)^{-1} \fint_{\partial^+ B(x_i, r_i)_+} u_i. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade (3.7), e o fato que $p_i \nearrow \frac{n+2}{n-2}$, temos

$$\begin{aligned} |y - x_i|^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(y) &\leq C\, |y - x_i|^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(x_i)\, \overline{R}_i^{2-n} \\ &= C\, r_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(x_i)\, \overline{R}_i^{2-n} \\ &= C\, \overline{R}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(x_i)^{-1}\, u_i(x_i)\, \overline{R}_i^{2-n} \\ &= C\, \overline{R}^{\frac{2}{p_i-1} + 2 - n} \\ &= C\, \overline{R}_i^{-\frac{2}{p_i-1} + \left(\frac{4}{p_i-1} + 2 - n\right)}. \end{aligned}$$

com $\dfrac{4}{p_i - 1} + 2 - n \to 0$. Por conseguinte, isso fornece

$$u_i(y)^{p_i-1} \leq C\, \overline{R}_i^{-2 + o_i(1)} \frac{1}{|y - x_i|^2}, \quad \text{para todo} \quad r_i \leq |y - x_i| \leq 1. \tag{3.9}$$

No que se segue, aplicamos um argumento de comparação. Defina o operador elíptico de segunda ordem $\mathfrak{L}_i$ como

$$\mathfrak{L}_i(\varphi) = \Delta_g \varphi + \frac{n-2}{4\,(n-1)}\, (K_i\, u_i^{p_i-1} - S)\, \varphi$$

e o operador $\mathfrak{B}_i$ na fronteira como

$$\mathfrak{B}_i(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{n-2}{2} H_i \, u_i^{\frac{p_i - 1}{2}} \varphi \, .$$

Como $u_i > 0$ é solução do problema (3.1), então $\mathfrak{L}_i(u_i) = 0$ e $\mathfrak{B}_i(u_i) = 0$. Isto nos diz que o par $(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{B}_i)$ satisfaz o Princípio do Máximo enunciado no Teorema 14. Comecemos construindo uma função adequada para ser comparada com a função u_i. Considere a função $x \longmapsto |x - x_i|^{-\mu}$. Observe que, para $0 \leq \mu \leq n-2$, tem-se

$$\nabla |x - x_i|^{-\mu} = -\,\mu \, |x - x_i|^{-\mu - 2} \, (x - x_i) \, .$$

Como $\Delta |x - x_i|^{-\mu} = \operatorname{div}(\nabla |x - x_i|^{-\mu})$, segue que

$$\Delta |x - x_i|^{-\mu} = -\,\mu \, (n - 2 - \mu) \, |x - x_i|^{-\mu - 2}.$$

Então, como $C_n = \frac{4\,(n-1)}{n-2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_i(|y - x_i|^{-\mu}) &= -\mu \, (n - 2 - \mu) \frac{1}{|y - x_i|^{\mu + 2}} + C_n^{-1} \, K_i \, u_i^{p_i - 1} \frac{1}{|y - x_i|^{\mu}} \\ &\quad - C_n^{-1} \, S \frac{1}{|y - x_i|^{\mu}} \, . \end{aligned}$$

Mas, utlizando (3.9),

$$\mathfrak{L}_i(|y - x_i|^{-\mu}) \leq \Big(-\mu \, (n - 2 - \mu) + C_n^{-1} \, K_i \, \overline{R}_i^{\,-2 + o_i(1)} \Big) \frac{1}{|y - x_i|^{\mu + 2}} - C_n^{-1} \, S \frac{1}{|y - x_i|^{\mu}} \, .$$

Desta forma, podemos escolher $\varepsilon_i \searrow 0$, com $\varepsilon_i = O\big(\overline{R}_i^{\,-2}\big)$ tal que

$$\mathfrak{L}_i(|y - x_i|^{-\varepsilon_i}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathfrak{L}_i(|y - x_i|^{2 - n + \varepsilon_i}) \leq 0 \tag{3.10}$$

Além disso, novamente por (3.9), note que,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_i(|y - x_i|^{-\mu}) &= \mu \, \frac{y^n}{|y - x_i|^{\mu + 2}} - \frac{n-2}{2} H_i \, u_i^{\frac{p_i - 1}{2}} \frac{1}{|y - x_i|^{\mu}} \\ &\leq \mu \, \frac{y^n}{|y - x_i|^{\mu + 2}} + O\big(\overline{R}_i^{\,-1 + o_i(1)}\big) \frac{1}{|y - x_i|^{\mu + 1}} \, . \end{aligned}$$

Analogamente, também obtemos

$$\mathfrak{B}_i(|y - x_i|^{-\varepsilon_i}) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathfrak{B}_i(|y - x_i|^{2-n+\varepsilon_i}) \geq 0 \tag{3.11}$$

Agora, faça $M_i = \max_{y \in \partial^+(B(x_i,1))_+} u_i(y)$ e $\lambda_i = \frac{p_i - 1}{2}\big(n - 2 - \varepsilon_i\big) - 1$. Defina a função φ_i como

$$\varphi_i(y) = M_i\,|y - x_i|^{-\varepsilon_i} + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,|y - x_i|^{2-n+\varepsilon_i} \quad \text{para todo} \quad r_i \leq |y - x_i| \leq 1$$

com $\alpha > 0$ a ser escolhido. Para aplicarmos o Princípio do Máximo, visto no Teorema 14, e comparar φ_i com u_i, escolhemos como domínio o semianel $A = B(x_i,1)_+ \backslash B(x_i,r_i)_+$. Note que a fronteira $\partial^+ A$ é composta por duas semiesferas, isto é,

$$\partial^+ A = \{x \in A : |y - x_i| = r_i\} \cup \{x \in A : |y - x_i| = 1\}.$$

Por (3.10) e (3.11), tem-se $\mathfrak{L}_i(\varphi_i - u_i) \leq 0$ em A e $\mathfrak{B}_i(\varphi_i - u_i) \geq 0$ em $\partial_0 A$. Assim, precisamos provar apenas que $\varphi_i \geq u_i$ nas fronteiras circulares.
Se temos $|y - x_i| = 1$, então a escolha feita de M_i implica, naturalmente, que

$$\varphi_i(y) = M_i + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i} \geq u_i(y)\,.$$

Por outro lado, se $|y - x_i| = r_i$, então

$$\begin{aligned}
\varphi_i(y) &= M_i\,r_i^{-\varepsilon_i} + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,r_i^{2-n+\varepsilon_i} \\
&= M_i\,\overline{R}_i^{-\varepsilon_i} u_i(x_i)^{\varepsilon_i\frac{p_i-1}{2}} + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,\overline{R}_i^{2-n+\varepsilon_i}\,u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}(2-n+\varepsilon_i)} \\
&= M_i\,\overline{R}_i^{-\varepsilon_i} u_i(x_i)^{\varepsilon_i\frac{p_i-1}{2}} + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i-\frac{p_i-1}{2}(2-n+\varepsilon_i)}\,\overline{R}_i^{2-n+\varepsilon_i} \\
&= M_i\,\overline{R}_i^{-\varepsilon_i} u_i(x_i)^{\varepsilon_i\frac{p_i-1}{2}} + \alpha\,u_i(x_i)\,\overline{R}_i^{2-n+\varepsilon_i}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Note que, devido a (3.7), é possível escolher $\alpha > 0$ no segundo termo no lado direito de (3.12) tal que $u_i(y) \leq \alpha\,u_i(x_i)\,\overline{R}_i^{2-n+\varepsilon_i}$. Com isso, e a escolha feita de M_i, que implica o primeiro termo no lado direito de (3.12) ser maior do que $u_i(y)$, obtemos então que $\varphi_i(y) \geq u_i(y)$ para $|y - x_i| = r_i$. Assim, a aplicação do Teorema 14 para $\varphi_i - u_i$ nos diz que $\varphi_i(y) \geq u_i(y)$ para $r_i \leq |y - x_i| \leq 1$, ou seja, que

$$u_i(y) \leq M_i\,|y - x_i|^{-\varepsilon_i} + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,|y - x_i|^{2-n+\varepsilon_i} = \varphi_i(y)\,. \tag{3.13}$$

Agora, pela Desigualdade de Harnack (Proposição 3.7), e como $\overline{u}_i$ é decrescente, para $r_i < \theta < 1$, segue que

$$\begin{aligned} M_i &\leq C\,\overline{u}_i(1) \\ &\leq C\,\theta^{\frac{2}{p_i-1}}\,\overline{u}_i(\theta) \\ &\leq C\,\theta^{\frac{2}{p_i-1}}\Big(M_i\,\theta^{-\varepsilon_i} + \alpha\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,\theta^{2-n+\varepsilon_i}\Big) \\ &= C\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\Big(M_i\,u_i(x_i)^{\lambda_i}\,\theta^{\frac{2}{p_i-1}-\varepsilon_i} + \alpha\,\theta^{\frac{2}{p_i-1}+2-n+\varepsilon_i}\Big). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Então, para i grande, podemos escolher θ suficientemente pequeno tal que

$$M_i \leq C_1\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}.$$

Logo, devido a esta última desigualdade, segue que (3.13) se torna

$$\begin{aligned} u_i(y) &\leq C_1\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\Big(|y-x_i|^{-\varepsilon_i} + |y-x_i|^{2-n+\varepsilon_i}\Big) \\ &\leq C\,u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,|y-x_i|^{2-n+\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos a demonstração.

□

Lema 3.10. *Considerando as mesmas hipóteses da Observação 3.8, temos que*

$$\tau_i := \frac{n+2}{n-2} - p_i = O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{2}{n-2}+o_i(1)}\Big)$$

quando $i \to +\infty$. Portanto,

$$u_i(x_i)^{\tau_i} = 1 + o_i(1).$$

Demonstração. Aplicaremos o Corolário 2.4 para a função $u(x) = u_i(x+x_i)$ definida em $\Omega = B(0,1)$, e fazendo $\psi = S$, $f = K_i$ e $h = H_i$. Dadas estas condições, observe que a equação (2.13) no Corolário 2.4 resulta em

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\Omega(u) = {} & \frac{1}{p_i+1}\int_\Omega u^{p_i+1}X\cdot\nabla K_i + \left(\frac{n}{p_i+1} - \frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega K_i\,u^{p_i+1} \\ & - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 X\cdot\nabla S - \int_\Omega S\,u^2 + \frac{r}{2}\int_{\partial^+\Omega} S\,u^2 + \frac{r}{p_i+1}\int_{\partial^+\Omega}|K_i|\,u^{p_i+1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde X é o vetor posição. Observe que $q+1=\dfrac{p_i+3}{2}$. Assim, temos que a identidade (2.14) no Corolário 2.4 se torna

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\Omega(u) &= \int_{\partial^+\Omega} B(u,\nabla_g u) + 2(n-1)\left(\frac{n-2}{2}-\frac{n-1}{q+1}\right)\int_{\partial_0\Omega} H_i\, u^{\frac{p_1+3}{2}} \\ &\quad + \frac{2(n-1)}{q+1}\int_{\partial(\partial_0\Omega)} H_i\, u^{\frac{p_i+3}{2}}(X\cdot\nu) - \frac{2(n-1)}{q+1}\int_{\partial_0\Omega} u^{\frac{p_i+3}{2}}(\nabla H_i\cdot X)\,.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Vamos estimar cada um destes termos utilizando o Lema 3.2 e o Lema 3.9. Observe que, pelo Lema 3.9, temos

$$u_i(x)^{p_i+1} \le C\, u_i(x_i)^{-\lambda_i\,(p_i+1)}\,|x|^{(2-n+\varepsilon_i)\,(p_i+1)}, \quad \forall\, x\in\partial^+\Omega_+\,,$$

com $\lambda_i = 1+o_i(1)$ e $\partial^+\Omega_+ = \partial^+B(0,1)_+$. Então, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\Omega_+} |K_i|\, u_i^{p_i+1} &\le C\int_{\partial^+\Omega_+} |K_i|\, u_i(x_i)^{-\lambda_i\,(p_i+1)}\,|x|^{(2-n+\varepsilon_i)\,(p_i+1)} \\ &= O\Big(u_i(x_i)^{-(p_i+1)+o_i(1)}\Big).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Analogamente, temos que

$$\int_{\partial^+\Omega_+} |S|\, u_i^2 = O\Big(u_i(x_i)^{-2+o_i(1)}\Big) \tag{3.18}$$

e

$$\int_{\partial(\partial_0\Omega_+)} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i+3}{2}+o_i(1)}\Big). \tag{3.19}$$

Para simplificar a notação, façamos $\delta_i = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \to 0$. Agora, fazendo a mudança de variáveis $x = \delta_i\, y$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_+} u_i(x+x_i)^{p_i+1}\, |X\cdot\nabla K_i(x+x_i)|\, dx\\
&= \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} u_i(\delta_i\, y+x_i)^{p_i+1}\, \delta_i^{n+1}\, |Y\cdot\nabla K_i(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{n+1} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} u_i(\delta_i\, y+x_i)^{p_i+1}\, |Y\cdot\nabla K_i(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{n+1} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} u_i(x_i)^{p_i+1}\, v_i(y)^{p_i+1}\, |Y\cdot\nabla K_i(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{n+1} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} \delta_i^{-\,n\,+\,o_i(1)}\, v_i(y)^{p_i+1}\, |Y\cdot\nabla K_i(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{1\,+\,o_i(1)} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} v_i(y)^{p_i+1}\, |Y\cdot\nabla K_i(\delta_i\, y+x_i)|\, dy
\end{aligned}
$$

onde $dx = \delta_i^n\, dy$, $Y(y) = X(\delta_i\, y)$ e $v_i(y) = u_i(x_i)^{-1}\, u_i(\delta_i\, y+x_i)$. Note que, pelo Lema 3.2, temos $\Big(u_i(x_i)^{-1}u_i(\delta_i\, y+x_i)\Big)^{p_i+1} \longrightarrow b_\beta^{p_i+1}$ em $\mathcal{C}^2_{loc}\big(B(0,\,\delta_i^{-1})_+\big)$ para algum $\beta>0$. Dado isto, juntamente com a Observação 3.6 e o comportamento assintótico de b_β descrito em (1.19), além do fato de que $K_i(\delta_i\, y+x_i) \to K(0)$ uniformemente, obtemos que:

$$
\int_{\Omega_+} u_i(x+x_i)^{p_i+1}\, |X\cdot\nabla K_i(x+x_i)|\, dx \;=\; O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{2}{n-2}\,+\,o_i(1)}\Big). \tag{3.20}
$$

Similarmente ao que foi feito nesta última estimativa, podemos encontrar o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_+} u_i(x+x_i)^2\, |X\cdot\nabla S(x+x_i)|\, dx\\
&= \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} u_i(\delta_i\, y+x_i)^2\, \delta_i^{n+1}\, |Y\cdot\nabla S(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{n+1} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} u_i(\delta_i\, y+x_i)^2\, |Y\cdot\nabla S(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{n+1} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} u_i(x_i)^2\, v_i(y)^2\, |Y\cdot\nabla S(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{n+1} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} \delta_i^{-\,n+2}\, v_i(y)^2\, |Y\cdot\nabla S(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\\
&= \delta_i^{3} \int_{B(0,\,\delta_i^{-1})_+} v_i(y)^2\, |Y\cdot\nabla S(\delta_i\, y+x_i)|\, dy\,.
\end{aligned}
$$

Assim como anteriormente, pelo Lema 3.2, temos $\Big(u_i(x_i)^{-1}u_i(\delta_i\, y+x_i)\Big)^{p_i+1} \longrightarrow b_\beta^{p_i+1}$ em $\mathcal{C}^2_{loc}\big(B(0,\,\delta_i^{-1})_+\big)$ para algum $\beta>0$. Dado isto, juntamente com a Observação

3.6 e o comportamento assintótico de b_β descrito em (1.19), além do fato de que $S(\delta_i\, y + x_i) \to S(0)$ uniformemente, obtém-se que

$$\int_{\Omega_+} u_i(x + x_i)^2\, |X \cdot \nabla S(x + x_i)|\, dx \;=\; O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{6}{n-2} + o_i(1)}\Big). \tag{3.21}$$

Utilizando uma argumentação análoga, ainda temos

$$\int_{\partial_0 \Omega_+} u_i(x + x_i)^{\frac{p_i+3}{2}}\, |X \cdot \nabla H_i(x + x_i)|\, dx \;=\; O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{2}{n-2} + o_i(1)}\Big) \tag{3.22}$$

e

$$\int_{\partial^+ \Omega_+} |S(x + x_i)|\, u_i(x + x_i)^2\, dx \;=\; O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{4}{n-2} + o_i(1)}\Big). \tag{3.23}$$

Agora, observe que a função $B(u, \nabla u)$, vista na Definição 2.3, satisfaz a propriedade $B(\alpha\, u, \alpha\, \nabla u) \;=\; \alpha^2\, B(u, \nabla u)$, para $\alpha > 0$. Assim, temos

$$B\Big(u_i(x + x_i), \nabla u_i(x + x_i)\Big) \;=\; u_i(x_i)^{-2\,\lambda_i}\, B\Big(u_i(x_i)^{\lambda_i}\, u_i(x + x_i),\; \nabla\Big(u_i(x_i)^{\lambda_i}\, u_i(x + x_i)\Big)\Big),$$

com $\alpha = u_I(x_i)^{\lambda_i}$ e $\lambda_i = \dfrac{p_i - 1}{2}\Big(n - 2 - \varepsilon_i\Big) - 1$. Pelo Lema 3.9, observe que

$$u_i(x_i)^{\lambda_i}\, u_i(x + x_i) \;=\; C\, |x|^{2 - n + \varepsilon_i} \;+\; b(x)\,,$$

Então, fazendo $h(x) = C\, |x|^{2 - n + \varepsilon_i} + b(x)$. temos

$$B\Big(u_i(x + x_i), \nabla u_i(x + x_i)\Big) \;=\; u_i(x_i)^{-2\,\lambda_i}\, B\Big(h(x),\; \nabla h(x)\Big).$$

