UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JÉSSICA SIMÃO RODRIGUES

ANÁLISE MECÂNICA DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS QUASE-3D DE ALTA ORDEM COM FUNÇÕES ZIG-ZAG

São Cristóvão – SE

2024

JÉSSICA SIMÃO RODRIGUES

ANÁLISE MECÂNICA DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS QUASE-3D DE ALTA ORDEM COM FUNÇÕES ZIG-ZAG

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Carlos da Rocha.

São Cristóvão – SE

2024

Ficha catalográfica

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta qualificação e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor**.**

Jéssica Simão Rodrigues

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Rodrigues, Jéssica Simão
R696a Análise mecânica de vigas compósitas laminadas quase-3D de alta ordem com funções zig-zag / Jéssica Simão Rodriques ; orientador Fábio Carlos da Rocha. - São Cristóvão, 2024.
119 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Engenharia civil. 2. Vigas. 3. Funções (Matemática). I. Rocha, Fábio Carlos, Orient. II. Título.

CDU 692.29

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JÉSSICA SIMÃO RODRIGUES

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE.

BANCA EXAMINADORA:

Profº Dr. Fabio Carlos Da Rocha

Orientador

Departamento de Engenharia Civil

Universidade Federal de Sergipe – UFS

Profº Dr. Leslie Darien Pérez Fernández

1ª Examinador

Departamento de Matemática e Estatística

Universidade Federal de Pelotas – UFPel

Profª Drª Nilma Fontes de Araujo Andrade

2º Examinadora

Departamento de Engenharia Civil

Universidade Federal de Sergipe – UFS

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Ana Ferreira e Gildemar Coelho e ao meu irmão, Jefferson Simão, pelo apoio e pela compreensão durante os momentos em que precisei me ausentar.

Aos meus familiares, avós, tios e primos, agradeço o incentivo desde a infância. Essa contribuição foi essencial para que eu seguisse meus sonhos e alcançasse esta conquista.

Ao meu orientador, Fabio Carlos, minha profunda gratidão. Apesar dos desafios, sua inteligência, dedicação e disponibilidade foram essenciais para que eu pudesse ter êxito em minha trajetória acadêmica. Sou grata por todo o conhecimento que adquiri sob sua orientação e pelo apoio essencial que recebi para concluir o mestrado.

Aos membros da banca, Leslie Darien e Nilma Fontes, por suas valiosas orientações. Suas sugestões foram fundamentais para o aprimoramento deste trabalho.

Aos amigos que conheci durante o mestrado e pretendo levar para vida, Ludmila Santos, Rainara Souza, Fernando Rocha, Eliakim Alcântara e Breno Lucas agradeço por todos os momentos compartilhados, pelas noites em claro estudando juntos, pelas risadas que tornaram os dias mais leves e por todo o companheirismo que nos uniu. Vocês foram fundamentais para que eu conseguisse concluir essa jornada. Sou imensamente grata por toda a força e apoio que recebi de cada um de vocês.

Ao LAMEC que me acolheu durante o desenvolvimento dos meus estudos e trabalhos e aos professores David Leonardo e Ludmilson Abritta, pela assistência prestada durante nosso convívio no laboratório. Agradeço por estarem sempre dispostos a ouvir e aconselhar.

Aos meus colegas de mestrado Leonardo Fellipe, Renério Neto e João Geraldo, agradeço pelas suporte que recebi de vocês durante essa jornada. Ao amigo, Rafael Cunha, agradeço todos os conselhos e o apoio que me foi dado.

À CAPES pelo apoio financeiro que foi fundamental para a realização desta pesquisa e para a conclusão do meu mestrado.

Ao corpo docente e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, com agradecimento especial a Rejane Donato, sempre solicita.

A Lucas Alcântara agradeço imensamente pelo apoio emocional e pela força durante esta jornada. Seu apoio foi fundamental para que eu pudesse chegar até aqui.

A todos os demais que contribuíram para esta jornada, meu mais sincero agradecimento.

"A ciência é a crença na
ignorância dos especialistas."
(Richard Feynman)

RESUMO

O uso extensivo de materiais compósitos laminados em diversas aplicações da engenharia tem sido impulsionado pela elevada relação entre rigidez e massa, aliada à facilidade de fabricação. A complexidade da análise de vigas compósitas laminadas, especialmente o fenômeno de zig-zag do deslocamento longitudinal da viga, motiva a necessidade de abordagens mais avançadas. Assim, para melhor descrever o comportamento mecânico de vigas compósitas laminadas, o presente trabalho propõe três modelos que visam superar as limitações das teorias clássicas de vigas O primeiro modelo utiliza funções zig-zag, que incorporam o efeito gerado pela diferença de rigidez entre as camadas, em conjunto com teorias de deformação por cisalhamento de alta ordem, incorporando o efeito quase-3D para considerar as características tridimensionais em uma análise simplificada. Essa abordagem visa evitar o uso de fatores de correção de cisalhamento e contornar o problema da descontinuidade da distribuição da tensão cisalhante na seção transversal, por meio do uso das equações de equilíbrio. O segundo modelo acrescenta uma abordagem de continuidade para a tensão de cisalhamento, obtido diretamente pela relação constitutiva. O terceiro modelo, por sua vez, utiliza uma teoria refinada zig-zag de ordem superior, e impõe a continuidade de tensões nas interfaces das camadas. Para todos os modelos são obtidas as equações diferenciais de domínio e as condições de contorno variacionalmente consistentes, por meio da imposição da nulidade da primeira variação do funcional de energia total. As soluções para as formulações fortes foram construídas pelo método de Navier e adicionalmente, para os modelos primeiro e terceiro, pelo método de Ritz-Lobatto, com o objetivo de analisar o comportamento mecânico de vigas laminadas com diferentes condições de contorno. Por fim, os resultados dos campos de deslocamentos, tensões normal e cisalhante obtidos pelos três modelos são comparados com resultados analíticos da teoria da elasticidade. Os resultados mostraram que o primeiro modelo, quando utiliza a função zig-zag hiperbólica-exponencial, fornece resultados precisos para todos os campos de resposta, quando as tensões normal transversal e de cisalhamento são calculadas pela equação de equilíbrio. O segundo modelo apresenta continuidade da tensão de cisalhamento quando calculada pela relação constitutiva, no entanto com comportamento discrepante ao de referência. O terceiro modelo proporciona uma descrição precisa dos deslocamentos e tensões calculados pelas relações constitutivas, apresentando concordância com os dados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Vigas compósitas; Teoria zig-zag; Teorias de alta ordem; Teoria quase-3D.

ABSTRACT

The extensive use of laminated composite materials in various engineering applications has been driven by their high stiffness-to-weight ratio, combined with ease of fabrication. The complexity of analyzing laminated composite beams, especially the zig-zag phenomenon of the beam's longitudinal displacement, motivates the need for more advanced approaches. Thus, to better describe the mechanical behavior of laminated composite beams, this work proposes three models aimed at overcoming the limitations of classical beam theories. The first model uses zig-zag functions, which incorporate the effect generated by the difference in stiffness between layers, combined with high-order shear deformation theories, incorporating the quasi-3D effect to account for three-dimensional characteristics in a simplified analysis. This approach aims to avoid the use of shear correction factors and address the discontinuity problem of the shear stress distribution in the cross-section by using equilibrium equations. The second model adds a continuity approach for shear stress, obtained directly from the constitutive relation. The third model, in turn, uses a refined higher-order zig-zag theory, imposing continuity of stresses at the layer interfaces. For all models, domain differential equations and variationally consistent boundary conditions are obtained by imposing the nullity of the first variation of the total energy functional. The solutions for the strong formulations were constructed using the Navier method, and additionally, for the first and third models, using the Ritz-Lobatto method, with the goal of analyzing the mechanical behavior of laminated beams under different boundary conditions. Finally, the results of displacement, normal, and shear stress fields obtained by the three models are compared with analytical results from elasticity theory. The results showed that the first model, when using the hyperbolic-exponential zig-zag function, provides accurate results for all response fields when transverse normal and shear stresses are calculated by the equilibrium equation. The second model presents shear stress continuity when calculated by the constitutive relation; however, it exhibits a behavior that diverges from the reference. The third model offers an accurate description of displacements and stresses calculated through constitutive relations, showing agreement with data available in the literature.

Keywords: Composite beams; Zig-zag theory; High-order theories; Quasi-3D theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Camadas em um laminado com diferentes orientações das fibras. 19

Figura 2 – Comparação entre diferentes teorias de viga. 25

Figura 3 – Características geométricas da viga laminada. 33

Figura 4 – Forças externas atuando na viga laminada. 40

Figura 5 - Seção de uma viga com quantidade ímpar de lâminas. 56

Figura 6 - Seção de uma viga com quantidade par de lâminas. 56

Figura 7 - Características geométricas da viga laminada com N camadas. 70

Figura 8 – Exemplo de viga utilizada. 83

Figura 9 – Deslocamento axial $U_a(k)(L,z)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 87

Figura 10 – Deslocamento transversal $W_a(k)(x,0)$, configuração 1-1-1. À esquerda 87

Figura 11 – Tensão normal longitudinal $\sigma x_a(k)(L/2,z)$ configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 87

Figura 12 – Tensão normal transversal $\sigma z_a(k)(L/2,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 88

Figura 13 – Tensão normal transversal $\sigma z_a(k)(L/2,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 88

Figura 14 – Tensão de cisalhamento $\tau xz_a(k)(0,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 88

Figura 15 – Tensão de cisalhamento $\tau xz_a(k)(0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 89

Figura 16 – Variação do deslocamento axial, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 89

Figura 17 – Variação do deslocamento transversal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 90

Figura 18 - Variação da tensão normal longitudinal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 90

Figura 19 – Variação da tensão normal transversal por equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 90

Figura 20 – Variação da tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 91

Figura 21 – Variação da tensão de cisalhamento por equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 91

Figura 22 – Variação da tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 91

Figura 23 – Deslocamento axial $U_a(k)(L,z)$, configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 92

Figura 24 – Deslocamento transversal $Wx_a(k)(x,0)$, configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 92

Figura 25 – Tensão normal longitudinal $\sigma x_a(k)\ (L/2,z)$, configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 93

Figura 26 – Tensão normal transversal $\sigma z_a(k)\ (L/2,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 93

Figura 27 – Tensão normal transversal $\sigma z_a(k)\ (L/2,z)$ (modelo constitutivo), configuração 2-1-1 À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 93

Figura 28 – Tensão de cisalhamento $\tau xz_a(k)(0,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 94

Figura 29 – Tensão de cisalhamento $\tau xz_a(k)\ (0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 94

Figura 30 – Comparação da distribuição do deslocamento axial, configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 95

Figura 31 – Comparação da distribuição do deslocamento transversal, configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 95

Figura 32 – Comparação da distribuição de tensão normal longitudinal, configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 95

Figura 33 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 96

Figura 34 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal (modelo constitutivo), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 96

Figura 35 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 96

Figura 36 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento (modelo constitutivo), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969). 97

Figura 37 – Deslocamento axial $Ua(k)(L,z)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 100

Figura 38 – Deslocamento transversal $Wxa(k)(x,0)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 100

Figura 39 – Tensão normal longitudinal $\sigma xa(k)(L/2,z)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 101

Figura 40 – Tensão normal transversal $\sigma za(k)(L/2,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 101

Figura 41 – Tensão normal transversal $\sigma za(k)(L/2,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 101

Figura 42 – Tensão de cisalhamento $\tau xza(k)(0,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 102

Figura 43 – Tensão de cisalhamento $\tau xza(k)(0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos. 102

Figura 44 – Comparação da distribuição do deslocamento axial, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 103

Figura 45 – Comparação da distribuição do deslocamento transversal, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 103

Figura 46 – Comparação da distribuição da tensão normal longitudinal, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 104

Figura 47 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal pela equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 104

Figura 48 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 104

Figura 49 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento pela equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 105

Figura 50 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969). 105

Figura 51 – À esquerda o deslocamento axial $Ua(k)(L,z)$ e à direita deslocamento transversal $Wxa(k)(x,0)$, configuração 1-1-1. 106

Figura 52 – À esquerda a tensão normal longitudinal $\sigma xa(k)(L/2,z)$ e à direita a tensão de cisalhamento $\tau xza(k)(0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. 106

Figura 53 – Comparação da distribuição do deslocamento axial, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969). 107

Figura 54 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969). 107

Figura 55 – Comparação da distribuição da tensão normal longitudinal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969). 107

Figura 56 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969). 108

Figura 57 - Viga sanduíche de três camadas em balanço submetida a um carregamento uniformemente distribuído 108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – WAPE para deslocamento axial, $Ua(L,z)$. 84

Tabela 2 – WAPE para deslocamento transversal, $Wa(x,0)$. 84

Tabela 3 – WAPE para tensão normal longitudinal, $\sigma xa(L/2,z)$. 84

Tabela 4 – WAPE para tensão normal transversal por equação de equilíbrio, $\sigma za(L/2,z)$... 85

Tabela 5 – WAPE para tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, $\sigma za(L/2,z)$.... 85

Tabela 6 – WAPE para tensão de cisalhamento por equação de equilíbrio, $\tau xza(0,z)$. 85

Tabela 7 – WAPE para tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, $\tau xza(0,z)$. 86

Tabela 8 – WAPE para deslocamento axial, $Ua(k)(L,z)$..... 98

Tabela 9 – WAPE para deslocamento transversal, $Wxa(k)(x,0)$..... 98

Tabela 10 – WAPE para tensão normal longitudinal, $\sigma xa(k)(L/2,z)$..... 98

Tabela 11 – WAPE para tensão normal transversal (equação de equilíbrio), $\sigma za(k)(L/2,z)$. 98

Tabela 12 – WAPE para tensão normal transversal (modelo constitutivo), $\sigma za(k)(L/2,z)$. 99

Tabela 13 – WAPE para tensão de cisalhamento (equação de equilíbrio), $\tau xza(k)(0,z)$. 99

Tabela 14 – WAPE para tensão de cisalhamento (modelo constitutivo), $\tau xza(k)(0,z)$..... 99

Tabela 15 – WAPE para deslocamento e tensões para configuração 1-1-1. 105

Tabela 16 - Comparação entre os modelos Sinzz, Sin-c, Sin, MEF-IG e o modelo proposto (modelo 3). 110

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Funções de forma para a parcela de cisalhamento 26

Quadro 2 – Funções zig-zag..... 37

Quadro 3 – Funções de forma e condições de contorno essenciais da viga..... 45

Quadro 4 – Condições de contorno essenciais e naturais. 67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ESL – *Equivalent Single Layer*

LW – *Layerwise*

ZZ – Zig-zag

TEV – Teoria elementar de vigas de Euler-Bernoulli

TDPO – Teoria de deformação de primeira ordem de Timoshenko

RZT – *Refined Zig-zag Theory*

WAPE – *Weighted Absolute Percentage Error*

Red – Função de deformação de cisalhamento de Reddy (1990)

Sol – Função de deformação de cisalhamento de Soldatos (1992)

Mur – Função zig-zag de Murakami (1986)

Zhen – Função zig-zag de Zhen e*t al.* (2018)

Seno – Função zig-zag senoidal de Leite e Da Rocha (2023)

Hiper – Função zig-zag hiperbólica – exponencial de Leite (2022)

Mod – Modelo proposto

LISTA DE SÍMBOLOS

L	–	Largura da viga
h	–	Altura da viga
b	–	Espessura da viga
$u_x(x,z)$	–	Deslocamento axial
$u_z(x,z)$	–	Deslocamento transversal
$u_0(x), w_0(x)$	–	Deslocamentos no eixo centroidal da viga da seção transversal
$w_{0,x}$, $\theta_x(x)$	–	Rotação devido à flexão
$\phi_s(x)$	–	Rotação da seção normal ao plano médio devido ao cisalhamento
$f(z)$	–	Função de forma para o efeito de cisalhamento
$g(z)$	–	Distribuição do efeito de alongamento na direção vertical (aqui $g(z) = f_{,z}(z)$)
$\varphi^{(k)}(x)$	–	Parâmetro da camada
$\phi_{zz}^{(k)}$	–	Função zig-zag
$\psi(x)$	–	Função de amplitude do efeito zig-zag ao longo do comprimento da viga
ε_x	–	Deformação axial
ε_z	–	Deformação transversal
γ_{xz}	–	Deformação cisalhante
$\sigma^{(k)}(x,z)$	–	Componentes do vetor de tensão normal
$\tau^{(k)}(x,z)$	–	Componentes do vetor de tensão de cisalhamento
$\bar{\bar{C}}_{ij}$	–	Constantes de rigidez do material constituinte das camadas
δU	–	Variação da energia interna
δV	–	Variação da energia externa
U	–	Energia de deformação
V	–	Trabalho realizado por cargas externas
Π	–	Energia potencial total
Ω	–	Volume da viga
A	–	Área da seção transversal da viga
T_x, T_z	–	Forças de superfície

$w_{b,x}$ – Rotação devido à flexão

$w_{s,x}$ – Rotação da seção normal ao plano médio devido ao cisalhamento

A_k, B_k, C_k, D_k – Coeficientes dependentes da camada

E_k, F_k, H_k – Coeficientes dependentes da camada

$\chi(x)$ – Função de forma

$P_m(x)$ – Polinômio de Legendre

lob_m – Polinômio de Lobatto

$q(x)$ – Carregamento transversal

N – Número de camadas

$\xi_x(x), \eta_x(x)$ – Funções de x a serem determinadas

$\alpha(z)$ – Parâmetro que denota a coordenada local na k-ésima camada

Q_{ij} – Constantes de rigidez reduzida do material constituinte das camadas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **19**
1.1 Considerações iniciais **19**
1.2 Justificativa **21**
1.3 Objetivos **22**
1.3.1 Objetivo geral *22*
1.3.2 Objetivo específicos *22*
1.4 Divisão da dissertação **23**
2 REVISÃO DA LITERATURA **24**
2.1 Teorias para a modelagem de vigas **24**
2.2 Vigas compósitas laminadas **27**
2.2.1 Teoria ESL *27*
2.2.2 Teorias layerwise e zig-zag *28*
2.2.3 Histórico da Teoria zig-zag *28*
2.2.4 Métodos de resolução dos problemas de vigas *30*
3 METODOLOGIA **32**
4 DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO PARA VIGAS DE ALTA ORDEM SEM CONTINUIDADE DO CISALHAMENTO – MODELO 1 ..... **33**
4.1 Considerações iniciais **33**
4.2 Campo de deformações **35**
4.3 Relações constitutivas **35**
4.4 Função zig-zag **37**
4.5 Princípio dos trabalhos virtuais **37**
4.6 Solução pelo método de Navier **42**
4.7 Método variacional de Ritz-Lobatto **44**
4.8 Solução pelo método variacional de Ritz **46**
5 DESENVOLVIMENTO DA FOMULAÇÃO PARA VIGAS DE ALTA ORDEM CONSIDERANDO CONTINUIDADE DE CISALHAMENTO – MODELO 2 ..... **56**
5.1 Considerações iniciais **56**
5.2 Campo de deformações **57**

5.3 Campo de tensão 57
5.1 Associação a uma única camada e continuidade no cisalhamento 58
5.2 Princípio dos trabalhos virtuais 62
6 DESENVOLVIMENTO DA FOMULAÇÃO PARA VIGAS DE ALTA ORDEM CONSIDERANDO CONTINUIDADE DE CISALHAMENTO – MODELO 3 70
6.1 Considerações iniciais 70
6.2 Campo de deformações 71
6.3 Campo de tensões 71
6.4 Imposição da continuidade de tensões 72
6.5 Princípio dos trabalhos virtuais 75
6.6 Solução usando o método de Ritz 76
7 RESULTADOS 82
7.1 Análise comparativa 82
7.2 Exemplos 82
7.3 Análise por modelo sem continuidade do cisalhamento – Modelo 1 83
7.4 Análise com continuidade do cisalhamento – Modelo 2 97
7.5 Análise com continuidade do cisalhamento – Modelo 3 105
7.6 Análise com outros tipos de vinculações para os modelos 1 e 3. 108
8 CONCLUSÕES 111
REFERÊNCIAS 113
APÊNDICE A – COEFICIENTES ELÁSTICOS TRANSFORMADOS 118

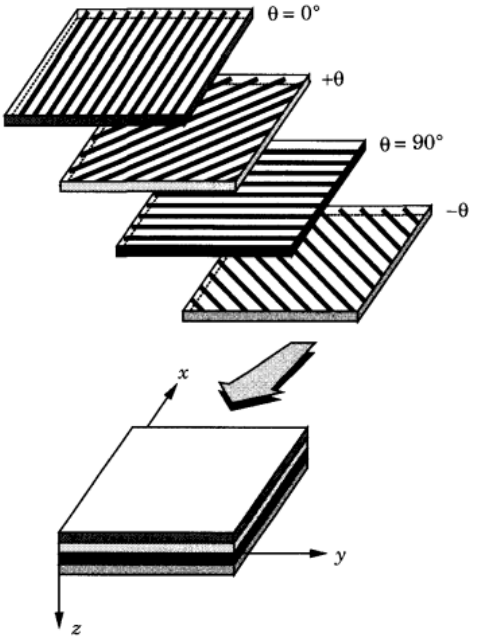
1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Os materiais compósitos vêm sendo amplamente utilizado para diversas finalidades e isso ocorre devido à alta relação entre a rigidez e o peso da estrutura, além da facilidade de fabricação, proporcionando estruturas mais leves sem comprometer o desempenho estrutural e a eficiência no processo de fabricação industrial (Chen; Huang, 2023). Esse tipo de material é aplicado em diversas modelos na engenharia, como estruturas aeroespaciais, automotivas, subaquáticas, pontes, além de estruturas inteligentes com materiais funcionalmente graduados. Dessa forma, o estudo de compósitos engloba áreas interdisciplinares, em que, engenheiros de materiais, químicos, mecânicos e estruturais contribuem para um produto global (Reddy, 2004).

