UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

THYAGO ANDRADE MOTA

Análise estática de viga compósita laminada apoiada em base elástica de Winkler-Pasternak

São Cristóvão - SE

2023

THYAGO ANDRADE MOTA

Análise estática de viga compósita laminada apoiada em base elástica de Winkler-Pasternak

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador(a): Prof. DSc. Fábio Carlos da Rocha

São Cristóvão - SE

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ATA DE DEFESA

THYAGO ANDRADE MOTA

Análise estática de viga compósita laminada apoiada em base elástica de Winkler-Pasternak

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **22 de dezembro de 2023**

Banca Examinadora		Nota
Orientador(a): Prof. Dr.. Fabio Carlos da Rocha (UFS)	–	9,1
Examinador(a): Msc. Luis Philipe Ribeiro Almeida (USP)	–	9,2
Examinador(a): Prof. Dr. Emerson Figueiredo Santos (UFS)	–	9,1
	Média Final:	**9,1**

gov.br Documento assinado digitalmente
FABIO CARLOS DA ROCHA
Data: 03/01/2024 14:55:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fabio Carlos da Rocha (UFS)
Assinatura do(a) Orientadora(a)

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tornar possível contornar os obstáculos referentes a minha saúde e por conceder forças para concluir a graduação em Engenharia Civil na Universidade Federal de Sergipe. A meus pais, Geraldo e Rose, pelo amor, apoio nas diversas circunstâncias da vida e incentivo à educação. À minha irmã, Jackeline, pelo companheirismo e carinho. À família, no que tange: avós, tios, cunhado, e meu pequeno sobrinho Eduardo.

Aos amigos: Lucas, Willis, Marilia e Juliane. Aos diversos amigos da vida acadêmica, em especial: Abraão, Francisco, Glaston, Jawier, Emerson, Thais Estefany, Thais Izabely, Lavínia, Rayane, Rykelme, Rosane, Luan, Abraao Antônia, Tayane, Carlos Henrique, Rykelme, Rosane, Robert, João e Enzo. Ao professor Fábio, pela disponibilidade em orientar este trabalho e o PIBIC 2021/2022, bem como pelos materiais compartilhados para o estudo da Mecânica das Estruturas. Aos demais professores, em especial: Jorge Costa, David Amorim, Erinaldo Cavalcante, Leandro Favacho, Ludmilson Abritta, Denise Conceição e Emerson Figueiredo. À senhora Maria, pelo bom atendimento na secretaria. Além disso, a todos os professores, desde a educação básica ao ensino médio, em especial: Jacília, Márcio e Marcos.

À equipe Araras Aerodesign e à Liga Acadêmica de Estruturas Metálicas, pelo conhecimento extra no ramo da engenharia estrutural. Aos amigos do CAEC, que sempre propiciaram esforços para promoverem eventos que incrementam conhecimento em torno do mercado a todos os discentes. Ao CREA-SE e ao DIPRO, pela oportunidade nos estágios.

“Eu sou o caminho, a verdade e a vida. Ninguém vem ao Pai, a não ser por mim.”

(João 14:6)

“A ciência é, portanto, uma perversão de si mesma, a menos que tenha como fim último, melhorar a humanidade.”

(Nikola Tesla)

RESUMO

O presente trabalho faz uma análise estática de uma viga compósita laminada biapoiada situada sobre base elástica. O elemento estrutural tem a flexão regida pela cinemática de Euler-Bernoulli, é submetido a um carregamento senoidal e formado por 3 camadas cuja orientação das fibras o categoriza como viga cross-ply. O desenvolvimento analítico compreende a formulação das equações de equilíbrio e das condições de contorno partindo do princípio da mínima energia potencial e a solução das equações diferenciais parciais via método de Navier. Outrossim, é feita a dedução da tensão cisalhante a partir das equações de equilíbrio, bem como é analisada a influência da base elástica nos deslocamentos axiais e verticais e nas tensões normais e cisalhantes ao longo da viga.

Palavras-chave: Materiais Compósitos, Viga Cross-Ply; Base Elástica; Euler-Bernoulli.

ABSTRACT

The present work makes a static analysis of a double-supported laminated composite beam located on an elastic base. The structural element's bending is governed by Euler-Bernoulli kinematics, is subjected to sinusoidal loading and is formed by 3 layers whose fiber orientation categorizes it as a cross-ply beam. The analytical development comprises the formulation of equilibrium equations and boundary conditions based on the principle of minimum potential energy and the solution of partial differential equations via the Navier method. Furthermore, the shear stress is deduced from the equilibrium equations, as well as the influence of the elastic base on the axial and vertical displacements and normal and shear stresses along the beam.

Keywords: Composite Materials; Cross-Ply Beam; Elastic Base; Euler-Bernoulli.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ε_x	Deformação especifica longitudinal no sentido do eixo x
ε_y	Deformação especifica longitudinal no sentido do eixo y
ε_z	Deformação especifica longitudinal no sentido do eixo z
γ_{xy}	Deformação especifica transversal no plano xy
γ_{xz}	Deformação especifica transversal no plano xz
γ_{yz}	Deformação especifica transversal no plano yz
E_x	Módulo de Elasticidade no sentido do eixo x
E_y	Módulo de Elasticidade no sentido do eixo y
G_{xy}	Módulo de Elasticidade Transversal no plano xy
k_o^u	Rigidez ao movimento de translação na direção do eixo x em x = 0
$k_o^{\theta_y}$	Rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo y em x = 0
k_o^v	Rigidez ao movimento de translação na direção do eixo y em x = 0
$k_o^{\theta_z}$	Rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo z em x = 0
k_o^w	Rigidez ao movimento de translação na direção do eixo z em x = 0
k_o^{ϑ}	Rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo x em x = 0.
k_L^u	Rigidez ao movimento de translação na direção do eixo x em x = L
$k_L^{\theta_y}$	Rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo y em x = L
k_L^v	Rigidez ao movimento de translação na direção do eixo y em x = L.
$k_L^{\theta_z}$	Rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo z em x = L.
k_L^w	Rigidez ao movimento de translação na direção do eixo z em x = L.
k_L^{ϑ}	Rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo x em x = L
K_w	Constante elástica de Winkler (1867)
K_p	Constante elástica de Pasternak (1954)
TCUE	Teoria da Camada Única Equivalente
TZZ	Teoria do Zig-Zag

TLZ Teoria Layersize

u_o Deslocamento axial no eixo centroidal na direção x

u_x Deslocamento em um ponto da viga na direção x

u_y Deslocamento em um ponto da viga na direção y

u_z Deslocamento em um ponto da viga na direção z

v_o Deslocamento axial no eixo centroidal na direção y

ν_{xy} Coeficiente de Poisson no plano xy

w_o Deslocamento axial no eixo centroidal na direção z.

$\theta_y(x)$ Ângulo de rotação em torno do eixo y.

$\theta_z(x)$ Ângulo de rotação em torno do eixo z.

$\phi_{zz}^k(z)$ Função Zig-Zag

$\psi(x)$ Função amplitude

σ_x Tensão axial no sentido do eixo x

σ_y Tensão axial no sentido do eixo y

σ_z Tensão axial no sentido do eixo z

τ_{xy} Tensão cisalhante no plano xy

τ_{xz} Tensão cisalhante no plano xz

τ_{yz} Tensão cisalhante no plano xz

$\theta_y(x)$ Ângulo de rotação em torno do eixo y

$\theta_z(x)$ Ângulo de rotação em torno do eixo z

$\phi_{zz}^k(z)$ Função Zig-Zag

$\psi(x)$ Função Amplitude

z e y Cotas ao longo respectivamente da altura e da espessura da viga.

SUMÁRIO

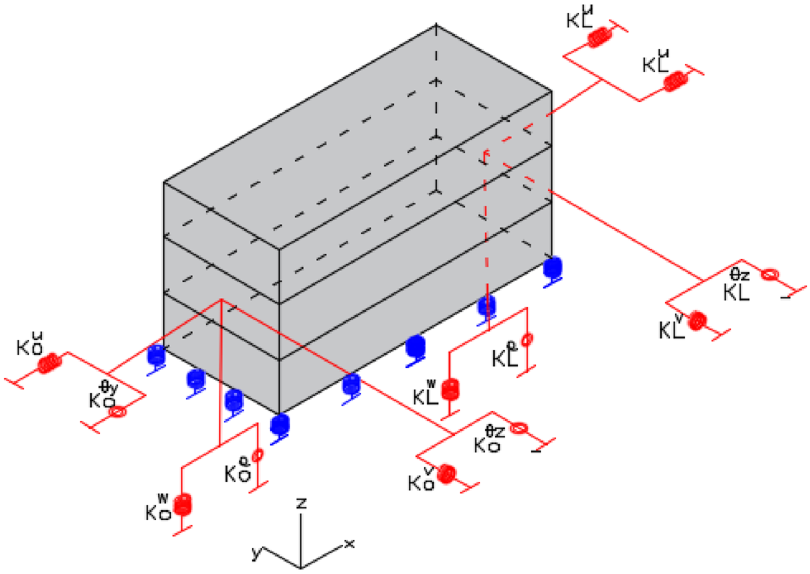
1 INTRODUÇÃO

Segundo Beer et al. (2011), vigas são elementos estruturais projetados para suportar a ação de cargas que costumam atuar perpendicularmente ao seu eixo ocasionando esforços de flexão e de cisalhamento. Neste trabalho, a viga é formada por materiais compósitos que, segundo Kaw (2006), são oriundos da combinação de dois ou mais materiais de modo a combinar suas propriedades particulares.

O presente trabalho realiza a análise estrutural de uma viga compósita laminada biapoiada, apoiada em base elástica e submetida a carregamento senoidal. A viga é composta por 3 camadas, conforme a Figura 1, e reforçada por fibras com orientação: 0º, 90º e 0º conforme mostrado na Figura 2. Essa configuração atribui ao elemento estrutural a denominação de viga cross-ply. Outras configurações para vigas compósitas laminadas, baseadas na orientação de suas fibras, se encontram no Apêndice H.

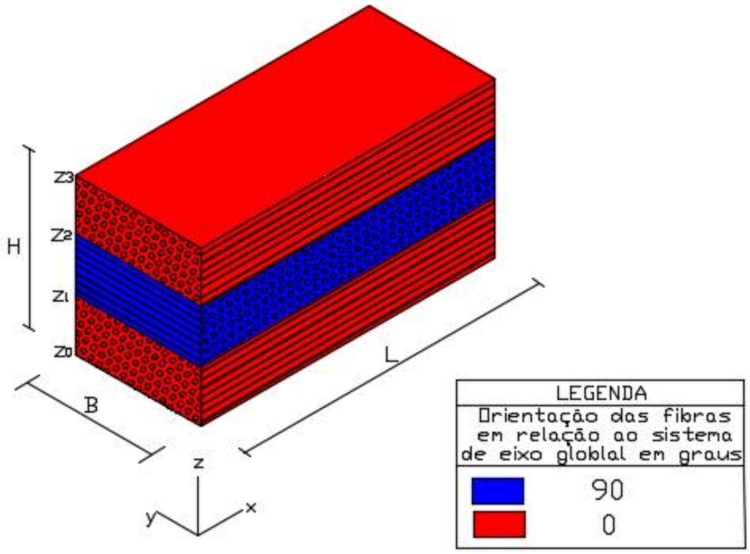
A partir do campo de deslocamento de Euler-Bernoulli foram desenvolvidas as expressões matemáticas atreladas à flexão da viga. Nessa teoria, as seções transversais da viga permanecem planas e ortogonais ao eixo médio após a ação do carregamento.

Figure 1 - Viga Composita Laminada Biapoiada ssituada sobre base elástica



Fonte: Elaboração Própria (2023)

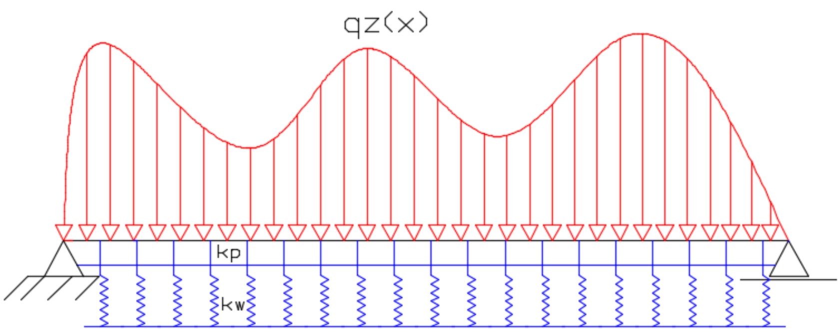
Figure 2 - Viga Cross-Ply



Fonte: Elaboração Própria (2023)

A viga em análise neste trabalho será restrita à biapoiada ao calibrar as molas, situadas em suas extremidades, de tal modo que as rigidezes aos deslocamentos verticais e ao deslocamento axial, respectivamente denominados por k_0^w, k_L^w e k_0^u, tendam ao infinito. Esta limitação é devido ao método de resolução de Navier ser destinado apenas a este tipo de apoio. Adicionalmente, devido a grande quantidade de análises, este trabalho será restrito à análise de vigas laminadas reforçadas com fibras submetido a carregamento senoidal e apoiada em base elástica de Winkler e Pasternak conforme ilustrado na Figure 3.

Figure 3 - Viga Cross-Ply submetida a carregamento senoidal



Fonte: Elaboração Própria (2023)

No presente trabalho, a formulação das equações de equilíbrio e das condições de contorno partiram do Princípio da Mínima Energia Potencial cuja explicação se encontra no Apêndice G. Em seguida, é deduzida a expressão da tensão cisalhante através das equações de equilíbrio com o objetivo de tecer comparações a tensão de cisalhamento oriunda do modelo constitutivo. Além disso, são analisadas as contribuições da base elástica perante os deslocamentos e as tensões atuantes na viga.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho almeja formular as equações de equilíbrio e as condições de contorno de uma viga compósita laminada biapoiada situada sobre base elástica. Além disso, objetiva deduzir a tensão de cisalhamento por meio das equações de equilíbrio e, em seguida, compará-la com a tensões cisalhante oriunda do modelo constitutivo.

2.2 OBJETIVOS ESPECIFÍCOS

Para obter as equações de equilíbrio e as condições de contorno da viga, foi necessário empregar o Princípio da Mínima Energia Potencial. Esta teoria mostra que a energia total no sistema é nula quando há equivalência entre as intensidades das energias potenciais externa e interna. Para averiguar a dedução, consultar o Apêndice G.

Para solucionar as equações de equilíbrio, foi utilizado o método de Navier. Este representa a solução das equações diferenciais parciais via séries de Fourier, apresentadas no Apêndice C. Ademais, a fim de tecer comparações com a tensão cisalhante oriunda do modelo constitutivo, foi formulada a expressão da tensão de cisalhamento por meio da integração das equações de equilíbrio.

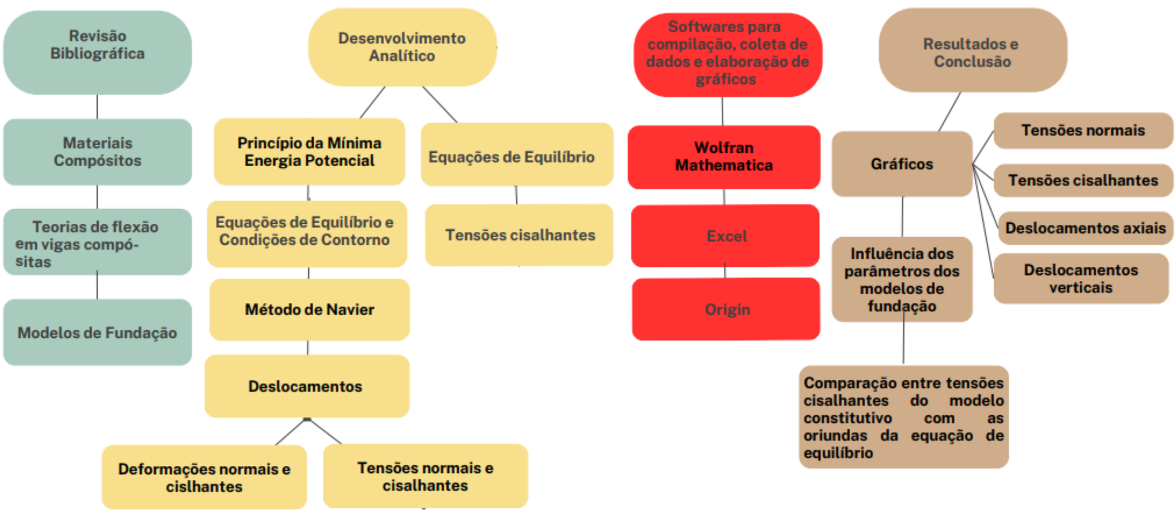
2.3 JUSTIFICATIVA

Na literatura há carência de análises mecânicas referentes a vigas compósitas laminadas apoiadas em base elástica com condições de contorno arbitrárias proporcionadas pela modelagem de molas em suas extremidades. Tal situação levou o presente trabalho a formular e solucionar as equações de equilíbrio, bem como analisar os deslocamentos e as tensões presentes ao longo da viga compósita laminada reforçada por fibras apoiada em base elástica e com condições de contorno quaisquer. Outrossim, vigas compósitas laminadas apresentam elevada resistência mecânica tornando as ideais para aplicação tanto na ausência quanto na presença de diferentes tipos de bases elásticas regidas por Winkler (1867) e Pasternak (1954).

3 METODOLOGIA

Para entender a mecânica dos materiais compósitos laminados, foi feita revisão bibliográfica acerca de materiais compósitos, teorias de flexão e modelos de fundação. Além disso, para a formulação analítica da flexão em vigas compósitas laminadas apoiadas em base elástica foi necessário utilizar o Princípio da Mínima Energia Potencial e o Método de Navier para solucionar as equações diferenciais parciais atreladas ao equilíbrio estrutural. Em virtude do desenvolvimento analítico complexo, foi utilizado o *software Mathematica* para comparação e segurança nos cálculos envolvidos. Outrossim, recorreu-se ao *software Origin* para elaboração dos gráficos.

Figure 4 – Etapas da Análise Estática da Viga Compósita Laminada



Fonte: Elaboração Própria (2023)

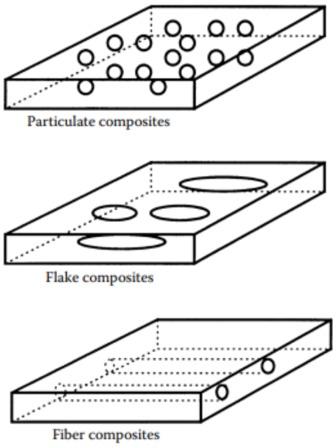
Outros trabalhos de conclusão de curso do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe abordaram estruturas formadas por materiais compósitos. Melo (2022) modelou uma viga compósita laminada funcionalmente graduada porosa sem a presença de base elástica através da implementação de teorias de alta ordem via método dos elementos finitos espectral que possibilitou averiguar a distribuição de tensões e de deslocamentos ao longo da altura da viga. Oliveira (2022) investigou uma viga compósita laminada submetidas a diferentes condições de contorno e de carregamento, apoiada em base elástica e regida pela cinemática de Euler-Bernoulli. Além disso, as equações de equilíbrio da viga partiram do Princípio dos Trabalhos Virtuais e foram solucionadas por meio do método de variação de parâmetros. Outrossim, a autora averiguou a influência da base elástica nas intensidades dos deslocamentos da viga.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

4.1 MATERIAIS COMPÓSITOS

Segundo Reddy (2003), o material compósito é resultante da interação entre componentes não solúveis entre si na escala macroscópica. Nessa perspectiva, os elementos com maior e menor concentração são denominados respectivamente como matriz e fase de reforço. Segundo Jones (1999), a fase pode se encontrar na matriz sob várias formas, a serem: partículas, lâminas ou fibras conforme ilustrado na Figura 1.

Figure 5 - Tipos de materiais compósitos



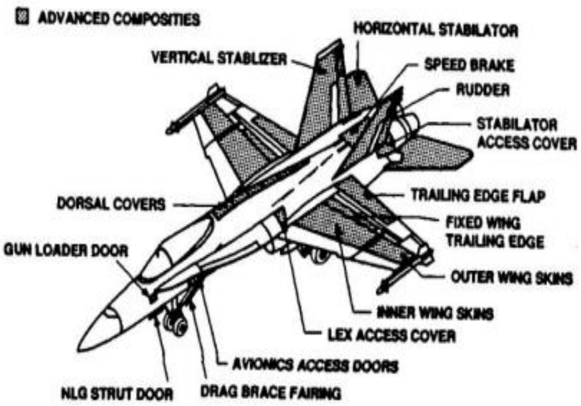
Fonte: Jones (1999)

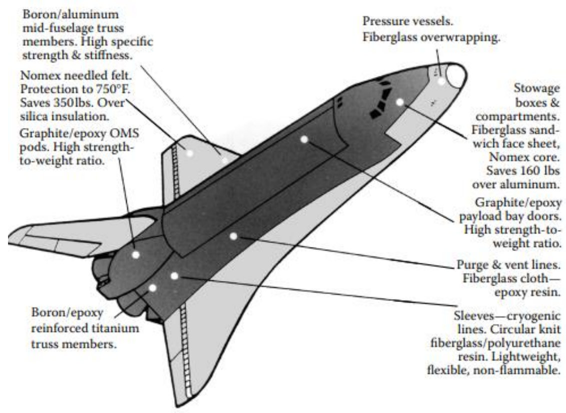
Na Engenharia Civil, os materiais compósitos podem compor as lajes, as vigas e os pilares em virtude da excelente resistência mecânica. Nessa perspectiva, o concreto armado é considerado um material compósito onde a matriz, representada pelo concreto, apresenta resistência a compressão e a fase, representado pelo aço, resiste aos esforços de tração.

