UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

VANESSA CONCEIÇÃO SANTOS SOUSA

CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES SOBRE USO DE ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA RELACIONADAS A FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

São Cristóvão - SE
Abril, /2024

VANESSA CONCEIÇÃO SANTOS SOUSA

CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES SOBRE USO DE ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA RELACIONADAS A FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, da Universidade Federal de Sergipe – PPGECIMA/UFS, pela linha de pesquisa **Currículo, didáticas e métodos de ensino das ciências naturais e matemática**, como parte dos requisitos necessários para a Defesa ao título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

ORIENTADORA: **Profa. Dra. Denize da Silva Souza**

São Cristóvão - SE
Março/2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Sousa, Vanessa Conceição Santos
S725c Condições e restrições sobre uso de atividades de estudo e pesquisa relacionadas a frações no 6o ano do ensino fundamental / Vanessa Conceição Santos Sousa; orientadora Denize da Silva Souza. – São Cristóvão, SE, 2024
115 f.; il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Frações. 3. Geometria plana. 4. Didática. I. Souza, Denize da Silva, orient. II. Título.

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGECIMA

UFS

VANESSA CONCEIÇÃO SANTOS SOUSA

CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES SOBRE USO DE ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA RELACIONADAS A FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

APROVADO PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM
05 DE ABRIL DE 2024

Denize da Silva Souza.

Profa. Dra. Denize da Silva Souza (Orientadora)
PPGECIMA/UFS

Prof. Dr. Carlos Alberto de Vasconcelos (Membro interno)
PPGECIMA/UFS

Ricardo Nicasso Ben

Prof. Dr. Ricardo Nicasso Benito (Membro interno)
DMA/UFS

gov.br
Documento assinado digitalmente
CARLONEY ALVES DE OLIVEIRA
Data: 05/04/2024 13:51:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira (Membro externo à Instituição)
Universidade Federal de Alagoas - UFAL

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, por me apoiar e permitir que eu dedicasse toda a minha atenção apenas aos estudos.

Aos professores Dr. Carloney Alves de Oliveira, Dr. Ricardo Nicasso Benito, Dr. Carlos Alberto de Vasconcelos, por aceitarem fazer parte da banca examinadora desse trabalho. Agradeço pelas contribuições significativas ao meu trabalho.

Ao grupo de pesquisa GEPEMAT, particularmente, aos professores Dr. Ricardo Nicasso Benito, Dra. Marta Élid Amorim Mateus, Dr. Rafael Neves Almeida, Dra. Teresa Cristina Etcheverria, Me. Viviane De Jesus Lisboa Aquino, que me deram suporte e discursões riquíssimas para a construção do pré-projeto de pesquisa para a minha entrada nesse programa de mestrado.

À minha orientadora Dra. Denize Da Silva Souza, por sua dedicação à orientação do trabalho, pelo carinho e atenção.

Ao meu noivo João Igor, por todo amor e companheirismo. Agradeço por me lembrar do meu potencial, por tornar meus dias mais felizes e ser complementar à minha felicidade. Amo-te!

Um agradecimento especial, aos meus bons e velhos amigos Rafael Santos, Mateus Nunes, Geronimo Carvalho (G7) e Denison (Deni), que me acompanham desde a graduação – uns no início e outros ali na metade do curso – vocês foram meu porto seguro em muitos momentos - no contexto pessoal, como também, durante nossos estudos para as provas – em especial Rafael Santos. Seus gestos de amizade foram essenciais para que eu pudesse enfrentar alguns desafios. Obrigada por fazerem parte da minha jornada e por tornaram minha vida mais rica.

Aos estudantes participantes da pesquisa e ao professor José Adeilson Pereira Melquiades, que nos cedeu a turma do 6º ano do Ensino Fundamental para a experimentação do trabalho.

RESUMO

O objetivo desta dissertação foi analisar condições e restrições que incidem sobre o uso das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) envolvendo frações associadas às medidas de perímetro e de área em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. Ao tomarmos como referência a Teoria Antropológica do Didático (TAD), buscamos elaborar uma sequência de cinco atividades a partir dos estudos realizados por Silva voltados ao objeto frações, a partir de modelos respectivos às três dimensões do problema didático. Nesses estudos, afirma-se que as abordagens deste objeto em sala de aula se concentram na ideia de concepção parte-todo, utilizando a técnica de dupla contagem das partes, principalmente no aspecto de "saber-fazer" em detrimento ao desenvolvimento do entendimento que justifica o uso de tais técnicas. O que resulta na ausência de aprofundamento por parte dos estudantes para compreenderem este objeto matemático. Para tanto, enquadramos o trabalho como pesquisa qualitativa, cujo processo de coleta de dados envolveu estudo bibliográfico e documental sobre frações, além de incluir elementos de uma pesquisa exploratória, com intervenção pedagógica. Para o processo desta coleta de dados, seguimos a metodologia utilizada pela TAD que possui quatro fases. A primeira fase se referiu a uma análise preliminar a partir de um estudo epistemológico do objeto matemático em questão, visando identificar as condições e restrições que incidem sob esse mesmo objeto, por meio das três dimensões do problema didático: dimensão epistemológica (Modelo Epistemológico de Referência – MER – se referiu ao estudo da razão de ser e existir o objeto matemático em jogo; dimensão econômica (Modelo Epistemológico Dominante – MED, voltado ao estudo de documentos curriculares) e dimensão ecológica (Modelo Praxeológico de Referência – MPR, contemplando também, uma análise de livros didáticos de matemática do 6° ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Plano Nacional de Livro e Material Didático – PNLD). A segunda fase correspondeu a uma análise *a priori* para a intervenção pedagógica, momento em que elaboramos as Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) com base nos estudos realizados na primeira fase e no desenvolvimento das dialéticas cronogênese, topogênese e mesogênese, as quais também fizeram parte de estudos pela TAD. A terceira fase voltou-se à experimentação e análise *in vivo* das AEP, sendo aplicadas em uma escola da rede federal do estado de Sergipe – o Colégio de Aplicação/UFS, cuja coleta de dados ocorreu com gravações de vídeos e anotações dos estudantes. A última fase teve ênfase na análise *a posteriori*, em confronto à análise *a priori*. Por meio das dialéticas mencionadas, comparou-se questões previstas com as evocadas durante a experimentação. Assim, ao aplicarmos as AEP, tivemos como intuito favorecer um estudo de frações relacionados a concepções de medida, distribuição e comparação, as quais podem ser construídas por meio de cinco relações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Nessa aplicação, identificamos condições e restrições que incidem no uso das AEP relacionadas à dificuldade dos alunos participantes da pesquisa em elaborarem questões, por não estarem habituados com um modelo de ensino baseado em investigação e às dificuldades na transferência de responsabilidades entre esses alunos e a professora que aplicou.

Palavras-chave: Anos finais do Ensino Fundamental. Atividades de Estudo e Pesquisa. Dimensões do Problema Didático. Frações. Perímetro e Área.

ABSTRACT

The objective of this dissertation was to analyze conditions and constraints on the use of Study and Research Activities (SRA) involving fractions associated with the measurements of perimeter and area in a 6th-grade class of Elementary School. By taking the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) as a reference, we sought to elaborate a sequence of five activities based on studies conducted by Silva focused on the object of fractions, using models respective to the three dimensions of the didactic problem. In these studies, it is stated that classroom approaches to this object focus on the part-whole conception idea, using the technique of double counting of parts, mainly on the aspect of "know-how" to the detriment of developing an understanding that justifies the use of such techniques. This results in a lack of depth by students to understand this mathematical object. To this end, we framed the work as qualitative research, whose data collection process involved bibliographic and documentary study on fractions, as well as including elements of exploratory research, with pedagogical intervention. For this data collection process, we followed the methodology used by ATD, which has four phases. The first phase referred to a preliminary analysis from an epistemological study of the mathematical object in question, aiming to identify the conditions and constraints on this same object, through the three dimensions of the didactic problem: epistemological dimension (Epistemological Reference Model – ERM – referred to the study of the reason for being and existence of the mathematical object in play; economic dimension (Dominant Epistemological Model – DEM, focused on the study of curriculum documents) and ecological dimension (Praxological Reference Model – PRM, also including an analysis of 6th-grade mathematics textbooks approved by the National Plan of Textbooks and Teaching Materials – PNLD). The second phase corresponded to an a priori analysis for the pedagogical intervention, at which point we developed the Study and Research Activities (SRA) based on the studies conducted in the first phase and the development of the chronogenesis, topogenesis, and mesogenesis dialectics, which were also part of studies by ATD. The third phase focused on in vivo experimentation and analysis of the SRA, being applied in a federal school in the state of Sergipe – the UFS Application School, whose data collection involved video recordings and student notes. The final phase emphasized the a posteriori analysis, in comparison to the a priori analysis. Through the aforementioned dialectics, predicted issues were compared with those evoked during experimentation. Thus, when applying the SRA, we aimed to promote a study of fractions related to conceptions of measurement, distribution, and comparison, which can be constructed through five relations: part-whole, measurement, quotient, ratio, and operator. In this application, we identified conditions and constraints affecting the use of the SRA related to the participating students' difficulty in formulating questions, due to not being accustomed to an investigation-based teaching model, and the difficulties in transferring responsibilities between these students and the applying teacher.

Keywords: Final years of Elementary School. Study and Research Activities. Dimensions of the Didactic Problem. Fractions. Perimeter and Area.

ABREVIATURAS E SIGLAS

AEP	Atividade de Estudo e Pesquisa
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CODAP	Colégio de Aplicação
LD	Livro Didático
MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MPR	Modelo Praxeológico de Referência
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
OML	Organização Matemática Local
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PICS	Programa de Iniciação a Cursos Superiores
RP	Programa Residência Pedagógica
UFS	Universidade Federal de Sergipe

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho refere-se a uma investigação sobre a aprendizagem de frações relacionadas às grandezas geométricas: área e perímetro, com estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Decidimos criar um texto introdutório que aborde as motivações por trás da pesquisa, tanto as razões pessoais da pesquisadora[1] que a levaram a escolher esse tema, quanto as razões acadêmicas, com o objetivo de contextualizar a problemática que a comunidade enfrenta. Além disso, vamos apresentar a problematização da pesquisa, seu objetivo geral, os objetivos específicos, bem como os fundamentos teóricos e metodológicos que a sustentam.

1.1 MINHA TRAJETÓRIA ATÉ A PESQUISA

Ao longo da minha jornada no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe/Campus Itabaiana, fui beneficiada com a oportunidade de envolver-me em alguns programas institucionais desenvolvidos pelo departamento de Matemática da instituição de ensino (DMAI), que os considero pilares para a construção do caminho até aqui. Ao entrar no curso me deparei com algo totalmente diferente do que era esperado. Um curso focado, “inicialmente”, em disciplinas da matemática pura, reconheço sua relevância, mas sempre me questionava sobre suas aproximações com a realidade escolar. Um certo distanciamento, faltava algo que estabelecesse uma conexão com esse ambiente escolar.

Nesse contexto, de estranhamento e distanciamento, ainda no terceiro semestre do curso, iniciei minha participação no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Com a entrada no programa, me aproximei de maneira prática, com a realidade do cotidiano escolar de algumas escolas públicas próximas à Universidade. Como também, me beneficiei com alguns ensinamentos, por exemplo, o uso de estratégias metodológicas para o ensino de conteúdos matemáticos. A partir desse momento, tive os primeiros indícios com o interesse em pesquisas voltadas à Educação Matemática. Com esse primeiro passo, me despedi do PIBID e iniciei uma nova jornada na ação de apoio pedagógico: Programa de Iniciação a Cursos Superiores (PICS).

O PICS é uma ação em que os alunos veteranos acompanham o desenvolvimento dos ingressantes nas disciplinas iniciais em seus respectivos cursos, ofertando-lhes aulas de objetos

[1] No decorrer do texto, haverá uso de verbo e pronomes na primeira pessoa na abordagem sobre experiências pessoais da pesquisadora, sempre respeitando as normas de texto acadêmico.

matemáticos em níveis de Ensino Fundamental e Médio, de acordo com as dificuldades apresentadas. Dificuldades que já me despertaram mais interesse em buscar investigar uma realidade escolar, diferente da vista até então e que, em minhas concepções, não eram esperadas para um determinado nível daqueles alunos ingressantes.

Com a finalização da minha participação nesses projetos, busquei iniciar minha trajetória em estudos desenvolvidos na Educação Matemática e tive o meu primeiro contato com a Teoria Antropológica do Didático (TAD) em um estudo dirigido voltado a estudar sobre alguns dos principais conceitos dessa teoria. Esse momento foi onde consolidou o início da minha relação com a Educação Matemática e minha busca pelo ingresso no mestrado.

Por fim, participei do Programa de Residência Pedagógica (RP), pelo qual tive mais ainda contato com a prática em escolas públicas. Nesse programa, também com o uso da TAD, foi consolidando minha escolha como referencial teórico desse trabalho e proporcionando experiência com organizações didáticas fundamentadas na teoria.

1.2 PROBLEMÁTICA

O meu interesse pelas frações deu início após cursar algumas disciplinas, durante a graduação e perceber que a discussão acerca desses números estava centralizada apenas nas disciplinas que tratavam sobre o ensino da Matemática. Então, comecei a me questionar sobre a sua construção, *Como eles "nasceram"? De onde surgiram esses números? Por que precisamos aprender/ensinar sobre esses números? Qual a sua relevância para a sociedade?*

Pensava que as respostas para essas perguntas seriam esclarecidas após a conclusão da disciplina 'Matemática para o Ensino Fundamental'. No entanto, a única resposta que se aproximava do que eu buscava era a explicação de que os números racionais foram desenvolvidos devido à limitação dos números inteiros e que sua construção se baseava em relações de equivalência. São conhecimentos importantes, sim, não há como negar. Porém, são insuficientes para minha atuação em sala de aula, visto que esses conceitos estavam relacionados apenas à parte teórica da Matemática.

A partir de então, esse conceito matemático passou a gerar certa inquietação devido à forma como as discussões sobre esses números eram conduzidas, principalmente por professores de Matemática pura. Isso porque não conseguiam compreender por que ainda persistiam dificuldades no ensino e aprendizagem desses números, uma vez que se tratava de um objeto matemático simples, uma visão fortalecida por esses professores. Diante dessa perspectiva, essa inquietação me fez perceber que os métodos de ensino e aprendizado relacionados a esses números ainda necessitavam de questionamentos e investigações.

Behr et al. (1983 *apud* Silva, 2005) consideram que o conceito de número racional se constitui com base nas relações parte-todo, medida, quociente, razão e operador, em que esses são apenas alguns dos diversos significados que dão sentidos distintos às frações e são exibidos por Silva (2005) como as concepções que as frações podem assumir.

Por outra perspectiva, reconhecemos a importância relacionada às grandezas geométricas, em especial, área e perímetro de figuras planas, favorecendo a inter-relação entre diversos âmbitos do conhecimento matemático e em diversos contextos do cotidiano. Nesse sentido, notamos que, para a construção do conceito de medida de área, podemos mobilizar situações problemas que expressem:

> [...] situações de comparação (situam-se em torno do quadro das grandezas, permitindo decidir se duas superfícies pertencem, ou não, a mesma classe de equivalência), de medição (destaca o quadro numérico, conduzindo a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade). (Silva 2004, p. 37).

Se estudarmos um pouco a história, perceberemos que a geometria surgiu de maneira intuitiva, baseando-se na observação e na necessidade humana. Ao relatar vários problemas em que era preciso ser utilizada a geometria para resolver problemas do cotidiano das pessoas naquela época.

Os relatos exemplificam como a terra era dividida para o plantio para promover a agricultura, à época dos povos antigos. Nesse tempo, as divisões de terra eram exigidas para determinar os limites da propriedade. Durante as enchentes do rio Nilo, a linha divisória entre divisão de terras era destruída. O conceito de medida de área também é usado para divisão de terras e tributação entre herdeiros.

Assim, a primeira aparição do conceito dessa medida se deu pela necessidade desses povos em realizarem levantamentos fundiários. E segundo Barbosa (2002 *apud* SILVA, 2004, p. 27), ainda que a operação de medição de grandeza seja uma ideia primitiva, possui uma certa complexidade, pois se compõe a partir da:

> a) a seleção da grandeza a medir nos objetos ou fenômenos do mundo físico; b) a escolha de uma unidade de medida; c) a opção pelo instrumento ou meio de medição; e d) a produção da medida da grandeza (...) resulta desse fato a íntima relação existente, ao longo da evolução do pensamento, entre grandeza e número (Barbosa, 2002, p. 39).

Ao considerar o conceito de medida de perímetro ser abordado como a soma das medidas dos lados de uma figura, essa conceituação não se aplicaria quando tratamos de uma circunferência, mostrando que tal conceito não é satisfatório para a compreensão da definição da medida de perímetro, que trata da medida do contorno de uma dada figura geométrica.

Isso nos demonstra o quanto a geometria transcende ao tempo e está presente em nossas vidas atualmente, evidenciando-se a importância desse conhecimento, o qual não pode ser dissociado de sua aplicação e compreensão. Dessa forma, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca para o Ensino Fundamental que a aprendizagem de certo conceito ou procedimento matemático:

> É fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para levá-los em outros contextos. (Brasil, 2018, p. 299).

Ao analisarmos a história, é perceptível que o conceito de medida de área, medida de perímetro e fração estejam relacionados com as necessidades apresentadas pelos povos da Antiguidade. Esses conceitos estão inter-relacionados em medições de terras, distribuição de bens e heranças; e comparação de grandezas de mesma medida. É possível que os povos daquela época ao fazer as medições de suas terras, em certo momento, perceberam que os números inteiros eram ineficazes para tal medição, vistos partes que sobravam não coincidirem. O que torna nítida a existência de um elo entre o conceito de fração e medição e comparação de grandezas geométricas.

No entanto, estudos apontam para uma preferência por parte do professor de Matemática na construção do conceito das frações. Os quais contribuem para a interpretação como relação parte-todo (Silva, 1997 e 2005; Silva e Almouloud, 2008; Dias, 2018; Moreira e Davi, 2004).

Silva (1997), por exemplo, realizou uma pesquisa com futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para levá-los a notar as diferenças existentes nos conceitos de fração, apresentando situações para que estivessem diante das diferenças entre as concepções parte-todo, medida e quociente. A autora percebeu o favorecimento dos professores em introduzirem as frações pelo procedimento de dupla contagem das partes, no qual, o denominador é o número de partes que um inteiro foi dividido e o numerador é o número de partes tomadas. Nessa condição, os professores investigados sentiam-se mais seguros ao trabalharem com a concepção parte-todo e mais inibidos com outras concepções.

Da mesma maneira, Silva e Almouloud (2008) e Dias (2018) destacam que, frequentemente, é utilizado e priorizado o ensino de frações mobilizando a concepção parte-todo baseado no procedimento mais comum. Em outras palavras, refere-se à apresentação de uma figura plana dividida em partes congruentes com algumas partes selecionadas.

Segundo Moreira e David (2004), esses problemas no ensino de frações podem surgir como consequência da forma como esse conteúdo é abordado na formação inicial. Os autores destacam que as Licenciaturas em Matemática apresentam uma abordagem formal-lógico-dedutiva sendo, muitas vezes, inadequada para a sistematização da matemática escolar. O que contribui para que os saberes docentes fundamentais ligados à prática não sejam devidamente discutidos durante o processo de formação.

Nesse sentido, o professor apresenta um domínio e uma visão limitada sobre as frações, devido ao modo de construção do conceito desses números, ao considerar a Matemática escolar de natureza totalmente diferente da Matemática acadêmica[2]. No processo de formação inicial, muitos licenciandos acabam por criarem artifícios em memorizar técnicas sobre aplicação de algumas regras operatórias visando resolver problemas que envolvam frações. Por conseguinte, no ato de ensinar tal objeto de conhecimento, quando estão na atuação em sala de aula, fazem dessa mesma forma.

Por outro lado, quando olhamos para as pesquisas voltadas à aprendizagem das frações, os trabalhos mostram obstáculos na formação do conceito deste objeto matemático por parte dos alunos (Silva e Almouloud, 2008; Silva, 2005). Para esses autores, a partir da priorização no ensino de frações em que os alunos são mobilizados apenas para a concepção parte-todo, é possível observar algumas dificuldades que esses alunos terão em realizar e compreender as regras operatórias com frações. Se a divisão do inteiro não mostrar todas as partes que foram divididas, os alunos apresentarão dificuldades em identificar corretamente a fração representada, visto que a regra de dupla contagem induz a uma resposta incorreta, como por exemplo,

> [...] um primeiro ponto que deve ser considerado é a impossibilidade de o resultado ser maior que um inteiro, pois se a fração 2/3, por exemplo, a criança compreende que o inteiro foi dividido em três partes, da mesma área ou "iguais", das quais duas estão sendo consideradas, com explicar a fração 5/3?

---

[2] Segundo estudos de David, Moreira e Tomaz (2013, p. 45), entende-se por Matemática escolar "como um conjunto de práticas e saberes associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática", ou seja, trata-se de uma matemática construída própria e específica para a escola. Matemática acadêmica e/ou científica, "um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal."

> Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três? (Silva e Almouloud, 2008, p. 59)

Os autores ainda observam que a existência de diversas possibilidades para a construção referente ao significado de fração fica implícita o suficiente para não serem percebidas. Isso pode gerar dificuldade em produzir os diferentes significados da fração. O que se nota, atualmente, é a ineficácia dos alunos frente aos cálculos simples com frações, mostrando que não entendem o assunto e não dominam as regras operatórias.

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC apresenta orientações para o ensino de frações, considerando que os alunos devem resolver problemas com esses números envolvendo seus diferentes significados e utilizando estratégias diversas com percepção dos processos neles envolvidos (Brasil, 2018). Por sua vez, no tocante ao ensino da geometria estudada nos anos finais do Ensino Fundamental, nesse mesmo documento, destaca-se que a:

> [...] Geometria precisa ser vista como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança (Brasil, 2018, p.272).

Porém, o que se pode observar nas práticas cotidianas dos professores de Matemática, ainda continuarem com uma mera aplicação de fórmulas e abordagem de conceitos geométricos de maneira superficial, omitindo a aplicabilidade desses conceitos no cotidiano dos alunos (Souza, 2021). Como consequência desse tipo de abordagem no ensino, outros autores apontam sobre algumas dificuldades dos alunos referentes ao estudo de medida de área e medida de perímetro:

> - A possibilidade de medir a área de uma superfície depende da compatibilidade entre a sua forma e a forma da superfície unitária, ou seja, só é possível medir a área de uma superfície, se for possível ladrilhar, efetivamente, com um número inteiro de exemplares da superfície unitária.
> - A área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície.
> - Se o perímetro de uma superfície se altera; sua área também (e reciprocamente).
> - Se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área.
> - Estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas (Douady e Perrin-Glorian, 1989, p. 393).

Diante do exposto, nosso foco, foi buscar uma estratégia de ensino que possibilitasse o ensino de frações em suas diversas concepções, isto é, parte-todo, medida, quociente, razão e operador, relacionadas ao conceito das grandezas de medida (área e perímetro), de modo que oportunize ao estudante conhecer e compreender uma *razão de ser* para o estudo dessas concepções.

Tal busca nos permitiu explorar o estudo investigativo com uso de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) desenvolvidas dentro do marco teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) que, segundo Silva e Almouloud (2018, p.332), "uma AEP tem início com um questionamento a respeito de alguma situação do mundo que requer a reconstrução da organização matemática local (OML) que se pretende estudar", ou seja, a AEP estabelece a razão de ser da OML que se quer construir a partir do estudo de uma questão.

Chevallard (1999) introduziu a distinção de diferentes tipos de praxeologia (ou organizações matemáticas) para analisar processos didáticos institucionais, de acordo com o seu grau de complexidade:

> [...] Geralmente, numa dada instituição I, uma teoria Θ responde a diversas tecnologias θ_j, cada uma das quais por sua vez justifica e torna inteligíveis diversas técnicas τ_{ij} correspondentes a tantos tipos de tarefas T_{ij}. As organizações específicas agregar-se-ão, assim, primeiro em organizações locais, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas numa tecnologia específica θ, depois em organizações regionais, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ. (Além disso, chamaremos de organização global o complexo praxeológico $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$, obtido, numa determinada instituição, pela agregação de diversas organizações regionais correspondentes a diversas teorias Θ_k.(Chevallard, 1999, p. 229, tradução nossa).

Desse modo, as AEP têm por objetivo dar mais importância ao estudo de uma obra matemática[3] por meio da investigação do que ao destaque pela busca de uma resposta pronta e acabada. Esse estudo acontece a partir de uma questão geratriz, denominada Q_0, que deriva outras questões, Q_1, Q_2, Q_3, dando sentido à pesquisa e aos objetos envolvidos.

Perante os estudos preliminares realizados, delineamos a nossa questão de pesquisa como: **Quais condições e restrições que incidem sobre o uso das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) envolvendo frações associadas às medidas de perímetro e de área em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental que contemplem as razões de ser: medida, distribuição e comparação?**

Em busca da resposta para esse questionamento, delineamos o seguinte objetivo geral:

[3] Nos estudos de Chevallard (2013), uma obra matemática (objeto matemático) pode ser um conteúdo matemático estudado ou que se pretende estudar. Para esse autor, tudo é objeto, como o estudo de um conteúdo matemático é um objeto matemático, ou mesmo um objeto de conhecimento.

- Analisar condições e restrições que incidem sobre o uso das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) envolvendo frações associadas às medidas de perímetro e de área em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental.

Utilizamos a TAD para fundamentar nossa pesquisa. A teoria defende que se deve haver um questionamento relacionado às condições e restrições que afetam qualquer processo de disseminação do conhecimento matemático nas escolas, ou seja, o estudo de que torna possível ou dificulta o ensino e aprendizagem da Matemática.

Como também, por situar que qualquer atividade matemática está inter-relacionada com elementos teóricos e práticos de qualquer atividade humana (Chevallard, 1999). Com base nisso, as atividades matemáticas, consideradas como ação humana, são planejadas e executadas com alguma finalidade. Em contrapartida, são resultantes de pelo menos um questionamento, apoiado em elementos lógicos e teóricos. Nesse sentido, a TAD defende, por meio da conceituação de praxeologia, a existência de justificação de qualquer que seja a atividade humana.

Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- Identificar praxeologias matemática que possibilitem aos alunos estudarem as razões de ser da fração: medida, distribuição e comparação sob a perspectiva das três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica);
- Evidenciar as contribuições das cinco Atividades de Estudo e Pesquisa para o ensino de frações referente ao conceito das medidas de grandezas (área e perímetro) para o 6º ano do Ensino Fundamental, tendo como base o MER elaborado por Silva (2005) e Almouloud e Silva (2021);
- Analisar como os alunos mobilizam sua aprendizagem ao estudar frações relacionadas à medida, distribuição e comparação.

Por conseguinte, com o intuito de alcançarmos o objetivo geral do nosso trabalho, desenvolvemos alguns momentos. Inicialmente, realizamos uma busca na literatura a respeito do ensino e aprendizagem das frações, identificando como esse objeto matemático é frequentemente ensinado e as possíveis concepções e dificuldades que os estudantes apresentam ao estudarem o objeto. Para isso, realizamos um levantamento de dissertações, teses e artigos científicos que abordassem a temática.

Posteriormente, desenvolvemos um estudo de alguns conceitos teóricos da TAD, diluídos na seção seguinte, que serviram como base de nossa investigação. Paralelamente a essas etapas, foi **realizado o estudo epistemológico** tendo como fundamento principal, os trabalhos de Silva (2005) e Almouloud e Silva (2021). Com tal estudo, desenvolvemos as duas

AEP, as quais realizamos a análise com base na metodologia desenvolvida pela TAD com princípios na Engenharia Didática.

O próximo passo foi realizar a análise *a priori* das AEP a partir das dialéticas, cronogênese, topogênese e mesogênese. Com base nisso, realizamos a coleta dos dados que aconteceu em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede federal do estado de Sergipe. Para tanto, utilizamos alguns instrumentos de coleta, especificamente: diário de bordo, arquivos de mídia e anotações dos participantes. Tais instrumentos nos ajudaram, principalmente, a categorizar os participantes da pesquisa e levantar informações da sua participação.

Por fim, realizamos a análise *a posteriori* dos dados, confrontando o que tínhamos observado *a priori* e o que realmente aconteceu. Para o tratamento dos dados, nossa pesquisa assume natureza qualitativa, como também, adquire caráter de pesquisa intervenção pedagógica.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Dessa forma, dividimos o trabalho em cinco seções. A primeira se refere a Introdução, a qual apresentamos a justificativa, a problemática, a questão de pesquisa e os objetivos geral e específicos.

Na segunda seção abordamos os aspectos metodológicos – apresentando os procedimentos metodológicos, a coleta de dados e os participantes da pesquisa – e teóricos relacionados a TAD que fundamentaram a nossa pesquisa.

A terceira seção, buscamos discutir a respeito do objeto de estudo a partir de uma revisão na literatura, como também, discutimos as condições e restrições quanto ao ensino da temática.

Na quarta seção foram apresentados os aspectos relacionados ao desenho, a análise *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e os resultados das AEP, assim como, a caracterização dos participantes da pesquisa e algumas noções teóricas que nos ajudaram no planejamento das atividades: a noção de paradigmas e as dialéticas cronogênese, topogênese e mesogênese. Na última seção, organizamos as nossas considerações finais e perspectivas para futuros trabalhos.

2. ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Esta seção foi diluída em duas subseções, as quais expomos os aspectos teóricos e metodológicos que fundamentaram a elaboração e desenvolvimento da nossa pesquisa.

2.1 ASPECTOS TEÓRICOS

Segundo Chevallard (1999, p. 223), “uma obra matemática, como toda obra humana, sempre aparece como resposta a um conjunto de questões e como meio de realizar determinadas tarefas problemáticas da instituição”. Desse exposto, Silva (2005) estudou a gênese das frações, identificou e encontrou que algumas necessidades sociais da Antiguidade, como por exemplo, a exigência em medir grandezas, como área, distribuir bens e heranças e comparar quantidades de mesma grandeza fizeram emergir o objeto matemático em questão.

A autora enfatiza que a construção da concepção de medida relacionada às frações está associada a tipos de tarefa em que os alunos podem mobilizar habilidades, a partir das técnicas de resolução desses tipos de tarefas, quanto às relações parte-todo, razão e operador. Para os tipos de tarefa, cujas técnicas de resolução estão voltadas à relação de quociente e razão, elas permitem que os alunos possam construir as concepções de comparação e distribuição.

Na TAD, em geral, toda atividade humana e, em particular, a atividade matemática pode ser analisada a partir de uma organização praxelógica em termos de quatro noções: tipo de tarefa (T), tipo de técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). Essas noções designam uma organização praxelógica completa [T/ τ/ θ/ Θ] dividida em dois blocos: o do saber fazer (*práxis*) e o do saber (*logos*).

Entende-se por tipo de tarefa (T), os exercícios ou os problemas propostos, ou seja, as tarefas são identificadas a partir de um verbo de ação, por exemplo: calcular, resolver, decompor. Chevallard (1999) aponta que:

> Na maioria de casos, uma tarefa (e o tipo de tarefas associado) expressa-se por um verbo: limpar o quarto, desenvolver a expressão literal dada, dividir um inteiro entre outro, saudar a um vizinho, ler um manual de emprego, subir uma escada, integrar a função, etc. (Chevallard, 1999, p. 2, tradução nossa).

Ao considerar uma tarefa T, é necessária uma maneira, um método e até mesmo uma estratégia para realizar essa tarefa, e uma determinada maneira de realizar a tarefa é denominada técnica τ. E uma mesma técnica pode ser utilizada para executar diversos tipos de tarefa. Sendo assim, o bloco considerado como o saber fazer (*práxis*) é indicado por [T/ τ] formado pelos tipos de tarefas e as possíveis técnicas que serão utilizadas para resolvê-las. De acordo com Chevallard (2002, p.116 tradução nossa), “um saber-fazer, identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um “discurso lógico” (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia”.

