UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Curvatura Gaussiana Prescrita em Superfícies com Característica de Euler Negativa

Lucas de Oliveira Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão – SE, Brasil

Setembro de 2024

Curvatura Gaussiana Prescrita em Superfícies com Característica de Euler Negativa

Lucas de Oliveira Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática - PROMAT, da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão – SE, Brasil

Setembro de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Rodrigues, Lucas de Oliveira
R696a Curvatura gaussiana prescrita em superfícies com característica de Euler negativa / Lucas de Oliveira Rodrigues; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2024
84 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Processos gaussianos. 2. Curvas em superfícies. 3. Curvatura. I. Santos, Almir Rogério Silva orient. II. Título.

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Curvatura Gaussiana Prescrita em Superfícies com Característica de Euler Negativa

por

Lucas de Oliveira Rodrigues

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALMIR ROGERIO SILVA SANTOS
Data: 30/09/2024 22:22:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARIA DE ANDRADE COSTA E SILVA
Data: 01/10/2024 07:04:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br
CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ
Data: 30/09/2024 23:57:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL
Segundo Examinador

São Cristóvão, 27 de Setembro de 2024

Agradecimentos

Agradeço ao professor Almir Rogério pela orientação, apoio e dedicação ao longo de todo este processo. Sou grato pela paciência nas reuniões e por sua generosidade em compartilhar conhecimento e me ajudar a superar minhas dificuldades.

Agradeço também à minha família, em especial à minha noiva Jéssica pelo incentivo, e à minha mãe pelo apoio constante. Agradeço imensamente aos amigos do PROMAT que me ajudaram diretamente nesse período, em especial a Dalton e Júnior. A todos, meu mais sincero agradecimento.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001."

Resumo da Dissertação apresentada ao PROMAT/UFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre (Me.)

Curvatura Gaussiana Prescrita em Superfícies com Característica de Euler Negativa

Lucas de Oliveira Rodrigues

Setembro de 2024

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

Esta dissertação tem como objetivo analisar o problema de prescrição da curvatura Gaussiana em superfícies Riemannianas fechadas com característica de Euler negativa, detalhando os resultados obtidos em [3]. O trabalho investiga a existência de múltiplas soluções para o problema de encontrar métricas Riemannianas conformes cuja curvatura Gaussiana seja igual a uma função dada. Sob certas condições o problema admite uma única solução, a qual é o ponto de mínimo global de um determinado funcional. Considerando pequenas perturbações a um parâmetro da função a qual se quer prescrever como a curvatura Gaussiana, mostra-se que o funcional admite um ponto crítico adicional do tipo “passo da montanha”. Além disso, é investigado o comportamento desta segunda solução quando o parâmetro vai a zero.

Palavras-chaves: Métricas Conformes, Curvatura Gaussiana, Prescrição de Curvatura, Passo da Montanha.

Abstract of Dissertation presented to PROMAT/UFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master

Prescribed Gaussian Curvature on Surfaces with Negative Euler Characteristic

Lucas de Oliveira Rodrigues

September/2024

Advisor: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

This dissertation aims to study the problem of prescribing the Gaussian curvature on closed Riemannian surfaces with negative Euler characteristic, detailing the results obtained in [3]. The work investigates the existence of multiple solutions to the problem of finding conformal Riemannian metrics whose Gaussian curvature equals a given function. Under certain conditions, the problem admits a unique solution, which corresponds to the global minimum of a specific functional. By considering small perturbations to a parameter of the function intended to be prescribed as the Gaussian curvature, it is shown that the functional admits an additional critical point of the "mountain pass" type. Furthermore, the behavior of this second solution is investigated as the parameter approaches zero.

Keywords: Conformal Metrics, Gaussian Curvature, Curvature Prescription, Mountain Pass.

Sumário

Introdução

A cada métrica Riemanniana g em uma superfície M existe uma função suave $K_g \in C^\infty(M)$ chamada de curvatura Gaussiana. Um problema clássico da geometria diferencial é saber se dada uma função suave $f \in C^\infty(M)$, existe uma métrica Riemanniana g com curvatura Gaussiana f. Duas métricas g e $\overline{g}$ em M são ditas conformes se $\overline{g} = e^{2u}g$ para alguma função suave $u \in C^\infty(M)$. É bem conhecido que a relação entre as curvaturas Gaussianas das métricas g e $\overline{g}$ é dada pela equação

$$-\Delta_g u + K_g = K_{\overline{g}} e^{2u}, \tag{1}$$

onde $\Delta_g = div_g \nabla_g$ é o Laplaciano com respeito à métrica g, e K_g e $K_{\overline{g}}$ são as curvaturas Gaussianas de g e $\overline{g}$, respectivamente.

O objetivo deste trabalho é analisar o conjunto solução da equação (1) em uma superfície fechada e orientável com característica de Euler negativa $\chi(M) < 0$, para uma métrica fixada g e com curvatura Gaussiana de $\overline{g}$ prescrita $f \in C^\infty(M)$, ou seja, $K_{\overline{g}} = f$. Como o problema é conformemente invariante, segue do Teorema de Uniformização que é possível considerar que a curvatura Gaussiana de g é constante k e o volume é unitário. Além disso, é uma consequência do Teorema de Gauss-Bonnet que $k < 0$. Desta forma, a equação (1) passa a ser

$$-\Delta_g u + k = f e^{2u}. \tag{2}$$

Berger [2] foi o primeiro a estudar a equação (2) neste contexto. Ele encontrou uma condição suficiente para a existência de solução, a saber, $f < 0$. O Teorema de Gauss-Bonnet afirma que a integral da curvatura Gaussiana é $2\pi\chi(M)$. Integrando (2), aplicando o Teorema da Divergência e o Teorema de Gauss-Bonnet, obtém-se que

$$\int_M f e^{2u} dv_g = \int_M k dv_g = 2\pi\chi(M) < 0.$$

Desta forma, segue que se a equação (2) possui uma solução, então f deve ser negativa em algum ponto. Kazdan e Warner [10] estudaram a existência de solução de (2) em superfícies fechadas com característica de Euler positiva, negativa e nula. Em particular, eles obtiveram que no caso $\chi(M) < 0$, se $f \leq 0$ mas não é identicamente nula, então (2) possui uma única solução.

Uma característica importante de (2) é que ela é a equação de Euler-Lagrange do funcional $I_f : H^1(M) \to \mathbb{R}$ definido como

$$I_f(u) = \frac{1}{2}\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + 2ku - fe^{2u}\right) dv_g. \tag{3}$$

Segue dos resultados de Berger e Kazdan-Warner, que se f é não negativa, então o funcional (3) não possui ponto crítico quando $\chi(M) < 0$.

As hipóteses sobre a função que serão assumidas neste trabalho é que $f \leq 0$ e não é identicamente nula. Com isso, segue que o funcional I_f é coercivo e estritamente convexo. Isto implica que I_f possui um único ponto crítico, a qual é um ponto de mínimo global, veja a Proposição 2. Porém, da Proposição 5 segue que para pequenas perturbações de f a equação (2) ainda terá solução, a qual será ponto de mínimo local de I_f. Isto implica que se $\max f = 0$, segue que para pequenos valores de $\lambda > 0$, a função $f_\lambda := f + \lambda$ é positiva em algum ponto e será a curvatura Gaussiana de alguma métrica conforme. Além disso, como discutido na página 27, se f é positiva em algum ponto, então o funcional I_f é ilimitado inferiormente. Desta forma, é esperado que I_f possua um segundo ponto crítico, o qual é do tipo do passo da montanha. Ding e Liu [7] mostraram que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno o funcional I_{f_λ} possui pelo menos dois pontos críticos, u_λ que é ponto de mínimo local e u^λ que é um ponto crítico do tipo do passo da montanha.

Este trabalho baseia-se no artigo de Borer, Galimberti e Struwe [3], o qual redemonstram o resultado de Ding e Liu, porém a técnica utilizada permite analisar o que acontece com a segunda solução u^λ quando $\lambda \to 0$. O que é feito em [3] é encontrar a segunda solução u^λ junto com uma estimativa no volume da métrica $e^{2u^\lambda}g$, veja a Proposição 7, que permite fazer a análise de blow-up quando $\lambda \to 0$.

Inicialmente demonstra-se o seguinte resultado, o qual já era conhecido devido a Ding e Liu [7].

Teorema 1. *Seja (M, g) uma superfície Riemanniana fechada com característica de Euler negativa. Para toda função suave e não constante $f \leq 0 = \max f$, con-*

sidere a família de funções $f_\lambda = f + \lambda$*, com* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e a família de funcionais associados* $I_\lambda := I_{f_\lambda}$ *em* $H^1(M)$*. Então existe um número* $\lambda^* > 0$ *tal que, para* $0 < \lambda < \lambda^*$ *o funcional* I_λ *admite um minimizante local e outro ponto crítico* $u^\lambda \neq u_\lambda$ *do tipo do passo da montanha.*

O próximo resultado principal deste trabalho é o seguinte.

Teorema 2. *Seja* (M, g) *uma superfície Riemanniana fechada com característica de Euler negativa. Seja* f *uma função suave não constante com* $\max f = 0$*, tal que seus pontos de máximos são não degenerados. Para* $\lambda \in \mathbb{R}$ *considere* $f_\lambda := f + \lambda$ *e* $I_\lambda := I_{f_\lambda}$ *como definido em* (3)*. Então existem um conjunto finito de pontos* $\{p_\infty^{(1)}, \ldots, p_\infty^{(N)}\}$ *de* M*, com* $N \geq 1$ *e* $f(p_\infty^{(i)}) = 0$ *para todo* $1 \leq i \leq N$*, uma sequência* $\lambda_n \downarrow 0$ *e uma sequência de pontos críticos não minimizantes* u_n *de* I_{λ_n} *tais que para certas sequências* $r_n^{(i)} \downarrow 0$ *e* $p_m^{(i)} \to p_\infty^{(i)}$*, vale o seguinte*

(a) $u_n \to u_\infty$ *em* $C^\infty_{loc}(M_\infty)$*, onde* $M_\infty = M \backslash \{p_\infty^{(1)}, \ldots, p_\infty^{(N)}\}$*, e* u_∞ *induz a métrica completa* $g_\infty = e^{2u_\infty} g$ *em* M_∞ *de curvatura total finita* $K_{g_\infty} = f$*, ou seja,*
$$\int_{M_\infty} f dv_{g_\infty} = \int_{M_\infty} f e^{2u_\infty} dv_g < \infty.$$

(b) Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$*,* $r_n^{(i)}/\sqrt{\lambda_n} \to 0$ *e em coordenadas locais conformes* x *em torno de* $p_n^{(i)} = 0$ *tem-se*
$$w_n(x) := u_n(p_n^{(i)} + r_n^{(i)} x) - u_n(p_n^{(i)}) + \log 2 \to w_\infty(x) = \log\left(\frac{2}{1 + |x|^2}\right),$$
em $C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$*, onde* w_∞ *induz a métrica esférica* $g_\infty = e^{2w_\infty}\delta$ *de curvatura Gaussiana* $K_{g_\infty} = 1$ *em* $\mathbb{R}^2$*. Aqui* δ *é a métrica euclidiana em* $\mathbb{R}^2$*.*

Vale destacar que em [3] os autores identificaram duas possíveis formas de blow-up. A primeira dada pelo item (b) do teorema anterior, e a segunda resultando em uma métrica completa g_∞ definida em todo $\mathbb{R}^2$, com volume finito, curvatura total finita e curvatura Gaussiana $K_{g_\infty} = 1 + (Ax, x)$, onde A é uma matriz 2×2 negativa definida. Posteriormente, Struwe [11] demonstrou um resultado do tipo Liouville (Teorema 21), o qual exclui essa segunda possibilidade.

Este trabalho está dividido em três partes. No Capítulo 1, o objetivo é revisar conceitos e resultados fundamentais, como por exemplo, as definições de alguns espaços de funções, resultados cruciais de Regularidade Elíptica, e algumas desigualdades úteis ao longo da dissertação. Além disso, após fundamentar o problema de prescrição da curvatura Gaussiana, é analisado o funcional (3) para uma função $f \in C^\infty(M)$ arbitrária.

O Capítulo 2 inicia demonstrando a não degenerescência de qualquer minimizante local do funcional (3). Além disso, é introduzido um outro resultado importante que garante a existência de solução quando f muda de sinal devido a pequenas perturbações. Na Seção 2.2, será provado o Teorema 1 estabelecendo a existência de um ponto crítico do tipo passo da montanha.

No Capítulo 3, é apresentada uma abordagem para o Teorema 2. A Seção 3.1 expõe resultados essenciais que sustentam o teorema. Por fim, o teorema principal é demonstrado na Seção 3.2, consolidando as discussões apresentadas ao longo do capítulo.

1 Preliminares

Neste capítulo, serão apresentadas definições e resultados fundamentais da Geometria Riemanniana, assim como ferramentas de Topologia que serão empregados ao longo deste estudo.

1.1 Métricas Riemannianas e Conexões

Será denotado por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores suaves em uma variedade M.

Definição 1. *Uma* ***métrica Riemanniana*** *em uma variedade diferenciável M é um tensor suave g do tipo $(2,0)$ em M tal que para cada ponto $p \in M$, a aplicação $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g_p(u,v) := g(U,V)(p),$$

é um produto interno em T_pM, onde $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $U(p) = u$ e $V(p) = v$.

Teorema 3. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica Riemanniana é chamada de **Variedade Riemanniana**, a qual será denotada por (M, g), ou simplesmente por M quando a métrica estiver subentendida.

Exemplo 1 (A Métrica Euclidiana)**.** *A variedade Riemanniana mais simples é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde a métrica Riemanniana é a métrica Euclidiana δ dada em coordenadas canônicas por*

$$\delta = \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2,$$

onde δ_{ij} é o de delta de Kronecker e $(dx^i)^2 = dx^i dx^i$.

Sabe-se que existe um isomorfismo entre os espaços $\mathbb{R}^n$ e $T_p\mathbb{R}^n$. Dessa forma é possível considerar $u, v \in T_p\mathbb{R}^n$ como vetores no $\mathbb{R}^n$. Isto implica que

$$\delta_p(u,v) = \langle u, v \rangle ,$$

onde $\langle , \rangle$ *é o produto canônico em* $\mathbb{R}^n$.

Seja M uma variedade orientada de dimensão n. Existe uma única n-forma diferencial dv_g, chamada de **forma de volume Riemanniana** que satisfaz

$$dv_g(E_1, \ldots, E_n) = 1,$$

para todo referencial ortonormal positivo $(E_1, \cdots, E_n)$. Em coordenadas, dv_g possui a seguinte expressão

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

onde g_{ij} são as componentes da métrica g nestas coordenadas.

Definição 2. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

que será denotada por $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$, *que satisfaz as seguintes propriedades*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X (fY) = (X(f))Y + f\nabla_X Y$,

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Teorema 4 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana* (M, g) *existe uma única conexão afim* ∇ *satisfazendo as condições*

(i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica);*

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$ *(compatível com a métrica),*

para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada **conexão de Levi-Civita** (ou **conexão Riemanniana**) de M.

Em um sistema de coordenadas, define-se os símbolos de Christoffel como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right),$$

g_{ij} são componentes da métrica g nestas coordenadas e g^{ij} é sua inversa.

Dada uma variedade Riemanniana M, o **tensor curvatura** do tipo $(3,1)$ é definido como

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Usando a métrica, obtém-se um tensor curvatura Rm do tipo $(4,0)$ definido como

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Suas componentes em um sistema de coordenadas são

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^s \frac{\partial}{\partial x_s}$$

e

$$R_{ijkl} := R\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = R_{ijk}^s g_{sl}.$$

Em coordenadas tem-se que

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l + \sum_p \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \sum_p \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \sum_p \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

Proposição 1. *Para quaisquer campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se que*

(i) $Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Y,X,Z,W) = Rm(Y,X,W,Z) = Rm(W,Z,Y,X)$*;*

(ii) $Rm(X,Y,Z,W) + Rm(X,Z,W,Y) + Rm(X,W,Y,Z) = 0$ *(1º Identidade de Bianchi).*

1.2 A Curvatura Gaussiana

Seja $M \subset \widetilde{M}$ uma subvariedade e sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ extensões suaves dos campos X e Y, respectivamente. Ao aplicar a derivada covariante do ambiente $\widetilde{\nabla}$ e então decompor em pontos de M, obtém-se

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top} + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\perp}. \tag{1.1}$$

Pode-se mostrar que o termo $\left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^{\top}$ em (1.1) é independente das extensões de X e Y. Portanto não há ambiguidade em denotar as extensões como X e Y.

Definição 3. *A* ***segunda forma fundamental*** *de M é a aplicação $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to NM$ dada por*

$$II(X, Y) := (\widetilde{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Aqui NM denota o fibrado normal de M.

Teorema 5 (A Equação de Gauss)**.** *Para quaisquer $X, Y, Z, W \in T_pM$, tem-se*

$$\widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, W) - \langle II(X, W), II(Y, Z)\rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W)\rangle.$$

Defina a **segunda forma fundamental escalar** como um tensor h do tipo $(2, 0)$, definido como

$$h(X, Y) = \langle II(X, Y), N\rangle.$$

É imediato que

$$II(X, Y) = h(X, Y)N.$$

Elevando um índice de h, acha-se um campo tensorial A do tipo $(1, 1)$, a qual será visto como um endemorfismo de TM, chamado de **operador de forma** de M. Assim,

$$h(X, Y) = \langle X, A(Y)\rangle, \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Como h é simétrico, então A é auto-adjunto, ou seja,

$$\langle X, A(Y)\rangle = \langle A(X), Y\rangle \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Note que h e A dependem da escolha de N. Além disso, em termos de h e A, obtém-se a **fórmula de Gauss para superfície** em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N$$

e

$$\langle \widetilde{\nabla}_X N, X \rangle = -h(X,Y) = -\langle A(X), Y \rangle. \tag{1.2}$$

Como $\langle \widetilde{\nabla}_X N, N \rangle = \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_X |N|^2 = 0$, seque que $\widetilde{\nabla}_X N$ é tangente a M. Daí (1.2) é equivalente a

$$\widetilde{\nabla}_X N = A(X).$$

Lembrando que esta sendo considerada uma superfície $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Finalmente, como $\widetilde{Rm} = 0$ em $\mathbb{R}^3$, então ao reescrever a equação de Gauss vista no Teorema 5, obtém-se

$$Rm(X,Y,Z,W) = h(X,W)h(Y,Z) - h(X,Z)h(Y,W). \tag{1.3}$$

Em cada ponto $p \in M$, o operador de forma $A_p : T_pM \to T_pM$ é uma transformação linear auto-adjunta, portanto existem autovalores reais κ_1, κ_2 chamados de **curvaturas principais**, e uma base ortonormal de autovetores (e_1, e_2) de T_pM, ou seja, $A_p(e_i) = \kappa_i e_i$. Dito isto, a **curvatura Gaussiana** de M em p é definida como

$$K(p) = \det A_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2.$$

Teorema 6 (Teorema Egregium de Gauss)**.** *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma subvariedade bidimensional. Para todo $p \in M$ e qualquer base $\{X,Y\}$ de T_pM, a curvatura Gaussiana de M em p é dada por*

$$K(p) = \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y \rangle^2}. \tag{1.4}$$

Portanto, a curvatura Gaussiana é um invariante por isometrias de M.