Nesse trabalho, consideramos a definição do Reddy (2004), em que compósito laminado consiste em um conjunto de camadas empilhadas para atingir a rigidez e a espessura necessária. Cada camada tem suas próprias características geométricas e propriedades elásticas. As fibras que constituem as camadas podem ser orientadas na mesma direção ou em direções diferentes, de modo que a sequência de várias orientações de camadas é denominada de empilhamento, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Camadas em um laminado com diferentes orientações das fibras.



Fonte: Reddy (2004).

Com o crescente uso de materiais compósitos laminados, surgem desafios na análise e no desenvolvimento de estruturas que empregam esse de tipo de material. Na análise de vigas compósitas laminadas, devido a diferença de rigidez entre as camadas da viga, os deslocamentos no plano xz (Figura 1) apresentam o fenômeno zig-zag, exigindo uma análise mais complexa em comparação com vigas homogêneas. Esse fenômeno ocorre porque cada camada da viga possui diferentes propriedades mecânicas, levando a deformações distintas. Ademais, as interfaces entre as camadas impõem restrições, resultando em descontinuidades nos deslocamentos transversais na interface das camadas e essas descontinuidades criam uma distribuição não linear dos deslocamentos, formando um padrão de zig-zag característico (Gherlone, 2013).

Na teoria de viga de Euler-Bernoulli (também chamada de teoria elementar de vigas – TEV), o efeito de cisalhamento na seção transversal não é considerado, assim como assume-se que a seção transversal se mantém plana após as deformações, desconsiderando o empenamento dela. Já na teoria de vigas de Timoshenko (também conhecida como teoria de deformação de primeira ordem - TDPO), é acrescida uma variável para captar o cisalhamento da viga, porém a distribuição da tensão de cisalhamento é constante na seção transversal e há a necessidade de fatores de correção para a obtenção da intensidade correta. A fim de evitar o uso de fatores de correção de cisalhamento e melhor descrever a distribuição da tensão cisalhante na seção transversal, foram propostas as chamadas teorias de alta ordem, assumindo que os deslocamentos no plano xz, plano de flexão, se comportem de acordo com certas funções (polinomiais, hiperbólicas, trigonométricas e exponenciais), satisfazendo condições de tensão de cisalhamento transversal nulas nas superfícies superior e inferior da viga.

As teorias de alta ordem se mostram bastante eficientes em representar com maior precisão o comportamento das vigas compósitas quando comparadas às teorias clássicas de vigas (TEV e TDPO). Porém, na análise de vigas compósitas laminadas, os resultados podem se tornar imprecisos, já que não é considerado o fenômeno zig-zag nos deslocamentos, uma vez que tanto a TDPO de Timoshenko, quanto as teorias de alta ordem, são aplicadas a uma seção transversal da camada única equivalente (*Equivalent Single Layer* - ESL), consideram que as camadas de diferentes materiais são perfeitamente coladas entre si e sujeitas às mesmas deformações axiais. Para contornar essa deficiência, alguns pesquisadores propuseram a teoria *layerwise* (LW*)*, que considera o comportamento de cada camada separadamente, apresentando resultados com uma boa

precisão. Porém, na teoria LW, as equações de equilíbrio são consideradas independentes para cada camada, tornando o número de variáveis proporcional ao número de camadas e elevando o custo computacional da resolução numérica do problema. Nesse contexto, foram desenvolvidas a teoria zig-zag (ZZ) que incorpora o fenômeno zig-zag à teoria ESL, sem perder a precisão dos resultados (Leite; Da Rocha, 2023).

Essas teorias surgiram a partir de uma abordagem alternativa, objetivando reduzir uma solução de elasticidade tridimensional para uma análise unidimensional, em vista dos grandes custos computacionais de um problema 3D (Pathan *et al.*, 2022). Contudo, uma análise estritamente unidimensional pode não ser suficiente para capturar todos os efeitos estruturais e as interações entre as camadas. Nessa perspectiva, as teorias quase-3D foram desenvolvidas para modelar o comportamento das vigas laminadas, incorporando as características tridimensionais, mas simplificando o problema para facilitar a análise.

1.2 Justificativa

Diante das limitações das teorias clássicas de viga e devido à complexidade decorrente do fenômeno zig-zag em vigas compósitas laminadas, o presente trabalho busca analisá-las, quanto à precisão, quando é feita a combinação de teorias de alta ordem com diferentes funções zig-zag e a inclusão do efeito quase-3D para garantir uma modelagem precisa sem grandes custos computacionais. Outra limitação existente na grande maioria dos trabalhos que fazem uso da teoria zig-zag é a descontinuidade dos campos de tensão cisalhante e de tensão normal transversal nas interfaces entre lâminas, quando calculados pelos modelos constitutivos. Assim, o presente estudo é motivado pela necessidade de superar as limitações das abordagens existentes, promovendo modelos mais precisos, de modo a proporcionar a base para o desenvolvimento de estruturas compósitas mais seguras e eficientes.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Apresentar um modelo cinemático de alta ordem para a análise de flexão estática de vigas compósitas laminadas, que considere o efeito zig-zag e que proporcione continuidade nos campos de tensão cisalhante e normal transversal.

1.3.2 Objetivo específicos

1. Desenvolver um modelo para analisar a resposta de uma viga compósita laminada considerando deformações de alta ordem;
2. Aplicar funções zig-zag para considerar a distribuição discreta das camadas de diferentes materiais na direção da laminação na seção transversal da viga compósita laminada;
3. Analisar a precisão das funções zig-zag aplicadas a modelos cinemáticos com descontinuidade nos campos de tensão cisalhante e normal transversal;
4. Analisar a precisão de modelos cinemáticos existentes que consideram o efeito zig-zag com continuidade nos campos de tensão cisalhante e normal transversal na região interlaminar;
5. Desenvolver um novo modelo cinemático que considere o efeito zig-zag e com continuidade dos campos de respostas entre camadas;
6. Investigar a precisão dos modelos existentes e a proposta deste trabalho por meio de soluções analíticas, pelo procedimento de Navier, e por soluções numéricas pelo método de Ritz.
7. Propor novas funções aproximadoras para o método variacional de Ritz.
8. Realizar validação dos modelos desenvolvidos, tanto pela abordagem analítica quanto numérica, com outros resultados presentes na literatura.

1.4 Divisão da dissertação

Na revisão da literatura são abordadas as principais teorias relacionadas à modelagem de vigas, com foco nas teorias de viga zig-zag de alta ordem, além dos métodos de resolução aplicados ao estudo de vigas laminadas.

Na metodologia, detalha-se o processo adotado para a formulação dos modelos de vigas utilizados no estudo. Inicialmente, são discutidas as principais teorias de viga, com ênfase nas teorias clássicas e suas limitações, além de uma abordagem mais aprofundada sobre as teorias de alta ordem, que incorporam efeitos de cisalhamento. Em seguida, são apresentadas as teorias de camadas, com um histórico detalhado sobre a evolução da teoria zig-zag, ressaltando sua importância de uma modelagem precisa de vigas compósitas laminadas. Finalmente, é descrita a implementação dos métodos de resolução, tanto analíticos quanto numéricos, destacando o uso do método de Navier e do método variacional de Ritz-Lobatto para obtenção de soluções precisas.

No desenvolvimento da formulação do Modelo 1, apresenta-se o primeiro modelo de viga de alta ordem, que considera as deformações de cisalhamento, sem considerar continuidade de tensão entre as camadas.

No Modelo 2, a continuidade das tensões de cisalhamento entre as camadas é incorporada objetivando aprimorar a representação do comportamento estrutural.

Posteriormente, no desenvolvimento da formulação pelo Modelo 3 impõe-se a continuidade de tensões nas interfaces das camadas com uma formulação zig-zag refinada de alta ordem, para contornar a discrepância observadas nos resultados do Modelo 2.

Nos resultados, são apresentados e discutidos os dados obtidos por meio de métodos analíticos e numéricos, com uma análise comparativa entre as diferentes formulações e validação dos modelos propostos.

Nas conclusões, são destacadas as principais observações sobre a eficácia das formulações e as contribuições do estudo para a análise mecânica de vigas compósitas laminadas.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Teorias para a modelagem de vigas

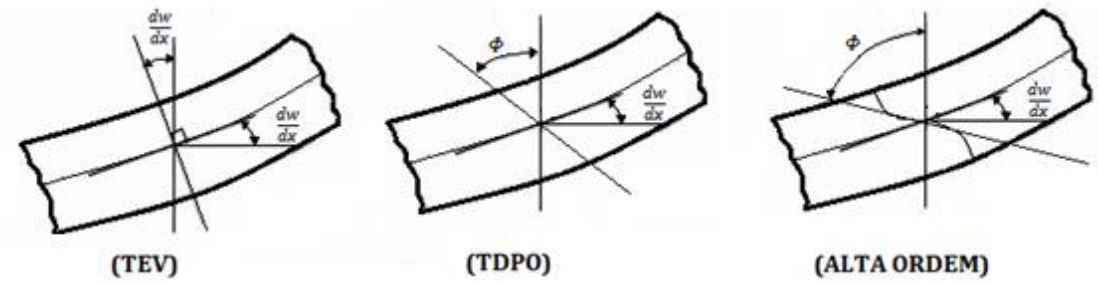
A TEV é amplamente aplicável na maioria dos problemas de engenharia civil, pois é uma abordagem simplificada e de fácil implementação. No entanto, a TEV não descreve com precisão o comportamento de vigas em situações complexas ou de alta exigência de precisão, visto que os efeitos de cisalhamento e rotação da seção transversal são desprezados. Portanto, a TEV é menos precisa para vigas espessas. Assim, surgiram outras teorias buscando descrever com mais precisão o comportamento de estruturas compósitas laminadas. Timoshenko (1921) desenvolveu uma teoria que introduziu efeitos de cisalhamento de primeira ordem (TDPO), bem como o efeito da inércia rotacional na energia cinética. Porém, na TDPO, a distribuição de deformação por cisalhamento transversal é constante através da espessura da viga e, portanto, requer um fator de correção de cisalhamento para corrigir a energia de deformação (Ghugal; Shimpi, 2002).

Diversos pesquisadores buscaram mitigar as limitações das teorias clássicas, levando ao desenvolvimento de teorias de deformação por cisalhamento de ordem superior. Assim, junto ao efeito de cisalhamento, foram fornecidas condições de tensão de cisalhamento transversal livre nas superfícies superior e inferior da viga e o efeito de empenamento da seção, em que as deformações de cisalhamento transversal variam junto com a espessura. Nessas teorias, a distribuição do deslocamento é representada pela sua expansão em série de potências na coordenada da espessura para levar em conta os efeitos da deformação de cisalhamento. Como resultado, o fator de correção de cisalhamento não é mais necessário (Sayyad; Ghugal, 2017).

A Figura 2 a seguir descreve o comportamento de uma viga com base em três diferentes hipóteses de deformação. Na primeira situação, representando a TEV, as deformações de cisalhamento transversais são desprezadas e a seção deformada permanece normal ao plano médio e, portanto, é inadequada para descrever com precisão o comportamento de estruturas compósitas laminadas. Na segunda situação, há a introdução de uma variável de rotação para capturar o efeito do cisalhamento. Assume-se que a linha reta normal ao plano médio antes da deformação permanece reta, mas não normal ao plano médio após a flexão, representando a TDPO. No entanto, ainda não é satisfeita a condição de tensão de cisalhamento transversal livre nas superfícies superior e inferior da viga. Isso ocorre devido à dependência de um fator de correção. Como

consequência, foram desenvolvidas as teorias de deformação de cisalhamento de ordem superior, representadas na última situação, levando em conta efeitos como o empenamento da seção transversal.

Figura 2 – Comparação entre diferentes teorias de viga.



Fonte: Autor (2023).

Uma forma unificada para cinemática que incorpora algumas teorias de ordem superior para vigas é escrita da seguinte forma (Leite, Da Rocha, 2023):

$$u(x,z) = u_0(x) - zw_{0,x} + f(z)\phi_s(x), \tag{2.1}$$

$$w(x,z) = w_0(x) + g(z)\varphi(x), \tag{2.2}$$

em que, $u_0(x)$ e $w_0(x)$ são os deslocamentos axial e transversal, respectivamente, no eixo centroidal da viga, $w_{0,x}$ é a rotação devido à flexão, em que "$,x$" representa a derivada com relação a x, e $\phi_s(x)$ é a rotação da seção normal ao plano médio devido ao cisalhamento; $f(z)$ é a função de forma que incorpora o efeito cisalhante; $g(z)$ descreve a distribuição do efeito de alongamento na direção vertical, sendo que essas funções devem satisfazer as condições das superfícies superior e inferior livres de tensão de cisalhamento transversal e $\varphi(x)$ é um parâmetro da camada que captura o efeito quase-3D. O Quadro 1 a seguir apresenta diferentes funções $f(z)$ de deformação de cisalhamento transversal propostas na literatura, em que h representa a altura total da viga:

Quadro 1 – Funções de forma para a parcela de cisalhamento

Referência	Função de forma, $f(z)$
Soldatos (1992)	$z\cosh\frac{1}{2} - h\,\mathrm{senh}\frac{z}{h}$
Reddy (1990)	$z\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$
Karama *et al.* (2003)	$z\exp\left[-2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$
Kruszewski (1949)	$\frac{5z}{4}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$
Akavci (2010)	$z\,\mathrm{sech}\frac{\pi z^2}{h^2} - z\,\mathrm{sech}\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{4}\right)$
Akavci (2010)	$\frac{3\pi}{2}\left[h\tanh\frac{z}{h} - z\,\mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\right]$
Mantari *et al.* (2012)	$\mathrm{sen}\frac{\pi z}{h}\exp\left[m\cos\frac{\pi z}{h}\right] + \frac{m\pi z}{h}$
Mantari *et al.* (2012)	$\tan(mz) - mz\sec^2\frac{mh}{2}$
Sayyad e Ghugal (2011)	$\frac{h}{\pi}\,\mathrm{sen}\frac{\pi z}{h}$

Fonte: Adaptado de Sayyad e Ghugal (2017).

Segundo Ghugal e Shimpi (2002), as teorias de deformação de cisalhamento de ordem superior são desenvolvidas usando cinco métodos: o método de hipóteses, o método de expansão, o método de aproximação sucessiva, o método assintótico e o método misto. Assim, diversas funções de forma para o cisalhamento transversal podem ser expressas de diferentes maneiras, dependendo da abordagem adotada na análise do problema. Como é possível observar no Quadro 1, vários pesquisadores propuseram funções de forma de alta ordem para o cisalhamento transversal, tais como funções polinomiais, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas, hiperbólicas inversas e exponenciais. Cada uma dessas funções possui características específicas que podem ser aplicadas dependendo da natureza do problema e das propriedades do material em estudo. Em alguns casos mais complexos, é utilizada a combinação de mais de uma dessas funções.

Dentre as funções expostas no Quadro 1, tem-se a de Karama *et al.* (2003) que desenvolveram uma teoria refinada conhecida como teoria da deformação de cisalhamento exponencial, onde as funções exponenciais são utilizadas em termos da

coordenada de espessura no campo de deslocamento. Sayyad e Ghugal (2011) propôs um modelo unificado, apresentando comparações de deformações parabólicas, trigonométricas, hiperbólicas e de cisalhamento exponencial com as teorias para flexão de vigas isotrópicas. Além das funções de formas propostas acima, Carrera e Giunta (2010) desenvolveram várias teorias refinadas para a análise estática linear de vigas feitas de materiais isotrópicos com base na chamada Formulação Unificada de Carrera (FUC).

2.2 Vigas compósitas laminadas

Segundo a norma ASTM D3878-95 (1995), compósitos são elementos estruturais formados por dois ou mais materiais homogêneos, insolúveis, geralmente com diferentes propriedades mecânicas, unidos para trabalhar juntos como um único elemento estrutural com propriedades que não se encontram nos materiais constituintes isoladamente. Dentre estes, destacam-se os materiais compósitos laminados que têm aplicabilidade em elementos de vigas (Vinson; Sierakowski, 2008). Vigas laminadas são frequentemente utilizadas em aplicações de engenharia civil, onde a combinação de materiais é projetada para otimizar o desempenho e a eficiência estrutural.

Os materiais compósitos laminados são constituídos por camadas de diferentes materiais, geralmente com propriedades mecânicas distintas, combinadas em uma configuração específica. Assim, para analisar as vigas laminadas, é necessário compreender as interações que ocorrem entre as camadas a fim de avaliar precisamente o comportamento destas. Três principais abordagens diferentes são usadas para estudar estruturas compósitas laminadas: as teorias ESL, ZZ e LW.

2.2.1 Teoria ESL

De acordo com Reddy (2004), a teoria ESL é uma abordagem simplificada para modelar vigas compósitas. Essa teoria considera a viga compósita como uma viga homogênea equivalente, cujas propriedades efetivas são calculadas com base nas propriedades individuais dos materiais constituintes.

A teoria ESL é obtida da redução da teoria da elasticidade linear 3D para um problema 2D. Nessa abordagem, é assumida a forma do campo de deslocamento ou campo de tensão como uma combinação linear de funções desconhecidas da coordenada da espessura. Na ESL, uma única função de interpolação é utilizada para descrever cada componente do deslocamento ao longo de toda a espessura do laminado. Essa teoria é amplamente utilizada em aplicações práticas de engenharia, pois oferece uma análise

relativamente simples e eficiente, especialmente para a análise de flexão de compósitos laminados simplesmente apoiados (Sayyad; Ghugal, 2017).

No entanto, os modelos obtidos da teoria ESL têm limitações que os impedem de serem usados para resolver todo o espectro de problemas de compósitos laminados, visto que essa teoria assume que as camadas de diferentes materiais da viga estão perfeitamente coladas entre si e sujeitas às mesmas deformações axiais. Dessa forma, muitas vezes são incapazes de descrever com precisão o estado de tensão e deformação no nível da camada perto de descontinuidades geométricas e materiais ou perto de regiões de carga intensa, áreas essas em que aferir com mais precisão as tensões é mais necessário (Reddy, 2004). Além disso, a precisão da resposta global prevista pelos modelos ESL se deteriora à medida que o laminado se torna mais espesso.

2.2.2 Teorias layerwise e zig-zag

A abordagem das teorias *layerwise* e zig-zag é uma técnica mais avançada e precisa para a análise de vigas compósitas. Essas teorias levam em consideração a distribuição discreta das camadas de diferentes materiais ao longo da seção transversal da viga, por isso tornam-se mais precisas quando comparadas à teoria ESL.

Na teoria *layerwise*, cada camada é caracterizada por suas propriedades mecânicas e são consideradas a aderência entre as camadas adjacentes e a deformação por cisalhamento entre as camadas. Ao contrário da teoria *layerwise*, a teoria zig-zag não considera a aderência entre as camadas adjacentes. Em vez disso, é feita uma aproximação dos campos de deslocamentos da viga.

A teoria *layerwise* produz resultados precisos, mas com um alto custo computacional devido às quantidades de incógnitas proporcionais ao número de camadas. Para superar essa limitação, a abordagem zig-zag foi desenvolvida, permitindo desacoplar o número de incógnitas do problema do número de camadas. Isso resulta em uma redução significativa nos custos computacionais dos cálculos necessários para realizar a análise estrutural sem perdas significativas na precisão dos resultados (Sayyad; Ghugal, 2017).

2.2.3 Histórico da Teoria zig-zag

Quando as propriedades da camada de uma estrutura variam drasticamente ao longo da espessura, os resultados da teoria ESL são frequentemente imprecisos devido ao aumento do cisalhamento transversal. Para superar a desvantagem das tensões de

cisalhamento descontínuas nas interfaces das camadas, foram propostas teorias das camadas discretas (Aitharaju; Averill, 1999).

As teorias das camada discretas são abordadas por alguns pesquisadores como Murakami *et al.* (1981), Di Sciuva (1986) e Lee e Liu (1992). Nelas, o número de incógnitas no modelo não depende do número de camadas no laminado.

Na teoria ESL, geralmente é aumentada a quantidade de termos no truncamento da série de potências na tentativa de representar a fenômeno zig-zag da distribuição de deslocamento no plano através da espessura, porém, Lee e Liu (1992) mostraram que essa representação não pode ser feita pois, mesmo aumentando a quantidade de termos no truncamento, não é possível representar adequadamente o comportamento desse fenômeno. Assim, surgiram teorias discretas em que uma função por partes é determinada pela imposição de continuidade de cisalhamento transversal nas interfaces das lâminas. Di Sciuva (1986) e Murakami *et al.* (1981) utilizaram uma função de deslocamento linear por partes que é superposta a um campo de deslocamento global linear. Em Di Sciuva (1987), Toledano e Murakami (1987) e Cho e Parmerter (1992) foi utilizado um campo de deslocamento cúbico através da espessura do laminado.

A função por partes nessas teorias assume um padrão em zig-zag para os deslocamentos no plano e reforçam a continuidade das tensões de cisalhamento em toda a espessura do laminado. Portanto, esses modelos são frequentemente chamados de teorias em zig-zag, constituindo uma subclasse especial de teorias em camadas discretas (Tessler; Di Sciuva; Gherlone, 2009). As teorias zig-zag para laminados acrescentam essas características às cinemáticas abordadas anteriormente pela ESL.