Dessa maneira, as técnicas utilizadas devem ser descritas, explicadas e justificadas para poder validar as tarefas feitas, sendo assim, o que garante e justifica as técnicas é denominado de tecnologia (θ) ao mesmo tempo, toda tecnologia precisa de uma justificativa então passamos para um nível superior de explicação chamada teoria (Θ). Constitui-se, assim, o bloco do saber (*logos*) designado por [θ/ Θ].

Nesta pesquisa, o foco de estudo centra-se nas frações, com os quais, os alunos podem construir as concepções de medida, comparação e distribuição, no sentido de compreender a *razão de ser*, ou seja, compreender as razões que motivaram a criação e o desenvolvimento desse campo numérico. Para isso, sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático (TAD), podemos ressaltar a importância de problemas significativos na construção do conceito desses números. Pois, acreditamos que ao trabalharmos com conhecimentos significativos e relevantes, teremos certamente impactos positivos na construção do processo de ensino e aprendizagem.

O estudo sobre o objeto matemático, aqui em questão, tem como referência a pesquisa de Silva (2005), ao fazer uma análise das concepções de professores acerca das frações quando, à época, se propuseram a ensinar esse objeto para alunos em nível da quinta série (atual sexto ano do Ensino Fundamental). Em sua pesquisa, a autora apresenta resultados de que para os professores, esses números são introduzidos por meio do procedimento de dupla contagem das partes, evidenciando a relação parte-todo. No entanto, a autora nos revela que mesmo dispor do método de utilizar figuras convenientemente divididas em partes congruentes representem, com sucesso, alguma parte pintada da figura por meio de uma fração, trata-se de uma estratégia metodológica que pode falhar quando o objeto representado fugir desse padrão.

Nesse contexto, Silva (2005) conclui que os professores estabeleceram Organizações Matemáticas da quinta série (atual sexto ano do ensino fundamental) para frações muito rígidas e com tipos de tarefas que relacionam, de modo geral, a relação parte-todo em contextos de superfícies, motivar a técnica de dupla contagem das partes. Outra interpretação apresentada nessas Organizações, porém com menor incidência, foi a de razão, que mobiliza a mesma técnica.

Dias (2018) realizou em seu trabalho um mapeamento de dissertações e teses produzidas por sete universidades de São Paulo para promover a compreensão do estado atual das frações, ou seja, a autora tinha a finalidade de identificar como se encontrava o atual cenário desse objeto matemático com relação ao ensino e a aprendizagem desses números. Após efetuar a análise, a autora aponta que houve avanços a respeito do ensino das frações motivando os participantes da pesquisa a diferentes interpretações (parte-todo, medida, quociente, operador e razão).

Porém, a autora nos chama a atenção para o exagero no uso da ideia de “parte-todo” aplicada para introduzir a noção de frações, resolver, elaborar e propor atividades, mesmo quando já existiam várias críticas relacionadas à sua utilização.

Um conceito utilizado na TAD, que será muito importante para o desenvolvimento da nossa pesquisa, é o de paradigma didático, o qual Chevallard (2013) destaca como sendo um conjunto de regras sobre o que se estuda em uma instituição de ensino e quais as maneiras para estudá-la. Com base nisso, o autor aponta que muitas instituições de ensino estão embasadas no paradigma didático de visita às obras, em que uma de suas principais características está na ideia de apresentar uma obra matemática sem sua razão de ser, ou seja, o conteúdo matemático é apresentado sem o seu sentido, com a impressão de “pronto”, “acabado” sem espaço para discussões e críticas. Dessa maneira, o processo de produção de um determinado conteúdo, com todos os seus interesses e representações, destina-se a ser omitido.

Essa omissão causa uma descontextualização na maneira como o conhecimento é construído, perdendo a conexão que existe entre esse conhecimento e o mundo social, onde são construídos e funcionam. Como também, faz com que os professores reduzam os estudantes a meros observadores, estimulando-os a admirar e desfrutar de algo que eles nem sequer sabem o porquê de estarem estudando e mesmo quando tentam questionar a razão de ser daquela obra, suas perguntas são muitas vezes silenciadas. Assim, o discente acaba aprendendo somente o produto e o resultado de um longo caminho que foi construído, fazendo com que a complexidade da construção desse conhecimento também se perca nesse trajeto.

Uma das consequências desse paradigma é a fraca relação entre o aluno e o conhecimento escolar, pois, o aluno aprende apenas para resolver uma prova e ser aprovado. Após isso, todo conhecimento “aprendido” é esquecido ou deixado de lado, visto que os alunos não conseguem percebê-lo como algo útil fora da escola, como é destacado que,

> O principal efeito desta situação de longo prazo é a tendência crescente entre os estudantes a desenvolver uma relação ao conhecimento escolar oficial de acordo com o que chamarei de princípio “Lixeira/ Esvaziar lixeira”: todo conhecimento ensinado pode legitimamente ser esquecido ou, mais especificamente, ignorado, assim que os exames forem aprovados. (Chevallard, 2013, p. 165, tradução nossa).

Propõe-se, com base no relato anterior, um novo paradigma denominado *paradigma do questionamento do mundo* que pode proporcionar mudanças na educação tradicional, sobretudo, na postura do aluno diante de um problema. Nesse novo paradigma, Chevallard (2013) reconhece que devemos trabalhar com conhecimentos significativos e relevantes. Dessa forma, teremos certamente efeitos positivos tanto no processo de ensino, como no de aprendizagem.

Na cultura dominante de hoje, muitas pessoas parecem ter tendência a evitar quaisquer perguntas que não tenham respostas óbvias para elas. Porém, o novo paradigma tem como propósito desenvolver um novo hábito de que, quando uma questão surge, quem pretende validá-la enfrentará a questão enunciando novas questões, ou questões derivadas, assim como ocorre no processo de uma investigação. É importante destacar que o novo paradigma proposto pela TAD não exclui o paradigma vigente, pois para responder às questões, os estudantes precisam estudar e visitar as obras já construídas, com a diferença que esta visita/estudo terá uma razão para ser feita.

Para Chevallard (2013 *apud* Benito, 2019), um sistema didático, designado por $S(X;\, Y;\, O)$, possui três elementos principais, em que o par $(X; Y)$ são as pessoas que manipulam a obra O de alguma maneira, X é o conjunto de pessoas que estudam O e Y é o conjunto de pessoas que ajudam X a estudar O. Em um sistema escolar, X é o conjunto de alunos de uma classe, enquanto Y é formado por um único professor.

Nesse contexto, X é o grupo de estudantes e Y é o professor que introduz a obra O aos alunos por meio de uma exposição verbal. Para isso, o professor Y precisou preparar previamente a resposta R que corresponde à obra O, utilizando a abordagem M_y. Além disso, como em qualquer obra humana, a obra O surgiu como resultado de uma ou mais questões, embora, neste caso, essas questões estejam ausentes.

Enquanto isso, no paradigma do questionamento do mundo, as obras (ou conteúdo) são substituídas por uma questão de investigação Q, em que o esquema herbatiano descreve de que forma o sistema didático acessa o meio para dar conta de responder a essa questão:

$$[S(X, y, Q) \rightarrow M] \rightarrow R^{\heartsuit}$$

Para tanto, a comunidade de estudo formado pelo par (X, Y) pretende encontrar uma resposta $R^{\heartsuit}$ para a questão Q, utilizando um meio didático M mais rico. Benito (2019) destaca que o meio nesse novo paradigma

> [...] é um conjunto formado por questões Q_k, derivadas da questão geratriz Q e por um conjunto de respostas $R_k^{\diamond}$ que, para determinado número natural k, é apresentada como a resposta oficial para a questão Q_k. As obras O_i que já foram elaboradas, estudadas e justificam $R_k^{\diamond}$, podem ser analisadas e desconstruídas para encontrar $R^{\heartsuit}$ (Benito, 2019, p. 119).

Como também, formado por dados gerais D_q de vários tipos que serão cruciais para a investigação. Assim, o meio didático pode ser representado:

$$M = \{R_1\ , R_2\ \dots R_m, O_{m+1}, O_{m+2}, \dots\ , O_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots\ , Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \dots\ , D_q\}$$

Dentro desse novo cenário, as Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) são concebidas com o objetivo de alterar a perspectiva dos estudantes, ou seja, transformar sua maneira de agir, fazendo com que deixem de ser meros receptores de informações e passem a atuar como pesquisadores, investigando, elaborando hipóteses, propondo soluções e validando-as. Assim, as AEP estão inseridas no paradigma do questionamento do mundo.

Por se tratar de um novo modelo de ensino, as pesquisas científicas, sob a perspectiva da TAD, têm realizado estudos sobre a ecologia desse novo paradigma, ou seja, buscam identificar quais elementos contribuem e quais restrições interferem a existência desse novo paradigma nas instituições de ensino, como exemplo, o trabalho de Benito, Silva e Bosch (2022). De acordo com os autores:

> Esse tipo de questionamento (quais condições e restrições para a implementação de determinado dispositivo ou que interferem na evolução de um sistema didático) tem sido utilizado em inúmeras pesquisas com a TAD. Estas pesquisas são denominadas estudos ecológicos e buscam, além de identificar condições e restrições, desenvolver dispositivos para estudar a transição do paradigma de visita às obras para o paradigma de questionamento do mundo. (Benito, Silva e Bosch, 2022, 516).

Dessa maneira, consideramos relevante um trabalho que contribua para o avanço do paradigma de questionamento do mundo e propomos desenvolver esta pesquisa com este enfoque. Em outras palavras, analisar condições e restrições que incidem sobre o uso das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) envolvendo frações associadas às medidas de perímetro e de área em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental.

Para que seja possível desenvolver as AEP é necessário ser feito um estudo prévio a respeito do objeto matemático em questão, as frações. Este estudo prevê a criação de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), cuja função, segundo Barquero, Bosch e Gáscon (2013), é conduzir e conhecer de maneira aprofundada o que é este objeto de estudo e o porquê ele é estudado. Como também, o MER e o estudo ecológico serão guias para a construção das AEP, por propiciar as praxeologias matemáticas que devem ser levadas em consideração durante o desenvolvimento do experimento. Neste estudo utilizaremos o MER[4] produzido por Silva (2005).

A seguir detalharemos, a metodologia que será utilizada para subsidiar nosso estudo.

[4] Na época em que o trabalho de Silva (2005) foi desenvolvido, na TAD, o termo MER ainda não era utilizado na literatura, porém, atualmente, podemos considerar como tal.

2.2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Com o propósito de responder à questão de pesquisa, enquadramos este trabalho como pesquisa qualitativa. Nesse tipo de pesquisa, é possível estudar os acontecimentos envolvendo os seres humanos e suas relações sociais em seus distintos ambientes, visto o pesquisador precisa ir a campo observar o fenômeno que está sendo estudado a partir do entendimento dos indivíduos nele envolvidos. Proetti (2017) destaca que nessa perspectiva:

> A pesquisa qualitativa é realizada normalmente no local de origem dos fatos (objetos de estudo) e tem por objetivo demonstrar os resultados pelo sentido lógico/coerente que eles apresentam, ou seja, o sentido lógico que resulta do tratamento científico empenhado pelo pesquisador. Esse tipo de pesquisa possibilita investigar os fatos e compreendê-los no contexto em que eles ocorreram ou ocorrem, pois o pesquisador vai a campo para levantamento e coleta de dados, analisa-os e pode entender a dinâmica dos fatos. (Proetti, 2017, p. 7).

Além disso, durante o processo de coleta de dados, foi realizado um estudo bibliográfico e documental sobre o objeto matemático em questão, bem como sobre os aspectos teóricos que fundamentam esta pesquisa. Ao ter em conta que a coleta de dados ocorreu em uma instituição de ensino, este estudo caracteriza-se como pesquisa do tipo intervenção pedagógica, a qual, segundo Damiani et al. (2013),

> [...] são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências. (Damiani *et al.*, 2013, p. 58).

De acordo com os autores, nesse tipo de pesquisa, precisam ser descritos dois elementos principais: o método de intervenção quando tratado de uma intervenção em sala de aula, o caso da nossa pesquisa – “a descrição deve abordar o método de ensino aplicado, justificando a adoção das diferentes práticas específicas planejadas e implementadas” (*ibidem*, p. 62), e o método da avaliação da intervenção – o método com o qual a pesquisa será realizada. Esse método “tem o objetivo de descrever os instrumentos de coleta e análise de dados utilizados para capturar os efeitos da intervenção” (*idem ibidem*). Após a coleta de dados, cuidamos da organização e interpretação desses dados, empenhando-nos em responder à questão problemática desta pesquisa.

Com base nisso, a análise de dados foi realizada à luz da TAD, em que estão previstos momentos de estudo baseados em princípios da Engenharia Didática[5]. Segundo Barquero e Bosch (2015), esses princípios norteiam a metodologia orientada por Chevallard para ser desenvolvida/aplicada nos estudos fundamentados pela TAD, a partir de quatro fases: análise preliminar; análise *a priori*; experimentação e análise "*in vivo*"; e análise *a posteriori*.

Assim, na fase da análise preliminar, buscamos realizar um estudo sobre o objeto matemático em questão, frações. Como ele é comumente ensinado, quais as concepções e dificuldades dos alunos em relação a ele, dentre outros pontos que podem surgir durante o momento de estudo do quadro teórico didático geral. Para tanto, elaboramos

> [...] um questionamento epistemológico do conteúdo matemático em jogo e da necessidade de introduzi-lo na escola além de um estudo das condições e limitações oferecidas pelas instituições onde o processo de ensino e aprendizagem acontece. Trata-se de um primeiro passo essencial, no qual as hipóteses de pesquisa são formuladas e o conteúdo a ser ensinado e aprendido é questionado, geralmente considerando diferentes tipos de hipotéticos fenômenos didáticos envolvidos (Barquero e Bosch, 2015, p. 257).

Então, para encontrar essas informações, pesquisamos em livros didáticos, orientações curriculares e pesquisas relacionadas ao objeto de estudo. Em nossa pesquisa, utilizamos os documentos norteadores da Educação Básica brasileira, os quais orientam os docentes quanto aos objetos a ensinar e como ensiná-los, sendo eles: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Como também, para essa etapa da pesquisa, ampliaremos o estudo bibliográfico sobre o objeto em questão e uma análise em dois livros didáticos de Matemática da atualidade.

Portanto, na primeira fase, tomamos como referência os estudos de Silva (2005) e Almouloud e Silva (2021), a partir do Modelo Epistemológico de Referência (MER) criado por esses autores. Porém, embora tomando esse MER como referência, também dispomos de uma leitura nos citados documentos curriculares para melhor conhecê-los, visando identificar praxeologias matemáticas que possibilitem aos alunos estudarem as razões de ser da fração, a partir das grandezas – medida de perímetro e medida de área.

A partir da análise prévia, propomos algumas sequências didáticas fazendo a análise de cada uma das suas etapas. Para esse momento, foram discutidas e descritas todas as atividades a serem propostas e possíveis estratégias de resolução, incluindo uma análise dessas estratégias

---

[5] O que torna essa metodologia singular é o seu funcionamento, sua forma de validação ao contrário de outras metodologias aplicadas de forma interna e não externa por meio de confrontos entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori*. Além disso, pode ser definida em quatros fases, sendo elas: análise prévia, concepções e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*, e validação.

do ponto de vista dos alunos. Esse procedimento ocorreu a partir da escolha de variáveis didáticas que fizeram parte das etapas. Com base nisso, inicialmente elaboramos uma sequência de cinco atividades, mas no andamento da pesquisa, propomos duas Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de frações, em nível de 6° ano do Ensino Fundamental.

Para a análise *a priori*, usamos as noções das dialéticas *cronogênese*, *mesogênese* e *topogênese*, que podem ser encontradas em diversos trabalhos pautados pela TAD, como por exemplo, a tese de doutorado de Benito (2019).

Na cronogênese, segundo Barquero e Bosch (2018), destacamos a evolução das novas questões que surgem a partir da questão geradora, da qual elaboramos questões subsidiárias e as possíveis respostas, por meio de um mapa. As questões subsidiárias ajudaram ao desenvolvimento da Q_0 estabelecida para cada AEP elaborada. O mapa é um esquema que mostra como evoluem as questões e suas respectivas respostas durante as AEP e como se relacionam.

A mesogênese é a dialética mídia-*milieu*, correspondente à contínua interação entre as respostas disponíveis que são fornecidas pela mídia com a tomada de decisão para validar essas novas respostas. Nessa validação, pode haver desconstrução e reconstrução dessas novas respostas encontradas, conforme ocorre confronto de ideias que favorecem a evolução do *milieu*. De acordo com Barquero e Bosch (2018):

> [...] os conhecimentos fornecidos pela mídia correspondem a construções que normalmente têm sido elaboradas para responder a outras questões que não aquelas especificamente abordadas. Assim, tem de ser “desconstruída” e “reconstruída” de acordo com as novas necessidades. Este é o papel do meio experimental, M, contendo objetos empíricos O_j, bem como outras respostas A_i antigas e bem estabelecidas. *Milieu* M desenvolve-se através do processo de estudo e torna-se uma das principais garantias de um bem-sucedido resultado. (Barquero e Bosch, 2018, p. 290).

A topogênese é a dialética individual-coletivo, nessa dialética, determinamos como ocorre “o compartilhamento de responsabilidades entre professores e alunos” (Barquero e Bosch, 2018, p. 294). Nessa fase, torna-se possível determinar quais as contribuições de cada pessoa durante a aplicação das atividades. Em nosso estudo, apresentamos as responsabilidades para o estudo de uma questão problema, ou seja, a responsabilidade pela busca das respostas dos questionamentos, a qual deixa de ser somente do professor e passa para um processo de colaboração entre estudantes e professor.

Na fase de experimentação e análise “*in vivo*”, fizemos a implementação das AEP com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental da rede federal do estado de Sergipe, os quais distribuídos em grupos, foram estimulados a buscarem resposta para a questão geratriz. Foi a fase de coleta de dados, ocorrendo também a observação de interações dos acontecimentos que auxiliaram a análise *a posteriori*.

Em continuidade desse processo de coleta de dados, também dispomos dos registros produzidos pelos estudantes, enquanto respondiam às atividades em grupos. Propomos-lhes que registrassem em seus cadernos, quais questões foram respondidas naquele dia, quais fontes foram utilizadas, quais obras foram visitadas e o que cada pessoa do grupo fez naquele momento. Eis um procedimento desafiador durante a coleta de dados, visto que não estavam acostumados a esse tipo de atividade nas aulas de Matemática.

Por fim, na última fase, analisamos os dados recolhidos durante a experimentação das AEP, confrontando-os com a análise *a priori*. Momento de validação e desenvolvimento das hipóteses de pesquisa e propostas de modificações (ou não) das fases anteriores geralmente levando à formulação de novos problemas.

A escola e os participantes da pesquisa

Para a realização desta pesquisa[6] na aplicação das AEP, escolhemos o Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe (CODAP-UFS), localizado no município de São Cristóvão, no estado de Sergipe, pertencente à região Nordeste do Brasil. No Colégio funciona regularmente nos turnos matutino e vespertino com o Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e o Ensino Médio, o corpo docente conta com 41 professores efetivos, sendo 6 professores de Matemática. Como também, é possível encontrar na instituição: salas de artes, francês, linguagens, práticas corporais, vídeo e música, 1 cantina, ginásio de esportes, laboratório de biogeografia, laboratório de Matemática e desenho geométrico, CEMDAP (Centro de Pesquisa e Documentação e Memória do CODAP), laboratório de informática, laboratório de química e física, laboratório de filosofia, BICOM (Biblioteca Comunitária). A escola conta com apoio pedagógico e administrativo composto por: direção, secretaria, supervisão pedagógica, orientação educacional e psicologia educacional. Atualmente a instituição oferece, por meio de sorteio público, 50 vagas para o 6º ano do Ensino Fundamental, organizando-o em duas turmas intituladas por 'A' e 'B'.

A escolha pelo colégio se deu por se tratar de uma instituição que serve como escola-laboratório para práticas didáticas e pedagógicas, exercendo as funções de ensino e de campo para a execução de atividades desenvolvidas por ingressantes da universidade.

[6] Projeto aprovado pelo Parecer nº 6.181.371 e CAAE: 68787123.1.0000.5546

O professor participante da pesquisa, que é formado em licenciatura em Matemática, ministra aulas da disciplina nas duas turmas. Dessas duas turmas, foi disponibilizada para a nossa pesquisa apenas uma delas, cujos estudantes foram informados que as atividades a serem desenvolvidas faziam parte de uma pesquisa de mestrado e os seus responsáveis necessitariam assinar um termo de consentimento apresentado pela pesquisadora, o qual encontra-se em anexo. Convém ressaltar que a outra turma não participou desta pesquisa porque também já estava envolvida com outra pesquisa. As aulas de Matemática na turma cedida, eram ministradas em dois dias da semana, segunda-feira e quarta-feira, totalizando 4 aulas semanais com duração de 45 minutos cada aula. Com relação ao sistema didático $S(X, Y, Q)$, os participantes da pesquisa foram os estudantes $x \in X$, sendo $x = 30$ estudantes que compõem a turma – população desta pesquisa (6º ano do Ensino Fundamental), dos quais apenas 27 participaram no desenvolvimento das atividades.. Entre as principais características do grupo escolhido para a pesquisa, podemos citar: que os participantes possuem entre 10 e 11 anos de idade, sendo 16 meninas e 11 meninos.

3 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE ESTUDOS CORRELATOS

Nesta seção, apresentamos os objetivos, métodos e resultados das pesquisas que consideramos relevantes para o desenvolvimento do nosso trabalho e relativos ao ensino e aprendizagem das frações. Consideramos importante essa revisão, pois, identificaremos como esses números são frequentemente ensinados e as possíveis concepções e dificuldades dos estudantes com relação a esse objeto matemático.

3.1 A SELEÇÃO DAS PESQUISAS

A coleta das informações das pesquisas selecionadas se deu pelo acesso aos meios virtuais. Realizamos um levantamento dos estudos no catálogo de Teses e Dissertações da CAPES incluindo os descritores "fração", "números fracionários", "operações com frações". Com a vasta quantidade de resultados, mais de 7000 resultados, procedentes das palavras-chave, percebemos que era preciso fazer um refinamento na busca. Destacamos que esses resultados se trata de trabalhos realizados na área da Educação, Matemática, Ciências, Medicina entre outras. Portanto, a necessidade em refinar a busca, selecionando as áreas relativas ao

Ensino, à Educação e à Matemática. Como também, restringimos a pesquisas de mestrado e doutorado acadêmico, excluindo os mestrados profissionalizantes.

Além disso, delimitamos a busca para os 10 últimos anos (2013-2023) e selecionamos apenas os trabalhos que realizaram investigações relacionadas ao ensino e à aprendizagem sobre frações, nos quais foram utilizados, os instrumentos para a coleta de dados como: sequências didáticas ou questionários ou conjunto de atividades matemáticas. Do filtro, resultaram seis dissertações e quatro teses.

Com as pesquisas selecionadas, criamos o quadro a seguir, organizando os trabalhos de acordo com título, autor, ano, programa de pós-graduação e instituição.

Quadro 1: Teses e dissertações relacionadas ao ensino e à aprendizagem das frações

AUTOR (ANO)	TÍTULO (TESE/DISSERTAÇÃO)	PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO (INSTITUIÇÃO DE ENSINO)
Antônio Sérgio dos Santos de Oliveira (2015)	Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do ensino fundamental (Tese)	Educação Matemática/PUC-SP
Daiana dos Santos Oliveira Fischer (2015)	Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6° ano (Dissertação)	Ensino de Matemática/UFRGS
Norma Kerches de Oliveira Rogeri (2015)	Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal. (Tese)	Educação Matemática/ UNIAN
Francisco José da Silva Júnior (2015)	Intervenções didáticas no ensino de frações e a formação de professores (Dissertação)	Educação Matemática/UNIAN
Keyla Ribeiro de Andrade (2016)	Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental (Dissertação)	Educação Matemática/UFMS
Adriana Brito Aguiar Marques (2018)	Um estudo dos conhecimentos de futuros professores de matemática para o ensino de números racionais. (Tese)	Educação Matemática/UNIAN
Grace Zaggia Utimura (2019)	Conhecimento profissional de professoras de 4º ano centrado no ensino dos números racionais positivos no âmbito do estudo de aula (Tese)	Ensino de Ciências e Matemática/ Universidade Cruzeiro do Sul
Marcelo de Almeida Barbosa (2020)	O sentido das regras no ensino de frações (dissertação)	Educação em Ciências e Matemática/ UFP
Gesiel Alisson Martinho (2020)	O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração (Dissertação)	Educação e Docência/UFMG
Laís Isabele Proença (2021)	A mobilização dos registros de representação semiótica na prática pedagógica do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais (dissertação)	Ensino de Ciências Exatas/UFSCar

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

A partir da leitura das pesquisas, categorizamos dois tópicos: 1) O que dizem as pesquisas a respeito da aprendizagem sobre frações; 2) O que dizem as pesquisas a respeito do ensino sobre frações. Apresentamos a seguir as nossas análises por categorias.

Ao olharmos para as pesquisas que envolvem a aprendizagem sobre frações, é possível identificar que os estudantes apresentam dificuldades quanto à formação do conceito desses números como também, em realizar e compreender as regras operatórias que envolvem as frações. Silva e Almouloud (2008, p.22), em décadas passadas, já destacavam sobre "[...] a impotência do aluno frente a cálculos simples com frações, mostrando que não entende o assunto e não domina as regras."

Em outros estudos, como o de Maranhão e Igliori (2003), as autoras também apontaram no passado que o processo de ensino e aprendizagem das frações vem sendo alvo de várias pesquisas no âmbito da educação matemática, eles relatam que, "as implicações da não acessibilidade de um aluno ao conceito de número racional podem acarretar graves prejuízos à aprendizagem dos diversos ramos da matemática" (Maranhão e Igliori, 2003, p. 57). Nesse sentido, se o estudante não tem clareza dos conceitos básicos desses números, é bem provável que apresentem dificuldades relacionadas a novos conceitos.

3.2 O QUE DIZEM AS PESQUISAS A RESPEITO DA APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES

Frente ao mapeamento realizado, 03 estudos foram selecionados, por suas pesquisas abrangerem alunos do 5° ao 7° ano do Ensino Fundamental, como população alvo. São 02 dissertações e 01 tese, as quais apresentam aplicação de atividades em uma turma especificamente, a cada ano escolar, conforme detalhamento a seguir. São elas: Oliveira (2015) com aplicação de uma sequência de ensino no 5° ano; Fischer (2015) que aplicou sua sequência em turma de 6°ano e Martinho (2020) com aplicação de uma sequência didática em uma turma de 7° ano. Para melhor explicitar ao leitor em que essas investigações se aproximam da pesquisa em tela e quais suas contribuições, segue uma síntese sobre cada uma delas.

Oliveira (2015), em sua tese, elaborou e aplicou uma sequência de ensino, fundamentando-se na Teoria das Situações Didáticas (TSD), para que um grupo de estudantes do 5° ano do ensino fundamental elaborasse e construísse significado para as regras operatórias envolvendo as frações com o uso de uma calculadora científica. Ao procurar identificar se esse instrumento contribuiria para a aprendizagem das operações com esses números, o autor buscou aplicar as atividades a partir da representação das frações solicitando um tratamento para a resolução de operações, e, uma conversão da representação numérica para a representação figural.

No que se refere à aprendizagem, Oliveira (2015) destacou que os estudantes conseguiram verbalizar e escrever, com o manuseio da calculadora, as regras que envolviam as operações de adição e subtração com o mesmo denominador; para a multiplicação de frações quaisquer e divisão em que as frações possuíam numerador e denominador múltiplos. Com isso, percebeu o quanto o uso desse instrumento contribuiu para que os estudantes tratassem as frações como um número e não como dois números naturais independentes.

Porém, quanto às operações de adição e divisão que envolviam frações distintas, esses estudantes não conseguiram obter sucesso na elaboração de uma regra operatória. Esses sujeitos participantes de sua pesquisa não conseguiram estabelecer uma relação entre os numeradores e denominadores dos números dados com os que foram obtidos na resposta. Isso se deu devido à elaboração da atividade, em que não se percebeu que a calculadora simplificava os números, impedindo a percepção do estudante. Para o autor, tratando desses tipos de atividades, é importante que sejam escolhidas frações em que a multiplicação dos denominadores fique evidente na adição desses números. Assim como, sejam utilizadas as representações figurais para a elaboração dessas regras operatórias, além de que os estudantes também já tenham entendimento sobre a equivalência desses números.

A sequência de atividades aplicada por Fischer (2015) para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, teve como foco a compreensão desses alunos quanto ao conceito de multiplicação das frações, para aprender a aplicar essa operação. Com tal aplicação, a autora buscou oportunizar aos estudantes a construção do conhecimento sobre essa operação no sentido de compreenderem o que acontece no processo de tomar parte de parte(s) de uma unidade, proporcionando a conexão desse processo com a multiplicação de frações.

Segundo a autora, é habitual observar que basta multiplicar os numeradores e denominadores quando a atividade envolve multiplicar frações. Porém, isso não ajuda em nada aos estudantes entenderem a ampliação que acontece dessa operação no universo dos números naturais para os racionais. A maneira de explorar tal operação de modo simplesmente operatório mecanicamente, não dá significado ao produto entre duas frações e nem permite que os estudantes associem eventos do cotidiano.

Quanto à aprendizagem, Fischer (2015) destacou que os estudantes foram capazes de perceber que a expressão “de” estava ligada à definição da multiplicação e de aplicar em diversos contextos. Para a autora, ao explorar a multiplicação de frações impróprias, percebe-se a complexidade que torna os estudantes em resolver atividades envolvendo esse conceito.

No entanto, seus participantes da pesquisa conseguiram compreender “que se o primeiro fator é maior do que a unidade, então o produto deverá ser maior do que o segundo fator” (Fischer, 2015, p. 209). A autora, ainda ressalta que esses estudantes mesmo apresentando dificuldades nas atividades de formulação de problemas, conseguiram atribuir significado à multiplicação das frações. Eles partiram do conhecimento que já possuíam quanto aos números naturais ampliando esse conceito para frações, apoiando-se em materiais concretos e representações pictóricas, em que foi possível chegar até a dedução de um algoritmo.

Martinho (2020), em sua dissertação, com o intuito de investigar como a equivalência de frações junto a materiais manipuláveis poderiam contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, elaborou uma sequência didática para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental. O autor compreende que o conceito desses números não é simples para ser abstraído e compreendido de maneira fácil pelos estudantes. É uma operação que requer desses estudantes o entendimento da ruptura que devem ter com os números naturais e inteiros.

Nesse sentido, o autor evidencia que os estudantes:

> Demonstraram não compreender o que representa o numerador e o denominador das frações; trataram o numerador e o denominador das frações como se fossem dois números isolados separados por um traço; apresentaram dificuldades com o significado parte-todo; tiveram dificuldades na hora de comparar, somar e subtrair frações com denominadores diferentes e identificar uma fração equivalente (Martinho, 2020, p. 172).

O autor destaca que isso ocorreu porque os estudantes não conseguem compreender a ampliação dos números naturais para as frações. Por sua vez, aqueles que conseguem entender sobre essa ruptura, ao lhes serem propostas situações para resolver exercícios, não associam com eficácia o conhecimento já adquirido em relação ao conceito desses números.

Em relação à comparação de frações, o autor relata que os estudantes apresentaram algumas dificuldades por não compreenderem que “a fração é um número; uma fração não são dois números naturais divididos por um traço; uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais” (Martinho, 2020, p. 174).

Os resultados desses estudos nos ajudam a melhor refletir sobre como nossa AEP, no sentido de atentar-se à linguagem nas questões propostas para que os estudantes, parceiros da pesquisa, melhor compreendam o que lhes for proposto. Outro aspecto refere-se à manipulação dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos, para melhor compreensão da parte dos estudantes, quanto à equivalência de frações na resolução de situações em que usa o cálculo da operação adição ou subtração com denominadores diferentes e cálculo das operações multiplicação e divisão de frações.