Demonstração. Primeiro, considere uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM. Neste caso $|e_1|^2|e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2 = 1$. Se $h_{ij} = h(e_i, e_j)$, então $K = \det(h_{ij})$. Dito isto, de (1.3), obtém-se que

$$Rm(e_1, e_2, e_2, e_1) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \det(h_{ij}) = K,$$

que é equivalente a (1.4). Agora considere $\{X, Y\}$ uma base arbitrária de T_pM. O algoritmo de ortonormalização de Gram-Schmidt resulta na base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ dada por

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{X}{|X|}, \\ e_2 &= \frac{Y - \langle Y, \frac{X}{|X|}\rangle \frac{X}{|X|}}{\left|Y - \langle Y, \frac{X}{|X|}\rangle \frac{X}{|X|}\right|} = \frac{Y - \frac{\langle Y,X\rangle}{|X|^2} X}{\left|Y - \frac{\langle Y,X\rangle}{|X|^2} X\right|}. \end{aligned}$$

Portanto, do cálculo anterior e da simetria do tensor curvatura Rm, obtém-se

$$\begin{aligned} K = Rm(e_1, e_2, e_2, e_1) &= \frac{Rm\left(X, Y - \frac{\langle Y,X\rangle}{|X|^2} X, Y - \frac{\langle Y,X\rangle}{|X|^2} X, X\right)}{|X|^2 \left|Y - \frac{\langle Y,X\rangle}{|X|^2}\right|^2} \\ &= \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2 \left(|Y|^2 - 2\frac{\langle Y,X\rangle^2}{|X|^2} + \frac{\langle Y,X\rangle^2}{|X|^2}\right)} = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle Y, X\rangle^2}. \end{aligned}$$

□

Do teorema anterior, segue que a curvatura Gaussiana $K_g : M \to \mathbb{R}$ de uma variedade Riemanniana (M, g) de dimensão 2 é dada por

$$K_g(p) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

com $\{X, Y\}$ uma base arbitrária de T_pM.

O Teorema de Gauss-Bonnet relaciona a geometria de uma variedade fechada com a sua topologia por meio da característica de Euler.

Teorema 7 (Teorema de Gauss-Bonnet)**.** *Seja (M, g) uma superfície Riemanniana fechada. Então*

$$\int_M K_g dv_g = 2\pi\chi(M),$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M.

1.3 Operadores Diferenciáveis

Definição 4. *Seja T um tensor do tipo $(r, 0)$. A derivada covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1, 0)$ definido como*

$$\begin{aligned}\nabla T\left(X_1, \ldots, X_r, X\right) &:= \left(\nabla_X T\right)\left(X_1, \ldots, X_r\right) \\ &:= X\left(T\left(X_1, \ldots, X_r\right)\right) - \sum_{k=1}^{r}\left(X_1, \ldots, \nabla_X X_k, \ldots, X_r\right),\end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana.

Definição 5. *Seja M uma variedade. Dada uma função $f \in C^{\infty}(M)$, o campo* ***gradiente*** *de f é definido como o único campo de vetores $\nabla_g f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$\nabla_g f(X) = X(f) = df(X) = g(\nabla_g f, X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas, obtém-se

$$\nabla_g f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa da matriz (g_{ij}).

Definição 6. *A* ***Hessiana*** *de f é um tensor do tipo $(2, 0)$ denotada por $\nabla^2 f$ e definida como*

$$\nabla^2 f(X, Y) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f).$$

A Hessiana é um tensor simétrico. De fato

$$\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) = (YX - XY)f - (\nabla_Y X - \nabla_X Y)f = [Y,X]f - [Y,X]f = 0.$$

Além disso, note que pela Definição 5, obtém-se

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X,Y) &= Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f = Yg(\nabla_g f, X) - g(\nabla_g f, \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_g f, X) + g(\nabla_g f, \nabla_Y X) - g(\nabla_g f, \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_g f, X),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla^2 f(X,Y) = g(\nabla_Y \nabla_g f, X).$$

Definição 7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O **divergente** de X com respeito à métrica g é definido como*

$$div_g X = tr\left(Y \to \nabla_Y X\right).$$

Se $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal, então

$$div_g X = \sum_i g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right).$$

Definição 8. *O **Laplaciano** de uma função $f \in C^\infty(M)$ com respeito à métrica g é definido como*

$$\Delta_g f := div_g(\nabla_g f).$$

Em coordenadas, pode-se mostrar que

$$\Delta_g f = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right). \tag{1.5}$$

Agora denote por dv_g a forma de volume de M e $d\sigma_g$ a forma de volume induzida na fronteira ∂M. Seja η a normal unitária para fora da fronteira de M.

Teorema 8 (Teorema da Divergência)**.** *Seja M uma variedade compacta, orientada e com fronteira ∂M. Se X é um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\int_M f div_g X dv_g = -\int_M \langle \nabla_g f, X \rangle dv_g + \int_{\partial M} f \left\langle X, \eta \right\rangle d\sigma_g.$$

O resultado abaixo é uma consequência do Teorema da Divergência, basta tomar $X = \nabla_g f$, onde $h \in C^\infty(M)$

Corolário 1. *Sejam M uma variedade orientada compacta, e $f, h \in C^\infty(M)$. Então*

$$\int_M f \Delta_g h dv_g = -\int_M \langle \nabla_g f, \nabla_g h \rangle dv_g + \int_{\partial M} f \frac{\partial h}{\partial \eta} d\sigma_g.$$

1.4 Elementos de Análise Funcional

Antes de expor resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho, é fundamental lembrar de definições e resultados de Análise Funcional.

Definição 9. *Seja (X, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em X.*

1. *(x_n) é de **Cauchy**, se dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*
$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$
para todo $n, m > N$.

2. *(x_n) é **convergente** e converge para $x \in X$ se dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*
$$d(x_n, x) < \epsilon,$$
para todo $n > N$.

3. *O espaço métrico (X, d) é **completo** se toda sequência de Cauchy é convergente.*

Definição 10. *Seja X um espaço vetorial. A aplicação $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ é uma **norma** em X se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ e com $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*

2. *$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in X$;*

3. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

*O espaço $(X, \|.\|)$ é chamado **espaço normado**.*

Definição 11. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Define-se uma **distância** d em X como $d(x, y) = \|x - y\|$. Se o espaço métrico (X, d) é completo, X é dito um **espaço de Banach**.*

Definição 12. *Seja X um espaço com produto interno. Se X é um espaço de Banach com respeito à norma proveniente do produto interno, então X é dito um **espaço de Hilbert**.*

É fácil ver que $\mathbb{R}^n$ com o produto interno ususal é um espaço de Hilbert.

Definição 13. *Seja X um espaço de Hilbert. Uma sequência (x_n)* ***converge fracamente*** *para x, e é indicada por $x_n \rightharpoonup x$, se*

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle\,,$$

para todo $y \in X$.

Definição 14. *Uma aplicação linear $T : X \to Y$ entre espaços de Banach é dita* ***compacta*** *se a imagem de todo conjunto limitado em X é pré-compacto em Y.*

Lema 1. *Se $x_n \rightharpoonup x$ em um espaço de Hilbert, então*

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

Lema 2. *Seja H um espaço de Hilbert e X um espaço de Banach tal que a aplicação inclusão $i : H \to X$ é compacta. Então, dada um sequência limitada (x_n) em H existe uma subsequência (x_{n_k}) e $x \in H$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em H e $x_{n_k} \to x$ em X.*

Teorema 9 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear, para o qual existem constante $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$|B(u,v)| \leq \alpha |u||v|$$

e

$$\beta |u|^2 \leq B(u,u),$$

para todo $u, v \in H$. Seja $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = f(v),$$

para todo $v \in H$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9] na página 297.

1.5 Espaço de Funções

Seja M uma variedade Riemanniana compacta com elemento de volume dv_g. Para cada $1 \leq p < \infty$, define-se

$$L^p(M) := \left\{ u : M \to \mathbb{R} \text{ integrável} : \int_M |u|^p dv_g < +\infty \right\}_{/\sim},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é que duas funções são equivalentes se elas são iguais a menos de um conjunto de medida nula. Além disso, é bem conhecido que o espaço $L^p(M)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_p := \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Porém, apenas o $L^2(M)$ munido do produto interno

$$\langle f, h\rangle_2 = \int_M fh dv_g,$$

é um espaço de Hilbert. Também é conhecido que se $f \in L^p(M)$ e $h \in L^q(M)$ com $p, q \in [1, \infty)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \|h\|_q. \tag{1.6}$$

Esta é a **Desigualdade de Hölder**.

Dado $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, o **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(M)$ é definido como o completamento do espaço $C^\infty(M)$ em $L^p(M)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(M)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_M |\nabla^j u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

É usual denotar o espaço $W^{k,2}(M)$ como $H^k(M)$. Assim, o espaço $H^k(M)$ munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^k} = \sum_{j=0}^{k} \int_M \left\langle \nabla^j u, \nabla^j v \right\rangle dv_g,$$

é um espaço de Hilbert. Note que

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_M u^2 dv_g + \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g.$$

Uma observação importante é que uma função f pertence ao espaço $W^{k,p}(M)$ se e somente se f possui derivada generalizada até a ordem k pertencente a $L^p(M)$. Assim, dizer que uma função f pertence ao espaço $W^{k,p}(M)$ é equivalente a dizer que as derivadas de f existem *q.t.p.* até a ordem k e

$$f, \nabla f, \ldots, \nabla^k f \in L^P(M).$$

Defina $H_0^1(M)$ como o completamento de $C_0^\infty(M)$ com respeito a esta mesma norma, onde $C_0^\infty(M)$ é o conjunto das funções $C^\infty(M)$ com suporte contido no interior de M.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Dado $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha < 1$, define-se

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} = \|f\|_{C^k(\Omega)} + \sup_{x,y\in\Omega;\ x\neq y} \frac{\left|D^k f(x) - D^k f(y)\right|}{|x-y|^\alpha}$$

e

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega); \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\},$$

chamado de **Espaço de Hölder**. Dada uma variedade Riemanniana fechada M, considere um número finito de cartas coordenadas (U_i, ϕ_i) tais que $B_2(0) = \phi^{-1}(U_i)$ e $M = \bigcup_i \phi_i(B_1(0))$. Dada uma função $f \in C^k(M)$, defina

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} = \sum_i \|f \circ \phi_i\|_{C^{k,\alpha}(B_1(0))}.$$

Lema 3. *As normas geradas por duas famílias finitas de cartas coordenadas em M são equivalentes.*

O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(M)$ é o conjunto de todas as funções $f \in C^k(M)$ tais que

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} < \infty.$$

1.6 Operadores Diferenciais Elípticos

Definição 15. *Seja M uma variedade Riemanniana. Um **operador diferencial linear** $A(u)$ de ordem $2m$ sobre M, escrito numa carta local (U,ϕ), é da forma*

$$A(u) = \sum_{l=0}^{2m} a_{i_1\ldots i_l} \nabla_{i_i} \nabla_{i_l} u,$$

*onde $a_{i_1\ldots i_l}$ são funções suaves em U e $u \in C^{2m}(M)$. Os termos de ordem $2m$ são chamados de **termo líder**, assumindo que a_{2m} é não nulo. O operador é dito **elíptico** em um ponto $x \in U$ se existe $\lambda(x) \geq 1$, tal que para todo vetor v tem-se*

$$\|v\|^{2m}\lambda^{-1}(x) \leq a_{i_1\ldots i_{2m}} v_i \cdots v_{i_{2m}} \leq \lambda(x)\|v\|^{2m}. \tag{1.7}$$

Se $\lambda(x)$ em (1.7) é constante, então o operador é chamado de ***uniformemente elíptico***.

Pela expressão em coordenadas do laplaciano (1.5) segue que o laplaciano é um operador linear uniformemente elíptico de ordem 2.

1.6.1 Regularidade Elípticas

Teorema 10. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $1 \leq p \leq n$, então*

$$W^{1,p}(M) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(M) \quad \text{(Inclusão contínua)},$$

ou seja, existe $C = C(M,g)$ tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(M)} \leq C\left(\|u\|_{L^p(M)} + \|\nabla u\|_{L^p(M)}\right).$$

Teorema 11 (Mergulhos de Sobolev)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Então*

(a) $W^{k,p}(M) \subset L^{\frac{np}{n-kp}}(M)$, inclusão contínua, se $1 \leq k\frac{n}{p}$;

(b) $W^{1,p}(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, inclusão contínua, se $p > n$;

(c) $W^{k,p}(M) \subset C^{k-1,\alpha}(M)$, para todo $k \geq 1$;

(d) Se $kp > n$, então

$$W^{k,p}(M) \subset C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(M) \text{ (Inclusão contínua)};$$

(e) Se $u \in W^{k,p}(M)$, para todo $k \geq 1$, então $u \in C^{\infty}(M)$.

Teorema 12 (Teorema da Compacidade)**.** *Seja M uma variedade de dimensão n.*

(a) $W^{k,q}(M) \subset L^r(M)$, se $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$ (Inclusão contínua);

(b) Se $n \geq 3$, então $W^{k,q}(M) \subset\subset L^r(M)$, se $\frac{1}{r} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$ (Inclusão compacta);

(c) Se $n = 2$, então $W^{1,2}(M) \subset\subset L^p(M)$, para todo $1 \leq p < \infty$;

(d) $W^{k,n}(M) \subset\subset C^{\alpha}(M)$*, se* $\frac{1}{q} \leq \frac{k-\alpha}{n}$ *(Inclusão contínua).*

Teorema 13 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Se* $u \in W_0^{1,p}(U)$ *para algum* $1 \leq p \leq n$*, então*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(u)},$$

para cada $q \in [1, np/(n-p)]$*, a constante* C *depende somente de* p, q, n *e* U*.*

Lema 4 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* M *uma variedade Riemanniana sem fronteira. Existe* $c > 0$ *tal que, para toda* $f \in H^1(M)$*, tem-se*

$$\int_M (f - \overline{f})^2 dv_g \leq c \int_M |\nabla_g f|^2 dv_g,$$

onde

$$\overline{f} = \frac{\int_M f dv_g}{\int_M dv_g}.$$

1.6.2 Soluções Fracas

Seja A um operador diferencial linear de ordem $2m$ definido sobre uma variedade Riemanianna M, com ou sem bordo. Se $f \in L^p(M)$ e os coeficientes de A são mensuráveis e localmente limitados, uma função $u \in W^{2m,p}(M)$ é dita **solução forte em** L^p, no sentido de $A(u) = f$, se existe uma sequência $\{u_i\}_i$ de funções em $C^\infty(M)$ tal que $u_i \to u$ em $W^{2m,p}(M)$ e $A(u_i) \to f$ em $L^p(M)$.

Definição 16. *Se* A *é um operador diferencial linear em* M*, é dito que* $u \in L^1(M)$ *satisfaz* $A(u) = f$ *no* ***sentido fraco****, se para toda função suave de suporte compacto* ϕ*, tem-se que*

$$\int_M uA^*(\phi) dv_g = \int_M f\phi dv_g,$$

onde A^* *é adjunta formal de* A*, obtida de* A *por integração por partes.*

Teorema 14. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* A *um operador linear elíptico em* Ω *de ordem* $2m$ *com coeficientes suaves. Suponha-se que* u *é uma solução fraca da equação* $Au = f$*, com* $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$*. Então* $u \in C^{k+2m,\alpha}(\Omega)$*, com* $0 < \alpha < 1$*. Se* $f \in W^{k,p}(\Omega)$*, com* $1 < p < \infty$*, então* $u \in W^{k+2m,p}(\Omega)$*.*

1.6.3 Soluções Fracas do Laplaciano

Definição 17. *Uma função $u \in H^1(M)$ é uma* ***solução fraca*** *(do Laplaciano) para a equação*

$$\Delta_g u = f,$$

se, e somente se satisfaz a condição

$$\int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle \, dv_g + \int_M f v dv_g = 0,$$

para todo $v \in H^1(M)$.

Teorema 15. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Dada $f \in L^2(M)$, existe uma solução fraca $u \in H^1(M)$ de $\Delta_g u = f$ se, e somente se $\displaystyle\int_M f dv_g = 0$.*

Demonstração. Se $u \in H^1(M)$ é uma solução fraca de $\Delta_g u = f$, então pela definição

$$\int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle \, dv_g + \int_M f v dv_g = 0.$$

Como M é compacta, então a função constante 1 pertence a $H^1(M)$. Assim, considere $v = 1$ na identidade acima e obtenha que

$$\int_M f dv_g = 0.$$

Agora suponha que que $\int_M f dv_g = 0$.

Afirmação 1. *Uma função $u \in H^1(M)$ com $\int_M u dv_g = 0$ é solução fraca de $\Delta_g u = f$ se e somente se u é ponto crítico do funcional $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ dado por*

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla_g \phi|^2 dv_g + \int_M f \phi dv_g,$$

onde $\mathcal{C} = \{\phi \in H^1(M); \int_M \phi dv_g = 0\}$.

Note que $\mathcal{C}$ é um subespaço vetorial de $H^1(M)$. Desta forma, por definição u é ponto critico do funcional F se e somente se

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(u + t\phi) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}.$$

Por outro lado,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(u+t\phi) = \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g \phi\rangle\, dv_g + \int_M f\phi dv_g.$$

Se $\phi \in H^1(M)\backslash\mathcal{C}$, defina $\overline{\phi} = \phi - \frac{1}{vol(M)}\int_M \phi dv_g$. Note que $\overline{\phi} \in \mathcal{C}$ e

$$\int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g \phi\rangle\, dv_g + \int_M f\phi dv_g = \int_M \left\langle \nabla_g u, \nabla_g \overline{\phi}\right\rangle dv_g + \int_M f\overline{\phi} dv_g,$$

já que a média de $\overline{\phi}$ é zero. Logo, u é ponto crítico de $F : H^1(M) \to \mathbb{R}$ com $\int_M u dv_g = 0$ se e somente se é ponto crítico de $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$.

Afirmação 2. *$F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente.*

Para todo $\epsilon > 0$, tem-se

$$|ab| \le \frac{\epsilon^2}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}b^2,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Da Desigualdade de Poincaré (Lema 4), tem-se

$$\int_M \phi^2 \le c|\nabla_g \phi|^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}. \tag{1.8}$$

Daí, se $\epsilon^2 \le (2c)^{-1}$, obtém-se

$$\begin{aligned} F(\phi) &\ge \frac{1}{2}\int_M |\nabla_g\phi|^2 dv_g - \frac{\epsilon^2}{2}\int_M \phi^2 dv_g - \frac{1}{2\epsilon^2}\int_M f^2 dv_g \\ &\ge \frac{1}{2}\int_M |\nabla_g\phi|^2 dv_g - \frac{1}{4c}\int_M \phi^2 dv_g - \frac{1}{2\epsilon^2}\int_M f^2 dv_g \\ &= \frac{1}{4}\int_M |\nabla_g\phi|^2 dv_g - c\int_M f^2 dv_g \ge -K, \end{aligned} \tag{1.9}$$

para alguma constante $K > 0$. Isto prova a Afirmação 2.

Seja $u_i \in \mathcal{C}$ tal que $F(u_i) \to \inf_{\mathcal{C}} F = a \in \mathbb{R}$.

Afirmação 3. *A sequência (u_i) é limitada em $H^1(M)$.*

De (1.9), tem-se que

$$\frac{1}{4}\int_M |\nabla u_i|^2 dv_g - c_1 \le F(u_i),$$

e como $F(u_i)$ converge, segue que

$$\int_M |\nabla u_i|^2 dv_g \leq c_2,$$

para alguma constante positiva c_2. Além disso, de (1.8), obtém-se que

$$\int_M u_i^2 dv_g \leq c,$$

para alguma constante positiva c. Daí, segue a afirmação.

Pelo Teorema da Compacidade (Teorema 12), tem-se que $H^1(M) \subset L^2(M)$ compactamente. Como a sequência (u_i) é limitada em $H^1(M)$, segue do Lema 2 que existe uma subsequência, ainda denotada por (u_i), tal que $u_i \to u$ em $L^2(M)$ e $u_j \rightharpoonup u$ em $H^1(M)$. Assim,

$$\int_M fudv_g = \lim_{i\to\infty} \int_M fu_i,$$

e do Lema 1, obtém-se

$$\|u\|_{H^1} \leq \liminf \|u_i\|_{H^1}.$$

Como $u_i \to u$ em $L^2(M)$, segue que

$$F(u) \leq \liminf F(u_i) = a = \inf_{\mathcal{C}} F.$$

Portanto, u é ponto de mínimo de F em $\mathcal{C}$. □

Corolário 2. *Seja M uma variedade Riemanniana fechada. Dada $f \in C^\infty(M)$ com $\int_M f dv_g = 0$, existe $u \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta_g u = f$.*

Demonstração. Como $f \in C^\infty(M)$ e M é compacta, em particular tem-se que $f \in W^{k,p}(M)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $1 \leq p \leq \infty$. Daí, pelo resultado anterior, existe uma solução fraca $u \in H^1(M)$ da equação $\Delta_g u = f$. Do Teorema 14 segue que $u \in W^{k,p}(u)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e todo $1 \leq p \leq \infty$. Do item (e) do Teorema 11, obtém-se que $u \in C^\infty(M)$.