Outrossim, segundo Jones (1999), nas Engenharias Aeronáutica e Aeroespacial, estes materiais permitem às aeronaves e às espaçonaves adquirirem resistência aos elevados gradientes de temperatura conforme transitam às camadas da atmosfera. Atrelado a isso, proporcionam menos peso e, consequentemente, reduções no consumo de combustível e no custo das companhias aéreas. Na Figura 6, são ilustradas as partes da aeronave e da espaçonave constituídas por materiais compósitos.

Além disso, os materiais compósitos são eficientes contra a oxidação e eficazes à adaptação entre o tecido humano e aparelhos de implantes, o que justifica respectivamente a aplicação nas indústrias naval e biomédica. Ademais, apresenta amplo emprego na constituição de componentes eletrônicos, a exemplo das fibras óticas.

Figure 6 - Materiais compósitos em aeronave e em espaçonave



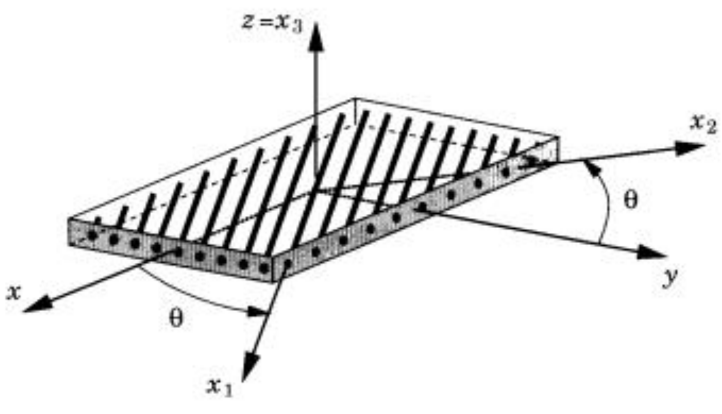


Fonte: Adaptado de Jones (1999)

As resistências mecânica e térmica dos materiais compósitos são influenciadas pelo ângulo entre suas fibras e o eixo global da estrutura como apresentado na Figura 7. Segundo Huynh et al. (2017), várias orientações, conforme ilustra a Figura 8, agregam resistência às tensões térmicas.

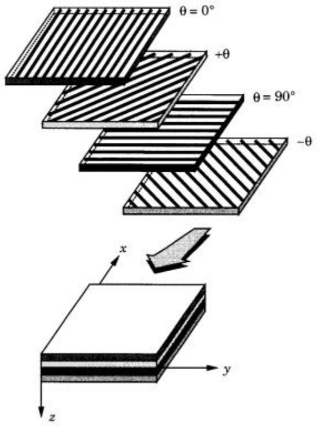
Em Kaw (2006), são apresentados gráficos das propriedades mecânicas de um material compósito em função da orientação de suas fibras. Na Figura 9, é perceptível o decremento nos valores de E_x e v_{xy} com o aumento do ângulo entre os eixos local e global. Enquanto que, para E_y, ocorre comportamento inverso. Além disso, é ilustrada a variação de G_{xy} cuja maior intensidade está atrelada ao ângulo de 45º.

Figure 7 - Sistemas de coordenadas global e local



Fonte: Reddy (2003)

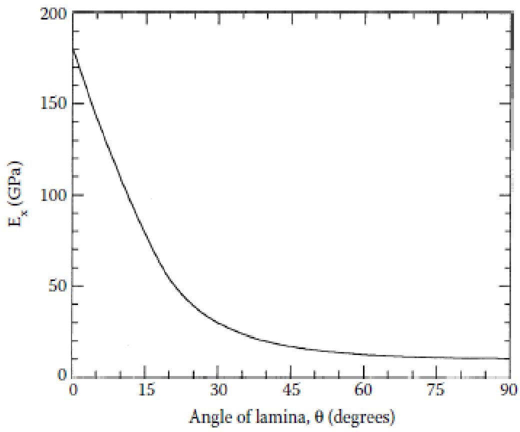
Figure 8 - Orientações de fibras do material compósito



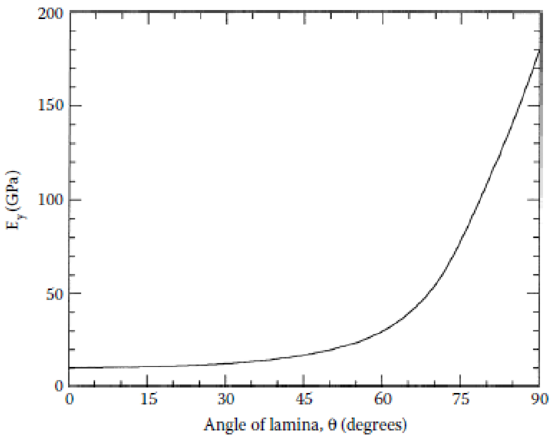
Fonte: Reddy (2003)

Figure 9 - Propriedades Mecânicas em função da orientação das fibras. a) Módulo de elasticidade longitudinal na direção x, b) Módulo de elasticidade longitudinal na direção y, c) Coeficiente de Poisson e d) Módulo de Elasticidade Transversal no plano xy.

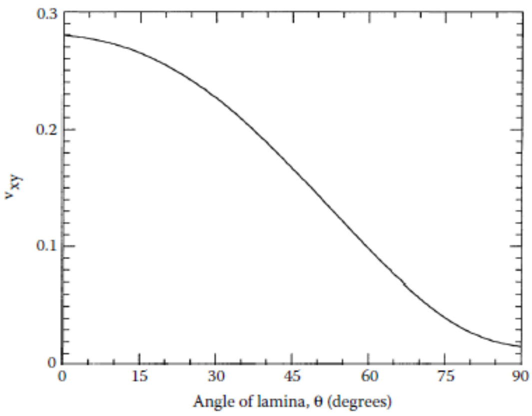
a)



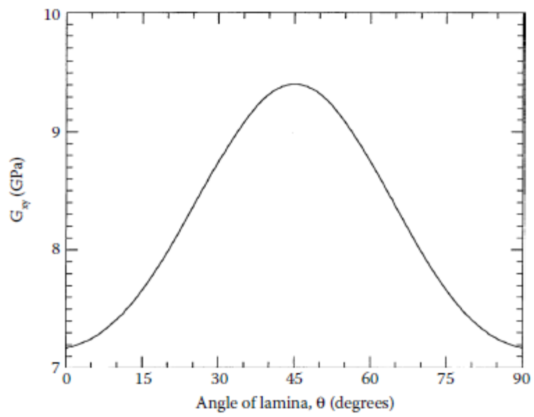
b)



c)



d)

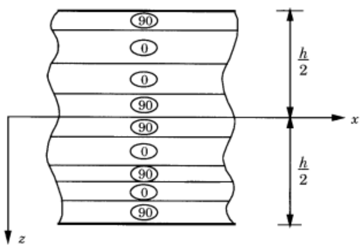


Fonte: Adaptado de Kaw (2006)

4.2 TEORIAS EMPREGADAS NA ANÁLISE ESTRUTURAL DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS

Para a análise estrutural das vigas compósitas laminadas, pode ser aplicada alguma das seguintes teorias: Teoria da Camada Única Equivalente (TCUE), Teoria do Zig-Zag (TZZ) e Teoria Lawersize (TLW) Teoria do Zig-Zag (TZZ). No presente trabalho, foi implementada a função Zig-Zag na cinemática de Euler-Bernoulli.

Figure 10 - Estrutura com várias camadas



Fonte: Reddy (2003)

A TCUE analisa materiais estratificados equivalente a um material homogêneo com camada única, o que permite obter resultados satisfatórios no que tange a deslocamentos. Além disso, o número de camadas da viga não interfere no desempenho computacional da solução do sistema de equações diferenciais. No entanto, suas funções pertencem à classe C^1 o que impede averiguar satisfatoriamente as tensões nas interfaces entre as camadas. Nessa situação, deve-se recorrer a outras teorias que, segundo Reddy (2003), adotam funções contínuas de classe C^0, a serem: Teoria Zig-Zag (TZZ) e Teoria Layersize (TLW).

A TZZ permite solucionar os sistemas de equações diferenciais independentemente da quantidade de camadas da viga. Dessa maneira, o processamento computacional se configura com maior velocidade em relação a TLW. Segundo Ghugal e Shimpi (2010), embora a TLW gere resultados bem precisos, sua maior limitação se encontra na dependência entre o número de incógnitas e o número de estratificações do elemento estrutural. No Quadro 1, são ilustradas comparações entre as teorias apresentadas.

Quadro 1 – Comparação entre TCUE, TZZ e TLW

Teoria	Solução dependente do número de camadas	Classe de função
TCUE	Não	C^1
TZZ	Não	C^0
TLW	Sim	C^0

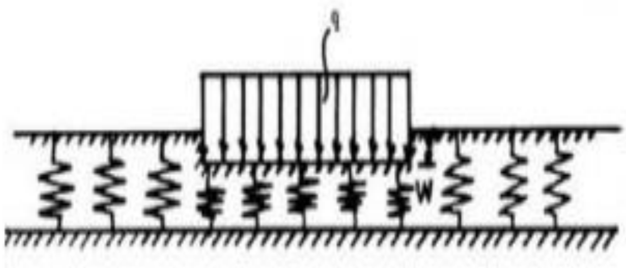
Fonte: Elaboração Própria (2023)

4.3 MODELOS DE FUNDAÇÃO

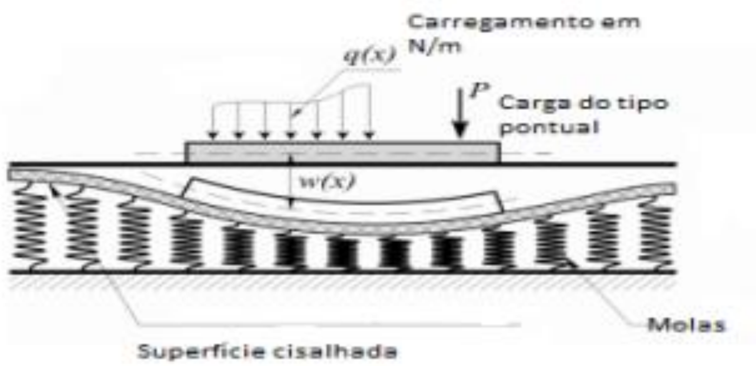
Para analisar a interação entre uma estrutura e uma base elástica, pode recorrer aos seguintes modelos: Winkler (1867) e Pasternak (1954). O primeiro modelo considera o solo uma base elástica onde, segundo Antoniazzi (2011), apenas as partículas abaixo do carregamento se deslocam de forma independente. Enquanto que, no segundo modelo, tanto as partículas abaixo do carregamento, quanto as localizadas nas regiões circunvizinhas, se deslocam de forma dependente. A expressão (4.6) e a Figura 11 a) ilustram apenas o modelo de Winkler (1867), enquanto que a expressão (4.7) e a Figura 11 b) apresentam a combinação entre os modelos de Winkler (1867) e Pasternak (1954), empregada na análise estrutural do presente trabalho.

Figure 11 – a) Modelo de Winkler e b) Modelo de Winkler-Pasternak

a)



b)



Fonte: Adaptado de Santos (2015).

$$q = k_w \cdot u \quad (4.6)$$

$$q = -\frac{d}{dx}\left(k_p \cdot \frac{du}{dx}\right) + k_w \cdot u \tag{4.7}$$

onde:

q – carregamento.

u - deslocamento da base elástica.

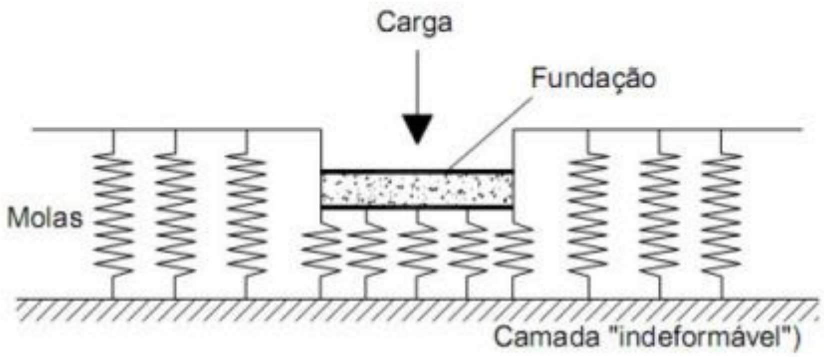
k_w - coeficiente de rigidez sem relação com o cisalhamento da base elástica.

k_p - coeficiente de rigidez atrelado ao cisalhamento do solo.

Oliveira (2022) analisou uma viga compósita laminada anisotrópica situada em base elástica e submetida a carregamento uniforme em diversas condições de contorno, a serem: biapoiada, biengastada e engastada. Além disso, utilizou o campo de deslocamento oriundo da teoria de Euler-Bernoulli e, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, formulou as equações de equilíbrio e as condições de contorno. Para solucionar as equações diferenciais, foram utilizadas técnicas de integração direta e o método da variação de parâmetros. Por fim, a autora concluiu que os deslocamentos transversais da viga sofrem maior influência do parâmetro de rigidez de Pasternak (1954) quando comparado ao de Winkler (1867).

Santos (2015) estudou a flexão estocástica em uma viga apoiada em base elástica por meio do método de simulação de Monte Carlo. O autor dispôs da cinemática de Euler-Bernoulli e avaliou a influência da base elástica em relação aos deslocamentos transversais da viga por meio dos modelos de Winkler (1867) e de Pasternak (1954). Conforme o autor, o último modelo simula com maior concisão o comportamento da estrutura apoiada no solo visto que considera a ação do carregamento nas regiões circunvizinhas. A Figura 12 ilustra uma carga pontual aplicada em uma base elástica regida pelo modelo de Winkler (1867).

Figure 12 - Base elástica sob carga pontual representada por Winkler (1867)



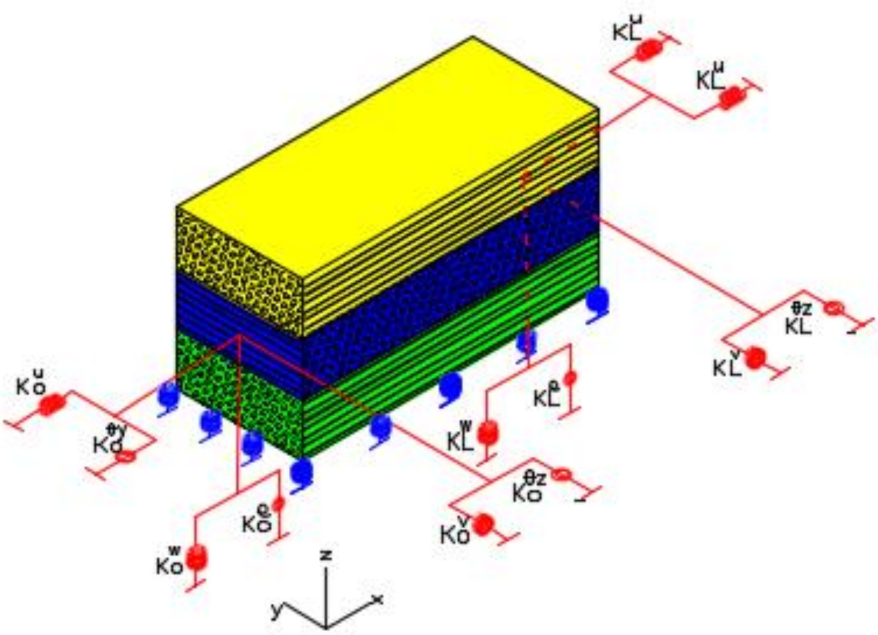
Fonte: Antoniazzi (2011).

5 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

5.1 DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E DE CONDIÇÕES DE CONTORNO:

No presente trabalho, a viga compósita laminada, ilustrada na Figura 9, está apoiada em uma base elástica e contornada por molas. Além disso, ela é regida pelo campo de deslocamento de Euler-Bernoulli, designado pela expressão (5.1), e cuja aplicação em 3 dimensões foi implementado por Doeva (2021).

Figure 13 - Viga compósita laminada apoiada em base elástica e contornada por molas



Fonte: Elaboração Própria (2023)

$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = u_0(x) + z \cdot \theta_y(x) - y \cdot \theta_z(x) + \phi_{zz}^k(z) \cdot \psi(x) \\ u_y(x,z) = v_o(x) - z \cdot \vartheta(x) \\ u_z(x,y) = w_o(x) + y \cdot \vartheta(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

onde:

- u_x – deslocamento em um ponto da viga na direção x.
- u_y – deslocamento em um ponto da viga na direção y.
- u_z – deslocamento em um ponto da viga na direção z.
- u_o – deslocamento axial em um ponto no eixo centroidal na direção x.
- v_o – deslocamento axial em um ponto no eixo centroidal na direção y.
- w_o – deslocamento axial em um ponto no eixo centroidal na direção z.
- $\theta_y(x)$ – ângulo de rotação em torno do eixo y.
- $\theta_z(x)$ – ângulo de rotação em torno do eixo z.
- z e y– cotas ao longo respectivamente da altura e da espessura da viga.
- $\phi_{zz}^k(z)$ – função Zig-Zag.
- $\psi(x)$ – função amplitude.

Na Figura 12, as incógnitas ilustradas representam a rigidez das molas aos graus de liberdade da estrutura. Nessa perspectiva:

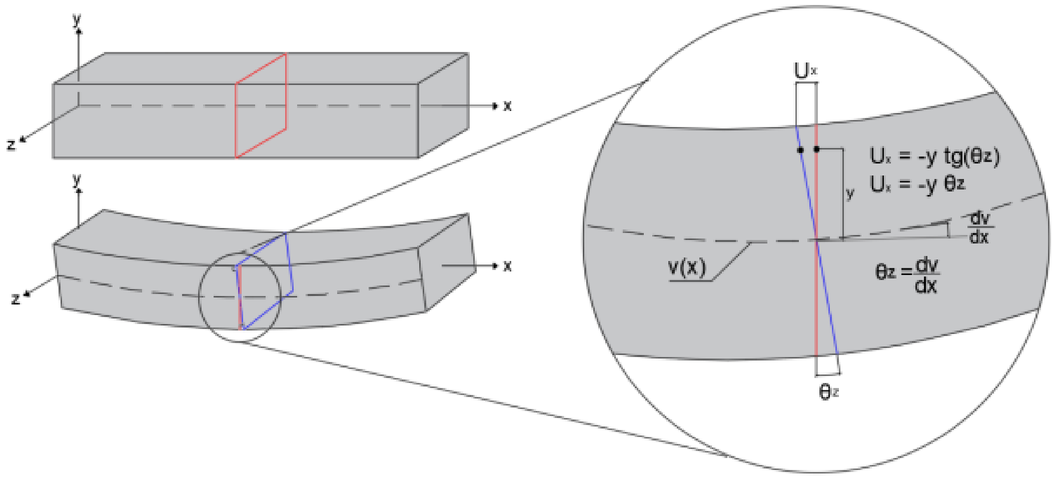
- k_o^u - rigidez ao movimento de translação na direção do eixo x em x = 0.
- $k_o^{\theta_y}$ - rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo y em x = 0.
- k_o^v - rigidez ao movimento de translação na direção do eixo y em x = 0.
- $k_o^{\theta_z}$ - rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo z em x = 0.
- k_o^w - rigidez ao movimento de translação na direção do eixo z em x = 0.
- k_o^{ϑ} - rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo x em x = 0.
- k_L^u - rigidez ao movimento de translação na direção do eixo x em x = L.
- $k_L^{\theta_y}$ - rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo y em x = L.
- k_L^v - rigidez ao movimento de translação na direção do eixo y em x = L.
- $k_L^{\theta_z}$ - rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo z em x = L.
- k_L^w - rigidez ao movimento de translação na direção do eixo z em x = L.
- k_L^{ϑ} - rigidez ao movimento de rotação na em torno do eixo x em x = L.