Outra situação remete à articulação desses conceitos de frações ao cálculo de medidas de perímetro e área, que parece ser o diferencial desta pesquisa em relação aos estudos aqui comentados. Isso favorece a organização das praxeologias do tipo regional em que duas unidades temáticas estarão articuladas entre si, Geometria e Grandezas e medidas. Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004 *apud* Silva, 2005, p. 99),

> a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da Organização Matemática Local (OML) que integram uma Organização Matemática Regional (OMR) (Silva, 2005, p. 99).

Ao olharmos para as dificuldades apresentadas pelos estudantes quanto à aprendizagem das frações, consideramos que também cabe observar a relação professor-aluno para que a aprendizagem ocorra. Grande parte das dificuldades apresentadas pelos estudantes pode estar relacionada ao preparo do professor.

De acordo com Chevallard (1982), o triângulo didático é uma representação esquemática do sistema educacional. Nesse sentido, a dinâmica de qualquer atividade educacional depende da interação entre o conhecimento, o aluno e o professor. No contexto do ensino tradicional, o professor assume uma posição de liderança em relação ao aluno, sendo o detentor do conhecimento e o responsável por transmiti-lo. O aluno, por sua vez, recebe esse conhecimento de forma fragmentada, descontextualizada e estruturada temporalmente pelo professor.

3.3 O QUE DIZEM AS PESQUISAS A RESPEITO DO ENSINO SOBRE FRAÇÕES.

Dessa maneira, frente ao mapeamento realizado, selecionamos 7 estudos, por suas pesquisas englobarem professores do 4° ao 7° ano do Ensino Fundamental, como participantes da pesquisa. São 03 dissertações e 04 teses, as quais apresentam observações de aulas, aplicação de atividades e questionários para grupos de professores, conforme detalhamento a seguir. São elas: Júnior (2015) com observação de aulas dos professores participantes do 4º ano; Rogeri (2015) aplicou questionários para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental; Andrade (2016) e Utimura (2019) que aplicaram um conjunto de atividades matemáticas para um grupo de professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do 4º ano, respectivamente; Marques (2018) com aplicação de questionário para futuros professores; Barbosa (2020) com aplicação de questionários para professores do 4º e 5º anos; Proença (2021) com aplicação de uma sequência didática no 6º ano.

Júnior (2015), em sua dissertação, analisou como uma formação continuada, por meio da reflexão sobre a prática, contribui para o desenvolvimento profissional de duas professoras participantes da pesquisa. A atividade de formação foi baseada na introdução das concepções parte-todo, quociente e operador ao conceito de frações.

Ao considerar o papel fundamental do Livro Didático de Matemática no trabalho do professor em sala de aula, é relevante destacar que, embora o livro utilizado pelas professoras em suas aulas apresente abordagem sobre os três significados das frações – parte-todo, operador e quociente – elas deram prioridade, nas aulas observadas, às situações que envolviam exclusivamente a concepção parte-todo. Essa escolha estava alinhada às expectativas do autor, que se baseou em outras pesquisas.

No entanto, ao prepararem um estudo independente sobre frações, sem considerar a sequência do livro didático e o currículo da escola, ambas optaram por iniciar com situações que exigiam a compreensão do significado de operador.

Rogeri (2015) investigou a ampliação da base de conhecimentos, mediante à aplicação de questionários, junto a um grupo de professores dos anos iniciais do ensino fundamental para ensinar os números racionais por meio de uma formação continuada. Com o intuito de identificar as práticas e os conhecimentos que esses professores possuíam em relação ao processo de ensino e aprendizagem desses números, em especial, a representação decimal.

As respostas obtidas nos questionários apontaram concepções vagas sobre os números racionais e seu ensino, como por exemplo, dificuldades relacionadas às definições e concepções, comparação e representação decimal desses números. Os conhecimentos apresentados pela maioria dos professores estavam de acordo com o que era proposto inicialmente no currículo, principalmente, as representações fracionárias e a concepção parte-todo. Apesar da concepção de quociente fazer parte da noção essencial dos números racionais, não foi apresentado pelos professores como conhecimento obtido.

A autora percebeu lacunas no repertório de conhecimento do grupo de professores relacionado à leitura e escrita dos números decimais e aos critérios de comparação dos números racionais em sua representação decimal. Esses professores "[...] se apoiavam em critérios envolvendo números inteiros com a vírgula, representando apenas um ponto que separa duas partes de um número: a parte inteira e a decimal" (Rogeri, 2015, p. 253).

Andrade (2016) analisou as manifestações verbais e escritas de um grupo de professores que ensinam matemática dos anos finais do ensino fundamental sobre as possíveis dificuldades apresentadas por estudantes ao mobilizarem os registros de representação semiótica dos números racionais no desenvolvimento de atividades matemáticas.

As análises de um conjunto de atividade indicaram ênfase quanto ao uso de regras nos tratamentos e conversões de distintas representações semióticas desses números, situando as dificuldades apresentadas pelos estudantes em entender os conceitos matemáticos, destacadas pelos professores. O estudo em grupo, levou os professores participantes da pesquisa a perceberem a importância de utilizar e mobilizar as distintas representações semióticas dos números racionais para a aprendizagem desses números.

Marques (2018), em sua tese, investigou por meio de um questionário, os conhecimentos que futuros professores de Matemática possuíam para o ensino de números racionais. Os resultados obtidos revelaram que os futuros professores possuíam lacunas com relação ao conceito desses números, principalmente em sua representação decimal e eles não compreendiam que, "[...] se o número pode ser representado na forma fracionária então ele com certeza é racional e sua forma decimal será finita ou infinita e periódica" (Marques, 2018, p. 198).

Utimura (2019), em sua tese, por considerar que tantos os alunos e o professores alfabetizadores apresentam dificuldades relacionadas aos números racionais positivos, devido a sua complexidade, a autora investigou as revelações de sete professoras, do 4º do Ensino Fundamental, em um curso de extensão, direcionado para o ensino desses números.

A autora destacou que as professoras participantes apresentaram dificuldades sobre os significados, representações e equivalência dos números racionais e faziam poucas relações entre eles; sobre a organização dos conteúdos; sobre a ligação existente entre os números racionais e outros conteúdos intra ou extra matemática.

Barbosa (2020), em sua dissertação, discutiu como os professores aplicam e ensinam as regras matemáticas para o conceito das frações, baseando-se nos conceitos de Wittgenstein[7], tendo como foco as operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão. Para isso, a autora aplicou um questionário para os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais.

Como resultado, a autora destacou que os professores que participaram da pesquisa apresentaram dúvidas e falhas ao explicarem sobre as frações, identificadas nas respostas do questionário e na análise do material empírico. Apresentaram erros ao aplicarem as regras e, principalmente, erros nos conceitos desses números, na resolução de multiplicar um número inteiro por uma fração; na resolução de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

[7] "[...] o filósofo ressalta que o ensino da linguagem ocorre por meio dos jogos de linguagem, os quais seguem regras, assim como a linguagem matemática" (Barbosa, 2020, p. 16).

Proença (2021) questionando-se sobre o motivo dos estudantes não fazerem conexões das diferentes representações de um mesmo objeto matemático, em especial, relacionado aos números racionais, analisou como a prática docente afeta o desenvolvimento de aquisição e articulação dos distintos registros semióticos desses números. E para essa análise, a autora preparou uma sequência didática para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

A autora destacou que a forma como o professor media essas atividades, presentes na sequência didática, põe os estudantes em movimento com relação às resoluções. Assim também, oportuniza o desenvolvimento de habilidades relacionadas à atividade matemática, como por exemplo, reconhecer unidades no interior das representações.

Nesse sentido, a autora realça o quanto

> [...] isso nos faz repensar sobre a nossa prática docente, de que maneira nós estamos mobilizando os diferentes registros de um objeto de conhecimento no ensino da Matemática, na qual o professor tem um papel fundamental de se ter um olhar crítico sobre os materiais a serem utilizados em suas aulas, assim como a maneira que ele insere o conteúdo a seu aluno (Proença, 2021, p. 187).

Isso nos mostra, segundo a autora, a importância do professor está atento às suas práticas e que esteja sempre em formação visando ter um olhar crítico, tanto a sua prática, como a utilização de materiais didáticos. Se tais materiais cumprem as habilidades e objetivos que os estudantes precisam alcançar, se estabelecem as diferentes representações.

Destacamos essas pesquisas, aqui apresentadas, por algumas similaridades com o nosso trabalho. Elas tratam, principalmente, da aplicação de uma sequência didática e por meio da análise dessas pesquisas é possível verificar os benefícios que surgem com a aplicação dessas sequências. Como destaca Fischer (2015):

> [...] da forma como foi desenvolvida a sequência de atividades, foi proporcionada uma maior autonomia dos alunos, fazendo-os refletir individualmente, em um primeiro momento, sobre os processos, e, posteriormente, procurando entender, durante os momentos de correção das atividades, outros esquemas de pensamento utilizados pelos colegas, aproveitando-os para complementar, comparar e validar seus próprios esquemas utilizados na atividade em discussão bem como nas próximas atividades (Fischer, 2015, p. 210).

Benefício que favorece mais a dinâmica que acontece no trabalho do professor de Matemática e, consequentemente, melhor compreensão dos estudantes quanto aos conteúdos matemáticos. Nesse sentido, destacamos a importância da realização dessa revisão literária para que possamos compreender como as frações estão sendo abordados na educação básica. Como também, foi possível perceber a necessidade em serem realizadas mais pesquisas sobre as frações.

3.4 FRAÇÕES NO CONTEXTO DE PESQUISAS À LUZ DA TAD

Nesta subseção, iremos discutir sobre algumas pesquisas que abordam sobre o saber frações e utilizam da TAD como fundamento teórico, podendo ou não abordar outras teorias. Esta discussão se fez necessária neste estudo para compreender o contexto do saber em outras pesquisas relacionadas à TAD, como também, entender como se desenvolveram essas pesquisas no período 2006 - 2023, já que o trabalho que fundamenta nossa pesquisa foi realizado em 2005[8]. Para esse mapeamento acessamos o banco de dados disponibilizado pelo Google Acadêmico considerando o descritor "Teoria Antropológica do Didático e frações".

Para isso, fizemos uma leitura breve sobre os títulos dos trabalhos encontrados e de seus resumos, tendo como base o descritor citado anteriormente. O resultado totalizou em 9 estudos distribuídos em artigos científicos, monografias, dissertações e tese, abrangendo o período de 2010 a 2021, em anos de publicações bem distintos, apenas havendo dois trabalhos publicados em 2013. A seguir no Quadro 2 apresentamos um apanhado das pesquisas analisadas, destacando o tema abordado, autores e a finalidade dos trabalhos:

Quadro 2: Trabalhos envolvendo as frações e a TAD como fundamento teórico

Tema Abordado	**Autor(es)**	**Finalidade**
Livro Didático (LD)	Andrade (2010)	Analisou a organização do livro didático para a introdução do conceito de fração para o 6º ano do Ensino Fundamental, como também, as concepções que são mobilizadas na teorização do conteúdo.
	Cabral (2013)	Analisou a organização didática para números racionais em dois livros didáticos de matemática para o 5º ano do Ensino Fundamental.
	Andrade (2014)	Identificou a organização matemática proposta em dois livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental a respeito das frações.
	Freitas e Coelho (2021)	Analisou as praxeologias presentes no LD do 5º ano do Ensino Fundamental.
Relações institucional e/ou pessoal	Xavier, et al. (2013)	Identificou e analisou as marcas das relações institucionais que incidem sobre as relações pessoais dos alunos do Ensinos Fundamental,

[8] No mapeamento anterior, optamos pelo período de uma década para levantar estudos mais atualizados em relação ao objeto frações, porém, nenhum dos identificados tomou como base a TAD.

		Médio e Superior no que diz respeito à representação decimal dos números racionais.
	Miranda (2016)	Identificou as epistemologias institucionais que são utilizadas no ensino de matemática nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Buscando identificar se há uma desconexão entre a epistemologia institucional do professor do primeiro segmento (anos iniciais) e do professor do segundo segmento (anos finais).
	Leão (2019)	analisou a compreensão dos estudantes sobre à divisão de frações e observou as relações pessoais e institucionais com o objeto matemático
Praxeologias de frações nos anos finais do Ensino Fundamental	Kichow (2009)	Descreveu e analisou os procedimentos didáticos adotados pelos professores ao lecionar para alunos do sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental o conteúdo dos números racionais.
	Lopes (2020)	Investigou se havia um distanciamento ou aproximação entre as praxeologias do professor e as praxeologias propostas pelo livro didático (LD) com relação ao conceito de fração em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Freitas e Coelho (2021), Cabral (2013), Andrade (2010) e Andrade (2014) utilizaram a TAD como aporte teórico e metodológico para a identificação das praxeologias do LD. Freitas e Coelho (2021) observaram que a Organização Matemática valorizada pelo LD está de acordo com o que é esperado pelos Parâmetros Curriculares Nacional (PCN), iniciando a conceituação de frações a partir da relação parte-todo.

Nos resultados, esses autores identificam 11 tipos de tarefas, como por exemplo, fazer leitura de uma fração, identificar uma fração a partir de um conjunto de elementos. Os autores destacam que o bloco tecnológico-teórico "[...] está disperso nos enunciados das tarefas, nos exemplos disponíveis, em balões dos personagens do livro e nas duas seções 'Saiba Mais' e 'O que estudamos'" (Coelho e Freitas, 2021, p. 689).

Andrade (2014) verificou que a partir de dois livros analisados em seu estudo, percebe-se uma priorização de tarefas e técnicas que mobilizam as concepções parte-todo e operador, privilegiando tarefas do tipo: "determinar uma fração" utilizando a dupla contagem como técnica de resolução. Andrade (2010) também identificou, a partir da análise de dois LD, que há uma preferência por parte dos autores em privilegiar tipos de tarefa que mobilizam a concepção parte-todo e utilizam da dupla contagem das partes como técnica de resolução.

Assim como os autores citados anteriormente, que também analisaram as OM presentes no LD, Cabral (2013) destacou a preferência dos autores dos livros analisados por tarefas do mesmo tipo, mobilizando apenas a concepção parte-todo sem a utilização de diferentes técnicas de resolução. Ainda destaca que os LD não permitem a construção das frações por parte dos estudantes, já que a teoria é apresentada de maneira pronta e para a resolução das tarefas exige-se uma mobilização repetitiva das técnicas.

Leão (2019), em seu artigo, tem como objetivo analisar os conhecimentos delineados como metas de aprendizado nos documentos oficiais seguidos pela escola na qual a pesquisa foi conduzida, ou seja, os Parâmetros Curriculares do estado de Pernambuco (PCPE). Para isso, a autora aplicou um teste diagnóstico e um teste avaliativo após o estudo das frações para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Ela observou as técnicas utilizadas por eles para a resolução das atividades antes e depois do estudo, tendo como referência o que estava proposto pelos PCPE. A autora utilizou a Transposição Didática (TD) e a TAD para fundamentar essa discussão.

Leão (2019) aplicou o primeiro teste diagnóstico contendo duas questões das quais a autora destaca apenas uma 'Em uma corrida de revezamento, cada corredor percorre $\frac{1}{8}$ de km. Quantos corredores são necessários para uma corrida de $\frac{3}{4}$ km?', que aconteceu antes dos estudantes terem contato com as frações, o segundo teste, contendo a mesma questão proposta no teste diagnóstico, ocorreu durante as avaliações bimestrais e os estudantes já haviam estudado sobre o objeto matemático em questão.

Inicialmente a autora analisou o teste diagnóstico e notou que dos 47 estudantes que responderam a esse teste, apenas 6 acertaram utilizando técnicas diferentes de resolução. Por exemplo: três resolveram por transformação de unidades, um resolveu por divisão de fração, destacando que esse aluno havia repetido o 7º ano do Ensino Fundamental, e dois utilizaram do conceito de fração equivalente (Leão, 2019). Essa análise ocorreu antes do recorte do que é esperado pelos PCPE.

Na análise do segundo teste, a autora destaca que 10 dos 47 estudantes acertaram a questão proposta, sendo que 5 resolveram utilizando o algoritmo da divisão de frações, dois por transformação de unidades, um por razão, os outros dois utilizaram representação figural e divisão de frações, de maneira incorreta ajustando a resposta ao final.

Nessa análise, a autora considerou apenas as respostas dos alunos que acertaram e comparou essas respostas com o PCPE, modelando-as praxeologicamente considerando as noções sobre a TD, se os saberes a ensinar são similares aos aprendidos. Dessa forma, a autora observou e analisou se os conhecimentos mobilizados pelos estudantes vão de encontro ao que é proposto no referido documento curricular.

De acordo com Leão (2019), os conhecimentos que foram mobilizados durante a resolução estavam em consonância com o que era esperado nos PCPE, estando de acordo com o que a instituição, o documento, propõe à escola, conforme o saber que deve ser ensinado com o saber aprendido.

Miranda (2016), em sua tese, buscou identificar explicações para entender as dificuldades existentes dos estudantes quando passam do primeiro segmento (anos iniciais) para o segundo segmento (anos finais) do Ensino Fundamental, para apontar ou negar a existência do obstáculo didático institucional optou por analisar a estrutura do ensino, o currículo e a formação docente para identificar esses supostos obstáculos.

Quanto à estrutura do ensino, o autor afirma que se divide em duas instituições distintas, primeiro e segundo segmento. Essas instituições são caracterizadas pelo agrupamento de turmas que possuem disciplinas e funcionamentos distintos. Essa divisão é refletida e corroborada pela exigência de formação diferenciada como critério mínimo de habilitação para o exercício profissional em cada um dos segmentos.

Na análise da formação, observou-se uma clara diferença entre elas, pois o professor do primeiro segmento tem acesso a uma formação mais generalista e destinada aos que serão habilitados para lecionar nesse segmento, sendo responsáveis por lecionar todas as disciplinas. A formação dos que serão habilitados a ensinar no segundo segmento deve ser específica, de acordo com cada disciplina que compõe o conjunto das turmas desse segmento. Contribuindo para que cada segmento seja considerado uma instituição dentro do Ensino Fundamental.

Miranda (2016) ressalta que, durante o processo formativo dos futuros professores, o conceito matemático de fração não é abordado de forma diferenciada em relação ao ensino no primeiro segmento do Ensino Fundamental. Isso faz com que a maneira de ensinar raramente se diferencie da maneira como foi aprendido na escolarização desse segmento quando esses professores cursaram.

Ao analisar o currículo, o autor destaca que não apresenta diferenças significativas para justificar uma mudança na abordagem do ensino de frações nos diferentes segmentos. Porém, ao analisar os livros didáticos de Matemática, ficou evidente uma diferença na epistemologia institucional sobre frações nos segmentos. No primeiro segmento, a fração é compreendida como uma relação de parte-todo, e sua representação é feita usando dois números naturais que expressam quantidades obtidas por contagem em pares, de acordo com Silva (2005, p.15) “[...] esse procedimento descaracteriza a superfície apresentada por não tratar de sua área e privilegiar a "discretização" dessa superfície para permitir a contagem". No segundo segmento, a fração é vista como um número.

Xavier et al. (2013), em seu artigo, obteve o resultado da sua pesquisa com base na análise de três livros, os documentos oficiais nacionais e do estado de São Paulo e o teste diagnóstico aplicado no 5º ano do Ensino Fundamental, 2º ano do Ensino Médio e 1º ano do Ensino Superior. Os resultados obtidos apontaram a existência de desafios que se estendem ao longo das várias etapas da educação escolar.

Os autores apontaram que os estudantes não evoluem ao longo do tempo sendo capazes de aplicar apenas as técnicas relacionadas à representação de frações logo depois do seu ensino. O uso da representação decimal da fração utilizada nos contextos escolares é pouco eficaz e evidencia a necessidade de um trabalho mais específico em relação às diferentes formas de representação e à transição entre elas.

Os autores finalizam destacando que os estudantes do Ensino Superior não conseguem aplicar os conhecimentos sobre frações e suas representações em situações contextualizadas, nem mesmo em situações escolares correspondentes às relações institucionais que foram submetidos. De acordo com Chevallard (2018, p. 42):

> As matemáticas a ensinar se revelam, muitas vezes, de forma inesperada, problemáticas. [...] as dificuldades abundam em torno do conteúdo a ser ensinado. Um primeiro tipo de dificuldade diz respeito a certos conteúdos matemáticos específicos do ensino secundário, que podem ser mal conhecidos, mas que também podem ser dominados com bastante rapidez.

A partir das considerações do autor podemos entender que os professores também apresentam limitações em relação ao saber, apontando para uma necessidade de reflexão das nossas concepções com relação ao saber.

Kichow (2009), em sua dissertação, obteve os resultados da pesquisa por meio da observação das aulas lecionadas por quatro professores. Analisou três cadernos de estudantes desses professores e a entrevista realizada com esses docentes. A análise do discurso sobre a prática didática efetiva em sala de aula, relacionada ao ensino dos números racionais, foi examinada levando em consideração a organização matemática, a organização didática, os aspectos linguísticos e os momentos de estudo. Como resultado, foi observado que as práticas efetivas em sala de aula são aquelas que enfatizam o uso de técnicas, o que provavelmente ocorre devido à experiência desses professores como alunos durante a educação básica.

Nesse sentido, podemos concluir que os professores tendem a adotar práticas de ensino que enfatizam o uso de técnicas, porque eles próprios foram alunos no passado e tiveram experiência com essas técnicas quando estavam na escola. Isso significa que eles podem estar replicando o que funcionou para eles como estudantes em suas próprias práticas de ensino.

Lopes (2020), em sua dissertação, categorizou, analisou e comparou as praxeologias do professor e do LD. Fundamentou-se na TAD e na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. O trabalho se constitui em pesquisa de campo com natureza qualitativa. Um entre cinco dos professores que ensinavam Matemática na escola escolhida foi o colaborador da pesquisa, os dados foram coletados com base em 15 encontros, dentre esses encontros, aconteceu uma entrevista contendo 21 questões abertas, tratando sobre a prática de ensino, o objeto matemático, a participação do professor em formações propostas pela secretaria, o livro analisado. Por fim, o autor confrontou as praxeologias dos professores.

Lopes (2020) destacou que o professor segue a mesma sequência didática apresentada no LD. Ele também abordou todos os tipos e subtipos de tarefa abordadas para conceituar as frações, exceto os tipos de tarefa que abordam o significado de porcentagem, sendo substituídas por divisão de fração. O autor afirmou que o professor tem uma preferência pela relação parte-todo mesmo abordando outros conceitos como o de razão, medida, quociente, operador e porcentagem de maneira específica e objetiva.

Apesar das pesquisas supracitadas não terem aproximações específicas quanto à elaboração de uma Organização Didática para o ensino das frações, foi importante buscar entender como o saber está posto para ser ensinado e como os estudantes/professor resolvem questões quando estão frente de estudos com o objeto matemático, como também, para entendermos como essas pesquisas são realizadas à luz da TAD, teoria que também fundamenta esta pesquisa.

Pode-se concluir, a partir dos estudos aqui apresentados que, ainda não há uma priorização quanto ao ensino das frações com base em suas razões de ser: medição, distribuição e comparação. Em vez disso, as abordagens se concentram na ideia de concepção parte-todo, utilizando a técnica de dupla contagem das partes. Além disso, a educação ainda se concentra principalmente no aspecto de "como fazer" em detrimento do desenvolvimento do entendimento que justifica essas técnicas, resultando na falta de uma base sólida para o estudo e a prática efetiva da matemática.

Com base nos estudos apresentados nessa subseção, observamos que não houve diferenças significativas com relação a mobilização das outras concepções no ensino das frações, quando comparados ao trabalho do Silva (2005), visto que os trabalhos apontam que ainda há uma preferência da concepção parte-todo, como também, o ensino não mobiliza a razão de ser desse objeto matemático.

Sob a perspectiva das restrições, observamos que os trabalhados acadêmicos, identificam como circunstâncias que complicam ou até mesmo inviabilizam a realização eficaz de praxeologias matemáticas e didáticas relacionadas ao objeto matemático frações. Observamos que:

1. Atividades que envolvem apenas a multiplicação entre frações impossibilitam que os estudantes entendam a ampliação que acontece dessa operação no conjunto dos números naturais para os racionais.
2. Explorar a multiplicação apenas de modo operatório, não dá significado ao produto entre duas frações e nem permite que os estudantes associem eventos do cotidiano.
3. Os estudantes não compreendem que “a fração é um número; uma fração não são dois números naturais divididos por um traço; uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais” (Martinho, 2020, p. 174).
4. Os professores apresentam dificuldades e possuem concepções vagas a respeito dos significados, dos conceitos, das representações e ensino das frações. Dando prioridade às situações que envolvem apenas a concepção parte-todo.
5. Como também, os professores apresentam lacunas quanto à leitura, à escrita e à comparação desses números em sua forma decimal.
6. Nos livros didáticos, as tarefas apresentadas sobre o objeto matemático evidenciam uma priorização por tipos de tarefa e técnicas que mobilizam a concepção parte-todo.

Destacamos que o modelo ainda adotado, como visto nas pesquisas correlatas, permanece privilegiando o ensino de técnicas em contextos artificiais. Especificamente no caso das frações, esse modelo não apresenta situações que demonstram claramente sua razão de ser. Pelo contrário, o ensino prioriza o modelo parte-todo com a dupla contagem das partes, o qual, de acordo com os trabalhos de Silva (2005) e Almouloud e Silva (2021), não é considerado adequado como um modelo eficiente para o processo de ensino.

3.5 CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES QUANTO AO ENSINO DE FRAÇÕES

De acordo com os estudos de Almouloud e Silva (2021), é preciso trabalhar com três Modelos Epistemológico de Referência: M_1, M_2 e M_3 associados à concepção de medida, quociente e razão. Identificamos a seguir, com base nos estudos de Silva (2005) e Almouloud e Silva (2021), para cada modelo, os tipos de tarefas da OM considerada.

3.5.1 A concepção de medida

De acordo com Silva (2005), essa concepção pode ser mobilizada por meio de tarefas que envolvam medições de comprimentos, as quais solicitam a manipulação de um padrão, a unidade de medida, que dependerá da grandeza que será trabalhada, como também, esses tipos de tarefa fazem com que os indivíduos percebam as limitações relacionadas aos números naturais, fazendo com que pensem na necessidade de criação de novos números para solucionar o problema proposto.

A autora destaca que mesmo existindo uma unidade padrão, a moeda, muito utilizada, para medir transações de compra e venda, para a sua pesquisa, ela escolheu focar apenas nos tipos de tarefas que envolvam medidas de comprimento, já que a construção das técnicas para solucionar esses tipos de tarefa garante o desenvolvimento de técnicas para outros tipos de grandeza.

Segundo Silva (2005), os tipos de tarefa que mobilizam a concepção de medida de comprimento, solicitam a manipulação de três *ostensivos*:

> [...] a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário 1/b que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em b partes para permitir a medição e o número fracionário a/b que representará o resultado da medição realizada (Silva, 2005, p. 118).

Uma vez que, ao dividirmos a unidade de medida escolhida será possível associar a concepção de medida com a de parte-todo a fim de viabilizar tal divisão. Ao tratarmos de retas numeradas ou esquemas de medida, precisa-se estabelecer o ponto de partida para medição, como também, o sentido dessa medição, que pode ser zero ou outro ponto qualquer.

A autora ainda chama a atenção para o uso imediato da régua milimetrada, pois a sua utilização precoce "encaminha para a discretização do contínuo, porque exige como técnica somente a contagem de centímetros e milímetros escondendo suas origens como subunidades do metro." (Silva, 2005, p. 118). Em outras palavras, é mostrar ao aluno que uma unidade contínua, como o metro, pode ser diluída em partes menores, como os centímetros, um dos submúltiplos mais utilizados do metro. A discretização é fazer essa distribuição, tornar a unidade contínua em discreta.

Para essa concepção, a autora aponta quatro tipo de tarefa listadas no quadro a seguir:

Quadro 3: Tipos de tarefa associadas a concepção de medida

T_1: determinar medidas de comprimento de um objeto.

T_2: determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais.
T_3: Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida.
T_4: reconstituição da unidade.

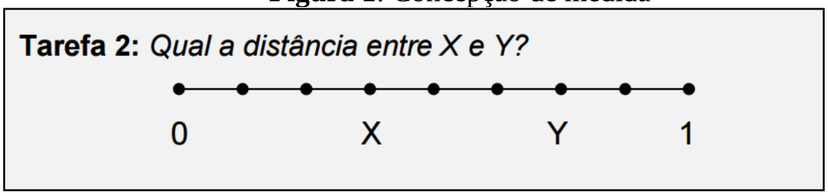
Fonte: elaborado pela autora (2023).

Para tarefas do tipo T_1, a pesquisadora destaca que elas podem ser cumpridas a partir da escolha de uma unidade de medição (régua de polegada, tiras de papel, régua milimetrada entre outros tipos de instrumentos) para que dessa forma o comprimento seja comparado com essa unidade escolhida. A partir dessa comparação, o indivíduo conseguirá perceber a necessidade em dividir a unidade escolhida possibilitando o cálculo do comprimento do objeto.

Aconselha-se que para as primeiras tarefas, se faça uso de tiras de papel, pois possibilita que o estudante faça a divisão da unidade com maior facilidade e que também seja utilizado unidades de medida diferentes para que o estudante também perceba que a medida do comprimento do objeto que está sendo medido varia de acordo com a unidade.

Vale reforçar que quando realizamos tipos de tarefa, sendo preciso fazer a divisão da unidade de medida escolhida, contribuímos para o aluno mobilizar sua concepção parte-todo e a técnica de dupla contagem para possibilitar essa divisão, ou seja, a partir do número $\frac{a}{b}$ compreendemos que a subunidade $\frac{1}{b}$ foi utilizada *a* vezes nessa medição. Vejamos os exemplos de tarefa, proposto pela autora:

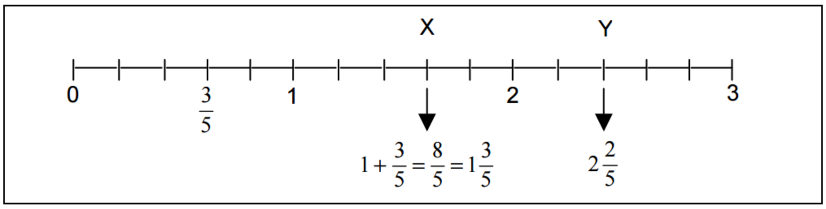
Figura 1: Concepção de medida



Fonte: Silva (2005, p. 119).

Nesses tipos de tarefa, a autora ressalta que os alunos ao realizarem esses tipos de tarefas, lhes permitirá resolver tarefas mais complexas. Como por exemplo, tarefas que apresentem esquemas maiores que a unidade, permitindo a utilização de fracionários maiores que 1 (na sua forma mista e imprópria), assim como na soma desses números. Para entender melhor, a autora destaca o seguinte exemplo:

Figura 2: Concepção de medida



Fonte: Silva (2005, p. 119).

Ainda sobre essa concepção, Silva (2005) determina tarefas as quais os segmentos não estão divididos em partes que possuem a mesma medida e de reconstituição da unidade, que são semelhantes às apresentadas na concepção parte-todo. A autora acredita que os tipos de tarefa que mobilizam a concepção de medida propiciam situações ideais para trabalhar com fracionários maiores que um, para favorecer um entendimento sobre frações mistas, a compreensão sobre a soma desses números com mesmo denominador e ainda a equivalência entre fracionários, em função de novas divisões da unidade.

3.5.2 A concepção de quociente

As situações, pelas quais os estudantes sentem-se mobilizados para compreenderem a concepção de quociente, estão associadas, frequentemente, à distribuição de grandezas, ou em dividir o número a em b partes, associando-se a representação $\frac{a}{b}$ à operação de divisão $a \div b$.