□

1.7 O Princípio do Máximo

O seguinte principio pode ser encontrado em ([1], Capítulo 3, Seção 8).

Teorema 16. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $h \in C^\infty(M)$ não positiva. Suponha que $f \in C^2(M)$ satisfaz*

$$\Delta_g f + \langle X, \nabla_g f\rangle + h(x)f \geq 0.$$

Se $f \leq m$, onde $m \geq 0$, então

(a) $f \equiv m$; ou

(b) $f(x) < m$, para todo $x \in int\ M$.

Além disso, se $p \in \partial M$, f é contínua e $f(p) = m \geq 0$, então a derivada normal para fora em p, se existir, satisfaz $\partial f/\partial\eta(p) > 0$, desde que p pertença à fronteira de uma bola contida em M. Mas ainda, se $h \equiv 0$, a mesma conclusão é verdadeira para $m < 0$.

1.8 Desigualdades Importantes

Nesta seção, serão abordadas as desigualdades que desempenham um papel crucial nas demonstrações dos teoremas apresentados nas próximas partes deste trabalho.

Lema 5 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada. Sejam $f : M \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

$$\varphi\left(\frac{1}{vol(M)}\int_M f dv_g\right) \leq \frac{1}{vol(M)}\int_M \varphi \circ f dv_g.$$

Observação 1. *A Desigualdade de Jensen é verdadeira para qualquer medida em M no lugar de dv_g.*

Lema 6 (Desigualdade de Young)**.** *Para $a, b \in (0, \infty)$ e todo $\delta > 0$ tem-se que*

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2.$$

Basta usar que $(x-y)^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e escolher $x = a\sqrt{\delta}$ e $y = \frac{b}{\sqrt{\delta}}$.

Lema 7 (Lema de Fatou)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativa então*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) dv \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n dv.$$

Teorema 17 (Desigualdade de Trundinger)**.** *Para toda variedade compacta (M, g), existem constantes $\eta > 0$ e $C = C(g)$, tal que, para todo $p \geq 2$,*

$$\int_M e^{p(f-\overline{f})} dv_g \leq C e^{\eta \frac{p^2}{4} \|\nabla f\|^2_{L^2(M)}},$$

para todo $f \in W^{1,2}(M)$, onde

$$\overline{f} := \frac{1}{vol(M)} \int_M f dv_g.$$

Demonstração deste resultado pode ser vista em ([5], Corolário 1.7).

Lema 8 (Brezis – Merle, 1991)**.** *Considere um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $u \in C^2(\Omega)$ uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em\ \Omega \\ u = 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Se r é o diâmetro de Ω, para todo $\delta \in (0, 4\pi)$, tem-se que

$$\int_\Omega e^{\frac{(4\pi-\delta)u(x)}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx \leq \frac{4\pi^2 r^2}{\delta}.$$

Demonstração deste resultado pode ser vista em ([4], Teorema 1).

1.9 Geometria Conforme

Definição 18. *Duas métricas g e $\overline{g}$ em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função positiva suave f tal que $\overline{g} = fg$. O conjunto de todas as métricas conformes a uma métrica g é denotada por $[g]$.*

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. O elemento de volume de M, denotado por dv_g, é dado em coordenadas por

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx. \tag{1.10}$$

O volume da variedade M é dado por

$$vol(M,g) = \int_M dv_g.$$

Nota-se que quando multiplicamos a métrica g, por uma função constante λ, obtém-se a seguinte relação entre os volumes

$$vol(M,\lambda g) = \lambda^{\frac{n}{2}} vol(M,g).$$

De fato,

$$\begin{aligned} dv_{\lambda g} &= \sqrt{\det(\lambda g_{ij})}dx \\ &= \sqrt{\lambda^n \det(g_{ij})}dx \\ &= \lambda^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(g_{ij})}dx \\ &= \lambda^{\frac{n}{2}} dv_g. \end{aligned}$$

Observa-se que se g e $\overline{g}$ pertencem a uma classe conforme, então pode-se escrever $\overline{g} = e^u g$, onde u é uma função suave.

Teorema 18 (Teorema de Uniformização)**.** *Seja M uma variedade diferenciável fechada de dimensão 2. Dada qualquer métrica $\overline{g}$ em M, existe uma métrica g que é conforme a $\overline{g}$ e tem a curvatura Gaussiana constante $K_g = k \in \mathbb{R}$.*

Do Teorema de Gauss-Bonnet, segue que os sinais de k e da característica de Euler são os mesmos. Além disso, é bem conhecido que dada uma variedade Riemanniana (M,g) fechada de dimensão 2, em torno de cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança coordenada U tal que a métrica nestas coordenadas é conforme a métrica euclidiana, ou seja, $g = e^f\delta$ em U, onde δ é a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 19. *Sejam $\overline{g}$ e g duas métricas Riemannianas em uma variedade M tal que $\overline{g} = e^{2u}g$, para alguma função suave u definida em M. Então as curvaturas gaussianas $K_{\overline{g}}$ e K_g, de $\overline{g}$ e g, respectivamente, são relacionadas pela equação*

$$-\Delta_g u + K_g = e^{2u}K_{\overline{g}}.$$

1.10 Problema da Curvatura Gaussiana Prescrita

A motivação desse trabalho vem do problema clássico de prescrever curvatura Gaussiana. Seja M uma superfície Riemanniana fechada com curvatura Gaussiana k. Se uma função $f \in C^\infty(M)$ é a curvatura Gaussiana de uma métrica conforme $g = e^{2u}g$, então u satisfaz a equação (2). Integrando (2), obtém-se

$$-\int_M \Delta_g u dv_g + \int_M K_g dv_g = \int_M f e^{2u}.$$

Como M não tem fronteira, segue do Teorema da Divergência (Teorema 8) que

$$-\int_M \Delta_g u dv_g = \int_M div(\nabla_g u) dv_g = 0.$$

Daí, do Teorema de Gauss-Bonnet (Teorema 7) tem-se

$$\int_M f e^{2u} dv_g = 2\pi\chi(M). \tag{1.11}$$

Logo é natural analisar as soluções de (2) considerando o sinal de $\chi(M)$. O foco deste trabalho é o estudo do caso em que a característica de Euler é negativa.

Portanto, daqui por diante, será considerado que M é uma variedade suave fechada com característica de Euler negativa, ou seja, $\chi(M) < 0$. Além disso, do Teorema de Uniformização (Teorema 18), pode-se presumir que M possui curvatura Gaussiana constante $k < 0$ e que $vol(M, g) = 1$.

Uma propriedade fundamental da equação (2) é que suas soluções são pontos críticos de um funcional, como mostra o seguinte lema.

Lema 9. *Seja (M, g) uma superfície Riemanniana fechada. Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, pontos críticos do funcional $I_f : H^1(M) \to \mathbb{R}$ definido como*

$$I_f(u) = \frac{1}{2}\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + 2K_g u - f e^{2u}\right) dv_g,$$

para todo $u \in H^1(M)$, são soluções fracas da equação

$$-\Delta_g u + K_g = f e^{2u},$$

ou seja,

$$\int_M \left(\langle \nabla u, \nabla v\rangle + K_g u v - f v e^{2u}\right) dv_g = 0,$$

para todo $v \in H^1(M)$. Em particular, $u \in C^\infty(M)$ e a métrica $\overline{g} = e^{2u}g$ possui curvatura Gaussiana igual a f.

Demonstração. Sabe-se que por definição, u é ponto crítico do funcional I_f se, e somente se

$$dI_f(u)(\phi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I_f(u+t\phi) = 0, \quad \forall \phi \in H^1(M).$$

Como

$$dI_f(u)(\phi) = \int_M \left(\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + K_g \phi - f\phi e^{2u} \right) dv_g = 0,$$

segue a primeira parte da demonstração. A segunda segue dos resultados de regularidade elíptica. □

Observa-se que quando f é positiva em algum ponto p, o funcional I_f é ilimitado inferiormente. De fato, seja U uma vizinhança de p tal que $f(q) > 0$ para todo $q \in U$. Seja η uma função com suporte em U e igual a 1 em uma vizinhança de p. Assim,

$$I_f(t\eta) = \frac{1}{2} \int_M \left(t^2 |\nabla \eta|_g^2 + K_g t\eta - fe^{2t\eta} \right) dv_g \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{2} \int_U \left(t^2 |\nabla \eta|_g^2 + K_g t\eta - fe^{2t\eta} \right) dv_g + \frac{1}{2} \int_{M \setminus U} f dv_g \to -\infty, \tag{1.13}$$

quando $t \to +\infty$, já que a exponencial cresce mais rápido do que qualquer polinômio e $f > 0$ em U. Por outro lado, tem-se o seguinte resultado.

Proposição 2. *Sejam (M, g) uma superfície Riemanniana fechada com $\chi(M) < 0$, e $f \in C^\infty(M)$ com $f \leq 0$ e $f \not\equiv 0$. Então I_f é limitado inferiormente e (2) admite solução única.*

Demonstração. Primeiro nota-se que rescrevendo (3) chega-se em

$$\begin{aligned} I_f(u) &= \frac{1}{2} \int_M \left(|\nabla u|^2 + 2ku - fe^{2u} \right) dv_g \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_M \left(ku - \frac{1}{2} fe^{2u} \right) dv_g. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Jensen (Lema 5) na última integral e fazendo $d\mu = -f dv_g$ obtém-se que

$$-\int_M fe^{2u} dv_g = \int_M e^{2u} d\mu \geq v_f e^{\frac{2}{v_f} \int_M u d\mu} = v_f e^{-\frac{2}{v_f} \int_M f u dv_g},$$

onde $v_f = \int_M d\mu = -\int_M f dv_g > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} I_f(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + k\int_M u dv_g + \frac{1}{2}v_f e^{-\frac{2}{v_f}\int_M f u dv_g} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + k\int_M u dv_g - k\int_M f u dv_g + \frac{1}{2}v_f e^{-\frac{2}{v_f}\int_M f u dv_g} + k\int_M f u dv_g \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + k\int_M u(1-f) dv_g + \frac{1}{2}v_f e^{-\frac{2}{v_f}\int_M f u dv_g} + k\int_M f u dv_g. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Sejam $\overline{u}, \overline{u}^f \in H^1(M)$, definidos da seguinte forma

$$\overline{u} = \frac{1}{vol(M)}\int_M u dv_g \qquad e \qquad \overline{u}^f = \frac{1}{vol(M)}\int_M f u dv_g. \tag{1.15}$$

Como o volume é unitário então observa-se que

$$\begin{aligned} \int_M u(1-f) dv_g &= \int_M u dv_g - \int_M f u dv_g \\ &= \int_M u dv_g - \int_M \overline{u}^f dv_g \\ &= \int_M (u - \overline{u}^f) dv_g. \end{aligned}$$

A Desigualdade de Young (Lema 6) implica que para todo $\delta > 0$ vale

$$\begin{aligned} \int_M (u - \overline{u}^f) dv_g &\leq \frac{\delta^2}{2}\int_M (u - \overline{u}^f)^2 dv_g + \frac{1}{2\delta^2} \\ &= \frac{\delta^2}{2}\|u - \overline{u}^f\|_{L^2}^2 + C_\delta. \end{aligned}$$

Então, segue que

$$\int_M u(1-f) dv_g \leq \frac{\delta^2}{2}\|u - \overline{u}^f\|_{L^2}^2 + C_\delta. \tag{1.16}$$

Afirmação 4. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|u - \overline{u}^f\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla u\|_{L^2}^2,$$

para todo $u \in H^1(M)$ e $\overline{u}^f$ dada por (1.15).

Suponha por contradição, que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in H^1(M)$ tal que

$$\|u_n - \overline{u}_n^f\|_{L^2}^2 > n\|\nabla u_n\|_{L^2}^2. \tag{1.17}$$

Seja $v_n \in H^1(M)$ definido como

$$v_n = \frac{u_n - \overline{u}_n^f}{\|u_n - \overline{u}_n^f\|_{L^2}}.$$

Defina $\overline{v}_n$ e $\overline{v}_n^f$ como em (1.15). Daí, $\|v_n\|_{L^2} = 1$ e como $\overline{u}_n^f \in \mathbb{R}$, segue que

$$\nabla v_n = \frac{\nabla u_n}{\|u_n - \overline{u}_n^f\|_{L^2}}.$$

Assim, de (1.17) segue que

$$\|\nabla v_n\|_{L^2} \leq \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2}}{\|u_n - \overline{u}_n^f\|_{L^2}^2} < \frac{1}{n} \tag{1.18}$$

Então (v_n) é uma sequência limitada em $H^1(M)$, pois

$$\|v_n\|_{H^1}^2 = \|v_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n\|_{L^2}^2.$$

Dessa forma, do Lema 2, a menos de subsequência, v_n converge fracamente para algum v em $H^1(M)$ e fortemente em L^2. Em particular, $\|v_n\|_{L^2} \to \|v\|_{L^2}$. Como $\|v_n\|_{L^2} = 1$, então $\|v\|_{L^2} = 1$. Do Lema 1, tem-se

$$\|v\|_{H^1} \leq \liminf \|v_n\|_{H^1}.$$

Daí,

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \liminf \|\nabla v_n\|_{L^2}^2.$$

De (1.18), obtém-se que $\nabla v \equiv 0$. Implicando que v é constante. Se $\overline{v}^f = 0$, então

$$0 = \overline{v}^f = \frac{v}{vol(M)} \int_M f dv_g.$$

Como f não é identicamente nula, então $v = 0$, que é uma contradição com o fato que $\|v\|_{L^2} = 1$. Disto, segue a afirmação.

Aplicando a afirmação acima na desigualdade (1.16), obtém-se que

$$\int_M u(1-f)dv_g \leq \frac{C\delta^2}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_\delta. \tag{1.19}$$

Retomando a desigualdade (1.14), como $k < 0$, existe $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}v_f e^{\frac{2t}{v_f}} - kt \geq C_1|t| - C_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

assim

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}v_f e^{\frac{2t}{v_f}} - kt\right) \to +\infty.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_f e^{-\frac{2}{v_f}\int_M fudv_g} + k\int_M fudv_g &\geq C_1\left|\int_M fudv\right| - C_2\\ &\geq C_1\left|\overline{u}^f\right| - C_2.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade acima e (1.19) em (1.14), para um δ pequeno, resulta que

$$\begin{aligned} I_f(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + k\left(\frac{\delta^2}{2}C\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_\delta\right) + C_1\left|\overline{u}^f\right| - C_2\\ &\geq C_3\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_1|\overline{u}^f| + C_4. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Observa-se que

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u - \overline{u}^f\|_{L^2} + \|\overline{u}^f\|_{L_2}.$$

Pela Afirmação 4 e usando o fato que $\|\overline{u}^f\|_{L^2} = \left|\overline{u}^f\right|$, conclui-se que

$$\|u\|_{L^2} \leq C_3\|\nabla u\|_{L^2} + \left|\overline{u}^f\right| \leq C_3\|u\|_{H^1} + |\overline{u}^f|.$$

De (1.20), obtém-se que

$$I_f(u) \geq C_3\|u\|_{H^1} + C_1|\overline{u}^f| + C_4. \tag{1.21}$$

Seja $u_n \in H^1(M)$ tal que

$$I_f(u_n) \to a = \inf I_f.$$

De (1.21) segue que (u_n) é limitada em $H^1(M)$. Daí, do Lema 2, a menos de uma subsequência $u_n \rightharpoonup v$ em $H^1(M)$ e $u_n \to v$ em $L^2(M)$ para algum $v \in H^1(M)$. Do Lema 1, tem-se que

$$\|v\|_{H^1} \leq \liminf \|v_n\|_{H^1},$$

o que implica que

$$\|\nabla v\|_{L^2} \leq \liminf \|\nabla v_n\|_{L^1}.$$

Da definição de I_f, segue que $I_f(v) \leq a$ e v é um ponto crítico de I_f.

Como $f \leq 0$ e $f \equiv 0$, segue que I_f é um funcional estritamente convexo, já que $d^2 I_f(u)(v,v) > 0$, para todo $v \neq 0$ em $H^1(M)$. Logo, v é o único ponto crítico de I_f. $\square$

Proposição 3. *Sejam* (M, g) *uma superfície Riemanniana fechada com* $\chi(M) < 0$, *e* $f \in C^\infty(M)$ *com* $f \leq 0$ *e* $f \not\equiv 0$. *Então*

$$d^2 I_f(h, h) \geq C\|h\|^2_{H^1},$$

para todo $h \in H^1(M)$ *e algum* $C \geq 0$. *Além disso,*

$$\left| d^2 I_f(u)(h, w) \right| \leq C\|h\|_{H_1}\|w\|_{H^1},$$

para todo $h, w \in H^1(M)$.

Demonstração. Inicialmente, observa-se que derivando duas vezes o funcional $I_f(u)$, obtém-se

$$d^2 I_f(u)(h, h) = \int_M \left(|\nabla h|^2_g - 2fe^{2u}h^2 \right) dv_g, \tag{1.22}$$

para todo $h \in H^1(M)$. Como M é compacta, $f \leq 0$ e $f \not\equiv 0$, então

$$d^2 I_f(u)(h, h) \geq C \int_M \left(|\nabla h|^2 + h^2 \right) dv_g = C\|h\|^2_{H^1}.$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|d^2 I_f(u)(h, w)| \leq C_0\|h\|_{H^1}\|w\|_{H^1}.$$

□

2 Existência de Múltiplas Soluções

Deve-se lembrar que está sendo considerado uma superfície Riemanniana (M, g) com característica de Euler $\chi(M) < 0$, curvatura Gaussiana constante e volume unitário. Esse capítulo tem como objetivo mostrar a não degenerescência de qualquer minimizante local de I_f. Além disso, demonstra que a existência de minimizantes locais para I_f implica a possível existência de pontos críticos tipo sela.

2.1 Não Degenerescência e Estabilidade de Minimizantes Locais

Seja $f \in C^\infty(M)$ com $f \leq 0$ e $f \not\equiv 0$. Nesta seção, será garantida a não degenerescência dos minimizantes locais para o funcional I_f.

Proposição 4. *Suponha que para alguma $f \in C^\infty(M)$ o funcional I_f admite um minimizante local $u_f \in H^1(M)$. Então u_f é um ponto crítico não degenerado de I_f, ou seja, existe $C > 0$ tal que*

$$d^2 I_f(u_f)(h, h) > C\|h\|_{H^1}^2,$$

para todo $h \in H^1(M)$.

Demonstração. Por hipótese, u_f é um minimizante local para I_f. Daí

$$d^2 I_f(u_f)(h, h) \geq 0,$$

para todo $h \in H^1(M)$. Seja

$$c_0 := \inf_{\|h\|_{H^1}=1} d^2 I_f(u_f)(h, h) \geq 0.$$

Para mostrar a não degenerecência do ponto de mínimo, basta provar que c_0 é estritamente positivo. Será demonstrado por contradição.