Como $p_i \nearrow \frac{n+2}{n-2}$, então $\lambda_i \;=\; 1 + o_i(1)$. Pela Proposição 2.5 e pela teoria de regularidade elíptica, segue que

$$\int_{\partial^+ \Omega_+} B\Big(u_i(x + x_i), \nabla u_i(x + x_i)\Big) \;\le\; C(n)\; u_i(x_i)^{-2 + o_i(1)}\,,$$

ou seja,

$$\int_{\partial^+ \Omega_+} B\Big(u_i(x + x_i), \nabla u_i(x + x_i)\Big) \;=\; O\Big(u_i(x_i)^{-2 + o_i(1)}\Big). \tag{3.24}$$

Agora, definindo novamente $\delta_i \;=\; u_i(x_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} \to 0$, aplique a mudança de variáveis $x = \delta_i\, y$, e reescalone a função u_i como $v_i(y) = u_i(x_i)^{-1}\, u_i(\delta_i\, y + x_i)$. Pelo Lema 3.2, a função v_i converge para b_β em $\mathcal{C}^2_{loc}\big(B(0,\,\delta_i^{-1})_+\big)$ para algum $\beta > 0$. Assim como antes, $K_i(\delta_i\, y + x_i) \to K(0)$ e $H_i(\delta_i\, y + x_i) \to H(0)$, uniformemente. Então, tem-se

$$\int_{B(x_i,1)_+} K_i\, u_i^{p_i+1} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n_+} K(0)\, b_\beta^{p_i+1}$$

e

$$\int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \longrightarrow \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} H(0)\, b_\beta^{\frac{p_i+3}{2}}\,.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
&\tau_i\left(\int_{B(x_i,1)_+} K_i\, u_i^{p_i+1} + 2\,(n-1)\int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\right)\\
&= \tau_i\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} K(0)\, b_\beta^{p_i+1} + 2\,(n-1)\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} H(0)\, b_\beta^{\frac{p_i+3}{2}} + o_i(1)\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Precisamos verificar se o coeficiente de τ_i é positivo. Com esse objetivo em mente, relembremos que a função b_β é solução do problema

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta b_\beta = K(0)\, b_\beta^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } \mathbb{R}^n_+ \\ \frac{2}{n-2}\frac{\partial b_\beta}{\partial \eta} = H(0)\, b_\beta^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}. \tag{3.26}$$

Multiplicando por b_β as equações deste problema (3.26) e integrando o resultado disso, encontramos:

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_+} b_\beta\, \Delta b_\beta = \int_{\mathbb{R}^n_+} K(0)\, b_\beta^{\frac{n+2}{n-2}+1} \\ \dfrac{2}{n-2}\displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} b_\beta\, \dfrac{\partial b_\beta}{\partial\eta} = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} H(0)\, b_\beta^{\frac{n}{n-2}+1} \end{cases}.$$

Agora, observe que, pelo Corolário 1.9, tem-se

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n_+} b_\beta\, \Delta b_\beta &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} b_\beta\, \operatorname{div}(\nabla b_\beta)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla b_\beta \cdot \nabla b_\beta - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} b_\beta\, \nabla b_\beta \cdot \eta\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla b_\beta|^2 - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} b_\beta\, \frac{\partial b_\beta}{\partial\eta}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla b_\beta|^2 - \frac{n-2}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} H(0)\, b_\beta^{\frac{p_i+3}{2}}\,.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Mas, como

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} b_\beta\,\Delta b_\beta = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_{\mathbb{R}^n_+} K(0)\,b_\beta^{p_i+1},$$

segue, da identidade (3.27), que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} K(0)\,b_\beta^{p_i+1} + 2\,(n-1)\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} H(0)\,b_\beta^{\frac{p_i+3}{2}} = \frac{4(n-1)}{n-2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla b_\beta|^2 > 0\,. \tag{3.28}$$

A combinação de (3.25), (3.28), e as estimativas que fizemos em (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) e (3.24) dos termos nas identidades (3.15) e (3.16), nos fornece que

$$\tau_i\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla b_\beta|^2 + o_i(1)\right) = O\Big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}+o_i(1)}\Big)\,. \tag{3.29}$$

Portanto, por (3.29), concluímos a demonstração, já que $\frac{p_i-1}{2}\to\frac{2}{n-2}$.

□

Lema 3.11. *Considerando as mesmas hipóteses da Observação 3.8, obtemos que:*

$$u_i(x_i)\int_{\partial^+B(x_i,1)_+}\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\;\longrightarrow\; C<0,$$

para uma constante negativa $C = C(n,\beta)$.

Demonstração. Note que, integrando as equações do problema (3.1) sobre $B(x_i,1)_+$ e $\partial_0 B(x_i,1)_+$, respectivamente, temos

$$\begin{cases} -\dfrac{4\,(n-1)}{n-2}\displaystyle\int_{B(x_i,1)_+}\Delta_g u_i = -\int_{B(x_i,1)_+} S\,u_i + \int_{B(x_i,1)_+} K_i\,u_i^{p_i} \\ \dfrac{2}{n-2}\displaystyle\int_{\partial_0 B(x_i,1)_+}\frac{\partial u_i}{\partial\eta} = \int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} H_i\,u_i^{\frac{p_i+1}{2}} \end{cases}. \tag{3.30}$$

Pelo Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned} -\int_{B(x_i,1)_+}\Delta_g u_i &= -\int_{B(x_i,1)_+}\operatorname{div}\nabla u_i \\ &= -\int_{\partial^+B(x_i,1)_+}\frac{\partial u_i}{\partial\eta} - \int_{\partial_0 B(x_i,1)_+}\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\,. \end{aligned}$$

Assim, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+ B(x_i,1)_+} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} &= \int_{B(x_i,1)_+} \Delta_g u_i - \int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \\
&= \frac{n-2}{4\,(n-1)} \int_{B(x_i,1)_+} S\, u_i - \frac{n-2}{4\,(n-1)} \int_{B(x_i,1)_+} K_i\, u_i^{p_i} \\
&\quad - \int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \\
&= \frac{n-2}{4\,(n-1)} \int_{B(x_i,1)_+} S\, u_i + \frac{n-2}{4\,(n-1)} \int_{B(x_i,1)_+} |K_i|\, u_i^{p_i} \\
&\quad - \frac{n-2}{2} \int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}} \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Multiplicando (3.31) por $u_i(x_i)$, obtemos

$$\begin{aligned}
u_i(x_i) \int_{\partial^+ B(x_i,1)_+} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} &= \frac{n-2}{4\,(n-1)} u_i(x_i) \int_{B(x_i,1)_+} S\, u_i \\
+ u_i(x_i) \left(\frac{n-2}{4\,(n-1)} \int_{B(x_i,1)_+} |K_i|\, u_i^{p_i} \right. &\left. - \frac{n-2}{2} \int_{\partial_0 B(x_i,1)_+} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}} \right). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Agora, podemos utilizar o Lema 3.9 para limitar cada uma das integrais no lado direito de (3.32) para $r_i \le |y - x_i| \le 1$, veja [10]. Desta forma, como $(2 - n + \varepsilon_i)\, p_i < 0$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_i,1)_+ \setminus B(x_i,r_i)_+} u_i(y)^{p_i} &\le C \int_{B(x_i,1)_+ \setminus B(x_i,r_i)_+} u_i(x_i)^{-\lambda_i\, p_i}\, |y|^{(2-n+\varepsilon_i)\, p_i}\, dy \\
&= C\, u_i(x_i)^{-\lambda_i\, p_i} \int_{r_i}^{1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}_+} r^{(2-n+\varepsilon_i)\, p_i + n - 1}\, d\theta\, dr \\
&\le C\, u_i(x_i)^{-\lambda_i\, p_i} \left(r^{(2-n+\varepsilon_i)\, p_i + n} \right) \Big|_{r_i}^{1} \\
&\le C\, u_i(x_i)^{-\lambda_i\, p_i} \left(1 - r_i^{(2-n+\varepsilon_i)\, p_i + n}\right) \\
&= C\, u_i(x_i)^{-\lambda_i\, p_i} \left(1 - u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}\left((2-n+\varepsilon_i)\, p_i + n\right)}\, \overline{R}_i^{(2-n+\varepsilon_i)\, p_i + n}\right) \\
&= C\, u_i(x_i)^{-\frac{n+2}{n-2} + o_i(1)} \left(1 - u_i(x_i)^{\frac{4}{n-2} + o_i(1)}\, \overline{R}_i^{-2+o_i(1)}\right) \\
&= C\, u_i(x_i)^{-1+o_i(1)} \overline{R}_i^{-2+o_i(1)} \left(u_i(x_i)^{o_i(1)} - 1\right) \\
&= C\, u_i(x_i)^{-1+o_i(1)}\, \overline{R}_i^{-2+o_i(1)} \\
&= u_i(x_i)^{-1+o_i(1)}\, o_i(1)
\end{aligned}$$

Na terceira linha debaixo para cima, foi utilizado o Lema 3.10. Analogamente, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{B(x_i,1)_+\setminus B(x_i,r_i)_+} u_i(y) &\leq C\int_{B(x_i,1)_+\setminus B(x_i,r_i)_+} u_i(x_i)^{-\lambda_i}\,|y-x_i|^{2-n+\varepsilon_i}\,dy \\ &\leq C\,u_i(x_i)^{-1+o_i(1)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\partial_0 B(x_i,1)_+\setminus\partial_0 B(x_i,r_i)_+} u_i(y)^{\frac{p_i+1}{2}} &\leq C\int_{\partial_0 B(x_i,1)_+\setminus\partial_0 B(x_i,r_i)_+} u_i(x_i)^{-\lambda_i\,\frac{p_i+1}{2}}\,|y-x_i|^{(2-n+\varepsilon_i)\,\frac{p_i+1}{2}}\,dy \\ &= u_i(x_i)^{-1+o_i(1)}\,o_i(1)\,.\end{aligned}$$

Com isso, vemos que (3.32) se torna

$$\begin{aligned}u_i(x_i)\int_{\partial^+B(x_i,1)_+}\frac{\partial u_i}{\partial\eta} &= \frac{n-2}{4\,(n-1)}u_i(x_i)\int_{B(x_i,r_i)_+} S\,u_i \\ &+ u_i(x_i)\left(\frac{n-2}{4\,(n-1)}\int_{B(x_i,r_i)_+}|K_i|\,u_i^{p_i} - \frac{n-2}{2}\int_{\partial_0 B(x_i,r_i)_+} H_i\,u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\right) \\ &+ u_i(x_i)^{-1+o_i(1)}\,(o_i(1)+C)\,.\end{aligned}$$

Note que do Lema 3.2 temos que

$$v_i(y) = u_i(x_i)^{-1}u_i(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}y + x_i) = (r_i\overline{R}_i^{-1})^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(r_i\overline{R}_i^{-1}y + x_i) = b_\beta(y) + o_i(1)$$

Como b_β é solução do problema (3.26), e ainda pelo comportamento assintótico de b_β dado por (1.19), encontra-se:

$$\begin{aligned}u_i(x_i)\int_{\partial^+B(x_i,1)_+}\frac{\partial u_i}{\partial\eta} &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\partial^+B(0,R)_+}\frac{\partial b_\beta}{\partial\eta} + o_i(1) \\ &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\partial^+B(0,R)_+}\frac{n-2}{2}\,H(0)\,b_\beta^{\frac{n}{n-2}} + o_i(1) \\ &\leq \lim_{R\to+\infty}\int_{\partial^+B(0,R)_+}\frac{n-2}{2}\,H(0)\,C(n,\beta)\,|x|^{-n} + o_i(1) \\ &= -\,\widetilde{C}(n,\beta)\,\omega_{n-1}\frac{n-2}{2} + o_i(1) \\ &< 0\,,\end{aligned}$$

com $\widetilde{C}(n,\beta) > 0$. Portanto, concluímos a demonstração.

$\square$

Finalmente, agora que já temos os lemas auxiliares, podemos então provar o principal resultado desta subseção. Agora, em seu enunciado, relembraremos as hipóteses da Observação 3.8 vista anteriormente como referência para os lemas auxiliares.

Proposição 3.12. *Considere a bola $B(0,2)$ e que $K_i \to K < 0$ em $\mathcal{C}^1(\overline{B(0,2)_+})$ e que $H_i \to H$ em $\mathcal{C}^2(\overline{\partial_0 B(0,2)})$. Suponha que, para todo $i \in \mathbb{N}$, a função u_i é uma solução positiva do problema (3.1) e que $x_i \to 0$ com 0 sendo um ponto de blow-up isolado simples tal que*

$$u_i(y) \leq C_1 |y - x_i|^{\frac{2}{p_i - 1}}, \quad \textit{para todo } x \in B(0,2)_+. \tag{3.33}$$

Então, existe uma constante $C = C(K, S, H, n, C_1) > 0$ tal que

$$u_i(x_i) u_i(y) \leq C |y - x_i|^{2-n}, \quad \textit{para todo } x \in B(x_i, 1)_+. \tag{3.34}$$

Demonstração. Inicialmente, suponha que $0 \leq |y - x_i| \leq r_i$. Agora, se fizermos $y = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x + x_i$, temos

$$|y - x_i| \leq r_i = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \overline{R}_i \ ,$$

com $\overline{R}_i$ e r_i definidos como no Lema 3.2. Além disso, pelo comportante assintótico de b_β, dado em (1.19), tem-se que $b_\beta(y) \leq C(n,\beta) |y|^{2-n}$. Pelo Lema 3.2, temos que

$$u_i(x_i)^{-1} u_i\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x + x_i\big) = b_\beta(x) + o_i(1),$$

para todo $x \in B(0, 2\overline{R}_i)_+$. Isto implica que

$$\begin{aligned}
u_i(x_i)\, u_i(y) &= u_i(x_i) b_\beta\big(u_i(x_i)^{\frac{p_i-1}{2}} (y - x_i)\big) + o_i(1) \\
&\leq C(n,\beta)\, u_i(x_i) |u_i(x_i)^{\frac{p_i-1}{2}} (y - x_i)|^{2-n} \\
&= C(n,\beta)\, u_i(x_i)^{\frac{p_i-1}{2}(2-n)+1} |y - x_i|^{2-n} \\
&= C |y - x_i|^{2-n},
\end{aligned}$$

já que $\frac{p_i-1}{2}(2-n) + 1 \to 0$ com a ordem do Lema 3.10. Agora, analisaremos quando $r_i \leq |y - x_i| \leq 1$. Suponha, por contradição, que exista $\widetilde{y}_i$ com $r_i \leq |\widetilde{y}_i - x_i| \leq 1$, tal que

$$\lim_{i \to +\infty} u_i(\widetilde{y}_i)\, u_i(x_i)\, |\widetilde{y}_i - x_i|^{n-2} = +\infty\,. \tag{3.35}$$

Defina $\widetilde{r}_i = |\widetilde{y}_i - x_i|$ e a função $\widetilde{u}_i$ como

$$\widetilde{u}_i(y) = \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\,. \tag{3.36}$$

Como a função u_i é solução do problema (3.1), podemos fazer o seguinte: aplique as funções u_i, S, K_i e H_i no ponto $\widetilde{r}_i y + x_i$ e, se multiplicarmos a primeira equação do problema (3.1) por $\widetilde{r}_i^{\frac{2p_i}{p_i-1}}$ segue que

$$\begin{aligned} &-\frac{4(n-1)}{n-2}\widetilde{r}_i^{\frac{2p_i}{p_i-1}}\Delta u_i(\widetilde{r}_i y + x_i) + \widetilde{r}_i^{\frac{2p_i}{p_i-1}} S(\widetilde{r}_i y + x_i)\, u_i(\widetilde{r}_i y + x_i) \\ &= \widetilde{r}_i^{\frac{2p_i}{p_i-1}} K_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\, u_i(\widetilde{r}_i y + x_i)^{p_i}\,, \end{aligned} \tag{3.37}$$

em $(B_{\widetilde{r}_i^{-1}})_+$. E, se multiplicarmos a segunda equação do problema (3.1) por $\widetilde{r}_i^{\frac{p_i+1}{p_i-1}}$, encontramos que

$$\frac{2}{n-2}\widetilde{r}_i^{\frac{p_i+1}{p_i-1}}\frac{\partial u_i}{\partial \eta}(\widetilde{r}_i y + x_i) = \widetilde{r}_i^{\frac{p_i+1}{p_i-1}} H_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\, u_i(\widetilde{r}_i y + x_i)^{\frac{p_i+1}{2}} \tag{3.38}$$

em $\partial_0(B_{\widetilde{r}_i^{-1}})_+$. Notemos que, de (3.37), tem-se

$$\begin{aligned} &-\frac{4(n-1)}{n-2}\widetilde{r}_i^{\frac{2p_i}{p_i-1}}\Delta u_i(\widetilde{r}_i y + x_i) + \widetilde{r}_i^{2} S(\widetilde{r}_i y + x_i)\, \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\widetilde{r}_i y + x_i) \\ &= K_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\, (\widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}})^{p_i}\, u_i(\widetilde{r}_i y + x_i)^{p_i}\,, \end{aligned} \tag{3.39}$$

e, de (3.38), temos que

$$\frac{2}{n-2}\widetilde{r}_i^{\frac{p_i+1}{p_i-1}}\frac{\partial u_i}{\partial \eta}(\widetilde{r}_i y + x_i) = H_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\, (\widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}})^{\frac{p_i+1}{2}} u_i(\widetilde{r}_i y + x_i)^{\frac{p_i+1}{2}}\,. \tag{3.40}$$

Logo, por (3.39) e (3.40), vemos que a função $\widetilde{u}_i$, definida em (3.36), é solução para o problema

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\widetilde{u}_i(x) + \widetilde{r}_i^{2} S(\widetilde{r}_i y + x_i)\,\widetilde{u}_i(y) = K_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\,\widetilde{u}_i(y)^{p_i} & \text{em } (B_{\widetilde{r}_i^{-1}})_+ \\ \dfrac{2}{n-2}\dfrac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \eta}(y) = H_i(\widetilde{r}_i y + x_i)\,\widetilde{u}_i(y)^{\frac{p_i+1}{2}} & \text{em } \partial_0(B_{\widetilde{r}_i^{-1}})_+ \end{cases}.$$

Agora, afirmamos que 0 é um ponto de blow-up isolado simples para a função $\widetilde{u}_i$. De fato, inicialmente observe que

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_i(0) &= \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(x_i) \\ &\geq r_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(x_i) \\ &= \overline{R}_i^{\frac{2}{p_i-1}} \longrightarrow +\infty\,. \end{aligned}$$

Além disso, reescalonando a função u_i em (3.33) como $\widetilde{u}_i$, obtém-se que

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_i(y) &= \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(\widetilde{r}_i\, y + x_i) \\ &\leq \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, C_1 \left|(\widetilde{r}_i\, y + x_i) - x_i\right|^{-\frac{2}{p_i-1}} \\ &= \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, C_1 \left|\widetilde{r}_i\, y\right|^{-\frac{2}{p_i-1}} \\ &= C_2\, |y|^{-\frac{2}{p_i-1}} \end{aligned}$$

para todo $y \in B(0, 2\,\widetilde{r}_i^{-1})$. Por fim, temos que a *média radial ponderada*, vista na Definição 3.5, da função $\widetilde{u}_i$ satisfaz a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{u}}_i(r) &= r^{\frac{2}{p_i-1}}\, \overline{\widetilde{u}}_i(r) \\ &= r^{\frac{2}{p_i-1}} \fint_{\partial^+ B(0,r)_+} \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(\widetilde{r}_i\, y + x_i)\, dy \\ &= r^{\frac{2}{p_i-1}}\, \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int_{\partial^+ B(0,r)_+} \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(\widetilde{r}_i\, y + x_i)\, dy \\ &= (r\,\widetilde{r}_i)^{\frac{2}{p_i-1}}\, \frac{1}{\omega_{n-1}\, (r\,\widetilde{r}_i)^{n-1}} \int_{\partial^+ B(0,r\,\widetilde{r}_i)_+} u_i(y)\, dy \\ &= (r\,\widetilde{r}_i)^{\frac{2}{p_i-1}} \fint_{\partial^+ B(0,r\,\widetilde{r}_i)_+} u(y)\, dy \\ &= \widehat{u}_i(r\,\widetilde{r}_i)\,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Então, de (3.41), seque que $\widehat{\widetilde{u}}_i$ possui apenas um único ponto crítico no intervalo $(0, \widetilde{r}_i^{-1})$. Isto conclui que, de fato, 0 é um ponto de blow-up isolado simples para a função $\widetilde{r}_i$. Desta forma, podemos ver que $\widetilde{r}_i$ satisfaz todas as hipóteses do enunciado desta proposição e, mais ainda, $\widetilde{u}_i$ satisfaz (3.34) para todo y na esfera unitária.