De acordo com Silva (2005, p. 121):

> O ostensivo a/b que representa o resultado de uma distribuição significa que a foi distribuído em b partes, ou seja, a foi dividido em um número b de partes iguais. Diferente dos tipos de tarefas que associam as concepções tratadas anteriormente, nestas o a pode ser menor, maior ou igual a b e podem representar objetos diferentes como, por exemplo, "crianças" e "chocolates" (Silva, 2005, p. 121).

Ao considerar situações do tipo discreta, a distribuição está associada aos números naturais, ou seja, a técnica está associada à divisão de dois números naturais, o que não cabe como resposta uma representação fracionária, porém relacionar a concepção de quociente. Já as situações do tipo contínua, dependendo da distribuição que foi pedida, essa divisão se torna um pouco mais complexa.

Nas duas situações antecedentes, discreta ou contínua, a técnica utilizada para resolver as tarefas poderá ser partitiva ou por cotas. Partitiva, refere-se a divisões em que são dadas a quantidade de inteiros e os números de partes que deve se dividir essa quantidade, pedindo o valor de cada parte. Por cotas, refere-se aos casos em que a quantidade de inteiros e os valores das partes são dadas e o que se pede é a quantificação de partes.

Para melhor entendimento, a autora aponta os seguintes tipos de tarefa pelos quais os estudantes podem mobilizar sua compreensão sobre a concepção de quociente:

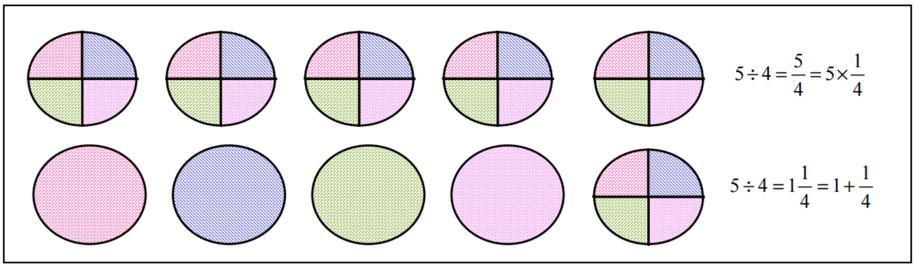
Quadro 4: Tipos de tarefa associadas a concepção de quociente

T_1: distribuir igualmente x objetos em um número y de partes.
T_2: distribuir igualmente x objetos de acordo com uma cota dada.

Fonte: elaborado pela autora (2023).

Como exemplo, Silva (2005) apresenta a seguinte tarefa, aspecto partitivo e de caráter contínuo: "Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas." (Silva, 2005, p. 122). Para realizar essa tarefa, a autora destaca que são possíveis duas técnicas para a sua resolução, para a primeira, é preciso que seja feita a divisão de cada pizza em quatro partes iguais, em que cada pessoa receberá cinco dessas partes. Para a segunda técnica, será preciso distribuir uma pizza inteira para cada pessoa e, ao final, dividir a última em quatro partes iguais. Como representação dessa resolução, destacamos a seguinte figura:

Figura 3: Concepção de quociente- resolução da tarefa de caráter contínuo e partitivo



Fonte: Silva (2005, p. 122).

Em relação às tarefas que envolvem situações discretas com aspecto de cotas, podem ser resolvidas no campo dos naturais envolvendo a divisão de um número pelo outro. Por exemplo: se 100 bolinhas forem distribuídas para crianças, de modo que cada uma receba 20 bolinhas, quantas crianças poderão receber bolinhas? Trata-se de uma situação cuja resolução envolve diretamente a operação divisão de 100 por 20, obtendo o resultado do número 5 que corresponderá a quantas crianças receberão as referidas bolinhas.

3.5.3 A concepção de razão

As tarefas que mobilizam a concepção de razão, geralmente, não viabilizam a ideia de partição, mas sim, a ideia de comparação entre medidas de duas grandezas. Como por exemplo, nas situações que tratam de proporcionalidade. Em vista disso, a representação $\frac{a}{b}$ não está associada à divisão, nem obrigatoriamente a ideia de número, mas sim a noção de que "*a está para b*". "O entendimento da razão como "x para y" encaminharia, naturalmente, para a equivalência de razões e para o raciocínio proporcional que, por sua vez, solicita uma representação: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$." (Silva, 2005, p. 125).

Eis então, uma ferramenta muito importante para resolver problemas, segundo a autora, é a proporcionalidade, já que envolve diretamente a equivalência dos fracionários. Nesse tipo de situação, a constante é apresentada de maneira implícita ou explícita, determinada pela relação entre duas grandezas, em que a variação de uma provoca a variação da outra, ou seja, qualquer mudança em *a* provoca uma mudança esperável em *b*.

Nas tarefas pelas quais, os estudantes mobilizam sua compreensão quanto à concepção de razão, também envolvem a comparação de grandezas contínuas e discretas, de mesma natureza, ou não, relacionando situações do tipo: parte-todo, todo-todo (quando é comparada às quantidades de dois inteiros) e parte-parte (quando é comparada às quantidades duas partes de um inteiro ou parte de dois inteiros).

Destacamos no quadro a seguir, os tipos de tarefa que favorecem a compreensão para essa concepção:

Quadro 5: Tipos de tarefa associadas à concepção de razão

T_1: determinar uma razão.
T_2: determinar valor desconhecido.
T_3: comparar razões.

Fonte: elaborado pela autora (2023)

Como exemplo, Silva (2005) propõe a seguinte tarefa:

Figura 4: Concepção de razão - caso contínuo situação parte-parte

Tarefa 4: *Determinar a razão entre açúcar e farinha numa receita de bolo que utiliza duas xícaras de açúcar para três de farinha.*

Fonte: Silva (2005, p. 122).

Nessa tarefa ao se fazer a comparação, torna-se possível haver mobilização da pessoa em relação à ideia de proporção para aumentar ou reduzir a receita do bolo. Dessa forma, não faz sentido mobilizar a ideia de fracionário “dois terços” e nem sequer a concepção de quociente, já que não faremos a divisão dois por três.

Silva (2005) apresenta outras tarefas que tratam das situações parte-todo, todo-todo, e ainda, expõe as dificuldades relacionadas à elaboração dessas tarefas, chamando atenção para as escolhas numéricas em cada problema, pois podem tornar as técnicas de resolução um pouco mais complexas, tornando o grau de dificuldade maior ou não. Contudo, a autora ainda destaca sobre as situações que também favorecem alunos mobilizarem sua compreensão sobre a concepção de operador, pois existem dificuldades no que diz respeito às operações.

A autora destaca que, embora os alunos mobilizem de forma correta os conhecimentos necessários, é preciso ficar atento, pois as anotações que são feitas por eles podem levá-los a cometer alguns erros:

> [...] uma tarefa que pede a duplicação de uma mistura na razão $\frac{a}{b}$ ou $a:b$ pode ser representada por $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{a+a}{b+b}=\frac{2a}{2b}$. [...] que não condiz com a aritmética fracionária que define a adição por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. [...] Uma outra possibilidade de representação seria, pelo pensamento multiplicativo, apresentar a solução por $2\ x\ \frac{a}{b}=\frac{2a}{2b}$ (SILVA, 2005, p. 133).

A seguir, apresentamos as Figuras (5, 6 e 7) que foram elaborados pela autora resumindo os diversos tipos de tarefas dos casos contínuos ou discretos que favorecem a compreensão sobre as concepções aqui apresentadas e suas respectivas técnicas para a resolução.

Figura 5: Concepção de medida (tarefas e técnicas)

Tipo de tarefas	Concepção de Medida	Grandeza	Técnicas
1º	Determinar medidas de objetos	Contínua	Determinar unidade e subunidades
2º	Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais	Contínua	Dupla contagem
3º	Determinar medidas em segmentos não divididos em partes iguais	Contínua	Dividir o segmento em partes de mesma medida e contagem
4º	Reconstituição da unidade	Contínua	Divisão da parte apresentada para identificar 1/n e recompor a figuras

Fonte: Silva (2005, p. 143).

Figura 6: Concepção de quociente (tarefas e técnicas)

Tipo de tarefas	Concepção de Quociente	Grandeza	Técnicas
1º	Distribuir igualmente x objetos em um número y de partes	Contínua	1º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes ou manter objetos inteiros e dividir só o que for necessário 2º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes
		Discreta	Divisão de naturais
2º	Distribuir igualmente x objetos em uma determinada cota.	Contínua	Dividir a quantidade de objetos pela cota dada
		Discreta	Divisão de naturais

Fonte: Silva (2005, p. 143).

Figura 7: Concepção de razão (tarefas e técnicas)

Tipo de tarefas	Concepção de Razão		Técnicas
1º	Determinar uma razão	Contínuo	1º caso: situação todo-todo Escrever na forma fracionária as medidas explícitas ou medir os objetos antes se for o caso. 2º caso: situação parte-parte idem 3º caso: situação todo-todo com grandezas de naturezas diferentes. Associar a razão encontrada à divisão
		Discreta	1º caso: situação todo-todo Dupla contagem 2º caso: situação parte-parte de inteiros diferentes Dupla contagem 4º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro Dupla contagem 5º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro sem figuras Escrever na forma fracionária os dados apresentados
2	Determinar valor desconhecido	Contínua	proporcionalidade entre as medidas dadas
		Discreta	proporcionalidade entre as quantidades dadas
3º	Comparar razões	Contínua/discreta	Determinação de razões equivalentes com mesmo denominador

Fonte: Silva (2005, p. 144).

De acordo com Almouloud e Silva (2021), as concepções de parte-todo e operador se constituem como consequências do trabalho realizado a partir das concepções apresentadas anteriormente. Porém, ressalta-se que ao apresentarmos o Modelo Epistemológico de Referência (MER), elaborado nos estudos anteriores de Silva, tais concepções não foram explicitadas em sua pesquisa no ano 2005.

Ainda segundo esses autores, as tarefas relacionadas à ideia de medida e à grandeza geométrica área, assim como à noção de quociente e razão, sugere-se abordar tarefas que frequentemente são executadas com enfoque na noção de parte-todo. Isso envolve o uso da expressão "partes iguais" para englobar a contagem, e tais atividades são destacadas como um ponto de partida valioso para o ensino de frações.

Para tanto, Silva (2005, p. 143) categoriza quatro tipos de atividades: associar uma fração a uma figura; reconhecer uma fração representado em uma figura; formar inteiros e determinar frações; e reconstituir a unidade inteira. Estas atividades também poderiam ser aplicadas a grandezas discretas. No entanto, é importante observar que essas situações não podem ser abordadas com frações maiores que um. Pois, é importante considerar, por exemplo, que não é viável explicar a divisão de uma unidade inteira em três partes e, de repente, ter que considerar cinco partes.

Em relação às ideias de medida, quociente e razão, é possível explorar atividades que envolvam o conceito de operador, as quais frequentemente enfatizam cálculos utilizando frações, especialmente no contexto da multiplicação. Isso ocorre porque a fração em questão precisa atuar sobre uma quantidade para gerar uma nova quantidade. Silva (2005) identifica sete tipos distintos de tarefas relacionadas ao conceito de operador:

- Transformar quantidades de grandezas por meio de um operador fracionário;
- Transformar quantidades de grandezas utilizando dois operadores fracionários;
- Determinar o operador responsável por uma determinada transformação;
- Comparar diferentes operadores, bem como estados iniciais e finais;
- Identificar operadores que não alteram o estado inicial;
- Encontrar o operador que substitui a ação de múltiplos operadores;
- Calcular a porcentagem de uma quantidade.

A manipulação de tais tarefas auxilia na compreensão de conceitos como equivalência, inverso de um número, identidade, multiplicação e outros princípios relacionados a frações. Portanto, o estudo na Ecologia do Didático busca questionar quais as condições e restrições institucionais em que o objeto matemático está inserido. Isso resulta em questões do tipo:

> [...] O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado? (ALMOULOUD, 2015, p. 15).

Este estudo tem como objetivo explicar as razões que levam as OM e OD a assumirem determinadas características, bem como identificar as condições e restrições institucionais que promovem ou dificultam mudanças relacionadas à qualidade do material didático utilizado na instituição, aos conhecimentos dos alunos e professores e ao tempo dedicado ao estudo.

De acordo com Gascón (2011), devemos levar em consideração as condições e restrições estabelecidas nas praxeologias em todos os níveis de codeterminação didática. Esses níveis revelam uma escala inter-relacionada de elementos que exercem influência nas condições para que o objeto sobreviva em uma instituição específica. No quadro a seguir, Quadro 6, são apresentados os níveis de codeterminação para o estudo do objeto frações:

Quadro 6: Níveis de codeterminação para o estudo do objeto frações

Civilização	Ocidental
Sociedade	Brasileira
Escola	Ensino Fundamental - anos finais
Pedagogia	PCN, BNCC
Disciplina	Matemática
Domínio	Números
Setor	Números racionais
Tema	frações
Questão(ões)	concepções das frações (parte-todo, medida, quociente, operador e razão)

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Esta escala resulta em uma ecologia institucional das OM e OD de um dado objeto (em nosso estudo – frações), moldada por cada nível; tanto pelas condições que oferece, tanto pelas restrições que impõe. Em cada nível hierárquico surgem restrições recíprocas entre as OM e as OD: a interpretação e estruturação das OM em cada nível influenciam as possíveis abordagens para o estudo do objeto matemático em questão (frações, para nosso estudo). De maneira interligada, a natureza e as funções dos dispositivos didáticos em cada nível desempenham um papel significativo na determinação do tipo de OM que pode ser reconstruída.

Dessa maneira, conforme destacado por Gascón (2011), toda problemática que provoca uma análise em uma instituição didática, independentemente de ser relacionada à matemática ou não, integra um tópico inserido em um setor específico, o qual, por sua vez, está inserido em uma área de determinada disciplina. Na visão do autor, caso a disciplina em foco seja a matemática, esses níveis serão categorizados como níveis matemáticos, enquanto os demais, além destes, são considerados níveis não matemáticos ou pedagógicos, os quais, contudo, exercem influência significativa na matemática escolar, tornando-se assim parte do escopo de estudo da didática matemática.

As condições e restrições em níveis mais específicos da escala (níveis matemáticos), são influenciados por condições e restrições presentes nos níveis mais elevados na escala (níveis pedagógicos). Nesse sentido, buscamos as condições e restrições existentes nas diretrizes curriculares para Educação Básica. Ao analisar as diretrizes curriculares que norteiam as práticas educacionais e influenciam a escolha dos temas a serem abordados e representam uma das restrições institucionais. Buscamos compreender, por meio dessas diretrizes, como as frações devem ser abordadas no âmbito da Educação Básica no Brasil.

Nas análises realizadas nos documentos oficiais, PCN e BNCC, no estudo da dimensão econômica, observa-se que o objeto frações é um dos objetos de conhecimento previsto para ser ensinado/aprendido no 6º ano do Ensino Fundamental. Nos PCN-Matemática (Brasil, 1998), ressalta-se que

> [...] faz-se presente na quantificação do real - contagem, medição de grandezas - e no desenvolvimento das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas. No entanto, esse conhecimento vai muito além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico (Brasil, 1998, p. 25).

No atual documento vigente (BNCC), é ressaltado que os diferentes campos que integram o componente curricular Matemática reúnem "um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação" (Brasil, 2018, p. 268). Nesse sentido, essas ideias desempenham um papel crucial no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e, como resultado, devem ser transformadas em conceitos, melhor especificando, objetos de conhecimento matemático dentro do ambiente escolar. Assim:

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2018, p. 268).

Nesses dois documentos, também se recomenda que ocorra o aprofundamento da ideia de número por meio de situações-problema que envolvam tarefas. Por exemplo, de medições, "nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (BRASIL, 2018, p. 269). Na BNCC, parece ser evidenciado um dos nichos das frações, ou seja, mostrar as frações como ferramenta na construção de diferentes objetos matemáticos, articulando-se, por exemplo, à sobrevivência de outro objeto – a proporcionalidade. Desse modo, algumas das restrições que podem tornar difícil, ou até mesmo impedir a justificação de tarefas envolvendo frações,

> [...] são os desafios que os professores devem enfrentar no design de tipos de tarefa (e de tarefas) que permitam aos alunos alcançarem as competências e habilidades relacionadas com a unidade temática "Números", em especial com o objeto de conhecimento números fracionários (Almouloud e Silva, 2021, p. 142).

Para isso, segundo esses autores, o professor terá um desafio ao articular os três modelos do MER (elaborados por eles e apresentados aqui), M_1 associado à concepção de medida), M_2 (associado à concepção de quociente) e M_3 (associado à concepção de razão) para que o conceito desses números continue vivendo no ecossistema educativo (sistema educacional brasileiro, para nosso caso) e que alimente a construção de outros conhecimentos.

4 ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA

Além dos estudos apresentados até aqui, entendemos ser necessário apresentarmos outros conceitos que também nos ajudaram para a elaboração das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), de modo mais específico: os paradigmas – de visita às obras e o questionamento do mundo; as dialéticas: cronogênese, topogênese e mesogênese; o planejamento e análise *a priori* de cada atividade desenvolvida e as suas possíveis resoluções.

4.1 OS PARADIGMAS

Segundo Chevallard e Stromskag (2022), um paradigma é um contrato que orienta uma específica atividade humana. Portanto, podemos discutir sobre vários paradigmas, como por exemplo, um paradigma nas artes, um paradigma na ciência e, naturalmente, um paradigma na educação ou no ensino. Esse contrato consiste em descrever "qual é a sua finalidade e quais são os meios autorizados para essa atividade" (*idem*, p. 27).

De acordo com Chevallard (2013, apud Benito, 2019), estamos atualmente atravessando um período de transição nos paradigmas educacionais, em que o tradicional ainda prevalece enquanto paradigma conhecido como "visita às obras". Nele, o professor apresenta o conteúdo ao aluno que o "visita", para então, recorrer aos tipos de tarefas e respectivas técnicas de resolução. Porém, está gradualmente perdendo relevância, porque nesse paradigma, o objeto de conhecimento matemático é apresentado como algo intrinsecamente valioso, sem uma conexão clara com sua utilidade no mundo real. Os alunos não são expostos a problemas que só podem ser compreendidos, construídos ou solucionados na medida em que os alunos vão estudando os objetos de conhecimento que lhes estão sendo ensinados.

Assim, enquanto os alunos se dedicam à organização dos tipos de tarefas que lhes são propostos, seja em casa ou na escola, o professor frequentemente deixa de questionar a razão subjacente ao ensino dos objetos presentes no livro didático de Matemática. Da mesma forma, esse professor raramente se questiona sobre a inclusão de tais objetos foram inseridos no currículo em relação ao nível de ensino ou do curso em que está envolvido. Além disso, muitas vezes, o professor não acolhe prontamente a curiosidade do estudante que busca compreender o propósito de aprender determinado objeto matemático ou sua relevância prática. infelizmente, isso decorre da formação docente, a qual também tem por base, o mesmo paradigma – o de "visitas às obras".

Nesse contexto, a Matemática é lecionada de maneira definida e concluída e o professor ao ensinar os objetos de conhecimento já sabe o seu início, meio e fim estabelecidos, semelhante a um monumento que só pode ser observado. Os alunos, por sua vez, têm pouca ou nenhuma oportunidade de fazer descobertas ou construir algo além do que já está estabelecido. Ademais, quando os alunos passam a conhecer e aprender novos conceitos matemáticos, comentar sobre eles, ocorre na maioria das vezes, de forma mecânica, sem haver mobilização que articule outros conceitos, ou quando acontece tal mobilização, são realizadas tarefas com modelos padrões, dispondo de técnicas bastante conhecidas. Nesses casos, os alunos não deixam de ser visitantes, mas passando a visitantes ativos que se valem dos tipos de tarefas associados diretamente ao objeto estudado.

Entretanto, com a finalidade de enfrentar esse paradigma dominante, surgiu no âmbito da TAD, um paradigma alternativo que não exclui o dominante, mas o inclui, chamado de "paradigma do questionamento do mundo". Nesse novo paradigma, uma AEP origina-se de uma questão a que desejamos buscar uma resposta, sem desconsiderar todas as variedades de ferramentas que devem ser analisadas e empregadas na elaboração dessa resposta. Aqui enfatizam-se as noções de investigação (em uma dada questão). De acordo com Chevallard e Stromskag (2022, p. 32), "muitas vezes, por trás da pergunta *q*, há uma obra O que é a verdadeira aposta da aprendizagem e que, quando a "montagem" didática é adequadamente desenhada, constitui, para sala da aula, o elemento chave que falta para responder à questão *q*".

Por exemplo, se questionamos: Qual é maior: o tamanho do contorno da mesa do seu professor ou o tamanho do contorno de três mesas juntas que são iguais a sua? Trata-se, então, de uma questão que possibilita o aluno inicialmente mobilizar sua criatividade e raciocínio lógico para pensar alternativas de solução à questão. Para isso, algumas tarefas serão realizadas subsidiando a compreensão sobre o que será obtido como resposta à questão maior. Em princípio, observa-se que os objetos matemáticos não estão explícitos claramente, o jogo de palavras na questão propicia ao aluno mobilizar conhecimentos anteriores para saber qual melhor estratégia, quais tipos de técnicas poderão ser aplicados.

A seguir, serão apresentadas as três dialéticas que contribuem para um aprofundamento ao conhecimento deste novo paradigma – questionamento do mundo.

4.2 AS DIALÉTICAS: CRONOGÊNESE, MESOGÊNESE E TOPOGÊNESE

O objetivo para uma investigação no paradigma do questionamento do mundo é organizar o ensino de uma maneira dinâmica, onde o conhecimento a ser aprendido não é dado *a priori*, com a sequência de algumas aplicações. Pelo contrário, pretende-se organizá-lo de modo que o conhecimento apareça funcionalmente como respostas a questões problemáticas que motivem os alunos a estudarem e aprender o novo objeto de conhecimento.

As AEP têm como ponto de partida para a investigação, uma pergunta Q_0. O professor y que deseja utilizar essa ferramenta para ensinar determinada obra (ou conteúdo) O, precisará se embasar no paradigma do questionamento do mundo que lhe proporcionará condições para que os seus alunos X desenvolvam a atitude herbartiana[9].

Para que o professor tenha um norte na análise das características das AEP é preciso que ele tenha conhecimento acerca das dialéticas que irão tratar da dinamicidade da relação professor e aluno com o conhecimento. Sendo elas: cronogênese, topogênese e mesogênese (Chevallard, 2009).

A cronogênese é a dialética questão-resposta e essa está no núcleo de uma AEP, pois caracteriza a busca pela resposta para a questão Q_0, e nessa busca derivam-se outras questões e encontram-se respostas ampliando a busca pela resposta final. Aqui será possível exibir as questões e respostas que possivelmente surgirão durante o experimento**,** uma maneira de exibir essa dialética é por meio do mapa de questões e respostas, esse mapa é um esquema que mostra como surgirão as questões e suas respectivas respostas durante as AEP e como se relacionam.

A mesogênese é a dialética mídia-*milieu* que corresponde à contínua interação entre as respostas disponíveis que são fornecidas pela mídia com a tomada de decisão para validar essas

[9] Entende-se por atitude herbartiana aquela que define o estudante como o que conduz pesquisas à respeito de uma determinada obra e o professor sendo o orientador e guia nessas pesquisas.

novas respostas. O processo de construção do meio didático *M*, que é elaborado para gerar as respostas (podem ser estas produzidas por um aluno, ou pelo professor). Todas as respostas contribuem para “alimentar” o meio *M* e fornecem respostas parciais para Q. Em uma AEP, o meio não é determinado antecipadamente, é construído ao longo da investigação. Várias obras podem ser visitadas para construir o meio e não podem ser excluídas, como poderia acontecer no ensino tradicional. O meio deve oferecer ferramentas adequadas para construir e justificar cada resposta parcial e a resposta final resultante do processo.

A topogênese é a dialética individual-coletivo, caracterizando como ocorre a evolução das responsabilidades entre professor e aluno. O processo consiste na ideia de estudar coletivamente uma questão problema (Q), e em seguida, gerar uma resposta conjunta ($R\heartsuit$). Na AEP, a responsabilidade não é atribuída individualmente, mas sim, distribuída entre o professor e o aluno, ou seja, a responsabilidade pela busca das respostas não está exclusivamente nas mãos do professor; em vez disso, ocorre por meio de uma colaboração entre o estudante e o professor.

Nas seções seguintes, explicitamos o planejamento das AEP, bem como, as análises prévias e possíveis resoluções.

4.3 O PLANEJAMENTO DAS AEP

Durante o planejamento das nossas Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), desenvolvemos alguns estudos para a escolha das questões, como também para prever o que poderia acontecer durante a aplicação das atividades. Dessa forma, os objetivos deste momento envolveram a busca pelas Q_0 que permitissem a realização de uma investigação resultando em algumas características das frações, e, sobretudo, que estimulassem uma discussão de interesse para os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

Para a elaboração das questões geratrizes, revisitamos os trabalhos de Almouloud e Silva (2021) e o de Silva (2005), nos quais tem-se a estrutura do Modelo Praxelógico de Referência (MPR) também apresentado neste trabalho, bem como o apêndice do trabalho de Silva (2005) que trata de um material elaborado pela autora para a formação dos alunos. Esse material contém diversas atividades e, para resolvê-las, os estudantes precisam mobilizar as diversas concepções das frações.

Encontradas as questões geratrizes, avançamos no desenho das AEP e apresentamos na próxima subseção as respectivas análises *a priori*. Entretanto, convém ressaltarmos que o planejamento é constituído de cinco AEP, pois considerávamos haver tempo para aplicação de todas elas, conforme ajustado pelo professor responsável pela turma participante.

4.4 ANÁLISE *A PRIORI* DAS AEP

Nesta subseção, iremos apresentar a análise *a priori* das AEP que foram desenhadas a partir de uma questão geratriz Q_0. Baseamos nossa análise no esquema herbartiano $S(X, y, Q_0) \curvearrowright M] \hookrightarrow R\heartsuit$. Em que X são os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental e y a pesquisadora deste trabalho.

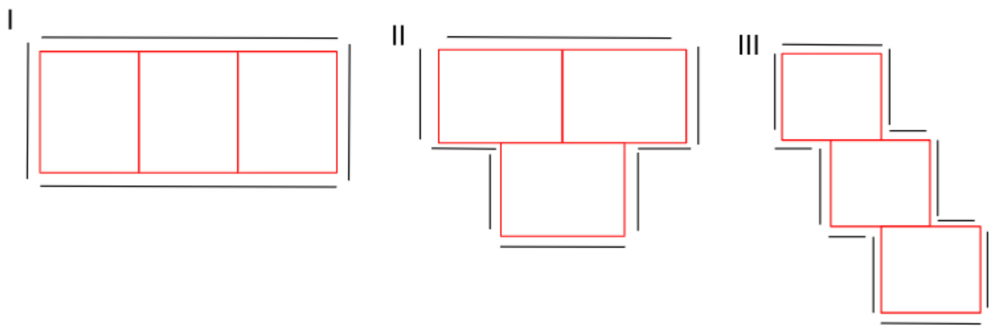
O *milieu* (M) foi formado por possíveis questões Q_k, que derivaram da questão geratriz, e por um conjunto de respostas R_k, como também por possíveis temas que surgirão no decorrer das discussões. Conjecturamos os seguintes temas: o formato das carteiras, instrumentos utilizados para a medição, organização e posição das mesas para a medição e as concepções mobilizadas em cada questão geratriz.

Ao utilizar diferentes instrumentos de medida, o aluno perceberá que a quantificação do comprimento depende da unidade escolhida, isto é, o número que representa a medida varia de acordo com a unidade. Por exemplo, suponhamos que para medir o comprimento da carteira usando tiras de papel e em seguida medir o mesmo comprimento usando uma régua em centímetros. O número que irá expressar a medida do comprimento irá mudar, já que a unidade mudou, mas o comprimento da carteira continua o mesmo, ele não se altera.

Desse modo, o estudante irá conseguir entender a importância de estabelecer uma unidade de medida padrão para as grandezas de mesma espécie. A partir disso, os estudantes poderão conhecer unidades de medida de comprimento não padronizadas, como também converter unidades de medida de comprimento.

Ao organizar e posicionar as carteiras de maneira diferente, os estudantes irão perceber que o contorno será diferente de acordo como eles irão organizá-las. Nesse sentido, será possível perceber que área e perímetro são grandezas de natureza distintas e que podem variar de maneiras diferentes. Dada uma figura, é possível formar outra figura com mesma área e perímetro diferente, com perímetro igual e área diferente. Na Figura a seguir, mostraremos um exemplo da primeira situação:

Figura 8: Exemplo de mesma área e perímetro diferente



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Elaboramos dois mapas *a priori* para mostrar a dialética cronogênese que envolvem as possíveis questões para nortear os alunos na execução das AEP e as possíveis respostas que serão encontradas por eles. No mapa, as setas indicam uma suposta previsão para o surgimento das questões e respostas, uma possível ordem e uma provável relação entre os objetos de conhecimento matemático. Os mapas elaborados serão apresentados a seguir, Figuras 9 e 10.

No nosso estudo, buscamos elaborar dois mapas visando melhor apresentarmos esta dialética cronogênese, os quais envolvem as possíveis questões que auxiliam ao professor nortear os estudantes para execução das AEP e as possíveis respostas que serão encontradas por eles. Em cada mapa, há setas indicando uma suposta previsão para o surgimento das questões e respostas, uma possível ordem e uma provável relação entre os objetos de conhecimento matemático. eles serão apresentados após explicação de cada *análise a priori* das AEP.

4.4.1 Análise *a priori* das AEP 1

A AEP 1 parte da questão geratriz Q_0: Qual é maior: o tamanho do contorno da mesa do seu professor ou o tamanho do contorno de três mesas juntas que são iguais a sua? Constatamos que frações, perímetro, adição, medida, comparação, são os conceitos matemáticos mobilizados pelos alunos durante a resolução desta atividade. Como também, detectamos dez possíveis Q_k que irão auxiliar na resolução desta questão. A seguir, apresentamos uma possível resolução dessa AEP, bem como as concepções das frações e habilidades presentes na BNCC que são mobilizadas.

Possível resolução da AEP 1

Para a **AEP1**, a pergunta Q_0 envolve uma comparação entre duas quantidades: o tamanho do contorno da mesa do professor e o tamanho do contorno de três mesas juntas. Portanto, é possível que os estudantes consigam mobilizar o conceito de razão como uma ferramenta de comparação. Nesse sentido, podem calcular a razão entre o tamanho do contorno da mesa do professor e o tamanho do contorno de três mesas juntas. Se o tamanho do contorno da mesa do professor for maior que o contorno de três mesas juntas, então a razão será maior do que 1. Se o tamanho do contorno de três mesas juntas for maior do que o tamanho do contorno da mesa do professor, então a razão será menor do que 1.

Para determinar se o tamanho do contorno da mesa do professor é maior ou menor do que o tamanho do contorno de três mesas juntas, os estudantes precisarão medir o tamanho do contorno de ambas as opções. Nesse sentido, os estudantes podem seguir os seguintes passos:

1. Medir o comprimento total do contorno da mesa do professor e somá-los.
2. Medir o comprimento total do contorno de uma das mesas e depois multiplicar por 3, para obter o comprimento total das três mesas juntas
3. Comparar os dois comprimentos totais para determinar qual é o maior.