Afirmação 5. *Se $c_0 = 0$, existe um $h \in H^1(M)$ tal que*

$$d^2 I_f(u_f)(h,h) = 0 \quad e \quad \|h\|_{H^1} = 1, \tag{2.1}$$

e h é uma solução fraca para a equação

$$-\Delta_g h = 2fe^{2u_f}h. \tag{2.2}$$

De fato, considere uma sequência de funções $(h_k)_{k\in N}$ com $\|h_k\|_{H^1} = 1$, tal que

$$d^2 I_f(u_f)(h_k,h_k) \to c_0 = 0 \qquad \text{quando} \qquad k \to \infty.$$

Como (h_k) é limitado em $H^1(M)$, do Lema 2, a menos de uma subsequência, existe $h \in H^1(M)$ tal que $h_k \rightharpoonup h$ em $H^1(M)$ e $h_k \to h$ em $L^p(M)$ para todo $p < \infty$. Além disso, como u_f é suave, então a convergência $fe^{2u_f}h_k^2 \to fe^{2u_f}h^2$ vale em $L^1(M)$. Ao reescrever a equação (1.22) na forma

$$\|\nabla h_k\|_{L_2}^2 = d^2 I_f(u_f)(h_k,h_k) + 2\int_M fe^{2u_f}h_k^2 dv_g,$$

tem-se, por hipótese que $d^2 I_f(u_f)(h_k,h_k) \to 0$, o que implica que

$$\|\nabla h_k\|_{L^2}^2 = d^2 I_f\left(u_f\right)\left(h_k,h_k\right) + 2\int_M fe^{2uf}h_k^2 dv_g \to 2\int_M fe^{2u}h^2 dv_g.$$

Mas, como $d^2 I_f(u_f)(h,h) \geq 0$, segue que

$$2\int_M fe^{2u}h^2 dv_g \leq d^2 E_f\left(u_f\right)(h,h) + 2\int_M fe^{2uf}h^2 dv_g = \|\nabla h\|_{L^2}^2.$$

Daí, $\lim \|\nabla h_k\|_{L^2} \leq \|\nabla h\|_{L^2}$. Do Lema 1, segue que $\|h\|_{H^1} \leq \liminf \|h_k\|_{H^1}$. Mas como $h_k \to h$ em $L^2(M)$, então $\|h_k\|_{L^2} \to \|h\|_{L^2}$ o que implica que

$$\|\nabla h\|_{L^2} \leq \liminf \|\nabla h_k\|_{L^2}.$$

Logo,

$$\lim \|\nabla h_k\|_{L^2} = \|\nabla h\|_{L^2}.$$

Garantindo a existência de uma h com $h_k \to h$ em $H^1(M)$. Portando, h satisfaz (2.1). Agora, para mostrar que esse h é uma solução fraca para (2.2), é necessário e suficiente obter que

$$d^2 I_f(u_f)(h,w) = \int_M \langle \nabla h, \nabla w\rangle dv_g + 2\int_M fe^{2u_f}hw dv_g = 0,$$

para todo $w \in H^1(M)$. Dado $t \in \mathbb{R}\{0\}$ e $w \in H^1(M)$, tem-se que

$$d^2 I_f(u_f)(h+tw, h+tw) = d^2 I_f(u_f)(h,h) + 2td^2 I_f(u_f)(h,w) + t^2 d^2 I_f(u_f)(w,w) \geq 0$$

e

$$d^2 I_f(u_f)(h-tw, h-tw) = d^2 I_f(u_f)(h,h) - 2td^2 I_f(u_f)(h,w) + t^2 d^2 I_f(u_f)(w,w) \geq 0.$$

Como $d^2 I_f(u_f)(h,h) = 0$, então dividindo as desigualdades acima por t e faça $t \to 0$ e obtenha

$$d^2 I_f(u_f)(h,w) \geq 0 \quad \text{e} \quad -d^2 I_f(u_f)(h,w) \geq 0.$$

Daí, $d^2 I_f(u_f)(h,w) = 0$, para todo $w \in H^1(M)$. Logo, h é uma solução fraca para (2.2), finalizando a demonstração da afirmação.

Em fim, suponha por contradição que $c_0 = 0$. Seja $h \in H^1(M)$ dado pela Afirmação 5. Como u_f é ponto crítico do funcional I_f tem-se que a sua primeira derivada é nula, e pela afirmação anterior $d^2 I_f(u_f)(h,h) = 0$. Assim, a expansão em Taylor até a quarta ordem resulta

$$I_f(u_f + \epsilon h) = I_f(u_f) + \frac{\epsilon^3}{6} d^3 I_f(u_f)(h,h,h) + \frac{\epsilon^4}{24} d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) + O(\epsilon^5). \quad (2.3)$$

Como u_f é um minimizante local, $d^3 I_f(u_f)(h,h,h) = 0$. Porém a análise do sinal da quarta derivação requer maior atenção e para isto, segue a seguinte afirmação.

Afirmação 6. *Se $c_0 = 0$, tem-se que $d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) < 0$.*

Derivando quatro vezes o funcional, encontra-se que

$$d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) = -8 \int_M f e^{2u_f} h^4 dv_g.$$

Nota-se que ao multiplicar a equação (2.2) por h^3, ganha-se

$$2fe^{2u_f} h^4 = -h^3 \Delta_g h = -\frac{1}{4} \Delta_g (h^4) + 3|\nabla h|_g^2 h^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) &= -8 \int_M \left(-\frac{1}{8} \Delta_g (h^4) + \frac{3}{2} |\nabla h|_g^2 h^2 \right) dv_g \\ &= \int_M \Delta_g (h^4) dv_g - 12 \int_M |\nabla h|_g^2 h^2 dv_g. \end{aligned}$$

Pela definição de Laplaciano (Definição 8), tem-se

$$\Delta_g(h^4) = div(\nabla_g h^4).$$

Porém, como M é fechada, pelo Teorema da Divergência (Teorema 8), tem-se

$$\int_M div(\nabla_g h^4) dv_g = 0.$$

Portanto

$$d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) = -12 \int_M |\nabla_g h|_g^2 h^2 dv_g.$$

Além disso, observa-se que h não é constante, pois caso contrário, de (2.2) segue que

$$0 = -\int_M \Delta_g h dv_g = 2h \int_M f e^{2u_f} dv_g.$$

Como $\|h\| = 1$, então $h \neq 0$. Mas isso é uma contradição por (1.11), pois $\chi(M) < 0$. Dito isto, como

$$|\nabla_g h|_g^2 h^2 > 0,$$

implica que

$$d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) = -12 \int_M |\nabla_g h|_g^2 h^2 dv_g < 0,$$

provando a afirmação.

Dessa forma, voltando em (2.3) tem-se

$$I_f(u_f + \epsilon h) = I_f(u_f) + \frac{\epsilon^4}{24} d^4 I_f(u_f)(h,h,h,h) + O(\epsilon^5) < I_f(u_f),$$

para $\epsilon > 0$ pequeno. Portando encontra-se uma contradição com o fato que $I_f(u_f)$ é valor mínimo. Logo, c_0 é estritamente positiva. □

O próximo resultado garante a existência de um minimizante local, quando ocorre uma deformação da f, sobre os mesmos moldes da proposição anterior.

Proposição 5. *Suponha que para algum $f \in C^\infty(M)$ o funcional I_f admite um minimizante local $u_f \in H^1(M)$. Então existe uma vizinhança U de $f \in C^\infty(M)$ e um mapa suave $\phi \mapsto u_\phi \in H^1(M)$ tal que para todo $\phi \in U$ a função u_ϕ é um minimizante local estrito de I_ϕ.*

Demonstração. Primeiro, considere a seguinte afirmação.

Afirmação 7. *Existem vizinhanças $U \subset C^{0,\alpha}(M)$ de f e $W \subset C^{2,\alpha}(M)$ de u_f tais que existe uma função u_ϕ que depende suavemente de ϕ para todo $\phi \in U$, que satisfaz*

$$-\Delta_g u_\phi + k = \phi e^{2u_\phi}.$$

Inicialmente é necessário definir $Z : C^{2,\alpha}(M) \times C^{0,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M)$ como

$$Z(w, \phi) = -\Delta_g w - (f - \phi e^{2w})e^{2u_f}.$$

Nota-se que $Z(0, f) = 0$ e que Z é de classe C^1. Dessa forma, considere $D_w Z(0, f) : C^{2,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M)$ dado como

$$D_w Z(0, f)(h) = \Delta_g h + 2fhe^{2u_f}.$$

Suponha que $D_w Z(0, f)$ é um isomorfismo. Então pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças $V_1 \subset C^{0,\alpha}(M)$ de f e $V_2 \subset C^{2,\alpha}(M)$ de 0 e uma aplicação $G : V_1 \to V_2$ de classe C^1 tal que

$$Z(G(h), h) = 0,$$

ou seja,

$$-\Delta_g G(h) + (f - he^{2G(h)})e^{2u_f} = 0.$$

Seja $u_h := G(h) + u_f$. Lembre-se que u_f é solução de

$$-\Delta_g u_f + k = fe^{2u_f}.$$

Então

$$\begin{aligned} -\Delta_g u_h + k - he^{2u_h} &= -\Delta_g G(h) + fe^{2u_f} - he^{2G(h)}e^{2u_f} \\ &= -(f - he^{2G(h)})e^{2u_f} + fe^{2u_f} - he^{2G(h)}e^{2u_f} \\ &= -fe^{2u_f} + he^{2G(h)}e^{2u_f} + fe^{2u_f} - he^{2G(h)}e^{2u_f} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Isto prova a afirmação.

Como u_h resolve (2.4), então u_h é ponto crítico de I_h. Além disso, $u_f \in H^1(u)$ é mínimo local, então pela proposição anterior (Proposição 4), tem-se

$$d^2 I_f(u_f)(h, h) > C_0 \|h\|_{H^1}^2,$$

para todo $h \in H^1\backslash\{0\}$ e algum $C_0 > 0$. Dessa forma, como $u_h \to u_f$ quando $h \to f$, então

$$d^2 I_h(u_h)(m,m) > C_1\|m\|^2_{H^1},$$

para todo $m \in H^1\backslash\{0\}$ e algum $C_1 > 0$. Conclui-se que u_h é um mínimo local estrito de I_f. Resta mostrar que $D_w Z(0,f)$ é um isomorfismo. A Proposição 3 permite aplicar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 9) que por sua vez, diz que dado uma $F \in H^1(M)$, existe $h \in H^1(M)$ tal que

$$d^2 I_f(u_f)(h,m) = \int_M F m dv_g,$$

para todo $m \in H^1(M)$. Concluindo que h é uma solução fraca de

$$-\Delta_g h + 2fe^{2u_F} = F.$$

Pela teoria de regularidade elíptica, se $F \in C^{0,\alpha}(M)$, então $h \in C^{2,\alpha}(M)$. Portanto, $D_W Z(0,f) : C^{2,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M)$ é um isomorfismo. □

2.2 Existência de um Ponto Crítico do Tipo Passo da Montanha

Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função não constante tal que $f \leq 0 = \max_{p\in M} f(p)$. Dado $\lambda > 0$, defina $f_\lambda = f + \lambda$ e $I_\lambda := I_{f_\lambda}$. Pela Proposição 2, I_0 possui um único ponto de mínimo. Pela Proposição 5, existe $\lambda_0 > 0$ tal que I_λ possui um ponto de mínimo local estrito para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o qual será denotado por $u_\lambda \in H^1(M)$. Como u_0 é o único ponto de mínimo de I_0, segue que $u_\lambda \to u_0$ quando $\lambda \downarrow 0$.

Daí, para $\lambda_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno, existe $\rho > 0$ tal que

$$I_f(u_\lambda) = \inf_{\|u-u_0\|_{H^1}} I_\lambda(u) \leq \sup_{\mu,\nu\in(0,\lambda_0)} I_\mu(u_\nu) < \beta := \inf_{\mu\in(0,\lambda_0);\frac{\rho}{2}<\|u-u_0\|_{H^1}<\rho} I_\mu(u). \quad (2.5)$$

Como para $\lambda > 0$ o funcional I_λ é ilimitado inferiormente (Veja a página 27), existe $v_\lambda \in H^1(M)$ tal que

$$I_\lambda(v_\lambda) < I_\lambda(u_\lambda).$$

Agora, defina

$$P = \left\{p \in C\left([0,1]; H^1(M)\right) : p(0) = u_0 \text{ e } p(1) = v_\lambda\right\},$$

e

$$c_\lambda = \inf_{p\in P} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(p(t)) \geq \beta > I_\lambda(u_\lambda). \tag{2.6}$$

Como $u_\lambda \to u_0$ quando $\lambda \to 0$, segue que na definição de P será considerado u_0 ao invés de u_λ. Para uma escolha adequada v_λ, obtém-se a seguinte estimativa para c_λ, formulada pelo seguinte resultado.

Lema 10. *Para qualquer $K > 4\pi$ existe $\lambda_K \in (0, \lambda_0/2]$ tal que para todo $0 < \lambda < \lambda_K$ existe $v_\lambda \in H^1(M)$ de modo que escolher $v_\mu = v_\lambda$ para cada $\mu \in [\lambda, 2\lambda]$ o número c_μ está bem definido e independe de λ. Além disso, $c_\mu \leq K\log(\frac{2}{\mu})$.*

Demonstração. Como $\max f = 0$, seja $p \in M$ tal que $f(p) = 0$. Pela observação após o Teorema 18, existem coordenadas em uma vizinhança $U \subset M$ de p tais que

$$\overline{g} = e^{2u_0} g = e^{2v_0}\delta,$$

para alguma função $v_0 \in C^\infty(U)$. Assim, em U tem-se que

$$g = e^{2(v_0-u_0)}\delta. \tag{2.7}$$

Seja $\psi : B_R(0) \to M$ com $\psi(0) = p$, a correspondente carta coordenada. Daí

$$\psi^*(\overline{g}) = e^{2v_0}\delta.$$

Assim, como a variedade tem dimensão 2, segue de (1.10) que

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx = e^{2(v_0-u_0)}dx. \tag{2.8}$$

Como p é ponto de máximo de f, expandindo $f(x)$ obtém-se

$$f(x) = \frac{1}{2}\nabla^2 f(p)(x,x) + O(|x|^3),$$

para x próximo de zero.

Nota-se que

$$-\alpha_1|x|^2 \geq \nabla^2 f(p)(x,x) \geq -\alpha_2|x|^2,$$

para $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$. Assim,

$$f(x) \geq -\frac{\alpha_2}{2}|x|^2 + O(|x|^3) = -\frac{\alpha_2}{2}|x|^2(1 + O|x|) \geq -\frac{\alpha_3}{2}|x|^2 \geq -\frac{\lambda}{2}, \tag{2.9}$$

para todo $x \in B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)$, para algum $L > 0$ que não depende de $\lambda > 0$. Implicando em

$$|x| \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{L}. \tag{2.10}$$

Agora, defina $z_\lambda \in H_0^1(B_1(0))$ como

$$z_\lambda(x) = \begin{cases} -\log\lambda, & |x| \leq \lambda, \\ -\log|x|, & \lambda \leq |x| \leq 1, \\ 0, & |x| = 1. \end{cases}$$

Seja $w_\lambda \in H^1(M)$ dado por $w_\lambda(x) = z_\lambda\left(\frac{Lx}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Note que

$$\|\nabla w_\lambda\|_{L^2}^2 = \|\nabla z_\lambda\|_{L^2}^2 = 2\pi\log\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{2.11}$$

De fato,

$$|\nabla z_\lambda(x)| = \begin{cases} 0\ , & |x| \leq \lambda, \\ \frac{1}{x}\ , & \lambda \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Integrando e usando coordenadas polares

$$\begin{aligned} \|\nabla z_\lambda\|_{L^2}^2 &= \int_{B_1(0)} |\nabla z_\lambda(x)|^2\,dx = \int_{B_1(0)\setminus B_\lambda(0)} |\nabla z_\lambda(x)|^2\,dx = \int_\lambda^1 \int_{S^1} |\nabla z_\lambda(r\theta)|^2\,rd\theta dr \\ &= 2\pi\int_\lambda^1 \frac{1}{r}dr = -2\pi\log\lambda. \end{aligned}$$

Agora, considere $u_0 + sw_\lambda$ em M com $s \in \mathbb{R}$ e $w_\lambda \in H^1(M)$, reescrevendo (3) com $k < 0$ obtém-se

$$I_\lambda(u_0 + sw_\lambda) = \frac{1}{2}\int_M \left(|\nabla(u_0 + sw_\lambda)|^2 + 2k(u_0 + sw_\lambda) - f_\lambda e^{2(u_0+sw_\lambda)}\right) dv_g. \tag{2.12}$$

Analisando a última integral de (2.12), observa-se que

$$\int_M f_\lambda e^{2(u_0+sw_\lambda)}dv_g = \underbrace{\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} f_\lambda e^{2(u_0+sw_\lambda)}dv_g}_{(i)} + \underbrace{\int_{M-B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} f_\lambda e^{2u_0}dv_g}_{(ii)}. \tag{2.13}$$

Para (i), de (2.9) tem-se que $f_\lambda \geq \frac{\lambda}{2}$. Daí

$$\int_M f_\lambda e^{2(u_0+sw_\lambda)}dv_g \geq \frac{\lambda}{2}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(p_0)} e^{2(u_0+sw_\lambda)}dv_g.$$

De (2.8) obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} f_\lambda e^{2(u_0+sw_\lambda)} dv_g &\geq \frac{\lambda}{2}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} e^{2(u_0+sw_\lambda)} e^{2(v_0-u_0)} dx \\ &= \frac{\lambda}{2}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} e^{2(sw_\lambda+v_0)} dx \\ &\geq \frac{\lambda}{2}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} e^{2sw_\lambda} dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Faça $y = \frac{Lx}{\sqrt{\lambda}}$ em (2.14). Logo $dy = \frac{L^2}{\lambda} dx$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} e^{2sw_\lambda} dx &= \frac{\lambda}{2}\int_{B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} e^{2sz_\lambda\left(\frac{Lx}{\sqrt{\lambda}}\right)} dx = \frac{\lambda^2}{2L^2}\int_{B_1(0)} e^{2sz_\lambda(y)} dy \\ &\geq \frac{\lambda^2}{2L^2}\int_{B_\lambda(0)} e^{-2s\log\lambda} dy = \frac{\lambda^2}{2L^2}\int_{B_\lambda(0)} \lambda^{-2s} dy \\ &\geq \frac{\lambda^{2-2s}}{2L^2}\int_{B_\lambda(0)} dy = \frac{\pi\lambda^{4-2s}}{L^2}.\end{aligned}$$

Pois, $\displaystyle\int_{B_\lambda(0)} dy = 2\pi\lambda^2$.

Quando x não estiver contida na bola $B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)$ implica que $w_\lambda(x) = 0$. Assim para (ii) tem-se

$$\int_{M-B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} f_\lambda e^{2u_0} dv_g \geq -\max|f_\lambda| \int_{M-B_{\frac{\sqrt{\lambda}}{L}}(0)} e^{2u_0} dv_g \geq -C.$$

Portanto, (2.13) é limitado inferiormente por

$$\int_M f_\lambda e^{2(u_0+sw_\lambda)} dv_g \geq \frac{\pi\lambda^{4-2s}}{L^2} - C. \tag{2.15}$$

Dado qualquer $K > 4\pi$, defina δ como

$$\delta = \frac{K-4\pi}{8\pi} > 0,$$

implicando em

$$1+\delta = \frac{K+4\pi}{8\pi}.$$

Agora pode-se limitar o primeiro termo do funcional (2.12). Da Desigualdade de Young (Lema 6), tem-se

$$\begin{aligned} |\nabla (u_0 + sw_\lambda)|^2 &= |\nabla u_0|^2 + 2s\langle \nabla u_0, \nabla w_\lambda \rangle + s^2|\nabla w_\lambda|^2 \\ &\leq |\nabla u_0|^2 + 2|\nabla u_0||s\nabla w_\lambda| + s^2|\nabla w_\lambda|^2 \\ &\leq (1+\frac{1}{\delta})|\nabla u_0|^2 + (1+\delta)s^2|\nabla w_\lambda|^2 \\ &\leq C_\delta + \frac{K+4\pi}{8\pi}s^2|\nabla w_\lambda|^2. \end{aligned}$$

De (2.11), obtém-se que

$$\|\nabla (u_0 + sw_\lambda)\|_{L^2}^2 \leq \frac{K+4\pi}{4}s^2 \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + C_\delta. \tag{2.16}$$

Por último, como $w_\lambda \geq 0$, $k < 0$ e $s > 0$, então

$$\int_M k(u_0 + sw_\lambda)\, dv_g \leq k\int_M u_0 dv_g \leq C, \tag{2.17}$$

para uma constante positiva $C = C(u_0, K)$.

Em fim, aplicando (2.16), (2.17) e (2.15) em (2.12), conclui-se que

$$I_\lambda (u_0 + sw_\lambda) \leq \frac{K+4\pi}{8}s^2 \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{\pi\lambda^{4-2s}}{4L^2} + C,$$

para uma constante $C = C(u_0, f_0, K) > 0$ e $s > 0$.