Tessler *et al.* (2007) apontaram algumas inconsistências na teoria de Averill (1994), em que, erroneamente, a tensão de cisalhamento transversal e a força resultante correspondente desaparecem ao modelar em uma condição de contorno fixa (engaste). O estudo de Tessler *et al.* (2007) apresenta uma nova teoria refinada do zig-zag (*Refined Zigzag Theory* - RZT), solucionando essas deficiências e passível de implementação de elementos finitos com base no princípio do trabalho virtual.

A RZT apresenta boa capacidade em prever o comportamento estático, dinâmico e de flambagem de estruturas compósitas e sanduíche, com baixo custo computacional (Ascione; Gherlone, 2020). Desde então, foram desenvolvidos diversos estudos utilizando a RZT. Gherlone *et al.* (2011) desenvolveram uma teoria que não depende de

restrições de equilíbrio de tensão transversal ao cisalhamento, obtida do princípio dos trabalhos virtuais e que requer aproximações cinemáticas contínuas C^0 para desenvolver modelos em elementos finitos. Iurlaro *et al.* (2013) apresentam a obtenção das equações não lineares de movimento e das condições de contorno consistentes da RZT para placas laminadas mostrando o comportamento para flambagem e flexão. Di Sciuva *et al.* (2015) estudaram a precisão e as capacidades preditivas da classe proposta de elementos de viga de ordem superior avaliadas numericamente. Vidal e Polit (2011) desenvolveram uma formulação de elementos finitos para a função zig-zag de Murakami (1986) junto a uma função senoidal. Zhen *et al.* (2018) utilizaram a cinemática de Reddy (1984) em conjunto com uma função zig-zag de alta ordem composta por funções de Muramaki. Leite e Da Rocha (2023) propôs uma nova função zig-zag de alta ordem em um formato senoidal utilizando a função zig-zag de Murakami, mostrando uma boa concordância com os resultados de Pagano (1969) e superior aos de Vidal e Polit (2011). Em Leite e Da Rocha (2023) são continuados os estudos da teoria ZZ por meio da proposta de uma nova função zig-zag de alta ordem acoplada com teorias de vigas refinadas para análise de compósitos laminados. Neste trabalho os autores mostram um aumento significativo na precisão quando é utilizada a função ZZ frente aos resultados de Vidal e Polit (2011).

Zhao *et al.* (2019) utilizaram uma função zig-zag de alta ordem hiperbólica. Ascione e Gherlone (2020) avaliaram a RZT para a análise de flambagem e resposta estática não linear em elementos finitos baseados na teoria de viga de Timoshenko. Atualmente, o estudo da teoria zig-zag de alta ordem é de suma importância na engenharia, abrangendo diversos campos, como a análise dinâmica de compósitos laminados, já que permitem uma modelagem mais precisa e abrangente, contribuindo para o desenvolvimento de soluções inovadoras e eficientes.

2.2.4 Métodos de resolução dos problemas de vigas

Métodos foram desenvolvidos para resolver modelos estruturais e determinar os deslocamentos e as tensões de vigas laminadas. Enquanto os métodos analíticos baseiam-se em teorias matemáticas e físicas para obter soluções exatas ou aproximadas para um problema, os métodos computacionais dependem da implementação de algoritmos e técnicas numéricas para aproximar as soluções de um problema. Entre os métodos analíticos, destaca-se o método de Navier, amplamente utilizado na análise de vigas. Esta técnica de solução é empregada para converter o sistema de equações diferenciais parciais em equações algébricas por meio do emprego de soluções em série (Chanda; Sahoo,

2020). Segundo Reddy (2004), no método de Navier, os deslocamentos e a carga são expandidos em uma série trigonométrica de Fourier, usada para representar funções infinitas e periódicas complexas na forma de uma soma infinita de produtos de funções trigonométricas, de senos e cossenos, que satisfazem as condições de contorno do problema. Nguyen e Nguyen (2015), Thai e Vo (2012), Sayyad e Ghugal (2015) utilizaram a técnica de Navier para obter uma solução para vigas simplesmente apoiadas. Porém, como Canales e Mantari (2017) apontam, as soluções por Navier estão restritas ao tipo de vinculação simplesmente apoiadas.

Para expandir a análise para outros tipos de vinculações, um método aproximado bastante utilizado é o método de Rayleigh-Ritz que é baseado em princípios variacionais, como os fornecidos pelos princípios dos deslocamentos virtuais ou da energia mínima potencial (Reddy, 2004). Essa técnica é eficiente para analisar o comportamento de vigas compósitas com diferentes condições de contorno, superando a limitação do método de Navier que está vinculado às análises de viga para a condição de contorno simplesmente apoiada (Moreno-García; Dos Santos; Lopes, 2018).

O método variacional de Ritz baseia-se na expansão de funções de deslocamentos desconhecidas em séries infinitas para resolver o problema. Uma solução aproximada da solução exata pode ser obtida incluindo um número suficiente de termos na série (Reddy, 2004). No entanto, para que essa aproximação seja válida, as funções de deslocamento selecionadas devem ser completas dentro do espaço de funções. Isso significa que essas funções precisam ser capazes de representar qualquer comportamento da solução exata quando uma quantidade suficiente de termos é utilizada. Assim, à medida que mais termos são incluídos, a solução aproximada se aproxima da solução exata. Além disso, essas funções devem atender às condições de contorno essenciais do problema. A escolha de funções inadequadas pode resultar em taxas de convergência lentas e instabilidades numéricas (Moreno-García; Dos Santos; Lopes, 2018). Funções trigonométricas, polinômios algébricos, polinômios ortogonais, funções de Legendre e funções de Chebyshev foram empregadas como base para selecionar funções admissíveis. Assim, como contribuição, o presente trabalho propõe uma nova função aproximadora com base nos polinômios ortogonais de Lobatto.

3 METODOLOGIA

A priori, foi realizada uma vasta revisão da literatura, com o intuito de compreender o atual estado da pesquisa na área. Este processo foi fundamental para estabelecer uma base sólida de conhecimento e contextualizar o presente estudo dentro do panorama acadêmico e científico. Em seguida, foram propostas equações para o campo de deslocamentos com base no modelo de vigas de alta ordem e considerando o efeito quase-3D na equação do deslocamento transversal. As funções zig-zag foram aplicadas ao modelo de viga de alta ordem, utilizando diversos formatos, alguns já existentes na literatura e outro proposto (ver Quadro 2 no Capítulo 4).

A partir disso, foram desenvolvidas soluções analíticas pelo procedimento de Navier, calculadas com auxílio de um software de interpretação simbólica. Na etapa de pós-processamento, foram calculados os deslocamentos, as tensões normais e transversais e a tensão cisalhante. A tensão transversal e a tensão cisalhante foram determinadas de duas maneiras: relações constitutivas e equações de equilíbrio. Devido à inconsistência no modelo constitutivo, os resultados mais próximos aos exatos foram obtidos somente pelas equações de equilíbrio, para dois dos modelos propostos, em função da falha na imposição de continuidade da tensão entre as camadas. Para tentar solucionar esse problema, utilizando o modelo constitutivo, foi realizada uma análise estática do trabalho de Han *et al.* (2018) que propõe um modelo zig-zag com continuidade das tensões cisalhantes para obtenção da frequência natural. Adicionalmente foi proposta uma adaptação à formulação de Han *et al*. (2018), incorporando a função ZZ de alta ordem.

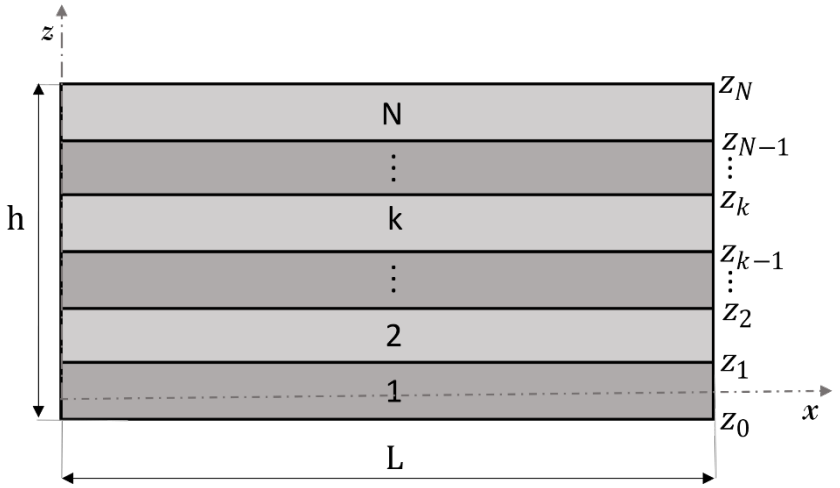
Um terceiro modelo foi desenvolvido com base no trabalho de Chen e Huang (2023). Neste modelo foi realizado uma modificação na teoria zig-zag refinada (RZT) para incorporar a continuidade dos campos de tensão cisalhante e de deslocamentos. A partir das ideias iniciais de Chen e Huang (2023), expandiu-se para incorporar laminados fibrosos ortotrópicos. A partir deste modelo modificado e usando o princípio variacional da mínima energia potencial total, foram obtidas as equações de equilíbrio e suas condições de contorno. Estas equações diferenciais são resolvidas pelo procedimento de Navier para uma viga simplesmente apoiada. E para abranger outras vinculações, foi desenvolvida a formulação variacional de Ritz, com incorporação de funções aproximadoras de Lobatto, aqui denominada de Ritz-Lobatto, para este modelo, com o intuito de obter soluções aproximadas da equação integral de mínima energia.

4 DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO PARA VIGAS DE ALTA ORDEM SEM CONTINUIDADE DO CISALHAMENTO – MODELO 1

4.1 Considerações iniciais

Considere-se uma viga de comprimento L, altura h e espessura b, composta por N camadas ortotrópicas perfeitamente coladas entre si, em que cada camada é denotada pelo subscrito (k), conforme o sistema de coordenadas mostrado na Figura 3.

Figura 3 – Características geométricas da viga laminada.



Foram propostas as componentes de deslocamento $u_x(x,z)$ e $u_z(x,z)$, utilizando a teoria zig-zag e com potencialidade na consideração do efeito quase-3D, aproximadas da seguinte forma em qualquer ponto dentro do domínio, com o sobrescrito (k) denotando cada camada:

$$u_x^{(k)}(x,z) = u_0(x) - zw_{0,x}(x) + f(z)\phi_s(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi(x)\,, \tag{4.1}$$

$$u_z(x,z) = w_0(x) + g(z)\varphi_z(x)\,, \tag{4.2}$$

em que $u_x^{(k)}$ e u_z representam, respectivamente, os deslocamentos axial e transversal, sendo o primeiro dependente da camada da viga, variando de $k = 1$ a $k = N$; $u_0(x)$ e $w_0(x)$ são os deslocamentos axial e transversal no eixo centroidal da viga, respectivamente; $f(z)$ é a função de forma para o efeito de cisalhamento; $w_{0,x}(x)$ corresponde à rotação devido à flexão e $\phi_S(x)$ é a rotação da seção normal ao plano médio devido ao cisalhamento. A função $g(z)$ corresponde à derivada da função $f(z)$,

satisfazendo as condições das superfícies superior e inferior livres de tensão de cisalhamento transversal; $\phi_{zz}^{(k)}(z)$ é a função zig-zag e $\psi(x)$ é uma função relacionada à amplitude do efeito zig-zag ao longo do comprimento da viga; $\varphi_z(x)$ é um parâmetro da camada relacionado ao efeito quase-3D. A notação utilizada para derivada é dada pela seguinte forma: $\square_{,\triangle} = \dfrac{\partial \square}{\partial \triangle}$.

Para simplificar as operações subsequentes, optou-se por expressar as equações cinemáticas na forma matricial, onde os termos entre colchetes representam matriz ou vetor linha e os termos entre chaves representam vetor coluna:

$$u_x^{(k)}(x,z) = \begin{bmatrix} 1 & f(z) & \phi_{zz}^{(k)}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \phi_s(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,x}(x) \\ \varphi_{z,x}(x) \end{Bmatrix}, \tag{4.3}$$

$$u_z(x,z) = \begin{bmatrix} 1 & g(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0(x) \\ \varphi_z(x) \end{Bmatrix}. \tag{4.4}$$

Para simplificar, os componentes das Equações (4.3) e (4.4) foram designados da seguinte maneira:

$$[T_1^{(k)}(z)] = \begin{bmatrix} 1 & f(z) & \phi_{zz}^{(k)}(z) \end{bmatrix},$$

$$[T_2(z)] = \begin{bmatrix} -z & 0 \end{bmatrix},$$

$$[T_g(z)] = \begin{bmatrix} 1 & g(z) \end{bmatrix},$$

$$\{d_1(x)\} = \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \phi_s(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix},$$

$$\{d_2(x)\} = \begin{Bmatrix} w_0(x) \\ \varphi_z(x) \end{Bmatrix},$$

$$\{d_{2,x}(x)\} = \begin{Bmatrix} w_{0,x}(x) \\ \varphi_{z,x}(x) \end{Bmatrix}.$$

Assim, as componentes do deslocamento $u_x(x,z)$ e $u_z(x,z)$ podem ser reescritas da seguinte forma:

$$u_x^{(k)}(x,z) = [T_1^{(k)}(z)]\{d_1(x)\} + [T_2(z)]\{d_{2,x}(x)\}, \tag{4.5}$$

$$u_z(x,z) = [T_g(z)]\{d_2(x)\}. \tag{4.6}$$

4.2 Campo de deformações

As expressões das Equações (4.5) a (4.6) foram derivadas para obter as expressões do campo de deformações, adotando a notação de Voigt:

$$\varepsilon_x^{(k)} = u_{x,x}^{(k)} = [T_1^{(k)}(z)]\{d_{1,x}(x)\} + [T_2(z)]\{d_{2,xx}(x)\}, \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_z = u_{z,z} = [T_{g,z}(z)]\{d_2(x)\}, \tag{4.8}$$

$$\gamma_{xz}^{(k)} = u_{x,z}^{(k)} + u_{z,x} = [T_{1,z}^{(k)}(z)]\{d_1(x)\} + [\bar{T}_2(z)]\{d_{2,x}(x)\}, \tag{4.9}$$

em que:

$$[\bar{T}_2(z)] = [0 \quad g(z)].$$

4.3 Relações constitutivas

A equação constitutiva linear no estado plano de tensões da k-ésima camada fundamentalmente anisotrópica com qualquer orientação de fibra em relação ao plano $x - z$ pode ser expressa, de acordo com Reddy (2004):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}_{11}^{(k)} & \bar{\bar{C}}_{13}^{(k)} & \bar{\bar{C}}_{15}^{(k)} \\ \bar{\bar{C}}_{13}^{(k)} & \bar{\bar{C}}_{33}^{(k)} & \bar{\bar{C}}_{35}^{(k)} \\ \bar{\bar{C}}_{15}^{(k)} & \bar{\bar{C}}_{35}^{(k)} & \bar{\bar{C}}_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix}, \tag{4.10}$$

onde $\sigma_x^{(k)}(x,z)$, $\sigma_z^{(k)}(x,z)$ e $\tau_{xz}^{(k)}(x,z)$ representam os componentes normal longitudinal, normal transversal e de cisalhamento do vetor de tensão, $\bar{\bar{C}}_{ij}^{(k)}$ são constantes de rigidez do material e $\varepsilon_x^{(k)}(x,z)$, $\varepsilon_z(x,z)$ e $\gamma_{xz}^{(k)}(x,z)$ representam os componentes normal, transversal e de cisalhamento do vetor de deformação, todos da k-ésima camada da viga. Os coeficientes da matriz de rigidez reduzida $\bar{\bar{C}}_{ij}^{(k)}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} &= \overline{C}_{11}^{(k)} - \frac{\left(\overline{C}_{12}^{(k)}\right)^2}{\overline{C}_{22}^{(k)}}, \quad \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} = \overline{C}_{13}^{(k)} - \frac{\overline{C}_{12}^{(k)}\overline{C}_{25}^{(k)}}{\overline{C}_{22}^{(k)}} \\
\overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} &= \overline{C}_{33}^{(k)} - \frac{\left(\overline{C}_{23}^{(k)}\right)^2}{\overline{C}_{22}^{(k)}}, \quad \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} = \overline{C}_{55}^{(k)} - \frac{\left(\overline{C}_{25}^{(k)}\right)^2}{\overline{C}_{22}^{(k)}} \\
\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)} &= \overline{C}_{15}^{(k)} - \frac{\overline{C}_{25}^{(k)}\overline{C}_{12}^{(k)}}{\overline{C}_{22}^{(k)}}, \quad \overline{\overline{C}}_{35}^{(k)} = \overline{C}_{35}^{(k)} - \frac{\overline{C}_{25}^{(k)}\overline{C}_{23}^{(k)}}{\overline{C}_{22}^{(k)}}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

De acordo com Nguyen *et al.* (2018), os coeficientes da matriz de rigidez reduzida, $\bar{\bar{C}}_{ij}^{(k)}$ para o caso de camadas ortotrópicas são dados por:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} &= \overline{C}_{11}^{(k)} + \frac{\left(\overline{C}_{16}^{(k)}\right)^2 \overline{C}_{22}^{(k)} - 2\overline{C}_{12}^{(k)}\overline{C}_{16}^{(k)}\overline{C}_{26}^{(k)} + \left(\overline{C}_{12}^{(k)}\right)^2 \overline{C}_{66}^{(k)}}{\left(\overline{C}_{26}^{(k)}\right)^2 - \overline{C}_{22}^{(k)}\overline{C}_{66}^{(k)}}, \\
\overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} &= \overline{C}_{13}^{(k)} + \frac{\overline{C}_{16}^{(k)}\overline{C}_{22}^{(k)}\overline{C}_{36}^{(k)} + \overline{C}_{12}^{(k)}\overline{C}_{23}^{(k)}\overline{C}_{66}^{(k)} - \overline{C}_{16}^{(k)}\overline{C}_{23}^{(k)}\overline{C}_{26}^{(k)} - \overline{C}_{12}^{(k)}\overline{C}_{26}^{(k)}\overline{C}_{36}^{(k)}}{\left(\overline{C}_{26}^{(k)}\right)^2 - \overline{C}_{22}^{(k)}\overline{C}_{66}^{(k)}}, \\
\overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} &= \overline{C}_{33}^{(k)} + \frac{\left(\overline{C}_{36}^{(k)}\right)^2 \overline{C}_{22}^{(k)} - 2\overline{C}_{23}^{(k)}\overline{C}_{26}^{(k)}\overline{C}_{36}^{(k)} + \left(\overline{C}_{23}^{(k)}\right)^2 \overline{C}_{66}^{(k)}}{\left(\overline{C}_{26}^{(k)}\right)^2 - \overline{C}_{22}^{(k)}\overline{C}_{66}^{(k)}}, \\
\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} &= \overline{C}_{55}^{(k)} - \frac{\left(\overline{C}_{45}^{(k)}\right)^2}{\overline{C}_{44}^{(k)}}, \\
\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)} &= \overline{\overline{C}}_{35}^{(k)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

em que os $\bar{C}_{ij}$ são coeficientes elásticos modificados para capturar a orientação das fibras, como detalhado no Apêndice A. Substituindo as expressões do campo de deformações (Equações 4.7 a 4.9) nas expressões do campo de tensões (Equação 4.10), tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)} = {} & \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]\{d_{1,x}(x)\} + \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_2(z)]\{d_{2,xx}(x)\} + \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_{g,z}(z)]\{d_2(x)\} + \\
& + \overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]\{d_1(x)\} + \overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]\{d_{2,x}(x)\},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k)} = {} & \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]\{d_{1,x}(x)\} + \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_2(z)]\{d_{2,xx}(x)\} + \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)}[T_{g,z}(z)]\{d_2(x)\} + \\
& + \overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]\{d_1(x)\} + \overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]\{d_{2,x}(x)\},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]\{d_{1,x}(x)\} + \overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_2(z)]\{d_{2,xx}(x)\} + \overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[T_{g,z}(z)]\{d_2(x)\} + \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]\{d_1(x)\} + \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]\{d_{2,x}(x)\}. \quad (4.15)$$

4.4 Função zig-zag

O Quadro 2 mostra as funções zig-zag presentes na literatura utilizadas nos modelos 1 e 2 desenvolvidos no presente trabalho.

Quadro 2 – Funções zig-zag

Referência	$\boldsymbol{\phi_{zz}^{(k)}(z)}$
Murakami (1986) $\left(\boldsymbol{\phi_{MUR}^{(k)}(z)}\right)$	$\frac{z-\left(z^{(k-1)}+h^{(k)}\right)}{h^{(k)}}(-1)^k$
Zhen *et al.* (2018)	$\phi_{MUR}^{(k)}(z) - \left[\frac{z^2}{2z_0} + \frac{2z^3-3z_0z^2}{12z_N^2}\right]\frac{d\phi_{MUR}^{(0)}}{dz} - \frac{2z^3-3z_0z^2}{12z_N^2}\frac{d\phi_{MUR}^{(N)}}{dz}$
Formato senoidal - Leite e da Rocha (2023)	$sen\left(\phi_{MUR}^{(k)}(z)\right) - \left[\frac{z^2}{2z_0} + \frac{2z^3-3z_0z^2}{12z_N^2}\right]\frac{d\phi_{MUR}^{(0)}}{dz} - \frac{2z^3-3z_0z^2}{12z_N^2}\frac{d\phi_{MUR}^{(N)}}{dz}$
Formato hiperbólica-exponencial – Leite e da Rocha (2022)	$senh\left(\phi_{MUR}^{(k)}(z)\right) - \left[\frac{z^2}{2z_0} + \frac{2z^3-3z_0z^2}{12z_N^2}\right]e^{\frac{4}{3}h}\frac{d\phi_{MUR}^{(0)}}{dz} - \frac{2z^3-3z_0z^2}{12z_N^2}e^{\frac{4}{3}h}\frac{d\phi_{MUR}^{(N)}}{dz}$

Fonte: Autor (2023).