Os ângulos de rotações, em torno dos eixos x e y, são representados pelas expressões (5.2) e (5.3). Outrossim, as deflexões em torno dos eixos y e z são similares às de Oliveira (2022) sendo ilustradas nas Figuras 13 e 14.

$$\theta_y = -\frac{dw_o(x)}{dx} \tag{5.2}$$

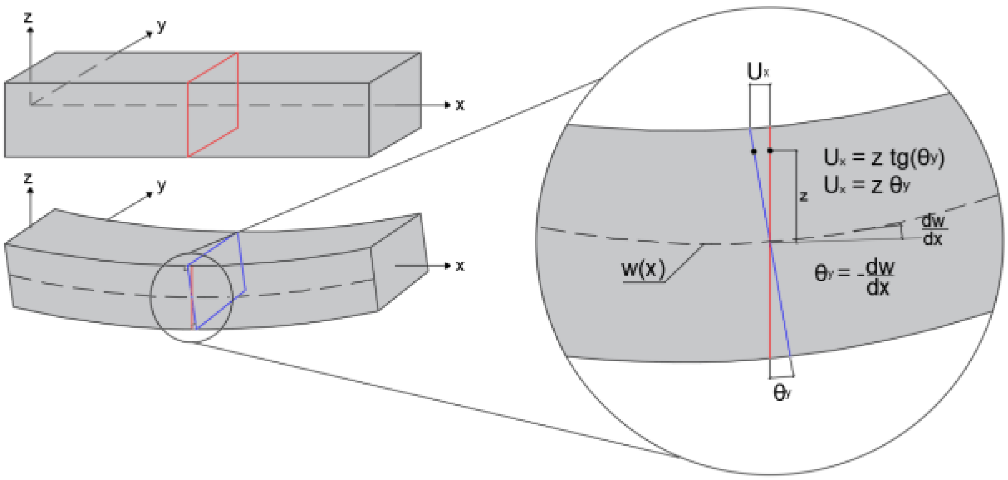
$$\theta_z = \frac{dv_o(x)}{dx} \tag{5.3}$$

Figure 14 - Deflexão da viga na direção y



Fonte: Oliveira (2022)

Figure 15 – Deflexão da viga na direção z



Fonte: Oliveira (2022)

As deformações axiais e cisalhantes são apresentadas respectivamente nas expressões (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9).

$$\varepsilon_x = \frac{du_x(x,y,z)}{dx} = u_{0,x}(x) + z\cdot\theta_{y,x}(x) - y\cdot\theta_{z,x}(x) + \phi_{zz}^k(z)\cdot\psi_{1x}(x) \tag{5.4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{du_y(x,z)}{dy} = 0 \tag{5.5}$$

$$\varepsilon_z = \frac{du_z(x,y)}{dz} = 0 \tag{5.6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} = -\theta_z(x) + v_{0,x}(x) - z\cdot\vartheta_{1x}(x) \tag{5.7}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du_x}{dz} + \frac{du_z}{dx} = \theta_y(x) + \phi_{zz,z}^k(z)\cdot\psi(x) + w_{0,x}(x) + y\cdot\vartheta_{1x}(x) \tag{5.8}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{du_y}{dz} + \frac{du_z}{dy} = 0 \tag{5.9}$$

As expressões (5.10), (5.11) e (5.12) retratam o formato matricial das equações apresentadas em (5.1).

$$u_x(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{zz}^k(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_o(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & -y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ v_{0,x} \\ \vartheta_{1x} \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

$$u_y(y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_0(x) \\ v_0(y) \\ \vartheta(x) \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

$$u_z(y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_0(x) \\ v_0(x) \\ \vartheta(x) \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

As expressões (5.13) à (5.19) são usadas para simplificação dos campos de deslocamento e de deformações.

$$\begin{bmatrix} T_\phi^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{zz}^k(z) \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$$\{d_1(x)\} = \begin{Bmatrix} u_o(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} \tag{5.14}$$

$$\begin{bmatrix} T_1(z,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & -y & 0 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

$$\{d_{2,x}(x)\} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ v_{0,x} \\ \vartheta_{1x} \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

$$[T_z(z)] = [0 \quad 1 \quad -z] \tag{5.17}$$

$$\{d_2(x)\} = \begin{Bmatrix} w_0(x) \\ v_0(y) \\ \vartheta(x) \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

$$[T_y(y)] = [1 \quad 0 \quad y] \tag{5.19}$$

A expressão (5.20) denota o campo de deslocamento com as simplificações algébricas apresentadas anteriormente. Procedimentos análogos são conduzidos às expressões (5.21) a (5.23) que regem as deformações axiais e cisalhantes.

$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = \left[T_\phi^k\right]\cdot\{d_1(x)\} + [T_1(z,y)]\cdot\{d_{2,x}(x)\} \\ u_y(x,z) = [T_z(z)]\cdot\{d_2(x)\} \\ u_z(x,y) = \left[T_y(y)\right]\cdot\{d_2(x)\} \end{cases} \tag{5.20}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du_x(x,y,z)}{dx} = \left[T_\phi^k\right]\cdot\{d_{1,x}(x)\} + [T_1(z,y)]\cdot\{d_{2,xx}(x)\} \tag{5.21}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} = \left[T_{1,y}(z,y)\right]\cdot\{d_{2,x}(x)\} + [T_z(z)]\cdot\{d_{2,x}(x)\} \tag{5.22}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du_x}{dz} + \frac{du_z}{dx} = \left[T_{\varphi,z}^{(k)}(z)\right]\cdot\{d_1(x)\} + \left[T_{1,z}(z,y)\right]\cdot\{d_{2,x}(x)\} + \left[T_y(y)\right]\cdot\{d_{2,x}(x)\} \tag{5.23}$$

As expressões (5.24) e (5.25), aplicadas em (5.22) e (5.23), resultam nas formulações de deformações cisalhantes presentes em (5.26) e (5.27). A Lei de Hooke correlaciona as tensões às deformações em um corpo como expresso em (5.28). Nesta expressão, o formato da matriz de rigidez remete a um corpo tridimensional ortotrópico.

$$y_1(z) = \left[\left[T_{1,y}(z,y)\right] + [T_z(z)]\right] \tag{5.24}$$

$$y_2(y) = \left[\left[T_{1,z}(z,y)\right] + \left[T_y(y)\right]\right] \tag{5.25}$$

$$\gamma_{xy} = y_1(z)\cdot\{d_{2,x}(x)\} \tag{5.26}$$

$$\gamma_{xz} = \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z) \right] \cdot \left\{ d_1(x) \right\} + y_2(z) \cdot \left\{ d_{2,x}(x) \right\} \tag{5.27}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & \bar{c}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} & 0 \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{36} & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

Os coeficientes de rigidez, apresentados na Lei de Hooke, são designados pelas expressões (5.29) à (5.41). Vale ressaltar que θ corresponde ao ângulo formado pela direção das fibras com sistema de eixos global da viga.

$$\bar{c}_{11} = c_{11} \cdot \cos^4\theta + 2 \cdot (c_{12} + 2 \cdot c_{66}) \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta + c_{22} \cdot \sin^4\theta \tag{5.29}$$

$$\bar{c}_{12} = c_{12} \cdot \cos^4\theta + (c_{11} + c_{22} - 4 \cdot c_{66}) \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta + c_{12} \cdot \sin^4\theta \tag{5.30}$$

$$\bar{c}_{13} = c_{13} \cdot \cos^2\theta + c_{23} \cdot \sin^2\theta \tag{5.31}$$

$$\bar{c}_{16} = (c_{11} - c_{12} - 2 \cdot c_{66}) \cdot \cos^3\theta \cdot \sin\theta + (2 \cdot c_{66} + c_{12} - c_{22}) \cdot \cos\theta \cdot \sin^3\theta \tag{5.32}$$

$$\bar{c}_{22} = c_{22} \cdot \cos^4\theta + 2 \cdot (c_{12} + 2 \cdot c_{66}) \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta + c_{11} \cdot \sin^4\theta \tag{5.33}$$

$$\bar{c}_{23} = c_{23} \cdot \cos^2\theta + c_{13} \cdot \sin^2\theta \tag{5.34}$$

$$\bar{c}_{26} = (c_{12} - c_{22} + 2 \cdot c_{66}) \cdot \cos^3\theta \cdot \sin\theta + (c_{11} - c_{12} - 2 \cdot c_{66}) \cdot \cos\theta \cdot \sin^3\theta \tag{5.35}$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} \tag{5.36}$$

$$\bar{c}_{36} = (c_{13} - c_{23}) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \tag{5.37}$$

$$\bar{c}_{66} = \left(c_{11} + c_{22} - 2 \cdot c_{12} - 2 \cdot c_{66}\right) \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta + c_{66} \cdot (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \tag{5.38}$$

$$\bar{c}_{44} = c_{44} \cdot \cos^2\theta + c_{55} \cdot \sin^2\theta \tag{5.39}$$

$$\bar{c}_{45} = (c_{55} - c_{44}) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \tag{5.40}$$

$$\bar{c}_{55} = c_{55} \cdot \cos^2\theta + c_{44} \cdot \sin^2\theta \tag{5.41}$$

Os termos presentes nas expressões dos coeficientes de rigidez, entre (5.29) e (5.41), são detalhados entre (5.42) e (5.51):

$$c_{11} = \frac{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{23}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} \tag{5.42}$$

$$c_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} \tag{5.43}$$

$$c_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} \tag{5.44}$$

$$c_{22} = \frac{1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} \tag{5.45}$$

$$c_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} \tag{5.46}$$

$$c_{33} = \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} \tag{5.47}$$

$$c_{44} = G_{23} \tag{5.48}$$

$$c_{55} = G_{31} \tag{5.49}$$

$$c_{66} = G_{12} \tag{5.50}$$

$$\Delta = 1 - \frac{\nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3} \tag{5.51}$$

Na equação (5.28), levando em conta o estado plano de deformação, obtêm-se as equações (5.52) a (5.58). Dessa maneira, a Lei de Hooke é reduzida a (5.59).

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \tag{5.52}$$

$$\sigma_x = \bar{c}_{11} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{16} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.53}$$

$$\sigma_y = \bar{c}_{21} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{26} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.54}$$

$$\sigma_z = \bar{c}_{31} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{36} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.55}$$

$$\sigma_{yz} = \bar{c}_{45} \cdot \varepsilon_{xz} \tag{5.56}$$

$$\sigma_{xz} = \bar{c}_{55} \cdot \varepsilon_{xz} \tag{5.57}$$

$$\sigma_{xy} = \bar{c}_{16} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{66} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.58}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{16} & 0 \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.59}$$

Na equação (5.28), levando em conta o estado plano de tensão, obtêm-se as expressões (5.60) à (5.63).

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_{yz} = 0 \tag{5.60}$$

$$\sigma_x = \bar{c}_{11} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{12} \cdot \varepsilon_y + \bar{c}_{13} \cdot \varepsilon_z + \bar{c}_{16} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.61}$$

$$\sigma_y = \bar{c}_{21} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{22} \cdot \varepsilon_y + \bar{c}_{23} \cdot \varepsilon_z + \bar{c}_{26} \cdot \varepsilon_{xy} = 0 \tag{5.62}$$

$$\sigma_z = \bar{c}_{31} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{32} \cdot \varepsilon_y + \bar{c}_{33} \cdot \varepsilon_z + \bar{c}_{36} \cdot \varepsilon_{xy} = 0 \tag{5.63}$$

A equação (5.64) resulta da nulidade da tensão σ_{yz}, o que permite determinar a expressão (5.65). As expressões (5.66) e (5.67) representam as tensões normais σ_{xz} e σ_{xy}. Aplicando (5.65) em (5.66), determina-se a fórmula (5.68).

$$\sigma_{yz} = \bar{c}_{44} \cdot \varepsilon_{yz} + \bar{c}_{45} \cdot \varepsilon_{xz} = 0 \tag{5.64}$$

$$\varepsilon_{yz} = -\frac{\bar{c}_{45} \cdot \varepsilon_{xz}}{\bar{c}_{44}} \tag{5.65}$$

$$\sigma_{xz} = \bar{c}_{45} \cdot \varepsilon_{yz} + \bar{c}_{53} \cdot \varepsilon_{xz} \tag{5.66}$$

$$\sigma_{xy} = \bar{c}_{16} \cdot \varepsilon_x + \bar{c}_{26} \cdot \varepsilon_y + \bar{c}_{36} \cdot \varepsilon_z + \bar{c}_{66} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.67}$$

$$\sigma_{xz} = \bar{c}_{45} \cdot \left(-\frac{\bar{c}_{45} \cdot \varepsilon_{xz}}{\bar{c}_{44}} \right) + \bar{c}_{53} \cdot \varepsilon_{xz} \tag{5.68}$$

Simplificando a expressão (5.68), obtêm-se a expressão (5.69) que, através de (5.70), permite a obtenção da tensão σ_{xz}, apresentada em (5.71).

$$\sigma_{xz} = \left(\bar{c}_{55} - \frac{(\bar{c}_{45} \cdot \bar{c}_{43})}{\bar{c}_{44}} \right) \cdot \varepsilon_{xz} \tag{5.69}$$

$$\bar{\bar{c}}_{55} = \left(\bar{c}_{55} - \frac{(\bar{c}_{45} \cdot \bar{c}_{43})}{\bar{c}_{44}} \right) \tag{5.70}$$

$$\sigma_{xz} = \bar{\bar{c}}_{55} \cdot \varepsilon_{xz} \tag{5.71}$$

Ao aplicar a expressão (5.27) em (5.71), a tensão cisalhante σ_{xz} passa a ser designada por (5.71.1):

$$\sigma_{xz} = \bar{\bar{c}}_{55} \left[\left[T^{(k)}_{\phi,z}(z) \right] \cdot \left\{ d_1(x) \right\} + y_2(z) \cdot \left\{ d_{2,x}(x) \right\} \right] \tag{5.71.1}$$

A tensão axial σ_x é reduzida à expressão (5.72) na qual os coeficientes são designados entre (5.73) e (5.74). Aplicando as expressões (5.21) e (5.26) em (5.72), obtêm (5.2.71).

$$\sigma_x = \bar{\bar{c}}_{11} \cdot \varepsilon_x + \bar{\bar{c}}_{16} \cdot \varepsilon_{xy} \tag{5.72}$$

$$\sigma_x = \bar{\bar{c}}_{11} \left[\left[T^k_\phi \right] \left\{ d_{1,x}(x) \right\} + \left[T_1(z,y) \right] \left\{ d_{2,xx}(x) \right\} \right] + \bar{\bar{c}}_{16} \left[y_1(x) \left\{ d_{2,x}(x) \right\} \right] \tag{5.72.1}$$

$$\bar{\bar{c}}_{11} = \bar{c}_{11} + \frac{\bar{c}_{13} \cdot \bar{c}_{22}\, \bar{c}_{31} - \bar{c}_{12} \cdot \bar{c}_{23}\, \bar{c}_{31} - \bar{c}_{13} \cdot \bar{c}_{21}\, \bar{c}_{32} + \bar{c}_{12} \cdot \bar{c}_{21}\, \bar{c}_{33}}{\bar{c}_{23}\, \bar{c}_{32} - \bar{c}_{22} \cdot \bar{c}_{33}} \tag{5.73}$$

$$\bar{\bar{c}}_{16} = \bar{c}_{16} + \frac{-\bar{c}_{13} \cdot \bar{c}_{26}\, \bar{c}_{32} + \bar{c}_{12} \cdot \bar{c}_{26}\, \bar{c}_{33} + \bar{c}_{13} \cdot \bar{c}_{22}\, \bar{c}_{36} - \bar{c}_{12} \cdot \bar{c}_{23}\, \bar{c}_{36}}{\bar{c}_{23}\, \bar{c}_{32} - \bar{c}_{22} \cdot \bar{c}_{33}} \tag{5.74}$$

A tensão σ_{xy} é reduzida à expressão (5.75) cujos os coeficientes são apresentados em (5.74) e (5.76). Em seguida, apresenta-se, em (5.77), a forma reduzida da Lei de Hooke.

$$\sigma_{xy} = \bar{\bar{c}}_{16} \cdot \left[\left[T^k_\phi \right] \left\{ d_{1,x}(x) \right\} + \left[T_1(z,y) \right] \left\{ d_{2,xx}(x) \right\} \right] + \bar{\bar{c}}_{66} \cdot \left[y_1(x) \left\{ d_{2,x}(x) \right\} \right] \tag{5.75}$$

$$\bar{\bar{c}}_{66} = \bar{c}_{66} + \frac{\bar{c}_{33}\,\bar{c}_{26}^{\,2} + 2\cdot\bar{c}_{26}\,\bar{c}_{23}\,\bar{c}_{36} + \bar{c}_{22}\,\bar{c}_{26}^{\,2}}{\bar{c}_{23}\,\bar{c}_{32} - \bar{c}_{22}\cdot\bar{c}_{33}} \tag{5.76}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{c}}_{11} & \bar{\bar{c}}_{16} & 0 \\ \bar{\bar{c}}_{16} & \bar{\bar{c}}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\bar{c}}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.77}$$

O variacional da energia interna da viga é representado pela expressão (5.78) onde $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$, resultando em (5.78.1).

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} \right] dV \tag{5.78}$$

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} \right] dV \tag{5.78.1}$$

Reescrevendo a expressão (5.78.1), obtêm-se (5.78.2).

$$\delta U = \int_V \left[\{\delta\varepsilon_x\}^T [\sigma_x] + \{\delta\gamma_{xy}\}^T [\tau_{xy}] + \{\delta\gamma_{xz}\}^T [\tau_{xz}] \right] dV \tag{5.78.2}$$

Na expressão (5.78.2), aplicando as expressões de tensão (5.71.1), (5.72.1) e (5.75) com as formulações de deformações (5.21), (5.26) e (5.27), obtêm-se a formulação (5.78.3) para o variacional de energia de deformação interna da viga.

$$\delta U = \int_V \left[\left\{ \delta d_{1,x} \right\}^T \left[T_\phi^{(k)}(z) \right]^T + \left\{ \delta d_{2,xx} \right\}^T \left[T_1(z,y) \right]^T \right] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_\phi^{(k)}(z) \right] \left\{ \delta d_{1,x} \right\} + \\ \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(x,y) \right] \left\{ d_{2,xx} \right\} + \bar{\bar{c}}_{16} \left[y_1(z) \right] \left\{ d_{2,x} \right\} \end{bmatrix} +$$

$$+ \left\{ \delta d_{1,x} \right\}^T \left[y_1(z) \right]^T \begin{pmatrix} \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_\phi^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,x} \right\} + \\ \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_1(z,y) \right] \left\{ d_{2,xx} \right\} + \bar{\bar{c}}_{66}^{\,k} \left[y_1(z) \right] \left\{ d_{2,x} \right\} \end{pmatrix} + \tag{5.78.3}$$

$$+ \left(\left\{ \delta d_1 \right\}^T \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z) \right]^T + \left\{ \delta d_{2,x} \right\}^T \left[y_2(y) \right]^T \right) \cdot$$

$$\left(\bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z) \right]^T \left\{ d_1 \right\} + \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(y) \right] \left\{ d_{2,x} \right\} \right) dV$$

No Apêndice F, são apresentados os cálculos responsáveis pela simplificação da expressão (5.78.3) em (5.79).

$$\delta U = \int_0^L \left(\left\{ \delta d_1 \right\}^T \left[\left\{ k_1 \right\} - \left\{ k_{2,x} \right\} \right] + \left\{ \delta d_2 \right\}^T \left[\left\{ k_{3,xx} \right\} - \left\{ k_{4,x} \right\} \right] \right) dx +$$

$$\left(\left\{ \delta d_1 \right\}^T \left\{ k_2 \right\} + \left\{ \delta d_2 \right\}^T \left[\left\{ k_4 \right\} - \left\{ k_{3,x} \right\} \right] + \left\{ \delta d_{2,x} \right\}^T \left\{ k_3 \right\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{5.79}$$

O variacional da energia de deformação da base elástica é apresentado na expressão (5.80):

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\left\{ \delta w_0 \cdot k_w \cdot w_0 + \delta w_0 \cdot k_p \cdot w_{01,x} \right\} \right) dx \tag{5.80}$$

No Apêndice F, são ilustrados os cálculos que induziram à simplificação da expressão (5.80) em (5.81).

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\left\{ \delta d_2 \right\}^T \left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_w} \right] \left\{ d_2 \right\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] \left\{ d_{2,xx} \right\} \right] \right) dx + \left(\left\{ \delta d_2 \right\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] \left\{ d_{2,x} \right\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{5.81}$$

O variacional da energia decorrente das cargas externas é descrito em (5.82):

$$\delta W = -\int_0^L \left(\delta w_0 \cdot q_z(x) + \delta v_0 \cdot q_y(x) + \delta u \cdot q_x(x) + \delta \vartheta \cdot q_\vartheta \right) dx \tag{5.82}$$

No Apêndice F, são ilustrados os cálculos que levaram a simplificação da expressão (5.82) a (5.83).

$$\delta W = -\int_0^L \left(\begin{array}{l} \{\delta d_1\}^T \left\{T_{u_0}\right\}^T \{q_x(x)\} + \\ \{\delta d_2\}^T \left[\left\{ \bar{\bar{T}} \right\}^T \{q_z(x)\} + \left\{T_{v_0}\right\}^T \left\{q_y(x)\right\} + \{T_\vartheta\}^T \{q_\vartheta\} \right] \end{array} \right) dx \tag{5.83}$$

O variacional da energia das molas, presentes nas extremidades da viga, é descrito na expressão (5.84).

$$\begin{array}{l} \delta U_{AE} = \left[\begin{array}{l} \delta u_o \cdot k_0^u \cdot u_0 + \delta w_o \cdot k_0^w \cdot w_0 + \delta v_o \cdot k_0^v \cdot v_0 + \\ \delta \theta_y \cdot k_0^{\theta_y} \cdot \theta_y + \delta \theta_z \cdot k_0^{\theta_z} \cdot \theta_z + \delta \vartheta \cdot k_0^\vartheta \cdot \vartheta \end{array} \right]_{x=0} + \\ \left[\begin{array}{l} \delta u_o \cdot k_L^u \cdot u_0 + \delta w_0 \cdot k_L^w \cdot w_o + \delta v_o \cdot k_L^v \cdot v_o + \\ \delta \theta_y \cdot k_L^{\theta_y} \cdot \theta_y + \delta \theta_z \cdot k_L^{\theta_z} \cdot \theta_z + \delta \vartheta \cdot k_L^\vartheta \cdot \vartheta \end{array} \right]_{x=L} \end{array} \tag{5.84}$$

No Apêndice F, são ilustrados os cálculos que levaram a simplificação da expressão (5.84) em (5.85).

$$\begin{array}{l} \delta U_{AE} = \{\delta d_1(0)\}^T \cdot \left[T_{k_0}^u\right] \cdot \{d_1(0)\} + \{\delta d_2(0)\}^T \cdot \left[T_{k_0}^w\right] \cdot \{d_2(0)\} + \\ \{\delta d_2(0)\}^T \cdot \left[T_{k_0}^v\right] \cdot \{d_2(0)\} + \{\delta d_{2,x}(0)\}^T \cdot \left[T_{k_0}^{\theta_y}\right] \cdot \{d_{2,x}(0)\} + \\ \{\delta d_{2,x}(0)\}^T \cdot \left[T_{k_0}^{\theta_z}\right] \cdot \{d_{2,x}(0)\} + \{\delta d_2(0)\}^T \cdot \left[T_{k_0}^\vartheta\right] \cdot \{d_2(0)\} + \\ \{\delta d_1(L)\}^T \cdot \left[T_{k_L}^u\right] \cdot \{d_1(L)\} + \{\delta d_2(L)\}^T \cdot \left[T_{k_L}^w\right] \cdot \{d_2(L)\} + \\ \{\delta d_2(L)\}^T \cdot \left[T_{k_L}^v\right] \cdot \{d_2(L)\} + \{\delta d_{2,x}(L)\}^T \cdot \left[T_{k_L}^{\theta_y}\right] \cdot \{d_{2,x}(L)\} + \\ \{\delta d_{2,x}(L)\}^T \cdot \left[T_{k_L}^{\theta_z}\right] \cdot \{d_{2,x}(L)\} + \{\delta d_2(L)\}^T \cdot \left[T_{k_L}^\vartheta\right] \cdot \{d_2(L)\} \end{array} \tag{5.85}$$