A seguir, apresentamos um quadro elaborado que destaca as concepções das frações e as habilidades da BNCC para o 6º ano do Ensino Fundamental que são mobilizadas pelos estudantes ao resolver Q_0:

Quadro 7: Concepções das frações e habilidades mobilizadas na AEP1

Concepções	Habilidades
Medida: Nessa concepção, a fração é vista como uma medida de quantidade ou tamanho. Dessa forma, podemos medir o tamanho do contorno da mesa do professor e o tamanho do contorno de três mesas juntas e comparar os valores. **Parte-todo**: Podemos imaginar o contorno da mesa do professor como um todo e cada mesa menor como uma parte. Em seguida, podemos comparar quantas partes do contorno das mesas menores são necessárias para atingir o todo do contorno da mesa do professor. Por exemplo, se o contorno da mesa o professor tem o dobro do tamanho do contorno de cada mesa menor, então serão necessárias seis mesas menores para atingir o tamanho do contorno da mesa do professor. Ou seja, o contorno da mesa do professor é maior do que o contorno de três mesas menores juntas. **Razão**: É possível calcular a razão entre o tamanho do contorno da mesa do professor e o tamanho do contorno de três mesas menores juntas. Por exemplo, se o tamanho do contorno da mesa do professor é 20 m e o tamanho do contorno de três mesas menores juntas é de 18, então a razão entre eles é de $\frac{20}{18} = 1{,}11$. Ou seja, o contorno da mesa do professor é maior do que o contorno de três mesas juntas.	**EF06MA07** **EF06MA08** **EF06MA09** **EF06MA10** **EF06MA29**

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

4.4.2 Análise *a priori* das AEP 2

A AEP 2 tem como ponto de partida a seguinte questão geratriz Q_0: Quantas vezes cabe o comprimento do contorno da mesa do seu professor no comprimento do contorno de três mesas juntas iguais a sua? Durante a resolução dessa atividade, identificamos o uso de conceitos matemáticos como frações, perímetro, adição, divisão e medida. Além disso, identificamos dez possíveis questões auxiliares Q_k que podem contribuir para resolver essa questão. A seguir, apresentamos uma possível solução para a AEP, bem como a abordagem das concepções das frações e as habilidades da BNCC possíveis de serem aplicadas.

Possível resolução da AEP 2

Na **AEP2**, é preciso determinar quantas vezes o comprimento do contorno da mesa do professor cabe no comprimento do contorno de três mesas juntas, para isso, o estudante precisa medir o comprimento total do contorno de ambas as opções. Sendo assim, os estudantes podem trilhar os passos a seguir:

1. Medir o comprimento total do contorno da mesa do professor e o comprimento total do contorno de uma das mesas.
2. Dividir o comprimento total da mesa do professor pelo comprimento total de uma das mesas, multiplicado por três para representar as três mesas juntas.

Por exemplo, se o comprimento total do contorno da mesa do professor é de 12 m e o comprimento total do contorno de uma das mesas é de 3 m, o estudante pode encaixar o contorno da mesa do professor três vezes no contorno de três mesas juntas, ou seja

$$\frac{12}{3x3} = \frac{12}{9} = 1{,}33$$

A seguir apresentamos um quadro elaborado que destaca as concepções das frações e as habilidades que são mobilizadas ao resolver Q_0:

Quadro 8: Concepções das frações e habilidades mobilizadas na AEP2

Concepções	Habilidades
Medida: Nessa concepção, a fração é vista como uma medida de quantidade ou tamanho. Dessa forma, podemos medir o tamanho do contorno da mesa do professor e o tamanho do contorno de três mesas juntas e comparar os valores. **Parte-todo**: É possível imaginar o contorno do comprimento das três mesas menores juntas como um todo e o comprimento do contorno da mesa maior como uma parte. Em seguida, conseguimos calcular quantas partes são necessárias para atingir o todo. Por exemplo, se o comprimento da mesa do professor é igual a metade do comprimento das três mesas menores juntas, então o comprimento do da mesa do professor cabe uma vez no comprimento do contorno das três juntas. **Quociente**: Conseguimos calcular o quociente entre o comprimento do contorno da mesa do professor e o comprimento do contorno de três mesas menores juntas. Por exemplo, se o comprimento do contorno da mesa do professor é igual a 6 m e o comprimento de uma mesa menor é igual a 2 metros, então o comprimento do contorno de três mesas menores juntas é igual a 6 m. O quociente entre o comprimento do contorno da mesa do professor e o comprimento do contorno de três mesas menores juntas é 6 ÷6=1. Isso significa, que o comprimento do contorno da mesa do professor cabe uma vez	**EF06MA07** **EF06MA08** **EF06MA09** **EF06MA10** **EF06MA29**

no comprimento do contorno de três mesas menores juntas. **Razão**: é possível calcular a razão entre o comprimento do contorno da mesa do professor e o comprimento do contorno de três mesas menores juntas. Por exemplo, se o comprimento do contorno da mesa do professor são 2 vezes o comprimento do contorno de uma mesa menor e o comprimento do contorno de três mesas menores juntas é igual a 3 vezes o comprimento do contorno de uma mesa menor, então a razão é $\frac{2}{3}$.	

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

4.4.3 Análise *a priori* da AEP 3

A AEP 3 tem como ponto de partida a seguinte questão geratriz Q_0: "Quantas mesas iguais a sua são necessárias para atingir o tamanho da superfície da mesa do seu professor?" Durante a resolução desta atividade, podemos identificar conceitos matemáticos, tais como frações, área, medida e multiplicação. Além disso, identificamos oito possíveis questões auxiliares Q_k que podem contribuir para solucionar essa questão. A seguir, apresentamos uma solução viável para a AEP, mostrando ao leitor como explorar as concepções relacionadas às frações e, por conseguinte, à aplicação das habilidades da BNCC.

Possível resolução da AEP 3

Na AEP3, os estudantes terão que determinar quantas mesas iguais a dele são necessárias para atingir o tamanho da superfície do seu professor. Com essa finalidade, os estudantes precisarão comparar as dimensões das mesas, seguindo passos de modo convencional ou com uso de material manipulável.

Convencional

1. Medir a largura e o comprimento da mesa do seu professor e, em seguida medir a largura e o comprimento da sua mesa.
2. Multiplicar a largura da mesa do professor pela altura para encontrar a área da superfície da mesa dele e, logo depois, fazer o mesmo com a sua mesa.
3. Dividir a área da superfície da mesa do professor pela área da mesa do estudante.

Por exemplo: Se a mesa do professor tiver uma largura de 1,5 m e o comprimento 2, sua área será de $3m^2$. Se a mesa do estudante tiver 1 m de largura e 1,5 de comprimento, sua área total será de 1,5 m^2. Dividindo a área total da mesa do professor pela área total da mesa do estudante, temos que serão necessárias 2 mesas iguais às do estudante para atingir a superfície da mesa do professor.

Sugestão para uso de material manipulável

Serão entregues aos estudantes alguns quadrados de tamanho pequeno, que servirão como unidade de medida.

1. Distribuir os quadrados sobre a superfície do professor e, em seguida, sobre a superfície da sua mesa.
2. Contar quantos quadrados deu em cada superfície.
3. Dividir a quantidade de quadrados distribuídos na mesa do professor pela quantidade de quadrados distribuídos em sua mesa.

Ao seguir essas instruções, os estudantes irão descobrir quantas mesas iguais a dele são necessárias para atingir o tamanho da superfície da mesa do professor. A seguir apresentamos um quadro elaborado que destaca as concepções das frações e as habilidades possíveis de serem mobilizadas pelos estudantes, ao resolverem a Q_0:

Quadro 9: Concepções das frações e habilidades mobilizadas na AEP3

Concepções	Habilidades
Parte-todo: Imaginando que a mesa maior como um todo e cada mesa menor como uma parte e, em seguida, podemos calcular quantas partes são necessárias para atingir o todo. Por exemplo, se a mesa maior tiver o dobro da mesa menor, então serão necessárias duas menores para atingir a superfície da maior. **Razão**: É possível calcular a razão entre o tamanho da mesa maior e o tamanho de cada mesa menor, por exemplo, se a mesa do professor tem 4 vezes o tamanho de cada mesa menor, serão necessárias 14 do número de mesas menores para atingir a superfície da mesa do professor. **Quociente:** Conseguimos calcular o quociente entre o tamanho da superfície da mesa do professor e o tamanho da superfície de cada mesa menor. Por exemplo, se a superfície tem $8m^2$ e cada mesa menor tem $2m^2$, então o quociente é 8÷2=4, ou seja, são necessárias 4 mesas menores para atingir a superfície maior. **Operador:** Podemos usar a fração para expressar a relação entre o tamanho da superfície da mesa do professor e o tamanho da superfície de cada mesa menor. Por exemplo, se a mesa do professor for 6 vezes o tamanho de cada mesa menor, é possível expressar essa relação como 6/1, ou seja, são necessárias 6 mesas menores para atingir o tamanho da maior.	**EF06MA07** **EF06MA08** **EF06MA09** **EF06MA10** **EF06MA24**

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

4.4.4 Análise *a priori* da AEP 4

A AEP 4 parte da seguinte Q_0: "Se dividirmos a superfície da mesa do seu professor em *x* partes iguais, quantas dessas partes serão necessárias para cobrir a metade da mesa?" Durante o processo de resolução dessa questão, são identificados conceitos matemáticos essenciais, como frações, área, medidas, razão e divisão. Além disso, é possível identificar oito questões auxiliares potenciais, representadas por Q_k, que podem ser úteis para solucionar a questão principal. A seguir, apresentamos uma solução viável para essa AEP, juntamente ao modo de como explorar as concepções relacionadas às frações e, por conseguinte, à aplicação das habilidades da BNCC.

Possíveis resoluções da AEP 4

Para resolver essa questão, o estudante precisa entender que, se a superfície da mesa do seu professor for dividida em x partes, cada uma dessas partes terá a mesma área. Portanto, para cobrir a metade da mesa, ele precisa encontrar quantas dessas partes serão necessárias.

Pede-se para cobrir metade da mesa, significa que o estudante precisa de uma quantidade de partes igual a metade do número total de partes **x** que a mesa foi dividida. Portanto, a resposta é:

$$\frac{1}{2} * x\ partes$$

Isso é equivalente a dividir o número total de partes **x** por 2. Portanto, o estudante precisará de $\frac{x}{2}$ partes para cobrir a metade da mesa. Para resolver essa questão, o aluno também poderá recorrer a seguinte resolução:

A pergunta está pedindo quantas partes da superfície da mesa serão necessárias para cobrir a metade da mesa. Em outras palavras, é preciso encontrar quantas partes iguais da mesa serão necessárias para preencher 50% da mesa. Portanto, o estudante pode criar o seguinte pensamento: Se 100% da mesa equivale a $\boldsymbol{x}$ partes, quantas dessas partes equivalem a 50%? Então. é apenas efetuar a multiplicação: $x * 50\% = x * 0{,}5$

A seguir apresentamos um quadro elaborado que destaca as concepções das frações e as habilidades possíveis de serem mobilizadas pelos estudantes ao resolverem a Q_0:

Quadro 10: Concepções das frações e habilidades mobilizadas na AEP4

Concepções	**Habilidades**

Parte-todo: Aqui, precisamos considerar que a mesa do professor é o todo e a parte que precisa ser coberta é a metade da mesa. Então, será preciso calcular quantas partes da mesa correspondem a essa metade. **Operador:** Nesse caso, podemos pensar na fração como metade da mesa dividida em um número de partes igual a x. Dessa forma, pode-se calcular quantas partes da mesa correspondem a cada uma das partes da fração e, depois, determinar quantas dessas partes serão necessárias para cobrir metade da mesa.	**EF06MA07** **EF06MA08** **EF06MA09** **EF06MA10** **EF06MA24**

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

4.4.5 Análise *a priori* da AEP 5

A AEP 5 trata da seguinte questão inicial, Q_0: "Como reduzir o tamanho da mesa do seu professor para que fique do tamanho da sua?" Durante o processo de resolução dessa questão, torna-se possível identificar conceitos matemáticos fundamentais, tais como frações, área, medidas, proporcionalidade, razão e operações básicas. Além disso, é possível identificar oito perguntas auxiliares possíveis, representadas por Q_k, que podem ser úteis para solucionar a questão principal. A seguir, apresentamos uma solução viável para esta AEP, acompanhada das concepções relacionadas as frações e das habilidades definidas pela BNCC que serão mobilizadas pelos estudantes ao resolvê-la.

Possível resolução da AEP 5

Para reduzir a mesa do professor tendo como comparação a mesa do aluno, é preciso fazer uma redução de maneira proporcional e para isso, o estudante pode usar uma escala de redução. A ideia é encontrar um fator de escala que permita que seja reduzida todas as dimensões da mesa maior de maneira proporcional à mesa menor.

Depois de medir as dimensões das mesas, os estudantes podem definir o comprimento e a largura da mesa maior de “C” e “L”, respectivamente, e o da mesa menor “c” e “l”. Em seguida calcular o fator de escala para o comprimento e largura separadamente.

O fator de escala será dado da seguinte maneira:

Fator de escala para o comprimento $C^* = \frac{c}{C}$

Fator de escala para a largura: $L^* = \frac{l}{L}$

Agora, os estudantes terão que aplicar esse fator encontrado a todas as dimensões da mesa maior para reduzi-la proporcionalmente:

Novo comprimento da mesa maior: $C'' = C * C^* = C * \frac{c}{C}$

Nova largura da mesa menor: $L'' = L * L^* = L * \frac{l}{L}$

Dessa maneira, a mesa maior foi reduzida proporcionalmente para o tamanho da mesa menor. A seguir apresentamos um quadro elaborado que destaca as concepções das frações e as habilidades possíveis de serem mobilizadas pelos estudantes ao resolverem a Q_0:

Quadro 11: Concepções das frações e habilidades mobilizadas na AEP5

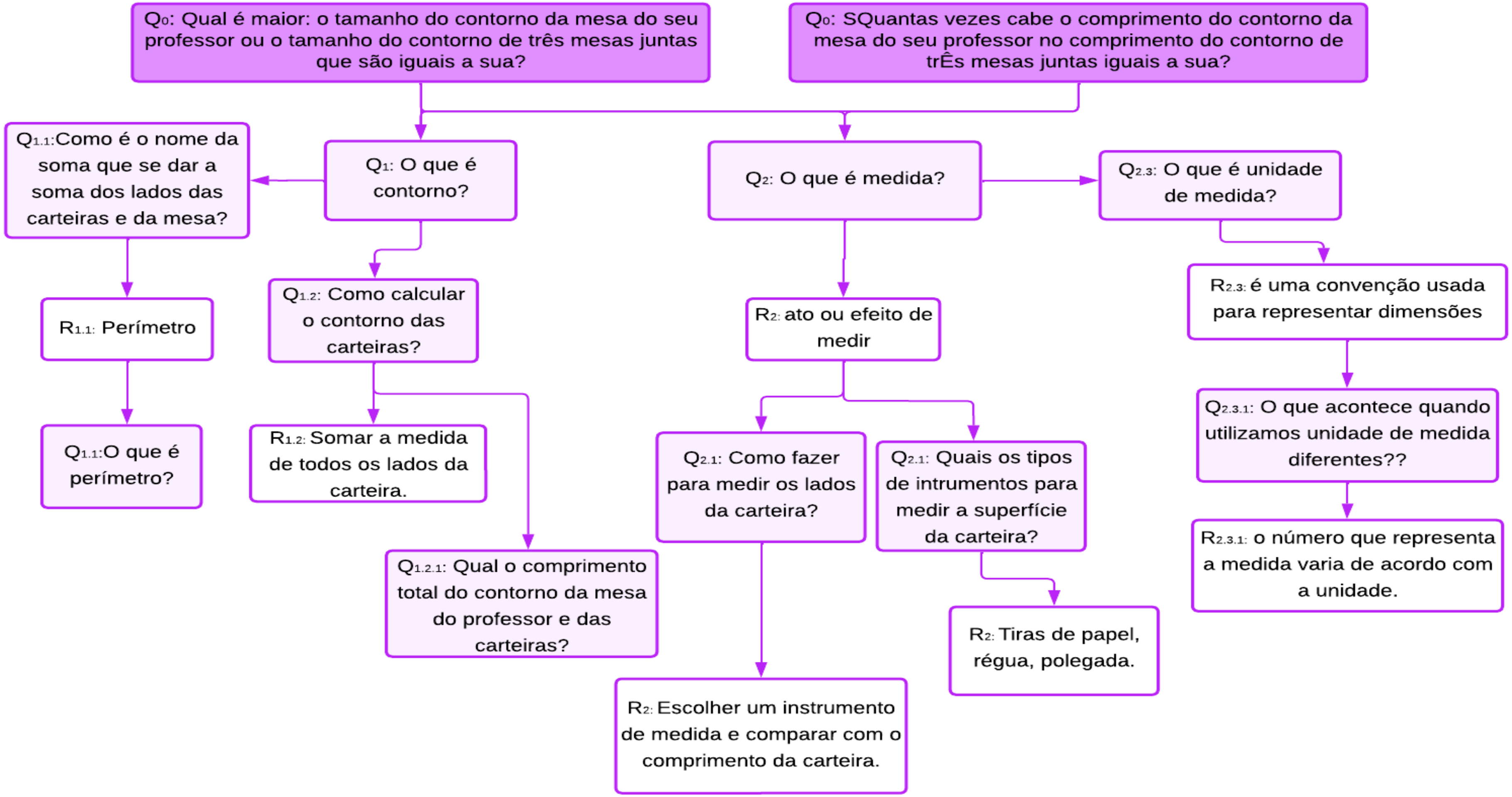
Concepções	**Habilidades**
Parte-todo: Podemos pensar na mesa maior (do professor) como sendo a parte inteira e na mesa menor (do estudante) como sendo uma parte fracionária dessa mesa maior. Para reduzir o comprimento da mesa maior para o tamanho da mesa menor, precisamos encontrar qual fração do comprimento total da mesa maior é igual ao comprimento da mesa menor. **Quociente**: Podemos pensar na fração como sendo o resultado da divisão entre duas quantidades. Aqui, podemos calcular a fração do comprimento da mesa maior em relação ao comprimento da mesa menor. Por exemplo, se o comprimento da mesa maior tem *180cm* de comprimento e o comprimento da menor tem *120cm*, então a fração correspondente seria $\frac{180}{120}$ ou 1,5. **Operador**: Pensando na fração como sendo um operador que age sobre um número, indicando uma parte desse número. Aqui, podemos aplicar a fração correspondente ao comprimento da mesa maior para obter o comprimento da mesa menor. Por exemplo, se a mesa maior tem *180cm* de comprimento e o comprimento da menor tem *120cm* , então podemos multiplicar *180* pela fração $\frac{2}{3}$ para obter o comprimento da mesa menor. **Razão**: Analisando a fração como uma razão entre duas quantidades, podemos calcular a razão entre o comprimento da mesa maior e o comprimento da mesa menor. Por exemplo, considerando que a mesa maior tem comprimento *180cm* e a menor *120cm*, a fração correspondente seria $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$.	**EF06MA07** **EF06MA08** **EF06MA09** **EF06MA10** **EF06MA24** **EF06MA29**

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Em relação à topogênese, dialética individual-coletivo, destacamos as seguintes responsabilidades para os participantes dos grupos: um dos participantes irá escrever tudo que foi criado pelo grupo (respostas previamente estabelecidas e anotações do grupo), como também, novas questões; outro participante irá apontar ao grupo, possíveis temas que possam ajudar na evolução das perguntas, pesquisar nas mídias as possíveis informações para a resolução das questões e apresentar os dados obtidos ao grupo; por fim, terá aquele participante que irá fazer a ponte entre o próprio grupo e a classe, passando todas as informações produzidas. Todas essas responsabilidades serão administradas pelo professor (em nosso estudo, por mim, a pesquisadora quem fez a intervenção) e repassadas aos participantes da pesquisa no começo da experimentação. Quanto à mesogênese, destacamos que os estudantes poderão utilizar-se de várias fontes de pesquisa (internet, caderno de anotações, pesquisadoras, livro didático e os colegas).

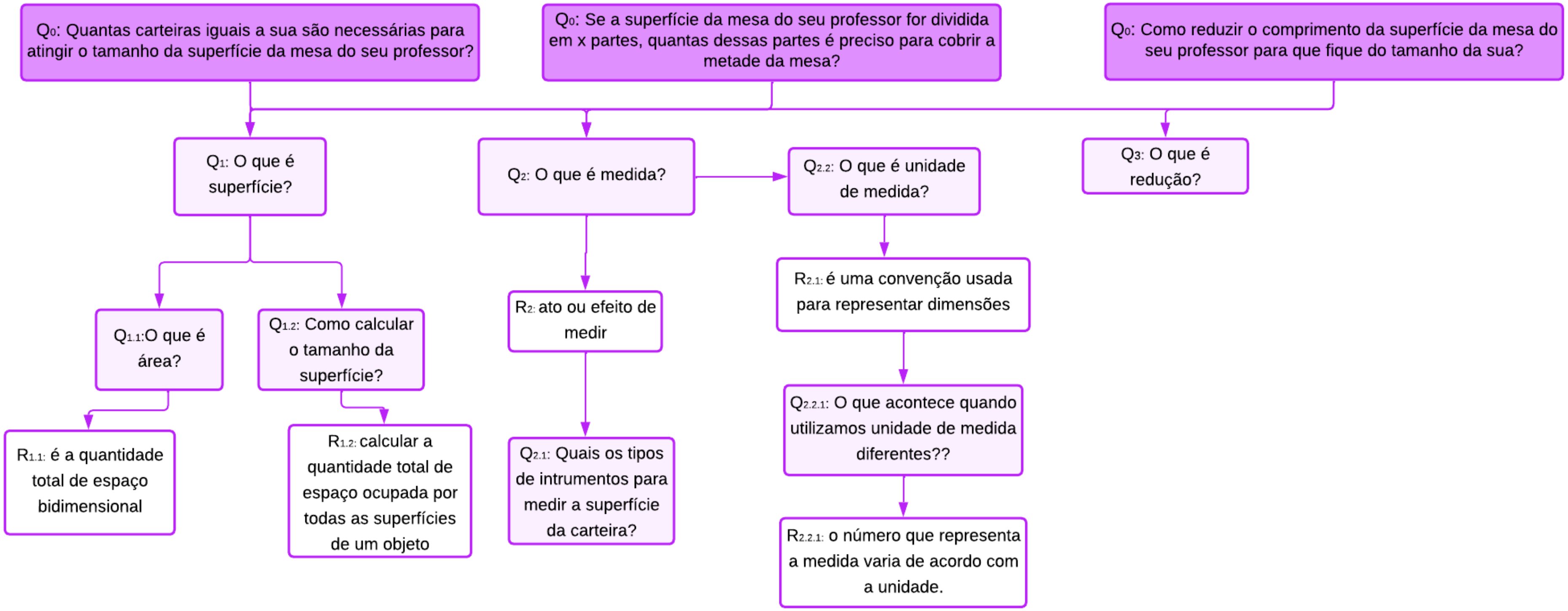
Por fim, a seguir apresentamos o esboço dos mapas elaborados para mostrar essa dialética envolvendo as questões que irão nortear os alunos para a execução das AEP e as possíveis respostas que serão encontradas por eles. No mapa, as setas indicam uma suposta previsão para o surgimento das questões e respostas, uma possível ordem e uma provável relação entre os objetos de conhecimento que serão mobilizados pelos alunos:

Figura 9: Mapa de questão-resposta, a priori, para as AEP 1 e 2



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Figura 10: Mapa de questão-resposta, a priori, para as AEP 3, 4 e 5



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

4.5 AS EXPERIMENTAÇÕES DAS AEP

As sessões ocorreram em uma sala de aula equipada com carteiras, quadro branco, projetor, ar-condicionado, mesa e cadeira para o professor, organizada de maneira tradicional, em que as carteiras são distribuídas de maneira enfileirada. Inicialmente, as atividades estavam planejadas para serem aplicadas a partir do dia 25 de outubro de 2023, e tínhamos até o dia 1 de novembro de 2023 para a finalizar, pois no dia seguinte seria feriado nacional, depois ponto facultativo, e na semana seguinte iniciaria a semana avaliativa na escola com tal cronograma, só contaríamos com a aplicação de três AEP.

Porém, por questões de ordem pedagógica do Colégio, o comunicado aos pais dos estudantes sobre a realização das atividades, não ocorreu conforme acordado. No acordo, os alunos estariam no contraturno do horário das aulas, para isso, os pais precisariam ser comunicados e autorizar. Por outro lado, os dias seguintes estavam reservados para a realização de um projeto para a disciplina de ciências, com isso, a orientação entrou em contato relatando que as atividades da pesquisa não poderiam ser realizadas, como acordado anteriormente.

Diante disso, as atividades tiveram início no dia 30 de outubro de 2023 e foram finalizadas no dia 1 de novembro de 2023, contando com a aplicação de apenas duas AEP, porém, sendo realizadas em quatro encontros. No primeiro encontro, utilizamos 1 hora e 30 minutos; no segundo encontro, 3 horas; no terceiro encontro, 1 hora e 30 minutos; e no quarto encontro, 2 horas. A AEP1 foi realizada nos primeiros e segundos encontros, enquanto a AEP2 foi realizada nos terceiros e quartos encontros.

Nos primeiros, terceiros e quartos encontros, contamos com a participação de 26 estudantes, enquanto no segundo encontro, tivemos apenas 10 participantes, pois esse encontro foi desenvolvido no turno vespertino, turno contrário do qual estudam regularmente. Os demais 16 estudantes não conseguiam comparecer devido alguns problemas particulares. Para a realização das atividades, os estudantes necessitaram de internet e, por isso, utilizaram seus aparelhos celulares para navegar em sites. A seguir, apresentamos um quadro que destaca a quantidade de estudantes por AEP e encontros.

O primeiro, terceiro e quarto encontro foram realizados durante as aulas de matemática, no horário cedido pelo professor titular da turma participante. O segundo encontro foi realizado em horário oposto, uma vez que, inicialmente, tínhamos planejado realizar a aplicação tanto no horário cedido pelo professor de Matemática (responsável pela turma), quanto no horário oposto. No entanto, com a primeira experiência no horário oposto, percebemos que a quantidade de estudantes participantes diminuía consideravelmente. Dessa forma, não conseguiríamos atingir nem 50% da turma.

A organização da sala foi sistematizada a partir da divisão dos estudantes em grupos. Cada grupo foi formado por três a quatro estudantes, constituindo-se em seis grupos com quatro integrantes e um grupo formado por três. Nessa sistemática, foi pedido que eles interagissem, discutissem em seus grupos e realizassem os registros propostos.

4.5.1 Experimentação da AEP1

Com a aplicação da AEP1, tínhamos como objetivo que os estudantes associassem o conceito de perímetro às frações. Para dar início à aplicação da AEP1, utilizamos um vídeo educativo como ponto de partida. O vídeo utilizado foi um episódio da série de animação chamada "*Cyberchase*".

O desenho animado "*Cyberchase*" é uma produção norte-americana que se desenvolve em um ambiente tecnológico e tem um propósito educativo baseado em situações-problema. Nele, três crianças e seu amigo cyberpássaro utilizam a matemática para impedir que Hacker, um ciborgue malvado, domine o universo. No Brasil, a animação era exibida pela TV Cultura até o ano de 2016; atualmente, alguns episódios podem ser encontrados no *YouTube*.

Figura 11:Abertura da série

Fonte: *Cyberchase* (nov. 2023).

O episódio escolhido foi o sexto, intitulado 'Pelos Poderes de Zeus'[10]. Exibimos 8 minutos e 30 segundos desse episódio, no qual Zeus, o Deus grego, dá um enigma às crianças para que elas possam solucionar. A primeira missão consiste em dividir uma coroa de louros em partes iguais para três bruxas da mitologia. Ao perceberem que era difícil fazer essa divisão, pois 'a coroa é muito dura', uma das crianças solicitou uma linha para facilitar o processo, afirmando que 'é mais fácil dobrar uma linha em três partes do que uma coroa de louros'. A partir dessas dobras na linha, seria possível cortá-la e, consequentemente, dividir a coroa de louros. No processo da divisão, eles diziam 'um terço', 'dois terços' e 'três terços'. A seguir, na Figura 12, é possível verificar o que foi descrito.

Figura 12: Divisão da coroa de louros

Fonte: Cyberchase - episódio 06 (nov. 2023).

A partir da exibição da animação, foi possível fazer alguns questionamentos: “Foi possível associar a animação com a matemática?” Os estudantes responderam que “*sim*”[11]. “*Na divisão da coroa de louros, quando a dividiram em três partes iguais*”, “Vocês conseguem associar algum conteúdo matemático com a animação?” Os estudantes responderam que “*sim, com frações, quando eles mencionam um terço, dois terços e três terços*”. Com esses questionamentos, foi possível perceber que os alunos já tinham estudado o objeto matemático em questão.

Após isso, foi proposta como desafio a questão geradora da nossa AEP1. A questão foi exibida por meio de um slide no *PowerPoint*: Q_0: Qual é maior: o tamanho do contorno da mesa do professor ou o tamanho do contorno de três mesas juntas que são iguais à sua? Logo em seguida, foram entregues folhas aos estudantes e pedido que escrevessem como responderiam a essa questão. Inicialmente, eles responderam de maneira individual. Nesse momento, os alunos sentiram um pouco de dificuldade na escrita, pois tinham a ideia de como resolver a questão, mas não

[10] https://www.youtube.com/watch?v=tUpMRl2mNIg
[11] As respostas e relatos dos estudantes serão apresentadas em itálico.

conseguiam passar do mundo das ideias para a escrita. Foi dado um tempo para responderem e entregarem suas respectivas respostas.

Nesse primeiro momento, o propósito consistiu em identificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à animação e à problemática apresentada. Subsequentemente, solicitou-se que eles formassem grupos, compostos por quatro membros cada. Após a organização dos grupos e a acomodação em seus respectivos lugares, a indagação inicial foi novamente apresentada mediante uma folha distribuída a cada equipe. Propusemos um novo tempo (aproximadamente 10 minutos) para que realizassem discussões internas, seguido pela exposição das respostas à turma por parte de cada grupo. Após a entrega dessas respostas, começamos a discutir como cada grupo pensou em responder à questão geratriz e a partir delas foi possível perceber, que os estudantes formularam algumas afirmações a respeito de qual contorno seria o maior, o da mesa do professor ou das três carteiras juntas iguais a deles.

A partir das respostas que apresentaram, percebemos que novas questões se formularam ao tentar responder à questão geratriz (Q_0). Utilizamos as respostas entregues e organizamos no Quadro 12, apresentado a seguir, comparando com o que foi descrito na subseção 4.5.1 "Possível resolução da AEP1". As respostas estão etiquetadas por R_i, com $i = 1, \dots, 6$ sendo i a numeração dada aos grupos. Vale destacar que as questões serão representadas pela letra Q acompanhada da sua respectiva numeração, indicando a ordem que foram aparecendo, seguidas de suas respectivas respostas etiquetadas com a letra R.

Quadro 12: Respostas formuladas *a priori* e respostas apresentadas pelos estudantes

POSSÍVEL RESPOSTA *A PRIORI*	RESPOSTAS DOS ESTUDANTES
1. Medir o comprimento total do contorno da mesa do professor e somá-los. 2. Medir o comprimento total do contorno de uma das mesas e depois multiplicarpor 3, para obter o comprimento total das três mesas juntas. 3. Comparar os dois comprimentos totais para determinar qual é o maior.	R_1: Mesa dos alunos, pois elas não são retas e ficam maiores que a mesa do professor.
	R_2: Com a trena medimos o contorno das mesas e multiplicamos por 3. Medimos com a régua e deu *93cm*, já a mesa do professor deu *1,22m*. Concluindo que a mesa do professor é maior que as três mesas juntas.
	R_3: Primeiro vimos o contorno da nossa mesa e multiplicamos por três e depois vimos o contorno da mesa do professor e comparamos.
	R_4: Só colocarmos três carteiras atrás da mesa do professor e medir.
	R_5: A mesa do professor. Porque a mesa do professor deve ter *1,30* de comprimento, pois a mesa dos alunos tem uma mesinha pequena e se

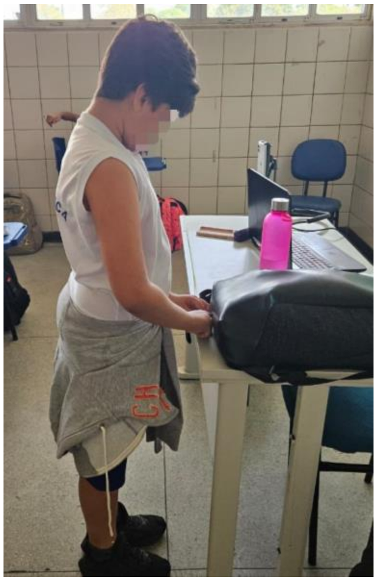
	juntar, eu acho que fica do tamanho da mesa do professor.
	R_6: Juntando três cadeiras no primeiro método não ficou maior e, no segundo método, ficou um pouco maior, mas não mais que a do professor.