4.5 Princípio dos trabalhos virtuais

Para a obtenção das equações de equilíbrio, iguala-se a zero a primeira variação do funcional de energia total, Π, que é a condição necessária de extremo para o princípio da mínima energia total, que por sua vez, é equivalente ao princípio dos trabalhos virtuais. O funcional é dado pela variação da energia de deformação interna, δU, e a variação da energia potencial devido às forças externas, δV, fornecendo a Equação (4.16):

$$\delta\Pi = \delta U + \delta V = 0. \quad (4.16)$$

A variação da energia interna U, escrita de forma matricial em função de tensões e deformações é:

$$\delta U = \int_{\Omega} \left(\delta\varepsilon_x^{(k)} \sigma_x^{(k)} + \delta\varepsilon_z \sigma_z^{(k)} + \delta\gamma_{xz}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)} \right) d\Omega \,, \tag{4.17}$$

em que o volume é dado por $\Omega = [0, L] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right] \times [0, h]$.

Substituindo as expressões do campo de deformações (Equações 4.7 a 4.9) na variação da energia interna, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L \int_A \Big(& \left\{ \delta d_{1,x}(x) \right\}^T [T_1^{(k)}(z)]^T \sigma_x^{(k)} + \left\{ \delta d_{2,xx}(x) \right\}^T [T_2(z)]^T \sigma_x^{(k)} \\ & + \left\{ \delta d_2(x) \right\}^T [T_{g,z}(z)]^T \sigma_z^{(k)} + \left\{ \delta d_1(x) \right\}^T [T_{1,z}^{(k)}(z)]^T \tau_{xz}^{(k)} \\ & + \left\{ \delta d_{2,x}(x) \right\}^T [\overline{T}_2(z)]^T \tau_{xz}^{(k)} \Big) dA dx, \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde a área é dada por $A = \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right] \times [0, h]$.

Renomeando as integrais de área, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L \Big(& \left\{ \delta d_{1,x}(x) \right\}^T \left\{ M_1 \right\} + \left\{ \delta d_{2,xx}(x) \right\}^T \left\{ V_1 \right\} + \left\{ \delta d_2(x) \right\}^T \left\{ M_2 \right\} \\ & + \left\{ \delta d_1(x) \right\}^T \left\{ M_3 \right\} + \left\{ \delta d_{2,x}(x) \right\}^T \left\{ V_2 \right\} \Big) dx, \end{aligned} \tag{4.19}$$

em que:

$$\begin{aligned} \left\{ M_1 \right\} &= \int_A [T_1^{(k)}(z)]^T \sigma_x^{(k)} dA = \int_A \left[1 \quad f(z) \quad \phi_{zz}^{(k)} \right]^T \sigma_x^{(k)} dA = \left[M_0 \quad M_f \quad M_{\phi_{zz}}^{(k)} \right]^T, \\ \left\{ M_2 \right\} &= \int_A [T_{g,z}(z)]^T \sigma_z^{(k)} dA = \int_A \left[0 \quad g_{,z} \right]^T \sigma_z^{(k)} dA = \left[0 \quad M_{\sigma z} \right], \\ \left\{ M_3 \right\} &= \int_A [T_{1,z}^{(k)}(z)]^T \tau_{xz}^{(k)} dA, \\ \left\{ V_1 \right\} &= \int_A [T_2(z)]^T \sigma_x^{(k)} dA = \int_A \left[-z \quad 0 \right]^T \sigma_x^{(k)} dA = \left[V_z \quad 0 \right]^T, \\ \left\{ V_2 \right\} &= \int_A [\overline{T}_2(z)]^T \tau_{xz}^{(k)} dA = \int_A \left[0 \quad g(z) \right]^T \tau_{xz}^{(k)} dA. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Substituindo as expressões do campo de tensão (Equações 4.13 a 4.15) na Equação 4.20 para camadas ortotrópicas, obtém-se:

$$\begin{aligned}\{M_1\} &= \int_A [T_1^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} [T_1^{(k)}(z)] dA \{d_{1,x}(x)\} \\ &+ \int_A [T_1^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} [T_2(z)] dA \{d_{2,xx}(x)\} \\ &+ \int_A [T_1^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} [T_{g,z}(z)] dA \{d_2(x)\},\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\{M_2\} &= \int_A [T_{g,z}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} [T_1^{(k)}(z)] dA \{d_{1,x}(x)\} \\ &+ \int_A [T_{g,z}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} [T_2(z)] dA \{d_{2,xx}(x)\} \\ &+ \int_A [T_{g,z}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} [T_{g,z}(z)] dA \{d_2(x)\},\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\{M_3\} &= \int_A [T_{1,z}^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} [T_{1,z}^{(k)}(z)] dA \{d_1(x)\} \\ &+ \int_A [T_{1,z}^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} [\overline{T}_2(z)] dA \{d_{2,x}(x)\},\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\{V_1\} &= \int_A [T_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} [T_1^{(k)}(z)] dA \{d_{1,x}(x)\} + \int_A [T_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} [T_2(z)] dA \{d_{2,xx}(x)\} \\ &+ \int_A [T_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} [T_{g,z}(z)] dA \{d_2(x)\},\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\{V_2\} = \int_A [\overline{T}_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} [T_{1,z}^{(k)}(z)] dA \{d_1(x)\} + \int_A [\overline{T}_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} [\overline{T}_2(z)] dA \{d_{2,x}(x)\}. \tag{4.25}$$

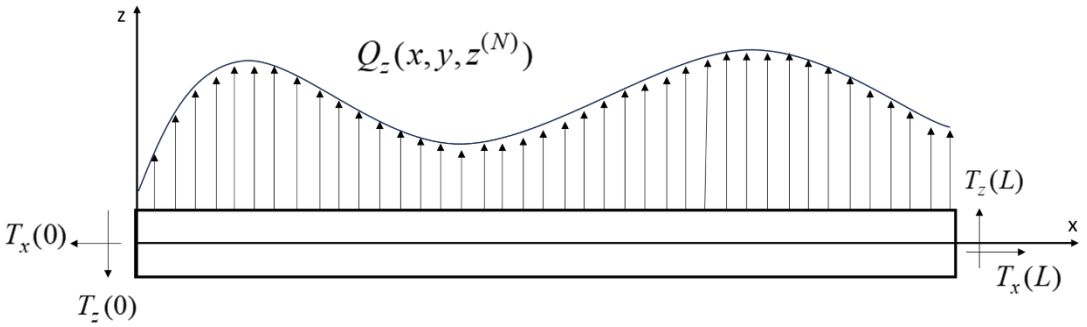
Aplicando a regra da derivada do produto na Equação (4.19) para retirar as derivadas do termo variacional, obtém-se:

$$\begin{aligned}\delta U = \int_0^L \Big(&\left(\{\delta d_1(x)\}^T \{M_1(x)\} \right)_{,x} - \{\delta d_1(x)\}^T \{M_{1,x}(x)\} \\ &+ \left(\{\delta d_{2,x}(x)\}^T \{V_1(x)\} \right)_{,x} - \left(\{\delta d_2(x)\}^T \{V_{1,x}(x)\} \right)_{,x} \\ &+ \{\delta d_2(x)\}^T \{V_{1,xx}(x)\} + \{\delta d_2(x)\}^T \{M_2(x)\} \\ &+ \{\delta d_1(x)\}^T \{M_3(x)\} + \left(\{\delta d_2\}^T \{V_2(x)\} \right)_{,x} \\ &- \{\delta d_2(x)\}^T \{V_{2,x}(x)\} \Big) dx,\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\delta U = \int_0^L \Big(& \{\delta d_1(x)\}^T \left[\{M_3\} - \{M_{1,x}\} \right] \\ & + \{\delta d_2(x)\}^T \left[\{V_{1,xx}\} + \{M_2\} - \{V_{2,x}\} \right] \Big) dx \\ & + \Big(\{\delta d_1\}^T \{M_1\} + \{\delta d_{2,x}\}^T \{V_1\} + \{\delta d_2\}^T \left[\{V_2\} - \{V_{1,x}\} \right] \Big)_0^L .\end{aligned} \tag{4.27}$$

A viga laminada da Figura 3 está submetida a um carregamento distribuído variável Q_z e com forças de superfícies externas T atuando nas extremidades, conforme Figura 4, em que o sobrescrito N denota a posição do carregamento na superfície superior da viga e $\{T_x(L)\}$, $\{T_x(0)\}$, $\{T_z(L)\}$ e $\{T_z(0)\}$ são forças de superfícies.

Figura 4 – Forças externas atuando na viga laminada.



O carregamento é dado por:

$$q_z(x) = \int_{-b/2}^{b/2} Q_z(x,y,z^{(N)}) dy . \tag{4.28}$$

Assim, a variação da energia externa V é dada por:

$$\begin{aligned}\delta V = -\Bigg(& \int_0^L \{\delta u_z\}^T q_z(x) dx + \int_A \{\delta u_x(L,z)\}^T \{T_x(L)\} dA \\ & + \int_A \{\delta u_z(L,z)\}^T \{T_z(L)\} dA - \int_A \{\delta u_x(0,z)\}^T \{T_x(0)\} dA \\ & - \int_A \{\delta u_z(0,z)\}^T \{T_z(0)\} dA \Bigg),\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\delta V = -\Bigg(& \int_0^L \left\{\delta d_2(x)\right\}^T [T_g(z)]^T q_z(x)\,dx + \int_A \Big(\left\{\delta d_1(L)\right\}^T [T_1^{(k)}(z)]^T T_x(L) \\ & + \left\{\delta d_{2,x}(L)\right\}^T [T_2(z)]^T T_x(L) \Big) dA + \int_A \left\{\delta d_2(L)\right\}^T [T_g(z)]^T T_z(L) dA \\ & - \int_A \Big(\left\{\delta d_1(0)\right\}^T [T_1^{(k)}(z)]^T T_x(0) + \left\{\delta d_{2,x}(0)\right\}^T [T_2(z)]^T T_x(0) \Big) dA \\ & - \int_A \left\{\delta d_2(0)\right\}^T [T_g(z)]^T T_z(0) dA \Bigg).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Substituindo as variações da energia interna (Equação 4.26) e externa (Equação 4.29) na Equação 4.16, tem-se:

$$\begin{aligned}\delta\Pi = -\int_0^L \Big(& \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left(\left\{M_{1,x}\right\} - \left\{M_3\right\} \right) + \left\{\delta d_2(x)\right\}^T \Big(- \left\{V_{1,xx}\right\} \\ & - \left\{M_2\right\} + \left\{V_{2,x}\right\} + [T_g(z)]^T q_z(x) \Big) \Big) dx \\ & + \Bigg(\left\{\delta d_1\right\}^T \Bigg(\left\{M_1\right\} - \int_A \Big([T_1^{(k)}(z)]^T T_x(x) \Big) dA \Bigg) \\ & + \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \Bigg(\left\{V_1\right\} - \int_A \Big(T_2(z)]^T T_x(x) \Big) dA \Bigg) \\ & + \left\{\delta d_2\right\}^T \Bigg(\left\{V_2\right\} - \left\{V_{1,x}\right\} - \int_A \Big([T_g(z)]^T T_z(x) \Big) dA \Bigg) \Bigg)\Bigg|_0^L = 0,\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi = -\int_0^L \Big(& \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left(\left\{M_{1,x}\right\} - \left\{M_3\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_2(x)\right\}^T \Big(- \left\{V_{1,xx}\right\} - \left\{M_2\right\} + \left\{V_{2,x}\right\} + [T_g(z)]^T q_z(x) \Big) \Big) dx \\ & + \Big(\left\{\delta d_1\right\}^T \left(\left\{M_1\right\} - \left\{\overline{V}_1\right\} \right) + \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\left\{V_1\right\} - \left\{\overline{V}_2\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_2\right\}^T \Big(\left\{V_2\right\} - \left\{V_{1,x}\right\} - \left\{\overline{V_g}\right\} \Big) \Big)\Big|_0^L = 0,\end{aligned} \tag{4.32}$$

em que:

$$\left\{\overline{V}_1\right\} = \int_A \Big([T_1^{(k)}(z)]^T T_x(x) \Big) dA; \quad \left\{\overline{V}_2\right\} = \int_A \Big(T_2(z)]^T T_x(x) \Big) dA; \quad \left\{\overline{V_g}\right\} = \int_A \Big([T_g(z)]^T T_z(x) \Big) dA.$$

Fazendo uso do lema fundamental do cálculo variacional para garantir a nulidade da variação da energia potencial total, são obtidas as restrições de domínio (Equação 4.32), dadas por equações de equilíbrio de domínio, e as restrições de contorno (Equação 4.33).

$$\begin{aligned} \left\{M_{1,x}\right\}-\left\{M_3\right\}&=0,\\ -\left\{V_{1,xx}\right\}-\left\{M_2\right\}+\left\{V_{2,x}\right\}+[T_g(z)]^T q_z\left(x\right)&=0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} \left\{d_1\right\}=\left\{\overline{d}_1\right\} ou \left\{M_1\right\}=\left\{\overline{V}_1\right\},\\ \left\{d_{2,x}\right\}=\left\{\overline{d}_{2,x}\right\} ou \left\{V_1\right\}=\left\{\overline{V}_2\right\},\\ \left\{d_2\right\}=\left\{\overline{d}_2\right\} ou \left\{V_2\right\}-\left\{V_{1,x}\right\}=\left\{\overline{V}_g\right\}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Substituindo as Equações (4.21) a (4.25) na Equação (4.33) obtém-se a Equação (4.35) de domínio.

$$\begin{cases} \left[H_1\right]\left\{d_{1,xx}(x)\right\}+\left[H_2\right]\left\{d_{2,xxx}(x)\right\}+\left[H_3\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\}-\left[H_4\right]\left\{d_1(x)\right\}-\left[H_5\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\}=0,\\ \left[H_9\right]\left\{d_{1,xxx}(x)\right\}+\left[H_{10}\right]\left\{d_{2,xxxx}(x)\right\}+\left[H_{13}\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\}+\left[H_6\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\}\\ +\left[H_7\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\}+\left[H_8\right]\left\{d_2(x)\right\}-\left[H_{11}\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\}-\left[H_{12}\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\}=[T_g(z)]^T q_z\left(x\right), \end{cases} \tag{4.35}$$

em que:

$$\left[H_1\right]=\int_A\left([T_1^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_1(z)]\right)dA,\ \left[H_2\right]=\int_A\left([T_1^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_2(z)]\right)dA,$$

$$\left[H_3\right]=\int_A\left([T_1^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_{g,z}(z)]\right)dA,\ \left[H_4\right]=\int_A\left([T_{1,z}^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[T_{1,z}(z)]\right)dA,$$

$$\left[H_5\right]=\int_A\left([T_{1,z}^{(k)}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]\right)dA,\ \left[H_6\right]=\int_A\left([T_{g,z}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_1(z)]\right)dA,$$

$$\left[H_7\right]=\int_A\left([T_{g,z}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_2(z)]\right)dA,\ \left[H_8\right]=\int_A\left([T_{g,z}(z)]^T \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)}[T_{g,z}(z)]\right)dA,$$

$$\left[H_9\right]=\int_A\left([T_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_1(z)]\right)dA,\ \left[H_{10}\right]=\int_A\left([T_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_2(z)]\right)dA,$$

$$\left[H_{11}\right]=\int_A\left([\overline{T}_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[T_{1,z}(z)]\right)dA,\ \left[H_{12}\right]=\int_A\left([\overline{T}_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]\right)dA,$$

$$\left[H_{13}\right]=\int_A\left([T_2(z)]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_{g,z}(z)]\right)dA.$$

4.6 Solução pelo método de Navier

Aplicando o procedimento de Navier para resolver as equações diferenciais, os campos de deslocamentos e o carregamento são representados pelas seguintes séries de Fourier:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos\alpha_n x, \quad \phi_s = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos\alpha_n x, \\
\psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\alpha_n x, \quad w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \operatorname{sen}\alpha_n x, \\
\varphi_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen}\alpha_n x, \quad q_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}\alpha_n x,
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

em que:

$$
\alpha_n = \frac{n\pi}{L}.
$$

e u_n, ϕ_n, ψ_n, w_n e φ_n são os coeficientes desconhecidos a serem determinados. Os vetores do campo de deslocamentos são dados por:

$$
,\{d_1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\overline{d}_1\right\} \cos(\alpha_n x), \{d_2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\overline{d}_2\right\} sen(\alpha_n x),
\tag{4.37}
$$

em que os vetores aproximados são dados por:

$$
\left\{\overline{d}_1\right\} = \begin{Bmatrix} u_n \\ \phi_n \\ \psi_n \end{Bmatrix}, \left\{\overline{d}_2\right\} = \begin{Bmatrix} w_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix}.
\tag{4.38}
$$

Agrupando os coeficientes da Equação (4.35) associados às mesmas incógnitas:

$$
\begin{cases}
[H_1]\{d_{1,xx}(x)\} - [H_4]\{d_1(x)\} + [H_2]\{d_{2,xxx}(x)\} + \left([H_3] - [H_5]\right)\{d_{2,x}(x)\} = 0, \\
[H_9]\{d_{1,xxx}(x)\} + \left([H_6] - [H_{11}]\right)\{d_{1,x}(x)\} + [H_{10}]\{d_{2,xxxx}(x)\} \\
+ \left([H_{13}] + [H_7] - [H_{12}]\right)\{d_{2,xx}(x)\} + [H_8]\{d_2(x)\} = [T_g(z)]^T q_z(x),
\end{cases}
\tag{4.39}
$$

Substituindo os vetores aproximados de (4.38) na Equação (4.39), tem-se:

$$
\begin{cases}
-[H_1]\alpha_n^2 \left\{\overline{d}_1\right\} \cos(\alpha_n x) - [H_4]\left\{\overline{d}_1\right\} \cos(\alpha_n x) - [H_2]\alpha_n^3 \left\{\overline{d}_2\right\} \cos(\alpha_n x) \\
+ \left([H_3] - [H_5]\right)\alpha_n \left\{\overline{d}_2\right\} \cos(\alpha_n x) = 0, \\
[H_9]\alpha_n^3 \left\{\overline{d}_1\right\} sen(\alpha_n x) - \left([H_6] - [H_{11}]\right)\alpha_n \left\{\overline{d}_1\right\} sen(\alpha_n x) \\
+ [H_{10}]\alpha_n^4 \left\{\overline{d}_2\right\} sen(\alpha_n x) - \left([H_{13}] + [H_7] - [H_{12}]\right)\alpha_n^2 \left\{\overline{d}_2\right\} sen(\alpha_n x) \\
+ H_8 \left\{\overline{d}_2\right\} sen(\alpha_n x) = [T_g(z)]^T Q_n(x) sen(\alpha_n x),
\end{cases}
\tag{4.40}
$$

$$\begin{cases} \left[\overline{H}_1\right]_{3x3}\left\{\overline{d}_1\right\}+\left[\overline{H}_2\right]_{3x2}\left\{\overline{d}_2\right\}=0, \\ \left[\overline{H}_3\right]_{2x3}\left\{\overline{d}_1\right\}+\left[\overline{H}_4\right]_{2x2}\left\{\overline{d}_2\right\}=[T_g(z)]^T Q_n(x), \end{cases} \tag{4.41}$$

onde:

$$\begin{aligned} \left[\overline{H}_1\right] &= \left[H_1\right]\alpha_n^2+\left[H_4\right], \\ \left[\overline{H}_2\right] &= \left[H_5\right]\alpha_n+\left[H_2\right]\alpha_n^3-\left[H_3\right]\alpha_n, \\ \left[\overline{H}_3\right] &= \left[H_9\right]\alpha_n^3-\left[H_6\right]\alpha_n+\left[H_{11}\right]\alpha_n, \\ \left[\overline{H}_4\right] &= \left[H_{10}\right]\alpha_n^4-\left[H_{13}\right]\alpha_n^2-\left[H_7\right]\alpha_n^2+\left[H_{12}\right]\alpha_n^2+\left[H_8\right]. \end{aligned}$$

Agrupando as matrizes do sistema de equações 4.45 em uma matriz global:

$$\begin{bmatrix} \overline{H}_1^{11} & \overline{H}_1^{12} & \overline{H}_1^{13} & \cdots & \overline{H}_2^{11} & \overline{H}_2^{12} \\ \overline{H}_1^{21} & \overline{H}_1^{22} & \overline{H}_1^{23} & \cdots & \overline{H}_2^{21} & \overline{H}_2^{22} \\ \overline{H}_1^{31} & \overline{H}_1^{32} & \overline{H}_1^{33} & \cdots & \overline{H}_2^{31} & \overline{H}_2^{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{H}_3^{11} & \overline{H}_3^{12} & \overline{H}_3^{13} & \cdots & \overline{H}_4^{11} & \overline{H}_4^{12} \\ \overline{H}_3^{21} & \overline{H}_3^{22} & \overline{H}_3^{23} & \cdots & \overline{H}_4^{21} & \overline{H}_4^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ \phi_n \\ \psi_n \\ w_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q_n(x) \\ [T_g(z)]^T Q_n(x) \end{Bmatrix}. \tag{4.42}$$

Assim é constituído o sistema matricial cuja solução permite conhecer os deslocamentos da viga, por conseguinte, as tensões associadas.