Estes fatos nos fornecem que, para todo i, tem-se

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}_i(0)\,\widetilde{u}_i\left(\frac{\widetilde{y}_i - x_i}{\widetilde{r}_i}\right) &= \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(x_i)\, \widetilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i\left(\widetilde{r}_i\, \frac{\widetilde{y}_i - x_i}{\widetilde{r}_i} + x_i\right) \\
&= \widetilde{r}_i^{\frac{4}{p_i-1}} u_i(x_i)\, u_i(\widetilde{y}_i) \\
&\leq C\,.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, como $\widetilde{r}_i = |\widetilde{y}_i - x_i|$, então

$$u_i(\widetilde{y}_i)\, u_i(x_i)\, |\widetilde{y}_i - x_i|^{n-2} \leq C\, \widetilde{r}_i^{\,-\frac{4}{p_i-1}+n-2} = C\, \widetilde{r}_i^{\,o_i(1)}\,.$$

Mas isto é uma contradição com (3.35). Portanto, por contradição, mostramos que a função u_i satisfaz a desigualdade (3.34), e isto conclui a demonstração.

$\square$

Observação 3.13. *Note que a desigualdade* (3.34) *implica que* $u_i(x) \to 0$ *uniformemente em qualquer conjunto compacto* $X \subset B(0,2)\backslash\{0\}$.

3.1.2.2 O conjunto $\mathcal{P}_1$ em dimensão 3

Agora, nosso próximo objetivo é provar que se $n = 3$ então o conjunto $\mathcal{P}_1$ consiste apenas de pontos de blow-up *isolados simples*. Para isso, vejamos alguns resultados auxiliares antes. A proposição seguinte pode ser encontrada em [15].

Proposição 3.14. *Seja* (u_i) *uma sequência de soluções do problema (3.1) com o conjunto singular* $\mathcal{P} \neq \varnothing$. *Dado* $\overline{R} > 0$ *grande e um* $\varepsilon > 0$ *pequeno, então, para* i *suficientemente grande, existe uma constante* $C = C(\overline{R}, \varepsilon) > 0$ *e um conjunto finito de pontos* $\{q_1^i, \ldots, q_{m_i}^i\}$ *com* $m_i \geq 1$, *tal que cada* (q_k^i) *é um máximo local para* u_i *e satisfaz:*

(1) $\left\{B\left(q_k^i, r_k^i\right)_+ : k = 1, \ldots, m_i\right\}$ *é uma coleção disjunta para* $r_k^i = \overline{R}\, u_i(q_k^i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$

(2) Se $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *são coordenadas geodésicas centradas em* q_k^i, *então temos, para algum* $\beta_k > 0$, *que*

$$\left\| u_i(q_k^i)^{-1} u_i\Big(u_i(q_k^i)^{-\frac{p_i-1}{2}} y\Big) - b_{\beta_k}(y) \right\|_{\mathcal{C}^2(B_{\overline{R}})} < \varepsilon\,, \tag{3.42}$$

onde a função b_{β_k} é uma solução do problema (1.16) em $\mathbb{R}^n_+$, dada por (1.18).

(3) Temos que

$$u_i(x) \leq \frac{C}{d\left(x, \{q_1^i, \ldots, q_N^i\}\right)^{\frac{2}{p_i-1}}} \quad \textit{para todo } x \in M. \tag{3.43}$$

Além disso, segue que $u_i(q_k^i)\, d(q_k^i, q_j^i) \geq C^{-1}$ *para todo* $k \neq j$.

Destaquemos o que este item (3) significa localmente: se $y = (y_1, \ldots, y_n)$ é um *sistema de coordenadas normais* centrado em q_k^i, então obtemos

$$u_i(y) \leq \frac{C}{d(y, q_k^i)^{\frac{2}{p_i-1}}} \quad \text{para } y \in B(q_k^i, r_k^i)_+. \tag{3.44}$$

Observação 3.15. *A diferença crucial entre as desigualdades (3.5) e (3.44) é que, nesta última desigualdade, o raio depende de i e pode tender a zero.*

Proposição 3.16. *Seja $n = 3$. Se $q \in \mathcal{P}_1$ é um ponto de blow-up isolado, então q é ponto de blow-up isolado simples.*

Demonstração. Para demonstrarmos este resultado, faremos uma argumentação por contradição. Suponha que $q \in \mathcal{P}_1$ é um ponto de blow-up isolado, mas não é blow-up isolado simples. Daí, existe uma sequência (q_i) de máximos locais de u_i tal que $q_i \to q$. Então, pela Definição 3.5, existem pelo menos 2 pontos críticos de $\widehat{u}_i$, definida como em (3.6), no intervalo $(0, \bar{t}_i)$, para alguma sequência $\bar{t}_i \to 0$.

Observemos que, pelo Lema 3.2, a sequência u_i, após um reescalonamento como o que foi feito neste lema citado, converge para uma bolha b_β, veja (1.18). Pela Observação 3.6, a função $\hat{u}_i$, vista na Definição 3.5, possui no máximo um ponto crítico no intervalo $\left(0, \overline{R}_i u_i(q_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\right)$. Desta forma, o segundo ponto crítico, que o denominaremos por t_i, deve satisfazer

$$\frac{\overline{R}_i}{u_i(q_i)^{\frac{p_i-1}{2}}} \leq t_i \leq \bar{t}_i\,. \tag{3.45}$$

Agora, seja $y = (y_1, \ldots, y_n)$ coordenadas normais centradas em q_i, e defina a função w_i como

$$w_i(y) = t_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(t_i y), \quad \text{para todo } y \in B(0, t_i^{-1})_+.$$

Mostraremos que a *origem* é um ponto de blow-up isolado simples para a sequência (w_i).

Como q é um ponto de blow-up isolado para u_i, a desigualdade (3.5) é válida para uma bola de raio fixado $\rho > 0$. Pela definição de w_i, segue que

$$w_i(y) \le C\,|y|^{-\frac{2}{p_i-1}} \quad \text{para todo} \;\; y \in B(0, \rho\, t_i^{-1})_+\,.$$

Além disso, a desigualdade (3.45) implica que

$$w_i(0) \;=\; t_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(0) \;\ge\; \overline{R}_i^{\frac{2}{p_i-1}} \;\longrightarrow\; +\infty\,,$$

o que significa que 0 é um ponto de blow-up isolado para a sequência (w_i). Agora, provaremos que a média radial ponderada $\hat{w}_i$ possui um único ponto crítico no intervalo (0 1). Notemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{w}_i(r) &= r^{\frac{2}{p_i-1}}\overline{w}_i(r) \\
&= r^{\frac{2}{p_i-1}} \fint_{\partial^+ B(0,r)_+} t_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(t_i\, y)\, dy \\
&= r^{\frac{2}{p_i-1}} \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int_{\partial^+ B(0,r)_+} t_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(t_i\, y)\, dy \\
&= (r\, t_i)^{\frac{2}{p_i-1}} \frac{1}{\omega_{n-1}(r\, t_i)^{n-1}} \int_{\partial^+ B(0,\, r\, t_i)_+} u_i(x)\, dx \\
&= (r\, t_i)^{\frac{2}{p_i-1}} \fint_{\partial^+ B(0,\, r\, t_i)_+} u(x)\, dx \\
&= \widehat{u}_i(r\, t_i)\,,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde, na quarta igualdade acima, fizemos a mudança de variável $x = t_i\, y$, o que implica que $dy = t_i^{1-n}\, dx$. Por hipótese, a função $\widehat{u}_i$ possui um único ponto crítico no intervalo $(0, t_i)$. Então, por (3.46), segue que $\widehat{w}_i$ possui um único ponto crítico no intervalo $(0, 1)$. Assim, 0 é um ponto de blow-up isolado simples da sequência (w_i).

Note que isso também implica, via aplicação da regra da cadeia, que

$$\frac{d}{dr}\bigg|_{r=1} \hat{w}_i(r) = t_i\, \hat{u}_i'(t_i) = 0. \tag{3.47}$$

Afirmação: $w_i(0)\, w_i(y) \longrightarrow h(y) = a\,|y|^{2-n} + a$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$, com $a > 0$.

De fato, como a função u_i é solução de (3.1), segue de (1.12) e (1.14) que, $w_i(0)\, w_i$ satisfaz as equações

$$-\frac{4\,(n-1)}{n-2}\Big(\overline{g}^{\,kj}\,\partial_k\,\partial_j\big(w_i(0)\,w_i\big) + F(t_i\cdot)\,t_i\,\partial_j\big(w_i(0)\,w_i\big)\Big) + S(t_i\,\cdot)\,t_i^2\,w_i(0)\,w_i$$

$$= w_i(0)^{1-p_i}\,K(t_i\cdot)\,\big(w_i(0)\,w_i\big)^{p_i}, \tag{3.48}$$

em $B(0,\rho t_i^{-1})_+$, e

$$\frac{2}{n-2}\,\frac{\partial\big(w_i(0)\,w_i\big)}{\partial\eta} = w_i(0)^{1-\frac{p_i+1}{2}}\,H(t_i\cdot)\,\big(w_i(0)\,w_i\big)^{\frac{p_i+1}{2}} \tag{3.49}$$

em $\partial_0 B(0,\rho t_i^{-1})_+$. Aqui $\overline{g}(x) = g(t_i x)$ e $F = \frac{\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij})}{\sqrt{|g|}}$. Agora, por (3.34), note que

$$\begin{aligned} w_i(0)\,w_i(y) &= t_i^{\frac{4}{p_i-1}}\,u_i(q_i)\,u_i(t_i y) \\ &\leq C\,t_i^{\frac{4}{p_i-1}}\,|t_i\,y|^{2-n} \\ &= C\,t_i^{\frac{4}{p_i-1}+2-n}\,|y|^{2-n} \\ &\leq C\,|y|^{2-n}, \end{aligned}$$

já que $\frac{4}{p_i-1} + 2 - n \to 0$. Desta forma, segue que $w_i(0)\,w_i$ é uniformemente limitado em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$. Então, da teoria elíptica, existe uma função h tal que

$$w_i(0)\,w_i \longrightarrow h \quad \text{em} \quad \mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\})\,.$$

Assim, quando i tende a $+\infty$, observe que a métrica $\overline{g}$ tende a métrica euclidiana δ. Além disso, o terceiro termo no lado esquerdo em (3.48) tende a zero, assim como o lado direito também tende a zero. Da mesma forma, o lado direito em (3.49) tende a zero. Esses fatos nos fornece que

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_n} = 0 & \text{em } \partial \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\} \end{cases}$$

Consideremos a função $h^* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definida pela *simetrização* de h como sendo

$$h^*(y) = \begin{cases} h(y_1, \ldots, y_n) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\} \\ h(y_1, \ldots, y_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n_- \backslash \{0\} \end{cases}$$

Note que h^* é harmônica, ou seja, $\Delta h^*(y) = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, pois $\frac{\partial h}{\partial x_n} = 0$ em $\partial \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$. Veja que, para $0 < r < \rho$, tem-se

$$\lim_{i \to +\infty} w_i(0)\, \widehat{w}_i(r) = \widehat{h}(r)\,.$$

Então, pela Definição 3.5 e pelo Lema 3.2, segue que $\widehat{h}$ é não crescente no intervalo $0 < r < \rho$, o que implica que h é singular na origem. Por sua vez, temos que

$$h(y) = a\,|y|^{2-n} + b(y) > 0\,.$$

para algum $a > 0$ e uma função harmônica b em $\mathbb{R}^n_+$ com $\frac{\partial b}{\partial x_n} = 0$ em $\partial \mathbb{R}^n_+$. Como $h(y) > 0$, temos que $b(y) > -a|y|^{2-n}$, o que implica que b é limitado inferiormente. Então, a extensão de b a todo $\mathbb{R}\hat{}n$, de forma análoga à extensão h^*, é uma função harmônica limitada inferiormente. Pelo Princípio do Máximo (Teorema 13) segue que b é constante. Note que $\widehat{h}(r) = r^{\frac{n-2}{2}}\, \overline{h}(r) = a\, r^{-\frac{n-2}{2}} + br^{\frac{n-2}{2}}$. Dado isto, e por (3.47), segue que

$$0 = \frac{d}{dr}\bigg|_{r=1} \widehat{h}(r) = \frac{d}{dr}\bigg|_{r=1} \left(a\, r^{-\frac{n-2}{2}} + b\, r^{\frac{n-2}{2}}\right) = \frac{n-2}{2}\,(b - a)\,.$$

Desta forma, $h(y) = a\,|y|^{2-n} + a$. Isto conclui a afirmação.

Portanto, $w_i(0) w_i(y) = a|y|^{2-n} + a + o_i(1)$. A Proposição 2.5 nos fornece que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial^+(B_r)_+} B(w_i, \nabla w_i) = -(n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}\, \frac{a^2}{w_i(0)^2}\,. \tag{3.50}$$

Faça $\delta_i = u_i(0)^{-\frac{p_i-1}{2}}$, e relembre que $v_i(y) = \delta_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\delta_i y)$ satisfaz $v_i(y) \to b_\beta(y)$ no sentido $\mathcal{C}^2$ nas bolas de raio $\overline{R}_i$. Dado isto, podemos definir $\lambda_i := t_i\delta_i^{-1} \geq \overline{R}_i$, veja (3.45), e escrever

$$w_i(y) = \lambda_i^{\frac{2}{p_i-1}} \delta_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\lambda_i \delta_i y)\,.$$

Assim, $w_i(0) = \lambda_i^{\frac{2}{p_i-1}}$ e a expressão (3.50) torna-se

$$\lim_{r\to 0} \int_{\partial^+(B_r)_+} B(w_i, \nabla w_i) = -(n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}\, \frac{a^2}{\lambda_i^{\frac{4}{p_i-1}}}\,. \tag{3.51}$$

Note que $\dfrac{4}{p_i-1} \longrightarrow n-2$. Agora, aplicaremos o Corolário 2.4 fazendo $u(y) = w_i(y)$, $f(y) = K_i(t_i y)$, $\psi(y) = t_i^2 S(t_i y)$ e $h(y) = H_i(t_i y)$. Com estas condições, a equação (2.13) no Corolário 2.4 se torna

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\Omega(u) \;=\;& \frac{1}{p+1}\int_\Omega w_i^{p_i+1} X\cdot\nabla K_i + \left(\frac{n}{p+1} - \frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega K_i\, w_i^{p_i+1}\\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega w_i^2\, X\cdot\nabla\big(t_i^2\, S\big) - \int_\Omega t_i^2 S\, w_i^2 + \frac{r}{2}\int_{\partial^+\Omega} t_i^2 S\, w_i^2 - \frac{r}{p+1}\int_{\partial^+\Omega} K_i\, w_i^{p_i+1},\end{aligned} \tag{3.52}$$

onde X é o vetor posição. Desta forma, a identidade (2.14) no Corolário 2.4 resulta em

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\Omega(u) \;=\;& \int_{\partial^+\Omega} B(w_i, \nabla_g w_i) + 2\,(n-1)\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n-1}{q_i+1}\right)\int_{\partial_0\Omega} H_i\, w_i^{\frac{p_1+3}{2}}\\ &+\frac{2\,(n-1)}{q_i+1}\int_{\partial(\partial_0\Omega)} H_i\, w_i^{\frac{p_i+3}{2}}(X\cdot\nu) - \frac{2\,(n-1)}{q_i+1}\int_{\partial_0\Omega} w_i^{\frac{p_i+3}{2}}(\nabla H_i\cdot X)\,,\end{aligned} \tag{3.53}$$

com $q_i + 1 = \dfrac{p_i+3}{2}$. Vamos estimar todos os termos envolvidos em (3.52) e (3.53) utilizando o comportamento assintótico de b_β descrito em (1.19), o Lema 3.10 e a mudança de variáveis que foi feita:

$$\begin{aligned}
\int_{(B_r)_+} w_i(y)^{p_i+1}\,|X\cdot\nabla K_i(t_i\,y)|\,dy &= O(\lambda^{-1+O(\tau_i)})\,o_i(1)\,,\\
\int_{(B_r)_+} t_i^2\,w_i(y)^2\,|X\cdot\nabla S(t_i\,y)|\,dy &= O(\lambda^{-3+O(\tau_i)})\,o_i(1)\,,\\
\tau_i\int_{(B_r)_+} K_i(t_i\,y)\,w_i(y)^{p_i+1}\,dy &= O(\lambda^{-1+O(\tau_i)})\,o_i(1)\,,\\
\int_{(B_r)_+} t_i^2\,S(t_i\,y)\,w_i(y)^2\,dy &= O(\lambda^{-2+O(\tau_i)})\,o_i(1)\,.
\end{aligned}$$