Em particular, para qualquer $0 < \lambda < 1$ sabe-se que $I_\lambda (u_0 + sw_\lambda) \to -\infty$ quando $s \to \infty$. Ao fixar $s_\lambda > 2$ com $v_\lambda = u_0 + s_\lambda w_\lambda$ satisfazendo $I_\lambda(v_\lambda) < \inf_{\mu\in\Lambda_0} I_\mu(u_\mu)$ obtém-se que

$$c_\lambda \leq \sup_{s>0} I_\lambda (u_0 + sw_\lambda) \leq \sup_{s>0} \left(\frac{K+4\pi}{8}s^2 \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{\pi\lambda^{4-2s}}{4L^2} + C\right).$$

Para qualquer $0 < \lambda < 1$ o supremo acima é alcançado para algum $s = s(\lambda) > 2$, com $s(\lambda) \to 2$ quando $\lambda \downarrow 0$. Assim, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno resulta em

$$c_\lambda \leq \left(\frac{K+4\pi}{2}\right) \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq K \log\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

como desejado. Como $I_\mu(v_\mu) \leq I_\lambda(v_\lambda)$ para $\mu > \lambda$ a mesma função de comparação v_λ pode ser usada para cada $\mu \in (\lambda, 2\lambda) \subset (0, \lambda_0]$ e para tal μ, obtém-se a limitação

$$I_\mu(v_\lambda) \leq I_\mu(u_\mu) \leq \sup_{\nu\in(\lambda,2\lambda)} I_\mu(u_\nu) \leq \beta \leq c_\mu \leq K\log(1/\lambda) \leq K\log(2/\mu).$$

onde c_μ e β para $\mu \in (0.\lambda_0]$ são conforme foram definidos em (2.6). Além disso, como v_λ depende continuamente de λ com $I_\lambda(v_\lambda) < \inf_{\mu\in(0,\lambda_0)} I_\mu(u_\mu)$ então o número c_μ é definido independente de λ tal que $\lambda < \mu < 2\lambda$. □

Observe que

$$I_\mu(u) - I_\nu(u) = -\frac{1}{2}\int_M \mu e^{2u} dv_g + \frac{1}{2}\int_M \nu e^{2u} dv_g = -\frac{\mu-\nu}{2}\int_M e^{2u} dv_g, \qquad (2.18)$$

para todo $u \in H^1(M)$ e todo $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dado $0 < \lambda < \lambda_0/2$ então segue que a função

$$(\lambda, 2\lambda) \ni \mu \mapsto c_\mu,$$

é não crescente em μ, e portanto, diferenciável em quase todo ponto, para todo $\mu \in (\lambda, 2\lambda)$. Obtém-se agora o seguinte resultado.

Lema 11. *Para qualquer $m > 0$ existe uma constante $C = C(M, g, f, m)$ tal que*

1. *Para cada $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in H^1(M)$ satisfazendo $\|u\|_{H^1} \le m$, resulta em*
$$\|dI_{\mu_1}(u) - dI_{\mu_2}(u)\|_{H^{-1}} \le C\,|\mu_1 - \mu_2|\,;$$
2. *Para qualquer $|\mu| < 1$, qualquer $u, v \in H^1(M)$ com $\|v\|_{H^1} \le 1$, tem-se*
$$I_\mu(u+v) \le I_\mu(u) + dI_\mu(u)(v) + C\|v\|^2_{H^1}.$$

Demonstração. 1. Escolha $v \in H^1(M)$ tal que $\|v\|_{H^1} \le m$, de (2.18) segue que

$$\langle dI_{\mu_1}(u) - dI_{\mu_2}(u), v\rangle_{H^{-1}\times H^1} = (\mu_2 - \mu_1)\int_M e^{2u} v dv_g.$$

Da Desigualdade de Hölder (1.6)

$$\begin{aligned}(\mu_2 - \mu_1)\int_M e^{2u} v dv_g &\le |\mu_2 - \mu_1| \left(\int_M e^{4u} dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2} \\ &\le m\,|\mu_2 - \mu_1| \left(\int_M e^{4u} dv_g\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

A afirmação segue pela Desigualdade de Moser-Trundinger (Teorema 17).

2. Pela expansão de Taylor, para cada $x \in M$ existe $\theta(x) \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} I_\mu(u+v) - I_\mu(u) - \langle dI_\mu(u), v\rangle &= \frac{1}{2}\int_M |\nabla v|_g^2\, dv_g - \int_M f_\mu e^{2(u+\theta v)} v^2 dv_g \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\|_{H^1}^2 + \|f_\mu\|_{L^\infty} \int_M e^{2(u+\theta v)} v^2 dv_g. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder (1.6) e o Mergulho de Sobolev (Teorema 11) obtém-se

$$\begin{aligned} \int_M e^{2(u+\theta v)} v^2 d\mu_{g_0} &\leq \left(\int_M e^{4(u+\theta v)} d\mu_{g_0}\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^4} \\ &\leq C\left(\int_M e^{8u} d\mu_{g_0} \int_M e^{8|v|} d\mu_{g_0}\right)^{\frac{1}{4}} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Novamente segue da desigualdade de Moser-Trudinger.

□

Para a próxima proposição fixe $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Proposição 6. *Suponha que a aplicação* $(\lambda, 2\lambda) \ni \mu \mapsto c_\lambda$ *é diferenciável em algum* $\mu \in (\lambda, 2\lambda)$*. Então existe uma sequência* $(p_n)_{n\in N}$ *em* P *e uma sequência de pontos* $u_n = p_n(t_n) \in H^1(M)$, $n \in N$ *tais que*

1. $I_\mu(u_n) \to c_\mu$;
2. $\sup_{0\leq t\leq 1} I_\mu(p_n(t)) \to c_\mu$;
3. $dI_\mu(u_n) \to 0 \in H^{-1}$ *quando* $n \to 0$, *ou seja,* $dI_\mu(u_n)(v) \to 0$, $\forall v \in H^1(M)$.

Além disso (u_n) *satisfaz*

$$\frac{1}{2}\int_M e^{2u_n} d\mu_{g_0} = \left|\frac{d}{d\mu} I_\mu(u_n)\right| \leq \left|c'_\mu\right| + 3.$$

Demonstração. Suponha que $\lambda_0 < 1$. Para uma sequência de números $\mu_n \in (\lambda, 2\lambda)$ com $\mu_n \downarrow \mu$ quando $n \to \infty$, fixe uma sequência de caminhos (p_n), onde $p_n \in P$, tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_\mu(p_n(t)) \leq c_\mu + (\mu_n - \mu), n \in N.$$

Para $u = p_n(t_n)$ com $t_n \in [0,1]$ e

$$I_{\mu_n}(u) \geq c_{\mu_n} - (\mu_n - \mu), \tag{2.19}$$

segue de (2.18) que

$$c_{\mu_n} - (\mu_n - \mu) \leq I_{\mu_n}(u) \leq I_\mu(u) \leq \max_{t\in[0,1]} I_\mu(p_n(t)) \leq c_\mu + (\mu_n - \mu). \tag{2.20}$$

Seja

$$c'_\mu = \lim_{t\to 0} \frac{c_{\mu+t} - c_\mu}{t} \leq 0.$$

Assim

$$\frac{c_\mu - c_{\mu_n}}{\mu_n - \mu} \leq -c'_\mu + 1, \tag{2.21}$$

para todo $n \geq n_0$ e algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Fazendo $\alpha = -c'_\mu + 1 > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tem-se

$$c_{\mu_n} \geq c_\mu - \alpha(\mu_n - \mu).$$

De (2.18), (2.20) e (2.21) observa-se que

$$0 \leq \frac{I_\mu(u) - I_{\mu_n}(u)}{\mu_n - \mu} = \frac{1}{2}\int_M e^{2u} dv_g \leq \alpha + 2, \tag{2.22}$$

para todo $n \geq n_0$. Pela Desigualdade de Jensen (Lema 5), ganha-se o limite uniforme

$$2\int_M u dv_g \leq \log\left(\int_M e^{2u} dv_g\right) \leq \log(2\alpha + 4) = C(\mu) < \infty, \tag{2.23}$$

para todo (p_n). Lembre-se que $vol(M,g) = 1$ e que $k < 0$, assim para todo $u = u_n$, $n \geq n_0$, obtém-se a estimativa

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2} &= 2I_\mu(u) - 2k\int_M u dv_g + \int_M (f_0 + \mu)\, e^{2u} dv_g \\ &\leq 2I_\mu(u) + C \leq 2c_\mu + 2(\mu_n - \mu) + C \leq C, \end{aligned} \tag{2.24}$$

com $C = C(\mu)$ independente de n. De (2.24) segue que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} + 2k\int_M u dv_g = 2I_\mu(u) + \int_M (f + \mu) e^{2u} dv_g \leq C.$$

De (2.23) e (2.24), obtém-se

$$\|\nabla u\|^2_{H^1} + \int_M e^{2u} dv_g \leq C_1, \tag{2.25}$$

para todo $u = u_n,\ n \geq n_0$, com $C_1 = C_1(\mu)$ independente de n. Note que n_0 não depende da escolha de (p_n).

Agora, suponha por contradição que existe $\delta > 0$ tal que $\|dI_\mu(u)\|_{H^{-1}} \geq 2\delta$ para um n suficientemente grande e para todo $u = u_n = p_n(t_n) \in H^1(M)$. Note que

$$\begin{aligned}\langle dI_\mu(u) - dI_{\mu_n}(u), dI_\mu(u)\rangle &\leq |dI_\mu(u) - dI_{\mu_n}(u)|\,|dI_\mu(u)|\\ &\leq \frac{1}{2}\,|dI_\mu(u) - dI_{\mu_n}(u)| + \frac{1}{2}\,|dI_\mu(u)|\,.\end{aligned}$$

De (2.24) tem-se $\|u\|_{H^1} < m$ para algum $m > 0$. Assim, o Lema 11 implica que

$$\begin{aligned}\langle dI_{\mu_n}(u), dI_\mu(u)\rangle &= |dI_\mu(u)|^2 - \langle dI_\mu(u) - dI_{\mu_n}(u), dI_\mu(u)\rangle\\ &\geq \frac{1}{2}|dI_\mu(u)|^2 - \frac{1}{2}|dI_\mu(u) - dI_{\mu_n}(u)|^2\\ &\geq \frac{1}{2}|dI_\mu(u)|^2 - C|\mu - \mu_n|^2\\ &\geq 2\delta^2 - C|\mu - \mu_n|^2 \geq \delta^2.\end{aligned}$$

Escolha uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e

$$\phi(s) = \begin{cases} 1\ , & s \geq -\frac{1}{2},\\ 0\ , & s \leq -1.\end{cases}$$

Para $w \in H^1(M)$ e $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\phi_n(w) = \phi\left(\frac{I_{\mu_n}(w) - c_{\mu_n}}{\mu_n - \mu}\right).$$

Note que para $u = p_n(t_n)$, tem-se que $\phi_n(u) = 0$, a menos que u satisfaça (2.19). Defina agora um novo caminho $\overline{p}_n \in P$ como

$$\overline{p}_n(t) := p_n(t) - \sqrt{\mu_n - \mu}\,\phi_n(p_n(t))\frac{dI_\mu(p_n(t))}{\|dI_\mu(p_n(t))\|},$$

para todo $0 \leq t \leq 1$. Faça $u = p_n(t_n)$ e $\overline{u} = \overline{p}_n(t_n)$. Lembre-se que $|\mu - \mu_n| \leq 1$.

Assim $\|u-\overline{u}\|_{H^1} \leq 1$. Portanto para todo $u = p_n(t_n)$ satisfazendo (2.19), obtém-se

$$\begin{aligned}
I_{\mu_n}(\overline{u}) &\leq I_{\mu_n}(u) - \frac{\sqrt{\mu_n-\mu}\,\phi_n(u)}{\|dI_\mu(u)\|}\langle dI_{\mu_n}(u), dI_\mu(u)\rangle + C(\mu_n-\mu)\phi_n^2(u) \\
&\leq I_{\mu_n}(u) - \frac{1}{2}\sqrt{\mu_n-\mu}\,\phi_n(u)\|dI_\mu(u)\| + C(\mu_n-\mu)\phi_n(u) \\
&\leq I_{\mu_n}(u) - \delta\sqrt{\mu_n-\mu}\,\phi_n(u) + C(\mu_n-\mu)\phi_n(u) \\
&\leq I_{\mu_n}(u) - \frac{\delta}{2}\sqrt{\mu_n-\mu}\,\phi_n(u).
\end{aligned}$$

Então segue que

$$c_{\mu_n} \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\mu_n}(\overline{p}_n(t)) \leq \max_{t\in[0,1]}\left(I_{\mu_n}(p_n(t)) - \frac{\delta}{2}\sqrt{\mu_n-\mu}\,\phi_n(p_n(t))\right).$$

Como o máximo da última desigualdade só pode ser alcançada nos pontos t onde $I_{\mu_n}(p_n(t)) \geq c_{\mu_n} - (\mu_n-\mu)/2$ e portanto $\phi_n(p_n(t)) = 1$, para $n \geq n_1$ encontra-se

$$\begin{aligned}
c_{\mu_n} &\leq \max_{t\in[0,1]} I_{\mu_n}(p_n(t)) - \frac{\delta}{2}\sqrt{\mu_n-\mu} \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} I_{\mu}(p_n(t)) - \frac{\delta}{2}\sqrt{\mu_n-\mu} \\
&\leq c_\mu + (\mu_n-\mu) - \frac{\delta}{2}\sqrt{\mu_n-\mu} \\
&\leq c_{\mu_n} + (\alpha+1)(\mu_n-\mu) - \frac{\delta}{2}\sqrt{\mu_n-\mu} \\
&< c_{\mu_n}.
\end{aligned}$$

Absurdo, logo segue o resultado. □

Proposição 7. *Suponha que a derivada c'_μ existe para algum $\mu \in (0,\mu_0)$. Então o funcional I_μ admite um ponto crítico u^μ tal que $I_\mu(u^\mu) = c_\mu$ e*

$$\int_M e^{2u^\mu} dv_g \leq 2\left(|c'_\mu| + 3\right).$$

Além disso, u^μ não é um minimizante local de I_μ.

Demonstração. Seja $\mu \in (\lambda, 2\lambda)$ um ponto diferenciável de c_μ. A Proposição 6 nos dá duas sequências p_n em P e t_n em $[0,1]$ tais que $u_n = p_n(t_n) \in H^1(M)$ satisfaz as condições 1 a 3 daquela proposição.

De (2.25), é possível assumir que $u_n \rightharpoonup u^\mu$ fracamente em $H^1(M)$ quando $n \to \infty$, para algum $u^\mu \in H^1(M)$. Lembrando que a aplicação $\psi \mapsto e^{2\psi}$ é compacta e como u_f é suave, então $e^{2u_n} \to e^{2u^\mu}$ em $L^2(M)$. Assim,

$$\begin{aligned} o(1) &= dI_\mu(u_n)(u_n - u^\mu) \\ &= \int_M \langle \nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u^\mu \rangle dv_g + k \int_M (u_n - u^\mu)\, dv_g - \int_M f_\mu e^{2u_n} (u_n - u^\mu)\, dv_g \\ &= \|\nabla u_n - \nabla u^\mu\|_{L^2}^2 + o(1), \end{aligned}$$

onde $o(1) \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim, $u_n \to u^\mu$ fortemente em $H^1(M)$ quando $n \to \infty$. Mas, como

$$I_\mu(u_n) \to I_\mu(u^\mu) \quad \text{e} \quad dI_\mu(u_n) \to dI_\mu(u^\mu)$$

quando $n \to \infty$, e segue que u^μ é um ponto crítico para I_μ com $I_\mu(u^\mu) = c_\mu$.

Finalmente, note que u^μ não é um minimizante local, caso contrário pela Proposição 4 e pela estimativa (2.5), não seria possível escolher (p_n) com

$$\sup_{0 \le t \le 1} I_\mu(p_n(t)) \to c_\mu,$$

quando $n \to \infty$ e o fato que $u_n = p_n(t_n)$ para algum $t_n \in [0,1], n \in N$. □

2.2.1 Existência de Pontos Críticos quando c_μ não é diferenciável

Seja $\mu \in [\lambda, 2\lambda]$, onde $\mu \mapsto c_\mu$ não é diferenciável. Seja uma sequência $\mu_n \downarrow \mu$. Associados a essa sequência, pela Proposição 7 existem pontos críticos u_n do funcional I_{μ_n}, cuja energia é dada por $I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n}$. O objetivo desta seção é demonstrar que a sequência u_n é relativamente compacto.

Lema 12. *Seja $f \in C^\infty(M)$ e $u \in H^1(M)$ um ponto crítico do funcional I_f. Então existe uma constante $C(f)$ que não depende de u tal que*

$$\int_M f^4 e^{2u} dv_g \le C. \tag{2.26}$$

Demonstração. Multiplicando (2) por f^3 e integrando por partes, obtém-se

$$\int_M f^4 e^{2u} dv_g = 3 \int_M \langle \nabla u, \nabla f \rangle f^2 dv_g + k \int_M f^3 dv_g.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, ganha-se que

$$\int_M f^4 e^{2u} dv_g \leq 3 \int_M |\nabla u|_g |\nabla f|_g f^2 dv_g + C_1.$$

Como ∇f é continua e M é compacto, conclui-se que

$$\int_M f^4 e^{2u} dv_g \leq C_2 \int_M |\nabla u|_g f^2 dv_g + C_1. \tag{2.27}$$

Mas pela Desigualdade de Young (Lema 6)

$$2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1} b^2,$$

com

$$a = f^2 e^u, \qquad b = \frac{C_2}{2} |\nabla u|_g e^{-u} \qquad e \qquad \delta = \frac{1}{2},$$

obtém-se

$$C_2 \int_M |\nabla u|_g f^2 dv_g \leq \frac{1}{2} f^4 e^{2u} dv_g + C_3 \int \int_M M |\nabla u|_g^2 e^{-2u} dv_g. \tag{2.28}$$

Dessa forma por (2.27) e (2.28)

$$\int_M f^4 e^{2u} dv_g \leq \frac{1}{2} \int_M f^4 e^{2u} dv_g + C_3 \int_M |\nabla u|_g^2 e^{-2u} dv_g + C_1. \tag{2.29}$$

Assim

$$\frac{1}{2} \int_M f^4 e^{2u} dv_g \leq C_3 \int_M |\nabla u|_g^2 e^{-2u} dv_g + C_2. \tag{2.30}$$

Multiplicando (2) por e^{-2u} e integrando por partes, obtém-se

$$\int_M f dv_g = -\int_M e^{-2u} \Delta_g u dv_g + \int_M k e^{-2u} dv_g.$$

Lembrando que $k < 0$, segue

$$\int_M |\nabla u|_g^2 e^{-2u} dv_g = k \int_M e^{-2u} dv_g - \int_M f dv_g \leq C_4. \tag{2.31}$$

Por (2.30) e (2.31), encontra-se

$$\frac{1}{2} \int_M f^4 e^{2u} d\mu_g \leq C_3 C_4 + C_1,$$

implicando em

$$\int_M f^4 e^{2u} dv_g \leq C,$$

$\square$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de u. Faça $d\mu = \frac{f^2}{\|f\|_{L^2}^2} dv_g$. Note que

$$\int_M d\mu_g = \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_M f^2 dv_g = 1.$$

Pela Desigualdade de Jensen (Lema 5), obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_M f^2 u dv_g &= \|f\|_{L^2}^2 \int_M u d\mu \leq \|f\|_{L^2}^2 \log \int_M e^u d\mu \\
&= \|f\|_{L^2}^2 \log \left(\frac{\int_M f^2 e^u dv_g}{\|f\|_{L^2}^2} \right) \leq C.
\end{aligned}$$

Note que a limitação segue de (2.26) e da Desigualdade de Hölder. Dado qualquer $f \in C^\infty(M)$ não constante e $\mu \in [\lambda, 2\lambda]$, onde $0 < \lambda < \lambda_0/2 < 1$, uma sequência $\mu_n \downarrow \mu$ e outra sequência de pontos críticos u_n de I_{μ_n}, obtém-se

$$\overline{u}_n^{f_{\mu_n}} := \frac{\int_M f_{\mu_n}^2 u_n d\mu_g}{\|f_{\mu_n}\|_{L^2}^2} \leq C. \tag{2.32}$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de n.