Aplicando-se o Princípio da Mínima Energia Potencial, apresentado em (5.86) e, descrito no Apêndice G, obtêm-se a expressão (5.87). Em seguida, com o lema fundamental do cálculo variacional, encontra-se a equação de equilíbrio (5.88) e as condições de contorno, essenciais e naturais, dispostos respectivamente em (5.89) e entre (5.90) e (5.95).

$$\delta \prod = \delta U + \delta U_f + \delta W + \delta U_{AE} = 0 \tag{5.86}$$

$$\int_0^L \left(\begin{array}{l} \left\{\delta d_1^T\right\}\left[\left\{k_1\right\} - \left\{k_{2,x}\right\} - \left[T_{u_0}\right]^T q_x(x)\right] + \\ \left\{\delta d_2^T\right\} \left[\begin{array}{l} \left\{k_{3,xx}\right\} - \left\{k_{4,x}\right\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]\left\{d_2\right\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\left\{d_{2,xx}\right\} - \\ \left[\bar{\bar{T}}\right]^T q_z(x) - \left[\bar{\bar{T}}_{v_0}\right]^T q_y(y) - \left[T_{\vartheta}\right]^T q_{\vartheta}(\vartheta) \end{array} \right] \end{array} \right) dx +$$
$$\left\{\delta d_1(L)\right\}^T \left[\left\{k_2(L)\right\} + \left[T_{k_L}^u\right]^T \left\{d_1(L)\right\}\right] +$$
$$\left\{\delta d_1(0)\right\}^T \left[-\left\{k_2(0)\right\} + \left[T_{k_0}^u\right]^T \left\{d_1(0)\right\}\right] +$$
$$+\left\{\delta d_2(L)\right\}^T \left[\begin{array}{l} \left\{k_4(L)\right\} - \left\{k_{3,x}(L)\right\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} + \\ \left[T_{k_L}^w\right]\left\{d_2(L)\right\} + \left[T_{k_L}^u\right]\left\{d_2(L)\right\} + \left[T_{k_L}^v\right]\left\{d_2(L)\right\} \end{array} \right] + \tag{5.87}$$
$$\left\{\delta d_2(0)\right\}^T \left[\begin{array}{l} -\left\{k_4(0)\right\} + \left\{k_{3,x}(0)\right\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} + \\ \left[T_{k_0}^w\right]\left\{d_2(0)\right\} + \left[T_{k_0}^u\right]\left\{d_2(L)\right\} + \left[T_{k_0}^v\right]\left\{d_2(0)\right\} \end{array} \right] +$$
$$\left\{\delta d_{2,x}(L)\right\}^T \left[\left\{k_3(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\}\right] +$$
$$\left\{\delta d_{2,x}(0)\right\}^T \left[-\left\{k_3(0)\right\} + \left[T_{k_0}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} + \left[T_{k_0}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\}\right] = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{k_1\right\} - \left\{k_{2,x}\right\} - \left[T_{u_0}\right]^T q_x(x) = 0 \\ \left\{k_{3,xx}\right\} - \left\{k_{4,x}\right\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]\left\{d_2\right\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\left\{d_{2,xx}\right\} - \\ \left[\bar{\bar{T}}\right]^T q_z(x) - \left[\bar{\bar{T}}_{v_0}\right]^T q_y(y) - \left[T_{\vartheta}\right]^T q_{\vartheta}(\vartheta) = 0 \end{array} \right. \tag{5.88}$$

$$\left\{\begin{matrix} d_1(L) \\ d_2(L) \\ d_{2,x}(L) \\ d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_{2,x}(0) \end{matrix}\right. \tag{5.89}$$

$$\left[\left\{k_2(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{u}\right]^T \left\{d_1(L)\right\}\right] = 0 \tag{5.90}$$

$$\begin{gathered}\left\{k_4(L)\right\} - \left\{k_{3,x}(L)\right\} + \left[\,\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{w}\right]\left\{d_2(L)\right\} + \\ \left[T_{k_L}^{u}\right]\left\{d_2(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{v}\right]\left\{d_2(L)\right\} = 0\end{gathered} \tag{5.91}$$

$$\left\{k_3(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} + \left[T_{k_L}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} = 0 \tag{5.92}$$

$$-\left\{k_2(0)\right\} + \left[T_{k_0}^{u}\right]^T \left\{d_1(0)\right\} = 0 \tag{5.93}$$

$$\begin{gathered}-\left\{k_4(0)\right\} + \left\{k_{3,x}(0)\right\} - \left[\,\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} + \left[T_{k_0}^{w}\right]\left\{d_2(0)\right\} + \\ \left[T_{k_0}^{u}\right]\left\{d_2(L)\right\} + \left[T_{k_0}^{v}\right]\left\{d_2(0)\right\} = 0\end{gathered} \tag{5.94}$$

$$-\left\{k_3(0)\right\} + \left[T_{k_0}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} + \left[T_{k_0}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} = 0 \tag{5.95}$$

A equação de equilíbrio, em sua forma final, é apresentada em (5.96). Os cálculos que levaram a simplificação de (5.88) a (5.96) encontram-se no Apêndice F.

$$
\begin{cases}
[P_1]\{d_1\}+[P_2]\{d_{2,x}\}-[P_3]\{d_{1,xx}\}-[P_4]\{d_{2,xxx}\}-[P_5]\{d_{2,xx}\}-\left[T_{u_0}\right]^T q_x(x)=0 \\
[P_6]\{d_{1,xxx}\}+[P_7]\{d_{2,xxxx}\}+[P_8]\{d_{2,xxx}\}-[P_9]\{d_{1,xx}\}- \\
[P_{10}]\{d_{2,xxx}\}-[P_{11}]\{d_{2,xx}\}-[P_{12}]\{d_{1,x}\}-[P_{13}]\{d_{2,xx}\}+\left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]\{d_2\}-\left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\{d_{2,xx}\}- \\
\left[\bar{\bar{T}}\right]^T q_z(x)-\left[T_{v_0}\right]^T q_y(x)-\left[T_{\vartheta}\right]^T q_{\vartheta}(\vartheta)=0
\end{cases}
\tag{5.96}
$$

Expressando a equação (5.96), com termos em evidência, obtêm-se (5.96.1) e (5.96.2):

$$
\begin{cases}
[P_1]\{d_1\}-\{P_3\}\{d_{1,xx}\}+[P_2]\{d_{2,x}\}-\{P_5\}\{d_{2,xx}\}-\{P_4\}\{d_{2,xxx}\}-\left[T_{u_0}\right]^T q_x(x)=0 & (5.96.1) \\
-[P_{12}]\{d_{1,x}\}-[P_9]\{d_{1,x}x\}+[P_6]\{d_{1,xxxx}\}+\left[T_{k_w}\right]\{d_2\}- & (5.96.2) \\
\left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]+[P_{13}]+[P_{11}]\right]\{d_{2,xx}\}+\left[[P_8]-[P_{10}]\right]\{d_{2,xxx}\}+[P_7]\{d_{2,xxxx}\}-\left[\bar{\bar{T}}\right]^T q_z(x) & \\
-\left[T_{v_0}\right]^T q_y(x)-\left[T_{\vartheta}\right]^T q_{\vartheta}(\vartheta)=0 &
\end{cases}
$$

Os carregamentos na viga, atuantes respectivamente nos sentidos dos eixos z e y e, em torno do eixo x, são apresentados nas expressões (5.97), (5.98) e (5.99):

$$q_z(x)=\sum_{i=1}^{\infty} Q_z \sin\left(\lambda_n x\right) \tag{5.97}$$

$$q_y(x)=\sum_{i=1}^{\infty} Q_y \sin\left(\lambda_n x\right) \tag{5.98}$$

$$q_{\vartheta}(x)=0 \tag{5.99}$$

onde:

$$\lambda_m=\frac{m\cdot\pi}{L}$$

Expressando as incógnitas da equação (5.1) em séries de Fourier:

$$u_o=\sum_{i=1}^{\infty} U_m \cos\left(\lambda_m x\right) \tag{5.100}$$

$$w_o = \sum_{i=1}^{\infty} W_m \sin\left(\lambda_m x\right) \tag{5.101}$$

$$v_o = \sum_{i=1}^{\infty} V_m \sin\left(\lambda_m x\right) \tag{5.102}$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_m \cos\left(\lambda_m x\right) \tag{5.103}$$

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_m \cos\left(\lambda_m x\right) \tag{5.104}$$

Expressando os termos de (5.96.1) e (5.96.2) em função de (5.100), (5.101), (5.102), (5.103) e (5.104), obtêm-se (5.105) e (5.106):

$$\left\{d_1^m\right\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} U_m \cos\left(\lambda_m x\right) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \psi_m \cos\left(\lambda_m x\right) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos\left(\lambda_m x\right) \\ \psi_m \cos\left(\lambda_m x\right) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \cos\left(\lambda_m x\right) \tag{5.105}$$

$$\left\{d_2^m\right\} = \begin{Bmatrix} w_o \\ v_o \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} W_m \sin\left(\lambda_m x\right) \\ \sum_{i=1}^{\infty} V_m \sin\left(\lambda_m x\right) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_m \sin\left(\lambda_m x\right) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \sin\left(\lambda_m x\right) \tag{5.106}$$

Fazendo a manipulação algébrica, apresentada no Apêndice F, chega-se à expressão (5.107). A partir dessa expressão, será possível obter as incógnitas da equação (5.1) apresentadas entre (5.100) e (5.104).

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{d_1^n\right\} \\ \left\{d_2^n\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \left[\bar{\bar{T}}\right]^T \theta_z + \left[T_{v_0}\right]^T \theta_y \end{Bmatrix} \tag{5.107}$$

onde:

$$k_{11} = \left[P_1\right] + \lambda_m^2 \left[P_3\right] \qquad k_{21} = \left[P_{12}\right]\lambda_m + \left[P_6\right]\lambda^3{}_m$$

$$k_{11} = \left[P_1\right] + \lambda_m^2 \left[P_3\right] \qquad k_{22} = \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right] + \lambda_m^2 \left[\left[\bar{T}_{k_p}\right] + \left[P_{13}\right] + \left[P_{11}\right]\right] + \left[P_7\right]\lambda_m^4$$

5.2 CÁLCULO DAS TENSÕES CISALHANTES PELA EQUAÇÃO CONTITUTIVA E PELA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

As expressões (5.2.1) à (5.2.3) retratam as equações de equilíbrio da estrutura. Considerando o estado plano de tensão, as tensões $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Dessa maneira, as equações se reduzem às expressões ilustradas entre (5.2.4) e (5.2.6).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (5.2.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \qquad (5.2.6)$$

Pelas equações constitutivas, as tensões cisalhantes τ_{xy} e τ_{xz} correspondem às expressões (5.2.7) e (5.2.8):

$$\tau_{xy} = \bar{\bar{c}}_{16} \cdot \left[\left[T_{\phi}^{k}(z) \right] \begin{Bmatrix} u_{o,x}(x) \\ \varphi_{1x}(x) \end{Bmatrix} + \left[T_1(z,y) \right] \begin{Bmatrix} w_{o,xx(x)} \\ v_{o,xx(x)} \\ \vartheta_{o,xx(x)} \end{Bmatrix} \right] + \bar{\bar{c}}_{66} \cdot \left[\left[y_1(z) \right] \begin{Bmatrix} w_{o,x(x)} \\ v_{o,x(x)} \\ \vartheta_{1x(x)} \end{Bmatrix} \right] \qquad (5.2.7)$$

$$\tau_{xz} = \bar{\bar{c}}_{55} \cdot \left[\left[T_{\phi,z}^{k}(z) \right] \begin{Bmatrix} u_o(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} + \left[y_2(y) \right] \begin{Bmatrix} w_{o,x(x)} \\ v_{o,x(x)} \\ \vartheta_{1x(x)} \end{Bmatrix} \right] \qquad (5.2.8)$$

Pela integração da equação de equilíbrio (5.2.4), a obtenção da formulação da tensão cisalhantes τ_{xz} se dá conforme (5.2.9).

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy + \tau_{xy}^k \left(y = \frac{b}{2} \right) - \tau_{xy}^k \left(y = \frac{b}{2} \right) + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dy = 0 \tag{5.2.9}$$

Em decorrência das tensões cisalhantes $\tau_{xy}^k \left(y = \frac{b}{2} \right) = 0$ e $\tau_{xy}^k \left(y = -\frac{b}{2} \right) = 0$, é obtida a expressão (5.2.10):

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dy = 0 \tag{5.2.10}$$

Em (5.2.11), é feita a integração de (5.2.10) no domínio z, atrelado as alturas das camadas da viga, resultando em (5.2.12). Nesta, pondo os termos em evidência, resulta na expressão (5.2.13).

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz \right) dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial z} dz \right) dy = 0 \tag{5.2.11}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz \right) dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\tau_{xz}^k(z) - \tau_{xz}^k(z_{k-1}) \right) dy = 0 \tag{5.2.12}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz \right) + \tau_{xz}^k(z) - \tau_{xz}^k(z_{k-1}) \right] dy = 0 \tag{5.2.13}$$

Ao considerar uma viga compósita laminada com apenas uma camada (k=1), a expressão (5.2.13) resulta em (5.2.14).

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} dz \right) + \tau_{xz}^{(1)}(z) - \tau_{xz}^{(1)}(z_o) \right] dy = 0 \tag{5.2.14}$$

Sendo a tensão cisalhante $\tau_{xz}^{(0)}(z_o) = 0$, a expressão (5.2.14) resulta em (5.2.15).

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz \right) + \tau_{xz}^{(1)}(z) \right] dy = 0 \qquad (5.2.15)$$

A equação (5.2.15) pode ser reescrita como (5.2.16), representando a tensão cisalhante τ_{xz} ao longo de uma viga compósita laminada com única camada.

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau_{xz}^{(1)}(z) dy = -\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z_o}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} dz \right) \qquad (5.2.16)$$

Denotando a expressão anterior como $\bar{\tau}_{xz}(z)$, chega-se a (5.2.17).

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau_{xz}^{(1)}(z) dy = -\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z_o}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} dz \right) \qquad (5.2.17)$$

Ao considerar uma viga compósita laminada com duas camadas (k=2), a expressão (5.2.13) resulta em (5.2.18). Ao separar os termos de (5.2.18), chega-se a (5.2.19).

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{z_{k-1}}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(2)}}{\partial x} dz \right) + \tau_{xz}^{(2)}(z) - \tau_{xz}^{(2)}(z_1) \right] dy = 0 \qquad (5.2.18)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{z_1}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(2)}}{\partial x} dz \right) \right] dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\tau_{xz}^{(2)}(z) dy \right) - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\tau_{xz}^{(2)}(z_1) dy \right) = 0 \qquad (5.2.19)$$

A expressão (5.2.20) ilustra a validade da continuidade de tensões cisalhantes em torno das camadas da viga compósita.

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\tau_{xz}^{(2)}(z_1) dy \right) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\tau_{xz}^{(1)}(z_1) dy \right) = -\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{z_1}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} dz \right) \right] dy \qquad (5.2.20)$$

Dessa maneira, a expressão (5.2.19) resulta em (5.2.21) na qual, rearranjando os termos, implica em (5.2.22).

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{z_1}^{z}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(2)}}{\partial x}dz\right)\right]dy+\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\tau_{xz}^{(2)}(z)dy\right)+\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{z_1}^{z}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(1)}}{\partial x}dz\right)\right]dy=0 \tag{5.2.21}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\tau_{xz}^{(2)}(z)dy\right)=-\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{z_1}^{z}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(1)}}{\partial x}dz\right)\right]dy+\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{z_1}^{z}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(2)}}{\partial x}dz\right)\right]dy\right) \tag{5.2.22}$$

Expressando a equação (5.2.22) para um número de N camadas com k > 1, obtém a expressão (5.2.23).

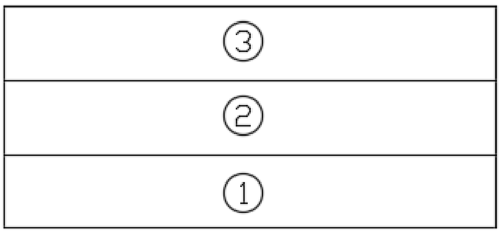
$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\tau_{xz}^{(k)}(z\ )dy\right)=\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\sum_{j=k}^{N}\int_{z_{j-1}}^{z_j}\frac{\partial\sigma_x^{(j)}}{\partial x}dz\right)dy-\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\int_{z_{k-1}}^{z}\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial x}dz\right)dy\right) \tag{5.2.23}$$

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A presente análise contempla uma viga cross-ply formada por 3 camadas, como ilustrada na Figura 16, biapoiada, apoiada em base elástica e ortotrópica. As espessuras das camadas 1, 2 e 3 são respectivamente 2h/5, 2h/10 e 2h/5 sendo que h corresponde à altura total. As propriedades físicas das camadas são ilustradas na Figura 17 incluindo módulos de elasticidade longitudinal, transversal e coeficientes de Poisson.

A equação cinemática de Euler-Bernoulli é eficiente em vigas espessas onde razão entre os valores de comprimento e de altura é elevada. Nesta perspectiva, se enquadra a viga do presente trabalho cuja proporção entre o comprimento e a altura é 100. Em vigas robustas, deve-se implementar Teorias de Alta Ordem que consideram a influência do cisalhamento na rotação da viga diferentemente de Euler-Bernoulli.

Figure 16 - Camadas da viga Cross-Ply em análise



Fonte: Elaboração Própria (2023)

Figure 17 – Propriedades físicas das camadas 1, 2 e 3 da viga Cros-Ply

Camada 1	
E_1	$25*10^6$
E_2	$1*10^6$
E_3	$1*10^6$
$G_{12} = G_{21}$	$0,5*10^6$
$G_{13} = G_{31}$	$0,5*10^6$
$G_{23} = G_{32}$	$0,2*10^6$
ν_{12}	0,25
ν_{13}	0,25
ν_{23}	0,25
ν_{21}	0,01
ν_{31}	0,01
ν_{32}	0,25

Camada 2	
E_1	$25*10^6$
E_2	$1*10^6$
E_3	$1*10^6$
$G_{12} = G_{21}$	$0,2*10^6$
$G_{13} = G_{31}$	$0,5*10^6$
$G_{23} = G_{32}$	$0,2*10^6$
ν_{12}	0,25
ν_{13}	0,25
ν_{23}	0,25
ν_{21}	0,01
ν_{31}	0,01
ν_{32}	0,01

Camada 3	
E_1	$25*10^6$
E_2	$1*10^6$
E_3	$1*10^6$
$G_{12} = G_{21}$	$0,5*10^6$
$G_{13} = G_{31}$	$0,5*10^6$
$G_{23} = G_{32}$	$0,2*10^6$
ν_{12}	0,25
ν_{13}	0,25
ν_{23}	0,25
ν_{21}	0,01
ν_{31}	0,01
ν_{32}	0,25

Fonte: Elaboração Própria (2023)

Na análise estrutural, os parâmetros de base elástica estão atrelados a Winkler (1867) e Pasternak (1954) e são representados respectivamente por k_w e k_p. Os valores de k_w foram 0, 10 e 100, enquanto que para k_p foram 0, 10 e 25. Outrossim, foram adimensionalizados os deslocamentos axiais e verticais e as tensões axiais e cisalhantes representados respectivamente por (6.01), (6.02), (6.03) e (6.04). Por fim, foram elaborados gráficos das grandezas mencionadas e tecidas comparações com Pagano (1969). Este analisou a flexão em viga compósita laminada biapoiada através da Teoria da Elasticidade. Os deslocamentos axial e vertical foram analisados respectivamente em y = 0 e x = L/2. Enquanto que as tensões normais foram analisadas em x = L/2 e y = 0 e as tensões cisalhantes em x = 0.

$$\bar{u}_x = \frac{E_2 \cdot b \cdot u_x(x,y,z)}{h \cdot q_0} \tag{6.01}$$

$$\bar{u}_z = \frac{100 \cdot E_2 \cdot h^3 \cdot u_z(x,y,z)}{q_0 \cdot L^4} \tag{6.02}$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{b \cdot \sigma_x(x,y,z)}{q_0} \tag{6.03}$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{b \cdot \tau_{xz}(x,y,z)}{q_0} \tag{6.04}$$

onde:

b – largura da viga.

h – altura da viga.

q_0 – carregamento.

u_x – deslocamento axial.

u_z – deslocamento vertical.

σ_x – tensão axial.

τ_{xz} – tensão cisalhante.

x – coordenada tomando como referência o eixo x

y – coordenada tomando como referência o eixo y

z – coordenada tomando como referência o eixo z

6.1 ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS AXIAIS

Na viga compósita laminada com configuração 2-1-2, para o valor fixo de $k_w = 0$ e tomando como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, o deslocamento axial máximo em $z/h = \pm 0{,}5$ se reduz respectivamente em 0,48% e 1,20%. Ao fixar $k_w = 10$ e, tendo como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, o deslocamento axial em $z/h = \pm 0{,}5$ se reduz respectivamente em 0,08% e 0,20%. Analogamente, para $k_w = 100$ e, tomando por base $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, o deslocamento axial em $z/h = \pm 0{,}5$ se reduz respectivamente em 0,01% e 0,02%.

Para o valor fixo de $k_p = 0$ e, tomando como referência $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, o deslocamento axial máximo em $z/h = \pm 0{,}5$ se reduz respectivamente em 83,14% e 98,01%. Ao fixar $k_p = 10$ e, tendo como referência $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, o deslocamento axial em $z/h = \pm 0{,}5$ se reduz respectivamente em 83,07% e 98,00%. Analogamente, para $k_p = 25$ e, tomando por base $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, o deslocamento axial em $z/h = \pm 0{,}5$ se reduz respectivamente em 82,97% e 97,99%.