Fonte: Elaborado pela autora (nov. 2023).

Com base no confronto dessas respostas, foi posto que eles precisavam comprovar qual das duas estavam corretas, e para isso, o próximo passo seria medir o comprimento de cada contorno. Nas respostas R_2 e R_5, percebe-se que os alunos tentaram medir o comprimento do contorno utilizando um instrumento de medidas, a trena, e chegaram a um resultado. Porém, não se fez um acompanhamento para saber se as medidas estavam corretas, como também, eles usaram a percepção, eles olharam para a mesa do professor e por notar que a mesa é visivelmente maior do que a mesa deles, concluiu que a medida do contorno também seria maior.

Ao analisar as duas respostas, embora não tivéssemos certeza sobre o comprimento final, ficou evidente que os alunos compreendiam o procedimento necessário para chegar à resposta. Esse entendimento também foi observado no grupo responsável pela resposta R_3. Na sequência, a Figura 13 é apresentada, destacando um dos alunos do grupo que elaborou a resposta R_2, realizando a medição na tentativa de responder o que havia sido proposto, sem que tivesse ocorrido uma discussão abrangente sobre as respostas.

Figura 13: Estudante medindo o contorno da mesa do professor



Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Com base na discussão de R_4 e R_6, notou-se que os estudantes pretendiam posicionar as carteiras próximas à do professor, realizando uma comparação direta, sem recorrer a instrumentos de medição para determinar o comprimento do contorno. A Figura 14 ilustra os métodos empregados pelo grupo 6.

Figura 14:Método utilizado, inicialmente, para comparar os tamanhos dos contornos

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Durante a apresentação da explicação do grupo sobre a organização das carteiras e a exposição da resposta R_6, tornou-se evidente que havia uma confusão entre a definição de contorno e a definição de área. Apesar dessa confusão, os alunos não apresentavam uma pergunta para esclarecer essa dúvida. Assim, enquanto pesquisadora fazendo a intervenção, tive que formular a pergunta “Q_1: Quando falamos em contorno e área estamos tratando da mesma grandeza?”.

As soluções ainda não alcançavam uma resolução definitiva, e nem mesmo indagações surgiam. Foi necessário formular dois questionamentos, a saber, "$Q_{1.1}$: Qual é a definição de contorno?" e "$Q_{1.2}$: Como podemos definir área?". Essas indagações foram submetidas à validação e apresentadas no quadro, garantindo que todos pudessem ter acesso ao que estava sendo gerado.

Acreditamos que este problema em não fazer perguntas surge, porque não estão inseridos em um paradigma do questionamento do mundo, em que não estão acostumados a estudar a partir de uma investigação, e sim, no paradigma de visita às obras, no qual a elaboração de questões é responsabilidade do professor, que habitualmente está de forma explícita no contrato didático em qualquer aula desenvolvida nesse paradigma. Como destaca Benito (2019, p. 118), “uma das consequências do paradigma de visita às obras, além da falta de utilidade do conteúdo estudado após o exame, é que nos acostumamos a olhar o saber como algo pronto e acabado, que já foi estudado, nos cabendo apenas apreciar, conhecer e visitar.

Outro aspecto relevante a ser considerado para a resposta R_6, é que os estudantes observaram, mesmo que de maneira equivocada, que as posições das carteiras poderiam influenciar nas medidas a serem obtidas. Isso fica evidente na Figura 14, onde é possível perceber que eles tentavam realizar as medições a partir da abertura dos braços. Ao organizar as cadeiras no primeiro método, expressão utilizada por eles, notou-se que a abertura realizada com os braços era maior em comparação com o segundo método. Contudo, os próprios estudantes descartaram essa observação, e a partir dela, passaram a explorar o tópico "organização e posição das carteiras para a medição", conforme destacado em nossa análise *a priori*.

Ainda no primeiro encontro, os estudantes foram em busca das questões $Q_1, Q_{1.1}$ e $Q_{1.2}$. Para tal busca, os estudantes foram orientados a acessarem sites de busca na internet e que durante esse processo era necessário que eles anotassem onde encontram essas respostas. Depois da busca, eles precisavam expor para toda a sala o que tinha encontrado, a partir dessa exposição discutíamos as respostas encontradas e iriamos fazendo a validação delas. A partir da questão $Q_{1.1}$, surgiu uma nova pergunta $Q_{1.1.1}$: O que é perímetro?

Alguns dos grupos já conseguiam fazer essa associação entre os conceitos – contorno e perímetro, enquanto outros grupos encontravam dificuldades nessa associação. Diante disso, a sugestão para esclarecer essa dúvida consistia em realizar uma pesquisa utilizando seus celulares. Entretanto, os alunos manifestavam relutância em realizar a busca, optando por adotar respostas prontas com base nas opiniões dos colegas. Foi necessário orientá-los a buscar informações na internet, mesmo que alguns estudantes já demonstrassem conhecimento para responder à questão. Neste ponto, mais uma vez, acredita-se que esse desafio esteja relacionado à integração desses estudantes no paradigma de visita às obras, onde eles têm a expectativa de receber respostas prontas, sem o interesse em validar por si mesmos. De acordo com Benito (2019, p. 118 e 119), ao estarmos inserido nesse paradigma "não estamos acostumados a investigar uma obra, a elaborar questões que nos levem a respostas incertas, desconhecidas, que temos que validar para então seguirmos perguntando, buscando respostas e validando até encontrar a resposta final".

As questões e respostas que surgiram nesse primeiro encontro estão destacadas no quadro a seguir. A validação destas respostas se deu no segundo encontro a partir das respostas escritas pelos estudantes. As questões Q_1 e $Q_{1.2}$ não estavam previstas na nossa análise *a priori*. No entanto, foram questões importantes para o andamento da investigação.

Quadro 13: Questionamentos surgidos durante o primeiro encontro

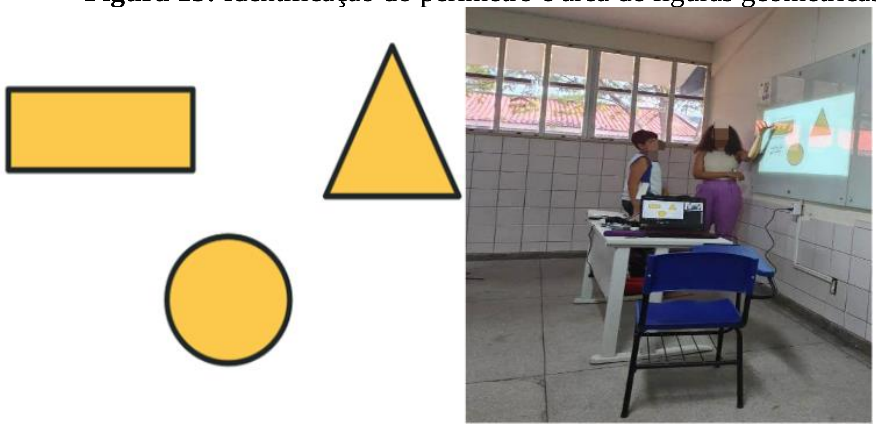
Q_1: Quando falamos em contorno e área estamos tratando da mesma grandeza? $Q_{1.1}$: O que é contorno? $R_{1.1}$: A linha que limita exteriormente um corpo. $Q_{1.1.1}$: O que é perímetro? $R_{1.1.1}$: É a medida do contorno de uma figura geométrica plana. $Q_{1.2}$: O que é área? $R_{1.2}$: É a medida da superfície de uma figura plana que tem duas dimensões (largura e altura). R_1: Não, contorno está relacionado com a linha que contorna uma figura e área com a medida da superfície.

Fonte: Elaborado pela autora (nov. 2023)

Após o primeiro encontro, percebemos a necessidade de realizar uma análise e reflexão sobre os eventos ocorridos, a fim de direcionar a investigação no segundo encontro. Foi observado que os estudantes demonstraram uma falta de “afinidade” em fazer questionamentos e, igualmente, em buscar validar as respostas encontradas, o que pode representar restrições ao progresso das Atividades de Ensino e Pesquisa (AEP). Dedicamos um momento à organização das respostas, considerado crucial para compreender o que foi realizado no encontro anterior e para apresentar aos estudantes o progresso alcançado. Nessa fase, foi revisada a análise *a priori* para avaliar o andamento das questões e respostas.

No 2º encontro, reforçamos a questão geratriz da AEP1 e que estávamos em busca da resposta para esse questionamento, como também, as respostas dadas por eles, no encontro anterior, foram apresentadas. Com o intuito de reforçar a diferença entre os conceitos (contorno, perímetro e área), foram expostas três figuras geométricas planas, sendo solicitado para que os estudantes identificassem esses elementos a partir das figuras (apresentadas a seguir), ou seja, estariam inicialmente, identificando o contorno e perímetro, ao atribuir a cor preto e a área a cor amarelo. Vale destacar que para essa tarefa, os alunos manipularam os objetos ostensivos para identificar o que seria perímetro e área, pois a partir das respostas encontradas essas grandezas estão relacionadas à medida do contorno e de superfície, respectivamente. Trata-se do que Chevallard pontua de manipulação dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos. Em outras palavras, ao manusearem objetos, fazendo medições, como neste caso, os alunos passam a compreender melhor os conceitos matemáticos ali envolvidos.

Figura 15: Identificação do perímetro e área de figuras geométricas



Fonte: arquivo da pesquisa (2023).

Em seguida, foi perguntado sobre o que ainda precisávamos para responder à questão geratriz. Os estudantes observaram que ainda era necessário medir o contorno das mesas. A partir disso, surgiu mais uma questão Q_2: Como vamos medir? Essa questão precisou ser reformulada, pois na busca em sites eram encontradas respostas muito vastas por ser uma questão com poucas informações, para Q_2^*: Como medir o contorno de uma mesa? A nova questão precisou ser reformulada mais uma vez, pois ao pesquisar na internet sobre ela, eram apresentadas dois modelos, circular e quadrada, nesse sentido a questão formulada é Q_2^{**}: Como medir o contorno de uma mesa quadrada? A partir dessa questão surgiu outro questionamento, $Q_{2.1}^{**}$: O que vamos utilizar para medir as mesas? No quadro, a seguir destacamos as respostas encontradas para esses questionamentos que também estavam presentes em nossa análise *a priori*.

Quadro 14: Questionamentos elaborados durante o segundo encontro

Q_2: Como vamos medir? Q_2^*: Como medir o contorno de uma mesa? Q_2^{**}: Como medir o contorno de uma mesa quadrada? R_2^{**}: Para encontrar a medida do contorno de uma mesa basta somar as medidas dos lados. $Q_{2.1}^{**}$: O que vamos utilizar para medir as mesas? $R_{2.1}^{**}$: Régua, fita métrica, palmo, trena.

Fonte: Elaborado pela autora (nov. 2023)

Posteriormente, os alunos se preparavam para iniciar as medições. Nesse momento, surgiu a sugestão de evitar o uso dos instrumentos tradicionais mencionados em $Q_{2.1}^{**}$ e optar por tiras de papel. As tiras foram distribuídas, deixado um tempo para que os estudantes se familiarizassem com o material. No entanto, logo perceberam que não tinham conhecimento sobre como utilizar as tiras para efetuar as medições. Diante dessa dificuldade, surgiu a pergunta: “Como vamos medir com isso?” Vimos a necessidade para interferir reformulando com eles esse questionamento, resultando na Q_3, que será apresentada a seguir.

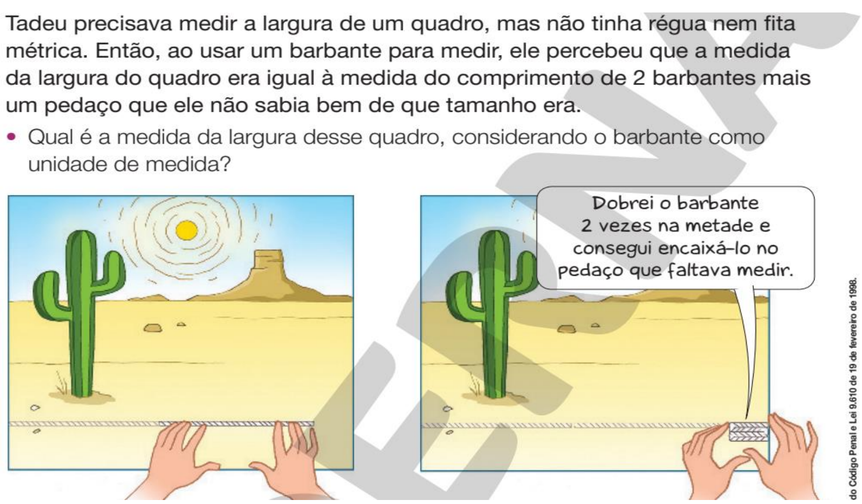
Quadro 15: Questionamento elaborado durante as medições

Q_3: Como medir utilizando tiras de papel? R_3: Resposta não encontrada inicialmente.

Fonte: Elaborado pela autora (nov. 2023).

Acreditamos que os estudantes apresentaram essa dificuldade durante a execução das medições devido à sua familiaridade anterior apenas com instrumentos convencionais, nos quais a técnica de contagem de centímetros era essencial. Nesse contexto, identificamos a necessidade de intervir para esclarecer essa dúvida, uma situação prevista no planejamento da aplicação. Para isso, foi utilizada a seguinte situação:

Figura 16:Situação da necessidade da concepção parte-todo

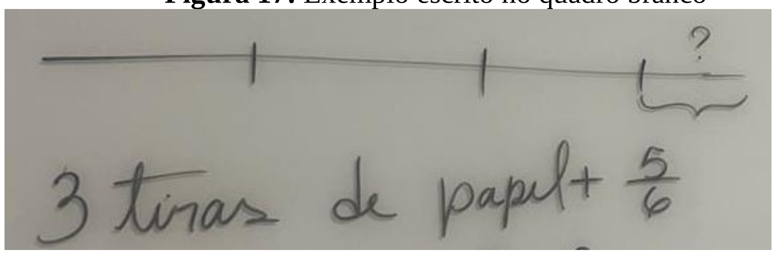

Tadeu precisava medir a largura de um quadro, mas não tinha régua nem fita métrica. Então, ao usar um barbante para medir, ele percebeu que a medida da largura do quadro era igual à medida do comprimento de 2 barbantes mais um pedaço que ele não sabia bem de que tamanho era.

- Qual é a medida da largura desse quadro, considerando o barbante como unidade de medida?

Fonte: Gay (2021, p. 164).

A partir dessa figura, foi discutido que para solucionar o questionamento abordado é preciso verificar quantas vezes o barbante cabe no objeto a ser medido, nesse caso – o quadro, e então encontrar o número que expressa o resultado da medição. Notou-se que, ao final, foi preciso dividir o barbante em duas partes iguais, utilizando apenas uma delas, estabelecendo assim uma relação entre as concepções de medida e a de parte-todo. Diante disso, levantamos a questão: “como representar numericamente esse pedaço que sobrou?”. Os estudantes ainda não haviam compreendido completamente a ideia, nos levando a destacar um exemplo no quadro branco (lousa) e recorrer a uma tira de papel para auxiliar na compreensão do procedimento.

Figura 17: Exemplo escrito no quadro branco

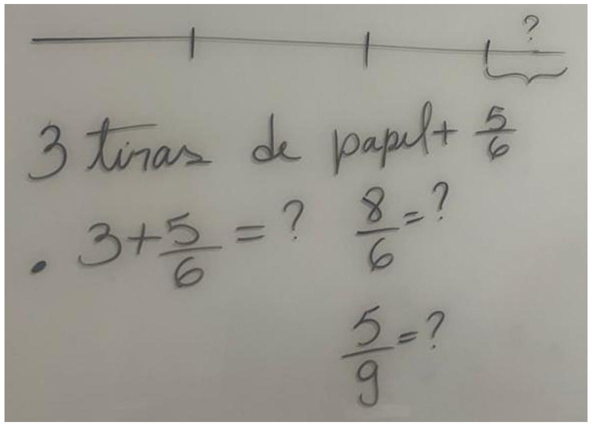


Fonte: Arquivo da pesquisa (nov. 2023).

Ao analisarmos a Figura 17, observa-se a representação de uma linha traçada no quadro branco, seguida pela medição utilizando uma tira de papel. Como resultado, obteve-se três tiras de papel, além de uma quantidade específica, cujo valor não era inicialmente conhecido. Seguindo a mesma abordagem apresentada na Figura 16, demonstramos aos alunos como realizar a divisão dobrando o papel em seis partes iguais. Ao efetuar essa dobra, ao medir o espaço restante, percebeu-se que cinco dessas subdivisões ocupavam o espaço previamente considerado como sobra, totalizando seis divisões.

Novamente questionamos: “Como representar numericamente esse pedaço que sobrou?” No entanto, houve um complemento na pergunta, solicitando que relembrassem as ações realizadas pela criança no vídeo exibido durante o encontro inicial. Com base nisso, eles conseguiram identificar a fração $\frac{5}{6}$. Dessa forma, a medida foi representada como $3+\frac{5}{6}$, e para obterem o resultado, era necessário responder a essa adição.

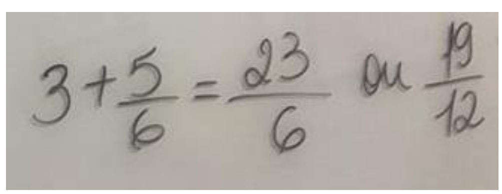
Figura 18: Respostas, inicialmente, encontradas pelos estudantes



Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

As respostas encontradas e destacadas na Figura 37 indicam que as concepções dos estudantes acerca da adição de um número inteiro a uma fração estavam equivocadas. Nota-se, na primeira resposta $\frac{8}{6}$, que os alunos somaram os numeradores e mantiveram o denominador, considerando 3 como $\frac{3}{1}$. Já na segunda resposta $3+\frac{5}{6}=\frac{5}{3+6}=\frac{5}{9}$, observa-se uma abordagem incorreta na manipulação dos termos, levando a resultados equivocados. Ao questionar a certeza dessas respostas, sugerimos que buscassem o resultado correto dessa soma, encontrando novamente em duas respostas.

Figura 19:Respostas encontradas após a pesquisa em sites



Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Com base nas situações abordadas, foi possível emergir o objeto matemático, fração, o qual está relacionado às ideias de medida e de parte-todo. O objeto matemático surgiu da necessidade de dividir a unidade escolhida para determinar o comprimento da mesa. A partir desse contexto, um novo questionamento foi levantado, designado como “Q_4: Como vamos somar?”. Reformulamos esse questionamento para "Q_4^*: Como somar frações?", uma indagação que não estava inicialmente contemplada em nossa análise *a priori*. Na sequência, apresentamos a resposta elaborada pelos estudantes para esse questionamento.

Quadro 16: Questionamento sobre somas de frações

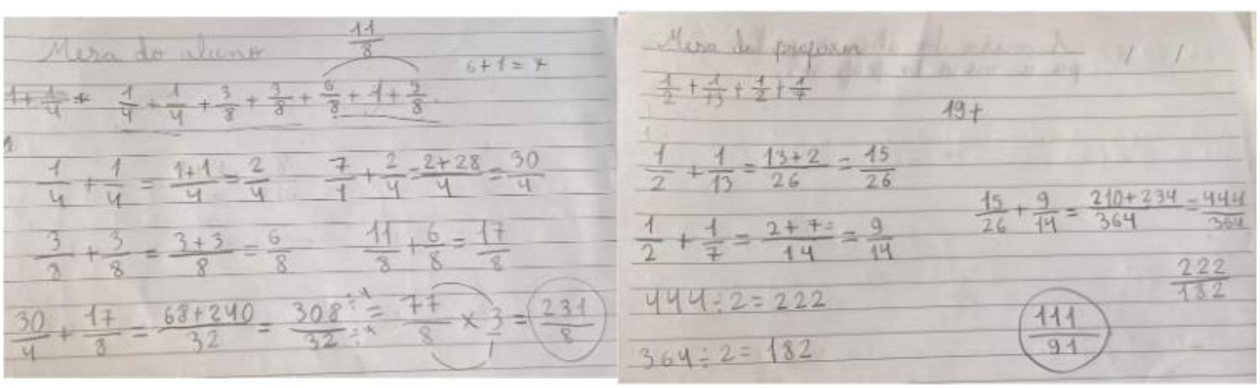
Q_4^*: Como somar frações? R_4^*: Para somar frações é necessário identificar se os denominadores são iguais ou diferentes. Se forem iguais, basta repetir o denominador e somar os numeradores. Contudo, se os denominadores são diferentes, antes de somar devemos transformar as frações em frações equivalentes de mesmo denominador.

Fonte: Elaborado pela autora (nov. 2023).

Nesse momento, um dos alunos recordou-se de que já tinham estudado sobre esse objeto matemático e decidiu consultar suas anotações no caderno para revisar em como realizar esse procedimento, destacando: "*quando não tem um número embaixo a gente fingi que tem o número um, não é mesmo*?". Novamente, desempenhamos o papel de intervenção como meio, enquanto pesquisadora, validando a resposta fornecida pelo estudante. Ao fim das discussões, eles afirmaram que a resposta seria $\frac{23}{6}$ a partir do procedimento encontrado $\frac{3}{1}+\frac{5}{6}=\frac{(6*3)+(5*1)}{6*1}=\frac{18+5}{6}$.

Após os esclarecimentos, os estudantes fizeram as medições das carteiras e da mesa do professor, figura a seguir.

Figura 20: Medidas encontradas para a mesa do professor e das carteiras



Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Finalizada a tarefa: medir o contorno da mesa do professor e o contorno das carteiras, passaram para outra tarefa: apresentar as medidas encontradas à turma. Os estudantes perceberam que as respostas encontradas por cada grupo eram diferentes umas das outras. Inicialmente cada grupo apontou que as respostas dos outros que estavam erradas e não a do próprio grupo. Solicitamos que eles procurassem o motivo disso ter acontecido. Nesse momento, os estudantes não se mostraram tão interessados para descobrirem a razão e apenas um grupo tentou encontrar o que havia acontecido.

O grupo estava com dificuldades para elaborar uma pergunta que fosse útil para conduzir sua pesquisa. Diante dessa dificuldade, intervimos fazendo uma pergunta a todos os grupos: “Qual instrumento utilizado por vocês na medição?”. Os participantes responderam indicando que haviam utilizado tiras como instrumento. No entanto, inicialmente, os estudantes não perceberam que as tiras utilizadas por cada grupo eram diferentes entre si. Essa falta de percepção só foi superada quando orientamos para realizar uma comparação entre os instrumentos.

No entanto, a possibilidade de investigar essa circunstância foi descartada, e a decisão de não prosseguir em busca ocorreu devido à dispersão dos alunos e o desejo de encerrar o encontro. O horário de realização já extrapolava três horas-aula, abrangendo 3h de duração. Como esse segundo encontro foi realizado no turno vespertino, tínhamos como objetivo realizar, no mínimo duas AEP, considerando o fato de termos 04 horas-aula disponíveis para efetuarmos nossa coleta de dados (seriam dois horários de aulas, como estavam acostumados a participarem com os respectivos professores, nesse horário de contra turno). Por sua vez, o fato de contarmos com um total de apenas 10 alunos, não interferia no alcance dos objetivos da pesquisa, visto que os participantes estavam interessados e bastante participativos. Todavia, as dificuldades que demonstraram, para minimizá-las e chegarem às resoluções, não demos conta do tempo passando. O fato de não estarem habituados a esse tipo de abordagem, sob o paradigma de questões, a dispersão passou a ficar evidente, sendo necessário fazer o encerramento do encontro.

Contudo, torna-se relevante ressaltar que a análise dessa situação teria importância, pois ao examinar os dados e a variação associada, seria possível observar que a escolha de diferentes instrumentos de medição para um mesmo objeto influencia na medida do seu comprimento. No entanto, a ausência de discussão sobre esse aspecto não teve impacto na formulação da resposta final.

Assim, efetuadas as medições, a próxima etapa foi a de comparar os resultados encontrados. Para isso, os alunos apresentaram dificuldades, pois os números obtidos tinham a forma de fração, então surgiu um novo questionamento Q_5: Como comparar frações? A seguir, apresentamos no Quadro 17, a resposta encontrada pelos estudantes.

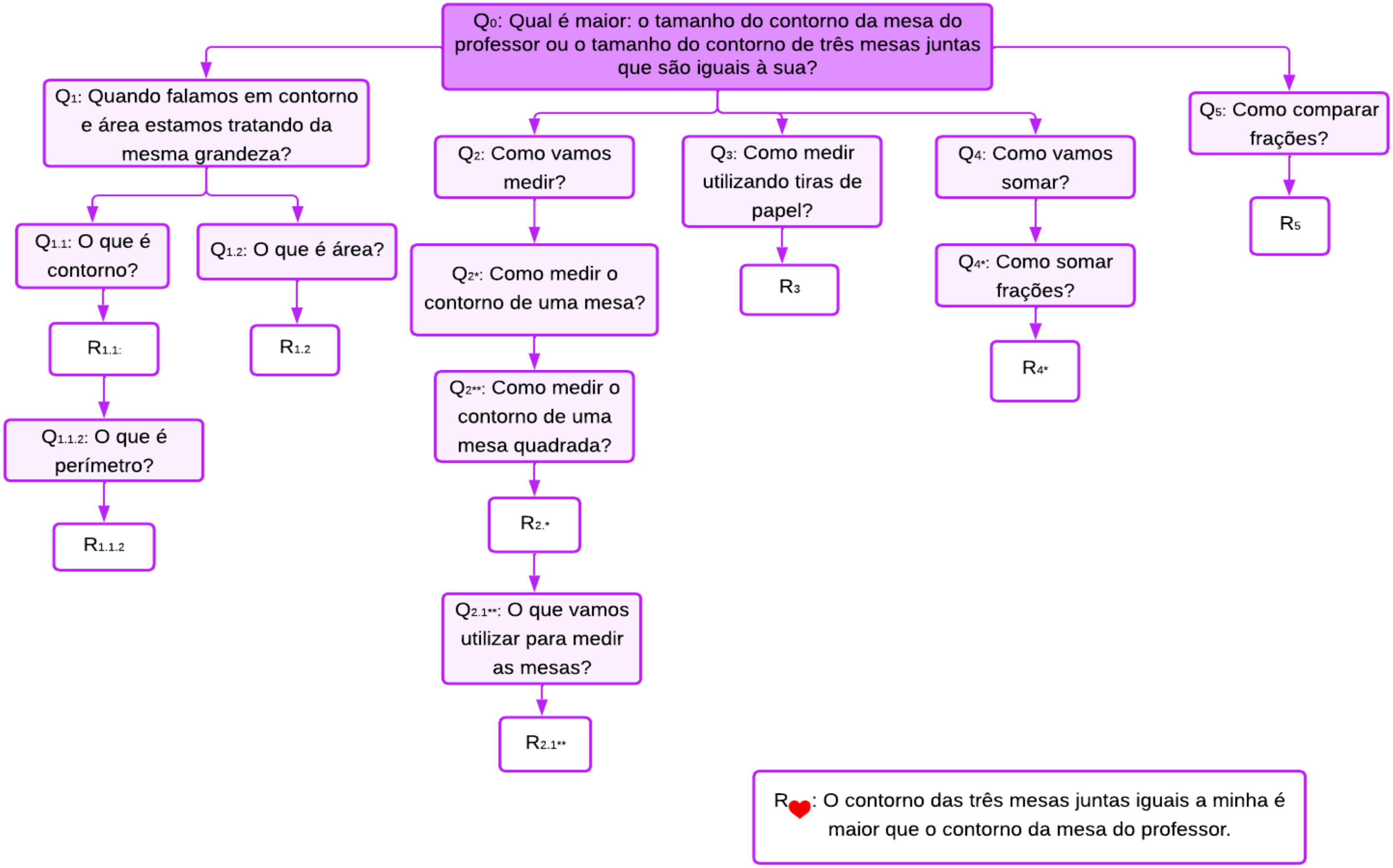
Quadro 17: Resposta encontradas pelos estudantes para a nova questão

Q_5: Como comparar frações? R_5: Uma maneira de fazer comparações entre frações é multiplicar o denominador de uma fração pelo numerador da outra, comparando os resultados obtidos.

Fonte: Elaborado pela autora (nov. 2023).

Com base nas informações em R_5, os estudantes realizaram a comparação da seguinte maneira: $\frac{231}{8}$ e $\frac{111}{91} \rightarrow 91 * 231 = 21021$ e $111 * 8 = 888$, com os resultados encontrados, bastava comparar dois números inteiros, dessa forma $21.021 > 888$. Com isso, foi possível concluir que a resposta $R_\heartsuit$: O contorno das três mesas juntas iguais a minha é maior que o contorno da mesa do professor. A seguir, apresentamos como o mapa de questões e respostas ficou após a experimentação da AEP1.

Figura 21: Mapa de questões, experimentação, para a AEP1



Fonte: Produzido pela autora (2024).

4.5.2 A experimentação da AEP2

Com a implementação da AEP2, buscávamos estabelecer a conexão entre o conceito de medida de área e fração. Para iniciar a execução dessa AEP, sugerimos aos estudantes uma atividade adicional (ver anexo), cujo propósito era calcular a medida de área a partir da composição de figuras planas. Embora as figuras no anexo apresentassem fórmulas para determinar a área de maneira prática, nossa intenção era que os alunos conseguissem realizar esse cálculo por meio da composição de outras figuras. Essa abordagem permitiria que os estudantes começassem a perceber indícios do conceito de medida de área associado à fração. Além disso, essa proposta inicial serviria como uma preparação para o que seria abordado na próxima AEP.

No início dessa atividade, os estudantes receberam a instrução de se organizar novamente, mantendo os grupos da primeira etapa. Entregamos a eles um conjunto de materiais, incluindo peças de MDF e duas formas geométricas – um quadrado e um triângulo na tonalidade amarela. A intenção era que, durante o primeiro contato com essas figuras, os alunos realizassem manipulações a fim de familiarizarem-se com o material.

Figura 22: Material utilizado na atividade de composição de figuras geométricas

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Após realizar a manipulação inicial, começamos a explorar alguns questionamentos apresentados em slides. Esses questionamentos foram elaborados com o objetivo de permitir que os estudantes manipulassem o material fornecido, evidenciando a relação entre dois triângulos e a formação de um quadrado. Além disso, buscamos destacar a ideia de que um triângulo representa a metade do quadrado, enquanto dois triângulos representam o todo/inteiro do quadrado.

Paralelamente, buscamos estabelecer uma conexão entre a representação figural e a representação numérica nesse contexto.

Quadro 18: Questionamentos realizados para a manipulação do material em MDF

1. Quantos triângulos cabem em cima do quadrado? 2. Que parte do quadrado representa um triângulo menor? 3. Que parte do quadrado representa dois triângulos? 4. Como poderíamos fazer essa representação em forma numérica?

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

No questionamento 4 pedimos para que um dos estudantes fizessem essa representação no quadro branco (Figura 23). A partir desse momento, foi possível perceber que os alunos conseguiam fazer a representação numérica $\frac{1}{2}$ relacionada ao termo “metade”.

Figura 23: Estudante representando numericamente o termo “metade”

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Posteriormente, distribuímos aos grupos folhas contendo a atividade em anexo, a qual apresenta novas formas geométricas planas. No decorrer dessa atividade, os estudantes foram orientados a manipular o material em MDF, estabelecendo conexões semelhantes às propostas no Quadro 19. Com o intuito de evitar confusões com o material em MDF, as novas formas foram etiquetadas como "a", "b", "c", "d", "e" e "f" (as figuras expostas na atividade proposta), considerando a presença de quadrados e triângulos na atividade.