Note que $u_i(0)=\delta_i^{-\frac{2}{p_i-1}}=\delta_i^{-\frac{n-2}{2}+o_i(1)}$ e $\delta_i=t_i\lambda_i^{-1}$. Pelo Lema 3.10, segue que

$$\tau_i\;=\;O\big(u_i(0)^{-\frac{2}{n-2}+o_i(1)}\big)\;=\;O\big(\delta_i^{\,1+o_i(1)}\big)\;=\;O\big(\lambda_i^{-1+o_i(1)}t_i^{1+o_i(1)}\big)\,. \tag{3.54}$$

Analogamente, temos as estimativas seguintes:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+(B_r)_+} t_i^2\,S(t_i\,y)\,w_i(y)^2\,dy &= O\big(\lambda_i^{-2+O(\tau_i)}\big)\,o_i(1)\,,\\
\int_{\partial^+(B_r)_+} K_i(t_i\,y)\,w_i(y)^{p_i+1}\,dy &= O\big(\lambda_i^{-3+O(\tau_i)}\big)\,,\\
\tau_i\int_{\partial_0(B_r)_+} H_i(t_i\,y)\,w_i(y)^{\frac{p_i+3}{2}}\,dy &= O\big(\lambda_i^{-n+O(\tau_i)}\big)\,o_i(1)\,,\\
\int_{\partial(\partial_0(B_r)_+)} H_i(t_i\,y)\,w_i(y)^{\frac{p_i+3}{2}}\,|X\cdot\nu|\,dy &= O\big(\lambda_i^{-n+O(\tau_i)}\big)\,,\\
\int_{\partial_0(B_r)_+} w_i(y)^{\frac{p_i+3}{2}}\,|\nabla H_i(t_i\,y)\cdot X|\,dy &= O\big(\lambda_i^{1-n+O(\tau_i)}\big)\,o_i(1)\,.
\end{aligned}$$

Então, tomando $r>0$ pequeno o suficiente, do Corolário 2.4, da igualdade (3.51) e das estimativas anteriores, segue que

$$O\big(\lambda_i^{-1+O(\tau_i)}\big)\,o_i(1)\;+\;O\big(\lambda_i^{-2+O(\tau_i)}\big)\;=\;-\,(n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}\,a^2\,\lambda_i^{2-n+O(\tau_i)}\,,$$

ou ainda

$$O\big(\lambda_i^{n-3+O(\tau_i)}\big)\,o_i(1)\;+\;O\big(\lambda_i^{n-4+O(\tau_i)}\big)\;=\;-\,(n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}\,a^2 \tag{3.55}$$

Do Lema 3.10 e de (3.54), obtém-se que

$$\lambda_i^{\tau_i}=t_i^{\tau_i}(u_i(0)^{\tau_i})^{\frac{p_i-1}{2}}=t_i^{\tau_i}(1+o_i(1))^{\frac{p_1-1}{2}}.$$

Como t_i e τ_i convergem para zero, segue que $\lambda_i^{O(\tau_i)}$ é limitado. Portanto, de (3.55) obtemos que

$$O\big(\lambda_i^{n-3}\big)\, o_i(1) \;+\; O\big(\lambda_i^{n-4}\big) \;=\; -\,(n-1)(n-2)\,\omega_{n-1}\, a^2.$$

Daí, se $n = 3$, temos

$$o_i(1) \;+\; O\big(\lambda_i^{-1}\big) \;=\; -\,(n-1)(n-2)\,\omega_2\, a^2 < 0,$$

o que é uma contradição, já que $\lambda_i \to \infty$. $\square$

Teorema 20. *Suponha que $n = 3$. Então $\mathcal{P}_1$ consiste apenas de pontos de blow-up isolados simples.*

Demonstração. Nosso objetivo é demonstrar que existe uma constante $C > 0$, que não depende de i, tal que $dist(q_j^i, q_k^i) \geq C$ para todo $j \neq k$ em $\{1, \ldots, m_i\}$. Aqui, temos que $\{q_j^i\}$ são os pontos dados pela Proposição 3.14. Suponha por contradição que isto não é verdade. Então, temos que

$$\lim_{i\to+\infty}\, \min_{j\neq k} d(q_j^i, q_k^i) \;=\; 0\,.$$

Como os pontos de blow-up $\{q_1^i, \ldots, q_{m_i}^i\}$, definidos na Proposição 3.14, são finitos para cada i, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\sigma_i \;:=\; \min_{j\neq k} d(q_j^i, q_k^i) \;=\; d(q_1^i, q_2^i) \;\longrightarrow\; 0\,.$$

Assim, pelo item (3) da Proposição 3.14, vemos diretamente que

$$u_i(q_j^i)\,\sigma_i \;\geq\; \frac{1}{C} \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2\,.$$

Desta forma, $u_i(q_k^i) \to +\infty$ quando $i \to +\infty$. Agora, tome coordenadas geodésicas normais em torno de q_1^i e reescalone as funções u_i como

$$v_i(y) \;=\; \sigma_i^{\frac{2}{p_i-1}}\, u_i(\sigma_i\, y) \quad \text{para} \quad y \in B(0, \sigma_i^{-1})_+\,.$$

Além disso, se $y_k^i = \dfrac{q_k^i}{\sigma_i} \in B\left(0, \sigma_i^{-1}\right)$, então cada y_k^i é um máximo local de v_i e temos que $d(y_1^i, y_2^i) = |y_2^i| = 1$ e então, a menos de uma subsequência, podemos supor que $y_2^i \to y_2$ com $|y_2| = 1$.

Provaremos que ambos $y_1 = 0$ e y_2 são pontos de blow-up isolados para v_i. Inicialmente, verifiquemos que $v_i(y_j) \to +\infty$ para $j = 1, 2$.

Se $v_i(y_2)$ permanece limitado mas $v_i(0) \to +\infty$, então, pela Proposição 3.16, 0 é um ponto de blow-up isolado simples para v_i, enquanto que a sequência é limitada superiormente em torno de y_2. Assim, pela desigualdade (3.34) na Proposição 3.12, temos $v_i(y_2) \to 0$. Porém, pelo item (1) da Proposição 3.14 e o fato de que os raios devem tender a zero, para $\overline{R} > 0$ tem-se que

$$\sigma_i \geq \max\left\{ \frac{\overline{R}}{u_i(q_1^i)^{\frac{p_i-1}{2}}}, \frac{\overline{R}}{u_i(q_2^i)^{\frac{p_i-1}{2}}} \right\}. \tag{3.56}$$

Agora, reescalonando de volta a desigualdade anterior, obtemos que

$$\min\{v_i(0), v_i(y_2)\} \geq \overline{R},$$

contradizendo o fato de que $v_i(y_2) \to 0$. Por outro lado, se ambos $v_i(0)$ e $v_i(y_2)$ são limitados, podemos aplicar a desigualdade de Harnack e encontrar uma função v tal que $v_i \to v$ em $\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ de forma que

$$\begin{cases} -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta v = K(p)\, v^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{em } \mathbb{R}^n_+, \\ \frac{2}{n-2}\frac{\partial v}{\partial \eta} = H(p)\, v^{\frac{n}{n-2}} & \text{em } \partial\mathbb{R}^n_+, \\ \nabla v(0) = \nabla v(y_2) = 0. \end{cases}$$

Porém, a classificação dada na Proposição 1.27, nos fornece que $v = 0$, o que é uma contradição com (3.56). Agora, afirmamos que $y_1 = 0$ e y_2 são pontos de blow-up isolados para v_i. De fato, observe que

$$u_i(x) \leq \frac{C}{|x - q_j^i|^{\frac{2}{p_i-1}}} \quad \text{para } |x| \leq \frac{\sigma_i}{2} \quad \text{e} \quad j = 1, 2.$$

Então, v_i satisfaz

$$v_i(y) = \sigma_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\sigma_i y) \leq \frac{C}{|y - y_j^i|^{\frac{2}{n-2}}} \quad \text{para } |x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad j = 1, 2\,,$$

e com isso a nossa afirmação que fizemos está provada. A Proposição 3.16 nos garante então que ambos 0 e y_2 são pontos de blow-up isolados simples de v_i, após uma dilatação dos argumentos de K_i e H_i assim como na demonstração da Proposição 3.16. Assim obtemos que

$$v_k(0) v_i(y) \longrightarrow h(y) = a_1 \, |y|^{2-n} + a_2 \, |y - y_2|^{2-n} + b(y)$$

localmente em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n_+ \backslash \mathcal{Z})$, com $\mathcal{Z}$ sendo o conjunto dos pontos de blow-up para v_i, e com b sendo uma função satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta b = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n_+ \backslash \{\mathcal{Z} \backslash \{0, y_2\}\} \\ \frac{\partial b}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial \mathbb{R}^n_+ \backslash \{\mathcal{Z} \backslash \{0, y_2\}\} \end{cases}.$$

Agora, defina uma função f tal que

$$f(y) = a_2 \, |y - y_2|^{2-n} + b(y)\,.$$

Podemos ver que, para $r > 0$ pequeno, segue que $f \in \mathcal{C}^1\Big(\overline{B(0, r)_+}\Big)$. Além disso, pelo Princípio do Máximo, visto no Teorema 13, obtém-se $f(0) > 0$. Logo, estamos sob as condições da Proposição 2.5 e podemos raciocinar como na parte final da demonstração da Proposição 3.16 para concluirmos esta demonstração.

□

3.1.3 Prova do Item 2.2

Nesta subseção provaremos o **item** (2.2) do Teorema 4, que nos diz que se $n = 3$ e a curvatura escalar S é não positiva, então o conjunto $\mathcal{P}_1 = \varnothing$. Relembremos que o conjunto $\mathcal{P}_1$ é definido como

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n > 1\}\,.$$

Proposição 3.17. *Considere uma sequência de soluções positivas* (u_i) *do problema* (3.1) *com* $K_i \to K < 0$ *em* $\mathcal{C}^1(M)$, $S \leq 0$ *e* $H_i \to H$ *em* $\mathcal{C}^2(\partial M)$*. Então, dado* $\delta > 0$ *pequeno, para* i *suficientemente grande, existe uma constante* $C = C(\delta)$ *tal que*

$$\int_{\{u_i \leq 1\}} \frac{|\nabla u_i|^2}{u_i^{\frac{p_i+3}{2}}} \; + \; \int_{\{u_i > 1\}} \frac{|\nabla u_i|^2}{u_i^{p_i+\delta+1}} \; < \; C\,. \tag{3.57}$$

Demonstração. Considere a seguinte função contínua

$$f(u) \; = \; \begin{cases} u^{-\frac{p_i+1}{2}} & \text{se} \quad 0 < u \leq 1\,, \\ u^{-(p_i+\delta)} & \text{se} \quad u > 1\,. \end{cases}$$

Multiplicando as equações em (3.1) por $f(u_i)$ e integrando-as, obtemos que

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \int_M f(u_i)\,\Delta_g u_i \; = \; \int_M S\, u_i\, f(u_i) \; - \; \int_M K_i\, u_i^{p_i} f(u_i) \tag{3.58}$$

e

$$\frac{2}{n-2} \int_{\partial M} f(u_i)\, \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \; = \; \int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}} f(u_i)\,. \tag{3.59}$$

Então, aplicando o Corolario 1.9 para o termo no lado esquerdo de (3.58), e depois utilizando a equação (3.59), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f(u_i)\,\Delta_g u_i \; &= \; \int_M f(u_i)\, \operatorname{div}_g \nabla u_i \\ &= \; -\int_M \nabla f(u_i) \cdot \nabla u_i \; + \; \int_{\partial M} f(u_i)\, \nabla u_i \cdot \eta \\ &= \; -\int_M f'(u_i)\, \nabla u_i \cdot \nabla u_i \; + \; \int_{\partial M} f(u_i)\, \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \\ &= \; -\int_M f'(u_i)\, |\nabla u_i|^2 \; + \; \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}} f(u_i)\,, \end{aligned} \tag{3.60}$$

ou seja, combinando (3.58) e (3.60) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{4(n-1)}{n-2} \int_M f'(u_i)\, |\nabla u_i|^2 \; &= \; -\int_M S\, u_i\, f(u_i) \; + \; \int_M K_i\, u_i^{p_i} f(u_i) \\ &\quad + \; 2\,(n-1) \int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}} f(u_i)\,. \end{aligned}$$

Agora, analisando os casos da função $f(u_i)$, nesta última identidade, quando $u_i \le 1$ e $u_i > 1$, e ajustando os expoentes de u_i de acordo com cada caso, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{4(n-1)}{n-2}\int_M f'(u_i)|\nabla u_i|^2 &= -\int_M S\, u_i\, f(u_i) + \int_{\{u_i \le 1\}} K_i\, u_i^{p_i}\, u_i^{-\frac{p_i+1}{2}} \\
&\quad + \int_{\{u_i>1\}} K_i\, u_i^{p_i}\, u_i^{-(p_i+\delta)} + 2(n-1)\int_{\{u_i\le 1\}\cap\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, u_i^{-\frac{p_i+1}{2}} \\
&\quad + 2(n-1)\int_{\{u_i>1\}\cap\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, u_i^{-(p_i+\delta)} \\
&= -\int_M S\, u_i\, f(u_i) + \int_{\{u_i\le 1\}} K_i\, u_i^{\frac{p_i-1}{2}} \\
&\quad + \int_{\{u_i>1\}} K_i\, u_i^{-\delta} + 2(n-1)\int_{\{u_i\le 1\}\cap\partial M} H_i \\
&\quad + 2(n-1)\int_{\{u_i>1\}\cap\partial M} H_i\, u_i^{-\frac{p_i-1}{2}-\delta} \\
&= -\int_M S\, u_i\, f(u_i) + \int_{\{u_i\le 1\}} K_i\, u_i^{\frac{2}{n-2}+o_i(1)} \\
&\quad + \int_{\{u_i>1\}} K_i\, u_i^{-\delta} + 2(n-1)\int_{\{u_i\le 1\}\cap\partial M} H_i \\
&\quad + 2(n-1)\int_{\{u_i>1\}\cap\partial M} H_i\, u_i^{-\frac{2}{n-2}-\delta+o_i(1)}\,. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

Note que todos os termos no lado direito de (3.61) são uniformemente limitados, com uma possível exceção do primeiro termo. Mas, por hipótese, S é não negativa, então este primeiro termo é não negativo. Portanto, o lado esquerdo é limitado superiormente. Calculando a derivada $f'(u_i)$, segue que

$$f'(u_i) = \begin{cases} -\dfrac{p_i+1}{2}\, u_i^{-\frac{p_i+3}{2}} & \text{se } \; 0 < u_i \le 1\,, \\ -(p_i+\delta)\, u_i^{-(p_i+\delta+1)} & \text{se } \; u_i > 1\,. \end{cases}$$

Por conseguinte, substituindo $f'(u_i)$ no termo no lado esquerdo de (3.61), a identidade (3.61) nos fornece que:

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\left(\frac{p_i+1}{2}\int_{\{u_i\le 1\}} \frac{|\nabla u_i|^2}{u_i^{\frac{p_i+3}{2}}} + (p_i+\delta)\int_{\{u_i>1\}} \frac{|\nabla u_i|^2}{u_i^{p_i+\delta+1}}\right) < C\,.$$

Logo, considerando $\delta > 0$ pequeno, para i suficientemente grande segue o resultado.

$\square$

Na proposição a seguir, mostraremos que a propriedade acima não é válida para *bolhas*, isto é, as soluções do problema (1.16) quando $\mathfrak{D}_n(p) > 1$, descritas em (1.18). Relembre que esta *família de soluções a* 1-*parâmetro* é dada por

$$b_\beta(x) \;=\; \frac{C(n)\,\beta^{\frac{n-2}{2}}}{\Big(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\Big)^{\frac{n-2}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{3.62}$$

onde $C(n) = \big(n(n-2)\big)^{\frac{n-2}{4}}$ e $x_0(\beta) = -\beta\mathfrak{D}_n(p)e_n \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.18. *Seja b_β a família de funções em (3.62). Então, temos que*

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{A_\beta(r,R)} \frac{|\nabla b_\beta|^2}{b_\beta^\mu} = +\infty \tag{3.63}$$

para todo anel $A_\beta(r,R) \coloneqq A(x_0(\beta),r,R)\cap\mathbb{R}^n_+ \subset \{b_\beta \le 1\}$ com $0<r<R$, e $\mu>2$.