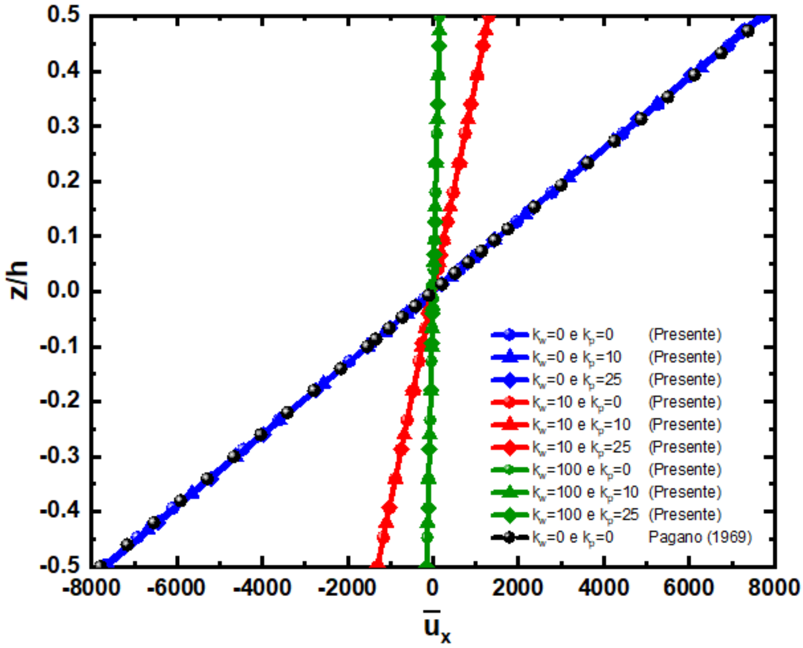
No Quadro 2, são ilustrados os valores de deslocamentos axiais do presente trabalho. Quando não há base elástica, tomando $k_w = 0$ e $k_p = 0$, no presente trabalho $u_x = 7748{,}927$ enquanto que, em Pagano (1969), $u_x = 7792{,}629$. Nessa perspectiva, a diferença percentual foi 0,56 %. Na Figura 18 e no Quadro 3 são ilustrados respectivamente os valores e os gradientes de deslocamentos axiais em função de z/h.

Quadro 2 - Deslocamentos axiais para viga cross-ply 2-1-2

Viga Cross-Ply 2-1-2			
kw	**kp**	**z/h**	**u_x**
0	0	± 0,5	7748,927
	10	± 0,5	7711,378
	25	± 0,5	7655,732
10	0	± 0,5	1305,938
	10	± 0,5	1304,867
	25	± 0,5	1303,264
100	0	± 0,5	153,944
	10	± 0,5	153,929
	25	± 0,5	153,906

Fonte: Elaboração Própria (2023)

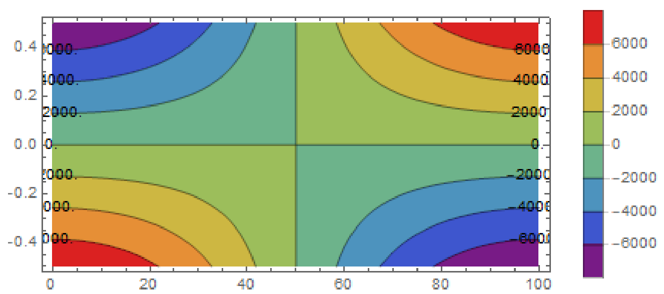
Figure 18 - Gráfico de deslocamento axial em função de z/h



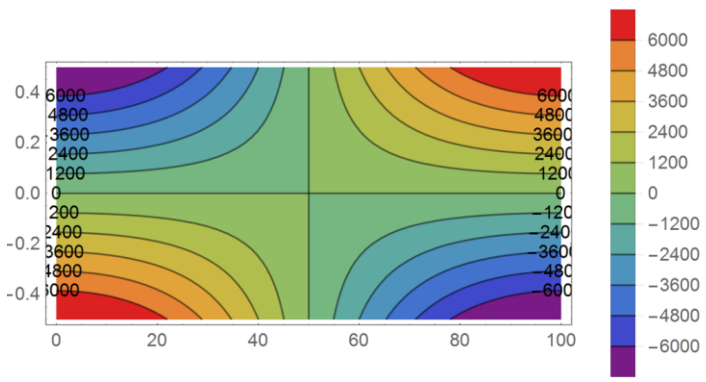
Fonte: Elaboração Própria (2023)

Quadro 3 - Gradiente de deslocamento axial em função de z/h: a) Presente e b) Pagano (1969).

a)



b)



Fonte: Elaboração Própria (2023)

6.2 ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS

Na viga compósita laminada com configuração 2-1-2, para o valor fixo de $k_w = 0$ e, tomando como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, o deslocamento vertical máximo em x/L = 50 se reduz respectivamente em 0,48% e 1,20%. Ao fixar $k_w = 10$ e, tendo como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, o deslocamento vertical em x/L = 50 se reduz respectivamente em 0,08% e 0,20%. Analogamente, para k_w =100 e, tomando por base $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, o deslocamento vertical em x/L = 50 se reduz respectivamente em 0,01% e 0,02%.

Para o valor fixo de $k_p = 0$ e, tomando como referência $k_w = 0$, quando k_w=10 e k_w=100, o deslocamento vertical máximo em x/L = 50 se reduz respectivamente em 83,14% e 98,01%. Ao fixar $k_p = 10$ e, tendo como referência $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, o deslocamento vertical em x/L = 50 se reduz respectivamente em 83,07% e 98,00%. Analogamente, para k_p =25 e, tomando por base $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, o deslocamento vertical em x/L = 50 se reduz respectivamente em 82,97% e 97,99%.

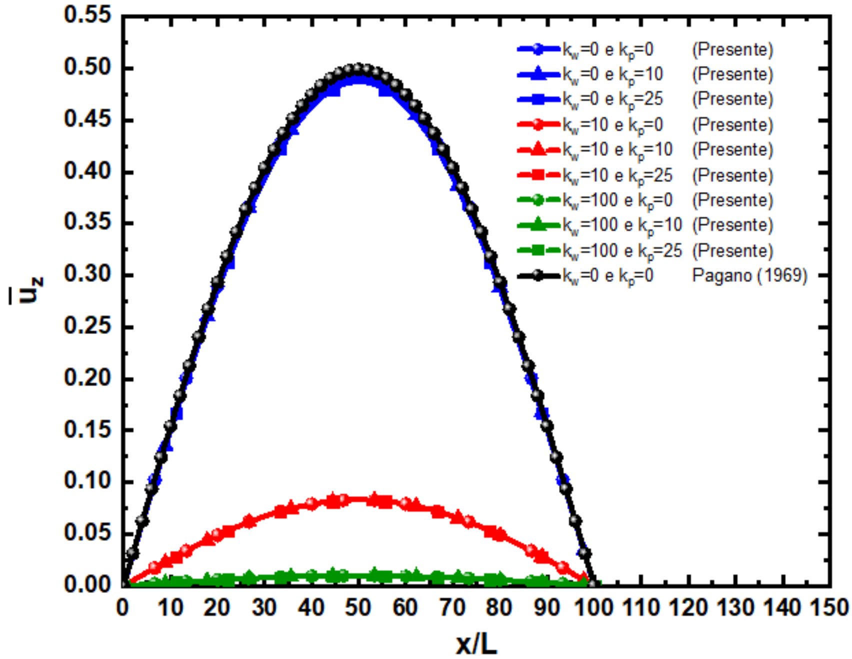
No Quadro 4, são ilustrados os valores de deslocamentos axiais do presente trabalho. Quando não há base elástica, tomando $k_w = 0$ e $k_p = 0$, no presente trabalho $u_z = 0{,}493361$ enquanto que, em Pagano (1969), $u_z = 0{,}499019$. Nessa perspectiva, a diferença percentual foi 1,13 %. Na Figura 19 e no Quadro 5 são ilustrados respectivamente os valores e os gradientes de deslocamentos verticais em função de x/L. Na Figura 19, é notável a grande diferença de intensidades entre os deslocamentos verticais da viga nas ocasiões com e sem a presença de base elástica.

Quadro 4 - Deslocamentos verticais para cross-ply 2-1-2

Viga Cross-Ply 2-1-2			
kw	kp	x/L	u_z
0	0	50	0,493361
	10	50	0,490970
	25	50	0,487427
10	0	50	0,083147
	10	50	0,083079
	25	50	0,082977
100	0	50	0,009801
	10	50	0,009800
	25	50	0,009799

Fonte: Elaboração Própria (2023)

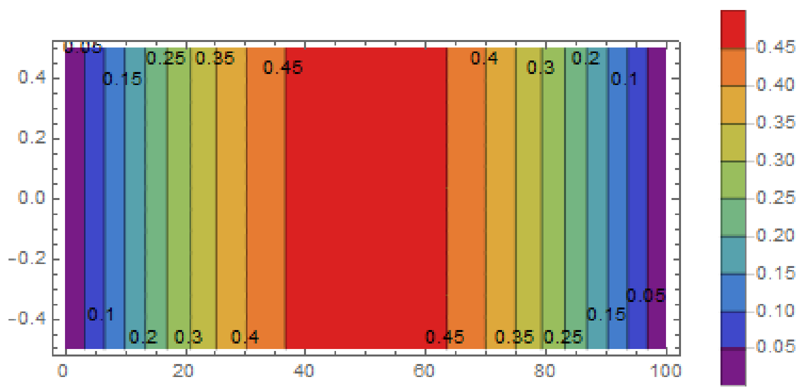
Figure 19 - Gráfico de deslocamento vertical em função de x/L



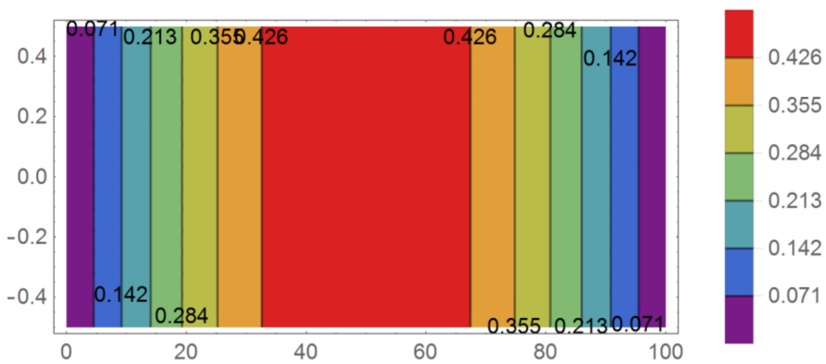
Fonte: Elaboração Própria (2023)

Quadro 5 - Gradiente de deslocamento vertical em função de x/L: a) Presente e b) Pagano (1969).

a)



b)



Fonte: Elaboração Própria (2023)

6.3 ANÁLISE DAS TENSÕES NORMAIS

Na viga compósita laminada com configuração 2-1-2, para o valor fixo de $k_w = 0$ e, tomando como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, a tensão normal máximo em z/h = $\pm$0,5 se reduz respectivamente em 0,48% e 1,20%. Ao fixar $k_w = 10$ e, tendo como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, a tensão normal em z/h = $\pm$0,5 se reduz respectivamente em 0,08% e 0,20%. Analogamente, para k_w =100 e, tomando por base $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e k_p = 25, a tensão normal em z/h = $\pm$0,5 se reduz respectivamente em 0,01% e 0,02%.

Para o valor fixo de $k_p = 0$ e, tomando como referência $k_w = 0$, quando k_w=10 e k_w=100, a tensão normal máximo em z/h = $\pm$0,5 se reduz respectivamente em 83,14% e 98,01%. Ao fixar $k_p = 10$ e, tendo como referência $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, o a tensão normal em z/h = $\pm$0,5 se reduz respectivamente em 83,07% e 98,00%. Analogamente, para k_p =25 e, tomando por base $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, a tensão normal em z/h = $\pm$0,5 se reduz respectivamente em 82,97% e 97,99%.

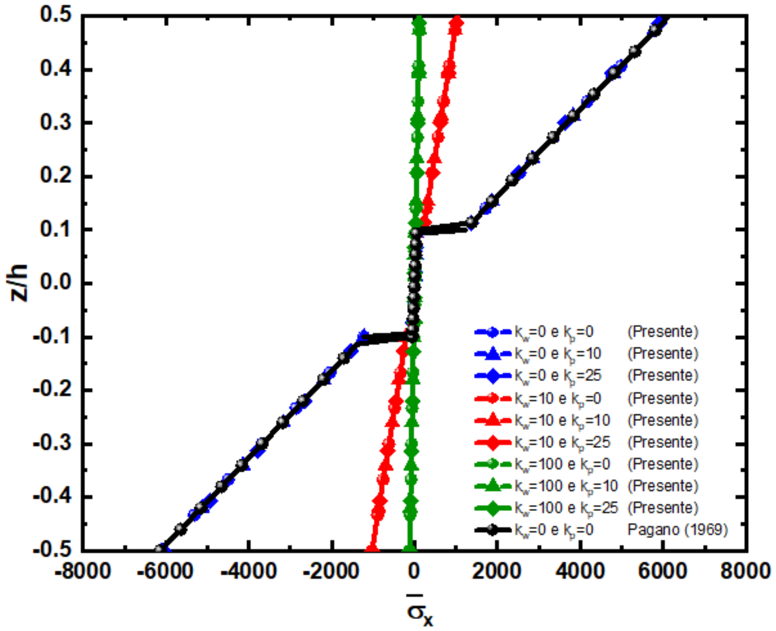
No Quadro 6, são ilustrados os valores de tensões axiais do presente trabalho. Quando não há base elástica, tomando $k_w = 0$ e $k_p = 0$, no presente trabalho $\sigma_x = 6126,839$ enquanto que, em Pagano (1969), $\sigma_x = 6135,969$. Nessa perspectiva, a diferença percentual foi 0,14%. Na Figura 20 e no Quadro 7 são ilustrados respectivamente os valores e os gradientes de tensões axiais em função de z/h.

Quadro 6 - Tensões axiais para cross-ply 2-1-2

Viga Cross-Ply 2-1-2			
kw	kp	z/h	σ_x
0	0	± 0,5	6126,839
	10	± 0,5	6097,150
	25	± 0,5	6053,152
10	0	± 0,5	1032,565
	10	± 0,5	1031,718
	25	± 0,5	1030,451
100	0	± 0,5	121,719
	10	± 0,5	121,707
	25	± 0,5	121,689

Fonte: Elaboração Própria (2023)

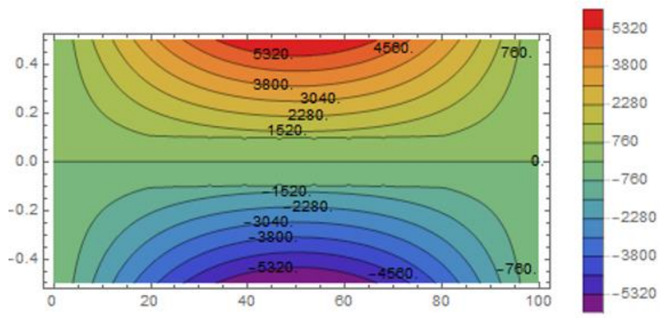
Figure 20 - Gráfico de tensão axial em função de z/h



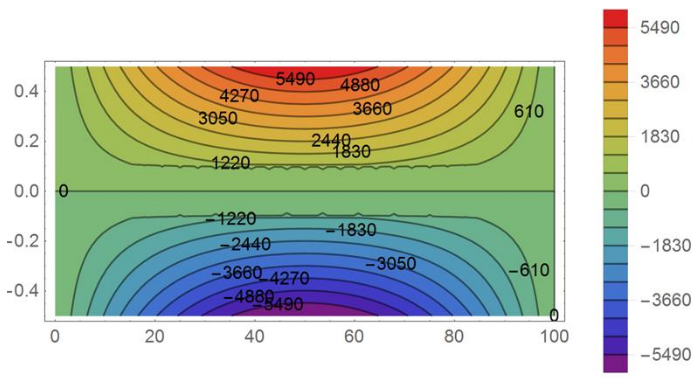
Fonte: Elaboração Própria (2023)

Quadro 7 - Gradiente de tensões normais em função de z/h: a) Presente e b) Pagano (1969)

a)



b)



Fonte: Elaboração Própria (2023)

6.4 ANÁLISE DAS TENSÕES CISALHANTES

Na viga compósita laminada com configuração 2-1-2, para o valor fixo de $k_w = 0$ e, tomando como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, a tensão cisalhante máxima em z/h = 0 se reduz respectivamente em 0,48% e 1,20%. Ao fixar $k_w = 10$ e, tendo como referência $k_p = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, a tensão cisalhante em z/h = 0 se reduz respectivamente em 0,08% e 0,20%. Analogamente, para $k_w =100$ e, tomando por base $k_w = 0$, quando $k_p = 10$ e $k_p = 25$, a tensão cisalhante em z/h = 0 se reduz respectivamente em 0,01% e 0,02%.

Para o valor fixo de $k_p = 0$ e, tomando como referência $k_w = 0$, quando k_w=10 e k_w=100 a tensão cisalhante máximo em z/h = 0 se reduz respectivamente em 83,14% e 98,01%. Ao fixar $k_p = 10$ e, tendo como referência $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, a tensão cisalhante em z/h = 0 se reduz respectivamente em 83,07% e 98,00%. Analogamente, para k_p =25 e, tomando por base $k_w = 0$, quando $k_w = 10$ e $k_w = 100$, a tensão cisalhante em z/h = 0 se reduz respectivamente em 82,97% e 97,99%.

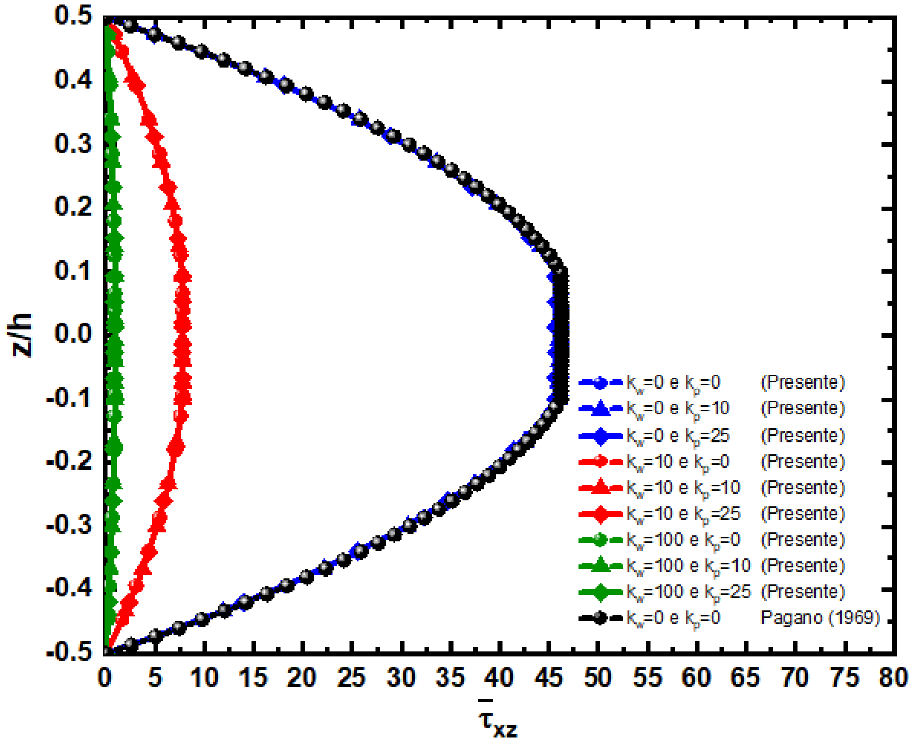
No Quadro 8, são ilustrados os valores de tensões cisalhantes do presente trabalho. Quando não há base elástica, tomando $k_w = 0$ e $k_p = 0$, no presente trabalho $\tau_{xz} = 46,2678$ enquanto que, em Pagano (1969), $\tau_{xz} = 46,2465$. Nessa perspectiva, a diferença percentual foi 0,04%. Na Figura 21, são ilustrados os valores de tensão cisalhante em função de z/h.