Lema 13. *Para $u_n \in H^1(M)$, existe uma constante uniforme $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + 4|k||\overline{u}_n| \leq 4I_{\mu_n}(u_n) + C, \tag{2.33}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Tendo em vista a Afirmação 4 e o Teorema de Gauss Bonnet (Corolário 7), obtém-se

$$\begin{aligned}
2I_{\mu_n}(u_n) &= \int_M \left(|\nabla u_n|_g^2 + 2ku_n - fe^{2u_n} \right) dv_g = \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + 2k\overline{u}_n - 2\pi\chi(M) \\
&= \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + 2k\overline{u}_n^{f_{\mu_n}} + 2k \left(\overline{u}_n - \overline{u}_n^{f_{\mu_n}} \right) - 2\pi\chi(M) \\
&\geq \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + 2k\overline{u}_n^{f_{\mu_n}} - C\|\nabla u_n\|_{L^2} - C.
\end{aligned}$$

Usando (2.32)

$$\begin{aligned}
k\overline{u}_n^{f_{\mu_n}} &\geq |k||\overline{u}_n^{f_{\mu_n}}| - C \geq |k||\overline{u}_n| - |k||\overline{u}_n - \overline{u}_n^{f_{\mu_n}}| - C \\
&\geq |k||\overline{u}_n - |k||\nabla u\|_{L^2} - C.
\end{aligned}$$

Assim,

$$I\mu_n(u_n) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + |k||\overline{u}_n| - C\|\nabla u_n\|_{L^2} - C \geq \frac{1}{4}\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + |k||\overline{u}_n| - C.$$

Isto implica o resultado. □

Sejam $\mu_n \downarrow \mu$ e $u_n = u^{\mu_n}$ a correspondente solução dada pela Proposição 7 com $I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n} \leq c_\mu$. Do Lema 13 (u_n) é limitado em $H^1(M)$. Como já foi feito antes, a menos de subsequência, tem-se que $u_n \to u^\mu$ em $H^1(M)$. Por continuidade $dI_\mu(u^\mu) = 0$. Além disso, u^μ não é um mínimo local de I_μ, caso contrário, pela Proposição 4, a função u^μ seria um mínimo local estrito de I_μ. Daí, para n suficientemente grande, u_n seria um mínimo local estrito para I_{μ_n}, o que seria uma contradição. Assim $u^\mu \neq u_\mu$.

3 Análise de Blow-up

Sejam (M,g) uma superfície Riemanniana fechada com curvatura Gaussiana constante $k<0$ e volume unitário. Nesse capítulo, será considerado uma função não constante $f\in C^\infty(M)$ com $f\leq 0$ e $f\not\equiv 0$. Foi visto no capítulo anterior que dado $\mu\in(0,\lambda_0)$, existe um ponto crítico u^μ de I_μ que não é de mínimo local. O objetivo desse capítulo é compreender o comportamento da solução u^μ quando $\mu\downarrow 0$.

3.1 Resultados Preliminares

Antes da demonstração do Teorema 2, é necessário encontrar uma limitação para o volume. Do Lema 10, chega-se no seguinte resultado.

Lema 14. $\liminf\limits_{\mu\to 0}\mu|c'_\mu|\leq 4\pi$

Demonstração. Suponha por contradição que

$$|c'_\mu|>K/\mu,$$

para algum $K>K_1>4\pi$ e quase todo $\mu\in(0,\mu_0]$. Primeiro observa-se que como o funcional I_μ é decrescente em μ, então $c'_\mu\leq 0$, assim

$$\int_{\mu_1}^{\mu_0}|c'_\mu|dv_g=-\int_{\mu_1}^{\mu_0}c'_\mu dv_g\leq c_{\mu_1}-c_{\mu_0},$$

para $\mu_0>\mu_1>0$, já que c_μ é derivável em quase toda parte. Porém,

$$\int_{\mu_1}^{\mu_0}|c'_\mu|dv_g>K\int_{\mu_1}^{\mu_0}\frac{1}{\mu}dv_g=K\log\frac{\mu_0}{\mu_1}.$$

Dessa forma,

$$c_{\mu_1}\geq c_{\mu_0}+K\log\frac{\mu_0}{\mu_1}.$$

Por outro lado, o Lema 10 diz que $c_{\mu_1}\leq K_1\log(\frac{2}{\mu_1})$, assim

$$K_1\log 2-K_1\log\mu_1>c_{\mu_0}+K\log\mu_0-K\log\mu_1,$$

ou ainda

$$(K - K_1)\log\mu_1 \geq c_{\mu_0} + K\log\mu_0 - K_1\log 2.$$

Note que $K - K_1$ é positivo, pois $K > K_1 > 0$, portanto

$$\log\mu_1 > \frac{c_{\mu_0} + K\log\mu_0 - K_1\log 2}{K - K_1},$$

concluindo que

$$\mu_1 > e^{\frac{c_{\mu_0} + K\log\mu_0 - K_1\log 2}{K - K_1}} > 0,$$

para todo $\mu_0 > \mu_1 > 0$. Mas isto é uma contradição. $\square$

Foi provado na Proposição 7, que u^μ é um ponto crítico não minimizante para todo $\mu > 0$ suficientemente pequeno. Além disso satisfaz $\int_M e^{2u^\mu} dv_g \leq 2|c'_\mu| + 6$. Agora, será considerado λ no lugar de μ e $u_n = u^{\lambda_n}$ soluções de (2) com $f_n = f + \lambda_n$, para alguma sequência $\lambda_n \downarrow 0$. Assim, u_n satisfaz a equação

$$-\Delta_g u_n + k = f_n e^{2u_n}. \tag{3.1}$$

Pelo Lema 14, obtém-se que

$$\lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g \leq 2\lambda_n |c'_{\lambda_n}| + 6\lambda_n \leq 8\pi + 6\lambda_n.$$

Mas $\lambda_n \downarrow 0$ quando $n \to \infty$, então

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g\right) \leq 8\pi. \tag{3.2}$$

Como $f_n = f + \lambda_n$, segue que

$$\int_M f_n e^{2u_n} dv_g = \int_M (f + \lambda_n) e^{2u_n} dv_g = \int_M f e^{2u_n} dv_g + \lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g.$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\int_M f_n e^{2u_n} dv_g = 2\pi\chi(M),$$

o que implica que

$$2\pi\chi(M) - \int_M f e^{2u_n} dv_g = \lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_M (|f|+\lambda_n)\, e^{u_n} dv_g &= -\int_M f e^{2u_n} dv_g + \lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g \\ &= 2\pi\chi(M) + 2\lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g.\end{aligned}$$

Portanto de (3.2), segue que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_M (|f|+\lambda_n)\, e^{2u_n} dv_g < \infty. \tag{3.3}$$

Lema 15. *Existe $C>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ tem-se que*

$$u_n \geq -C.$$

Demonstração. Seja

$$\overline{f} = \frac{1}{vol(M)} \int_M f dv_g = \int_M f dv_g < 0,$$

já que $vol(M)=1$. Note que

$$\int_M \frac{k}{\overline{f}}(\overline{f}-f) dv_g = 0.$$

De fato

$$\int_M \frac{k}{\overline{f}}(\overline{f}-f) dv_g = \frac{k}{\overline{f}} \int_M (\overline{f}-f) dv_g = \frac{k}{\overline{f}} \left(\int_M f dv_g - \int_M f dv_g \right) = 0.$$

Segue do Teorema 15 que existe uma solução fraca $v \in H^1(M)$ de

$$\Delta_g \phi = \frac{k}{\overline{f}}(\overline{f}-f).$$

Mas como $\frac{k}{\overline{f}}(\overline{f}-f)$ é suave, então $v \in C^\infty(M)$. Dado $C>0$ defina $\phi_C = v - C$. Note que

$$\Delta_g \phi_C = \frac{k}{\overline{f}}(\overline{f}-f).$$

Observa-se que

$$\Delta_g \phi_C - k + f_n e^{2\phi_C} = k - \frac{k}{\overline{f}} f - k + f_n e^{2\phi_C} = f\left(-\frac{k}{\overline{f}} + e^{2v} e^{-2C}\right) + \lambda_n e^{2v} e^{-2C}.$$

Sabe-se que $\lambda_n > 0$, logo $\lambda_n e^{2v} e^{-2C} > 0$. Por outro lado, existe um $C_0 > 0$ tal que, para todo $C \geq C_0$ tem-se

$$-\frac{k}{\overline{f}} + e^{2v} e^{-2C} < 0,$$

já que $k < 0$ e $\overline{f} < 0$. Daí, como $f \leq 0$, segue que

$$\Delta_g \phi_C - k + f_n e^{2\phi_C} \geq 0, \tag{3.4}$$

para todo $C \geq C_0 > 0$.

Afirmação 8. *$u_n \geq \phi_{C_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Caso contrário, existe $n \in \mathbb{N}$ e um ponto $p \in M$ tal que

$$u_n(p) < \phi_{C_0}(p).$$

Note que se $C_1 > C_2$, então $\phi_{C_1} < \phi_{C_2}$ e $\phi_C \to -\infty$ quando $C \to +\infty$. Daí, existe $C_1 > C_0$ e um ponto $q \in M$ tal que

$$u_n \geq \phi_{C_1}$$

e

$$u_n(q) = \phi_{C_1}(q).$$

Seja $w = u_n - \phi_{C_1} \geq 0$. Como $u_n \geq \phi_{C_1}$, então

$$e^{u_n} - e^{\phi_{C_1}} \geq 0.$$

De (3.1) e (3.4) tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta_g w = \Delta_g u_n - \Delta \phi_{C_1} &\leq k - f_n e^{2u_n} - k + f_n e^{2\phi_{c_1}} \\ &= f\left(e^{2\phi_{C_1}} - e^{2u_n}\right) + \lambda_n \left(e^{2\phi_{C_1}} - e^{2u_n}\right). \end{aligned}$$

Então

$$\Delta_g w + f(e^{2u_n} - e^{2\phi_{C_1}}) \leq \lambda_n \left(e^{2\phi_{C_1}} - e^{2u_n}\right) = -\lambda_n \left(e^2 u_n - e^{2\phi_{C_1}}\right) \leq 0. \tag{3.5}$$

Agora nota-se que

$$e^{u_n} - e^{\phi_{C_1}} = \int_0^1 \frac{d}{dt} e^{tu_n + (1-t)\phi_{C_1}} dt = w \int_0^1 e^{tu_n + (1-t)\phi_{C_1}} dt.$$

Daí, fazendo $h = \int_0^1 e^{tu_n+(1-t)\phi_{C_1}} dt > 0$, de (3.5), obtém que

$$\Delta_g w + fhw \leq 0.$$

Como $w \geq 0$, segue pelo Princípio do Máximo (Teorema 16), que w é identicamente nula, já que $w(q) = 0$. Portanto, $0 = w_n = u_n - \phi_{C_1}$, concluindo que

$$u_n = \phi_{C_1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} f_n e^{2\phi_{C_1}} &= -\Delta_g \phi_{C_1} + k \\ &= -\frac{k}{\overline{f}}(\overline{f} - f) + k \\ &= -k + \frac{f}{\overline{f}} k + k \\ &= \frac{f}{\overline{f}} k. \end{aligned}$$

Lembre que $f_n = f + \lambda_n$ com $f \leq 0$ e $\max f = 0$, e $\lambda_n > 0$. Seja $p \in M$ com $f(p) = 0$. Assim $f_n(p) > 0$, o que implica que $f_n(p)e^{2\phi_{C_1}(p)} > 0$. Mas da última igualdade acima isso é uma contradição. Isto implica a Afirmação 8.

Da afirmação acima, conclui-se que

$$u_n \geq \min \phi_{C_0}.$$

Isto implica o resultado. □

Para os próximos resultados, considere a seguinte definição

$$M^- = \{x \in M : f(x) < 0\}.$$

Lema 16. *Seja $\Omega \subset M$ um subconjunto aberto tal que $\overline{\Omega} \subset M^-$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega) > 0$, dependendo de Ω, tal que*

$$\|u_n^+\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\nabla u_n^+|_g^2 + |u_n^+|_g^2 \right) dv_g \leq C,$$

onde $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$.

Demonstração. Como todo conjunto aberto é a união de bolas, basta provar o lema para uma bola $B_r(p)$ cujo fecho está contido em M^-. Considere uma função suave $0 \leq \phi \leq 1$ com o suporte em $B = B_{r/2}(p)$ e com $\phi \equiv 1$ em $\overline{B}_{r/4}(p)$, e seja $\eta = \phi^2$. Multiplique (3.1) por $\eta^2 u_n^+$ e obtenha que

$$-\eta^2 u_n^+ \Delta_g u_n + k\eta^2 u_n^+ - f_n \eta^2 u_n^+ e^{2u_n} = 0.$$

Note que nesta identidade é possível considerar u_n^+ no lugar de u_n, já que $u_n^+ = u_n$ nos pontos que $u_n > 0$ e $u_n^+ = 0$ nos pontos que $u_n \leq 0$. Integração por partes resulta na identidade

$$\int_B \left(\langle \nabla u_n^+, \nabla(\eta^2 u_n^+) \rangle + k\eta^2 u_n^+ - f_n e^{2u_n^+} \eta^2 u_n^+ \right) dv_g = 0, \tag{3.6}$$

já que η anula-se na fronteira de B. Nota-se que

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_n^+, \nabla(\eta^2 u_n^+) \rangle &= \langle \nabla u_n^+, u_n^+ \nabla(\eta^2) + \eta^2 \nabla u_n^+ \rangle \\ &= \langle \nabla u_n^+, 2\eta u_n^+ \nabla \eta \rangle + \langle \nabla u_n^+, \eta^2 \nabla u_n^+ \rangle \\ &= 2\eta u_n^+ \langle \nabla u_n^+, \nabla \eta \rangle + \eta^2 \langle \nabla u_n^+, \nabla u_n^+ \rangle \\ &= 2\eta u_n^+ \langle \nabla u_n^+, \nabla \eta \rangle + \eta^2 |\nabla u_n^+|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \nabla \left(\eta u_n^+ \right) \right|^2 &= \left| u_n^+ \nabla \eta + \eta \nabla (u_n^+) \right|^2 \\ &= (u_n^+)^2 \left| \nabla \eta \right|^2 + 2 u_n^+ \eta \langle \nabla u_n^+, \nabla \eta \rangle + \eta^2 \left| \nabla u_n^+ \right|^2. \end{aligned}$$

Portanto.

$$2u_n^+ \eta \langle \nabla u_n^+, \nabla \eta \rangle + \eta^2 \left| \nabla u_n^+ \right|^2 = \left| \nabla \left(\eta u_n^+ \right) \right|^2 - (u_n^+)^2 \left| \nabla \eta \right|^2. \tag{3.8}$$

Dessa forma, aplicando (3.8) em (3.7), obtém-se que

$$\langle \nabla u_n^+, \nabla(\eta^2 u_n^+) \rangle = \left| \nabla(\eta u_n^+) \right|^2 - \left| \nabla \eta \right|^2 (u_n^+)^2.$$

De (3.6) tem-se

$$\int_B \left(\left| \nabla(\eta u_n^+) \right|^2 - \left| \nabla \eta \right|^2 (u_n^+)^2 + k\eta^2 u_n^+ - f_n e^{2u_n^+} \eta^2 u_n^+ \right) dv_g = 0.$$

Daí,

$$\int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 - f_n e^{2u_n^+}\eta^2 u_n^+ \right) dv_g = \int_B \left(|\nabla\eta|^2 (u_n^+)^2 - k\eta^2 u_n^+ \right) dv_g.$$

Além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f_n \leq -\varepsilon$ em $\overline{B}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Isto implica que

$$\begin{aligned}\int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 + \varepsilon e^{2u_n^+}\eta^2 u_n^+ \right) dv_g &\leq \int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 - f_n e^{2u_n^+}\eta^2 u_n^+ \right) dv_g \\ &= \int_B \left(|\nabla\eta|^2 (u_n^+)^2 - k\eta^2 u_n^+ \right) dv_g.\end{aligned}$$

Note que $e^{2t} \geq t^3$, para todo $t \geq 0$. Como $u_n^+ \geq 0$, segue que

$$\int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 + \epsilon\eta^2 (u_n^+)^4 \right) dv_g \leq \int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 + \epsilon e^{2u_n^+}\eta^2 u_n^+ \right) dv_g,$$

o que implica que

$$\int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 + \epsilon\eta^2 (u_n^+)^4 \right) dv_g \leq \int_B \left(|\nabla\eta|^2 (u_n^+)^2 - k\eta^2 u_n^+ \right) dv_g.$$

Como $\eta = \phi^2$, segue que

$$|\nabla\eta|^2 (u_n^+)^2 = |\nabla\phi^2|^2 (u_n^+)^2 = |2\phi\nabla\phi|^2 (u_n^+)^2 = 4|\nabla\phi|^2 (\phi u_n^+)^2 \leq C(\phi u_n^+)^2, \quad (3.9)$$

já que $4\left|\nabla\phi\right|^2 \leq C$, para alguma constante $C > 0$. Usando a Desigualdade de Young (Lema 6), tem-se

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2,$$

para todo $\delta > 0$. Faça

$$\begin{aligned} a &= (\phi u_n^+)^2, \\ b &= C, \\ \delta &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim,

$$C(\phi u_n^+)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}(\phi u_n^+)^4 + \frac{1}{2\varepsilon}C^2 = \frac{1}{2}\varepsilon(\phi u_n^+)^4 + C(\varepsilon).$$

Como $\eta = \phi^2$, segue de (3.9) que

$$|\nabla\phi|^2 (\phi u_n^+)^2 \leq \frac{1}{2}\epsilon\eta^2 (u_n^+)^4 + C(\varepsilon). \quad (3.10)$$

Da mesma forma, usando a Desigualdade de Young (Lema 6) duas vezes, tem-se

$$u_n^+ \leq \frac{\delta_1}{2}(u_n^+)^2 + C(\delta_1) \leq \frac{\delta_2}{2}(u_n^+)^4 + C(\delta_1, \delta_2).$$

Considere $\delta_2 = -\frac{\varepsilon}{k} > 0$. Assim

$$u_n^+ \leq -\frac{\varepsilon}{2k}(u_n^+)^4 + C(\varepsilon).$$

Dessa forma

$$-k\eta^2 u_n^+ \leq \frac{1}{2}\varepsilon\eta^2(u_n^+)^4 + C(\varepsilon). \tag{3.11}$$

Pelas desigualdades (3.10) e (3.11) obtém-se que

$$\begin{aligned}\int_B \left(\left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 + \varepsilon\eta^2(u_n^+)^4 \right) dv_g &\leq \int_B |\nabla\eta|^2 (u_n^+)^2 dv_g - \int_B k\eta^2 u_n^+ dv_g \\ &\leq \frac{1}{2}\int_B \varepsilon\eta^2(u_n^+)^4 dv_g + \frac{1}{2}\int_B \varepsilon\eta^2(u_n^+)^4 dv_g + C.\end{aligned}$$

Daí

$$\int_B \left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 dv_g + \int_B \varepsilon\eta^2(u_n^+)^4 dv_g \leq \int_B \varepsilon\eta^2(u_n^+)^4 dv_g + C.$$

Então

$$\int_B \left|\nabla(\eta u_n^+)\right|^2 dv_g = \|\nabla(\eta u_n^+)\|^2_{L^2(B)} \leq C.$$

Pela Desigualdade de Poincaré (Teorema 13), conclui-se que

$$\|(\eta u_n^+)\|^2_{L^2(B)} \leq C\|(\eta\nabla u_n^+)\|^2_{L^2(B)}.$$

Como $\eta \equiv 1$ na bola de raio $r/4$, segue o resultado. □

Lema 17. *Dado $\overline{\Omega} \subset M^-$, existe uma constante $C(\Omega)$, que depende apenas de Ω, tal que*

$$u_n(x) \leq C(\Omega),$$

para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Foi provado no lema anterior que $\|u_n^+\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0$. Como

$$u_n = u_n^+ + u_n^-,$$

com $u_n^- = \min\{u_n, 0\}$, segue que

$$\int_\Omega f_n^2 e^{4u_n} dv_g \leq C_0 \int_\Omega e^{4u_n^+} dv_g.$$

Daí, pela Desigualdade de Moser-Trundiger (Teorema 17), obtém-se que

$$C_0 \int_\Omega e^{4u_n^+} dv_g \leq C_0 e^{C_1 \|\nabla u_n^+\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Seja $v_n \in H^1(\Omega)$ uma solução de

$$\begin{cases} \Delta_g v_n = k - f_n e^{2u_n} & \text{em} \quad \Omega \\ v_n = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, pela Teoria da Regularidade Elíptica, tem-se que

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f_n e^{2u_n} - k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Defina $w_n = u_n - v_n$. Como u_n satisfaz (3.1), segue que

$$-\Delta_g w_n = f_n e^{2u_n} - k - f_n e^{2u_n} + k = 0,$$

em Ω e $w_n = u_n$ em $\partial\Omega$. Da propriedade da média para funções harmônicas, seque que para todo $x \in \Omega$, obtém-se

$$\begin{aligned} w_n(x) &= \int_{B_r(x)} w_n dv_g = \int_{B_r(x)} u_n^+ dv_g + \int_{B_r(x)} u_n^- dv_g - \int_{B_r(x)} v_n dv_g \\ &\leq \int_{B_r(x)} u_n^+ dv_g - \int_{B_r(x)} v_n dv_g \leq C. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$u_n = v_n + w_n \leq C.$$

Portanto segue o resultado. □

Definição 19. *Um ponto $p \in M$ é chamado de* ***ponto de blow-up*** *para a sequência (u_n) se, para todo $r > 0$*

$$\sup_{B_r(p)} |u_n| \to \infty, \qquad \textit{quando } n \to \infty.$$

Segue desta definição e do Lema 17 que nenhum ponto de M^- pode ser ponto de blow-up para a sequência (u_n). Como $f \leq 0$, segue que se p é um ponto de blow-up, então $f(p) = 0$. Além disso, o Lema 15 implica que $\sup\limits_{B_r(p)} u_n \to +\infty$.