Demonstração. Como b_β é dada por (3.62), então

$$\begin{aligned}
\nabla b_\beta \;&=\; \frac{-\,C(n)\,\beta^{\frac{n-2}{2}}\;\frac{n-2}{2}\Big(|x-x_0(\beta)|^2\;-\;\beta^2\Big)^{\frac{n-4}{2}}2\,|x-x_0(\beta)|\;\frac{x-x_0(\beta)}{|x-x_0(\beta)|}}{\Big(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\Big)^{n-2}}\\
&=\; \frac{-\,C(n)\,\beta^{\frac{n-2}{2}}\,(n-2)\,\big(x-x_0(\beta)\big)}{\Big(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\Big)^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned}$$

Assim, como $|\nabla b_\beta|^2 \;=\; \nabla b_\beta\cdot\nabla b_\beta$, segue que

$$|\nabla b_\beta|^2 \;=\; \frac{C(n)^2\,\beta^{\,n-2}\,(n-2)^2\,\big(x-x_0(\beta)\big)^2}{\Big(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\Big)^{n}} \tag{3.64}$$

Agora, dado $\mu>0$, observe que

$$b_\beta^\mu \;=\; \frac{C(n)^\mu\,\beta^{\frac{n-2}{2}\,\mu}}{\Big(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\Big)^{\frac{n-2}{2}\,\mu}} \tag{3.65}$$

Desta forma, por (3.64) e (3.65), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|\nabla b_\beta|^2}{b_\beta^\mu} &= \frac{C(n)^2\,\beta^{n-2}\,(n-2)^2\left(x-x_0(\beta)\right)^2}{\left(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\right)^n}\;\frac{\left(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\right)^{\frac{n-2}{2}\,\mu}}{C(n)^\mu\,\beta^{\frac{n-2}{2}\,\mu}}\\
&= \frac{(n-2)^2\,C(n)^{2-\mu}\,\beta^{(2-\mu)\,\frac{n-2}{2}}\left(x-x_0(\beta)\right)^2}{\left(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\right)^{n-\mu\frac{n-2}{2}}}\\
&= \widetilde{C}(n)\,\beta^{(2-\mu)\,\frac{n-2}{2}}\,\frac{|x-x_0(\beta)|^2}{\left(|x-x_0(\beta)|^2-\beta^2\right)^{n-\mu\frac{n-2}{2}}} \qquad (3.66)
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{C}(n)=(n-2)^2\,C(n)^{2-\mu}$ e $\mu>0$. Observe que o domínio $\{b_\beta\le 1\}$ é o complemento de uma bola centrada em $x_0(\beta)$ com raio tendendo a 0. De fato, temos que $b_\beta\le 1$ se tivermos $|x-x_0(\beta)|^2>\beta^2+\sqrt{n(n-2)}\,\beta := r_\beta^2$, ou seja, tem-se

$$\{b_\beta\le 1\}=\mathbb{R}^n_+\backslash B^n(x_0(\beta)\,,r_\beta).$$

Para valores suficientemente pequenos de β, podemos tomar o anel $A_\beta(r,R)$, com $0<r_\beta<r<R$. Queremos mostrar que

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{A_\beta(r,R)}\frac{|\nabla b_\beta|^2}{b_\beta^\mu}=+\infty$$

para algum $0<\mu<2^\#=\frac{2(n-1)}{n-2}$. Para um $\beta>0$ fixado, temos, por (3.66), que

$$\int_{A_\beta(r,R)}\frac{|\nabla b_\beta|^2}{b_\beta^\mu} = \widetilde{C}(n)\int_r^R\int_{SC^{n-1}(x_0(\beta),\,s,\,s-\beta\mathfrak{D}_n(p))}\frac{\beta^{(2-\mu)\,\frac{n-2}{2}}\,s^2}{(s^2-\beta^2)^{n-\mu\frac{n-2}{2}}}\,dx\,ds\,,$$

onde $SC^{n-1}(x_0,r,h)$ é a calota esférica $(n-1)$-dimensional centrada em $x_0\in\mathbb{R}^n$ com raio $r>0$ e altura $0\le h<r$. Sabemos que

$$|SC^{n-1}(x,r,h)| = \omega_{n-1}\,r^{n-1}J(r,h)$$

para alguma função uniformemente limitada J. Assim, para alguma constante dimensional $\overline{C}(n)$, segue que

$$\int_{A_\beta(r,R)}\frac{|\nabla b_\beta|^2}{b_\beta^\mu}\le\overline{C}(n)\,\beta^{(2-\mu)\,\frac{n-2}{2}}\int_r^R\frac{s^{n+1}}{(s^2-\beta^2)^{n-\mu\frac{n-2}{2}}}\,ds\,.$$

Como $r > r_\beta > \beta$, quando $\beta \to 0$ a integral é uniformemnte limitada e, observando o denominador na integral do lado direito nesta última desigualdade, é suficiente considerar $\mu > 2$ para concluirmos que

$$\lim_{\beta \to 0} \int_{A_\beta(r,R)} \frac{|\nabla b_\beta|^2}{b_\beta^\mu} = +\infty .$$

Portanto, segue o resultado que desejávamos.

□

Para concluirmos a demonstração do **item** (2.2) do Teorema 4, precisamos mostrar que se $S \leq 0$ então o conjunto $\mathcal{P}_1 = \varnothing$. Para provar isto, note que pela Proposição 3.16 temos que se $n = 3$ então todo ponto de blow-up isolado do conjunto $\mathcal{P}_1$ é isolado simples. Mas, como $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n > 1\}$, então todo ponto $p \in \mathcal{P}_1$ satisfaz $\mathfrak{D}_n(p) > 1$. Assim, pelo Lema 3.2 e o item (3) da Proposição 1.27, temos a convergência das funções reescalonadas para a função b_β. Da Proposição 3.17 segue que (3.57) é satisfeito, o que contradiz 3.63. Portanto, concluímos que $\mathcal{P}_1 = \varnothing$, e o **item** (2.2) do Teorema 4 está provado.

3.1.4 Prova do Item 2.3

Finalmente, poderemos concluir a demonstração do Teorema 4. Para isso, provaremos alguns resultados que implicarão na demonstração do **item** (2.3) desse teorema, que é o item que nos resta provar. Dado isto, considere uma sequência (u_i) de soluções do problema (3.1) e suponha que $\mathcal{P}_0 \neq \varnothing$. Relembre que o conjunto $\mathcal{P}_0$ é definido como $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cap \{\mathfrak{D}_n = 1\}$. Então, de acordo com o item (2) da Proposição 1.27, a sequência de funções reescalonadas converge para

$$v(x) = v_\alpha(x) := \left(\frac{2}{\sqrt{n(n-2)}} x_n + \alpha \right)^{-\frac{n-2}{2}}, \quad \text{para algum } \alpha > 0 .$$

Assim, em particular, temos que $\theta_i := \int_{\partial M} H_i \, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \to +\infty$. De fato, considere uma sequência (x_i) de máximos locais tal que $x_i \to p$. Analogamente ao que vimos anteriormente, mostra-se que $x_i \in \partial M$. Considere coordenadas normais centradas em x_i

e defina v_i como

$$v_i(x) = u_i(x_i)^{-1}\, u\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\, x\big)\,, \quad \text{para } x \in B(0,r)_+\,.$$

Pelo Lema 3.10, segue que

$$\begin{aligned}
\theta_i &:= \int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \\
&= \int_{B(0,r)\cap\partial M} H_i\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\, y\big)\, u_i\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\, y\big)^{\frac{p_i+3}{2}} + \int_{\partial M\setminus B(0,r)} H_i(\widetilde{y})\, u_i(\widetilde{y})^{\frac{p_i+3}{2}} \\
&= \int_{B(0,r)\cap\partial M} H_i\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\, y\big)\, v_i(y)^{\frac{p_i+3}{2}}\, u_i(x_i)^{\frac{p_i+3}{2}} + \int_{\partial M\setminus B(0,r)} H_i(\widetilde{y})\, u_i(\widetilde{y})^{\frac{p_i+3}{2}}\,.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Observe que, quando $i \to +\infty$, o primeiro termo no lado direito de (3.67) tende a $+\infty$, pois $u_i(x_i)^{\frac{p_i+3}{2}} \to +\infty$ e $v_i(y) = v_{i_\alpha}(y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{n(n-2)}}\, y_n + \alpha\right)^{-\frac{n-2}{2}}$, para algum $\alpha > 0$, como vimos acima. Além disso, se q é um ponto de blow-up tem-se que $H(q) > 0$.

Por hipótese do **item (2.3)** do Teorema 4, a sequência $I_i(u_i)$ dada por (6) é uniformemente limitada, e como $n = 3$, tem-se:

$$\begin{aligned}
I_i(u_i) &= 4\int_M |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{2}\int_M S\, u_i^2 + \frac{1}{p_i+1}\int_M |K_i|\, u_i^{p_i+1} - \frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \\
&= O(1)\,.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Uma outra relação entre as integrais é dada pelo fato que $I_i'(u_i)[u_i] = 0$, já que u_i é ponto crítico do funcional I, isto é:

$$8\int_M |\nabla u_i|^2 + \int_M S\, u_i^2 + \int_M |K_i|\, u_i^{p_i+1} - 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = 0\,. \tag{3.69}$$

Utilizando estas duas relações, tentaremos estimar as integrais em termos de θ_i. Note que, pelo fato do primeiro e do terceiro termos no lado direito de (3.69) serem positivos e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_M S\, u_i^2 = O\big(\theta_i^{\frac{2}{p_i+1}}\big) = O(\theta_i)\,, \tag{3.70}$$

já que $\frac{2}{p_i+1} < 1$. Multiplicando (3.69) por $\dfrac{4}{p_i+3}$, e (3.68) por 2, encontramos, respectivamente, que

$$\frac{32}{p_i+3}\int_M |\nabla u_i|^2 + \frac{4}{p_i+3}\int_M S\,u_i^2 + \frac{4}{p_i+3}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} - \frac{16}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = 0\,. \tag{3.71}$$

e

$$8\int_M |\nabla u_i|^2 + \int_M S\,u_i^2 + \frac{2}{p_i+1}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} - \frac{16}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = O(1)\,. \tag{3.72}$$

Note que, por (3.69) e (3.71) e pela definição de θ_i, tem-se que

$$8\int_M |\nabla u_i|^2 + \int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} = O(\theta_i)\,. \tag{3.73}$$

Agora, subtraindo (3.71) da expressão (3.72), segue que

$$\left(8 - \frac{32}{p_i+3}\right)\int_M |\nabla u_i|^2 + \left(1 - \frac{4}{p_i+3}\right)\int_M S\,u_i^2 + \left(\frac{2}{p_i+1} - \frac{4}{p_i+3}\right)\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} = O(1)\,.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} 8\int_M |\nabla u_i|^2 \;=\; & \left(\frac{64}{p_i+3} - 8\right)\int_M |\nabla u_i|^2 + \left(\frac{8}{p_i+3} - 2\right)\int_M S\,u_i^2 + \frac{1}{3}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} \\ & + \left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{p_i+1} + \frac{8}{p_i+3}\right)\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} + O(1)\,. \end{aligned}$$

Observe que os coeficientes do primeiro e do quarto termos no lado direito tendem a zero. Devido a isso, e por (3.73), segue que eles são da ordem $o(\theta_i)$. O segundo termo no lado direito estimamos acima em (3.70). Desta forma, então podemos ver que

$$8\int_M |\nabla u_i|^2 = \frac{1}{3}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} + o(\theta_i)\,. \tag{3.74}$$

Agora, analogamente, multiplicando (3.69) por $\dfrac{2}{p_i+1}$, obtemos

$$\frac{16}{p_i+1}\int_M |\nabla u_i|^2 + \frac{2}{p_i+1}\int_M S\,u_i^2 + \frac{2}{p_i+1}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} - \frac{8}{p_i+1}\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = 0\,. \tag{3.75}$$

Então, subtraindo (3.75) da expressão (3.72), temos que

$$\left(8-\frac{16}{p_i+1}\right)\int_M |\nabla u_i|^2 + \left(1-\frac{2}{p_i+1}\right)\int_M S\,u_i^2 + \left(-\frac{16}{p_i+3}+\frac{8}{p_i+1}\right)\int_{\partial M}|H_i|\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = O(1)\,.$$

Note que, como $n=3$, pelo Lema 3.10 tem-se que $p_i+1\to 6$ e $p_i+3\to 8$. O segundo termo no lado esquerdo estimamos acima em (3.70). Dado isto, vemos que

$$\frac{16}{3}\int_M |\nabla u_i|^2 - \frac{2}{3}\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} = o(\theta_i)\,,$$

ou seja, obtém-se

$$8\int_M |\nabla u_i|^2 = \int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} + o(\theta_i)\,. \tag{3.76}$$

Desta forma, por (3.74) e (3.76), concluímos que

$$8\int_M |\nabla u_i|^2 = \frac{1}{3}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} + o(\theta_i) = \int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} + o(\theta_i)\,. \tag{3.77}$$

Agora, considere uma função arbitrária $\varphi\in\mathcal{C}^2(M)$, multiplique as equações do problema (3.1) por $u_i\,\varphi$ e integre. Este processo nos fornece:

$$\begin{cases} -8\displaystyle\int_M u_i\,\varphi\,\Delta_g u_i + \int_M S\,u_i^2\varphi = \int_M K_i\,u_i^{p_i+1}\varphi & \text{em } M\\ 2\displaystyle\int_{\partial M} u_i\,\varphi\frac{\partial u_i}{\partial\eta} = \int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi & \text{em } \partial M \end{cases} \tag{3.78}$$

Mas como $\Delta u_i = \operatorname{div}\nabla u_i$, então, pelo Teorema da Divergência, obtemos que

$$\begin{aligned} -8\int_M u_i\,\varphi\,\Delta_g u_i &= -8\int_M u_i\,\varphi\,\operatorname{div}\nabla u_i\\ &= 8\int_M \nabla(u_i\,\varphi)\cdot\nabla u_i - 8\int_{\partial M} u_i\,\varphi\nabla u_i\cdot\eta\\ &= 8\int_M |\nabla u_i|^2\,\varphi + 8\int_M u_i\,\nabla\varphi\cdot\nabla u_i - 8\int_{\partial M} u_i\,\varphi\frac{\partial u_i}{\partial\eta}\\ &= 8\int_M |\nabla u_i|^2\,\varphi + 8\int_M u_i\,\nabla\varphi\cdot\nabla u_i - 4\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Com isto, devido a (3.79) e a equação em M no problema (3.78), encontra-se que:

$$8\int_M |\nabla u_i|^2\,\varphi + 8\int_M u_i\,\nabla\varphi\cdot\nabla u_i - 4\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi = -\int_M S\,u_i^2\varphi + \int_M K_i\,u_i^{p_i+1}\varphi\,,$$

ou seja,

$$\int_M\Big(8|\nabla u_i|^2+|K_i|\,u_i^{p_i+1}\Big)\varphi-4\int_{\partial M}H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi\;=\;-\int_M S\,u_i^2\varphi-8\int_M u_i\,\nabla\varphi\cdot\nabla u_i. \quad (3.80)$$

Como a função φ não depende de u_i, utilizando a Desigualdade de Hölder conseguimos ver que o segundo termo no lado direito de (3.80) nos fornece

$$\begin{aligned}
\left|\int_M u_i\nabla\varphi\cdot\nabla u_i\right| &\leq C\int_M u_i\,|\nabla u_i| \\
&\leq \Big(\int_M u_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_M|\nabla u_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq O\big(\theta_i^{\frac{1}{p_i+1}}\big)\,O\big(\theta_i^{\frac{1}{2}}\big) \\
&\leq O\big(\theta_i^{\frac{1}{p_i+1}+\frac{1}{2}}\big) \\
&= O\big(\theta_i^{\frac{n-1}{n}+o_i(1)}\big).
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\int_M|S|\,u_i^2\varphi\;=\;O\big(\theta_i^{\frac{2}{p_i+1}}\big)\quad\text{e}\quad\int_M u_i\nabla\varphi\cdot\nabla u_i\;=\;O\big(\theta_i^{\frac{n-1}{n}}\big). \quad (3.81)$$

Por (3.80) e (3.81), segue que

$$\theta_i^{-1}\Big(\int_M\big(8\,|\nabla u_i|^2+|K_i|\,u_i^{p_i+1}\big)\varphi+4\int_{\partial M}H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi\Big)\longrightarrow 0\,.$$

Porém, como de (3.77) segue que $\theta_i^{-1}\int_M\big(8\,|\nabla u_i|^2+|K_i|\,u_i^{p_i+1}\big)\varphi$ e $\theta_i^{-1}4\int_{\partial M}H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi$ são uniformemente limitados em i, concluímos que existe uma *medida* positiva σ definida em M tal que:

(i) $4\,\theta_i^{-1}\,H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\rightharpoonup\sigma|_{\partial M}$,

(ii) $\theta_i^{-1}\big(8\,|\nabla u_i|^2+|K_i|\,u_i^{p_i+1}\big)\rightharpoonup\sigma$,

onde a convergência "$\rightharpoonup$" acima é fracamente no sentido de medidas. De fato, temos que $f_i\rightharpoonup\sigma$ se tivermos

$$\int_M f_i\,\varphi\longrightarrow\int_M\varphi\,d\sigma\quad\text{para toda }\varphi\in\mathcal{C}^\infty(M)\,.$$

Observemos que, pelo item (1) do Teorema 4, temos

$$\operatorname{supp}\sigma \subset \mathcal{P} \subset \{p \in \partial M : \mathfrak{D}_n(p) \geq 1\}.$$

Em dimensão $n = 3$, vimos que, pelo Teorema 20, todo ponto de blow-up em $\mathcal{P}_1$ é um ponto de blow-up isolado simples, Mais ainda, pela Proposição 3.12, conseguimos estimar bem o comportamento da função u_i em vizinhanças de pontos de blow-up isolados simples. Além disso, juntamente com os demais resultados, obtemos o lema a seguir.