4.7 Método variacional de Ritz-Lobatto

Este estudo se concentra no desenvolvimento do método de Ritz baseado nos polinômios de Lobatto para aproximar os campos de deslocamentos da viga como:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{m=1}^{n}\chi_{u_0}(x)U_m, \quad w_0(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{w_0}(x)W_m, \quad \phi_s(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\phi_s}(x)\phi_m, \\ \psi(x) &= \sum_{m=1}^{n}\chi_{\psi}(x)\psi_m, \quad \varphi_z(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\varphi_z}(x)\varphi_m, \end{aligned} \tag{4.43}$$

onde $\chi_{u_0}(x)$, $\chi_{w_0}(x)$, $\chi_{\phi_s}(x)$, $\chi_{\psi}(x)$ e $\chi_{\varphi_z}(x)$ são funções admissíveis apresentadas no Quadro 3, desenvolvidas a partir do polinômio de Lobatto. U_m, W_m, ϕ_m, ψ_m e φ_m são parâmetros desconhecidos a serem determinados e n é o número de termos da série.

Quadro 3 – Funções de forma e condições de contorno essenciais da viga.

CC	$\chi_{u_0}(x)=\chi_{\phi_s}(x)=\chi_{\psi}(x)$	$\chi_{w_0}(x)=\chi_{\varphi_z}(x)$	$x=0$	$x=L$
A-A	$\frac{d}{dx}\left(lob_m^*\frac{x}{L}lob_m^*\left(\frac{x}{L}-1\right)\right)$	$lob_m^*\frac{x}{L}lob_m^*\left(\frac{x}{L}-1\right)$	$w_0=0$	$w_0=0$
E-L	$\frac{d}{dx}\left(\left(lob_m^*\frac{x}{L}\right)^2\right)$	$\left(lob_m^*\frac{x}{L}\right)^2$	$u_0=w_0=$ $\phi_s=\psi=$ $\varphi_z=0$	
E-A	$\frac{d}{dx}\left(\left(lob_m^*\frac{x}{L}\right)^2 lob_m^*\left(\frac{x}{L}-1\right)\right)$	$\left(lob_m^*\frac{x}{L}\right)^2 lob_m^*\left(\frac{x}{L}-1\right)$	$u_0=w_0=$ $\phi_s=\psi=$ $\varphi_z=0$	$w_0=0$
E-E	$\frac{d}{dx}\left(\left(lob_m^*\frac{x}{L}\right)^2\left(lob_m^*\left(\frac{x}{L}-1\right)\right)^2\right)$	$\left(lob_m^*\frac{x}{L}\right)^2\left(lob_m^*\left(\frac{x}{L}-1\right)\right)^2$	$u_0=w_0=$ $\phi_s=\psi=$ $\varphi_z=0$	$u_0=w_0=$ $\phi_s=\psi=$ $\varphi_z=0$

As quatro condições de contorno, aqui são chamadas de apoio-apoio (A-A), engaste-livre (E-L), engaste-apoio (E-A) e engaste-engaste (E-E).

Vê-se que as funções de Lobatto são funções ortogonais e de recursão, o que reduzirá o custo computacional, e quando $n>10$, o mau condicionamento pode ser evitado no sistema.

Substituindo a Equação 4.42 no funcional de energia potencial total e usando o princípio de Lagrange, temos:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_m}=0, \tag{4.44}$$

com P_m representando os valores de U_m, W_m, ϕ_m, ψ_m e φ_m.

A função lob_m^* é definida por:

$$lob_m^*(x)=lob_m(1-x)-\frac{1}{2}(1+m)(2+m), \tag{4.45}$$

em que $x\in[0,1], m=1,2,...,N$ e lob_m são os polinômios de Lobatto dado por:

$$lob_m(x) = \frac{1}{x^2 - 1}\left[(m+1)P_{m+1}(x) - (m+1)P_m(x)\right], \tag{4.46}$$

$P_m(x)$ são os polinômios de Legendre dados pela recorrência:

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1}xP_m(x) - \frac{m}{m+1}P_{m-1}(x), \tag{4.47}$$

em que $x \in [0,1], j = 1,2,...,N$.

4.8 Solução pelo método variacional de Ritz

A aplicação do método de Ritz requer a energia potencial total que é dada por:

$$\Pi = U + V, \tag{4.48}$$

em que Π denota a energia potencial total, U é a energia de deformação e V o trabalho realizado por cargas externas.

A energia de deformação total armazenada na viga é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\left\{\varepsilon_x^{(k)}\right\}^T \sigma_x^{(k)} + \left\{\varepsilon_z\right\}^T \sigma_z^{(k)} + \left\{\gamma_{xz}^{(k)}\right\}^T \tau_{xz}^{(k)} \right) d\Omega. \tag{4.49}$$

Substituindo as Equações 4.7 a 4.9 do campo de deformações e as Equações 4.13 a 4.15 do campo de tensões na Equação 4.49:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\int_0^L \Big(& \left\{d_{1,x}(x)\right\}^T \left[K_1\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\} + \left\{d_{1,x}(x)\right\}^T \left[K_2\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\} \\
& + \left\{d_{2,xx}(x)\right\}^T \left[K_3\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\} + \left\{d_{2,xx}(x)\right\}^T \left[K_4\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\} \\
& + \left\{d_{1,x}(x)\right\}^T \left[K_5\right]\left\{d_2(x)\right\} + \left\{d_{2,xx}(x)\right\}^T \left[K_6\right]\left\{d_2(x)\right\} \\
& + \left\{d_{1,x}(x)\right\}^T \left[K_7\right]\left\{d_1(x)\right\} + \left\{d_{1,x}(x)\right\}^T \left[K_8\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\} \\
& + \left\{d_{2,xx}(x)\right\}^T \left[K_9\right]\left\{d_1(x)\right\} + \left\{d_{2,xx}(x)\right\}^T \left[K_{10}\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\} \\
& + \left\{d_2(x)\right\}^T \left[K_{11}\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\} + \left\{d_2(x)\right\}^T \left[K_{12}\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\} \\
& + \left\{d_2(x)\right\}^T \left[K_{13}\right]\left\{d_2(x)\right\} + \left\{d_2(x)\right\}^T \left[K_{14}\right]\left\{d_1(x)\right\} \\
& + \left\{d_2(x)\right\}^T \left[K_{15}\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\} + \left\{d_1(x)\right\}^T \left[K_{16}\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\} \\
& + \left\{d_{2,x}(x)\right\}^T \left[K_{17}\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\} + \left\{d_1(x)\right\}^T \left[K_{18}\right]\left\{d_{2,xx}(x)\right\} \\
& + \left\{d_{2,x}(x)\right\}^T \left[K_{19}\right]\left\{d_{1,x}(x)\right\} + \left\{d_1(x)\right\}^T \left[K_{20}\right]\left\{d_2(x)\right\} \\
& + \left\{d_{2,x}(x)\right\}^T \left[K_{21}\right]\left\{d_2(x)\right\} + \left\{d_1(x)\right\}^T \left[K_{22}\right]\left\{d_1(x)\right\} \\
& + \left\{d_1(x)\right\}^T \left[K_{23}\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\} + \left\{d_{2,x}(x)\right\}^T \left[K_{24}\right]\left\{d_1(x)\right\} \\
& + \left\{d_{2,x}(x)\right\}^T \left[K_{25}\right]\left\{d_{2,x}(x)\right\} \Big) dx,
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

em que:

$$
\begin{aligned}
&\left[K_1\right]=\int_A[T_1^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]dA,\quad \left[K_2\right]=\int_A[T_1^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_2(z)]dA,\\
&\left[K_3\right]=\int_A[T_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]dA,\quad \left[K_4\right]=\int_A[T_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}[T_2(z)]dA,\\
&\left[K_5\right]=\int_A[T_1^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_{g,z}(z)]dA,\quad \left[K_6\right]=\int_A[T_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_{g,z}(z)]dA,\\
&\left[K_7\right]=\int_A[T_1^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]dA,\quad \left[K_8\right]=\int_A[T_1^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]dA,\\
&\left[K_9\right]=\int_A[T_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]dA,\quad \left[K_{10}\right]=\int_A[T_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]dA,\\
&\left[K_{11}\right]=\int_A[T_{g,z}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]dA,\quad \left[K_{12}\right]=\int_A[T_{g,z}(z)]\overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}[T_2(z)]dA,\\
&\left[K_{13}\right]=\int_A[T_{g,z}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{33}^{(k)}[T_{g,z}(z)]dA,\quad \left[K_{14}\right]=\int_A[T_{g,z}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]dA,\\
&\left[K_{15}\right]=\int_A[T_{g,z}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]dA,\quad \left[K_{16}\right]=\int_A[T_{1,z}^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]dA,\\
&\left[K_{17}\right]=\int_A[\overline{T}_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_2(z)]dA,\quad \left[K_{18}\right]=\int_A[T_{1,z}^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_2(z)]dA,\\
&\left[K_{19}\right]=\int_A[\overline{T}_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{15}^{(k)}[T_1^{(k)}(z)]dA,\quad \left[K_{20}\right]=\int_A[T_{1,z}^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[T_{g,z}(z)]dA,\\
&\left[K_{21}\right]=\int_A[\overline{T}_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{35}^{(k)}[T_{g,z}(z)]dA,\quad \left[K_{22}\right]=\int_A[T_{1,z}^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]dA,\\
&\left[K_{23}\right]=\int_A[T_{1,z}^{(k)}(z)]^T\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]dA,\quad \left[K_{24}\right]=\int_A[\overline{T}_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[T_{1,z}^{(k)}(z)]dA,\\
&\left[K_{25}\right]=\int_A[\overline{T}_2(z)]^T\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}[\overline{T}_2(z)]dA.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

O trabalho realizado é por cargas externas:

$$
V=-\int_0^L\{d_2\}^T\left[T_g(z)\right]^T q_z(x)dx. \tag{4.52}
$$

Aplicando o procedimento de Ritz, os campos de deslocamento são aproximados por:

$$
\begin{aligned}
&u_0(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{u_0}(x)U_m,\quad w_0(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{w_0}(x)W_m,\quad \phi_s(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\phi_s}(x)\phi_m,\\
&\psi(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\psi}(x)\psi_m,\quad \varphi_z(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\varphi_z}(x)\varphi_m,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

onde $\chi_{u_0}(x)$, $\chi_{w_0}(x)$, $\chi_{\phi_s}(x)$, $\chi_{\psi}(x)$ e $\chi_{\varphi_z}(x)$ são funções admissíveis que foram apresentadas no Quadro 3. U_m, W_m, ϕ_m, ψ_m e φ_m são parâmetros desconhecidos a serem determinados e n é o número de termos da série. Os vetores do campo de deslocamentos são aproximados da seguinte forma:

$$\{d_1\} = \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \phi_s(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{n} \begin{Bmatrix} \chi_{u_0}(x) U_m \\ \chi_{\phi_s}(x) \phi_m \\ \chi_{\psi}(x) \psi_m \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{n} \left[\overline{\chi}_1\right]_m \left\{\overline{d}_1\right\}_m, \tag{4.54}$$

$$\{d_2\} = \begin{Bmatrix} w_0(x) \\ \varphi_z(x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{n} \begin{Bmatrix} \chi_{w_0}(x) W_m \\ \chi_{\varphi_z}(x) \varphi_m \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{n} \left[\overline{\chi}_2\right]_m \left\{\overline{d}_2\right\}_m, \tag{4.55}$$

em que:

$$\begin{gathered} \left[\overline{\chi}_1\right]_m = \begin{bmatrix} \chi_{u_0}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\phi_s}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\psi}(x) \end{bmatrix}, \quad \left[\overline{\chi}_2\right]_m = \begin{bmatrix} \chi_{w_0}(x) & 0 \\ 0 & \chi_{\varphi_z}(x) \end{bmatrix}, \\ \left\{\overline{d}_1\right\}_m = \begin{Bmatrix} U_m \\ \phi_m \\ \psi_m \end{Bmatrix}, \quad \left\{\overline{d}_2\right\}_m = \begin{Bmatrix} W_m \\ \varphi_m \end{Bmatrix}. \end{gathered} \tag{4.56}$$

Substituindo os vetores do campo de deslocamento aproximados (Equações 4.54 e 4.55) na Equações 4.50 e 4.52, tem-se que a energia de deformação e o trabalho realizado por cargas externas:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\int_0^L \Bigg(& \sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m^T[K_1]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m^T[K_2]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m^T \\
& [K_3]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m^T[K_4]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m^T[K_5]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_2\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m^T[K_6] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_2\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m^T[K_7]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_1\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m^T[K_8]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m^T[K_9] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_1\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m^T[K_{10}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_2\right]_m^T[K_{11}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_2\right]_m^T[K_{12}] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_2\right]_m^T[K_{13}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_2\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_2\right]_m^T[K_{14}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_1\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_2\right]_m^T[K_{15}] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_1\right]_m^T[K_{16}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m^T[K_{17}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_1\right]_m^T[K_{18}] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,xx}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m^T[K_{19}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_1\right]_m^T[K_{20}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_2\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m^T[K_{21}] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_2\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_1\right]_m^T[K_{22}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_1\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_1\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_1\right]_m^T[K_{23}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m^T[K_{24}] \\
& \sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_1\right]_m\left\{\bar{d}_1\right\}_m+\sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m^T[K_{25}]\sum_{m=1}^{n}\left[\bar{\chi}_{2,x}\right]_m\left\{\bar{d}_2\right\}_m\Bigg)dx,
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

$$
V = -\int_0^L \sum_{m=1}^{n}\left\{\bar{d}_2\right\}_m^T\left[\bar{\chi}_2\right]_m^T\left[T_g(z)\right]^T q_z(x)dx. \tag{4.58}
$$

As equações governantes podem ser obtidas utilizando a Equação 4.44 que usa o princípio de Lagrange, assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \prod}{\partial d_{r1}^{i}} &= \frac{\partial U}{\partial d_{r1}^{i}} + \frac{\partial V}{\partial d_{r1}^{i}} = 0,\\ \frac{\partial \prod}{\partial d_{r2}^{j}} &= \frac{\partial U}{\partial d_{r2}^{j}} + \frac{\partial V}{\partial d_{r2}^{j}} = 0,\end{aligned} \tag{4.59}$$

em que os sobrescritos $i = 1,2,3$ e $j = 1,2$ indicam as componentes dos seguintes vetores:

$$\{d_{r1}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ \phi_r \\ \psi_r \end{Bmatrix}, \ \{d_{r2}\} = \begin{Bmatrix} w_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix}, \tag{4.60}$$

e as derivadas são:

$$\frac{\partial \left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial u_r} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U_m}{\partial u_r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{mr} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \left\{\mathrm{I}_1\right\},$$

$$\frac{\partial \left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial \phi_r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial \phi_m}{\partial \phi_r} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_{mr} \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \left\{\mathrm{I}_2\right\},$$

$$\frac{\partial \left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial \psi_r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \psi_m}{\partial \psi_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{mr} \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \left\{\mathrm{I}_3\right\},$$

$$\frac{\partial \left\{\overline{d}_2\right\}_m}{\partial w_r} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial W_m}{\partial w_r} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{mr} \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{mr} \left\{\bar{\mathrm{I}}_1\right\},$$

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_2\right\}_m}{\partial\varphi_r}=\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\varphi_r}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \delta_{mr}\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\left\{\bar{\mathrm{I}}_2\right\}, \tag{4.61}$$

em que δ_{mr} corresponde ao delta de Kronecker.

Assim:

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial d_{r1}^i}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_i\right\},\ \frac{\partial\left\{\overline{d}_2\right\}_m}{\partial d_{r2}^j}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_j\right\}. \tag{4.62}$$

Substituindo a Equação 4.57 no primeiro termo da Equação 4.59 e considerando as seguintes simplificações:

$$\left(\sum_{m=1}^{n}\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_i\right\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\right)=\left\{\mathrm{I}_i\right\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T, \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[K_1\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\\
&=\left(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[K_1\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\right)^T\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&=\left(\left[K_1\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\right)^T\left(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\right)^T\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&=\left(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\right)^T\left[K_1\right]^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&=\left\{\mathrm{I}_i\right\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[K_1\right]^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
&\left[K_1\right]=\left[K_1\right]^T,\ \left[K_2\right]=\left[K_3\right]^T,\ \left[K_4\right]=\left[K_4\right]^T,\ \left[K_5\right]=\left[K_{11}\right]^T,\\
&\left[K_6\right]=\left[K_{12}\right]^T,\ \left[K_7\right]=\left[K_{16}\right]^T,\ \left[K_8\right]=\left[K_{19}\right]^T,\ \left[K_9\right]=\left[K_{18}\right]^T,\\
&\left[K_{10}\right]=\left[K_{17}\right]^T,\ \left[K_{13}\right]=\left[K_{13}\right]^T,\ \left[K_{14}\right]=\left[K_{20}\right]^T,\ \left[K_{15}\right]=\left[K_{21}\right]^T,\\
&\left[K_{22}\right]=\left[K_{22}\right]^T,\ \left[K_{23}\right]=\left[K_{24}\right]^T,\ \left[K_{25}\right]=\left[K_{25}\right]^T,
\end{aligned} \tag{4.65}$$

resultando em:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial d_{r1}^{i}} = \int_0^L \Bigg(\sum_{m=1}^{n} \Bigg(& \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T [K_1] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T [K_7] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T [K_{16}] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T [K_{22}] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \Bigg) \left\{\overline{d}_1\right\}_m \\ & + \sum_{m=1}^{n} \Bigg(\{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T [K_2] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T [K_5] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T [K_8] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T [K_{18}] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T [K_{20}] \left[\overline{\chi}_2\right]_m + \{\mathrm{I}_i\}^T \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T [K_{23}] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m \Bigg) \left\{\overline{d}_2\right\}_m \Bigg) dx, \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial d_{r2}^{j}} = \int_0^L \Bigg(\sum_{m=1}^{n} \Bigg(& \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T [K_3] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T [K_{11}] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T [K_{19}] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T [K_9] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T [K_{14}] \left[\overline{\chi}_1\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T [K_{24}] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \Bigg) \left\{\overline{d}_1\right\}_m \\ & \sum_{m=1}^{n} \Bigg(\{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T [K_4] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T [K_6] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T [K_{12}] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T [K_{10}] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T [K_{17}] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T [K_{13}] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T [K_{15}] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T [K_{21}] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\ & + \{\mathrm{I}_j\}^T \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T [K_{25}] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m \Bigg) \left\{\overline{d}_2\right\}_m \Bigg) dx. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Colocando em evidência o vetor constante, retirando-o da integral e separando os termos depende da variável de integração:

$$\frac{\partial U}{\partial d_{r1}^{i}} = \{\mathrm{I}_i\}^T \left(\sum_{m=1}^{n} \left(\left[K_{11}\right]_r^m \left\{\overline{d}_1\right\}_m \left[K_{12}\right]_r^m \left\{\overline{d}_2\right\}_m \right) \right), \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial U}{\partial d_{r2}^{j}} = \{\mathrm{I}_j\}^T \left(\sum_{m=1}^{n} \left(\left[K_{21}\right]_r^m \left\{\overline{d}_1\right\}_m + \left[K_{22}\right]_r^m \left\{\overline{d}_2\right\}_m \right) \right), \tag{4.69}$$

em que:

$$
\begin{aligned}
\left[K_{11}\right]_r^m &= \int_0^L \Big(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T \left[K_1\right] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T \left[K_7\right] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[K_{16}\right] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[K_{22}\right] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \Big) dx, \\
\left[K_{12}\right]_r^m &= \int_0^L \Big(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T \left[K_2\right] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T \left[K_5\right] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T \left[K_8\right] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m + \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[K_{18}\right] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[K_{20}\right] \left[\overline{\chi}_2\right]_m + \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[K_{23}\right] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m \Big) dx, \\
\left[K_{21}\right]_r^m &= \int_0^L \Big(\left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T \left[K_3\right] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[K_{11}\right] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T \left[K_{19}\right] \left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m + \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T \left[K_9\right] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[K_{14}\right] \left[\overline{\chi}_1\right]_m + \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T \left[K_{24}\right] \left[\overline{\chi}_1\right]_m \Big) dx, \\
\left[K_{22}\right]_r^m &= \Big(\left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T \left[K_4\right] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T \left[K_6\right] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[K_{12}\right] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_r^T \left[K_{10}\right] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T \left[K_{17}\right] \left[\overline{\chi}_{2,xx}\right]_m + \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[K_{13}\right] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[K_{15}\right] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m + \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T \left[K_{21}\right] \left[\overline{\chi}_2\right]_m \\
&\quad + \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_r^T \left[K_{25}\right] \left[\overline{\chi}_{2,x}\right]_m \Big) dx.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

Substituindo a Equação 4.58 no segundo termo da Equação 4.59 e considerando as seguintes simplificações:

$$
\frac{\partial V}{\partial d_{r1}^i} = 0, \tag{4.71}
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial d_{r2}^j} = -\int_0^L \left\{ \mathrm{I}_j \right\}^T \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[T_g\left(z\right)\right]^T q_z\left(x\right) dx, \tag{4.72}
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial d_{r2}^j} = -\left\{ \mathrm{I}_j \right\}^T \left\{ Q \right\}_r, \tag{4.73}
$$

em que:

$$
\left\{ Q \right\}_r = \int_0^L \left[\overline{\chi}_2\right]_r^T \left[T_g\left(z\right)\right]^T q_z\left(x\right) dx. \tag{4.74}
$$

Substituindo as Equações 4.68 e 4.69 e as Equações 4.71 e 4.73 na Equação 4.59:

$$\begin{cases} \{\mathrm{I}_i\}^T \left(\sum_{m=1}^{n} \left(\left[K_{11} \right]_r^m \left\{ \overline{d}_1 \right\}_m \left[K_{12} \right]_r^m \left\{ \overline{d}_2 \right\}_m \right) \right) = 0 \\ \{\mathrm{I}_j\}^T \left(\sum_{m=1}^{n} \left(\left[K_{21} \right]_r^m \left\{ \overline{d}_1 \right\}_m + \left[K_{22} \right]_r^m \left\{ \overline{d}_2 \right\}_m \right) \right) - \{\mathrm{I}_j\}^T \{Q\}_r = 0 \end{cases} \tag{4.75}$$

Assim o sistema de equações que resultará na solução do problema é composto por:

$$\sum_{m=1}^{n} \begin{bmatrix} \left[K_{11} \right]_r^m & \left[K_{12} \right]_r^m \\ \left[K_{21} \right]_r^m & \left[K_{22} \right]_r^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ \overline{d}_1 \right\}_m \\ \left\{ \overline{d}_2 \right\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{Q\}_r \end{Bmatrix} \tag{4.76}$$

5 DESENVOLVIMENTO DA FOMULAÇÃO PARA VIGAS DE ALTA ORDEM CONSIDERANDO CONTINUIDADE DE CISALHAMENTO – MODELO 2

5.1 Considerações iniciais

Considerando uma viga de comprimento L, altura h e espessura b, sujeita a carregamento transversal $q(x)$ por unidade de comprimento. A viga é composta por N_c camadas ortotrópicas perfeitamente unidas entre si, em que cada camada é denotada pelo subscrito (k). O desenvolvimento desse modelo foi feito com base no trabalho publicado por Han *et al.* (2018) e o sistema de coordenadas adotado é detalhado nas Figuras 5 e 6 abaixo:

Figura 5 - Seção de uma viga com quantidade ímpar de lâminas.