Quadro 19: Questionamentos para a atividade em anexo

1. Quantos triângulos cabem em cima da figura **b**? E quantos quadrados?
2. Quantos triângulos cabem na figura **a** e quadrados?
3. Quantas vezes cabe a figura **b** na figura **a**?
4. Que parte da figura **a** representa a figura **b?**
5. Quantos triângulos e quadrados (em combinação) cabem na figura **c**?
6. Quantas vezes cabe a figura **c** na figura **b**?
7. Que parte da figura **b** representa a figura **c**?
8. Quantos triângulos e quadrados (em combinação) cabem na figura **d**?
9. Quantos triângulos e quadrados (em combinação) cabem na figura **e**?
10. Quantos triângulos e quadrados (em combinação) cabem na figura **f**?
11. Quantas vezes cabe a figura **c** na figura **d?**
12. Que parte da figura **d** representa **2c**?

Fonte: Arquivo da pesquisa (2024).

A partir desses novos questionamentos, os estudantes tinham que perceber que se encaixam:

1. 8 triângulos na figura *b* e consequentemente 2 quadrados.
2. 6 triângulos na figura *a* e consequentemente 4 quadrados.
3. 4 triângulos na figura *c*. E 2 triângulos e 1 quadrado em combinação.
4. 12 triângulos na figura *d*. E, consequentemente, 3 quadrados.
5. 3 triângulos na figura *e*.
6. 6 triângulos na figura *f* e, consequentemente, 3 quadrados.

Como também, associassem:

1. Se cabem 2 vezes a figura *b* na figura *a*, então a figura *b* representa a metade ou $\frac{1}{2}$ da figura *a*.
2. Se cabem 2 vezes a figura *c* na figura *b*, então a figura *c* representa a metade ou $\frac{1}{2}$ da figura *b* e a figura *c* representa um quarto ou $\frac{1}{4}$ da figura *a*.
3. Se cabem 3 vezes a figura *c* na figura *d*, então 2 vezes a figura *c* representa dois terços ou $\frac{2}{3}$ da figura *d*.

Após a conclusão da tarefa anterior, os estudantes foram orientados a realizar a AEP2. Introduzimos a questão inicial por meio de uma apresentação em slides, explicando que, para resolver essa atividade, assim como, na AEP1, tinham a liberdade de consultar qualquer mídia e livros didáticos disponíveis. A questão inicial apresentada aos alunos foi a seguinte, denominada Q_0: Quantas medidas de superfícies de carteiras iguais a sua são necessárias para atingir o tamanho da superfície da mesa do seu professor? Em seguida, os alunos pensaram em estratégias para solucionar esse novo desafio, debatendo entre os membros de seus grupos, e posteriormente compartilharam essas discussões.

Após a introdução da Q_0 para a AEP2, surgiu o primeiro questionamento decorrente, identificado como "Q_1: O que é superfície?" Nesse ponto, indagamos se algum dos estudantes possuía uma resposta para essa pergunta. Embora tenham sido apresentadas algumas especulações, não conseguimos validar a resposta por meio da discussão em sala de aula. Diante disso, orientamos novamente os alunos a realizar uma pesquisa para responder à Q_1. A seguir, apresentamos tanto a pergunta Q_1 quanto a resposta encontrada, a qual foi debatida e validada pelos alunos em uma nova interação.

Quadro 20: Primeiro questionamento após o contato com a Q_0, acompanhado de sua resposta

Q_1: O que é superfície? R_1: O exterior, a parte externa e visível dos corpos.

Fonte: arquivo da pesquisa (2023).

Dessa forma, solicitamos aos estudantes que apontassem o que seria a medida da superfície de suas carteiras e a medida da superfície da mesa do professor. A partir desse diálogo, uma nova dúvida surgiu: Se superfície e medida de área compartilham o mesmo significado, isto é, se representam a mesma grandeza em um objeto. Neste momento, não foi necessário reiterar a necessidade de pesquisar sobre essa dúvida; acreditamos que os alunos já estavam se habituando à abordagem de formular perguntas por conta própria e buscar respostas quando surgiam dúvidas. A questão subsequente foi elaborada e a resposta já validada.

Quadro 21: Questionamento elaborado no terceiro encontro

$Q_{1.1}$: Área e superfície são diferentes? $R_{1.1}$: Conhecemos como área a medida da superfície.

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

A partir destes questionamentos, os estudantes já entendiam sobre o que deveria ser feito no primeiro passo. Era necessário determinar a medida de área das superfícies das carteiras, ou seja, a medida de área. Concluímos a terceira sessão com esse questionamento e resposta já validada, delineando também o próximo passo a ser tomado.

No quarto e último encontro, iniciamos revisitando a questão inicial, Q_0, a questão anterior, $Q_{1.1}$, a resposta que eles encontraram, e discutimos as ações necessárias dali em diante. Ao retomar esses pontos, os estudantes desenvolveram mais uma questão.

Quadro 22:Questionamento elaborado no quarto encontro

$Q_{1.2}$: Como calcular o tamanho da superfície? $R_{1.2}$: Através do produto entre as medidas do comprimento e da largura. Resultado da multiplicação entre eles.

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Neste momento, alguns estudantes mencionaram a ausência de uma régua para realizar as medições. Diante disso, questionamos: Q_2: Existe outros tipos de instrumento para medição que não seja a régua sem utilizar a contagem em centímetros? Os alunos indicaram a existência do palmo e do polegar. Contudo, um dos participantes do segundo encontro mencionou tiras de papel. Ele foi solicitado a explicar para a turma como seria realizada essa medição.

A partir das informações fornecidas pelo estudante, apresentamos à turma o novo conjunto de materiais para que utilizassem nas medições (ver anexo). Nesse contexto, surgiu um novo questionamento, denominado “$Q_{2.2}$: Como medir utilizando esse material?” Os estudantes que participaram do encontro anterior compartilharam com os membros dos grupos suas estratégias para realizar essa tarefa utilizando quadrados recortados em folhas. Esse processo foi explicado de forma que toda a turma pudesse compreender, e validamos a abordagem com base na exposição inicial do aluno.

Na nossa análise *a priori*, tínhamos considerado $R_{1.2}$ como o método potencial para determinar a medida da superfície, seguindo uma abordagem convencional que se baseia apenas na fórmula. Contudo, conforme sugerido antecipadamente, foi recomendado a eles que recorressem ao material distribuído e que, para calcular a medida da superfície, associassem o processo à atividade introdutória realizada para esta AEP. As tarefas consistiam em dispor o material sobre a mesa e contar quantos quadrados se encaixavam em cada superfície.

Nessa distribuição, surgiu novamente a exigência de dividir o material em partes iguais e fazer associação entre a parte figural e a parte numérica. Em outras palavras, por meio das dobras, os estudantes eram desafiados a expressar numericamente aquela subdivisão que refletia a totalidade, empregando o conceito de relação parte-todo, conforme ilustrado na Figura 24.

Figura 24: Estudante realizando a dobradura do material

Fonte: arquivo da pesquisa (2023).

Durante as medições, os alunos fizeram como sugerido inicialmente apenas para medição das superfícies de suas carteiras. No entanto, ao medirem a superfície da mesa do professor, optaram por utilizar as informações disponíveis na resposta $R_{1.2}$. Eles justificaram essa escolha, alegando que a mesa era muito grande, exigindo muitas anotações, e que a abordagem mais simples seria adotar as medidas encontradas na resposta, focando apenas nas medidas da largura e do comprimento. Além disso, durante esse momento, um dos três grupos ativos apresentou um novo questionamento.

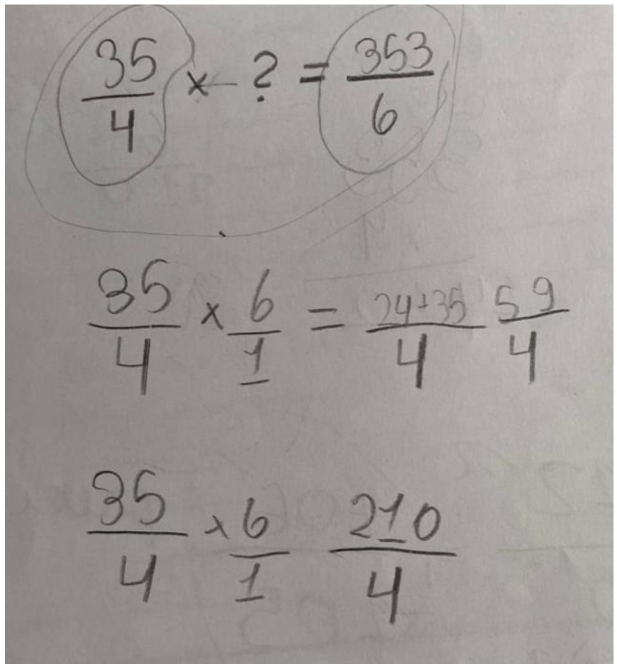
Quadro 23: Questionamento sobre soma de frações

Q_3: Como somar frações? R_3: Quando são duas frações e o denominador são iguais você repete o denominador e soma o numerador. Quando o denominador é diferente você faz o MMC.

Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Com base nas medidas das superfícies identificadas, um dos grupos demonstrou maior dedicação na busca pela solução, especulando sobre o método para alcançar a resposta final $R_{\heartsuit}$. A proposta deles envolvia a abordagem de tentativa e erro, pois reconheciam a necessidade de multiplicar a área determinada da carteira do aluno por um valor desconhecido. Esse valor representaria a quantidade de carteiras do aluno, resultando na medida de área da mesa do professor.

Figura 25: Resposta do estudante por tentativa e erro



Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Na primeira tentativa, os participantes não conseguiram encontrar o valor desejado, nos levando a orientá-los sobre como poderiam alcançar o resultado com base em sua abordagem inicial. Durante a discussão do método adotado por esse grupo, outro grupo revelou que estava realizando a divisão das medidas identificadas. A partir daí, surgiu um novo questionamento.

Quadro 24**:** Questionamento sobre divisão de frações

Q_4: Como dividir frações? R_4: É o mesmo que multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda.

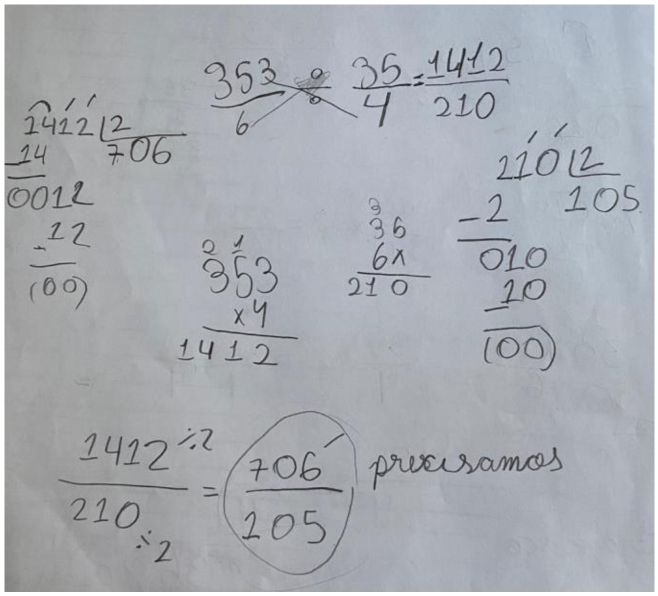
Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

Com relação a operação de divisão, Oliveira (2015) destaca que os alunos podem apresentar dificuldades em mobilizar os conhecimentos suficientes para resolver uma divisão entre duas frações e motivo está relacionado:

> [...] a falta de aprendizagem da equivalência de números fracionários que poderia vir para garantir, a divisão dos denominadores e com isso a percepção de que a divisão dos numeradores seria o resultado da divisão (Oliveira, 2015, p. 113).

Com base na pesquisa os estudantes obtiveram a resolução a seguir, Figura 26:

Figura 26: Resposta encontrada ao realizar a divisão de duas frações



Fonte: Arquivo da pesquisa (2023).

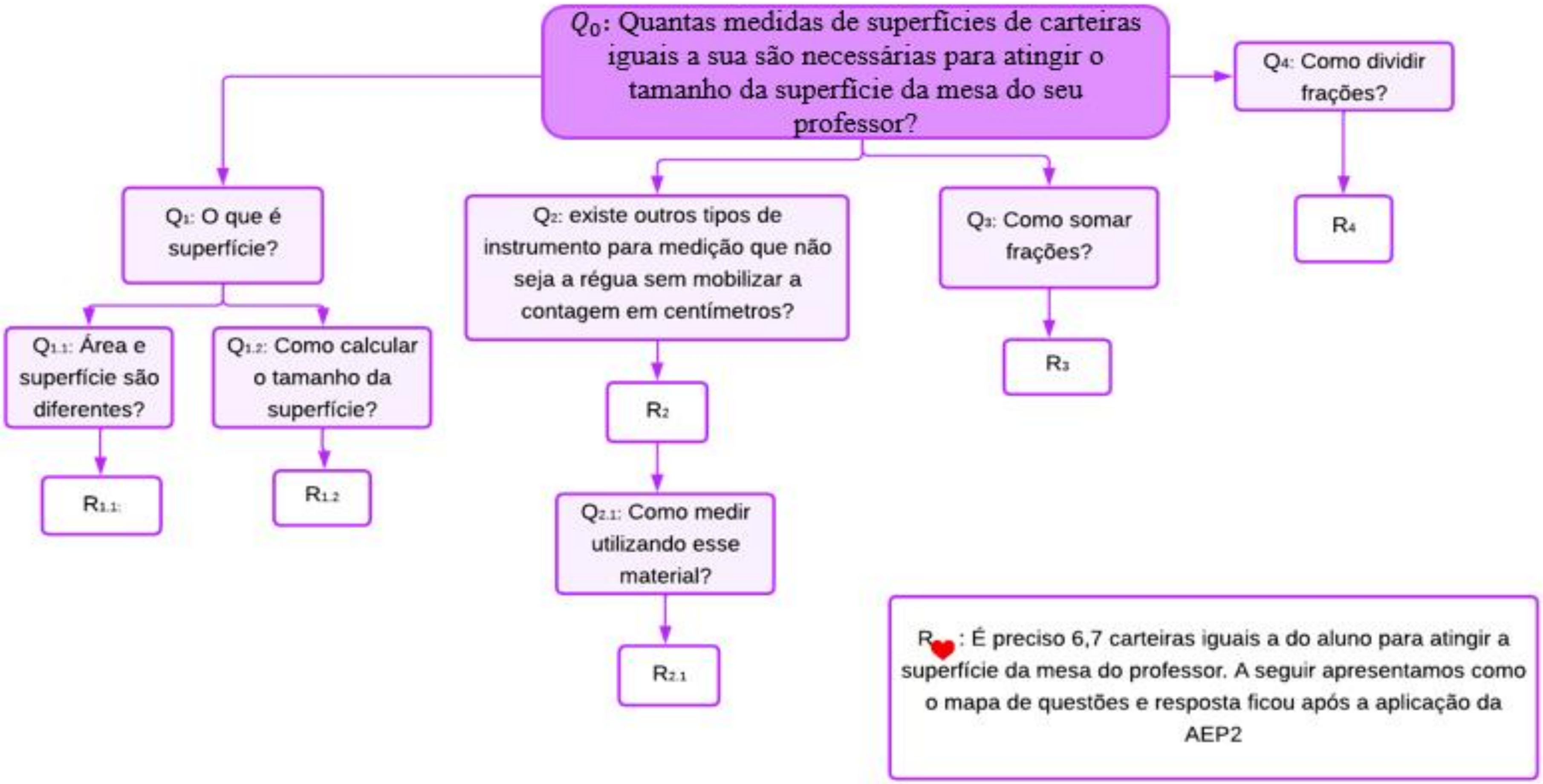
Para a resposta final, os alunos concluíram que o resultado encontrado seria aquele após a multiplicação. Porém, foi apresentada mais uma vez a questão inicial da AEP2. Q_0: Quantas medidas de superfícies de carteiras iguais a sua são necessárias para atingir o tamanho da superfície da mesa do seu professor? Então eles reformularam a resposta por meio da divisão para chegar em uma resposta em forma de um número inteiro, ao realizarem essa divisão $\frac{706}{105} \cong 6{,}7$. Concluindo que $R_{\heartsuit}$: É preciso 6,7 carteiras iguais a do aluno para atingir a superfície da mesa do professor.

De acordo com Silva (2005):

> As tarefas que solicitam a mobilização da concepção de quociente para números fracionários estão, geralmente, associadas a distribuições de grandezas. [...] A operação de divisão consiste na técnica que, geralmente, cumpre essas tarefas, fazendo com que o ato de distribuir ou dividir, a em b partes iguais, associe ao fracionário a/b a operação a ÷ b. Em contextos discretos, a técnica é a divisão de naturais, não cabe a representação fracionária como resposta, mas a associação da concepção de operador. (Silva, 2005, p. 121)

A seguir apresentamos como o mapa de questões e respostas ficou após a aplicação da AEP2.

Figura 27: Mapa de questões, experimentação, para a AEP2



Fonte: Produzido pela autora (2024).

4.6 ANÁLISE *A POSTERIORI* DAS AEP

A partir do confronto da análise *a priori* com a análise *a posteriori* foi possível identificar como ocorreu a evolução das novas questões e respostas derivadas da questão geratriz, como também, a evolução do conhecimento introduzido por meio desses questionamentos, contribuindo com a dialética cronogênese. A seguir, apresentamos os Quadros 25 e 26 que explicitam as questões previstas *a priori* e as que já apresentamos durante a experimentação.

Quadro 25: Questões elaboradas *a priori* e durante a experimentação da AEP1

Q_0: Qual é maior: o tamanho do contorno da mesa do seu professor ou o tamanho do contorno de três mesas juntas que são iguais a sua?	
Questões *a priori*	**Questões durante a experimentação**
Q_1: O que você entende por contorno? $Q_{1.1}$: Como calcular o contorno das carteiras? $Q_{1.2}$: Ao encontrar o comprimento total do contorno de uma mesa ou de uma carteira, qual nome se dá a essa soma? $Q_{1.1.1}$: Qual o comprimento total do contorno da mesa do professor? $Q_{1.2.1}$: O que é perímetro? Q_2: Qual o significado de medida? $Q_{2.1}$: Como medir os lados da sua carteira? $Q_{2.2}$: Quais instrumentos de medição? $Q_{2.3}$: O que é unidade de medida? $Q_{2.3.1}$: O que acontece quando utilizamos unidades de medidas diferentes?	Q_1: Quando falamos em contorno e área estamos tratando da mesma grandeza? $Q_{1.1}$: O que é contorno? $Q_{1.2}$: O que é área? $Q_{1.2.1}$: O que é perímetro? Q_2: Como vamos medir? Q_{2*}: Como medir o contorno de uma mesa? Q_{2**}: Como medir o contorno de uma mesa quadrada? $Q_{2.1}$: O que vamos utilizar para medir as mesas? Q_3: Como medir utilizando tiras de papel? Q_4: Como vamos somar? $Q_{4.1}$: Como somar frações? Q_5: Como comparar frações?

Fonte: Acervo da pesquisa (2023).

Quadro 26: Questões elaboradas *a priori* e durante a experimentação da AEP2

Q_0: Quantas mesas iguais a sua são necessárias para atingir o tamanho da superfície da mesa do seu professor?	
Questões *a priori*	**Questões durante a experimentação**
Q_1: O que é superfície? $Q_{1.1}$: O que é área? $Q_{1.2}$: Como encontrar o tamanho de uma superfície? Q_2: Qual o significado de medida? $Q_{2.1}$: Quais os possíveis instrumentos podem ser utilizados para medir a superfície da carteira? $Q_{2.2}$: O que é unidade de medida?	Q_1: O que é superfície? $Q_{1.1}$: Área e superfície são diferentes? $Q_{1.2}$: Como calcular o tamanho da superfície? Q_2: Existe outros tipos de instrumento para medição que não seja a régua e sem utilizar a contagem em centímetros? $Q_{2.1}$: Como medir utilizando tiras de papel? Q_3: Como somar frações? Q_4: Como dividir frações?

$Q_{2.2.1}$: O que acontece quando utilizamos unidades de medidas diferentes?	

Fonte: Acervo da pesquisa (2023).

No decorrer da experimentação das AEP, surgiram questões que não estavam previstas em nossa análise *a priori*, especificamente, as questões relacionadas ao desenvolvimento do conhecimento matemático. Na AEP1: Q_3: Como medir utilizando tiras de papel? Q_4: Como vamos somar? $Q_{4.1}$: Como somar frações? e Q_5: Como comparar frações? Na AEP2: $Q_{2.1}$: Como medir utilizando tiras de papel? Q_3: Como somar frações? Q_4: Como dividir frações?

Assim como não surgiram questões que foram previstas *a priori*: Q_2: Qual o significado de medida? $Q_{2.3}$: O que é unidade de medida? $Q_{2.3.1}$: O que acontece quando utilizamos unidades de medidas diferentes? (questões previstas nas AEP 1 e 2 com numeração diferente). Essas questões não interromperam o desenvolvimento da dialética cronogênese, o surgimento de novas questões, acreditamos que isso aconteceu para a Q_2, pois os alunos já tinham uma noção do que fazer ao lerem a questão inicial. Para as questões $Q_{2.3}$ e $Q_{2.3.1}$, os alunos não mostraram interesse em investigar o motivo dos resultados dos grupos darem valores diferentes. Talvez, por decorrência de terem passado muito tempo em uma mesma atividade. A questão do tempo didático é um fator relevante a ser observado pelo professor, neste caso, a pesquisadora que aplicou a AEP, enquanto atividade de intervenção para coleta de dados. Segundo Benito (2019) o tempo didático é uma das restrições evidentes durante a aplicação de um dispositivo do paradigma do questionamento do mundo dentro do paradigma de visita às obras:

> [...] trata de como administrar o tempo quando usamos o dispositivo do PEP como estratégia de ensino em alguma escola que exija que os conteúdos sejam ministrados dentro de períodos pré-determinados pela coordenação. Sabemos que esta é, de fato, uma das restrições para a implementação do PEP e, consequentemente, para o desenvolvimento do paradigma de questionamento do mundo no ensino brasileiro (quiçá mundial), porém acreditamos que as instituições devem também passar por uma mudança na maneira de planejar suas atividades[...]. (Benito, 2019, p. 201).

No que se trata da dialética topogênese, para a dialética relacionada às responsabilidades atribuídas ao professor e ao aluno, destacamos a importância do diário de campo elaborado. Pois, a partir desse diário, foi possível obter uma perspectiva mais ampla do processo que ia acontecendo durante o desenvolvimento das AEP e, assim conseguir modificar o planejamento anterior para adequações necessárias visando a aprendizagem dos alunos participantes, ao menos, eles se sentirem mobilizados a realizarem as tarefas.

Seria importante que os alunos também conseguissem elaborar esse diário, mesmo que tenhamos tentado em nossa aplicação, os alunos não têm o costume em fazer anotações por espontaneidade, ou seja, sem que o professor vá a lousa para escrever e eles replicarem, pois durante a experimentação algumas discussões se fizeram importantes, mas eles não tomavam nota do que estava ocorrendo. Como também, ficou notório a má elaboração de alguns questionamentos, a dificuldade em elaborar questionamentos mesmo apresentando dúvidas e em expor o que havia realizado.

Acreditamos que isso aconteceu devido ao contrato didático presente no paradigma tradicional, cujo topos do professor é nomeado pelo estudante como o responsável por fornecer o que vai ser estudado, elaborar questionamentos e “estar na linha de frente” de uma aula, definindo os respectivos *topos*, como sendo aquele que executa o que é proposto pelo professor. Segundo Chevallard (ano), APRESENTAR A IDEIA DO TEÓRICO SOBRE TOPOS. Porém, a partir do envolvimento com um dispositivo inserido no paradigma do questionamento do mundo esse cenário sofre mudanças e essas responsabilidades passam a ser dos estudantes, transformando em uma restrição para a implementação das AEP.

Além disso, percebemos que a interação entre os estudantes dentro de cada grupo não se dava de maneira satisfatória. Eles não conseguiam seguir com as “funções” que foram definidas por eles no início, em que um integrante iria expor o que foi encontrado, outro fazia as anotações, outro faria a pesquisa e iria expor ao grupo para discutirem. No desenvolver, foi observado que duas pessoas no grupo faziam a pesquisa da mesma pergunta, muitas vezes apenas um realiza a pesquisa, anotava e fazia a exposição para a sala. Notamos que eles não estão adaptados a dividirem responsabilidades e realizarem trabalhos em conjunto.

Na busca pela $R_\heartsuit$, evidencia-se a dialética das mídias e dos meios (topogênese) levando em consideração os questionamentos que fazem sentido para essa busca, que habitualmente no paradigma de visita às obras é formada por informações fornecidas no livro didático e pela ação do professor. Com a aplicação das AEP, foi visto que a fonte primária de informação foram *sites* disponibilizados na internet, já previsto em nossa análise *a priori*, como também, em alguns casos, a pesquisadora foi consultada, por estar fazendo a aplicação das AEP. No momento das buscas, os estudantes não se mostraram preocupados em quais *sites* encontravam as respostas e nem fazer anotações de seus respectivos nomes. Eles consideravam que a informação encontrada já era verdadeira e pronto. Ao sempre ser questionados onde haviam encontrado aquela informação, eles relatavam que encontravam na internet, sem especificar em qual *site*. Novamente retomamos ao cenário de que tais estudantes apresentaram, constatando a tradição do paradigma de visita às obras em não ser necessário uma investigação, tão pouco ter o cuidado em saber se a informação estiver correta ou não, porque o professor estar ali para validá-la e lhe passar esse veredito.

4.7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES E ECOLOGIA

Ao considerarmos as AEP como um todo, verificamos durante a sua implementação que a sequência de questões derivadas das Q_0 levou os alunos a estudarem o objeto matemático principal a partir de uma estrutura organizacional diferente da abordada no livro didático que eles utilizam em sala de aula, como também, o conteúdo apareceu a partir das necessidades de responder à questão geradora e suas derivadas, não de forma sem sentido, como é apresentado no paradigma atual.

Percebemos que outras estratégias de ensino, como por exemplo, a utilização de vídeos e outras atividades para a introdução das AEP ajudam a conseguir inserir os alunos no envolvimento das questões geradoras. Como também, por meio das AEP foi possível modificar o topos dos alunos a partir da alteração do contrato didático.

No entanto, não foi possível transferir de maneira satisfatória a responsabilidade para os alunos em elaborar e validar questões, pela tradição existente no contexto escolar, em não familiarizar os alunos na elaboração de questões, assumindo diferente postura sob o paradigma do questionamento do mundo, como também em criticar as respostas encontradas, pesquisar informações para as novas perguntas, escrever e defender as respostas parciais formuladas em grupo. Segundo Benito (2019)

> Acreditamos que este problema surge porque no paradigma monumentalista estas são responsabilidades do professor geralmente implícitas no contrato didático de qualquer aula inserida nesse paradigma. Por outro lado, [...] estas tarefas são atribuídas aos estudantes que, em alguns momentos, não as cumprem de maneira satisfatória (Benito, 2019, p. 144).

Como também, uma restrição bastante importante é a de ter em mente que eles estavam ali com o foco em gerar uma resposta final para a questão inicial apresentada, visto que eles não estavam acostumados a irem em busca de uma resposta para uma questão por um período maior. Vimos também, que em alguns momentos dos encontros, os estudantes perdiam o foco e descartavam algumas informações que seriam importantes para a discussão de algum tema, por exemplo, ao descartar que a posição das carteiras poderia influenciar na medição final.

Outra dificuldade que enfrentamos na experimentação da AEP está relacionada à frequência dos alunos participantes em todas as aplicações. Nos primeiro, terceiro e quarto encontros, a sala estava com sua totalidade de 26 estudantes. O segundo encontro, por ter sido realizado no contra turno do horário escolar que estava cursando, ocorreu com um número mínimo (10 alunos), além de ter ocorrido em tempo maior (04 horários de aula), apontou mais dispersão dos alunos. Outro aspecto foi a coleta de dados concomitantemente aplicar as AEP, sem contar com auxílio de uma mídia ou de outro colega – acreditar que aplicar as AEP, atendendo aos alunos, no topos de professora e fazer anotações, ficar atenta ao que estava ocorrendo no grupos – no topos de pesquisadora – resultou em algumas dificuldades de lembrar posteriormente de momentos relevantes, que durante a ocorrência, não foi possível registrá-los.

Além disso, consideramos que devido ao contrato didático atual, os estudantes não estavam habituados a participar de uma aula em que era preciso realizar uma dinâmica de discussões em grupo, o que gerou bastante barulho durante toda implementação. Nem mesmo com a presença do professor regente da sala o cenário foi alterado.

A partir do que foi vivenciado pela pesquisadora ao aplicar as AEP, destaca-se a dificuldade da pesquisadora em se desvincular do tradicional papel de professor, no qual ele é central e tem todas as respostas. Na abordagem das AEP, a dinâmica é diferente, pois promove a participação ativa dos alunos, incentivando questionamentos para os quais nem sempre há respostas prontas. A resistência inicial da pesquisadora em lidar com situações em que não possui respostas pode gerar desconforto. No entanto, esse desconforto é superado quando se compreende que a proposta é conduzir uma pesquisa. Nesse contexto, tanto a pesquisadora, quanto os participantes da pesquisa estão aprendendo juntos, buscando fundamentar suas respostas com base nas obras e nos indícios encontrados durante a pesquisa.

Como também, destacamos a dificuldade de alinhar uma questão geratriz (Q_0) de forma clara e direta e que esteja alinhada com o MER, garantido que Q_0 maximize a exploração das organizações matemáticas contidas no MER

As considerações aqui apresentadas foram expostas no Quadro 27, a seguir:

Quadro 27: Restrições no desenvolvimento das AEP

• Resistência dos estudantes na distribuição das responsabilidades, entre os participantes do grupo; • Falta de critério dos estudantes para selecionar pesquisas confiáveis encontradas em sites; • O tempo didático para a realização; • Resistência dos alunos em verbalizar e escrever com detalhes os processos de resolução; • Dificuldade dos estudantes de elaborar e propor novas perguntas; • Dificuldade em analisar as questões levantadas; • Dificuldade na tomada de decisão para a resolução das novas questões; • Dificuldade dos estudantes em elaborar um diário de classe destacando a evolução das questões e respostas;

- A dificuldade da pesquisadora em assumir um *topos* diferente do habitual, professor como papel de destaque;
- Dificuldade da pesquisadora em considerar uma aula onde surgem questões para as quais, inicialmente, desconhece as respostas;
- Dificuldade da pesquisadora em planejar uma questão geratriz para o desenvolvimento das AEP.

Fonte: Acervo da pesquisa (2023).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, tivemos como objetivo analisar condições e restrições que incidem sobre o uso das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) envolvendo frações associadas às medidas de perímetro e de área em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. A proposta desta investigação foi responder a seguinte questão de pesquisa: **Quais condições e restrições que incidem sobre o uso das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) envolvendo frações associadas às medidas de perímetro e de área em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental que contemplem as razões de ser: medida, distribuição e comparação?**

Para o desenho das AEP, realizamos um estudo bibliográfico visando entender como o objeto matemático frações se encontravam no âmbito de pesquisas acadêmicas. Para tanto, tomamos como parâmetro o estudo de três dimensões – epistemológica, econômica e ecológica – contemplando uma análise em dois livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, os quais foram aprovados pelo PNLD. Como também, nos fundamentamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard (1999).

No levantamento bibliográfico, analisamos trabalhos acadêmicos, entre teses, dissertações e artigos científicos, com o intuito de compreender o contexto atual das pesquisas sobre o objeto matemático – frações. Consideramos que tal levantamento nos possibilitou visualizar a realidade das investigações sobre o estudo deste objeto e suas implicações na educação básica, de preferência no 6º ano do Ensino Fundamental. Nesses estudos, afirma-se que as abordagens desse objeto em sala de aula se concentram na ideia de concepção parte-todo, utilizando a técnica de dupla contagem das partes. O que resulta na ausência de aprofundamento na compreensão por parte dos estudantes.