Lema 3.19. *Se $n = 3$, então temos que $\operatorname{supp}\sigma \subset \mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} : \mathfrak{D}_n(p) = 1\}$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que exista $p \in \mathcal{P}_1$ e $\varphi \in \mathcal{C}^2(M)$, com suporte compacto contido em uma bola $B(p,\varepsilon)$, tal que

$$\int_{\partial M} \varphi \, d\sigma > 0\,. \tag{3.82}$$

Então, para i suficientemente grande, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\theta_i^{-1} \int_{\partial M} H_i \, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \varphi \, ds_g = \theta_i^{-1} \int_{B(p,\varepsilon)\cap\partial M} H_i \, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \varphi \, ds_g > \frac{1}{C}\,. \tag{3.83}$$

Considere coordenadas normais centradas em p e seja $x \in B(0,\varepsilon)$. Nestas coordenadas, fazendo a mudança de variável $x = u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} y$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(p,\varepsilon)\cap\partial M} H_i \, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \varphi ds_g &= \int_{\partial_0 B(0,\varepsilon)_+} \Big(H_i \, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \varphi \sqrt{|g|}\Big)(x) \, dx \\
&= \int_{\partial_0 B(0,r_i)} \Big(H_i \, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \varphi \sqrt{|g|}\Big)(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \widetilde{y}) \, u_i(x_i)^{1-p_i} \, dy\,,
\end{aligned}$$

com $\widetilde{y} = (y, 0)$ e $r_i = \varepsilon \, u_i(x_i)^{\frac{p_i-1}{2}} \to +\infty$. Note que, se $v_i(\widetilde{y}) = u_i(x_i)^{-1} u_i\Big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \widetilde{y}\Big)$, então

$$\begin{aligned}
u_i(x_i)^{1-p_i} \, u_i\Big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \widetilde{y}\Big)^{\frac{p_i+3}{2}} &= u_i(x_i)^{\frac{p_i+3}{2} + 1 - p_i} \, v_i(\widetilde{y})^{\frac{p_i+3}{2}} \\
&= u_i(x_i)^{\frac{5-p_i}{2}} \, v_i(\widetilde{y})^{\frac{p_i+3}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Então, temos

$$\int_{B(p,\varepsilon)\cap\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\,\varphi\, ds_g \;=\; u_i(x_i)^{\frac{5-p_i}{2}} \int_{\partial_0 B(0,r_i)} \Big(H_i\sqrt{|g|}\Big)\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\,\widetilde{y}\big)\, v_i(\widetilde{y})^{\frac{p_i+3}{2}}\, dy\,. \tag{3.84}$$

Observemos que, pelo Lema 3.2, implica-se que $v_i(\widetilde{y}) \to b_\beta(\widetilde{y})$. Pelo Lema 3.10, e como $n = 3$, temos que $\frac{p_i+3}{2} \to 4$ e $r_i \to +\infty$, ou seja, $B(0,r_i) \to \mathbb{R}^2$. Assim, segue que

$$\int_{\partial_0 B(0,r_i)} \Big(H_i\sqrt{|g|}\Big)\big(u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\,\widetilde{y}\big)\, v_i(\widetilde{y})^{\frac{p_i+3}{2}}\, dy \;\longrightarrow\; \widehat{C}\int_{\mathbb{R}^2} v_i(\widetilde{y})^4\, dy\,. \tag{3.85}$$

Como a função $b_\beta(\widetilde{y})$ é dada por (1.18), então

$$b_\beta(\widetilde{y})^4 \;=\; \frac{C(\beta)}{\big(|\widetilde{y} - x_0(\beta)|^2 - \beta^2\big)^2}\,,$$

com $x_0(\beta) = -\,\beta\,\mathfrak{D}_3\, e_3$, onde $\mathfrak{D}_3 > 1$. Assim, obtém-se que

$$\begin{aligned} b_\beta(\widetilde{y})^4 \;&=\; \frac{C(\beta)}{\big(|\widetilde{y}|^2 + 2\,\beta\,\mathfrak{D}_3\,|\widetilde{y}_3| + \beta^2\,\mathfrak{D}_3^2 - \beta^2\big)^2} \\ &=\; \frac{C(\beta)}{\big(|\widetilde{y}|^2 + \beta^2(\mathfrak{D}_3^2 - 1)\big)^2} \\ &=\; \frac{C(\beta)}{\big(|\beta^{-1}\,\widetilde{y}|^2 + \mathfrak{D}_3^2 - 1\big)^2} \\ &\leq\; \frac{C(\beta)}{\big(|\beta^{-1}\,\widetilde{y}|^2 + 1\big)^2}\,, \end{aligned} \tag{3.86}$$

já que $|\widetilde{y}| = |(y,0)|$. Agora, fazendo $x = \beta^{-1}\, y$, o que implica $dx = \beta^{-2}\, dy$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} b_\beta(\widetilde{y})^4\, dy \;&=\; \widetilde{C}(\beta)\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\big(|\widetilde{x}|^2 + 1\big)^2}\, dx \\ &=\; \widetilde{C}(\beta)\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^2(r)} \frac{1}{r^2 + 1}\, d\theta\, dr \\ &=\; \widetilde{C}(\beta)\,\omega_2\int_0^\infty \frac{r}{r^2 + 1}\, dr \\ &=\; \widetilde{C}(\beta)\,\omega_2 \lim_{b\to+\infty}\left(-\,\frac{1}{2\,(r^2 + 1)}\right)\Bigg|_0^b \\ &=\; O(1)\,. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Desta forma, por (3.83), (3.84), (3.85), (3.86) e 3.87, tem-se que

$$\begin{aligned}
\theta_i^{-1}\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi\, ds_g &= \theta_i^{-1}\int_{B(p,\varepsilon)\cap\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\varphi\, ds_g \\
&\simeq \theta_i^{-1} H(p)\, C\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\left(|\widetilde{x}|^2+1\right)^2}\,dx \\
&\le \theta_i^{-1}\, O(1)\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

onde $\simeq$ significa igualdade a menos de um fator $(1+O(\varepsilon^3))(1+o_i(1))$. Logo, isso é uma contradição com (3.82).

$\square$

Proposição 3.20. *Para $n=3$, seja (u_i) uma sequência de soluções positivas de (3.1) com $I_i(u_i)$ uniformemente limitada e $\mathcal{P}_0\neq\varnothing$. Então,*

(i) $4\theta_i^{-1} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \rightharpoonup \sigma,$

(ii) $\theta_i^{-1}\,|K_i|\, u_i^{p_i+1} \rightharpoonup \dfrac{3}{4}\sigma,$

(iii) $8\,\theta_i^{-1}\,|\nabla u_i|^2 \rightharpoonup \dfrac{1}{4}\sigma.$

Demonstração. Sejam $\phi\in\mathcal{C}^2(M)$ com suporte compacto e N um campo de vetores suave em M com $|N|\le 1$ e $N=\eta$ em ∂M. Agora, defina um campo de vetores $X=H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} N$. Aqui estendemos H suavemente para M. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \operatorname{div}\!\left(H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} N\right) \\
&= \nabla\!\left(H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\right)\cdot N + H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\operatorname{div} N \\
&= \left(H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\nabla\phi\cdot N + \phi\,\nabla\!\left(H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\right)\cdot N\right) + H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\operatorname{div} N \\
&= H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\nabla\phi\cdot N + \phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\nabla H_i\cdot N + \frac{p_i+3}{2}H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\nabla u_i\cdot N + H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\operatorname{div} N \\
&= u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\left(H_i\,\nabla\phi\cdot N + \phi\,\nabla H_i\cdot N + H_i\,\phi\,\operatorname{div} N\right) + \frac{p_i+3}{2}H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\nabla u_i\cdot N \\
&\le C\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} + \frac{p_i+3}{2}H_i\,\phi\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\,|\nabla u_i|, \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$ que depende de ϕ, N e H. Assim, pelo Teorema da Divergência, segue que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} H_i\,\phi\,u^{\frac{p_i+3}{2}} &= \int_{\partial M} H_i\,\phi\,u^{\frac{p_i+3}{2}} N\cdot\eta \\ &= \int_M \operatorname{div}\Big(H_i\,\phi\,u^{\frac{p_i+3}{2}} N\Big)\,. \end{aligned}\tag{3.89}$$

Pela Desigualdade de Young, considerando que $a = |\nabla u|\sqrt{\phi}\,\delta$ e $b = \dfrac{H_i\,u^{\frac{p_i+1}{2}}\sqrt{\phi}}{\delta}$, e fazendo $p = q = 2$, obtemos

$$H_i\,\phi\,u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\,|\nabla u_i| \;\le\; \frac{\delta^2}{2}\,|\nabla u_i|^2\,\phi \;+\; \frac{1}{2\delta^2}\,H_i^2\,u_i^{p_i+1}\phi\,,$$

para todo $\delta > 0$. Desta forma, de (3.88), tem-se

$$\operatorname{div} X \;\;\le\;\; C\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \;+\; \frac{p_i+3}{2}\left(\frac{\delta^2}{2}\,|\nabla u_i|^2\,\phi \;+\; \frac{1}{2\delta^2}\,H_i^2\,u_i^{p_i+1}\phi\right).$$

Por conseguinte, temos que (3.89) implica que

$$\int_{\partial M} H_i\,\phi\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \le C\int_M u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \;+\; \frac{p_i+3}{2}\left(\frac{\delta^2}{2}\int_M |\nabla u_i|^2\,\phi + \frac{1}{2\delta^2}\int_M H_i^2\,u_i^{p_i+1}\phi\right) \tag{3.90}$$

Agora, definimos as medidas σ_1 e σ_2 da seguinte forma:

(i) $\theta_i^{-1}\,|K|\,u_i^{p_i+1} \rightharpoonup \sigma_1$,

(ii) $8\,\theta_i^{-1}\,|\nabla u_i|^2 \rightharpoonup \sigma_2$.

Note que, por (3.77) e pela definição de θ_i, essas medidas σ_1 e σ_2 são finitas. Observe que, pelo item (ii) da definição da medida σ, visto logo antes do Lema 3.19 no início desta subseção, podemos concluir que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Pelo Lema 3.19 segue que supp $\sigma_j \subset \{\mathfrak{D}_n = 1\}$ para $j = 1, 2$. Relembremos que $\mathfrak{D}_n(p) = \sqrt{n(n-1)}\frac{H(p)}{\sqrt{|H(p)|}}$. Como $n = 3$, isso implica que em $\{\mathfrak{D}_3(p) = 1\}$ segue que

$$H^2(p) \;=\; \frac{1}{6}\,|K(p)|\,. \tag{3.91}$$

Multiplicando (3.90) por θ_i^{-1} temos que

$$\theta_i^{-1}\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\phi \;\le\; C\,\theta_i^{-1}\int_M u_i^{\frac{p_i+3}{2}} + \frac{p_i+3}{2}\left(\frac{\delta^2}{2}\,\theta_i^{-1}\int_M |\nabla u_i|^2\,\phi + \frac{1}{2\delta^2}\,\theta_i^{-1}\int_M H_i^2\,u_i^{p_i+1}\phi\right).$$

Neste caso, pelo Lema 3.10 vemos que o coeficiente $\dfrac{p_i+3}{2} \to 4$. Por (3.91), temos

$$\begin{aligned}\theta_i^{-1}\int_{\partial M} H_i\,\phi\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \;&\le\; C\,\theta_i^{-1}\int_M u_i^{\frac{p_i+3}{2}} + (2+o_i(1))\,\delta^2\,\theta_i^{-1}\int_M |\nabla u_i|^2\,\phi \\ &\quad + \frac{2}{\delta^2}\,\theta_i^{-1}\int_M \frac{|K_i|}{6}\,u_i^{p_i+1}\phi\,.\end{aligned}$$

Agora, calculemos os limites das integrais nesta última desigualdade: para o termo no lado esquerdo utilizamos o item (i) da definição da medida σ vista logo antes do Lema 3.19, que fornece $4\,\theta_i^{-1}\,H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \rightharpoonup \sigma|_{\partial M}$. Em relação ao lado direito, para o segundo termo utilizamos a definição da medida σ_2, e para o terceiro termo utilizamos a definição da medida σ_1. Como o primeiro termo do lado direito tende a 0, já que $\theta_i \to +\infty$, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma \;&\le\; 2\,\delta^2\,\frac{1}{8}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 + \frac{2}{\delta^2}\,\frac{1}{6}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1 \\ &\le\; \frac{\delta^2}{4}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 + \frac{1}{3\,\delta^2}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1\,.\end{aligned}$$

Porém, como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, temos

$$\frac{1}{4}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1 + \frac{1}{4}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 \;\le\; \frac{\delta^2}{4}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 + \frac{1}{3\,\delta^2}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{\delta^2}{4}\right)\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 \;\le\; \left(\frac{1}{3\,\delta^2} - \frac{1}{4}\right)\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1\,.$$

Assim, escolhendo $\delta^2 = 2$, podemos concluir que

$$-\frac{1}{4}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 \;\le\; -\frac{1}{12}\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1$$

isto é,

$$3\int_{\partial M}\phi\,d\sigma_2 \;\ge\; \int_{\partial M}\phi\,d\sigma_1\,. \tag{3.92}$$

Note que, pela definição das medidas σ_1 e σ_2, e calculando o limite em (3.77), obtemos que esta desigualdade (3.92) torna-se uma igualdade. Isto implica que $\sigma_1 = 3\,\sigma_2$. Em particular, como $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, obtemos que

$$\sigma_1 = \frac{3}{4}\sigma \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{1}{4}\sigma\,. \tag{3.93}$$

Portanto, devido a (3.93), concluímos a demonstração dos itens (ii) e (iii) do enunciado.

□

Nosso objetivo agora será provar que o *suporte* da medida σ é formado por pontos críticos da função $\mathfrak{D}_n$. Dado isto, a afirmação do **item (2.3)** do Teorema 4 será finalmente demonstrada.

Agora, relembre que para funções φ definidas em ∂M utilizaremos a notação $\nabla^T\varphi$ para o gradiente de φ, assim como $\operatorname{div}^T\varphi$ para o seu divergente.

Proposição 3.21. *Para $n = 3$, seja (u_i) uma sequência de soluções positivas de* (3.1) *com $I_i(u_i)$ uniformemente limitada e $\mathcal{P}_0 \neq \varnothing$. Então, temos que $\nabla^T\mathfrak{D}_n = 0$ em supp σ.*

Demonstração. Relembremos a expressão encontrada em (2.2), no Lema 2.2, mas fazendo $\psi = S$ e $f = K_i$ por conta do nosso estudo do problema (3.1). Como aqui temos $n = 3$, isso resulta em

$$\begin{aligned}
&8\int_M DF(\nabla u_i, \nabla u_i) - 4\int_M |\nabla u_i|^2 \operatorname{div} F - \frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\, F\cdot\nabla(u_i^{p_i+1}) \\
&+\frac{1}{2}\int_M S\,F\cdot\nabla(u_i^2) \;=\; 8\int_{\partial M}(\nabla u_i\cdot F)\,\frac{\partial u_i}{\partial\eta} - 4\int_{\partial M}|\nabla u_i|^2 F\cdot\eta\,.
\end{aligned}\tag{3.94}$$

Notemos que o terceiro termo no lado esquerdo de (3.94) nos fornece o seguinte:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\,F\cdot\nabla(u_i^{p_i+1}) &= -\frac{1}{p_i+1}\int_M (p_i+1)\,K_i\,u_i^{p_i}F\cdot\nabla u_i \\
&= -\int_M K_i\,u_i^{p_i}\,F\cdot\nabla u_i\,.
\end{aligned}\tag{3.95}$$

Aplicando o Corolário 1.9 neste termo no lado direito de (3.95), segue que:

$$\begin{aligned} -\int_M K_i\, u_i^{p_i}\, F\cdot\nabla u_i \;&=\; \int_M u_i\,\mathrm{div}(K_i\, u_i^{p_i}\, F) - \int_{\partial M} u_i\, K_i\, u_i^{p_i}\, F\cdot\eta \\ &=\; \int_M u_i^{p_i+1} F\cdot\nabla K_i \,+\, p_i\int_M K_i\, u_i^{p_i} F\cdot\nabla u_i \,+\, \int_M K_i\, u_i^{p_i+1}\,\mathrm{div}\, F \\ &\quad\; -\int_{\partial M} K_i\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Com isso, observe que (3.96) nos diz que

$$-(p_i+1)\int_M K_i\, u_i^{p_i}\, F\cdot\nabla u_i \;=\int_M u_i^{p_i+1} F\cdot\nabla K_i \,+\, \int_M K_i\, u_i^{p_i+1}\,\mathrm{div}\, F \,-\, \int_{\partial M} K_i\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\int_M K_i\, u_i^{p_i}\, F\cdot\nabla u_i \;&=\; \frac{1}{p_i+1}\int_M u_i^{p_i+1} F\cdot\nabla K_i \,+\, \frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\, u_i^{p_i+1}\,\mathrm{div}\, F \\ &\quad\; -\frac{1}{p_i+1}\int_{\partial M} K_i\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Desta forma, por (3.95) e (3.97), encontramos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\, F\cdot\nabla(u_i^{p_i+1}) \;&=\; \frac{1}{p_i+1}\int_M u_i^{p_i+1} F\cdot\nabla K_i \,+\, \frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\, u_i^{p_i+1}\,\mathrm{div}\, F \\ &\quad\; -\frac{1}{p_i+1}\int_{\partial M} K_i\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Agora, note que o primeiro termo no lado direito da igualdade em (3.94) nos revela o seguinte:

$$8\int_{\partial M}(\nabla u_i\cdot F)\,\frac{\partial u_i}{\partial\eta} \;=\; 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i\,. \tag{3.99}$$

Sabemos que $\nabla u_i = \nabla^T u_i + \eta\,\frac{\partial u_i}{\partial\eta}$. Analogamente, utilizaremos o Corolário 1.9 no termo no lado direito de (3.99). Além disso, como u_i é solução de $2\,\dfrac{\partial u_i}{\partial\eta} = H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}$, segue que:

$$\begin{aligned}
4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i &= 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla^T u_i \;+\; 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, \frac{\partial u_i}{\partial\eta}\, F\cdot\eta \\
&= -4\int_{\partial M} u_i\, \operatorname{div}^T\!\big(H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\big) \;+\; 2\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta \\
&= -4\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, F\cdot\nabla^T H_i \;-\; 2\,(p_i+1)\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla^T u_i \\
&\quad -4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, \operatorname{div}^T F \;+\; 2\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta \\
&= -4\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, F\cdot\nabla^T H_i \;-\; 2\,(p_i+1)\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i \\
&\quad +2\,(p_i+1)\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, \frac{\partial u_i}{\partial\eta}\, F\cdot\eta \;-\; 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, \operatorname{div}^T F \\
&\quad +2\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta \\
&= -4\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, F\cdot\nabla^T H_i \;-\; 2\,(p_i+1)\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i \\
&\quad +(p_i+3)\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta \;-\; 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, \operatorname{div}^T F\,.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Assim, observe que (3.100) nos diz que

$$\begin{aligned}
\big(4+2\,(p_i+1)\big)\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i &= -4\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, F\cdot\nabla^T H_i \;-\; 4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, \operatorname{div}^T F \\
&\quad +(p_i+3)\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,.
\end{aligned}$$

Mas, como $4+2\,(p_i+1) = 2\,(p_i+3)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i &= -\frac{2}{p_i+3}\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, F\cdot\nabla^T H_i \;-\; \frac{2}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, \operatorname{div}^T F \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
4\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+1}{2}}\, F\cdot\nabla u_i &= -\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, F\cdot\nabla^T H_i \;-\; \frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, \operatorname{div}^T F \\
&\quad +2\int_{\partial M} H_i^2\, u_i^{p_i+1}\, F\cdot\eta\,.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Assim, por (3.99) e (3.101), encontramos que

$$
\begin{aligned}
8\int_{\partial M}(\nabla u_i\cdot F)\,\frac{\partial u_i}{\partial\eta} \;=\;& -\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\,F\cdot\nabla^T H_i-\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\,\mathrm{div}^T F\\
&+2\int_{\partial M} H_i^2\,u_i^{p_i+1}\,F\cdot\eta\,. \qquad (3.102)
\end{aligned}
$$