Quadro 8 - Tensões cisalhantes para viga cross-ply 2-1-2

Viga Cross-Ply 2-1-2			
kw	kp	z/h	τ_{xz}
0	0	0,0	46,2678
	10	0,0	46,0436
	25	0,0	45,7113
10	0	0,0	7,7976
	10	0,0	7,7912
	25	0,0	7,7816
100	0	0,0	0,9192
	10	0,0	0,9191
	25	0,0	0,9190

Fonte: Elaboração Própria (2023)

Figure 21 - Gráfico de tensão cisalhante em função de z/h



Fonte: Elaboração Própria (2023)

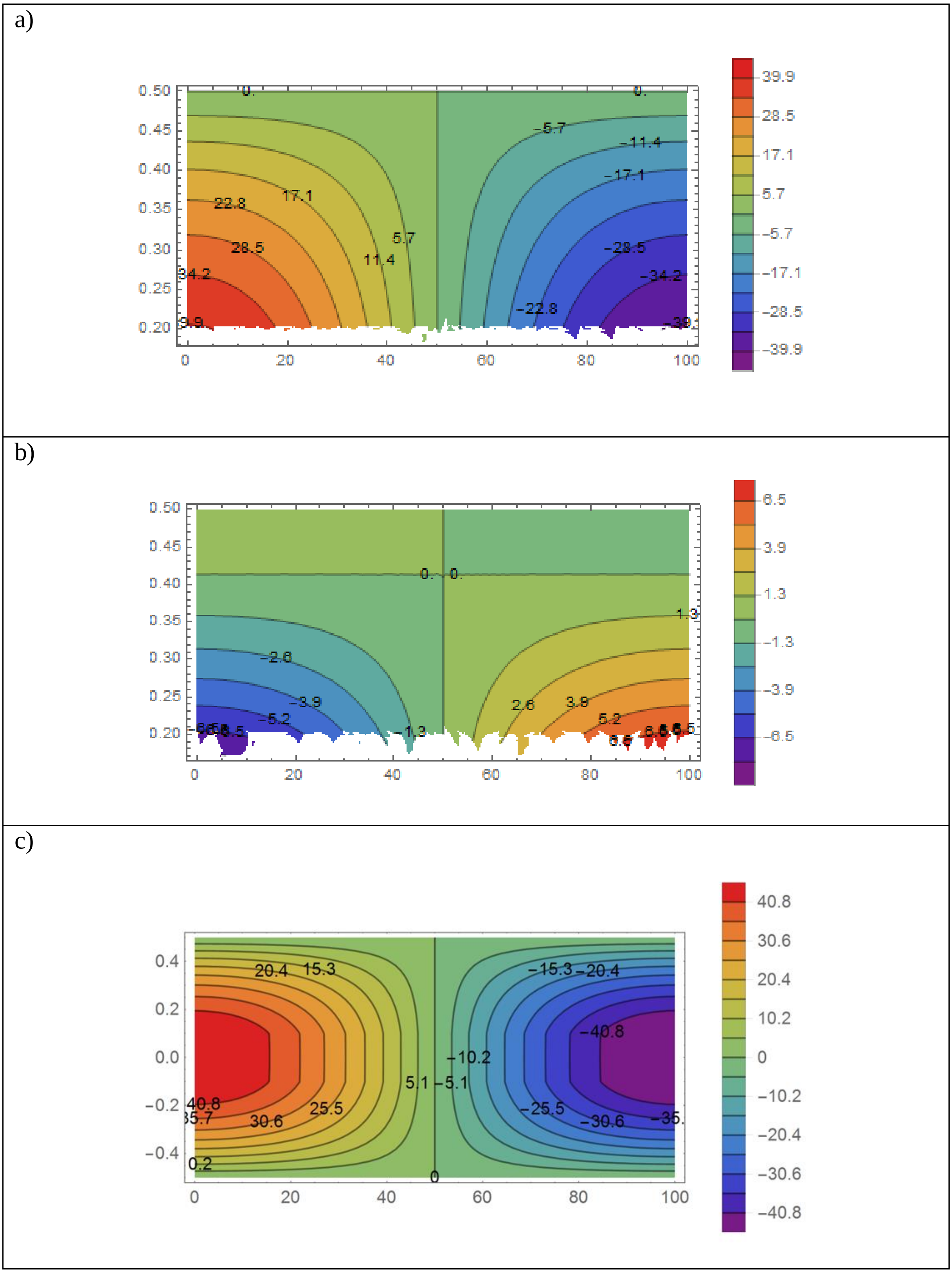
6.4.1 COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES CISALHANTES ORIUNDAS DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E DO MODELO CONSTITUTIVO

Para averiguar a diferença entre as intensidades das tensões cisalhantes, oriundas das equações de equilíbrio e do modelo constitutivo, foram elaborados gráficos contendo seus gradientes de intensidade ao longo da altura da viga compósita laminada com configuração 2-1-2. Para tal fim, foi considerada a influência dos parâmetros de base elástica de Winkler (1867) e Pasternak (1954).

As intensidades das tensões cisalhantes oriundas do modelo constitutivo, da equação de equilíbrio e da Teoria da Elasticidade em Pagano (1969) foram respectivamente 9.85, 46.26 e 46.24 quando $k_w = 0$ e $k_p = 0$. A diferença percentual entre os valores de cisalhamento dos primeiro e segundo modelos foi 78.70%, enquanto entre o primeiro e o terceiro modelos foi 0.04%.

Quando comparada a tensão cisalhante proveniente das equações de equilíbrio e da Teoria da Elasticidade, a tensão de cisalhamento no modelo constitutivo apresentou descontinuidade e ausência de nulidade nas extremidades superior e inferior da viga, contrariando a cinemática de Euler-Bernoulli. No Quadro 9, são ilustrados gradientes de tensões cisalhantes para os 3 modelos levando em conta a ausência de base elástica.

Quadro 9 - Gradiente de tensões cisalhantes: a) Equação de equilíbrio (Presente), b) Modelo Contitutivo (Presente) e c) Pagano (1969).



Fonte: Elaboração Própria (2023)

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou uma viga compósita laminada biapoiada, apoiada em base elástica e submetida a carregamento senoidal via cinemática de Euler-Bernoulli. Em decorrência da razão entre o comprimento e a altura do elemento estrutural corresponder a um valor adimensional 100, a viga se categoriza como espessa e, consequentemente, a função Zig-Zag não surtiu efeito.

O Método de Navier, empregado para solucionar as equações diferenciais parciais, é limitado a estrutura biapoiada. Dessa maneira, para simular outras condições de contorno, é necessário empregar outros métodos analíticos ou numéricos como Rayleigh-Ritz, elementos finitos ou elementos de contorno.

Os parâmetros elásticos oriundos de Winkler (1867) e Pasternak (1954) exerceram influência nos deslocamentos axiais e verticais, bem como nas tensões axiais e cisalhantes atuantes na viga. Quando k_w foi fixado e k_p variou, foi notada a diminuição nas intensidades dos deslocamentos e das tensões. Contudo, quando k_p foi fixado e k_w variou, a redução nos valores de deslocamentos e de tensões foi mais intensa. Dessa maneira, o parâmetro k_w exerceu maior influência que k_p na análise estrutural da viga apoiada em base elástica.

Ademais, foram comparadas as tensões cisalhantes oriundas do modelo constitutivo e das equações de equilíbrio nas quais foram notadas grandes diferenças de intensidades. Além disso, no modelo constitutivo, houve descontinuidade contrariando a nulidade da tensão cisalhante nas bordas do elemento estrutural conforme Euler-Bernoulli.

Outrossim, foram feitas comparações entre os valores da tensão de cisalhamento provenientes das equações de equilíbrio com os oriundos da Teoria da Elasticidade em Pagano (1969). Nessa perspectiva, notou-se proximidade entre as intensidades das tensões cisalhantes dos dois modelos, bem como a nulidade nas extremidades inferior e superior da viga.

8 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho dispôs do método de Navier para solucionar as equações de equilíbrio da viga biapoiada. Contudo, para outras condições de apoio, é necessária a aplicação de outros procedimentos analíticos, a exemplo do método de Rayleigh-Ritz. Outrossim, sugere-se a implementação de métodos numéricos como elementos finitos ou elementos de contorno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTONIAZZI, Juliana P. Interação solo-estrutura de edifícios com fundações superficiais, p. 139, 2011.

BEER, Ferdinand P. *et al*. **Mecânica dos Materiais**. 5ª. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2011.

CALLISTER, William D.; RETHWISCH, David G. **Ciência e Engenharia de Materiais:** uma introdução. 9ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

DOEVA, Olga. **New Analytical and Semi-Analytical Solutions for Static Deflection of Composite Beam**. University of Limerick. Limerick, p. 316. 2021.

GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 21, n. 9, p. 775-813, 2002.

KAW, Autar K. **Mechanics of Composite Laminates**. 2ª. ed. Boca Raton: CRC Press, 2006.

MELO, Rodrigo S. D. **Análise Estática de Vigas Compósitas Laminadas de Alta Ordem Funcionalmente Graduadas e Porosas: Uma Abordagem via MEF Espectral**. Universidade Federal de Sergipe. Aracaju, p. 53. 2022.

MILLARD, Jones R. **Mechanics of composite materials**. 2ª. ed. Boca Raton: CRC Press, 1999.

OLIVEIRA, Larissa S. **Análise de vigas anisotrópicas, funcionalmente graduadas e compósitas laminadas apoiadas em base elástica Winkler –Pasternak**. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, p. 141. 2022.

PAGANO, N. J. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. **Journal Composite Materials**, p. 398, July 1969.

PASTERNAK, P.L. **New method of calculation for flexible substructures on two-parameter elastic foundation**. Moscou, p. 1-56. 1954.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. 2ª. ed. Boca Raton: CRC Press, 2003.

REDDY, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. 3ª. ed. [S.l.]: Wiley, 2017.

SANTOS, Marcelo B. **Estimativas dos momentos estáticos para o problema de flexão estocástica de viga em uma fundação Pasternak.** Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Paraná, p. 105. 2015.

WINKLER. **Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit**. Prague, p. 182. 1867.

ZHAO, L.; CHEN, W.Q; LU, C.F. Symplectic elasticity for bi-directional functionally graded materials. **Elsevier**, v. 54, p. 33-42, 15 Novembro 2012.
ZHONG, Jun *et al.* Analysis of nonlinear dynamic responses for functionally graded beams resting on tensionless elastic foundation under thermal shock. **Elsevier**, v. 142, p. 272-277, 2 Fevereiro 2016.

APÊNDICE A - LEI DE HOOKE: CASOS ISOTRÓPICOS, ORTOTRÓPICO E ANISOTRÓPICO

A Lei de Hooke, conforme ilustrada na Figura A.1, correlaciona as tensões às deformações normais e cisalhantes atuantes em um sistema estrutural. Nessa perspectiva, $[\sigma]$ é o vetor de tensões, $[C]$ designa a matriz de rigidez e $[\varepsilon]$ remete ao vetor de deformações.

Figura A.1 - Lei de Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix},$$

Fonte: Kaw (2006)

Na matriz de rigidez, a quantidade de constantes elásticas depende do comportamento mecânico do material que pode ser: isotrópico, ortotrópico e anisotrópico. Nesta perspectiva, na anisotropia, há mudança das propriedades físicas decorrentes das diferentes direções cristalográficas, enquanto que, na isotropia, não há essa variação (CALLISTER, 2016; RETHWISCH, 2016). Outrossim, na ortotropia, as propriedades físico-químicas dependem da ortogonalidade entre os planos cristalográficos.

No caso isotrópico, a matriz de rigidez depende de 2 constantes elásticas, a serem C_{11} e C_{12}, conforme ilustrado na Figura 13.

Figura A.2 - Matriz de Rigidez na Isotropia

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix}.$$

Fonte: Kaw (2006)

No caso isotrópico transversal, a matriz de rigidez depende de 5 constantes elásticas, a serem C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23} e C_{55} conforme ilustrado na Figura 14.

Figura A.3 - Matriz de Rigidez na Isotropia Transversal

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}.$$

Fonte: Kaw (2006)

No caso ortotrópico, a matriz de rigidez depende de 12 constantes elásticas, a serem C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{44}, C_{55} e C_{66}, conforme ilustrado na Figura 15.

Figura A.4 - Matriz de Rigidez na Ortotropia

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Fonte: Kaw (2006)

No caso anisotrópico, a matriz de rigidez depende de 21 constantes elásticas conforme ilustrado na figura 16. É válido ressaltar que $C_{11} = C_{22} = C_{33}$; $C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32}$ e $C_{44} = C_{55} = C_{66}$.

Figura A.5 - Matriz de Rigidez na Anisotropia

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{21} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{11} & C_{21} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{44} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{44} \end{bmatrix}$$

Fonte: Adaptado de Kaw (2006)

APÊNDICE B – NOÇÕES DE CÁLCULO VARIACIONAL

Seja $u = u(x)$ uma função associada à real configuração mecânica de um sistema mecânico e αv uma variação do mesmo. Segundo Reddy (2002), a configuração admissível é representada pela expressão (B.1).

$$\bar{u} = u + \alpha v \tag{B.1}$$

onde:

$\delta u = \alpha v$, denominado primeiro variacional de u.

B.1) Exemplo de obtenção de variacional de uma função disponível em Reddy (2002)

Seja a função F = F (x, u, u') e $\Delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\alpha v + \frac{\partial F}{\partial u'}\alpha v' + O(a^2)$, o primeiro variacional de F é obtido através da expressão (B.11).

$$\delta F = av \tag{B.1.1}$$

onde:

$$v = \left[\lim_{a\to 0}\frac{\Delta F}{a}\right] \tag{B.1.2}$$

e

$$\left[\lim_{a\to 0}\frac{\Delta F}{a}\right] = \frac{\partial F}{\partial u}v + \frac{\partial F'}{\partial u}v' \tag{B.1.3}$$

Substituindo (B.1.3) em (B.1.2) e, posteriormente em (B.1.1), obtêm a expressão (B.1.4) referente ao primeiro variacional da F.

$$\delta F = a\left[\frac{\partial F}{\partial u}v + \frac{\partial F'}{\partial u}v'\right] \quad \text{(B.1.4)}$$

B.2) Propriedades do Cálculo Variacional

Sejam as funções $F_1 = F_1(u)$ e $F_2 = F_2(u)$ nas quais aplicando as propriedades do Cálculo Variacional resulta nas expressões (B.2.1) a (B.2.4).

I) $$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \quad \text{(B.2.1)}$$

II) $$\delta F_1 F_2 = \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2 \quad \text{(B.2.2)}$$

III) $$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{\delta F_1 F_2 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \quad \text{(B.2.3)}$$

IV) $$\delta(F_1)'' = n(F_1)^{n-1}\delta F_1 \quad \text{(B.2.4)}$$

O operador variacional se correlaciona aos operadores diferenciais e integrais conforme as expressões (B.2.5) e (B.2.6).

$$\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \alpha\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\alpha v) = \frac{d}{dx}(\delta u) \quad \text{(B.2.5)}$$

$$\delta\left(\int_0^a u dx\right) = \alpha\int_0^a v \cdot dx = \int_0^a \alpha \cdot v \cdot dx = \int_0^a \delta u \cdot dx \quad \text{(B.2.6)}$$

B.3) Lema Fundamental do Cálculo Variacional

Segundo Reddy (2017), uma função integrável G em produto com uma função arbitrária contínua $\eta(x)$ para todo x em (a, b) implica em G = 0. Conforme Reddy (2002), o mesmo critério se aplica a expressão (B.3.2). Dessa maneira, G = 0 e B(a) = 0 em decorrência de $\eta(x)$ ser independente de $\eta(a)$.

$$\int_a^b G \cdot \eta \cdot dx = 0 \quad \text{(B.3.1)}$$

$$\left[\int_a^b G \cdot \eta \cdot dx\right] + B(a) \cdot \eta(a) = 0 \quad \text{(B.3.2)}$$

APÊNDICE C – SÉRIE DE FOURIER

A série de Fourier é uma expressão matemática, expressa em (C.1), com ampla aplicação nas Ciências Exatas como na Matemática para solucionar as equações diferenciais parciais. Enquanto que, na Engenharia Elétrica, sua aplicação está atrelada ao processamento de imagens e sinais e, na Engenharia Civil, à análise dinâmica das estruturas.

$$f(x) = \frac{a_0}{L} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \tag{C.1}$$

L > 0 e a_0, a_m e b_m são coeficientes.

Quando a expressão (C.1), apresenta período T = 2L, é denominada expressão de Euler-Fourier como apresentada em (C.2).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \tag{C.2}$$

onde:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{C.2.1}$$

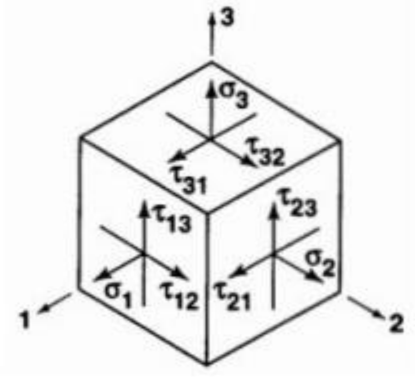
$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{C.2.2}$$

onde:

m = 1, 2, 3, ...

APÊNDICE D – PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Figura D1 - Estado triaxial de tensões



Fonte: Jones (1999)

Sejam as equações de equilíbrio apresentadas nas expressões (D.1) a (D.3). Elas estão atreladas ao estado triaxial de tensões ilustrado na Figura D.1.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\hat{x}=0 \tag{D.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\hat{y}=0 \tag{D.2}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\hat{z}=0 \tag{D.3}$$

Levando em conta o estado triaxial de tensões atuante em uma forma geométrica prismática, são válidas as expressões (D.4) à (D.6).

$$X_x=\sigma_x \cdot l+\tau_{yx} \cdot m+\tau_{zx} \cdot n \tag{D.4}$$

$$Y_y=\tau_{xy} \cdot l+\sigma_y \cdot m+\tau_{zy} \cdot n \tag{D.5}$$

$$Z_z=\tau_{xz} \cdot l+\tau_{yz} \cdot m+\sigma_z \cdot n \tag{D.6}$$

onde:

- l, m e n referem-se aos cossenos diretores.
- $X_x=\bar{X}_x, Y_y=\bar{Y}_y, Z_z=\bar{Z}_z$ referem-se as condições de contorno mecânica.
- $u=\bar{u}, v=\bar{v}, w=\bar{w}$ referem-se as condições de contorno geométrica.

Somando as integrais das equações de equilíbrio, com a imposição das variações de deslocamento e tomando em conta as condições de contorno geométrica, obtêm a expressão (D.7). Nesta se aplica o Teorema da Divergência, apresentado no Apêndice E, resultando na formulação (D.8). Aplicando as expressões (D.4), (D.5) e (D.6) em (D.8), obtêm-se a formulação do Princípio dos Trabalhos Virtuais apresentada em (D.9).

$$\begin{aligned}
&\int_r \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \hat{x} \right) \cdot \delta u \cdot dr + \int_r \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \hat{y} \right) \cdot \delta v \cdot dr + \\
&\int_r \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \hat{z} \right) \cdot \delta w \cdot dr = \\
&\int_r (X_x - \bar{X}_x) \cdot \delta u + \int_r \left(Y_y - \bar{Y}_y \right) \cdot \delta v + \int_r \left(Z_z - \bar{Z}_z \right) \cdot \delta w
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_r \begin{bmatrix} \left(\sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n\right) \cdot \delta u + (\tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n) \cdot \delta v + \\ (\tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n) \cdot \delta w \end{bmatrix} \cdot dr \\
&-\int_V \left[\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} + \sigma_z \delta\varepsilon_z - \bar{X} \cdot \delta u - \bar{Y} \cdot \delta v - \bar{Z} \cdot \delta w \right] \cdot dV + \\
&\left[\int_r (X_x - \bar{X}_x) \cdot \delta u + \int_r \left(Y_y - \bar{Y}_y \right) \cdot \delta v + \int_r \left(Z_z - \bar{Z}_z \right) \cdot \delta w \right] dr = 0
\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_r \left[\left(\bar{X}_x \right) \cdot \delta u + \left(\bar{Y}_y \right) \cdot \delta v + \left(\bar{Z}_z \right) \cdot \delta w \right] \cdot dr - \\
&-\int_V \left[\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} + \sigma_z \delta\varepsilon_z - \bar{X} \cdot \delta u - \bar{Y} \cdot \delta v - \bar{Z} \cdot \delta w \right] \cdot dV + \\
&\left[\int_r (X_x - \bar{X}_x) \cdot \delta u + \int_r \left(Y_y - \bar{Y}_y \right) \cdot \delta v + \int_r \left(Z_z - \bar{Z}_z \right) \cdot \delta w \right] dr = 0
\end{aligned} \tag{D.9}$$

APÊNDICE E – TEOREMA DO DIVERGENTE

Segundo Stewart (2013), a presença de uma região sólida simples E, contornada por uma superfície S orientada positivamente e um campo vetorial F cujas funções apresentem derivadas parciais em um espaço aberto onde E esteja contido, permite representar o Teorema do Divergente como em (E.1).