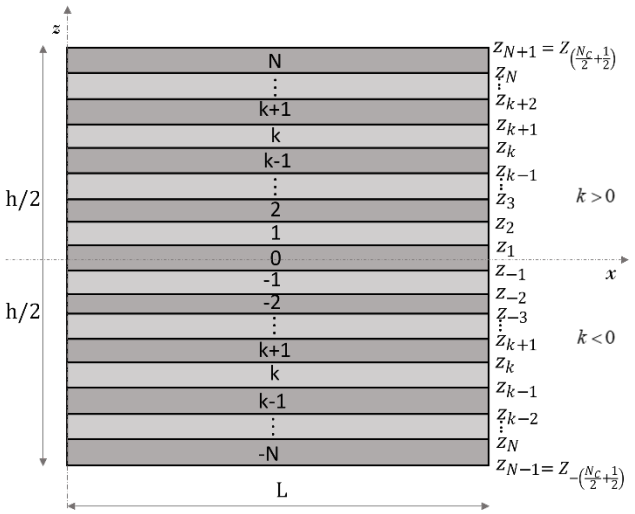
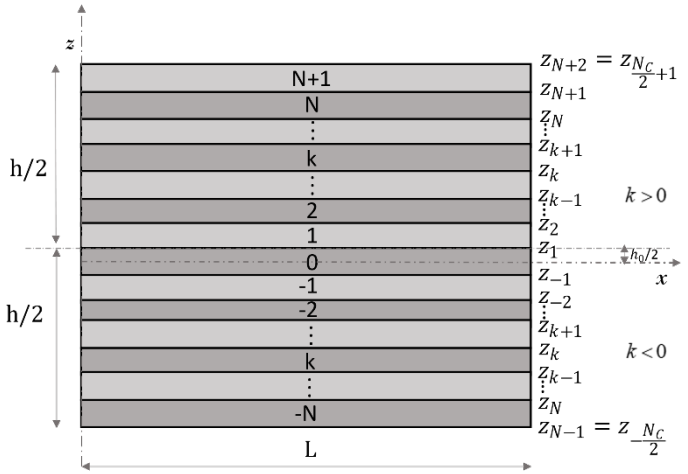


Figura 6 - Seção de uma viga com quantidade par de lâminas.



Neste modelo é inicialmente considerado que todos os parâmetros cinemáticos são independentes para cada camada. Assim, o modelo cinemático é proposto da seguinte forma com base em Han *et al.* (2018), com o sobrescrito (k) denotando cada camada:

$$u_x^{(k)}\left(x,z\right)=u_0^{(k)}(x)-zw_{b,x}^{(k)}(x)-w_{s,x}^{(k)}(x)\left(z+f^{(k)}(z)\right)+\phi_{zz}^{(k)}(z)\psi^{(k)}(x), \quad (5.1)$$

$$u_z^{(k)}\left(x,z\right)=w_b^{(k)}(x)+w_s^{(k)}(x)+g^{(k)}(z)\varphi_z^{(k)}(x), \quad (5.2)$$

em que o deslocamento axial $u_x^{(k)}$ depende da camada viga, $u_0^{(k)}(x)$ é o deslocamento axial do meio da viga, respectivamente. A soma de $w_b^{(k)}(x)$ e $w_s^{(k)}(x)$ resulta em $w_0^{(k)}(x)$, que corresponde ao deslocamento transversal no meio da camada k; $f^{(k)}(z)$ é a função de forma; $w_{b,x}^{(k)}(x)$ é a rotação devido à flexão, que corresponde à derivada da linha elástica, e $w_{s,x}^{(k)}(x)$ é uma rotação da seção normal ao plano médio devido ao cisalhamento. A função $g^{(k)}(z)$ corresponde a derivada da função $f^{(k)}(z)$, satisfazendo as condições das superfícies superior e inferior livres de tensão de cisalhamento transversal; $\phi_{zz}^{(k)}(z)$ é a função zig-zag e $\psi^{(k)}(x)$ é uma função desconhecida relacionada a amplitude do efeito zig-zag ao longo do comprimento da viga. Por fim, $\varphi_z^{(k)}(x)$ é um parâmetro da camada.

5.2 Campo de deformações

As expressões das Equações 5.1 e 5.2 foram derivadas para obter as expressões do campo de deslocamento, na direção axial ($\varepsilon_x^{(k)}$), na direção transversal ($\varepsilon_z^{(k)}$) e devido ao cisalhamento ($\gamma_{xz}^{(k)}$):

$$\varepsilon_x^{(k)}=u_{x,x}^{(k)}=u_{0,x}^{(k)}(x)-zw_{b,xx}^{(k)}-w_{0,xx}^{(k)}\left(z+f^{(k)}(z)\right)+\phi_{zz}^{(k)}(z)\psi^{(k)}(x), \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_z^{(k)}=u_{z,z}^{(k)}=g_{,z}^{(k)}(z)\varphi_z^{(k)}(x), \quad (5.4)$$

$$\gamma_{xz}^{(k)}=u_{x,z}^{(k)}+u_{z,x}^{(k)}=g^{(k)}(z)\left(-w_{s,x}^{(k)}(x)+\varphi_{z,x}^{(k)}(x)\right)+\phi_{zz,z}^{(k)}(z)\psi^{(k)}(x). \quad (5.5)$$

5.3 Campo de tensão

A equação constitutiva linear no estado plano de tensões da k-ésima camada/lâmina ortotrópica com qualquer orientação de fibra em relação ao plano x–z pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} & \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} & 0 \\ \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} & \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \varepsilon_z^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix}, \tag{5.6}$$

onde, $\sigma^{(k)}(x,z)$ e $\tau^{(k)}(x,z)$ representam os componentes do vetor de tensão normal e tensão de cisalhamento da viga, $\overline{\overline{C}}_{ij}^{(k)}$ são constantes de rigidez do material e $\varepsilon^{(k)}(x,z)$ e $\gamma^{(k)}(x,z)$ representam os componentes de deformação do material. Assim, temos:

$$\sigma_x^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} + \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \varepsilon_z^{(k)} \tag{5.7}$$

$$\sigma_z^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} + \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} \varepsilon_z^{(k)} \tag{5.8}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)} \tag{5.9}$$

Substituindo o campo de deformação (Equações 5.3 a 5.5) nas Equações 5.7 a 5.9 referentes ao campo de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} = {} & \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} \left(u_{0,x}^{(k)}(x) - z w_{b,xx}^{(k)}(x) - w_{0,xx}^{(k)}(x)\left(z + f^{(k)}(z)\right) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi^{(k)}(x) \right) \\ & + \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} g_{,z}^{(k)}(z)\varphi_z^{(k)}(x), \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k)} = {} & \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \left(u_{0,x}^{(k)}(x) - z w_{b,xx}^{(k)}(x) - w_{0,xx}^{(k)}(x)\left(z + f^{(k)}(z)\right) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi^{(k)}(x) \right) \\ & + \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} g_{,z}^{(k)}(z)\varphi_z^{(k)}(x), \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \left(g^{(k)}(z)\left(-w_{s,x}^{(k)}(x) + \varphi_{z,z}^{(k)}(x)\right) + \phi_{zz,z}^{(k)}(z)\psi^{(k)}(x) \right). \tag{5.12}$$

5.1 Associação a uma única camada e continuidade no cisalhamento

Para simplificar os cálculos, algumas imposições foram aplicadas, de modo que todas as camadas da viga se expressem em termos da camada zero. Para isso, os termos das equações do campo de deslocamento são expressos da seguinte forma:

$$w_s^{(k)} = A_k w_s^{(0)} + B_k \varphi_z^{(0)}, \quad \varphi_z^{(k)} = C_k \varphi_z^{(0)}, \quad \psi^{(k)} = D_k \psi^{(0)}, \tag{5.13}$$

em que A_k, B_k, C_k e D_k são coeficientes dependentes da camada. Observando as Equações 5.13, é possível constatar que:

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0, \quad C_0 = 1, \quad D_0 = 1. \tag{5.14}$$

Impondo a continuidade entre as camadas no campo deslocamentos e tensão de cisalhamento, temos:

$$u_x^{(k)}(x, z_k) = u_x^{(k\mp1)}(x, z_k), \tag{5.15}$$

$$u_z^{(k)}(x, z_k) = u_z^{(k\mp1)}(x, z_k), \tag{5.16}$$

$$\tau_{xz}^{(k)}(z_k) = \tau_{xz}^{(k\mp1)}(z_k), \tag{5.17}$$

com $\tau_{xz}^{(k-1)}(z_k)$ para camadas positivas ($k > 0$) e $\tau_{xz}^{(k+1)}(z_k)$ para camadas negativas ($k < 0$). Assim, substituindo as Equações 5.12 e 5.13 na Equação 5.17, temos:

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \left(g^{(k)} \left(-A_k w_{s,x}^{(0)} - B_k \varphi_{z,x}^{(0)} + C_k \varphi_{z,x}^{(0)} \right) + \phi_{zz,z}^{(k)} D_k \psi^{(0)} \right. \\ &= \left. \overline{\overline{C}}_{55}^{(k\mp1)} \left(g^{k\mp1} \left(-A_{k\mp1} w_{s,x}^{(0)} - B_{k\mp1} \varphi_{z,x}^{(0)} + C_{k\mp1} \varphi_{z,x}^{(0)} \right) + \phi_{zz,z}^{(k\mp1)} D_{k\mp1} \psi^{(0)} \right) \right). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Isolando os coeficientes A_k, B_k e D_k na Equação 5.18, resulta em:

$$A_k = \frac{\overline{\overline{C}}_{55}^{(k\mp1)} g^{(k\mp1)}(z)}{\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} g^{(k)}(z)} A_{k\mp1}, \tag{5.19}$$

$$B_k = \frac{\overline{\overline{C}}_{55}^{(k\mp1)} g^{(k\mp1)}(z)}{\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} g^{(k)}(z)} \left(B_{(k\mp1)} - C_{(k\mp1)} \right) + C_k, \tag{5.20}$$

$$D_k = \frac{\overline{\overline{C}}_{55}^{(k\mp1)} \phi_{zz,z}^{(k\mp1)}(z)}{\overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \phi_{zz,z}^{(k)}(z)} D_{k\mp1}. \tag{5.21}$$

Substituindo as Equações 5.2 e 5.13 na Equação 5.16:

$$\begin{aligned} w_b^{(k)} &= w_b^{(k\mp1)} - w_s^{(0)} \left(A_k + A_{k\mp1} \right) + \varphi_z^{(0)} \left(B_k + B_{k\mp1} \right) \\ &+ \varphi_z^{(0)}(x) \left(g_z^{(k\mp1)}(z_k) C_{(k\mp1)} - g_z^{(k)}(z_k) C_k \right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

O termo que acompanha o $\varphi_z^{(0)}(x)$ na Equação 5.22 é zero, assim C_k é igual a:

$$C_k = \frac{g^{(k\mp1)}(z_k)}{g^{(k)}(z_k)} C_{(k\mp1)}. \tag{5.23}$$

A função $f^{(k)}(z)$ é a mesma para todas as camadas e consequentemente sua derivada $g^{(k)}(z)$ também. Assim as expressões 5.19, 5.20 e 5.23 podem ser rescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\overset{=(k\mp1)}{C_{55}}}{\overset{=(k)}{C_{55}}} A_{k\mp1} \\ B_k &= \frac{\overset{=(k\mp1)}{C_{55}}}{\overset{=(k)}{C_{55}}} \left(B_{k\mp1} - 1\right) + 1 \\ C_k &= C_{k\mp1} = 1 \\ D_k &= \frac{\overset{=(k\mp1)}{C_{55}}\, \phi_{zz,z}^{(k\mp1)}(z)}{\overset{=(k)}{C_{55}}\, \phi_{zz,z}^{(k)}(z)} D_{k\mp1} \end{aligned} \tag{5.24}$$

A Equação 5.22 resulta em:

$$w_b^{(k)} = w_b^{(k\mp1)} - w_s^{(0)} \left(A_k + A_{k\mp1}\right) + \varphi_z^{(0)} \left(B_k + B_{k\mp1}\right). \tag{5.25}$$

Substituindo as Equações 5.1 e 5.13 na Equação 5.15:

$$\begin{aligned} u_0^{(k)}(x) = u_0^{k\mp1}(x) &+ w_{s,x}^{(0)} \left(z_k \left(A_{(k\mp1)} - A_k\right) + A_k \left(z_k + f^{(k)}(z_k)\right) - A_{(k\mp1)} \left(z_k + f^{(k\mp1)}(z_k)\right)\right) \\ &+ \varphi_{z,x}^{(0)} \left(z_k \left(B_{k\mp1} - D_k\right) + z_k \left(B_k - D_{k\mp1}\right) + B_k f^{(k)}(z_k) - B_{k\mp1} f^{(k\mp1)}(z_k)\right) \\ &+ \psi^{(0)} \left(\phi_{zz}^{(k\mp1)}(z_k) D_{(k\mp1)} - \phi_{zz}^{(k)}(z_k) D_k\right). \end{aligned} \tag{5.26}$$

A partir da Equação 5.25 e 5.26 é possível obter as seguintes relações de recorrência:

$$w_b^{(k)} = w_b^{(0)} + w_s^{(0)} \left(1 - A_k\right) - B_k \varphi_z^{(0)}, \tag{5.27}$$

$$u_0^{(k)}(x) = u_0^{(0)}(x) + w_{s,x}^{(0)} E_k + \varphi_{z,x}^{(0)} F_k + \psi^{(0)}(x) H_k, \tag{5.28}$$

em que:

$$\begin{aligned} E_k &= E_{(k\mp1)} + A_k f^{(k)}(z_k) - A_{(k\mp1)} f^{(k\mp1)}(z_k), \\ F_k &= F_{(k\mp1)} + B_k f^{(k)}(z_k) - B_{k\mp1} f^{(k\mp1)}(z_k), \\ H_k &= H_{(k\mp1)} + \phi_{zz}^{(k\mp1)}(z_k) D_{k\mp1} - \phi_{zz}^{(k)}(z_k) D_k, \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$E_0 = 0, \quad F_0 = 0, \quad H_0 = 0, \tag{5.30}$$

Substituindo nas equações da cinemática 5.1 e 5.2:

$$u_x^{(k)} = u_0^{(k)}(x) - z w_{b,x}^{(0)}(x) + w_{s,x}^{(0)}(x)\Phi_k(z) + \varphi_{z,x}^{(0)}\eta_k(z) + \psi^{(0)}\chi_k(z), \tag{5.31}$$

$$u_z^{(k)} = w_0^{(0)}(x) + w_s^{(0)}(x) + g^{(k)}(z)C_k\varphi_z^{(0)}, \tag{5.32}$$

em que:

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= E_k - z\left(1 - A_k\right) - A_k\left(z + f^{(k)}(z)\right), \\ \eta_k(z) &= F_k + zB_k - B_k\left(z + f^{(k)}(z_k)\right), \\ \chi_k(z) &= H_k + \phi_{zz}^{(k)}(z)D_k. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Adotando as equações da cinemática de forma matricial, onde os termos entre colchetes representam matriz ou vetor linha e os termos entre chaves representam vetor coluna:

$$u_x^{(k)} = \left[\overline{T}_1^{(k)}\right]\left\{d_2(x)\right\} + \left[T_1^{(k)}\right]\left\{d_{1,x}^{(x)}\right\}, \tag{5.34}$$

$$u_z = \left[T_1(z)\right]\left\{d_1(x)\right\}, \tag{5.35}$$

onde:

$$\begin{aligned} \overline{T}_1^{(k)}(z) &= \left[1 \quad \mathrm{X}^{(k)}\right], \\ \tilde{T}_1^{(k)}(z) &= \left[-z \quad \Phi_{(z)}^{(k)} \quad \eta_{(z)}^{(k)}\right], \\ T_1^{(k)}(z) &= \left[1 \quad 1 \quad g(z)\right], \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned} d_2(x) &= \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix}, \\ d_{1,x}(x) &= \begin{Bmatrix} w_{b,x}(x) \\ w_{s,x}(x) \\ \varphi_{z,x}(x) \end{Bmatrix}, \\ d_1(x) &= \begin{Bmatrix} w_b(x) \\ w_s(x) \\ \varphi_z(x) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

5.2 Princípio dos trabalhos virtuais

Semelhante ao capítulo anterior, para obter a equação de equilíbrio é utilizado o princípio da mínima energia total, ou seu equivalente princípio dos trabalhos virtuais conforme Equação 5.38.

$$\delta\Pi = \delta U - \delta V = 0. \tag{5.38}$$

A variação da energia interna, escrita em função de tensões e deformações é

$$\delta U = \int_{\Omega} \{\delta\varepsilon_x\}^T \sigma_x + \{\delta\varepsilon_z\}^T \sigma_z + \{\delta\gamma_{xz}\}^T \tau_{xz} d\Omega. \tag{5.39}$$

Reescrevendo o campo de deformações em formato matricial:

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{du_z}{dx} = \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\{d_{2,x}(x)\} + \left[T_1^{(k)}(z)\right]\{d_{1,xx}(x)\}, \tag{5.40}$$

$$\varepsilon_z^{(k)} = \frac{du_z}{dz} = \left[T_{1,z}(z)\right]\{d_1(x)\}, \tag{5.41}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du_x}{dz} + \frac{du_z}{dx} = R_1^{(k)}(z)\{d_2(x)\} + R_2^{(k)}(z)\{d_{1,x}^{(k)}\}, \tag{5.42}$$

em que:

$$\begin{aligned} R_1^{(k)}(z) &= \left[\overline{T}_{1,z}(z)\right], \\ R_2^{(k)}(z) &= \left[T_{1,z}^{(k)}(x)\right] + \left[T_1(z)\right]. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Substituindo o novo campo de deformação (Equações 5.40 a 5.42) nas expressões do campo de tensão (Equações 5.7 a 5.9):

$$\sigma_x = \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}\left[T_1^{(k)}(z)\right]\{d_{1,xx}\} + \overline{\overline{C}}_{13}\left[T_{1,z}(z)\right]\{d_1\} + \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)}\left[\overline{T}_1^{(k)}(z)\right]d_{2,x}, \tag{5.44}$$

$$\sigma_z = \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}\left[T_1^{(k)}(z)\right]\{d_{1,xx}\} + \overline{\overline{C}}_{33}\left[T_{1,z}(z)\right]\{d_1\} + \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}\left[\overline{T}_1^{(k)}(z)\right]d_{2,x}, \tag{5.45}$$

$$\tau_{xz} = \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}\left[R_2^{(k)}(z)\right]\{d_{1,x}\} + \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}\left[R_1^{(k)}(z)\right]\{d_2\}. \tag{5.46}$$

Assim, calculando a energia interna substituindo as expressões do campo de tensão e deformação na Equação 5.39:

$$\begin{aligned}\delta U = \int_0^L \Big(& \left\{\delta d_{1,xx}\right\}^T \left(\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[L_{12}\right]\left\{d_1\right\} + \left[L_{13}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_{2,x}\right\}^T \left(\left[L_{21}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[L_{22}\right]\left\{d_1\right\} + \left[L_{23}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_1(x)\right\}^T \left(\left[N_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[N_{12}\right]\left\{d_1\right\} + \left[N_{13}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left(\left[P_{11}\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \left[P_{12}\right]\left\{d_2\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_2\right\}^T \left(\left[P_{21}\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \left[P_{22}\right]\left\{d_2\right\} \right) \Big) dx,\end{aligned} \tag{5.47}$$

em que:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \int_A \left[T_1^{(k)} \right]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} \left[T_1^{(k)} \right] dA, \quad L_{12} = \int_A \left[T_1^{(k)} \right]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \left[T_{1,z} \right] dA, \\ L_{13} &= \int_A \left[T_1^{(k)} \right]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} \left[\overline{T}_1^{(k)} \right] dA, \quad L_{21} = \int_A \left[\overline{T}_1^{(k)} \right]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} \left[T_1^{(k)} \right] dA, \\ L_{22} &= \int_A \left[\overline{T}_1^{(k)} \right]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \left[T_{1,z} \right] dA, \quad L_{23} = \int_A \left[\overline{T}_1^{(k)} \right]^T \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} \left[\overline{T}_1^{(k)} \right] dA, \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} N_{11} &= \int_A \left[T_{1,z}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \left[T_1^{(k)}(z) \right] dA, \quad N_{12} = \int_A \left[T_{1,z}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{33}^{(k)} \left[T_{1,z}(z) \right] dA, \\ N_{13} &= \int_A \left[T_{1,z}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{13}^{(k)} \left[\overline{T}_1^{(k)}(z) \right] dA, \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} P_{11} &= \int_A \left[R_2^{(k)}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \left[R_2^{(k)}(z) \right] dA, P_{12} = \int_A \left[R_2^{(k)}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \left[R_1^{(k)}(z) \right] dA, \\ P_{21} &= \int_A \left[R_1^{(k)}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \left[R_2^{(k)}(z) \right] dA, P_{22} = \int_A \left[R_1^{(k)}(z) \right]^T \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)} \left[R_1^{(k)}(z) \right] dA, \end{aligned} \tag{5.50}$$

Aplicando a integração por partes:

$$\begin{aligned}\delta U = \int_0^L \Big(& \left\{\delta d_1\right\}^T \left(\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xxxx}\right\} + \left[L_{12}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[L_{13}\right]\left\{d_{2,xxx}\right\} + \left[N_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} \right. \\ & \left. + \left[N_{12}\right]\left\{d_1\right\} + \left[L_{13}\right]\left\{d_{2,x}\right\} - \left[P_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} - \left[P_{12}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) \Big) dx \\ & + \left\{\delta d_2\right\}^T \left(-\left[L_{21}\right]\left\{d_{1,xxx}\right\} - \left[L_{22}\right]\left\{d_{1,x}\right\} - \left[L_{23}\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \left[P_{21}\right]\left\{d_{1,x}\right\} \right. \\ & \left. + \left[P_{22}\right]\left\{d_2\right\} \right) + \Big(\left\{\delta d_{1,x}\right\}^T \left(\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[L_{12}\right]\left\{d_1\right\} + \left[L_{13}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) + \\ & + \left\{\delta d_1\right\}^T \left(-\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xxx}\right\} - \left[L_{12}\right]\left\{d_{1,x}\right\} - \left[L_{13}\right]\left\{d_{2,xx}\right\} + \left[P_{11}\right]\left\{d_{1,x}\right\} + \left[P_{12}\right]\left\{d_2\right\} \right) \\ & + \left\{\delta d_2\right\}^T \left(\left[L_{21}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[L_{22}\right]\left\{d_{1,xx}\right\} + \left[L_{23}\right]\left\{d_{2,x}\right\} \right) \Big),\end{aligned} \tag{5.51}$$

Seja a viga laminada, submetida a um carregamento distribuído variável Q_z e com forças externas T atuando conforma Figura 4, onde o sobrescrito T denota a posição do carregamento no topo da viga e $\{T_x(L)\}$, $\{T_x(0)\}$, $\{T_z(L)\}$ e $\{T_z(0)\}$ são forças de superfícies.