Agora, substituindo (3.98) e (3.102) na identidade (3.94), concluímos que:

$$
\begin{aligned}
& 8\int_M DF(\nabla u_i,\nabla u_i)\;-\;4\int_M|\nabla u_i|^2\,\mathrm{div}\,F\;+\;\frac{1}{p_i+1}\int_M u_i^{p_i+1}F\cdot\nabla K_i\\
&+\frac{1}{p_i+1}\int_M K_i\,u_i^{p_i+1}\,\mathrm{div}\,F\;-\;\frac{1}{p_i+1}\int_{\partial M}K_i\,u_i^{p_i+1}\,F\cdot\eta\;+\;\frac{1}{2}\int_M S\,F\cdot\nabla(u_i^2)\\
=\;& -\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M}u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\,F\cdot\nabla^T H_i\;-\;\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M}H_i\,u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\,\mathrm{div}^T F\;+\;2\int_{\partial M}H_i^2\,u_i^{p_i+1}\,F\cdot\eta\\
&-\;4\int_{\partial M}|\nabla u_i|^2F\cdot\eta\,. \qquad (3.103)
\end{aligned}
$$

A ideia geral é escolher adequadamente campos de vetores F nesta identidade (3.103), depois multiplicar por θ_i^{-1} e calcular o limite. Utilizando a desigualdade (3.81), perceba que, para o *sexto termo* no lado esquerdo de (3.103), temos

$$
\theta_i^{-1}\,\frac{1}{2}\int_M S\,F\cdot\nabla(u_i^2)\;\longrightarrow\;0\,. \qquad (3.104)
$$

Agora, considere a *função distância* $\mathbf{d}$, que mede a distância de um ponto $p\in\overline{M}$ à fronteira ∂M, tal que $\mathbf{d}$ tem sinal positivo dentro da variedade M. Dado um $\delta>0$ pequeno, defina uma *função corte* $\mathcal{X}_i(t)$ suave não decrescente

$$
\mathcal{X}_i(t)\;=\;\begin{cases}1 & \text{se}\quad t\le\delta_i\\[4pt] 0 & \text{se}\quad t\ge 2\,\delta_i\end{cases}\,,
$$

com $\delta_i\to 0$. e seja o campo de vetores $F=\mathcal{X}(\mathbf{d})\,\mathbf{d}\,\nabla\mathbf{d}$. Dado isto, como $|\nabla\mathbf{d}|=1$, obtém-se que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,F \;&=\; \mathcal{X}(\mathbf{d})\,|\nabla\mathbf{d}|^2+\mathbf{d}\,\mathcal{X}'(\mathbf{d})\,|\nabla\mathbf{d}|^2+\mathbf{d}\,\mathcal{X}(\mathbf{d})\,\mathrm{div}\,\nabla\mathbf{d}\\
&=\;\mathcal{X}(\mathbf{d})+\mathbf{d}\,\mathcal{X}'(\mathbf{d})+\mathbf{d}\,\mathcal{X}(\mathbf{d})\,\Delta\mathbf{d}\\
&=\;1+O(\mathbf{d})\,, \qquad (3.105)
\end{aligned}
$$

quando o ponto aproxima-se da fronteira ∂M. Note que $F(p) = 0$ para todo $p \in \partial M$, já que para tais pontos p tem-se $\mathbf{d}(p) = 0$. Consequentemente, o *quinto termo* no lado esquerdo da identidade (3.103) e todos os seus termos no lado direito se anulam. Isso implica que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{p_i+1}\int_M u_i^{p_i+1} F\cdot\nabla K_i + \frac{1}{p_i+1}\int_M |K_i|\, u_i^{p_i+1}\operatorname{div} F + 4\int_M |\nabla u_i|^2 \operatorname{div} F \\ = \; & 8\int_M DF(\nabla u_i,\nabla u_i) + \frac{1}{2}\int_M S\, F\cdot\nabla(u_i^2)\,. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Em uma base ortonormal, temos que $F = \mathcal{X}(\mathbf{d})\,\mathbf{d}\sum_l \partial_l\mathbf{d}\, e_l$. Então, encontramos que

$$\begin{aligned} DF(\nabla u_i,\nabla u_i) &= \sum_{j,k}\partial_j\big(\mathcal{X}\,\mathbf{d}\,\partial_k\mathbf{d}\big)\,\partial_k u_i\,\partial_j u_i \\ &= \sum_{j,k}\Big(\mathcal{X}'(\mathbf{d})\partial_j\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\partial_k\mathbf{d} + \mathbf{d}\,\partial_j d\,\partial_k\mathbf{d} + \mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\partial_j\,\partial_k\mathbf{d}\Big)\,\partial_k u_i\,\partial_j u_i \\ &= \big(\mathcal{X}'(\mathbf{d})\,\mathbf{d} + \mathcal{X}(\mathbf{d})\big)(\nabla u_i\cdot\nabla\mathbf{d})^2 + \mathfrak{X}_i(\mathbf{d})\,\mathbf{d}\,\nabla^2\mathbf{d}\big(\nabla u_i,\nabla u_i\big)\,. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Como $\mathbf{d}\,\nabla^2\mathbf{d}$ é limitada e se anula na fronteira ∂M, segue que

$$\int_M \mathfrak{X}_i(\mathbf{d})\,\mathbf{d}\,\nabla^2\mathbf{d}\big(\nabla u_i,\nabla u_i\big) \longrightarrow 0\,.$$

Então, obtém-se

$$\int_M DF(\nabla u_i,\nabla u_i) = (1 + o_i(1))\int_M\big(\nabla u_i\cdot\nabla\mathbf{d}\big)^2 + o_i(1)\,.$$

Desta forma, devido a (3.107) e (3.105), observe que, como $p_i + 1 \to 6$, a identidade (3.106) resulta em

$$\frac{1 + o_i(1)}{6}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} + \big(4 + o_i(1)\big)\int_M |\nabla u_i|^2 = \big(8 + o_i(1)\big)\int_M (\nabla u_i\cdot\nabla\mathbf{d})^2 + o_i(1)\,. \tag{3.108}$$

Dos itens (*ii*) e (*iii*) da Proposição 3.20, segue, respectivamente, que

$$\theta_i^{-1}\frac{1}{6}\int_M |K_i|\,u_i^{p_i+1} \rightharpoonup \frac{1}{8}\sigma \quad \text{e} \quad 4\,\theta_i^{-1}\int_M |\nabla u_i|^2 \rightharpoonup \frac{1}{8}\sigma\,.$$

Logo, temos que (3.108) implica que

$$\int_M |\nabla u_i|^2 = \big(1 + O(1)\big) \int_M (\nabla u_i \cdot \nabla \mathbf{d})^2 + o_i(1)\,. \tag{3.109}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, se tivermos $\int_M |\nabla u_i|^2 = \int_M \int_M \big(\nabla u_i \cdot \nabla \mathbf{d}\big)^2$, então ∇u_i é paralelo a $\nabla \mathbf{d}$. Assim, (3.109) nos diz que, no limite, temos que ∇u_i é normal a fronteira ∂M. Agora, escolha um campo de vetores arbitrário V tangente a ∂M, e o estenda como um campo de vetores X no interior de M tal que $\operatorname{div} X = 0$ em uma vizinhança de ∂M. Observe que, fazendo $F = X$ em (3.103), todos os termos em (3.103) envolvendo $F \cdot \eta$ em ∂M ou $\operatorname{div} F$ em M se anulam. Dado isto, observe que a identidade (3.103) resulta em

$$\begin{aligned}
&8 \int_M DF(\nabla u_i, \nabla u_i) + \frac{1}{p_i + 1} \int_M u_i^{p_i+1} F \cdot \nabla K_i + \frac{1}{2} \int_M S\, F \cdot \nabla(u_i^2) \\
= \; & -\frac{8}{p_i + 3} \int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, V \cdot \nabla^T H_i - \frac{8}{p_i + 3} \int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}} \operatorname{div}^T V\,.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Pela Definição 1.7, dado um referencial ortonormal $\{e_i\}$ temos que $\operatorname{div}_g X = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$. Escolha um referencial tal que na fronteira ∂M tem-se $e_n = \eta$. Seja $X = X^T + X^\perp$, onde $X^\perp$ é paralelo a e_n e $X^T = X - X^\perp$. Assim, veja que

$$\begin{aligned}
0 = \big(\operatorname{div}_g X\big)\Big|_M &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla^T_{e_i} X, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_n} X, e_n \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla^T_{e_i} X^T, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_n} X, e_n \rangle \\
&= \operatorname{div}^T V + \langle \nabla_{e_n} X, e_n \rangle\,,
\end{aligned}$$

já que $X = X^T = V$ em ∂M. Então, obtemos

$$\operatorname{div}^T V = -\langle \nabla_\eta X, \eta \rangle\,.$$

Agora, vamos analisar o *primeiro termo* no lado esquerdo da identidade (3.110). Com o referencial ortonormal acima, obtemos

$$DX(\eta, \eta) = \partial_\eta X_\eta = \langle \nabla_{e_n} X, e_n \rangle\,,$$

onde $X_\eta = \langle X, \eta\rangle$. Como, no limite, ∇u_i é normal a ∂M, encontramos que

$$8\,\theta_i^{-1}\int_M DF(\nabla u_i, \nabla u_i) \;=\; \int_M DF\left(\frac{\nabla u_i}{|\nabla u_i|}, \frac{\nabla U_i}{|\nabla u_i|}\right)|\nabla u_i|^2 \longrightarrow \frac{1}{4}\int_{\partial M}\langle \nabla_\eta X, \eta\rangle\, d\sigma\,.$$

Mas, $\operatorname{div}^T V \;=\; -\;\langle \nabla_\eta X, \eta\rangle$, então $\frac{1}{4}\int_{\partial M}\langle \nabla_\eta X, \eta\rangle\, d\sigma \;=\; -\frac{1}{4}\int_{\partial M}\operatorname{div}^T V\, d\sigma$. Assim, segue que

$$8\,\theta_i^{-1}\int_M DF(\nabla u_i, \nabla u_i) \longrightarrow -\frac{1}{4}\int_{\partial M}\operatorname{div}^T V\, d\sigma\,.$$

Para o *segundo termo* no lado direito de (3.110) temos o seguinte: pelo item (i) da Proposição 3.20, e como $p_i + 3 \to 8$, temos

$$-\,\theta_i^{-1}\,\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} H_i\, u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\operatorname{div}^T V \longrightarrow -\frac{1}{4}\int_{\partial M}\operatorname{div}^T V d\sigma\,.$$

Desta forma, quando multiplicamos a identidade (3.110) por θ_i^{-1} e calculamos o limite, estes dois termos acima se cancelarão. Mais ainda, por (3.104), o *terceiro termo* no lado esquerdo de (3.110) tende a zero. Pelo item (ii) da Proposição 3.20, e como $p_i + 1 \to 6$, o *segundo termo* no lado esquerdo resulta em

$$\theta_i^{-1}\,\frac{1}{p_i+1}\int_M u_i^{p_i+1} F\cdot\nabla K_i \longrightarrow \frac{1}{8}\int_{\partial M}\frac{1}{|K|}\,(V\cdot\nabla^T K)\, d\sigma\,.$$

Pelo item (i) da Proposição 3.20, e como $p_i+3 \to 8$, o *primeiro termo* no lado direito resulta em

$$-\,\theta_i^{-1}\,\frac{8}{p_i+3}\int_{\partial M} u_i^{\frac{p_i+3}{2}}\, V\cdot\nabla^T H_i \longrightarrow -\frac{1}{4}\int_{\partial M}\frac{1}{H}\,(V\cdot\nabla^T H)\, d\sigma\,.$$

Por conseguinte, a identidade (3.110) se torna

$$\frac{1}{8}\int_{\partial M}\frac{1}{|K|}\,(V\cdot\nabla^T K)\, d\sigma \;+\; \frac{1}{4}\int_{\partial M}\frac{1}{H}\,(V\cdot\nabla^T H)\, d\sigma \;=\; 0\,,$$

ou seja,

$$\frac{1}{4}\int_{\partial M} V\cdot\left(\frac{1}{2\,|K|}\nabla^T K \;+\; \frac{1}{H}\nabla^T H\right) d\sigma \;=\; 0\,. \tag{3.111}$$

No entanto, pelo Lema 3.19, a medida σ satisfaz $supp\,\sigma \subset \mathcal{P}_0 = \{p\in\mathcal{P} : \mathfrak{D}_n(p) = 1\}$. Assim, no suporte de σ temos

$$\frac{1}{2\,|K|}\nabla^T K \;+\; \frac{1}{H}\nabla^T H \;=\; \frac{1}{\mathfrak{D}_n}\nabla^T\mathfrak{D}_n \;=\; \nabla^T\mathfrak{D}_n\,.$$

Por este fato e (3.111), obtém-se que

$$\int_{\partial M} (V \cdot \nabla^T \mathfrak{D}_n)\, d\sigma \;=\; 0 \quad \text{para todo} \quad V \in \mathfrak{X}(\partial M)\,.$$

Portanto, conclui-se que $\nabla^T \mathfrak{D}_n \;=\; 0$ no suporte da medida σ, como queríamos demonstrar.

□

A proposição implica na demonstração do **item (2.3)** do Teorema 4, uma vez que estávamos assumindo que 1 é um valor regular de $\mathfrak{D}_n$.

Apêndice

Aqui, relembraremos o Lema 2.9, que enunciamos no Capítulo 2, e o demonstraremos a seguir. Antes disso, lembre que o funcional energia I em M, definido em (3), é dado por

$$I(u) = \frac{2\,(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_M S\,u^2 - \frac{n-2}{2n}\int_M K\,u^{2^*} - (n-2)\int_{\partial M} H\,u^{2^\#}, \quad (3.112)$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$ e $2^\# = \frac{2\,(n-1)}{n-2}$. A função $\mathfrak{D}_n : \partial M \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathfrak{D}_n(p) \;=\; \sqrt{n\,(n-1)}\,\frac{H(p)}{\sqrt{|K(p)|}}\,.$$

Lema 3.22. *Suponha que $\mathfrak{D}_n(p) > 1$ para algum ponto $p \in \partial M$. Então pode-se encontrar uma sequência de funções (φ_k) em $H^1(M)$ tal que $\varphi_k > 0$ e $I(\varphi_k) \to -\infty$ quando temos $k \to +\infty$.*

Demonstração. Inicialmente, como $\mathfrak{D}_n(p) > 1$, segue que $H(p) > 0$.

Considere uma extensão de (M, g), que denotaremos por $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, incluindo uma vizinhança exterior da fronteira ∂M. Seja η o campo normal unitário para fora ao longo da fronteira ∂M. Dados dois parâmetros positivos β e D, tais que $D > \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n-1)}}$, considere o ponto $P_{\beta,D} \in \widetilde{M}\backslash M$ dado por

$$P_{\beta,D} \;=\; Exp_p^{\widetilde{g}}\left(\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\,\eta(p)\right),$$

onde $Exp_p^{\widetilde{g}}$ é a *aplicação exponencial* de $\widetilde{g}$ em p. Note que

$$dist_{\widetilde{g}}(p, P_{\beta,D}) \;=\; \sqrt{n\,(n-1)}\,\beta\,D \;>\; \beta$$

e

$$dist_{\widetilde{g}}(p, P_{\beta,D}) \;\le\; dist_{\widetilde{g}}(x, P_{\beta,D})\,,$$

para todo $x \in M$. Defina a família de funções $\varphi_{\beta,D}$ em M como

$$\varphi_{\beta,D}(x) = \frac{\beta^{\frac{n-2}{2}}}{\left(dist_{\tilde{g}}(x, P_{\beta,D})^2 - \beta^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{3.113}$$

para $\beta > 0$ suficientemente pequeno. Agora, defina a família modificada $\overline{\varphi}_{\beta,D}$ por

$$\overline{\varphi}_{\beta,D} = \mu^{\frac{n-2}{2}} \varphi_{\beta,D} \tag{3.114}$$

onde μ é uma *constante positiva*, ainda a ser determinada. Nosso objetivo é estimar o funcional energia I aplicado em tais funções, escolhendo um valor adequado para a contante positiva μ de tal forma que $I(\overline{\varphi}_{\beta,D}) \longrightarrow -\infty$ quando $D \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Para evitarmos complicações na notação, defina $\varepsilon_D > 0$ como

$$\varepsilon_D^2 = n(n-1)D^2 - 1,$$

e note que $\varepsilon_D^2 \to 0$ quando $D \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Por (3.112), segue que

$$\begin{aligned} I(\overline{\varphi}_{\beta,D}) &= \frac{2(n-1)}{n-2}\mu^{n-2}\int_M |\nabla\varphi_{\beta,D}|^2 + \frac{\mu^{n-2}}{2}\int_M S\,\varphi_{\beta,D}^2 + \frac{n-2}{2n}\mu^n\int_M |K|\,\varphi_{\beta,D}^{2^*} \\ &\quad - (n-2)\mu^{n-1}\int_{\partial M} H\,\varphi_{\beta,D}^{2^\#}. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Considere uma bola $B(p,r)$ em torno de $p \in M$ tal que $H(q) > c > 0$ para todo $q \in B(p,r)$. Note que se $x \notin B(p,r)$, então $dist_{\tilde{g}}(x, P_{\beta,D}) \geq r$. Isto implica que

$$\varphi_{\beta,D}(x) \leq \frac{\beta^{\frac{n-2}{2}}}{\left(r^2 - \beta^2\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

para todo $x \in M \backslash B(p,r)$. Portanto, cada uma das integrais em (3.115), quando restritas a $M\backslash B(p,r)$ tendem a 0 quando $\beta \to 0$. Portanto, vamos estimar as integrais em (3.115) em $B(p,r)$.