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_E divF \cdot dV \tag{E.1}$$

APÊNDICE F – FORMULAÇÃO DA ENERGIA DA VIGA

A energia total atuante na viga, referente ao presente trabalho, decorre de 4 parcelas, a serem: variação da energia de deformação interna da viga (δU), variação da energia de deformação da fundação (δU_f), variação da energia potencial das cargas externas (δW) e variação da energia de deformação das molas (δU_{AE}) situadas nos contornos.

$$\delta \prod = \delta U + \delta U_f + \delta W + \delta U_{AE} = 0 \tag{F.1}$$

A energia de deformação interna da viga é expressa em (F.2) e, em (F.3) são colocados em evidências $\left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \cdot \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T, \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \cdot \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T, \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \cdot \left[T_1(z,y)\right]^T$ e $\left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T$.

$$\begin{aligned}
\delta U = \int_V & \left[\left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T + \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left[T_1(z,y)\right]^T \right] \cdot \\
& \left[\bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \bar{\bar{c}}_{16} \left[y_1(z)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right] + \\
& \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[y_1(z)\right]^T \left(\begin{array}{l} \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \\ \bar{\bar{c}}_{66}^{\,k} \left[y_1(z)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \end{array} \right) + \\
& \left(\left\{\delta d_1\right\}^T \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T + \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[y_2(y)\right]^T \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]\left\{d_1\right\} + \\ \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(y)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \end{array} \right) dV
\end{aligned} \tag{F.2}$$

$$
\begin{aligned}
\delta U = \int_V & \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]\left(\bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T \left\{d_1(x)\right\} + \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(y)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) + \\
& \left\{\delta d_{1,x}(x)\right\}^T \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \left[\bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \bar{\bar{c}}_{16} \left[y_1(z)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right] + \\
& \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left[T_1(z,y)\right]^T \left(\begin{array}{l} \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \\ \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[y_1(z)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \end{array} \right) + \\
& \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[\begin{array}{l} \left[y_1(z)\right]^T \left(\begin{array}{l} \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \\ \bar{\bar{c}}_{66}^{\,k} \left[y_1(z)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \end{array} \right) + \\ \left[y_2(y)\right]^T \left(\bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]\left\{d_1\right\} + \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(z)\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) \end{array} \right] dV
\end{aligned}
\tag{F.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta U = & \int_0^L \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left(\int_A \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right] dA \right) \left\{d_1\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left(\int_A \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(y)\right] dA \right) \left\{d_{2,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left(\int_A \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right] dA \right) \left\{d_{1,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left(\int_A \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right] dA \right) \left\{d_{2,xx}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left(\int_A \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[y_1(z)\right] dA \right) \left\{d_{2,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left(\int_A \left[T_1(z,y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right] dA \right) \left\{d_{1,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left(\int_A \left[T_1(z,y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right] dA \right) \left\{d_{2,xx}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left(\int_A \left[T_1(z,y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[y_1(z)\right] dA \right) \left\{d_{2,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\int_A \left[y_1(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right] dA \right) \left\{d_{1,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\int_A \left[y_1(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right] dA \right) \left\{d_{2,xx}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\int_A \left[y_1(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{66}^{\,k} \left[y_1(z)\right] dA \right) \left\{d_{2,x}\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\int_A \left[y_2(y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right] dA \right) \left\{d_1\right\} dx + \\
& \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\int_A \left[y_2(y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(y)\right] dA \right) \left\{d_{2,x}\right\} dx +
\end{aligned}
\tag{F.4}
$$

onde:

$$\left[P_1\right]=\left(\int_A \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T dA\right) \qquad \text{(F.4.1)}$$

$$\left[P_2\right]=\left(\int_A \left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k} \left[y_2(y)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.2)}$$

$$\left[P_3\right]=\left(\int_A \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.3)}$$

$$\left[P_4\right]=\left(\int_A \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.4)}$$

$$\left[P_5\right]=\left(\int_A \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[y_1(z)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.5)}$$

$$\left[P_6\right]=\left(\int_A \left[T_1(z,y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.6)}$$

$$\left[P_7\right]=\left(\int_A \left[T_1(z,y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{11}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.7)}$$

$$\left[P_8\right]=\left(\int_A \left[T_1(z,y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[y_1(z)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.8)}$$

$$\left[P_9\right]=\left(\int_A \left[y_1(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_{\phi}^{(k)}(z)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.9)}$$

$$\left[P_{10}\right]=\left(\int_A \left[y_1(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{16}^{\,k} \left[T_1(z,y)\right] dA\right) \qquad \text{(F.4.10)}$$

$$\left[P_{11}\right]=\left(\int_A \left[y_1(z)\right]^T \bar{\bar{c}}_{66}^{\,k}\left[y_1(z)\right]dA\right) \tag{F.4.11}$$

$$\left[P_{12}\right]=\left(\int_A \left[y_2(y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k}\left[T_{\phi,z}^{(k)}(z)\right]dA\right) \tag{F.4.12}$$

$$\left[P_{13}\right]=\left(\int_A \left[y_2(y)\right]^T \bar{\bar{c}}_{55}^{\,k}\left[y_2(y)\right]dA\right) \tag{F.4.13}$$

São inclusas as parcelas de (F.4.1) a (F.4.13) em (F.4), resultando em (F.5). Em (F.6) são postos em evidência $\left\{\delta d_1\right\}^T, \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T, \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T$ e $\left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T$

$$\begin{aligned}
\delta U = &\int_0^L \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left[P_1\right]\left\{d_1\right\}dx + \int_0^L \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left[P_2\right]\left\{d_{2,x}\right\}dx + \\
&\int_0^L \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left[P_3\right]\left\{d_{1,x}\right\}dx + \int_0^L \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left[P_4\right]\left\{d_{2,xx}\right\}dx + \\
&\int_0^L \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left[P_5\right]\left\{d_{2,x}\right\}dx + \int_0^L \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left[P_6\right]\left\{d_{1,x}\right\}dx + \\
&\int_0^L \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left[P_7\right]\left\{d_{2,xx}\right\}dx + \int_0^L \left\{\delta d_{2,xx}\right\}^T \left[P_8\right]\left\{d_{2,x}\right\}dx + \\
&\int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[P_9\right]\left\{d_{1,x}\right\}dx + \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[P_{10}\right]\left\{d_{2,xx}\right\}dx + \\
&\int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[P_{11}\right]\left\{d_{2,x}\right\}dx + \int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[P_{12}\right]\left\{d_1\right\}dx + \\
&\int_0^L \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[P_{13}\right]\left\{d_{2,x}\right\}dx
\end{aligned} \tag{F.5}$$

$$\delta U=\int_0^L\left\{\begin{array}{l}\{\delta d_1\}^T\left[[P_1]\{d_1\}+[P_2]\{d_{2,x}\}\right]+\\ \{\delta d_{1,x}\}^T\left[[P_3]\{d_{1,x}\}+[P_4]\{d_{2,xx}\}+[P_5]\{d_{2,x}\}\right]+\\ \{\delta d_{2,xx}\}^T\left[[P_6]\{d_{1,x}\}+[P_7]\{d_{2,xx}\}+[P_8]\{d_{2,x}\}\right]+\\ \{\delta d_{2,x}\}^T\left[\begin{array}{l}[P_9]\{d_{1,x}\}+[P_{10}]\{d_{2,xx}\}+\\ [P_{11}]\{d_{2,x}\}+[P_{12}]\{d_1\}+[P_{13}]\{d_{2,x}\}\end{array}\right]\end{array}\right\}dx \tag{F.6}$$

onde:

$$[k_1]=\left[[P_1]\{d_1\}+[P_2]\{d_{2,x}\}\right] \tag{F.6.1}$$

$$[k_2]=\left[[P_3]\{d_{1,x}\}+[P_4]\{d_{2,xx}\}+[P_5]\{d_{2,x}\}\right] \tag{F.6.2}$$

$$[k_3]=\left[[P_6]\{d_{1,x}\}+[P_7]\{d_{2,xx}\}+[P_8]\{d_{2,x}\}\right] \tag{F.6.3}$$

$$[k_4]=\left[[P_9]\{d_{1,x}\}+[P_{10}]\{d_{2,xx}\}+[P_{11}]\{d_{2,x}\}+[P_{12}]\{d_1\}+[P_{13}]\{d_{2,x}\}\right] \tag{F.6.4}$$

Substituindo os termos (F.6.1) a (F.6.3) em (F.6), obtêm-se (F.7)

$$\delta U=\int_0^L\left(\{\delta d_1\}^T\{k_1\}+\{\delta d_{1,x}\}^T\{k_2\}+\{\delta d_{2,xx}\}^T\{k_3\}+\{\delta d_{2,x}\}^T\{k_4\}\right)dx \tag{F.7}$$

Em (F.8), é realizada a integração por partes, resultando em (F.9). Em seguida, são rearranjados os termos até a expressão final em (F.12)

$$\begin{aligned}&\delta U=\int_0^L\{\delta d_1(x)\}^T\{k_1\}dx+\\&\int_0^L\left(\frac{d}{dx}\left[\{\delta d_1\}^T\{k_2\}\right]-\{\delta d_1\}^T\{k_{2,x}\}\right)dx+\\&\int_0^L\left(\frac{d}{dx}\left[\{\delta d_{2,x}\}^T\{k_3\}\right]-\{\delta d_{2,x}\}^T\{k_{3,x}\}\right)dx+\\&\int_0^L\left(\frac{d}{dx}\left[\{\delta d_2\}^T\{k_4\}\right]-\{\delta d_2\}^T\{k_{4,x}\}\right)dx\end{aligned} \tag{F.8}$$

$$\delta U = \int_0^L \left(\{\delta d_1(x)\}^T \{k_1\} - \{\delta d_1\}^T \{k_{2,x}\} - \{\delta d_{2,x}\}^T \{k_{3,x}\} - \{\delta d_2\}^T \{k_{4,x}\} \right) dx + \left(\{\delta d_1\}^T \{k_2\} + \{\delta d_{2,x}\}^T \{k_3\} + \{\delta d_2\}^T \{k_4\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{F.9}$$

$$\delta U = \int_0^L \begin{pmatrix} \{\delta d_1\}^T \left[\{k_1\} - \{k_{2,x}\} \right] - \dfrac{d}{dx}\left(\{\delta d_2\}^T \{k_{3,x}\} \right) + \{\delta d_2\}^T \{k_{3,xx}\} \\ -\{\delta d_2\}^T \{k_{4,x}\} \end{pmatrix} dx + \left(\{\delta d_1\}^T \{k_2\} + \{\delta d_{2,x}\}^T \{k_3\} + \{\delta d_2\}^T \{k_4\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{F.10}$$

$$\delta U = \int_0^L \left(\{\delta d_1\}^T \left[\{k_1\} - \{k_{2,x}\} \right] + \{\delta d_2\}^T \left[\{k_{3,xx}\} - \{k_{4,x}\} \right] \right) dx + \left(\{\delta d_1\}^T \{k_2\} + \{\delta d_{2,x}\}^T \{k_3\} + \{\delta d_2\}^T \{k_4\} - \{\delta d_2\}^T \{k_{3,x}\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{F.11}$$

$$\delta U = \int_0^L \left(\{\delta d_1\}^T \left[\{k_1\} - \{k_{2,x}\} \right] + \{\delta d_2\}^T \left[\{k_{3,xx}\} - \{k_{4,x}\} \right] \right) dx + \left(\{\delta d_1\}^T \{k_2\} + \{\delta d_2\}^T \left[\{k_4\} - \{k_{3,x}\} \right] + \{\delta d_{2,x}\}^T \{k_3\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{F.12}$$

A parcela de energia de deformação elástica da fundação é expressa em (F.12). Em (F.13) escreve-se a parcela de deslocamento w_0 em formato matricial e com a escrita análoga de (F.12) em (F.14), o substitui e obtêm (F.15).

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\{ \delta w_0 k_w w_0 + \delta w_0 k_p w_{0,x} \} \right) dx \tag{F.12}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0(x) \\ v_0(x) \\ \vartheta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{T}} \end{bmatrix} \{ d_2(x) \} \tag{F.13}$$

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\{\delta w_0\}^T k_w \left[w_0 \right] + \{\delta w_{0,x}\}^T k_p \left[w_{0,x} \right] \right) dx \tag{F.14}$$

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}}\right]^T k_w \left[\bar{\bar{T}}\right] \{d_2\} + \{\delta d_{2,x}\}^T \left[\bar{\bar{T}}\right]^T k_p \left[\bar{\bar{T}}\right] \{d_{2,x}\} \right) dx \tag{F.15}$$

$$\left[\bar{\bar{T}}\right]^T k_w \left[\bar{\bar{T}}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k_w \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\bar{\bar{T}}_{K_w}\right] \tag{F.15.1}$$

$$\left[\bar{\bar{T}}\right]^T k_p \left[\bar{\bar{T}}\right] = \begin{bmatrix} k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\bar{\bar{T}}_{K_p}\right] \tag{F.15.2}$$

Escrevendo a expressão (F.15) com os termos (F.15.1) e (F.15.2), obtêm-se (F.16).

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right] \{d_2\} + \{\delta d_{2,x}\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right] \{d_{2,x}\} \right) dx \tag{F.16}$$

Aplicando em (F.16) a derivação, obtêm-se (F.17) e, em seguida, com a integração por partes obtêm (F.18).

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right] \{d_2\} + \frac{d}{dx}\left(\{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right] \{d_{2,x}\} \right) - \{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right] \{d_{2,xx}\} \right) dx \tag{F.17}$$

$$\delta U_f = \int_0^L \left(\{\delta d_2\}^T \left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right] \{d_2\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right] \{d_{2,xx}\} \right] \right) dx + \left(\{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right] \{d_{2,x}\} \right)_{x=0}^{x=L} \tag{F.18}$$

Os deslocamentos podem ser escritos na forma matricial conforme as expressões (F.16) a (F.21).

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \vartheta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \{d_1\} = \left[T_{u_0}\right] \{d_1\} \tag{F.19}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0(x) \\ v_0(x) \\ \vartheta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d_2\} = \left[\bar{\bar{T}}\right] \{d_2\} \tag{F.20}$$

$$v_0(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{d_2\} = \left[T_{v_0}\right] \{d_2\} \tag{F.21}$$

$$\vartheta(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{d_2\} = \left[T_{\vartheta}\right] \{d_2\} \tag{F.22}$$

$$\theta_y = -\frac{dw_0}{dx} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d_{2,x}\} = -\left[\bar{\bar{T}}\right] \{d_{2,x}\} \tag{F.23}$$

$$\theta_z = \frac{dv_0}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{d_{2,x}\} = \left[T_{v_0}\right] \{d_{2,x}\} \tag{F.24}$$

A parcela de energia decorrentes das cargas externas é expressa em (F.25).

$$\delta w = -\int_0^L \left(\delta w_0 \cdot q_z(x) + \delta v \cdot q_y(x) + \delta u \cdot q_x(x) + \delta\vartheta \cdot q_{\vartheta} \right) dx \tag{F.25}$$

$$\delta w = -\int_0^L \left(\{\delta w_0\}^T \{q_z(x)\} + \{\delta v_0\}^T \{q_y(x)\} + \{\delta u_0\}^T \{q_x(x)\} + \{\delta\vartheta\}^T \{q_{\vartheta}\} \right) dx \tag{F.25.1}$$

Aplicando os deslocamentos em (F.25.1), obtêm-se (F.25.2). Em seguida, coloca-se os termos em evidência obtendo (F.25.3).

$$\delta w = -\int_0^L \left(\begin{matrix} \{\delta d_2\}^T \left\{\bar{\bar{T}}\right\}^T \{q_z(x)\} + \{\delta d_2\}^T \left\{T_{v_0}\right\}^T \{q_y(x)\} + \\ \{\delta d_1\}^T \left\{T_{u_0}\right\}^T \{q_x(x)\} + \{\delta d_2\}^T \{T_{\vartheta}\}^T \{q_{\vartheta}\} \end{matrix} \right) dx \tag{F.25.2}$$

$$\delta w = -\int_0^L \left(\begin{matrix} \{\delta d_1\}^T \left\{T_{u_0}\right\}^T \{q_x(x)\} + \\ \{\delta d_2\}^T \left[\left\{\bar{\bar{T}}\right\}^T \{q_z(x)\} + \left\{T_{v_0}\right\}^T \{q_y(x)\} + \{T_{\vartheta}\}^T \{q_{\vartheta}\} \right] \end{matrix} \right) dx \tag{F.25.3}$$

A parcela de energia decorrentes das molas é expressa em (F.26) e rescrita no formato de (F.25).

$$\delta U_{AE} = \begin{bmatrix} \delta d_u \cdot k_0^u \cdot u_0 + \delta w \cdot k_0^w \cdot w_0 + \delta v \cdot k_0^v \cdot v_0 + \\ \delta \theta_y \cdot k_0^{\theta_y} \cdot \theta_y + \delta \theta_z \cdot k_0^{\theta_z} \cdot \theta_z + \delta \vartheta \cdot k_0^{\vartheta} \cdot \vartheta \end{bmatrix}_{x=0} + \begin{bmatrix} \delta d_u \cdot k_L^u \cdot u_0 + \delta w \cdot k_L^w \cdot w_0 + \delta v \cdot k_L^v \cdot v_0 + \\ \delta \theta_y \cdot k_L^{\theta_y} \cdot \theta_y + \delta \theta_z \cdot k_L^{\theta_z} \cdot \theta_z + \delta \vartheta \cdot k_L^{\vartheta} \cdot \vartheta \end{bmatrix}_{x=L} \quad \text{(F.26)}$$

$$\delta U_{AE} = \begin{bmatrix} \{\delta u_0\}^T k_0^u \{u_0\} + \{\delta w_0\}^T k_0^w \{w_0\} + \\ \{\delta v_0\}^T k_0^v \{v_0\} + \{\delta \theta_y\} k_0^{\theta_y} \{\theta_y\} + \\ \{\delta \theta_z\} k_0^{\theta_z} \{\theta_z\} + \{\delta \vartheta\} k_0^{\vartheta} \{\vartheta\} \end{bmatrix}_{x=0} + \begin{bmatrix} \{\delta u_0\}^T k_L^u \{u_0\} + \{\delta w_0\}^T k_L^w \{w_0\} + \\ \{\delta v_0\}^T k_L^v \{v_0\} + \{\delta \theta_y\} k_L^{\theta_y} \{\theta_y\} + \\ \{\delta \theta_z\} k_L^{\theta_z} \{\theta_z\} + \{\delta \vartheta\} k_L^{\vartheta} \{\vartheta\} \end{bmatrix}_{x=L} \quad \text{(F.27)}$$

As equações (G.27.1) a (G.27.6) são detalhamentos dos termos de (F.27) que resultarão em (F.28):

$$\{\delta u_0\}^T k_0^u \{u_0\} = \{\delta d_1\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T k_0^u \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \{d_1\} = \\ = \{\delta d_1\}^T \begin{bmatrix} k_0^u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{d_1\} = \{\delta d_1\}^T \left[T_{k_0}^u \right] \{d_1\} \quad \text{(F.27.1)}$$

$$\{\delta w_0\}^T k_0^w \{w_0\} = \{\delta d_2\}^T \left[\bar{\bar{T}} \right]^T k_0^w \left[\bar{\bar{T}} \right] \{d_2\} = \\ = \{\delta d_2\}^T \left[T_{k_0}^w \right] \{d_2\} \quad \text{(F.27.2)}$$

$$\{\delta v_0\}^T k_0^v \{v_0\} = \{\delta d_2\}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T k_0^v \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{d_2\} = \\ = \{\delta d_2\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0^v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d_2\} = \{\delta d_2\}^T \left[T_{k_0}^v \right] \cdot \{d_2\} \quad \text{(F.27.3)}$$

$$\left\{\delta\theta_y\right\}^T k_0^{\theta_y}\left\{\theta_y\right\} = -\left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \begin{bmatrix} - \\ - \\ T \\ \\ \end{bmatrix}^T k_0^{\theta_y}\left(-\left[\begin{bmatrix} - \\ - \\ T \\ \\ \end{bmatrix}\right]\left\{\delta d_{2,x}\right\}\right) =$$

$$= \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \begin{bmatrix} k_0^{\theta_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left\{d_{2,x}\right\} = \left\{\delta d_2\right\}^T \left[T_{k_0}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \tag{F.27.4}$$

$$\left\{\delta\theta_z\right\}^T k_0^{\theta_z}\left\{\theta_z\right\} = \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[T_{v_0}\right]^T k_0^{\theta_z}\left[T_{v_0}\right]\left\{d_{2,x}\right\} =$$

$$\left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} k_0^{\theta_z}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left\{d_{2,x}\right\} =$$

$$\left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0^{\theta_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left\{d_{2,x}\right\} = \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left[T_{k_0}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \tag{F.27.5}$$

$$\left\{\delta\vartheta\right\}^T k_0^{\vartheta}\left\{\vartheta\right\} = \left\{\delta d_2\right\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T k_0^{\vartheta}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{d_2\right\} =$$

$$\left\{\delta d_2\right\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0^{\vartheta} \end{bmatrix}\left\{d_2\right\} = \left\{\delta d_2\right\}^T \left[T_{k_0}^{\vartheta}\right]\left\{d_2\right\} \tag{F.27.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_{AE} = {} & \left\{\delta d_1(0)\right\}^T \left[T_{k_0}^{u}\right]\left\{d_1(0)\right\} + \left\{\delta d_2(0)\right\}^T \left[T_{k_0}^{w}\right]\left\{d_2(0)\right\} + \\
& \left\{\delta d_2(0)\right\}^T \left[T_{k_0}^{v}\right]\left\{d_2(0)\right\} + \left\{\delta d_{2,x}(0)\right\}^T \left[T_{k_0}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} + \\
& \left\{\delta d_{2,x}(0)\right\}^T \left[T_{k_0}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}(0)\right\} + \left\{\delta d_2(0)\right\}^T \left[T_{k_0}^{\vartheta}\right]\left\{d_2(0)\right\} + \\
& \left\{\delta d_1(L)\right\}^T \left[T_{k_L}^{u}\right]\left\{d_1(L)\right\} + \left\{\delta d_2(L)\right\}^T \left[T_{k_L}^{w}\right]\left\{d_2(L)\right\} + \\
& \left\{\delta d_2(L)\right\}^T \left[T_{k_L}^{v}\right]\left\{d_2(L)\right\} + \left\{\delta d_{2,x}(L)\right\}^T \left[T_{k_L}^{\theta_y}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} + \\
& \left\{\delta d_{2,x}(L)\right\}^T \left[T_{k_L}^{\theta_z}\right]\left\{d_{2,x}(L)\right\} + \left\{\delta d_2(L)\right\}^T \left[T_{k_L}^{\vartheta}\right]\left\{d_2(L)\right\}
\end{aligned} \tag{F.28}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left(\begin{array}{l}
\{\delta d_1\}^T \left[\{k_1\} - \{k_{2,x}\} - \left[T_{u_0} \right]^T q_x(x) \right] + \\
\{\delta d_2^T\} \left[\begin{array}{l}
\{k_{3,xx}\} - \{k_{4,x}\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_w} \right] \{d_2\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] \{d_{2,xx}\} - \\
\left[\bar{\bar{T}} \right]^T q_z(x) - \left[\bar{\bar{T}}_{v_0} \right]^T q_y(y) - \left[T_\vartheta \right]^T q_\vartheta(\vartheta)
\end{array} \right]
\end{array} \right) dx + \\
&\{\delta d_1(L)\}^T \left[\{k_2(L)\} + \left[T_{k_L}^u \right]^T \{d_1(L)\} \right] + \\
&\{\delta d_1(0)\}^T \left[-\{k_2(0)\} + \left[T_{k_0}^u \right]^T \{d_1(0)\} \right] + \\
&\{\delta d_2(L)\}^T \left[\begin{array}{l}
\{k_4(L)\} - \{k_{3,x}(L)\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] \{d_{2,x}(L)\} + \\
\left[T_{k_L}^w \right] \{d_2(L)\} + \left[T_{k_L}^u \right] \{d_2(L)\} + \left[T_{k_L}^v \right] \{d_2(L)\}
\end{array} \right] + \\
&\{\delta d_2(0)\}^T \left[\begin{array}{l}
-\{k_4(0)\} + \{k_{3,x}(0)\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] \{d_{2,x}(0)\} + \\
\left[T_{k_0}^w \right] \{d_2(0)\} + \left[T_{k_0}^u \right] \{d_2(L)\} + \left[T_{k_0}^v \right] \{d_2(0)\}
\end{array} \right] + \\
&\{\delta d_{2,x}(L)\}^T \left[\{k_3(L)\} + \left[T_{k_L}^{\theta_y} \right] \{d_{2,x}(L)\} + \left[T_{k_L}^{\theta_z} \right] \{d_{2,x}(L)\} \right] + \\
&\{\delta d_{2,x}(0)\}^T \left[-\{k_3(0)\} + \left[T_{k_0}^{\theta_y} \right] \{d_{2,x}(0)\} + \left[T_{k_0}^{\theta_z} \right] \{d_{2,x}(0)\} \right] = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(F.29)}
$$