Lema 18. *A sequência (u_n) possui pelo menos um ponto de blow-up.*

Demonstração. Suponha que a sequência (u_n) é uniformemente limitada. Daí, pela Teoria da Regularidade Elíptica segue que, a menos de uma subsequencia, (u_n) converge em $H^1(M)$ para uma solução de

$$-\Delta_g u + k = fe^{2u}.$$

Mas como u_0 é a única solução dessa equação, seque que $u_n \to u_0$ em H^1. Da Proposição 4 tem-se que

$$d^2I(u_0)(h,h) > C|h|^2_{H^1},$$

para todo $h \in H^1(M)$. Isto implica que para n suficientemente grande u_n irá satisfazer uma desigualdade análoga a anterior, implicando que u_n seria um ponto de mínimo local, o que contradiz a Proposição 7. □

Seja p um ponto de blow-up para a sequência (u_n). É bem conhecido que existem coordenadas centradas em p, tais que a métrica g é conforme à métrica euclidiana em $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$, para algum $r > 0$ suficientemente pequeno. Assim

$$g = e^{2v}\delta,$$

para alguma função suave v em $B_r(0)$. Por outro lado, tem-se

$$\overline{g} = e^{2u_n}g = e^{2u_n}e^{2v}\delta = e^{2(u_n+v)}\delta = e^{2v_n}\delta,$$

com $v_n : B_r(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $v_n = u_n + v$. Além disso, como a curvatura Gaussiana de $\overline{g}$ é f_n, segue que v_n é solução de

$$-\Delta v_n = f_n e^{2v_n}, \tag{3.12}$$

onde Δ é o Laplaciano euclidiano. Como p é um ponto de blow-up para (u_n), segue que a origem é ponto de blow-up para (v_n). Dessa forma, existe $x_n \in \overline{B_r(0)}$ tal que $x_n \to 0$ e

$$v_n(x_n) = \max_{x \in B_r(0)} v_n(x) \to \infty.$$

Implicando que
$$\Delta v_n(x_n) \leq 0.$$

Lema 19. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*
$$|x_n|^2 \leq C\lambda_n, \tag{3.13}$$
para todo n.

Demonstração. Como x_n é ponto de máximo de v_n, então
$$0 \leq -\Delta v_n(x_n) = f_n(x_n)e^{2u_n(x_n)}.$$

Logo,
$$f_n(x_n) = f(x_n) + \lambda_n \geq 0.$$

Lembre-se que $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$. Então, pela expansão de Taylor em torno da origem, em coordenadas, ganha-se
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{2}df(0)(x) + d^2f(0)(x,x) + O(|x|^2) \\ &= \frac{1}{2}d^2f(0)(x,x) + O(|x|^2). \end{aligned}$$

Como $d^2f(0)(x,x) < 0$ se $x \neq 0$, já que os máximos de f são não-degenerados, então existem números positivos a e b tais que
$$-a|x|^2 \leq \frac{1}{2}d^2f(x,x) \leq -b|x|^2.$$

Portanto
$$\begin{aligned} f(x) &= d^2f(0)(x,x) + O(|x|^2) \\ &\leq -b|x|^2 + O(|x|^3) \\ &= |x|^2\left(-b + O(|x|)\right). \end{aligned}$$

Agora, usando que $f_n(x_n) + \lambda_n \geq 0$, pois $\lambda_n > 0$, obtém-se que
$$\begin{aligned} |x_n|^2\left(-b + O(|x_n|)\right) + \lambda_n &\geq 0 \\ |x_n|^2\left(b + O(|x_n|)\right) &\leq \lambda_n. \end{aligned}$$

Por fim
$$|x_n|^2 \leq \frac{\lambda_n}{(b + O(|x|))} \leq C\lambda_n.$$

□

Lema 20. *Para todo $r > 0$ vale*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(0)} (f+\lambda_n)^+ e^{2v_n} dx \geq 2\pi.$$

Demonstração. Suponha por contradição que para algum $r > 0$ vale

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(0)} (f+\lambda_n)^+ e^{2v_n} dx = \alpha < 2\pi.$$

Considere

$$z_n = v_n - v_n^{(0)} - v_n^{(+)} - v_n^{(-)},$$

onde $v_n^{(0)}$ e $v_n^{(\pm)}$ são soluções dos problemas

$$\begin{cases} \Delta v_n^{(0)} = 0 & \text{em } B_r(0) \\ v_n^{(0)} = v_n & \text{em } \partial B_r(0), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v_n^{(\pm)} = f_n^{\pm} e^{2v_n} & \text{em } B_r(0) \\ v_n^{(\pm)} = 0 & \text{em } \partial B_r(0)., \end{cases}$$

onde $f_n^+ = \max\{f_n, 0\}$, $f_n^- = \min\{f_n, 0\}$. Note que z_n é uma função harmônica que se anula na fronteira, de fato

$$\Delta z_n = -f_n e^{2v_n} + f_n^+ e^{2v_n} + f_n^- e^{2v_n} = 0 \ \text{ em } B_r(0),$$

e $z_n = 0$ em $\partial_r(0)B$. Pelo Princípio do Máximo (Teorema 16), segue que $z_n = 0$, ou ainda

$$v_n = v_n^{(0)} + v_n^{(+)} + v_n^{(-)}.$$

De (3.12), obtém-se que

$$-\Delta v_n = f_n e^{2v_n} = f_n e^{2v^{(0)}} e^{2v_n^{(+)}} e^{2v_n^{(-)}}. \tag{3.14}$$

Pelo Lema 8, para todo $\delta \in (0, 4\pi)$, tem-se que

$$\int_\Omega e^{\frac{(4\pi-\delta)|v_n^{(+)}|}{\alpha}} \leq \frac{16\pi^2 r^2}{\delta}.$$

Seja $p \in (1, 2\pi/\alpha)$. Note que se $p = \frac{4\pi-\delta}{2\alpha}$ e $\delta > 0$ é pequeno, tem-se

$$1 < p = \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\delta}{2\alpha} < \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Daí,

$$\int_\Omega e^{\frac{(4\pi-\delta)|v_n^{(+)}|}{\alpha}} \leq \int_\Omega e^{2pv_n^{(+)}} \leq \frac{16\pi^2 r^2}{\delta}.$$

Assim

$$\|e^{2v_m^{(+)}}\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

Como

$$\Delta_g v_n^{(-)} = -f_n^- e^{2v_n} \geq 0,$$

segue pelo Princípio do Máximo (Teorema 16) que $v_n^{(-)} \equiv m$ ou $v_n^{(-)}(x) < m$, para todo $x \in \text{int}B_r(0)$, onde $m = v_n^-(x) = \max_{\overline{B_r(0)}} v_n^{(-)}$. Note que, se x_0 estiver contido no interior de $B_r(0)$, então $v_n^{(-)}(x_0)$ é identicamente nula, que é um absurdo pois resultaria que $\Delta_g v_n^{(-)} = -f_n^- e^{2v_n} = 0$, mas $e^{2v_n} > 0$ e f_n admite valores negativos quando $\lambda_n \to 0$ então $f_n^- = \min\{f_n, 0\} < 0$ em algum ponto. Dito isso, segue que

$$v_n^{(-)} \leq 0, \qquad \text{em } \overline{B_r(0)}.$$

Como $v_n^{(0)}$ é uma função harmônica, segue novamente do Princípio do Máximo que, para todo $x \in B_r(0)$, tem-se que

$$|v_n^{(0)}(x)| \leq \max_{\partial B_r(0)} v_n^{(0)} = \max_{\partial B_r(0)} v_n.$$

Segue do Lema 17 que $|v_n(x)| \leq C$ para todo $x \in \Omega \subset M^-$. Logo, se $\partial B_r(0) \subset \Omega$, então

$$|v_n^{(0)}(x)| \leq C,$$

para todo $x \in B_r(0)$. Portanto de (3.14), conclui-se que

$$e^{2v_n} = e^{2v_n^{(0)}} e^{2v_n^{(+)}} e^{2v_n^{(-)}} \leq Ce^{2v_n^{(+)}}.$$

Integrando a desigualdade acima, obtém-se

$$\int_M e^{2pv_n} dv_g \leq C \int_M e^{2pv_n^{(+)}} dv_g \leq C,$$

para todo $p \in \left(1, \frac{2\pi}{\alpha}\right)$. Como $-\Delta v_n = f_n e^{2v_n}$ e f_n é limitado, segue que

$$\|f_n e^{2v_n}\|_{L^p(B)} \leq C.$$

Da teoria de regularidade elíptica, obtém-se que $v_n \in W^{2,p}(B_r(0))$, mas ainda,

$$\|v_n\|_{W^{2,p}(B_r(0))} \leq C,$$

para todo $p \in \left(1, \frac{2\pi}{\alpha}\right)$, para algum C que não depende de n. Pelos Mergulhos de Sobolev (Teorema 11 (d)) segue que $W^{2,p} \subset C^{0,\alpha}$, continuamente, ou seja,

$$\|v_n\|_{C^{0,\alpha}(B_r(0))} \leq C\|v_n\|_{W^{2,p}} \leq C,$$

para algum $C > 0$ que não depende de n. Que é um absurdo, pois a sequência (v_n) não é uniformemente limitada, já que a origem é um ponto de blow-up. Logo,

$$\alpha \geq 2\pi.$$

□

Pelo Lema 18 existe pelo menos um ponto de blow-up para a sequência (u_n). Seja $\{p_\infty^{(1)}, \cdots, p_\infty^{(N)}\}$, com $N \geq 1$, o conjunto de pontos de blow-up para a sequência (u_n). Do Lema 17 e da teoria da regularidade elíptica segue que $u_n \to u_\infty$ em $C^\infty_{loc}(M_\infty)$, onde

$$M_\infty := M - \{p_\infty^{(1)}, \cdots, p_\infty^{(N)}\}.$$

Lema 21. *A função u_∞ é solução de*

$$-\Delta_g u_\infty + k - fe^{2u_\infty} = \sum_{i=1}^{N} 2\pi a_i \delta_{p_\infty^{(i)}},$$

ou seja,

$$\int_M (-u_\infty \Delta_g \varphi + k\varphi - f\varphi e^{2u_\infty}) dv_g = 2\pi \sum_1^N a_i \varphi(p_\infty^{(i)}),$$

para todo $\varphi \in C^2(M)$, com $a_i \geq 1$.

Demonstração. Lembre-se que u_n é solução de

$$-\Delta_g u_n + k = f_n e^{2u_n}, \tag{3.15}$$

e $v_n = u_n + v$ satisfaz (3.12) em torno dos pontos de blow-up. Além disso, da teoria de EDP, segue que

$$v_n(x) = -a_i \log |x| + O\left(|x|\right),$$

quando $x \to 0$. Daí,

$$u_n = v_n - v = -a_i \log|x| + O(1),$$

o que implica que

$$u_\infty = -a_i \log|x| + O(1).$$

Sejam $\varphi \in C^2(M)$ e $M_r := M \setminus \cup B_r(p_\infty^{(i)})$. Daí, do Teorema da Divergência (Corolário 1), segue que

$$\begin{aligned}\int_{M_r} \left(-u_n \Delta_g \varphi + k\varphi - f_n \varphi e^{2u_n}\right) dv_g &= \int_{M_r} \left(\langle \nabla u_n, \nabla_g \varphi \rangle + k\varphi - f_n \varphi e^{2u_n}\right) dv_g \\ &\quad - \int_{\partial M_r} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dv_g \\ &= \int_{M_\infty} \varphi \left(-\Delta_g u_n + k - f_n e^{2u_n}\right) dv_g \\ &\quad + \int_{\partial M_r} \left(\varphi \frac{\partial u_n}{\partial \eta} - u_n \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) dv_g.\end{aligned}$$

De (3.15) segue que

$$\int_{M_r} \left(-u_n \Delta_g \varphi + k\varphi - f_n \varphi e^{2u_n}\right) dv_g = \int_{\partial M_r} \left(\varphi \frac{\partial u_n}{\partial \eta} - u_n \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) dv_g.$$

Quando $n \to \infty$, obtém-se

$$\int_{M_r} \left(-u_\infty \Delta_g \varphi + k\varphi - f_n \varphi e^{2u_\infty}\right) dv_g = \int_{\partial M_r} \left(\varphi \frac{\partial u_\infty}{\partial \eta} - u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) dv_g,$$

para todo $r > 0$. Note que $\partial M_r = \partial\left(M \setminus \cup B_r(p_\infty^{(i)})\right) = \cup \partial B_r(p_\infty^{(i)})$. Assim ao fazer $r \to 0$, tem-se que

$$\int_{M_\infty} \left(-u_\infty \Delta_g \varphi + k\varphi - f_n \phi e^{2u_\infty}\right) dv_g = \lim_{r \to 0} \left(\int_{\partial M_r} \varphi \frac{\partial u_\infty}{\partial \eta} - u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) dv_g, \quad (3.16)$$

para todo $\varphi \in C^2(M)$. Note que η é a normal para dentro da bola ∂B_r, que em coordenadas normais é dada por $\eta = -\frac{x}{r}$. Note que $u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = O\left(\log|x|\right)$. Assim

$$\left|\int_{\partial B_r} u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dv_g\right| \le C \left|\int_{S^1} r \log r \, dv_g\right| = C \left|r \log r\right|.$$

Daí $|r \log r| \to 0$ quando $r \to 0$. Assim

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial B_r} u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dv_g = 0. \quad (3.17)$$

Além disso, tem-se

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial \eta} = \frac{a_i}{r} + O(1)$$

e

$$\varphi(x) = \varphi(0) + O(|x|).$$

Isto implica que

$$\varphi \frac{\partial u_\infty}{\partial \eta} = \frac{a_i}{r}\varphi(0) + O(1)$$

Logo

$$\lim_{r\to 0} \int_{\partial B_r} \varphi \frac{\partial u_\infty}{\partial \eta} = 2\pi a_i \varphi(0). \tag{3.18}$$

Aplicando (3.17) e (3.18) em (3.16) segue que,

$$\int_{M\infty} \left(-u_\infty \Delta_g \varphi + k\varphi - f_n \varphi e^{2u_\infty}\right) dv_g = 2\pi \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi(p_\infty^{(i)}),$$

para todo $\varphi \in C^2(M)$. Do Lema 20, segue que $a_i \geq 1$. □

Portanto de (3.3) e pelo Lema de Fatou (Lema 7), obtém-se que

$$\int_M |f| e^{2u_\infty} dv_g \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M (|f| + \lambda_n) e^{2u_n} dv_g < \infty. \tag{3.19}$$

Lema 22. $a_i \in [1, 2]$.

Demonstração. Considere coordenadas centradas em $p_\infty^{(i)}$ como acima. Como $u_\infty = v_\infty + v_0$, segue que

$$v_\infty = -a_i \log|x| + w_\infty.$$

Assim,

$$w_\infty = a_i \log|x| + v_\infty, \tag{3.20}$$

como $\Delta \log|x| = 0$ e v_n satisfaz (3.12), então

$$-\Delta w_\infty = -\Delta v_\infty = f e^{2v_\infty} \tag{3.21}$$

em $B_r(0)$, já que $v_n \to v_\infty$. Pelo Lema 8, segue que

$$\int_{B_r(0)} e^{\frac{4\pi-\delta}{\alpha}|w_\infty|} < C,$$

onde $\alpha = \int_{B_r(0)} |f|e^{2v_\infty} dv_g < \infty$. Seja $p \in (1, 2\pi/\alpha)$. Daí, como na demonstração do Lema 21, segue que

$$\|e^{2|w_\infty|}\|_{W^{2,p}(B_r(0))} < C.$$

Note que de (3.19) obtém-se que p pode ser arbitrariamente grande, desde que r seja suficientemente pequeno.

Lembre-se que $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$. Então, pela expansão de Taylor em torno da origem, em coordenadas, ganha-se

$$f(x) = \frac{1}{2} d^2 f(0)(x, x) + O(|x|^3). \tag{3.22}$$

Como $d^2 f(0)(x, x) < 0$ para todo $x \neq 0$, então existem números positivps β_1 e β_2 tais que

$$\beta_1 |x|^2 \leq |f(x)| \leq \beta_2 |x|^2. \tag{3.23}$$

De (3.20), obtém-se que

$$e^{v_\infty} = e^{w_\infty} |x|^{-a_i}. \tag{3.24}$$

De (3.23) encontra-se

$$\beta_1 |x|^{2(1-a_i)} e^{2w_\infty} \leq |f(x)| e^{2v_\infty} \leq \beta_2 |x|^{2(1-a_i)} e^{2w_\infty}. \tag{3.25}$$

Por (3.19) e (3.25), tem-se que

$$\int_{B_r} |x|^{2(1-a_i)} e^{2w_\infty} dx \leq C \int_B |f| e^{2v_\infty} dx < \infty.$$

Da Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |x|^{\frac{2(1-a_i)}{q}} dx &\leq \int_{B_r} \left(|x|^{2(1-a_i)} e^{2w_\infty}\right)^{\frac{1}{q}} e^{-\frac{2w_\infty}{q}} dx \leq C \left(\int_{B_r} e^{-\frac{2w_\infty}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq C \left(\int_{B_r} e^{\frac{2|w_\infty|}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} < C, \end{aligned} \tag{3.26}$$

para todo $q > 1$, desde que r seja suficientemente pequeno.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |x|^{\frac{2(1-a_i)}{q}} dx &= \int_0^r \int_{S^1_s} s^{\frac{2(1-a_i)}{q}} d\theta_s ds \\ &= \int_0^r \int_{S^1} s^{\frac{2(1-a_i)}{q}+1} d\theta ds \\ &= C\, s^{\frac{2(1-a_i)}{q}+2}\Big|_0^r. \end{aligned}$$

De (3.26), essa integral é finita. Portanto, $\frac{2(1-a_i)}{q} + 2 \geq 0$, para todo $q > 1$. Mas isto implica que $a_i \leq 2$. $\square$

Proposição 8. *A métrica $g_\infty = e^{2u_\infty} g$ em M_∞ é completa.*

Demonstração. Sabe-se que a métrica g_∞ é completa se e somente se o comprimento de qualquer curva divergente $\gamma : (c, \infty) \subset \mathbb{R} \to M_\infty$ é ilimitado. Por ([8], página 405, exercício 7) tem-se que γ é divergente se ela sai de qualquer compacto. Como em (2.7), a métrica g é localmente conforme à métrica euclidiana. Assim, em torno de algum ponto de blow-up $p_\infty^{(i)}$ podemos escrever

$$g_\infty = e^{2v_\infty}\delta.$$

Caso 1: $1 \leq a_i < 2$

De (3.21) e (3.25) segue que, para algum $q > 1$ tem-se

$$\Delta w_\infty \in L^q(B_r(0)),$$

em que w_∞ é dado em (3.20). Por regularidade elíptica segue que

$$w_\infty \in L^\infty(B_r(0)).$$

Daí, para algum $C > 0$

$$e^{v_\infty} = |x|^{-a_i} e^{w_\infty} \geq C|x|^{-a_i} \geq C|x|^{-1}.$$

Assim, se $\gamma : [0, t_0) \to B_r(0)\backslash\{0\}$ é uma curva divergente tal que $\gamma(t) \to 0$ quando $t \to t_0$, da relação das métrica e da desigualdade acima, obtém-se

$$|\gamma'(t)|_{g_\infty} = e^{v_\infty}|\gamma'(t)|_\delta \geq C|\gamma(t)|^{-1}|\gamma'(t)|_\delta.$$

Supondo que $|\gamma'|_\delta \equiv 1$. Daí, como $\gamma(t_0) = 0$, então escreva

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma'(s)ds,$$

então $|\gamma(t)|_\delta \leq t_0 - t$. Calculando o comprimento da curva γ em (M_∞, g_∞), resulta em

$$\int_c^t |\gamma'(t)|_{g_\infty} dt \geq \int_c^t C|\gamma(t)|^{-1}|\gamma'(t)|dt \geq C\int_c^t (t_0 - s)^{-1} ds \geq -C\log(t_0 - t).$$

Logo

$$\lim_{t\to t_0}\int_c^t |\gamma'(t)|_{g_\infty} \to \infty.$$

Portanto (M_∞, g_∞) é completa, para $a_i < 2$.