O carregamento é dado por:

$$\overline{Q}_z(x,z_T)=\int_{-h/2}^{h/2} Q_z(x,y,z^T)dy. \tag{5.52}$$

Assim a variação da energia externa é dada por:

$$\begin{aligned}\delta V=-\Bigg(&\int_0^L\left(\overline{Q}_z\left(x,z_T\right)\delta u_z\left(x,z_T\right)\right)dx\\&+\int_A\left(\left\{T_x(L)\right\}\delta u_x\left(L,y,z\right)+\left\{T_z(L)\right\}\delta u_z\left(L,z\right)\right)dA\\&-\int_A\left(\left\{T_x(0)\right\}\delta u_x\left(0,y,z\right)+\left\{T_z(0)\right\}\delta u_z\left(0,z\right)\right)dA\Bigg),\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}\delta V=-\Bigg(&\int_0^L\left\{\delta d_1\left(x\right)\right\}^T\left[T_1\left(z\right)\right]^T\left[\overline{Q}_z\left(x,z_T\right)\right]dx\Bigg)\\&+\left\{\delta d_2\left(L\right)\right\}^T\left(\int_A\left[\overline{T}_1^{(k)}(z)\right]^T\left\{T_x(L)\right\}dA\right)\\&+\left\{\delta d_{1,x}\left(L\right)\right\}^T\left(\int_A\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left\{T_x(L)\right\}dA\right)\\&+\left\{\delta d_1\left(L\right)\right\}^T\left(\int_A\left[T_1(z)\right]^T\left\{T_z(L)\right\}dA\right)\\&-\left\{\delta d_2\left(0\right)\right\}^T\left(\int_A\left[\overline{T}_1^{(k)}(z)\right]^T\left\{T_x(0)\right\}dA\right)\\&-\left\{\delta d_{1,x}\left(0\right)\right\}^T\left(\int_A\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left\{T_x(0)\right\}dA\right)\\&-\left\{\delta d_1(0)\right\}^T\left(\int_A\left[T_1(z)\right]^T\left\{T_z(0)\right\}dA\right),\end{aligned} \tag{5.54}$$

Assumindo que a transporta do vetor do carregamento seja dado por:

$$\left[Q\right]^T=\left[T_1(z)\right]^T\overline{Q}_z(x,z_T). \tag{5.55}$$

Assim:

$$\delta V = -\left(\left(\left\{\delta d_1(x)\right\}^T [Q]^T\right) dA + \left\{\delta d_2(\Delta)\right\}^T \left[\overline{N}_\Delta\right]^T + \left\{\delta d_{1,x}(\Delta)\right\}^T \left[\overline{M}_\Delta\right] + \left\{\delta d_1(\Delta)\right\}^T \left[\overline{V}_\Delta\right]^T - \left\{\delta d_2(\Delta)\right\}^T \left[\overline{N}_\Delta\right]^T - \left\{\delta d_{1,x}(\Delta)\right\}^T \left[\overline{M}_\Delta\right]^T - \left\{\delta d_1(\Delta)\right\}^T \left[\overline{V}_\Delta\right]^T\right)_{\Delta=0}^{\Delta=L}, \tag{5.56}$$

com Δ assumindo valor de 0 ou L. Os esforços presentes na equação 5.56 são dados por:

$$\int_A \left[\tilde{T}_1^{(k)}(z)\right]\left\{T_x(L)\right\} dA = \int_A \begin{bmatrix} -z \\ \Phi^{(k)}(z) \\ \eta^{(k)}(z) \end{bmatrix} \left\{T_x(L)\right\} dA = \begin{bmatrix} -\overline{M}_{yz} & \overline{M}_{\Phi L} & \overline{M}_{\eta L} \end{bmatrix} = \left[\overline{M}_L\right]^T, \tag{5.57}$$

$$\int_A \left[\overline{T}_1^{(k)}(z)\right]^{\cdot T} \left\{T_x(L)\right\} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ \chi^{(k)}(z) \end{bmatrix} \left\{T_x(L)\right\} dA = \begin{bmatrix} \overline{N}_L & \overline{M}_{\chi L} \end{bmatrix}^T = \left[\overline{N}_L\right]^T, \tag{5.58}$$

$$\int_A \left[T_1^{(k)}(z)\right]^{\cdot T} \left\{T_z(L)\right\} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ g(z) \end{bmatrix} \left\{T_z(L)\right\} dA = \begin{bmatrix} \overline{V}_L & \overline{V}_L & \overline{V}_L^g \end{bmatrix}^T = \left[\overline{V}_L\right]^T, \tag{5.59}$$

$$\int_A \left[\overline{T}_1^{(k)}(z)\right]^T \left\{T_x(0)\right\} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ \chi^{(k)}(z) \end{bmatrix} \left\{T_x(0)\right\} dA = \begin{bmatrix} \overline{N}_0 & \overline{M}_{\chi 0} \end{bmatrix}^T = \left[\overline{N}_0\right]^T, \tag{5.60}$$

$$\int_A \left[\tilde{T}_1^{(k)}(z)\right]\left\{T_x(0)\right\} dA = \int_A \begin{bmatrix} -z \\ \Phi^{(k)}(z) \\ \eta^{(k)}(z) \end{bmatrix} \left\{T_x(L)\right\} dA = \begin{bmatrix} -\overline{M}_{y0} & \overline{M}_{\Phi 0} & \overline{M}_{\eta 0} \end{bmatrix} = \left[\overline{M}_0\right]^T, \tag{5.61}$$

$$\int_A \left[T_1(z)\right]^T \left\{T_z(0)\right\} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ g(z) \end{bmatrix} \left\{T_z(0)\right\} dA = \begin{bmatrix} \overline{V}_0 & \overline{V}_0 & \overline{V}_0^g \end{bmatrix}^T = \left[\overline{V}_0\right]^T. \tag{5.62}$$

Assim, substituindo as variações da energia interna (Equação 5.51) e externa (Equação 5.56) na Equação 5.38, temos:

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi = \int_0^L \Big(& \{\delta d_1(x)\}^T \left([L_{11}]\{d_{1,xxxx}\} + [L_{12}]\{d_{1,xx}\} + [L_{13}]\{d_{2,xxx}\} + [N_{11}]\{d_{1,xx}\} \right. \\
& + [N_{12}]\{d_1\} + [N_{13}]\{d_{2,x}\} - [P_{11}]\{d_{1,xx}\} - [P_{12}]\{d_{2,x}\} - [Q]^T \Big) \\
& + \{\delta d_2\}^T \left(-[L_{21}]\{d_{1,xxx}\} - [L_{22}]\{d_{1,x}\} - [L_{23}]\{d_{2,xx}\} + [P_{21}]\{d_{1,x}\} \right. \\
& \left. + [P_{22}]\{d_2\} \right) \Big) dx \\
& + \left(\{\delta d_{1,x}(\Delta)\}^T \left([L_{11}]\{d_{1,xx}\} + [L_{12}]\{d_1(\Delta)\} + [L_{13}]\{d_{2,x}(\Delta)\} - \left[\overline{M}_\Delta\right] \right) \right. \\
& + \{\delta d_1(\Delta)\}^T \left(-[L_{11}]\{d_{1,xxx}(\Delta)\} - [L_{12}]\{d_{1,x}(\Delta)\} - [L_{13}]\{d_{2,xx}(\Delta)\} \right) \\
& + [P_{11}]\{d_{1,x}(\Delta)\} + [P_{12}]\{d_2(\Delta)\} - \left[\overline{V}_\Delta\right]^T \\
& \left. + \{\delta d_2(\Delta)\}^T \left([L_{21}]\{d_{1,xx}(\Delta)\} + [L_{22}]\{d_{1,xx}(\Delta)\} + [L_{23}]\{d_{2,x}(\Delta)\} - \left[\overline{N}_\Delta\right]^T \right) \right)_0^L
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

Aplicando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, obtêm-se as equações de equilíbrio e as condições de contorno do problema. As equações de Euler-Lagrange são dadas por:

$\delta w_b(x)$:

$$\{I_1\}\left([L_{11}]\{d_{1,xxxx}\} + [Y_1]\{d_{1,xx}\} + [L_{13}]\{d_{2,xxx}\} + [N_{12}]\{d_1\} + [Y_2]\{d_{2,x}\} - [Q]^T \right) = 0, \tag{5.64}$$

$\delta w_s(x)$:

$$\{I_2\}\left([L_{11}]\{d_{1,xxxx}\} + [Y_1]\{d_{1,xx}\} + [L_{13}]\{d_{2,xxx}\} + [N_{12}]\{d_1\} + [Y_2]\{d_{2,x}\} - [Q]^T \right) = 0, \tag{5.65}$$

$\delta\varphi_z(x)$:

$$\{I_3\}\left([L_{11}]\{d_{1,xxxx}\} + [Y_1]\{d_{1,xx}\} + [L_{13}]\{d_{2,xxx}\} + [N_{12}]\{d_1\} + [Y_2]\{d_{2,x}\} - [Q]^T \right) = 0, \tag{5.66}$$

$\delta u_0(x)$:

$$\left\{\overline{I}_1\right\}\left(-[L_{21}]\{d_{1,xxx}\} + [Y_3]\{d_{1,x}\} - [L_{23}]\{d_{2,xx}\} + [P_{22}]\{d_2\} \right) = 0, \tag{5.67}$$

$\delta\psi(x)$:

$$\left\{\overline{I}_2\right\}\left(-[L_{21}]\{d_{1,xxx}\} - [L_{23}]\{d_{2,xx}\} + [Y_3]\{d_{1,x}\} + [P_{22}]\{d_2\} \right) = 0, \tag{5.68}$$

em que:

$$[Y_1] = [L_{12}] - [P_{11}] + [N_{11}], \quad [Y_2] = [N_{13}] - [P_{12}], \quad [Y_3] = [P_{21}] - [L_{22}]. \tag{5.69}$$

As condições de contorno do problema são dadas no Quadro 4 abaixo:

Quadro 4 – Condições de contorno essenciais e naturais.

Essenciais	**Naturais**
$w_{b,x}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\left(\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\}+\left[L_{12}\right]\left\{d_1(\Delta)\right\}+\left[L_{13}\right]\left\{d_{2,x}(\Delta)\right\}-\left[\overline{M}_{\Delta}\right]\right)$
$w_{s,x}$	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\left(\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\}+\left[L_{12}\right]\left\{d_1(\Delta)\right\}+\left[L_{13}\right]\left\{d_{2,x}(\Delta)\right\}-\left[\overline{M}_{\Delta}\right]\right)$
$\varphi_{z,x}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left(\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xx}\right\}+\left[L_{12}\right]\left\{d_1(\Delta)\right\}+\left[L_{13}\right]\left\{d_{2,x}(\Delta)\right\}-\left[\overline{M}_{\Delta}\right]\right)$
w_b	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xxx}(\Delta)\right\}-\left[L_{12}\right]\left\{d_{1,x}(\Delta)\right\}-\left[L_{13}\right]\left\{d_{2,xx}(\Delta)\right\}\\+\left[P_{11}\right]\left\{d_{1,x}(\Delta)\right\}+\left[P_{12}\right]\left\{d_2(\Delta)\right\}-\left[\overline{V}_{\Delta}\right]^T\end{pmatrix}$
w_s	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xxx}(\Delta)\right\}-\left[L_{12}\right]\left\{d_{1,x}(\Delta)\right\}-\left[L_{13}\right]\left\{d_{2,xx}(\Delta)\right\}\\+\left[P_{11}\right]\left\{d_{1,x}(\Delta)\right\}+\left[P_{12}\right]\left\{d_2(\Delta)\right\}-\left[\overline{V}_{\Delta}\right]^T\end{pmatrix}$
φ_z	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\left[L_{11}\right]\left\{d_{1,xxx}(\Delta)\right\}-\left[L_{12}\right]\left\{d_{1,x}(\Delta)\right\}-\left[L_{13}\right]\left\{d_{2,xx}(\Delta)\right\}\\+\left[P_{11}\right]\left\{d_{1,x}(\Delta)\right\}+\left[P_{12}\right]\left\{d_2(\Delta)\right\}-\left[\overline{V}_{\Delta}\right]^T\end{Bmatrix}$
u_0	$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left\{\left[L_{21}\right]\left\{d_{1,xx}(\Delta)\right\}+\left[L_{22}\right]\left\{d_{1,xx}(\Delta)\right\}+\left[L_{23}\right]\left\{d_{2,x}(\Delta)\right\}-\left[\overline{N}_{\Delta}\right]^T\right\}$
ψ	$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left\{\left[\overline{L}_{21}\right]\left\{d_{1,xx}(\Delta)\right\}+\left[\overline{L}_{22}\right]\left\{d_{1,xx}(\Delta)\right\}+\left[\overline{L}_{23}\right]\left\{d_{2,x}(\Delta)\right\}-\left[\overline{N}_{\Delta}\right]^T\right\}$

Fonte: Autor (2023).

Aplicando a procedimento de Navier, os campos de deslocamentos e o carregamento são aproximados pelas seguintes séries de Fourier:

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\frac{dF_m}{dx}, \tag{5.70}$$

$$w_b=\sum_{m=1}^{\infty}C_mF_m(x), \tag{5.71}$$

$$w_s=\sum_{m=1}^{\infty}D_mF_m(x), \tag{5.72}$$

$$\varphi_z=\sum_{m=1}^{\infty}H_mF_m(x), \tag{5.73}$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \frac{dF_m}{dx}, \tag{5.74}$$

$$\{d_1\} = \begin{Bmatrix} w_b(x) \\ w_s(x) \\ \varphi_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} C_m F_m(x) \\ \sum_{m=1}^{\infty} D_m F_m(x) \\ \sum_{m=1}^{\infty} H_m F_m(x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} C_m \\ D_m \\ H_m \end{Bmatrix} F_m(x), \tag{5.75}$$

$$\{d_1^m\} = \begin{Bmatrix} C_m \\ D_m \\ H_m \end{Bmatrix}, \tag{5.76}$$

$$\{d_1\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{d_1^m\} F_m(x), \tag{5.77}$$

$$\{d_2\} = \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_m \\ K_m \end{Bmatrix} \frac{dF_m}{dx}, \tag{5.78}$$

$$\{d_2^m\} = \begin{Bmatrix} A_m \\ K_m \end{Bmatrix}, \tag{5.79}$$

$$\{d_2\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{d_2^m\} \frac{dF_m}{dx}, \tag{5.80}$$

em que F_m depende da vinculação de apoio. Escrevendo o carregamento em série de Fourrier para o tipo de vinculação simplesmente apoiado:

$$F_m(x) = sen(\lambda_m x), \tag{5.81}$$

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m sen(\lambda_m x), \tag{5.82}$$

$$[Q]^T = [T_1(z)]^T q(x) = [q(x) \quad q(x) \quad g(z)q(x)]^T, \tag{5.83}$$

$$[Q]^T = [1 \quad 1 \quad g(z)]^T \sum_{m=1}^{\infty} Q_m sen(\lambda_m x). \tag{5.84}$$

Assim, substituindo as expressões acima nas Equações de equilíbrio (Equações 5.64-5.68), resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} [L_{11}]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_1^m\}\frac{d^4F_m}{dx^4}+[L_{13}]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_2^m\}\frac{d^4F_m}{dx^4}+[Y_1]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_1^m\}\frac{d^2F_m}{dx^2} \\ +[Y_2]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_2^m\}\frac{d^2F_m}{dx^2}+[N_{12}]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_1^m\}F_m(x)-[T_1(z)]^T\left(\sum_{m=1}^{\infty}Q_m sen(\lambda_m x)\right)=0 \\ -[L_{21}]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_1^m\}\frac{d^3F_m}{dx^3}-[L_{23}]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_2^m\}\frac{d^3F_m}{dx^3}+[Y_3]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_1^m\}\frac{dF_m}{dx} \\ +[P_{22}]\sum_{m=1}^{\infty}\{d_2^m\}\frac{dF_m}{dx}=0 \end{cases} \tag{5.85}$$

resultando no seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}^m]_{3x3} & [K_{12}^m]_{3x2} \\ [K_{21}^m]_{2x3} & [K_{22}^m]_{2x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_1^m\} \\ \{d_2^m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [T_1(z)]^T Q_m sen(\lambda_m x) \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \tag{5.86}$$

onde:

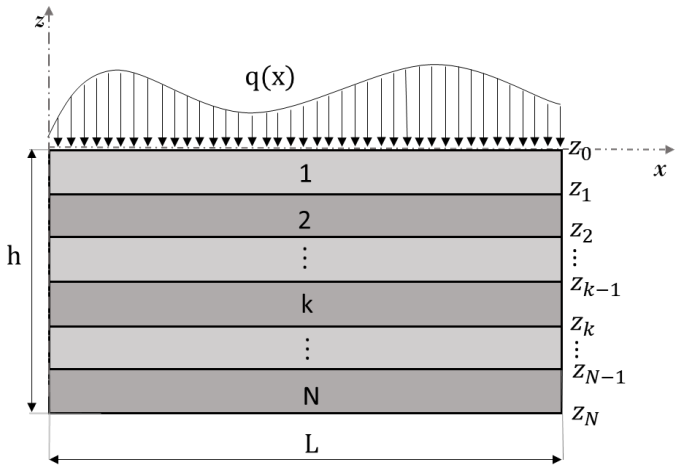
$$\begin{aligned} K_{11}^m &= [L_{11}]\frac{d^4F_m}{dx^4}+[Y_1]\frac{d^2F_m}{dx^2}+[N_{12}]F_m(x), \\ K_{12}^m &= [L_{13}]\frac{d^4F_m}{dx^4}+[Y_2]\frac{d^2F_m}{dx^2}, \\ K_{21}^m &= -[L_{21}]\frac{d^3F_m}{dx^3}+[Y_3]\frac{dF_m}{dx}, \\ K_{22}^m &= -[L_{23}]\frac{d^3F_m}{dx^3}+[P_{22}]\frac{dF_m}{dx}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

6 DESENVOLVIMENTO DA FOMULAÇÃO PARA VIGAS DE ALTA ORDEM CONSIDERANDO CONTINUIDADE DE CISALHAMENTO – MODELO 3

6.1 Considerações iniciais

Considerando uma viga de comprimento L, altura h e espessura b, sujeita a carregamento transversal $q(x)$ por unidade de comprimento. A viga é composta por N camadas ortotrópicas perfeitamente unidas entre si, em que cada camada é denotada pelo subscrito (k). O desenvolvimento desse modelo foi feito com base no trabalho publicado por Chen e Huang (2023) e o sistema de coordenadas adotado é detalhado na Figura 7 abaixo:

Figura 7 - Características geométricas da viga laminada com N camadas.