Por meio da dimensão epistemológica, foi possível explorar como o conhecimento sobre frações se desenvolveu ao longo do tempo e como as necessidades humanas influenciaram esse desenvolvimento. As frações surgiram como uma consequência das necessidades humanas de medir, distribuir e comparar grandezas. Diferentes sociedades enfrentaram essas necessidades de maneira variada, o que levou ao desenvolvimento de tarefas específicas, como medição, comparação e distribuição. Para realizar essas tarefas, técnicas foram criadas, permitindo que as pessoas medissem, distribuíssem e comparassem efetivamente. Essas técnicas envolveram a divisão de unidades de medida ou objetos para obter resultados precisos. No entanto, para que essas técnicas pudessem ser utilizadas e transmitidas a outras pessoas, era necessário criar registros para os resultados obtidos e estabelecer regras para possíveis cálculos. Isso, por sua vez, levou ao desenvolvimento de representações fracionárias e valores desconhecidos.

A necessidade de ensinar essas técnicas a outros indivíduos possibilitou o desenvolvimento de concepções que justificassem essas técnicas. Isso significa que as pessoas começaram a criar explicações e teorias para entender porque essas técnicas funcionavam da maneira como funcionavam. Como resultado de todas essas constatações, foi proposto o desenvolvimento de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) composto por três modelos secundários. Esses modelos secundários têm o objetivo de ajudar os alunos a construírem conhecimento sobre medidas, distribuição e comparação, baseados em concepções de medida, quociente, razão, parte-todo e operador. Em essência, o objetivo é subsidiar o desenvolvimento de habilidades para que os alunos possam compreender e saber articular frações, de maneira significativa, a outros conceitos matemáticos e a situações do mundo real.

A dimensão econômica relata sobre a forma como frações são ensinadas nas escolas de Ensino Fundamental. O estudo foi realizado baseando-se em documentos curriculares que regem a educação brasileira, os PCN e a BNCC, considerando não apenas aspectos puramente educacionais, mas também fatores econômicos e institucionais que influenciam o ensino e aprendizagem deste objeto matemático.

Ao nos referirmos às abordagens e recurso para ensinar frações, foi possível constatar que ainda persistem métodos e técnicas ultrapassados que predominaram séculos passados, esquecendo de haver adequação às demandas atuais para os alunos do século XXI. Prioriza-se, ainda, o ensino a partir da noção parte-todo, concentrando a explicação do conceito de fração como partes de um todo, ao citar exemplos de uma pizza em pedaços, para prosseguir com memorização de regras e práticas de cálculos operatórios.

Ao ter como foco o bloco saber-fazer, com o excesso do ensino de regras operatórias, há uma concentração para a memorização de regras e procedimentos, em vez de se promover, no ensino, uma compreensão aprofundada sobre as razões de ser de uma fração. Trata-se de uma abordagem que se evidencia ausência de uma abordagem teórica e conceitual mais consistente quanto a frações, por meio situações que contribuam para os alunos mobilizarem conhecimentos de medição, distribuição e comparação.

Talvez uma alternativa para tornar a aprendizagem mais eficaz, uma vez que põe em jogo, situações reais para os alunos vivenciarem seus conhecimentos. Nessas situações, conhecimentos prévios são articulados a novos. Assim, o Modelo Dominante ainda é o da concepção parte-todo, apesar das deficiências mencionadas, a abordagem mais comum de ensino ainda é baseada na ideia de que frações são partes de um todo, e essa abordagem limitada não ajuda os alunos a compreenderem plenamente o significado de frações.

No estudo da dimensão epistemológica, foi possível relatar a mudança em relação ao conceito de frações. Antes este objeto matemático era visto como uma consequência da escolha da unidade de medida. Agora, a grandeza é considerada o próprio número, e não apenas uma consequência da unidade de medida. A falta de percepção dessa mudança pode ser devido ao modelo de ensino, sob a perspectiva de visitas às obras – ensinar frações na concepção de parte-todo e na congruência de figuras, em vez da ênfase à grandeza em si. Essa prática desconsidera uma mesma fração para representar partes de figuras de mesma área, mas com formas diferentes.

Além disso, em geral, as frações são ensinadas principalmente como uma preparação para o estudo de outros conceitos matemáticos, especialmente proporcionalidade e sua representação algébrica. Isso pode ser feito às custas de uma compreensão mais profunda das relações entre números e a natureza das grandezas. Por fim, as competências e habilidades relacionadas a frações deveriam ser associadas ao desenvolvimento de praxeologias que são abordagens práticas e teóricas para o ensino, com ênfase em discursos tecnológico-teóricos. No entanto, a dificuldade em trabalhar com praxeologias plenas (que incluem discursos tecnológicos-teóricos), ou seja praxeologias regionais e globais, pode ser devido à maneira como os professores projetam tarefas de ensino. Com base nos estudos sobre a TAD referentes a frações, nos documentos curriculares e em livros didáticos de matemática, foi possível constituirmos um Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

Verificamos, por exemplo, que os autores dos livros didáticos de matemática analisados nesta pesquisa, adotaram distintos tipos de tarefas relacionadas a frações. No entanto, esses autores se limitaram principalmente nos tipos de técnicas para os alunos resolverem tipos de tarefas propostas em suas respectivas obras. Na maioria, são tipos de técnicas envolvendo principalmente a "dupla contagem das partes," o que torna o ensino desses conceitos muito localizado e específico, deixando de considerar as aplicações mais amplas desses conceitos em diferentes contextos.

Além disso, essa abordagem limitada restringe o desenvolvimento de outras habilidades dos alunos, impedindo que eles compreendam e contextualizem a aplicabilidade de frações em outros contextos, como em problemas sociais, pessoais ou até mesmo em problemas matemáticos mais complexos ao nível desses alunos. Isso é visto como um problema porque não está alinhado com as orientações curriculares, ou seja, distancia-se das diretrizes curriculares estabelecidas para o ensino desse objeto.

Para a análise dos dados, realizamos um confronto entre os resultados abordados em nossa análise *a posteriori* e a análise *a priori*, ao aplicar as AEP em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. A partir dos resultados, conseguimos identificar as dificuldades dos alunos quando utilizamos essa organização didática no modelo atual de ensino, essas dificuldades se enquadram como restrições para o seu uso.

As restrições destacadas se referem, especialmente, a metodologia com características de investigação, adotada para o desenvolvimento das AEP. Nesse tipo de abordagem se faz necessária mudanças nos *topos* de professor e alunos. Os alunos necessitam ter uma interação ativa para elaborar perguntas e ir em busca das respostas. O professor (no nosso caso, a pesquisadora) tem papel secundário, sua atuação é de mediação para subsidiar elaboração das questões e busca de respostas.

Nesta pesquisa, houve uma resistência por parte dos estudantes em mudar seu *topos* – eles esperavam que a nossa atuação em sala de aula seria a habitual do paradigma de visita à obras, onde o professor desempenha o papel de destaque e eles estão apenas como ouvintes. Isso também implica em uma segunda dificuldade – enquanto pesquisadora – nessa transferência de *topos*, não consegui ficar totalmente no controle da situação. O fato de não ser professor titular da turma, alguns momentos emergiram questionamentos inesperados, fora do foco em questão, causando dispersão de alguns alunos. Outro aspecto foi o trabalho de grupos não ser frequente nessa disciplina para esta turma. Razão esta, por considerarmos também, como restrição identificada – as dificuldades dos estudantes em trabalhar em grupo e dividir as responsabilidades com os seus colegas.

Assim, conclui-se que por intermédio deste estudo, é possível investigar outros contextos da temática abordada, sob a fundamentação teórica da TAD. Podemos utilizar a metodologia do Percurso de Estudo e Pesquisa com foco em acadêmicos da Licenciatura em Matemática, investigando os saberes desses professores em formação inicial.

REFERÊNCIAS

SADDO, A. A.; SILVA, M. J. da. Estudo das três dimensões do problema didático de números racionais na forma fracionária. **Educação Matemática Sem Fronteiras:** Pesquisas em Educação Matemática, v. 3, n. 2, p. 114 - 151, 23 dez. 2021.

ANDRADE, K. R. **Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. 2016. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

BARBOSA, M. A. **O sentido das regras no ensino de frações**. 2020. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

BARBOS, P. R. **Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no ensino fundamental.** 2002. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

BARQUERO, B.; BOSCH, M. *Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths*. ***New ICMI Study Series***, 2015

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática*. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.

BENITO, R. N. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019. 220 páginas.

BENITO, R. N.; SILVA, M. J. F.; BOSH, M. Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de cônicas no ensino médio: condições e restrições que incidem sobre sua implementação. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 36, n. 72, p.515-533, abr. 2022

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Brasília, MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

CHEVALLARD, Y. *Pourquoi la transposition didactique? Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques* de l’IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. ***Actes***, 1982, pp. 167-194.

CHEVALLARD, Y. *L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique,* ***Recherches en Didactique des Mathématiques****, vol. 19, núm. 2, pp. 221-226, 1999*

CHEVALLARD, Yves. *La notion d’ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. ***15e École d’été de Didactique des***

Mathématiques, p. 16-23, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf

CHEVALLARD, Y. *Enseñar Matemáticas em la Sociedad de Mañana: Alegato a favor demun Contraparadigma Emergente.* ***Journal of Research in Mathematics Education***, v. 2, n. 2, 2013.

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, et al. (orgs). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, p. 21- 40, 2018.

CHEVALLARD, Y.; STRØMSKAG, H. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. In Almouloud, Saddo Ag et al. (org.): **Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático**: fundamentos teórico-metodológicos para a formação. Editora CRV, p. 27-58, 2022.

COELHO, A. E. M.; DE FREITAS, J. L. M. Análise de praxeologias sobre frações num livro didático do 5° ano do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 22, n. 5, p. 686-692, 2021.

DEALGADO. T.A.S. O paradigma do questionamento do mundo na pesquisa e no ensino. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 21, n. 4, pp. I-XVI, 2019.

DIAS, M. L. S. **Mapeamento das pesquisas produzidas em São Paulo acerca de números fracionários, entre os anos de 2000 e 2016**. 2018. 164 fls. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2018.

FISCHER, D. S. O. **Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6° ano**. 2020. 350 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemáti–a) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

GASCÓN, J. *Las tres dimensiones fundamentaleseme un problema didáctico. El caso del álgebra elemental.* ***Revista Latinoamericana de Investigemión en Matemática Educativa,*** RELIME, v.14, n.2, p. 203-231, 2011.

GAY, M. R. G. **Buriti mais matemática**: 4º ano, ensino fundamental, anos iniciais. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2021.

JUNIOR, F. J. S. **Intervenções didáticas no ensino de frações e a formação de professores**. 2015. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Mate–ática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

LEÃO, K. W. M. Análise institucional e praxeológica do objeto frações: análise da questão corrida de revezamento. In: **XIII ENEM-Encontro Nacional de Educação Matemática**. 3., 2019, Cuiabá. Anais[...]. Cuiabá-MT, 2019, p. 1-15

LOPES, R. N. de S. **Praxeologia do professor:** uma investigação do conceito de fração sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2020. 181 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

LOPES, R. N. S.; BARBOSA, E. J. T. Relações praxeológicas do professor e do seu livro didático: implicações na transposição dos múltiplos conceitos das frações. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 1, n. 25, p.363 - 388, maio./ ago. 2022.

MARQUES, A. B. A. **Um estudo dos conhecimentos de futuros professores para o ensino de números racionais na educação básica.** 2018. 239 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018.

DAVID, Maria Manuela. MOREIRA, Plínio Cavalcanti. TOMAZ, Vanessa Sena. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n.1, p. 42 – 60, jan./abr. 2013.

MARTINHO, G. A. **O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração**. 2020. 278 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Docência) - Universidade Federal De Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

OLIVEIRA, A. S. S. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do ensino**. 2015. 127 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica De São Paulo, São Paulo, 2015.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. **Matemática essencial 6º ano**: ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PROETTI, S. As pesquisas qualitativa e quantitativa como métodos de investigação científica: um estudo comparativo e objetivo. **Lumen**, São Paulo, v. 2, n. 4, 2017.

ROGERI, N. K. O. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal**. 2015. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, M. J. F**. Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 302 fls. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A.; As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 31, p. 55-78, 2008.

SILVA, M. J. F.; **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245 fls. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.1997.

SILVA, M. F. F. **Frações e grandezas geométricas**: um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos. 2004. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2004.

SOUZA, D. S. Problemática do ensino de geometria: desafios, possibilidades e experiências. v. 11, n, 3 (2021): Tecnologias, educação e ensino de ciências e matemática: interfaces e nuances para ensinar e aprender. **Caminhos da educação matemática em revista.** (online)/IFS, v, 11, n. 3, ISSN 2358-4750.7.

SOUZA, J. R. **Matemática realidade e tecnologia 6º ano**: ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

UTIMURA, G. Z. **Conhecimento profissional de professoras de 4º ano centrado no ensino dos números racionais positivos no âmbito do Estudo de Aula**. 2019. 195 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2019.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume Editora, FAPESP, 2.ed. 2002.

Anexo A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Título do Projeto: ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES RELACIONADAS ÀS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS ÁREA E PERÍMETRO PARA O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO ECOLÓGICO.

Caríssimo(a) Professor(a),

Vossa Senhoria está sendo convidada a participar, de maneira voluntária, de uma pesquisa vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe. O objetivo desta pesquisa é analisar condições e restrições que afetem o desenvolvimento da aprendizagem dos números fracionários ao aplicarmos o dispositivo de ensino (Atividades de Estudos e Pesquisa – AEP), em uma turma de 6° ano do ensino fundamental. Após o esclarecimento sobre as informações que seguem, caso aceite participar do estudo, assine ao final do documento.

1. Em caso de recusa, você não sofrerá nenhum tipo de penalidade.
2. É garantido que você tenha a liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar da pesquisa, sem necessidade de qualquer explicação.
3. A Resolução Nº 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde, em suas diretrizes e normas para pesquisa com seres humanos indica, “toda pesquisa com seres humanos envolve risco em tipos e gradações variados”. Porém, ressaltamos que essa pesquisa apresenta riscos mínimos aos participantes, já que a coleta de informações para o seu desenvolvimento será feito por meio da resolução de atividades, no mais, alguns aspectos desse estudo podem ser considerados desconfortáveis por estarem sendo observados.
4. A sua colaboração será de muita importância para os dados da pesquisa, como também, para a contribuição de futuros estudos relacionados à aprendizagem dos números fracionários.

Em qualquer etapa deste estudo, você poderá entrar em contato com a responsável pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas. Pessoalmente ou por e-mail: soousavanessa2@gmail.com ou por telefone (79) 9 9920-7312. Se você tiver alguma dúvida ou consideração ética sobre a pesquisa, entre em contato com a Comissão Ética, Rua Cláudio Batista s/n - Hospital Universitário, Bairro Sanatório, Aracaju- Sergipe, CEP – 49060-110, telefone: (79)3194 – 7208, e-mail: cep@academico.ufs.br.

Documento assinado digitalmente
VANESSA CONCEICAO SANTOS SOUSA
Data: 13/04/2023 21:11:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

VANESSA CONCEIÇÃO SANTOS SOUSA

Pesquisadora

PPGECIMA/UFS

Matrícula: 202211002281

CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO:

Ciente e de acordo com o que foi anteriormente exposto pela pesquisadora, eu ____ ______________________, professor(a) do 6° ano (turma __ do Codap/UFS – escola campo da pesquisa), estou de acordo em participar desta pesquisa, assinando este consentimento em duas vias, ficando com a posse de uma delas. Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimentos quanto às dúvidas por mim apresentadas sobre a condução dos trabalhos, e estou ciente que:

✓ Temos a liberdade de desistir ou de interromper a colaboração neste estudo no momento em que desejarmos, sem necessidade de qualquer explicação;

✓ A desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico.

✓ Os resultados obtidos durante esta pesquisa serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que nossos dados pessoais não sejam mencionados;

✓ Caso danos de natureza moral ou intelectual sejam causados, os participantes têm direito a reparação por parte dos pesquisadores, determinados por dispositivos legais estipulados pela lei;

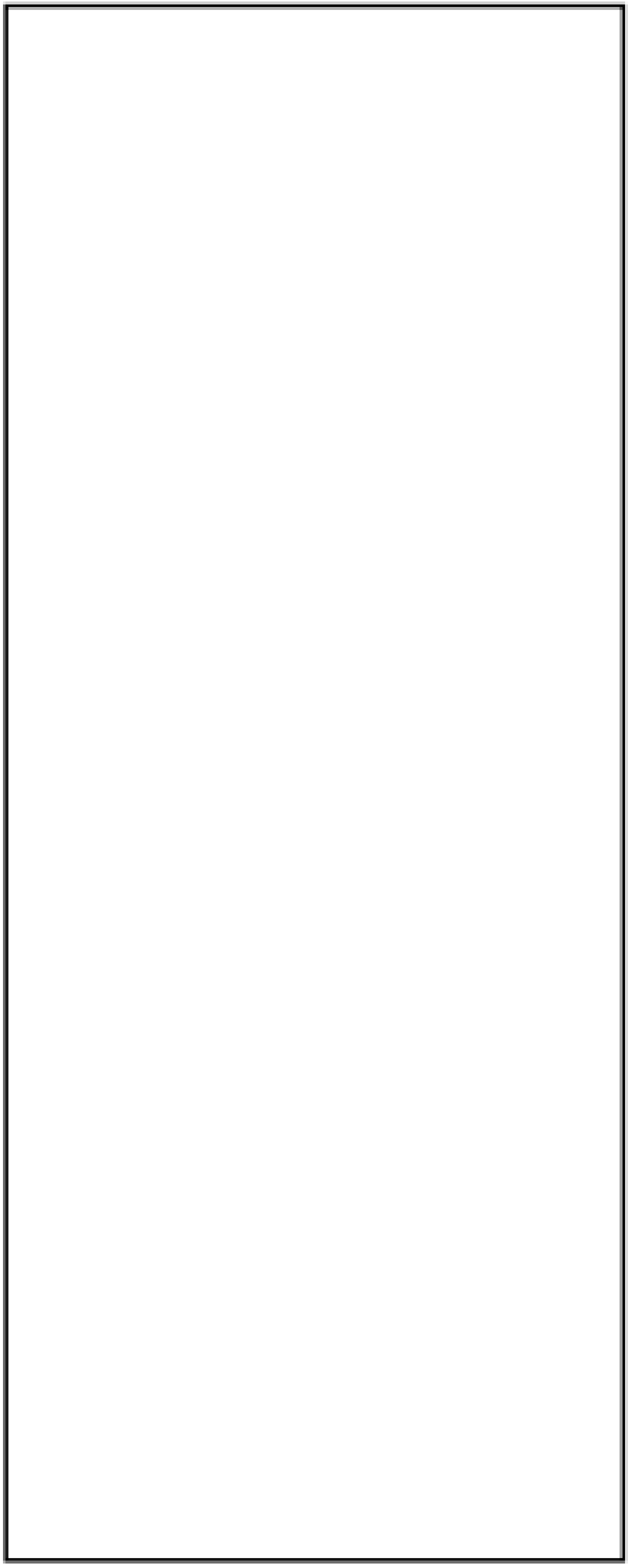
✓ A presente pesquisa já foi analisada e aprovada pelo Conselho de Ética em pesquisa com seres humanos;

✓ Não receberemos qualquer remuneração para participar da pesquisa, e também não teremos nenhum gasto.

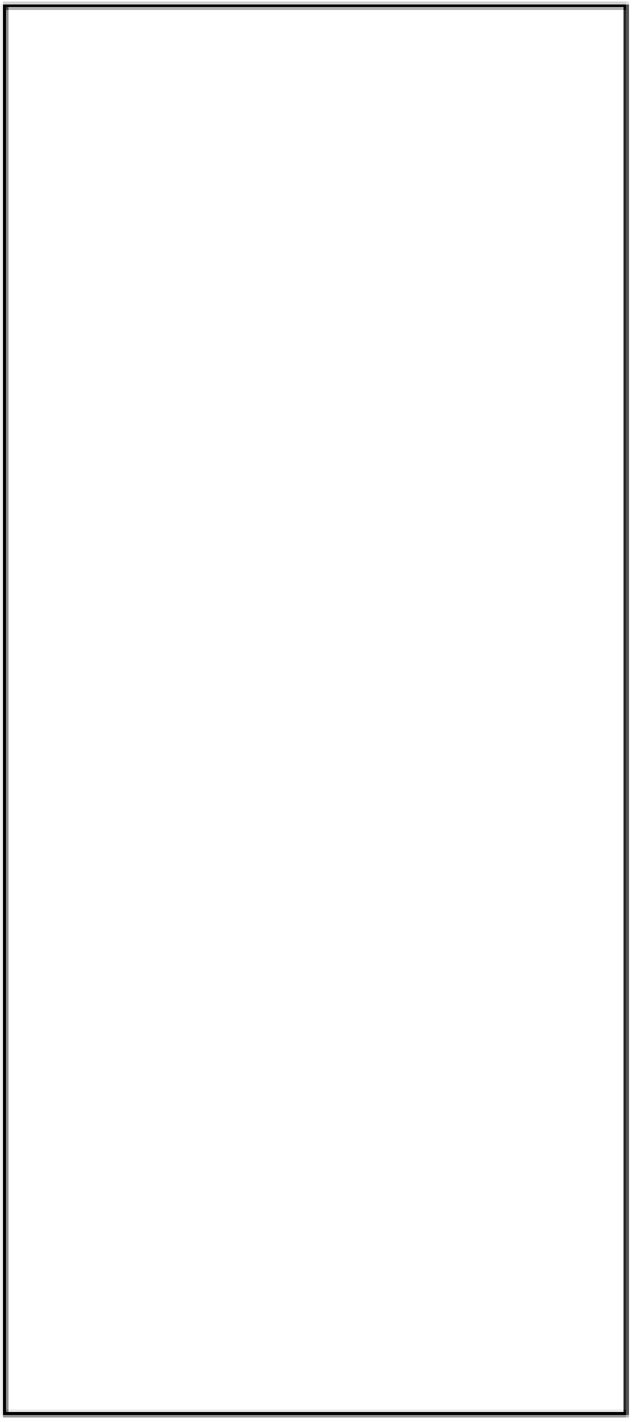
São Cristóvão/SE, _______________de 2023.

Assinatura
PROFESSOR(A) DA TURMA 6º
Matrícula Nº ______

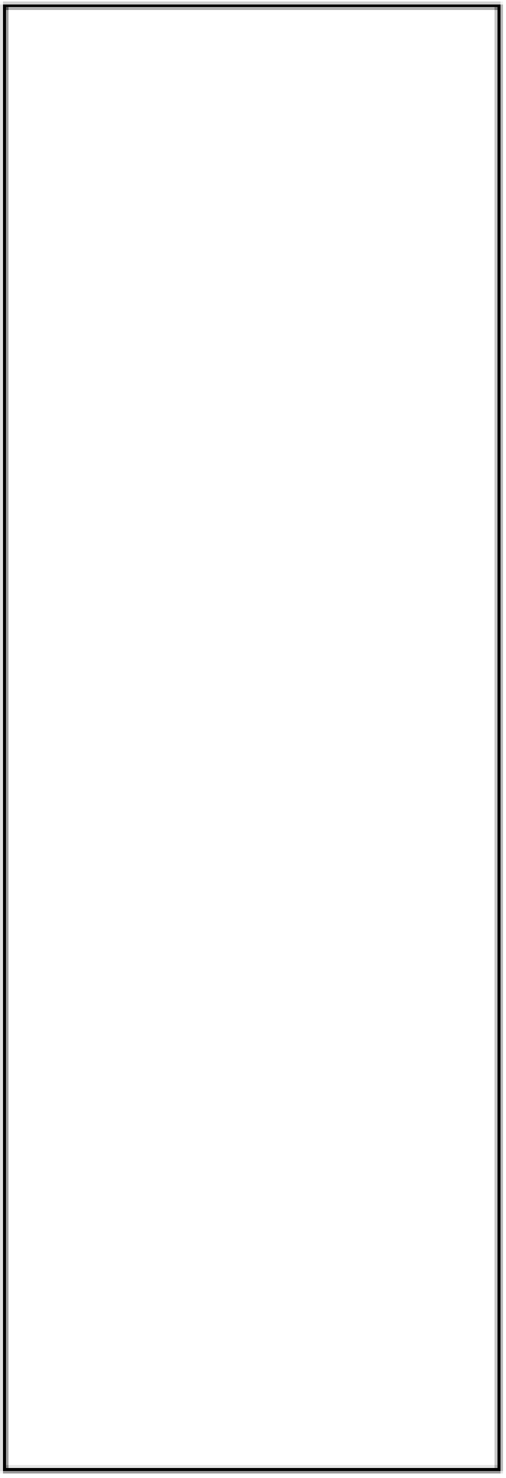
Apêndice A – Material para medição da área das carteiras e mesa



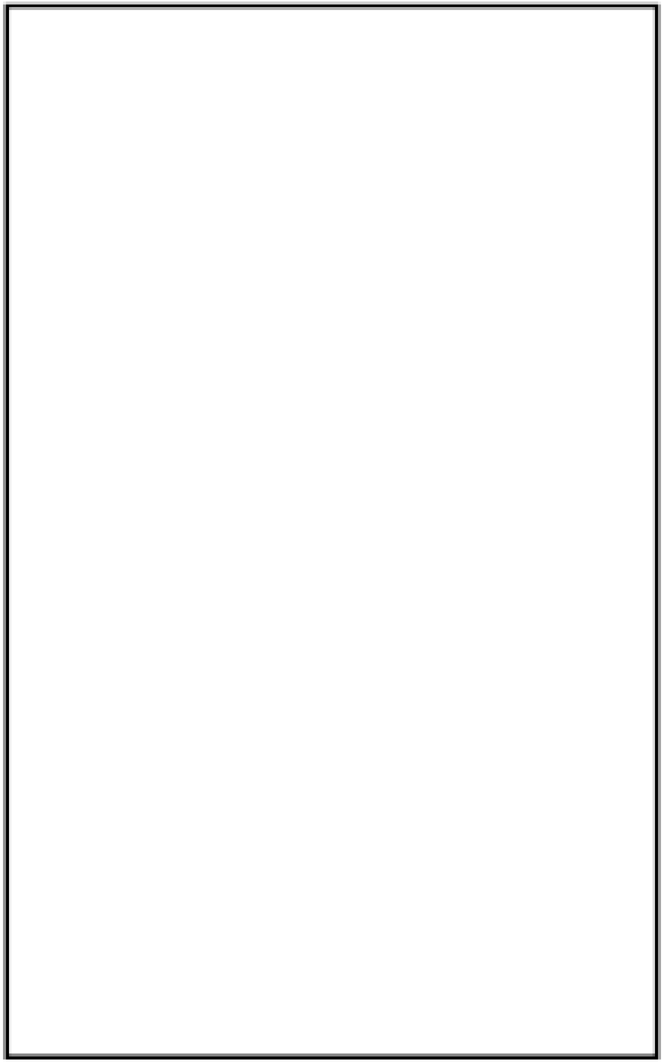
Amarela: 8 cm x 20 cm.



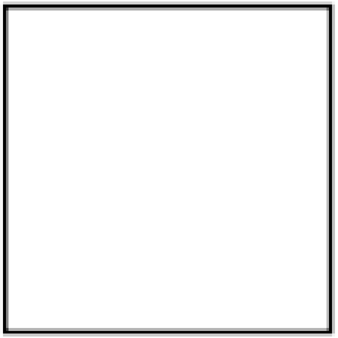
Azul: 8 cm x 18 cm



Verde: 6 cm X 16 cm

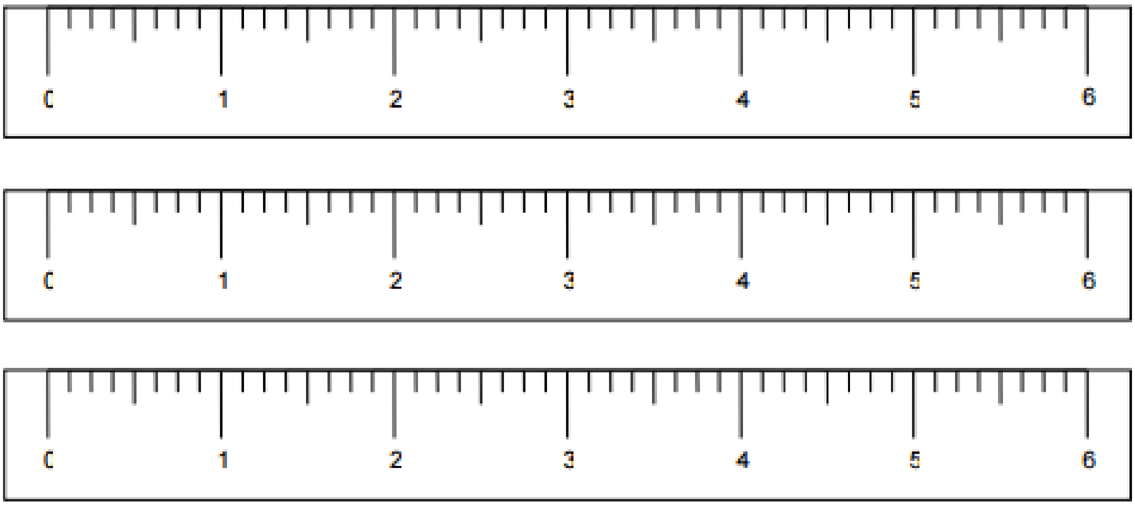


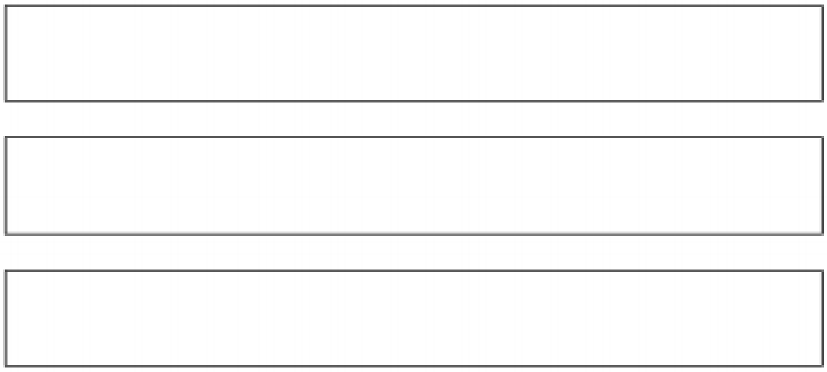
Rosa: 8 cm x 13 cm



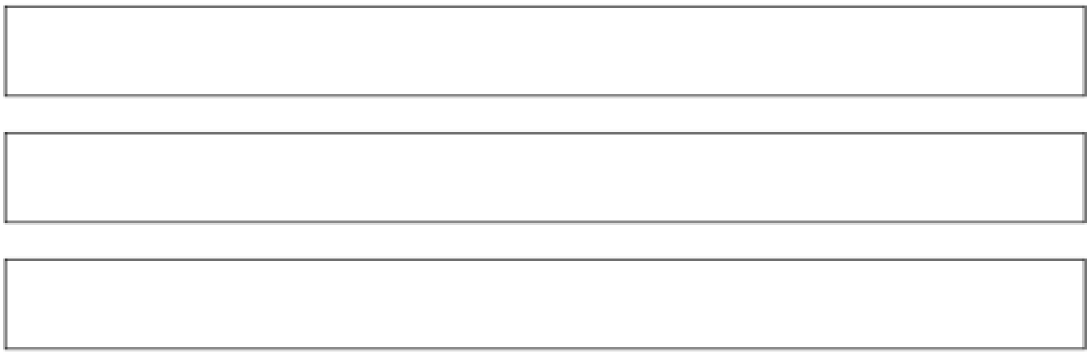
Unidade: 4 cm x 4 cm

Apêndice B – Material para medição do contorno das carteiras e mesa





12 cm



16 cm

Apêndice C – Atividade de composição de figuras planas