Aplicando (F.12), (F.18), (F.25.3) e (F.18) em (F.1) e colocando os termos comuns em evidência, obteve-se a expressão (F.29). Usando o lema fundamental do cálculo variacional, determina-se as equações de equilíbrio (F.30) e as condições de contorno (F.31).

$$
\begin{cases}
\{k_1\} - \{k_{2,x}\} - \left[T_{u_0} \right]^T q_x(x) = 0 \\
\{k_{3,xx}\} - \{k_{4,x}\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_w} \right] \{d_2\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] \{d_{2,xx}\} - \\
\left[\bar{\bar{T}} \right]^T q_z(x) - \left[\bar{\bar{T}}_{v_0} \right]^T q_y(y) - \left[T_\vartheta \right]^T q_\vartheta(\vartheta) = 0
\end{cases}
\qquad \text{(F.30)}
$$

$$\begin{cases} d_1(L) \\ d_2(L) \\ d_{2,x}(L) \\ d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_{2,x}(0) \end{cases} \tag{F.31}$$

$$\begin{gathered}
\left[\{k_2(L)\} + \left[T_{k_L}^{u}\right]^T \{d_1(L)\}\right] = 0 \\
\{k_4(L)\} - \{k_{3,x}(L)\} + \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\{d_{2,x}(L)\} + \\
\left[T_{k_L}^{w}\right]\{d_2(L)\} + \left[T_{k_L}^{u}\right]\{d_2(L)\} + \left[T_{k_L}^{v}\right]\{d_2(L)\} = 0 \\
\{k_3(L)\} + \left[T_{k_L}^{\theta_y}\right]\{d_{2,x}(L)\} + \left[T_{k_L}^{\theta_z}\right]\{d_{2,x}(L)\} = 0 \\
-\{k_2(0)\} + \left[T_{k_0}^{u}\right]^T \{d_1(0)\} = 0 \\
-\{k_4(0)\} + \{k_{3,x}(0)\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\{d_{2,x}(0)\} + \\
\left[T_{k_0}^{w}\right]\{d_2(0)\} + \left[T_{k_0}^{u}\right]\{d_2(L)\} + \left[T_{k_0}^{v}\right]\{d_2(0)\} = 0 \\
-\{k_3(0)\} + \left[T_{k_0}^{\theta_y}\right]\{d_{2,x}(0)\} + \left[T_{k_0}^{\theta_z}\right]\{d_{2,x}(0)\} = 0
\end{gathered} \tag{F.32}$$

As equações de equilíbrio expressas em (F.30) podem ser escritas no formato expresso em (F.33):

$$\begin{cases}
[P_1]\{d_1\} + [P_2]\{d_{2,x}\} - [P_3]\{d_{1,xx}\} - [P_4]\{d_{2,xxx}\} - [P_5]\{d_{2,xx}\} - \left[T_{u_0}\right]^T q_x(x) = 0 \\
\quad [P_6]\{d_{1,xxx}\} + [P_7]\{d_{2,xxxx}\} + [P_8]\{d_{2,xxx}\} - [P_9]\{d_{1,xx}\} - \\
\quad [P_{10}]\{d_{2,xxx}\} - [P_{11}]\{d_{2,xx}\} - [P_{12}]\{d_{1,x}\} - [P_{13}]\{d_{2,xx}\} + \\
\quad \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]\{d_2\} - \left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]\{d_{2,xx}\} - \left[\bar{\bar{T}}\right]^T q_z(x) - \left[T_{v_0}\right]^T q_y(x) - \left[T_{\vartheta}\right]^T q_{\vartheta}(\vartheta) = 0
\end{cases} \tag{F.33}$$

Expressando a equação (F.31) com termos em evidência, obtêm-se (F.34.1) e (F.34.2).

$$
\begin{cases}
[P_1]\{d_1\}-\{P_3\}\{d_{1,xx}\}+[P_2]\{d_{2,x}\}-\{P_5\}\{d_{2,xx}\}-\{P_4\}\{d_{2,xxx}\}-\left[T_{u_0}\right]^T q_x(x)=0 & \text{(F.34.1)} \\
-[P_{12}]\{d_{1,x}\}-[P_9]\{d_{1,x}x\}+[P_6]\{d_{1,xxxx}\}+\left[T_{k_w}\right]\{d_2\}- & \text{(F.34.2)} \\
\left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]+[P_{13}]+[P_{11}]\right]\{d_{2,xx}\}+\left[[P_8]-[P_{10}]\right]\{d_{2,xxx}\}+[P_7]\{d_{2,xxxx}\}-\left[\bar{\bar{T}}\right]^T q_z(x) & \\
-\left[T_{v_0}\right]^T q_y(x)-[T_\vartheta]^T q_\vartheta(\vartheta)=0 &
\end{cases}
$$

Os carregamentos são expressos em (F.35), (F.36) e (F.37):

$$q_z(x)=\sum_{i=1}^{\infty} Q_z \sin(\lambda_n x) \tag{F.35}$$

$$q_y(x)=\sum_{i=1}^{\infty} Q_y \sin(\lambda_n x) \tag{F.36}$$

$$q_\vartheta(x)=0 \tag{F.37}$$

onde:

$$\lambda_m=\frac{m\cdot\pi}{L}$$

Expressando os termos da equação (5.1) em série de Fourier:

$$u_o=\sum_{i=1}^{\infty} U_m \cos(\lambda_m x) \tag{F.38}$$

$$w_o=\sum_{i=1}^{\infty} W_m \sin(\lambda_m x) \tag{F.39}$$

$$v_o=\sum_{i=1}^{\infty} V_m \sin(\lambda_m x) \tag{F.40}$$

$$\psi=\sum_{i=1}^{\infty} \psi_m \cos(\lambda_m x) \tag{F.41}$$

$$\vartheta=\sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_m \cos(\lambda_m x) \tag{F.42}$$

Expressando os termos de (F.34) em função de (F.38), (F.39), (F.49), (F.41) e (F.42), obtêm-se (F.43) e (F.44):

$$\left\{d_1^m\right\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} U_m \cos(\lambda_m x) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \psi_m \cos(\lambda_m x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda_m x) \\ \psi_m \cos(\lambda_m x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \cos(\lambda_m x) \tag{F.43}$$

$$\left\{d_2^m\right\} = \begin{Bmatrix} w_o \\ v_o \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} W_m \sin(\lambda_m x) \\ \sum_{i=1}^{\infty} V_m \sin(\lambda_m x) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_m \sin(\lambda_m x) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \sin(\lambda_m x) \tag{F.44}$$

Substituindo as expressões (F.43) e (F.44) em (F.34.1), obtêm-se:

$$\begin{aligned} &[P_1]\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \cos(\lambda_m x)\right\} - [P_3]\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \left(-\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\right)\right\} + \\ &[P_2]\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m \cos(\lambda_m x)\right)\right\} - [P_5]\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(-\lambda_m^2 \sin(\lambda_m x)\right)\right\} - \\ &\{P_4\}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(-\lambda_m^3 \cos(\lambda_m x)\right)\right\} - \left[T_{u_0}\right]^T q_x(x) = 0 \end{aligned} \tag{F.45}$$

Colocando em evidência os somatórios, determina-se (F.46):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} [P_1]\begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \cos(\lambda_m x) + [P_3]\begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m^2 \cos(\lambda_m x)\right) + \\ [P_2]\begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m \cos(\lambda_m x)\right) + \\ [P_5]\begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m^2 \sin(\lambda_m x)\right) + [P_4]\begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m^3 \cos(\lambda_m x)\right) \end{bmatrix} = \left[T_{u_0}\right]^T q_x(x) \tag{F.46}$$

Por se tratar de viga cross-ply e, supondo $q_x = 0$, a equação (F.46) se reduz a (F.47).

$$[P_1]\begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} + [P_3]\begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix}\lambda_m^2 + [P_2]\begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix}\lambda_m + [P_4]\begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix}\lambda_m^3 = 0 \qquad \text{(F.47)}$$

Aplicando (F.43) e (F.44) e escrevendo (F.47) obtêm-se (F.48).

$$\left[[P_1] + \lambda_m^2 [P_3] \quad [P_2]\lambda_m + [P_4]\lambda_m^3 \right] \begin{Bmatrix} \{d_1^m\} \\ \{d_2^m\} \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \text{(F.48)}$$

Por se tratar de viga cross-ply e, supondo $q_x = 0$, a equação (F.34.1) se reduz a (F.49) em decorrência de $[P_8] = [P_9] = [P_{10}] = 0$.

$$\begin{aligned}
&-[P_{12}]\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \left(-\lambda_m \sin(\lambda_m x) \right) \right\} + [P_6]\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m^3 \sin(\lambda_m x) \right) \right\} + \\
&\left[\bar{\bar{T}}_{k_w} \right] \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(\sin(\lambda_m x) \right) \right\} - \left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] + [P_{13}] + [P_{11}] \right] \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(-\lambda_m^2 \sin(\lambda_m x) \right) \right\} + \\
&[P_7]\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_m \end{Bmatrix} \left(\lambda_m^4 \sin(\lambda_m x) \right) \right\} - \left[\bar{\bar{T}} \right]^T \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} Q_z \left(\sin(\lambda_m x) \right) \right\} - \\
&\left[T_{v_0} \right]^T \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} Q_y \left(\sin(\lambda_m x) \right) \right\} = 0
\end{aligned} \qquad \text{(F.49)}$$

Rearranjando os termos da equação (F.49), obtêm-se (F.50).

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &[P_{12}]\lambda_m \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \sin(\lambda_m x) + [P_6]\lambda_m^3 \begin{Bmatrix} U_m \\ \psi_m \end{Bmatrix} \sin(\lambda_m x) + \left[\bar{\bar{T}}_{k_w} \right] \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_w \end{Bmatrix} \sin(\lambda_m x) + \\ &\left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_p} \right] + [P_{13}] + [P_{11}] \right] \lambda_m^2 \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_w \end{Bmatrix} \sin(\lambda_m x) + [P_7]\lambda_m^4 \begin{Bmatrix} W_m \\ V_m \\ \vartheta_w \end{Bmatrix} \sin(\lambda_m x) \end{aligned} \right) = \\
&\sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[\bar{\bar{T}} \right]^T Q_z \sin(\lambda_m x) + \left[T_{v_o} \right]^T Q_y \sin(\lambda_m x) \right)
\end{aligned} \qquad \text{(F.50)}$$

$$[P_{12}]\lambda_m\left\{d_1^m\right\}+[P_6]\lambda_m^3\left\{d_1^m\right\}+\left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]\left\{d_2^m\right\}+\left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]+[P_{13}]+[P_{11}]\right]\lambda_m^2\left\{d_2^m\right\}+$$
$$[P_7]\lambda_m^4\left\{d_2^m\right\}=\left[\bar{\bar{T}}\right]^T\theta_z+\left[T_{v_0}\right]^T\theta_y \tag{F.51}$$

$$\left[[P_{12}]\lambda_m+[P_6]\lambda_m^3 \quad \left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]+\lambda_m^2\left[\left[\bar{\bar{T}}_{k_p}\right]+[P_{13}]+[P_{11}]\right]+\lambda_m^4[P_7]\right]\begin{Bmatrix}d_1^m\\ d_2^m\end{Bmatrix}=$$
$$\left[\bar{\bar{T}}\right]^T\theta_z+\left[T_{v_0}\right]^T\theta_y \tag{F.52}$$

Escrevendo a expressão (F.52) na forma matricial, obtêm-se (F.53):

$$\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\left\{d_1^n\right\}\\ \left\{d_2^n\right\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \left[\bar{\bar{T}}\right]^T\theta_z+\left[T_{v_0}\right]^T\theta_y\end{Bmatrix} \tag{F.53}$$

onde:

$$k_{11}=[P_1]+\lambda_m^2[P_3]$$

$$k_{12}=[P_2]\lambda_m+[P_4]\lambda_m^3$$

$$k_{21}=[P_{12}]\lambda_m+[P_6]\lambda^3{}_m$$

$$k_{22}=\left[\bar{\bar{T}}_{k_w}\right]+\lambda_m^2\left[\left[\bar{T}_{k_p}\right]+[P_{13}]+[P_{11}]\right]+[P_7]\,\lambda^4{}_m$$

APÊNDICE G – PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

Para obter a formulação do Princípio da Mínima Energia Potencial, admite-se, em conformidade com o Princípio dos Deslocamentos Virtuais, que o variacional do trabalho atuante no sistema (δW) é nulo.

$$\delta W = 0 \tag{G.1}$$

$$\delta W = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \delta\varepsilon_{ij} \cdot d\Omega - \left[\int_{\Omega} f \cdot \delta u \cdot d\Omega + \int_{S_2} \hat{t} \cdot \delta u \cdot dS \right] = 0 \tag{G.2}$$

onde:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{G.3}$$

sendo que:

σ_{ij} - Campo de tensões.

ε_{ij} - Campo de deformações.

u – Deslocamento.

f - Carregamento no contorno.

t – Carregamento na superfície.

Substituindo (G.3) em (G.2), determina-se (G..4):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \cdot \delta\varepsilon_{ij} \cdot d\Omega + \delta V = 0 \tag{G.4}$$

U_o – Função densidade de energia de deformação.

onde:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \cdot \delta\varepsilon_{ij} \tag{G.4.1}$$

e

$$\delta V = -\left[\int_{\Omega} f \cdot \delta u \cdot d\Omega + \int_{S_2} \hat{t} \cdot \delta u \cdot dS \right] \tag{G.4.2}$$

V – Energia potencial decorrente das cargas externas.

Substituindo (G.4.1) em (G.4), obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \delta U_0 \cdot d\Omega + \delta V = 0 \qquad \text{(G.5)}$$

Ressalta-se que, a energia potencial interna é:

$$U = \int_{\Omega} U_0 \cdot d\Omega \qquad \text{(G.6)}$$

E, consequentemente, o variacional da energia potencial interna:

$$\delta U = \int_{\Omega} \delta U_0 \cdot d\Omega \qquad \text{(G.7)}$$

Aplicando (H.7) em (H.5), obtêm-se a formulação do Princípio da Mínima Energia Potencial. Este teorema afirma que a soma das energias potenciais internas e externas no sistema é nula como expresso em (H.10).

$$\delta U + \delta V = 0 \qquad \text{(G.10)}$$

Aplicando a propriedade de cálculo variacional em (G.10), descrita no Apêndice B, no item (G.2.1) obtêm (G.11):

$$\delta\left(U + V\right) = 0 \qquad \text{(G.11)}$$

onde:

$$\delta \prod = \delta\left(U + V\right) \qquad \text{(G.12)}$$

$\prod$ - Energia potencial total do corpo no regime elástico.

Substituindo (G.12) em (G.11), conclui-se que o Princípio da Mínima Energia Potencial implica na nulidade no variacional da energia potencial total do corpo no regime elástico.

$$\delta \prod = 0 \qquad \text{(G.13)}$$

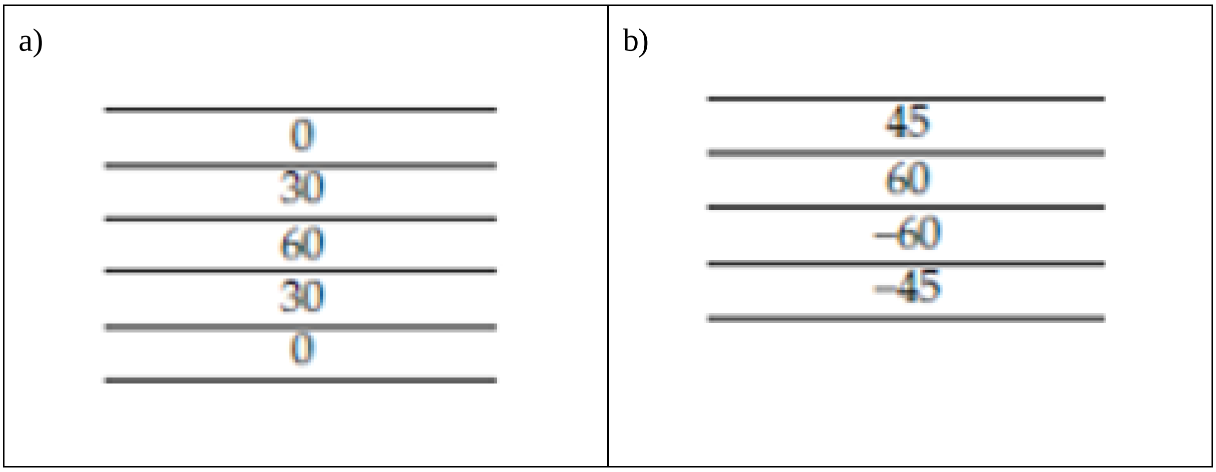
APÊNDICE H – CLASSIFICAÇÃO DAS VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DAS FIBRAS

Os elementos estruturais constituídos por materiais compósitos laminados podem ser classificados conforme à orientação de suas fibras, a serem:

- Laminados simétricos - apresentam lâminas com os mesmos materiais, angulações e espessuras tanto acima quanto abaixo do plano médio.
- Laminados assimétricos - apresentam camadas com mesmos materiais e mesma espessura. Contudo, orientações distintas tomando a mesma distância em relação ao plano médio.
- Laminados de camada cruzada (Cross-Ply) - apresentam lâminas com apenas orientações de 0° e 90°.
- Laminados de camada angular - apresentam os mesmos materiais e espessuras e uma única orientação positiva e negativa.
- Laminados equilibrados - apresentam camadas cujas orientações formam pares, sejam positivos ou negativos.

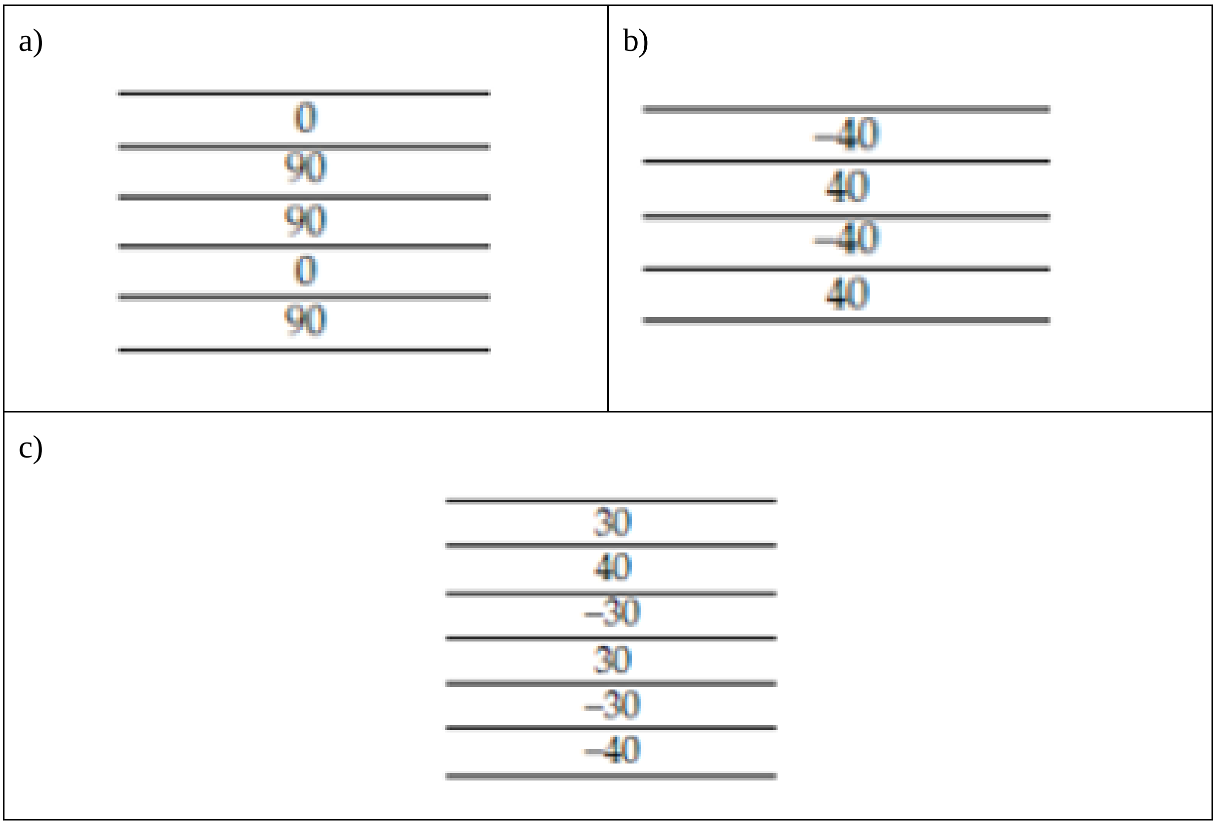
Nas imagens seguintes, o número entre as camadas da estrutura retrata o ângulo entre os sistemas de eixo local e global da estrutura. O ângulo entre esses eixos serve para indicar a direção das fibras que compõem o material compósito.

Figure H.1 – Materiais compósitos laminados. a) Simétrico e b) Assimétrico.



Fonte: Adaptado de Kaw (2006)

Figure H.2 – Materiais compósitos laminados. a) Cross-Ply, b) Camada angular e c) Equilibrados.



Fonte: Adaptado de Kaw (2006)