Para o *quarto termo* no lado direito em (3.115) temos

$$\begin{aligned} \Theta := \int_{\partial M} H\,\varphi_{\beta,D}^{2^\#} &= \int_{\partial M \cap B^{n-1}(p,r)} H\,\varphi_{\beta,D}^{2^\#} + o_\beta(1) \\ &\geq C\int_{\partial M \cap B^{n-1}(p,r)} \varphi_{\beta,D}^{2^\#} + o_\beta(1) \end{aligned} \tag{3.116}$$

onde $o_\beta(1)$ tende a 0 quando $\beta \to 0$. Agora, considere coordenadas normais $(x_1, \ldots, x_n)$ em torno do ponto $P_{\beta,D}$ tais que a geodésica unindo p a $P_{\beta,D}$ coincide com o *eixo* x_n. Façamos $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Assim, a menos de um fator multiplicativo da forma $(1 + o_r(1))$ com $o_r(1)$ tendendo a 0 quando $r \to 0$, devido ao elemento de volume na integral, observe que podemos reescrever (3.116) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Theta &\geq C \int_{B^{n-1}(p,r)} \frac{\beta^{n-1}}{\left(|\widehat{x}|^2 + n\,(n-1) D^2 \beta^2 - \beta^2\right)^{n-1}}\, d\widehat{x} \;+\; o_\beta(1) \\
&= C \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-2}(0,s)} \frac{\beta^{n-1}}{\left(s^2 + \beta^2\, \varepsilon_D^2\right)^{n-1}}\, d\theta\, ds \;+\; o_\beta(1) \\
&= C\, vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\, \beta^{n-1} \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\, \varepsilon_D^2\right)^{n-1}}\, ds \;+\; o_\beta(1)\,.
\end{aligned}$$

Faça a mudança de variáveis $t = \dfrac{s}{\beta\, \varepsilon_D}$, o que implica $ds = \beta\, \varepsilon_D\, dt$. Então, segue que

$$\begin{aligned}
\beta^{n-1} \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\, \varepsilon_D^2\right)^{n-1}}\, ds &= \beta^{n-1} \int_0^{\frac{r}{\beta\, \varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}\, \beta^{n-2}\, \varepsilon_D^{n-2}}{\left(t^2\, \beta^2\, \varepsilon_D^2 \,+\, \beta^2\, \varepsilon_D^2\right)^{n-1}}\, \beta\, \varepsilon_D\, dt \\
&= \beta^{n-1} \int_0^{\frac{r}{\beta\, \varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}\, \beta^{n-1}\, \varepsilon_D^{n-1}}{\left(\beta^2\, \varepsilon_D^2\, (t^2 \,+\, 1)\right)^{n-1}}\, dt \\
&= \beta^{n-1} \int_0^{\frac{r}{\beta\, \varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}\, \beta^{n-1}\, \varepsilon_D^{n-1}}{\beta^{2\,(n-1)}\, \varepsilon_D^{2\,(n-1)}\, (t^2 \,+\, 1)^{n-1}}\, dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon_D^{n-1}} \int_0^{\frac{r}{\beta\, \varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}}{(t^2 \,+\, 1)^{n-1}}\, dt\,. \qquad (3.117)
\end{aligned}$$

Como r é fixo e β é pequeno, então $\dfrac{r}{\beta\, \varepsilon_D} \to +\infty$ quando ε_D tende a 0. Defina

$$\lambda_n := \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}}{(1 + t^2)^{n-1}}\, dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\!\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2^{n-1}\, \Gamma\!\left(\frac{n}{2}\right)}\,.$$

Então, tem-se

$$\int_{\partial M} H\, \varphi_{\beta,D}^{2^\#} \;\geq\; H(p)\, vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\, \lambda_n\, \frac{1 + o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-1}} \;+\; o_\beta(1)\,. \qquad (3.118)$$

Para o *terceiro termo* no lado direito em (3.115), temos

$$\Upsilon := \int_M |K|\,\varphi_{\beta,D}^{2^*} \;=\; \int_{M\cap B^n(p,r)} |K|\,\varphi_{\beta,D}^{2^*} \;+\; o_\beta(1)$$
$$\leq\; C\int_{M\cap B^n(p,r)} \varphi_{\beta,D}^{2^*} \;+\; o_\beta(1)\,.$$

Agora, analogamente ao que fizemos antes, tome coordenadas normais. Então, a menos de um fator multiplicativo da forma $(1+o_r(1))$, temos

$$\Upsilon \leq C\int_{B^n(p,r)_+} \frac{\beta^n}{\left(|\widehat{x}|^2 + (x_n + \sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta)^2 - \beta^2\right)^n}\,dx \;+\; o_\beta(1)\,.$$

Observemos que esta integral em Υ nos fornece que

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1 \;&:=\; \int_{B^n(0,r)_+} \frac{\beta^n}{\left(|\widehat{x}|^2 + (x_n + \sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta)^2 - \beta^2\right)^n}\,dx \\
&=\; \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x_n^2}} \int_{\mathbb{S}^{n-2}(0,s)} \frac{\beta^n}{\left(s^2 + (x_n + \sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta)^2 - \beta^2\right)^n}\,d\theta\,ds\,dx_n \\
&\leq\; vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^n \int_0^r \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + x_n^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,x_n\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\right)^n}\,dx_n\,ds \\
&\leq\; vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^n \int_0^r \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,x_n\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\right)^n}\,dx_n\,ds \\
&=\; \frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^{n-1}}{2\,(n-1)D\,\sqrt{n\,(n-1)}} \int_0^r \frac{-\,s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,r\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\right)^{n-1}}\,ds \\
&\quad+\; \frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^{n-1}}{2\,(n-1)D\,\sqrt{n\,(n-1)}} \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2\right)^{n-1}}\,ds\,.
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Note que $s^2+\beta^2\,\varepsilon_D^2+2\,r\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta \geq 2r\beta$, para todo $s\in(0,r)$. Portanto, o primeiro termo do lado direito em (3.119) é limitado por uma constante que depende apenas de β e r. Porém, perceba que o segundo termo no lado direito em (3.119) foi calculado em (3.117). Desta forma, segue que

$$\int_M |K|\,\varphi_{\beta,D}^{2^*} \leq |K(p)|\,\lambda_n\,\frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)}{2\,(n-1)}\,\frac{1+o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-1}} \;+\; o_\beta(1)\,. \tag{3.120}$$

Para o *segundo termo* no lado direito em (3.115), podemos repetir estes mesmos passos que fizemos. Então, tem-se

$$\begin{aligned}\int_M S\,\varphi_{\beta,D}^2 &\leq S(p)\,\frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\Gamma\big(\frac{n-5}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{4\,(n-3)\,\beta^2\,\Gamma(n-3)}\,\frac{1+o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-5}} + o_\beta(1)\\ &= o\left(\frac{1}{\varepsilon_D^{n-2}}\right). \end{aligned} \tag{3.121}$$

Por fim, para o *primeiro termo* no lado direito em (3.115), temos

$$|\nabla\varphi_{\beta,D}| = \frac{n-2}{2}\,\beta^{\frac{n-2}{2}}\,\frac{|\nabla dist(x,P_{\beta,D})^2|}{\big(dist(x,P_{\beta,D})^2-\beta^2\big)^{\frac{n}{2}}}\,.$$

Como $|\nabla dist(x,p)| \leq 1$, então $|\nabla dist(x,p)^2| \leq 2\,dist(x,p)$. Daí,

$$|\nabla\varphi_{\beta,D}| \leq (n-2)\,\beta^{\frac{n-2}{2}}\,\frac{dist(x,P_{\beta,D})}{\big(dist(x,P_{\beta,D})^2-\beta^2\big)^{\frac{n}{2}}}\,. \tag{3.122}$$

Com isso, raciocinando como foi feito anteriormente, obtemos

$$\int_M |\nabla\varphi_{\beta,D}|^2 = \int_{M\cap B^n(p,r)} |\nabla\varphi_{\beta,D}|^2 + o_\beta(1)\,. \tag{3.123}$$

Tomando coordenadas normais, analogamente ao que foi feito antes, a menos de um fator multiplicativo da forma $(1+o_r(1))$, segue que

$$\begin{aligned}\Lambda &:= \int_{M\cap B^n(p,r)} |\nabla\varphi_{\beta,D}|^2\\ &\leq (n-2)^2\,\beta^{n-2}\int_{B^n(0,r)_+} \frac{|\widehat{x}|^2+\big(x_n+\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\big)^2}{\Big(|\widehat{x}|^2+\big(x_n+\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\big)^2-\beta^2\Big)^n}\,dx\\ &= (n-2)^2\,\beta^{n-2}\int_{B^n(0,r)_+} \frac{|\widehat{x}|^2+\big(x_n+\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\big)^2 - \beta^2 + \beta^2}{\Big(|\widehat{x}|^2+\big(x_n+\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\big)^2-\beta^2\Big)^n}\,dx\\ &= (n-2)^2\int_{B^n(0,r)_+} \frac{\beta^{n-2}}{\Big(|\widehat{x}|^2+\big(x_n+\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\big)^2-\beta^2\Big)^{n-1}}\,dx\\ &\quad + (n-2)^2\int_{B^n(0,r)_+} \frac{\beta^{n}}{\Big(|\widehat{x}|^2+\big(x_n+\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\big)^2-\beta^2\Big)^{n}}\,dx\,. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Observe que o segundo termo no lado direito em (3.124) é exatamente igual a Υ_1, que já foi estimado em (3.119). Para o primeiro termo no lado direito em (3.124), perceba que

$$\begin{aligned}
\Psi &:= \int_{B^n(0,r)_+} \frac{\beta^{n-2}}{\left(|\widehat{x}|^2 + (x_n + \sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta)^2 - \beta^2\right)^{n-1}}\,dx \\
&= \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x_n^2}} \int_{\mathbb{S}^{n-2}(0,s)} \frac{\beta^{n-2}}{\left(s^2 + (x_n + \sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta)^2 - \beta^2\right)^{n-1}}\,d\theta\,ds\,dx_n \\
&\leq vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^{n-2} \int_0^r \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + x_n^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,x_n\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\right)^{n-1}}\,dx_n\,ds \\
&\leq vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^{n-2} \int_0^r \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,x_n\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\right)^{n-1}}\,dx_n\,ds \\
&= \frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^{n-3}}{2\,(n-2)D\,\sqrt{n\,(n-1)}} \int_0^r \frac{-\,s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,r\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta\right)^{n-2}}\,ds \\
&\quad + \frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\beta^{n-3}}{2\,(n-2)D\,\sqrt{n\,(n-1)}} \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2\right)^{n-2}}\,ds\,. \qquad (3.125)
\end{aligned}$$

Note que $s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2 + 2\,r\,\sqrt{n\,(n-1)}\,D\beta \geq 2r\beta$, para todo $s \in (0, r)$. Portanto, o primeiro termo do lado direito em (3.125) é limitado por uma constante que depende apenas de β e r. Para o segundo termo no lado direito em (3.125), a análise é análoga ao que fizemos no termo na integral em (3.117). Para isso, novamente faça a mudança de variáveis $t = \dfrac{s}{\beta\,\varepsilon_D}$, o que implica $ds = \beta\,\varepsilon_D\,dt$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\beta^{n-3} \int_0^r \frac{s^{n-2}}{\left(s^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2\right)^{n-2}}\,ds &= \beta^{n-3} \int_0^{\frac{r}{\beta\,\varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}\,\beta^{n-2}\,\varepsilon_D^{n-2}}{\left(t^2\,\beta^2\,\varepsilon_D^2 + \beta^2\,\varepsilon_D^2\right)^{n-2}}\,\beta\,\varepsilon_D\,dt \\
&= \beta^{n-3} \int_0^{\frac{r}{\beta\,\varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}\,\beta^{n-1}\,\varepsilon_D^{n-1}}{\left(\beta^2\,\varepsilon_D^2\,(t^2 + 1)\right)^{n-2}}\,dt \\
&= \beta^{n-3} \int_0^{\frac{r}{\beta\,\varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}\,\beta^{n-1}\,\varepsilon_D^{n-1}}{\beta^{2\,(n-2)}\,\varepsilon_D^{2\,(n-2)}\,(t^2 + 1)^{n-2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon_D^{n-3}} \int_0^{\frac{r}{\beta\,\varepsilon_D}} \frac{t^{n-2}}{(t^2 + 1)^{n-2}}\,dt\,. \qquad (3.126)
\end{aligned}$$

Como r é fixo e β é pequeno, então $\dfrac{r}{\beta\,\varepsilon_D} \to +\infty$ quando ε_D tende a 0. Assim como a integral final em (3.117) é limitada, temos que a integral final em (3.126) é limitada por uma constante. Desta forma, por (3.123), (3.124), (3.125) e (3.126), segue que

$$\int_M |\nabla \varphi_{\beta,D}|^2 \le \lambda_n \,\frac{(n-2)^2\, vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)}{2\,(n-1)}\,\frac{1+o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-1}} \;+\; o\bigg(\frac{1}{\varepsilon_D^{n-3}}\bigg). \tag{3.127}$$

Como $\overline{\varphi}_{\beta,D} = \mu^{\frac{n-2}{2}}\,\varphi_{\beta,D}$, podemos substituir o primeiro, segundo, terceiro e quarto termos no lado direito em (3.115) por (3.127), (3.121), (3.120) e (3.118), respectivamente. Consequentemente, a menos de um fator multiplicativo da forma $(1+o_r(1))$ em cada um dos termos, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\varphi}_{\beta,D}) \;\le\;& \frac{2\,(n-1)}{n-2}\,\mu^{n-2}\,\lambda_n\,\frac{(n-2)^2\, vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)}{2\,(n-1)}\,\frac{1+o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-1}} \;+\; o\bigg(\frac{1}{\varepsilon_D^{n-3}}\bigg)\\
&+\; \frac{\mu^{n-2}}{2}\,o\bigg(\frac{1}{\varepsilon_D^{n-3}}\bigg) \;+\; \frac{n-2}{2n}\mu^n\,|K(p)|\,\lambda_n\,\frac{vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)}{2\,(n-1)}\,\frac{1+o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-1}} \;+\; o_\beta(1)\\
&-\; (n-2)\mu^{n-1}H(p)\,vol\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)\,\lambda_n\,\frac{1+o_r(1)}{\varepsilon_D^{n-1}} \;+\; o_\beta(1)\\
=\;& \lambda_n\,\mu^{n-2}\,vol(\mathbb{S}^{n-2})\,(n-2)\bigg(\frac{|K(p)|}{4n\,(n-1)}\,\mu^2 \,-\, H(p)\,\mu \,+\, 1\bigg)\,\frac{1}{\varepsilon_D^{n-1}}\\
&+\; o\bigg(\frac{1}{\varepsilon_D^{n-3}}\bigg).
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Defina

$$P(\mu) \;=\; \frac{|K(p)|}{4n\,(n-1)}\,\mu^2 \,-\, H(p)\,\mu \,+\, 1\,. \tag{3.129}$$

Note que, existe $\mu > 0$ tal que $P(\mu) < 0$ se, e somente se, o discrimante de $P(\mu)$ é positivo, ou seja, se tivermos

$$\frac{|K(p)|}{n(n-1)}\,\big(\mathfrak{D}_n(p)^2 \,-\, 1\big) \;=\; H(p)^2 \,-\, \frac{|K(p)|}{n\,(n-1)} \;>\; 0\,. \tag{3.130}$$

No entanto, perceba que (3.130) é equivalente a nossa hipótese $\mathfrak{D}_n > 1$. Portanto, devido a este fato e a identidade (3.128), podemos afirmar que existem parâmetros $\beta, r > 0$ pequenos e $\mu > 0$ tais que $I(\overline{\varphi}_{\beta,D}) \longrightarrow -\infty$ quando $D \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n-1)}}$.

$\square$

Referências

[1] Ambrosetti, A., and Rabinowitz, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis 14* (1973), 349–381.

[2] Aubin, T. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] Bartsch, T. Critical point theory on partially ordered Hilbert spaces. *J. Funct. Anal. 186*, 1 (2001), 117–152.

[4] Berger, M. S. Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds. *J. Differential Geometry 5* (1971), 325–332.

[5] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[6] Brézis, H., and Lieb, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc. 88*, 3 (1983), 486–490.

[7] Cherrier, P. Problèmes de Neumann non linéaires sur les variétés riemanniennes. *J. Funct. Anal. 57*, 2 (1984), 154–206.

[8] Chipot, M., Shafrir, I., and Fila, M. On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions. *Adv. Differential Equations 1*, 1 (1996), 91–110.

[9] Cruz-Blázquez, S., Malchiodi, A., and Ruiz, D. Conformal metrics with prescribed scalar and mean curvature. *J. Reine Angew. Math. 789* (2022), 211–251.

[10] Djadli, Z., Malchiodi, A., and Ould Ahmedou, M. Prescribing scalar and boundary mean curvature on the three dimensional half sphere. *J. Geom. Anal. 13*, 2 (2003), 255–289.

[11] Do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides. [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015. Fifth edition, second printing of [MR0651516].

[12] Do Carmo, M. P. *Differential geometry of curves & surfaces.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].

[13] Escobar, J. F. The Yamabe problem on manifolds with boundary. *J. Differential Geom. 35*, 1 (1992), 21–84.

[14] Ghoussoub, N. *Duality and perturbation methods in critical point theory*, vol. 107 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993. With appendices by David Robinson.

[15] Han, Z.-C., and Li, Y. The Yamabe problem on manifolds with boundary: existence and compactness results. *Duke Math. J. 99*, 3 (1999), 489–542.

[16] Hebey, E. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, vol. 1635. Springer Science & Business Media, 1996.

[17] Jeanjean, L. On the existence of bounded palais-smale sequences and application to a landesman-lazer-type problem set on $\mathbb{R}^n$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 129*, 4 (1999), 787–809.

[18] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, 2013.

[19] Lee, J. M. *Introduction to Riemannian manifolds*, vol. 176 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, Cham, 2018. Second edition of [MR1468735].

[20] Lee, J. M., and Parker, T. H. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 17*, 1 (1987), 37–91.

[21] Li, Y. Y. Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. I. *J. Differential Equations 120*, 2 (1995), 319–410.

[22] Nečas, J. *Direct methods in the theory of elliptic equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012. Translated from the 1967 French original by Gerard Tronel and Alois Kufner, Editorial coordination and preface by Šárka Nečasová and a contribution by Christian G. Simader.

[23] Struwe, M. The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries. *Acta Math. 160*, 1-2 (1988), 19–64.

[24] Struwe, M. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems*, fourth ed., vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, 2008. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.