Caso 2: $a_i = 2$

De (3.21) e (3.20), obtém-se que

$$-\Delta w_\infty = fe^{2v_\infty} = fe^{2w_\infty}|x|^{-2a_i}$$

Como $a_1 = 2$ e $f \leq 0$, segue de (3.22) que

$$e^{-2w_\infty}\Delta w_\infty = -f|x|^{-4} \leq C|x|^{-2}.$$

Por outro lado

$$2e^{-2w_\infty}\Delta w_\infty = -\Delta e^{-2w_\infty} + 4|\nabla w_\infty|^2 e^{-2w_\infty}.$$

Assim

$$-\Delta e^{-2w_\infty} \leq C|x|^{-2} - 4|\nabla w_\infty|^2 e^{-2w_\infty}. \tag{3.27}$$

Agora observa-se que

$$\Delta\left(|x|^\alpha e^{-2w_\infty}\right) = |x|^\alpha \Delta e^{-2w_\infty} + e^{-2w_\infty}\Delta|x|^\alpha + 2\langle\nabla|x|^\alpha, \nabla e^{-2w_\infty}\rangle$$

Observe que

$$\Delta|x|^\alpha = \alpha^2|x|^{\alpha-2},$$

então

$$\Delta\left(|x|^\alpha e^{-2w_\infty}\right) = |x|^\alpha\Delta e^{-2w_\infty} + \alpha^2|x|^{\alpha-2}e^{-2w_\infty} - 4\alpha|x|^{\alpha-1}e^{-2w_\infty}\langle x, \nabla w_\infty\rangle.$$

De (3.27), obtém-se que

$$\begin{aligned}
-\Delta\left(|x|^\alpha e^{-2w_\infty}\right) &\leq C|x|^{\alpha-2} - 4|x|^\alpha|\nabla w_\infty|^2 e^{-2w_\infty} - \alpha^2|x|^{\alpha-2}e^{-2w_\infty} \\
&\quad + 4\alpha|x|^{\alpha-1}e^{-2w_\infty}\langle x, \nabla w_\infty\rangle \\
&= C|x|^{\alpha-2} - \left(4|x|^2|\nabla w_\infty|^2 + \alpha^2 + 4\alpha\langle x, \nabla w_\infty\rangle\right)|x|^{\alpha-2}e^{-2w_\infty} \\
&\leq C|x|^{\alpha-2} - \left(4|x|^2|\nabla w_\infty|^2 + \alpha^2 - 4\alpha|x||\nabla w_\infty|\right)|x|^{\alpha-2}e^{-2w_\infty}.
\end{aligned}$$

Logo
$$-\Delta(|x|^{\alpha}e^{-2w_\infty}) \leq C|x|^{\alpha-2}.$$
onde o lado direito pertence à $L^q(B_r(0))$ para algum $q = q(\alpha) > 0$. Da teoria da regularidade elíptica segue que
$$|x|^{\alpha}e^{-2w_\infty} \leq C.$$
De (3.24), tem-se que
$$e^{2v_\infty} = e^{2w_\infty}|x|^{-4} \geq C|x|^{\alpha-4}.$$
Daí, no mesmo modo do caso anterior segue o resultado no caso 2.

Portanto (M_∞, g_∞) é completa, para $1 \leq a_i \leq 2$. □

3.2 Prova do Teorema 2

Teorema 20. *Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função não constante com $\max f = 0$ tal que seus pontos de máximos são não degenerados. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ considere $f_\lambda := f + \lambda$ e $I_\lambda := I_{f_\lambda}$ como definido em (3). Então existem um conjunto finito de pontos $\{p_\infty^{(1)}, \dots, p_\infty^{(N)}\}$ de M, com $N \geq 1$ e $f(p_\infty^{(i)}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq N$, uma sequência $\lambda_n \downarrow 0$ e uma sequência de pontos críticos não minimizantes u_n de I_{λ_n} tais que para certas sequências $r_n^{(i)} \downarrow 0$ e $p_m^{(i)} \to p_\infty^{(i)}$, vale o seguinte*

1. *$u_n \to u_\infty$ em M_∞ e u_∞ induz a métrica completa $g_\infty = e^{2u_\infty}g$ em M_∞ de curvatura Gaussiana $K_{g_\infty} = f$.*

2. *Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, $r_n^{(i)}/\sqrt{\lambda_n} \to 0$ e em coordenadas locais conformes em torno de $p_n^{(i)} = 0$ tem-se*
$$w_n := u_n(r_n^{(i)}x) - u_n(0) + \log 2 \to w_\infty(x) = \log\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right),$$
em $C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$, onde w_∞ induz a métrica esférica $g_\infty = e^{2w_\infty}\delta$ de curvatura Gaussiana $K_{g_\infty} = 1$ em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. O Lema 18 diz que a sequência (u_n) possui ao menos um ponto de blow-up. A convergência para uma função suave u_∞ segue pelo Lema 17 e da teoria da regularidade elíptica. Pela Proposição 8 segue que u_∞ induz a métrica completa $g_\infty = e^{2u_\infty} g$. O Lema 21 implica que u_∞ satisfaz

$$-\Delta_g u_\infty + k - f e^{2u_\infty} = 0 \qquad \text{em} \quad M_\infty,$$

onde $a_i \in [1,2]$. Assim, $K_{g_\infty} = f$.

Agora para mostrar o item (ii), fixe algum ponto de blow-up $p_\infty^{(i)}$. Como antes, considere coordenadas em torno deste ponto tais que a métrica g seja conforme a euclidiana em alguma bola $B_R(0)$, ou seja, $g = e^{2v_0}\delta$. Considere novamente

$$v_n(x) = u_n(x) + v_0(x).$$

Note que v_n satisfaz (3.12). Seja (x_n) uma sequência tal que $v_n(x_n) = \sup_{|x|<R} v_n(x)$.

Vamos considerar dois casos.

Caso 1:

$$\lambda_n^2 e^{2v_n(x_n)} \to \infty.$$

Defina

$$w_n(x) := v_n(x_n + r_n x) - v_n(x_n), \tag{3.28}$$

em $D_n = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_n + r_n x| < R\}$, onde $r_n > 0$ é tal que

$$r_n^2 \lambda_n e^{2v_n(x_n)} = 1. \tag{3.29}$$

Note que $w_n \leq 0$ em D_n, $w_n(0) = 0$ e

$$\lambda_n^2 e^{2v_n(x_n)} = \frac{\lambda_n}{r_n^2} \to \infty. \tag{3.30}$$

Como $\lambda_n \to 0$, segue que $r_n \to 0$. Por (3.28), segue que

$$\Delta w_n(x) = r_n^2 \Delta v_n(x_n + r_n x).$$

Como v_n satisfaz (3.12), segue que de (3.28) e (3.29) que

$$\begin{aligned}
-\Delta w_n(x) &= r_n^2 (f(x_n + r_n x) + \lambda_n) e^{2v_n(x_n + r_n x)} \\
&= r_n^2 (f(x_n + r_n x) + \lambda_n) e^{2w_n(x)} e^{2v_n(x_n)} \\
&= \left(\frac{f(x_n + r_n x)}{\lambda_n} + 1 \right) e^{2w_n(x)} \\
&= h_n(x) e^{2w_n(x)},
\end{aligned}$$

onde $h_n(x) = \frac{f(x_n+r_nx)}{\lambda_n} + 1$. Note que

$$h_n(x) = \frac{f(x_n + r_nx)}{\lambda_n} + 1 \leq 1, \tag{3.31}$$

já que $\max f = 0$. Desse modo, resulta que

$$-\Delta_g w_n = h_n e^{2w_n}.$$

com $h_n \leq 1$. Além disso, de (3.28), obtém-se que

$$\begin{aligned}\int_{D_n} e^{2w_n(x)}dx &= \int_{D_n} e^{2(v_n(x_n+xr_n)-v_n(x_n))}dx \\ &= e^{-2v_n(x_n)} \int_{D_n} e^{2v_n(x_n+xr_n)}dx.\end{aligned}$$

Faça $y = x_n + r_nx$. Assim $dy = r_n^2 dx$ e obtenha

$$e^{-2v_n(x_n)} \int_{D_n} e^{2v_n(x_n+xr_n)}dx = \frac{1}{r_n^2} e^{-2v_n(x_n)} \int_{B_r(0)} e^{2v_n(y)}dy.$$

Como $v_n = u_n + v$, segue de (3.29) que

$$\frac{1}{r_n^2} e^{-2v_n(x_n)} \int_{B_r(0)} e^{2v_n(y)}dy = \lambda_n \int_{B_r(0)} e^{2u_n} e^{2v} dy.$$

Como a métrica g é conforme a métrica euclidiana, o elemento de volume das métricas é relacionado por $dv_g = e^{2v}dy$, o que implica que

$$\lambda_n \int_{B_r(0)} e^{2u_n(y)} e^{2v} dy = \lambda_n \int_{B_r(0)} e^{2u_n(y)} dv_g.$$

De (3.2), conclui-se que

$$\int_{D_n} e^{2w_n(x)}dx = \lambda_n \int_{B_r(p_\infty^{(i)})} e^{2u_n(y)} dv_g \leq C. \tag{3.32}$$

Afirmação 9. $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\lambda_n} + 1$.

Basta mostrar que a diferença dos limites é igual a zero, ou seja,

$$\frac{f(x_n + r_nx) - f(x_n)}{\lambda_n} \to 0.$$

Primeiro faça a expansão de Taylor para $f(x)$ e $f(x_n)$ e considere $A = \frac{1}{2}\nabla^2 f(0)$, logo

$$f(x) = A(x,x) + O(|x|^3)$$

e

$$f(x_n) = A(x_n, x_n) + O(|x_n|^3).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_n + r_n x) &= A(x_n + r_n x, x_n + r_n x) + O(|x_n + r_n x|^3) \\ &= A(x_n, x_n) + A(x_n, r_n x) + A(r_n x, x_n + r_n x) + O(|x_n + r_n x|^3). \end{aligned}$$

Daí

$$f(x_n + r_n x) - f(x_n) = A(x_n, r_n x) + A(r_n x, x_n + r_n x) + O(|x_n + r_n x|^3) - O(|x_n|^3).$$

Portanto, se $|x|$ é limitado, segue que

$$\begin{aligned} |f(x_n + r_n x) - f(x_n)| &\leq C\left(|x_n| r_n + r_n |x_n + r_n x| + |x_n + r_n x|^3 + |x_n|^3\right) \\ &\leq C(r_n |x_n| + r_n^2 + |x_n|^3 + r_n^3). \end{aligned}$$

De (3.13), segue que

$$\frac{|f(x_n + r_n x) - f(x_n)|}{\lambda_n} \leq C\left(\frac{r_n}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{r_n^2}{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n} + \frac{r_n^3}{\lambda_n}\right).$$

Por (3.30), seque que $\frac{r_n^2}{\lambda_n} \to 0$, logo

$$\frac{|f(x_n + r_n x) - f(x_n)|}{\lambda_n} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Isto prova a afirmação.

Do mesmo modo, verifica-se que

$$\left|\frac{f(x_n)}{\lambda_n}\right| \leq C.$$

Em (3.31), foi visto que

$$\frac{f(x_n + r_n x)}{\lambda_n} + 1 \leq 1,$$

e sabe-se que $v_n(x_n) = \sup_{B_r(0)} v_n(x)$, implicando que $\Delta v_n(x_n) = -f_n(x_n) e^{2v_n(x_n)} \leq 0$, logo $f_n(x_n) \geq 0$ e assim

$$\frac{f_n(x_n)}{\lambda_n} \geq 0.$$

Portanto, a menos de uma subsequência, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\lambda_n}$ existe e converge para algum valor em $[0,1]$.

Desse modo, conclui-se que a sequência (w_n) converge uniformemente para w_∞, onde $w_\infty \leq 0 = w_\infty(0)$ é solução da equação

$$-\Delta w_\infty = h_\infty e^{2w_\infty},$$

em $\mathbb{R}^2$. De (3.32), tem-se $\int_{\mathbb{R}^2} e^{2w_\infty} dx < \infty$, já que D_n exauri todo $\mathbb{R}^2$. Pela classificação de Chen-Li [6] de todas as soluções para esta equação, tem-se que $h_\infty > 0$ e $w_\infty = \log\left(\frac{1}{1+h_\infty|x|^2/4}\right)$. Assim, após substituir r_n por $\frac{2r_n}{\sqrt{h_\infty}}$ obtém-se que

$$w_\infty = \log\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right).$$

Caso 2: $\lambda_n^2 e^{2v_n(x_n)} \leq C$.

Pelo Lema 20 segue que $1 \leq C\lambda_n^2 e^{2v_n(x_n)}$ e então

$$|v_n(x_n) + \log(\lambda_n)| \leq C.$$

Seja $r_n^2 = \lambda_n$ e escreva

$$w_n(x) = v_n(r_n x) + \log(\lambda_n). \tag{3.33}$$

em $D_n = \{x \in \mathbb{R}^2; |r_n x| < R\} = B_{\frac{R}{r_n}}(0)$. Dessa forma segue que

$$\left|\sup_{D_n} w_n\right| \leq C.$$

Além disso, w_n satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
-\Delta w_n(x) &= r_n^2 \left(f(xr_n) + \lambda_n\right) e^{2v_n(xr_n)} \\
&= r_n^2 \left(f(xr_n) + \lambda_n\right) e^{2w_n(x)} e^{2\log\lambda_n} \\
&= r_n^2 \lambda_n^{-2} \left(f(xr_n) + \lambda_n\right) e^{2w_n(x)} \\
&= h_n(x) e^{2w_n(x)},
\end{aligned}$$

onde $h_n(x) = \frac{f(r_n x)}{\lambda_n} + 1$ e como $r_n^2 = \lambda_n$, ou seja,

$$-\Delta w_n = h_n e^{2w_n}.$$

Da mesma forma do caso anterior, obtém-se que

$$h(x) = \frac{f(xr_n)}{\lambda_n} + 1 \leq 1.$$

Além disso, de (3.33), obtém-se que

$$\begin{aligned}\int_{D_n} e^{2w_n(x)} dx &= \int_{D_n} e^{2(v_n(xr_n)+\log\lambda_n)} dx \\ &= \lambda_n^2 \int_{D_n} e^{2(v_n(xr_n))} dx.\end{aligned}$$

Faça $y = r_n x$ e $dy = r_n^2 dx$ e obtenha

$$\lambda_n^2 \int_{D_n} e^{2(v_n(xr_n))} dx = \frac{\lambda_n^2}{r_n^2} \int_{B_r(0)} e^{2(v_n(y))} dy,$$

Como $r_n^2 = \lambda_n$, segue que

$$\frac{\lambda_n^2}{r_n^2} \int_{B_r(0)} e^{2(v_n(y))} dy = \lambda_n \int_{B_r(0)} e^{2(v_n(y))} dy.$$

E como foi feito no caso anterior segue que

$$\lambda_n \int_{B_r(0)} e^{2u_n(y)} e^{2v} dy = \lambda_n \int_{B_r(p_\infty^{(i)})} e^{2u_n} dv_g \leq \lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g.$$

De (3.2), conclui-se que

$$\int_{D_n} e^{2w_n(x)} dx = \lambda_n \int_{B_r(0)} e^{2v_n(y)} dy \leq \lambda_n \int_M e^{2u_n} dv_g \leq 8\pi.$$

A expansão de Taylor de f nos dar que

$$f(xr_n) = r_n^2 A(x,x) + O(|xr_n|^3).$$

Daí,

$$\frac{f(r_n x)}{\lambda_n} = A(x,x) + O(r_n |x|^3),$$

já que $r_n^2 = \lambda_n$. Portanto, para $|x|$ limitado, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(r_n x)}{\lambda_n} = A(x,x).$$

Assim, $h_n \to h_\infty$ quando $n \to \infty$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, onde $h_\infty(x) = 1 + A(x, x)$. Além disso, da teoria de regularidade elíptica segue que $w_n \to w_\infty$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ para alguma w_∞ satisfazendo

$$-\Delta w_\infty = h_\infty e^{2w_\infty}, \tag{3.34}$$

em $\mathbb{R}^2$ e com volume finito

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2w_\infty} dx < \infty, \tag{3.35}$$

e curvatura total finita

$$\int_{\mathbb{R}^2} |h_\infty| e^{2w_\infty} dx < \infty. \tag{3.36}$$

O Teorema 21 a seguir, implica que (3.34) não possui solução com as condições (3.35) e (3.36). Isto conclui a prova do Teorema 2. □

O Teorema 4.5 de [11] analisa a equação (3.34) resultante do **Caso 2** e conclui que não existe solução. Segue abaixo o teorema citado.

Teorema 21. *Suponha que A é uma matriz 2×2 simétrica negativa. Então não existe solução $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ da equação*

$$-\Delta w = (1 + (Ax, x))\, e^{2w},$$

em $\mathbb{R}^2$ com $w \leq C$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2w} dx < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + (Ax, x))\, e^{2w} dx \quad \in \mathbb{R},$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} |1 + (Ax, x)|\, e^{2w} dx < \infty.$$

Referências

[1] Aubin, T. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Citado na página 23.

[2] Berger, M. S. Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds. *J. Differential Geometry 5* (1971), 325–332. Citado na página 2.

[3] Borer, F., Galimberti, L., and Struwe, M. "Large" conformal metrics of prescribed Gauss curvature on surfaces of higher genus. *Comment. Math. Helv. 90*, 2 (2015), 407–428. Citado 4 vezes nas páginas 5, 6, 3 e 4.

[4] Brezis, H., and Merle, F. Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions. *Comm. Partial Differential Equations 16*, 8-9 (1991), 1223–1253. Citado na página 24.

[5] Chang, S.-Y. A. *Nonlinear elliptic equations in conformal geometry.* Princeton University, USA, 2005. Citado na página 24.

[6] Chen, C.-C., and Lin, C.-S. Prescribing scalar curvature on S^N. I. A priori estimates. *J. Differential Geom. 57*, 1 (2001), 67–171. Citado na página 74.

[7] Ding, W. Y., and Liu, J. Q. A note on the problem of prescribing Gaussian curvature on surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 347*, 3 (1995), 1059–1066. Citado na página 3.

[8] Do Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* SBM, 2005. Citado na página 68.

[9] Evans, L. C. *Partial differential equations. Second. Vol. 19.* American Mathematical Society, 2010. Citado na página 15.

[10] Kazdan, J. L., and Warner, F. W. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math. (2) 99* (1974), 14–47. Citado na página 2.

[11] Struwe, M. "Bubbling" of the prescribed curvature flow on the torus. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 22*, 10 (2020), 3223–3262. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 76.