O modelo cinemático é proposto da seguinte forma com base em Chen e Huang (2023):

$$u_x^{(k)}(x,z) = u_0(x) + z\theta_x(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi(x) + \xi_x^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2 + \eta_x^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^3, \quad (6.1)$$

$$u_z(x) = w_0(x). \quad (6.2)$$

Os deslocamentos axial ($u_x^{(k)}$) e transversal (u_z) dependem da camada da viga, variando de $k=1$ a $k=N$, onde $u_0(x)$ e $w_0(x)$ são os deslocamentos axial e transversal no eixo centroidal da viga, respectivamente; $\theta_x(x)$ corresponde à rotação devido à flexão; $\phi_{zz}^{(k)}(z)$ é a função zig-zag e $\psi(x)$ é uma função desconhecida relacionada a amplitude

do efeito zig-zag ao longo do comprimento da viga. $\xi_x^{(k)}(x)$ e $\eta_x^{(k)}(x)$ são funções de x a serem determinadas. $\alpha^{(k)}(z)$ é um parâmetro que denota a coordenada local na k-ésima camada, que é dada por:

$$\alpha_x^{(k)} = z - \frac{z^{(k-1)} + z^{(k)}}{2}, z^{(k)} \le z \le z^{(k-1)}. \tag{6.3}$$

6.2 Campo de deformações

As expressões das Equações 6.1 e 6.2 foram derivadas para obter as expressões do campo de deslocamento, na direção axial ($\varepsilon_x^{(k)}$) e devido ao cisalhamento ($\gamma_{xz}^{(k)}$):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(k)} &= u_{x,x}^{(k)} = u_{0,x}(x) + z\theta_{x,x}(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi_{,x}(x) + \xi_{x,x}^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2 \\ &\quad + \eta_{x,x}^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^3,\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^{(k)} &= u_{x,z}^{(k)} + u_{z,x} = \theta_x(x) + \phi_{zz,z}^{(k)}(z)\psi(x) + 2\xi_x^{(k)}(x)\alpha^{(k)}(z)\alpha_{,z}^{(k)}(z) \\ &\quad + 3\eta_x^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2 \alpha_{,z}^{(k)}(z) + u_{z,x}(x).\end{aligned} \tag{6.5}$$

6.3 Campo de tensões

A equação constitutiva linear no estado plano de tensões da k-ésima camada/lâmina ortotrópica com qualquer orientação de fibra em relação ao plano x–z pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)}\end{Bmatrix}, \tag{6.6}$$

onde, $\sigma^{(k)}(x,z)$ e $\tau^{(k)}(x,z)$ representam os componentes do vetor de tensão normal e tensão de cisalhamento da viga, $\overline{\overline{C}}_{ij}$ são constantes de rigidez do material e $\varepsilon^{(k)}(x,z)$ e $\gamma^{(k)}(x,z)$ representam os componentes de deformação do material. Assim, temos:

$$\sigma_x^{(k)} = Q_{11}^{(k)}\varepsilon_x^{(k)}, \tag{6.7}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)}\gamma_{xz}^{(k)}. \tag{6.8}$$

Os coeficientes da matriz de rigidez reduzida $Q_{ij}^{(k)}$ são calculados a partir redução da Equação 4.12 da seguinte forma:

$$Q_{11}^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{11}^{(k)} + \frac{\left(\overline{\overline{C}}_{13}^{(k)}\right)^2}{\overline{\overline{C}}_{33}^{(k)}}, \tag{6.9}$$

$$Q_{55}^{(k)} = \overline{\overline{C}}_{55}^{(k)}. \tag{6.10}$$

Dessa forma, as equações constitutivas podem ser reescritas da seguinte forma, substituindo as expressões do campo de deformação (Equações 6.4 a 6.5):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k)} = Q_{11}^{(k)}\Big(&u_{0,x}(x) + z\theta_{x,x}(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi_{,x}(x) + \xi_{x,x}^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2 \\ &+\eta_{x,x}^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^3\Big),\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)}\Big(&\theta_x(x) + \phi_{zz,z}^{(k)}(z)\psi(x) + 2\xi_x^{(k)}(x)\alpha^{(k)}(z)\alpha_{,z}^{(k)}(z) \\ &+3\eta_x^{(k)}(x)\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2\alpha_{,z}^{(k)}(z) + u_{z,x}(x)\Big).\end{aligned} \tag{6.12}$$

6.4 Imposição da continuidade de tensões

Para impor a continuidade de tensões da interface e a tensão de cisalhamento transversal livre nas superfícies superior e inferior da viga, temos as seguintes equações:

$$\tau_{xz}^{(1)}\left(z = z^{(0)}\right) = \tau_{xz}^{(3)}\left(z = z^{(3)}\right) = 0, \tag{6.13}$$

$$u_x^{(1)}\left(z = z^{(1)}\right) = u_x^{(2)}\left(z = z^{(1)}\right); u_x^{(2)}\left(z = z^{(2)}\right) = u_x^{(3)}\left(z = z^{(2)}\right), \tag{6.14}$$

$$\tau_{xz}^{(1)}\left(z = z^{(1)}\right) = \tau_{xz}^{(2)}\left(z = z^{(1)}\right); \tau_{xz}^{(2)}\left(z = z^{(2)}\right) = \tau_{xz}^{(3)}\left(z = z^{(2)}\right). \tag{6.15}$$

Substituindo as Equações 6.12 na Equação 6.13, temos:

$$\begin{aligned}&Q_{55}^{(k)}\Big(\gamma_0 + \psi_x\phi_{x.z}^{(1)}\left(z^{(0)}\right) + 2\xi_x^{(1)}(x)\alpha^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\alpha_{,z}\left(z^{(0)}\right) \\ &+3\eta^{(1)}(x)\left(\alpha^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\Big) = 0,\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}&Q_{55}^{(k)}\Big(\gamma_0 + \psi_x\phi_{x.z}^{(3)}\left(z^{(3)}\right) + 2\xi_x^{(3)}(x)\alpha^{(3)}\left(z^{(3)}\right)\alpha_{,z}\left(z^{(3)}\right) \\ &+3\eta^{(3)}(x)\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(3)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(3)}\right)\Big) = 0,\end{aligned} \tag{6.17}$$

em que γ_0 é a média da deformação de cisalhamento que é dada por $\theta_x + u_{z,x}$.

Substituindo as Equações 6.1 na Equação 6.14, temos:

$$\begin{aligned}&\phi_{zz}^{(1)}(z^{(1)})\psi(x)+\xi_x^{(1)}(x)\left(\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2+\eta_x^{(1)}(x)\left(\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)^3=\\&\phi_{zz}^{(2)}(z^{(1)})\psi(x)+\xi_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2+\eta_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right)^3,\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}&\phi_{zz}^{(1)}(z^{(2)})\psi(x)+\xi_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2+\eta_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)^3=\\&\phi_{zz}^{(3)}(z^{(2)})\psi(x)+\xi_x^{(3)}(x)\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2+\eta_x^{(3)}(x)\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right)^3.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Substituindo a Equação 6.12 na Equação 6.15, temos:

$$\begin{aligned}&Q_{55}^{(1)}\left(\gamma_0+\phi_{zz,z}^{(1)}(z^{(1)})\psi(x)+2\xi_x^{(1)}(x)\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right.\\&\left.+3\eta_x^{(1)}(x)\left(\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)\\&=Q_{55}^{(2)}\left(\gamma_0+\phi_{zz,z}^{(2)}(z^{(1)})\psi(x)+2\xi_x^{(2)}(x)\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right.\\&\left.+3\eta_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right),\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}&Q_{55}^{(2)}\left(\gamma_0+\phi_{zz,z}^{(2)}(z^{(2)})\psi(x)+2\xi_x^{(2)}(x)\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right.\\&\left.+3\eta_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)\\&=Q_{55}^{(3)}\left(\gamma_0+\phi_{zz,z}^{(3)}(z^{(2)})\psi(x)+2\xi_x^{(3)}(x)\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right.\\&\left.+3\eta_x^{(2)}(x)\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right).\end{aligned} \tag{6.21}$$

Reescrevendo as equações em formato matricial:

$$\begin{bmatrix}D_{11}&0&0&D_{14}&0&0\\0&0&D_{23}&0&0&D_{26}\\D_{31}&D_{32}&0&D_{34}&D_{35}&0\\0&D_{42}&D_{43}&0&D_{45}&D_{46}\\D_{51}&D_{52}&0&D_{54}&D_{55}&0\\0&D_{62}&D_{63}&0&D_{65}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_x^{(1)}\\\xi_x^{(2)}\\\xi_x^{(3)}\\\eta^{(1)}\\\eta^{(2)}\\\eta^{(3)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\end{Bmatrix} \tag{6.22}$$

em que:

$$
\begin{aligned}
&D_{11} = 2\alpha^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(0)}\right),\ D_{14} = 3\left(\alpha^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(0)}\right),\\
&D_{23} = 2\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(3)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(3)}\right),\ D_{26} = 3\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(3)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(3)}\right),\\
&D_{31} = \left(\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2,\ D_{32} = -\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2,\ D_{34} = \left(\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)^3,\\
&D_{35} = -\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right)^3,\ D_{42} = \left(\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2,\ D_{43} = -\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2,\\
&D_{45} = \left(\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)^3,\ D_{46} = -\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right)^3,\\
&D_{51} = 2Q_{55}^{(1)}\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(1)}\right),\ D_{52} = -Q_{55}^{(2)}2\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(1)}\right),\\
&D_{54} = Q_{55}^{(1)}3\left(\alpha^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(1)}\left(z^{(1)}\right),\ D_{55} = -Q_{55}^{(3)}3\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(1)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(1)}\right),\\
&D_{62} = 2Q_{55}^{(2)}\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(2)}\right),\ D_{63} = -2Q_{55}^{(3)}\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(2)}\right),\\
&D_{65} = 3Q_{55}^{(2)}\left(\alpha^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(2)}\left(z^{(2)}\right),\\
&D_{66} = -3Q_{55}^{(3)}\left(\alpha^{(3)}\left(z^{(2)}\right)\right)^2\alpha_{,z}^{(3)}\left(z^{(2)}\right),
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_1 = -\gamma_0 - \psi_x\phi_{x.z}^{(1)}\left(z^{(0)}\right),\ F_2 = -\gamma_0 - \psi_x\phi_{x.z}^{(3)}\left(z^{(3)}\right),\\
&F_3 = \psi(x)\left(\phi_{zz}^{(2)}\left(z^{(1)}\right) - \phi_{zz}^{(1)}\left(z^{(1)}\right)\right),\ F_4 = \psi(x)\left(\phi_{zz}^{(3)}\left(z^{(2)}\right) - \phi_{zz}^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right),\\
&F_5 = \gamma_0\left(Q_{55}^{(2)} - Q_{55}^{(1)}\right) + \psi(x)\left(\phi_{zz,z}^{(2)}(z^{(1)})Q_{55}^{(2)} - \phi_{zz,z}^{(1)}(z^{(1)})Q_{55}^{(1)}\right),\\
&F_6 = \gamma_0\left(Q_{55}^{(3)} - Q_{55}^{(2)}\right) + \psi(x)\left(\phi_{zz,z}^{(3)}(z^{(2)})Q_{55}^{(3)} - \phi_{zz,z}^{(2)}2(z^{(2)})Q_{55}^{(2)}\right).
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Resolvendo o sistema matricial da Equação 5.28, tem-se:

$$\xi_x^{(k)} = a_1^{(k)}\gamma_0 + b_1^{(k)}\psi, k = 1,2,3, \tag{6.25}$$

$$\eta_x^{(k)} = a_2^{(k)}\gamma_0 + b_2^{(k)}\psi, k = 1,2,3. \tag{6.26}$$

em que $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$, $b_1^{(k)}$ e $b_2^{(k)}$ são constantes.

Substituindo as Equações 6.28 e 6.29 na Equação 6.1, a cinemática pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_x^{(k)}\left(x,z\right) = u_0(x) + z\theta_x(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi(x) + P_x^{(k)}\gamma_0(x) + Q_x^{(k)}\psi(x), \tag{6.27}$$

$$u_z\left(x\right) = w_0\left(x\right), \tag{6.28}$$

em que:

$$P_x^{(k)} = a_1^{(k)}\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2 + a_2^{(k)}\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^3, \tag{6.29}$$

$$Q_x^{(k)} = b_1^{(k)}\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^2 + b_2^{(k)}\left(\alpha^{(k)}(z)\right)^3. \tag{6.30}$$

Para simplificar as operações subsequentes:

$$u_x^{(k)}(x,z) = \left[T_1^{(k)}(z)\right]\{d_1(x)\} + \left[T_2^{(k)}(z)\right]\{d_{1,x}(x)\}, \tag{6.31}$$

$$u_z(x) = \left[T_3\right]\{d_1(x)\}. \tag{6.32}$$

onde:

$$\left[T_1^{(k)}(z)\right] = \begin{bmatrix} 1 & z + P_x^{(k)} & \phi_{zz}^{(k)}(z) + Q_x^{(k)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[T_2^{(k)}(z)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & P_x^{(k)} \end{bmatrix},$$
$$\left[T_3\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{d_1(x)\} = \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \theta_x(x) \\ \psi(x) \\ w(x) \end{Bmatrix}, \quad \{d_{1,x}(x)\} = \begin{Bmatrix} u_{0,x}(x) \\ \theta_{x,x}(x) \\ \psi_{,x}(x) \\ w_{,x}(x) \end{Bmatrix}. \tag{6.33}$$

Reescrevendo o campo de deformações em formato matricial:

$$\varepsilon_x^{(k)} = \left[T_1^{(k)}(z)\right]\{d_{1,x}(x)\} + \left[T_2^{(k)}(z)\right]\{d_{1,xx}(x)\}, \tag{6.34}$$

$$\gamma_{xz}^{(k)} = \left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]\{d_1(x)\} + \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\{d_{1,x}(x)\}, \tag{6.35}$$

onde $\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right] = \left[T_{2,z}^{(k)}(z)\right] + \left[T_3^{(k)}\right]$.

Substituindo o novo campo de deformação (Equações 6.33 a 6.34) nas expressões do campo de tensão (Equações 6.7 a 6.8)

$$\sigma_x^{(k)} = Q_{11}^{(k)}\left(\left[T_1^{(k)}(z)\right]\{d_{1,x}(x)\} + \left[T_2^{(k)}(z)\right]\{d_{1,xx}(x)\}\right), \tag{6.36}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)}\left(\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]\{d_1(x)\} + \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\{d_{1,x}(x)\}\right). \tag{6.37}$$

6.5 Princípio dos trabalhos virtuais

As equações de equilíbrio podem ser derivadas do princípio da energia potencial total mínima:

$$\Pi = U + V, \tag{6.38}$$

em que Π denota a energia potencial total, U é a energia de deformação e V o trabalho realizado por cargas externas.

A energia de deformação total armazenada na viga é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\left\{ \varepsilon_x^{(k)} \right\}^T \left[\sigma_x^{(k)} \right] + \left\{ \gamma_{xz}^{(k)} \right\}^T \left[\tau_{xz}^{(k)} \right] \right) d\Omega. \tag{6.39}$$

Substituindo as Equações 6.33 a 6.36 na Equação 6.38:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_\Omega \Bigg(& Q_{11}^{(k)} \Big(\left\{ d_{1,x}(x) \right\}^T \left[T_1^{(k)}(z) \right]^T \left[T_1^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,x}(x) \right\} \\ & + \left\{ d_{1,x}(x) \right\}^T \left[T_1^{(k)}(z) \right]^T \left[T_2^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,xx}(x) \right\} \\ & + \left\{ d_{1,xx}(x) \right\}^T \left[T_2^{(k)}(z) \right]^T \left[T_1^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,x}(x) \right\} \\ & + \left\{ d_{1,xx}(x) \right\}^T \left[T_2^{(k)}(z) \right]^T \left[T_2^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,xx}(x) \right\} \Big) \\ & + Q_{55}^{(k)} \Big(\left\{ d_1(x) \right\}^T \left[T_{1,z}^{(k)}(z) \right]^T \left[T_{1,z}^{(k)}(z) \right] \left\{ d_1(x) \right\} \\ & + \left\{ d_1(x) \right\}^T \left[T_{1,z}^{(k)}(z) \right]^T \left[\overline{T}^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,x}(x) \right\} \\ & + \left\{ d_{1,x}(x) \right\}^T \left[\overline{T}^{(k)}(z) \right]^T \left[T_{1,z}^{(k)}(z) \right] \left\{ d_1(x) \right\} \\ & + \left\{ d_{1,x}(x) \right\}^T \left[\overline{T}^{(k)}(z) \right]^T \left[\overline{T}^{(k)}(z) \right] \left\{ d_{1,x}(x) \right\} \Big) \Bigg) dV. \end{aligned} \tag{6.40}$$

O trabalho realizado por cargas externas:

$$V = -\int_0^L \left\{ d_1 \right\}^T \left[T_3 \right]^T q(x) dx. \tag{6.41}$$

O princípio dos deslocamentos virtuais afirma que se a viga estiver em equilíbrio devemos ter

$$\delta\Pi = \delta U + \delta V. \tag{6.42}$$

6.6 Solução usando o método de Ritz

Aplicando o procedimento de Ritz, os campos de deslocamento são aproximados por:

$$
\begin{aligned}
&u_0(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{u_0}(x)U_m,\quad \theta(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\theta}(x)\theta_m,\quad \psi(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{\psi}(x)\psi_m\\
&w_0(x)=\sum_{m=1}^{n}\chi_{w_0}(x)W_m,
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

onde $\chi_{u_0}(x)$, $\chi_{\theta}(x)$, $\chi_{\psi}(x)$ e $\chi_{w_0}(x)$ são funções admissíveis que foram apresentadas no Quadro 3. U_m, W_m, ϕ_m, ψ_m e φ_m são parâmetros desconhecidos a serem determinados e m é o número de termos da série. Os vetores do campo de deslocamentos são aproximados da seguinte forma:

$$
\{d_1\}=\begin{Bmatrix}u_0(x)\\ \theta_x(x)\\ \psi(x)\\ w(x)\end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{n}\begin{Bmatrix}\chi_{u_0}(x)U_m\\ \chi_{\theta}(x)\theta_m\\ \chi_{\psi}(x)\psi_m\\ \chi_{w}(x)W_m\end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_1\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m,
\tag{6.44}
$$

em que:

$$
\left[\overline{\chi}_1\right]_m=\begin{bmatrix}\chi_{u_0}(x) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \chi_{\theta}(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \chi_{\psi}(x) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \chi_{w}(x)\end{bmatrix},\quad \left\{\overline{d}_1\right\}_m=\begin{Bmatrix}U_m\\ \theta_m\\ \psi_m\\ W_m\end{Bmatrix}.
\tag{6.45}
$$

Substituindo os campos de aproximações na Equação 6.38 da energia de deformação:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Bigg(& Q_{11}^{(k)}\Bigg(\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\Bigg) \\
& +Q_{55}^{(k)}\Bigg(\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_1\right]_m^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_1\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m + \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_1\right]_m^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m + \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_1\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m + \\
& +\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\sum_{m=1}^{n}\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\Bigg)\Bigg)d\Omega,
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

$$
V = -\int_0^L \left\{d_1\right\}^T\left[T_3\right]^T q(x)\,dx. \tag{6.47}
$$

As equações governantes podem ser obtidas utilizando a Equação 4.43 que usa o princípio de Lagrange, assim:

$$
\frac{\partial \prod}{\partial P_r^i} = \frac{\partial U}{\partial P_r^i} + \frac{\partial V}{\partial P_r^i} = 0, \tag{6.48}
$$

em que:

$$
\left\{P_r^i\right\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ \theta_r \\ \psi_r \\ w_r \end{Bmatrix}, \tag{6.49}
$$

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial u_r}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial U_m}{\partial u_r}\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta_{mr}\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_1\right\},$$

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial \theta_r}=\begin{Bmatrix}0\\\dfrac{\partial \theta_m}{\partial \theta_r}\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\\delta_{mr}\\0\\0\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\0\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_2\right\},$$

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial \psi_r}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\dfrac{\partial \psi_m}{\partial \psi_r}\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\delta_{mr}\\0\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\0\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_3\right\},$$

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial w_r}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dfrac{\partial W_m}{\partial w_r}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\delta_{mr}\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\1\end{Bmatrix}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_4\right\}, \tag{6.50}$$

$$\frac{\partial\left\{\overline{d}_1\right\}_m}{\partial\left\{P_r^i\right\}}=\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_i\right\}. \tag{6.51}$$

Substituindo a Equação 6.50 nas Equações 6.46 e 6.47 fazendo as seguintes simplificações:

$$\left(\sum_{m=1}^{n}\delta_{mr}\left\{\mathrm{I}_i\right\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\right)=\left\{\mathrm{I}_i\right\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T, \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\\
&=\left(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\right)^T\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&=\left(\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\right)^T\left(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\right)^T\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&=\left(\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r\left\{\mathrm{I}_i\right\}\right)^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&\left\{\mathrm{I}_i\right\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m.
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial P_r^i} = \sum_{m=1}^{n}\Bigg(\int_{\Omega}\Bigg(&Q_{11}^{(k)}\Big(\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&+\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&+\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_r^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]^T\left[T_1^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&+\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_r^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]^T\left[T_2^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\Big)\\
&+Q_{55}^{(k)}\Big(\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_1\right]_r^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_1\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&+\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_1\right]_r^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&+\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]^T\left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_1\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\\
&+\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]^T\left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m\left\{\overline{d}_1\right\}_m\Big)\Big)d\Omega\Bigg),\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$V = -\int_0^L\sum_{m=1}^{n}\left\{\overline{d}_1\right\}_m^T\left[\overline{\chi}_1\right]_m^T\left[T_3\right]^T q(x)\,dx. \tag{6.54}$$

Colocando em evidência o vetor constante e separando os termos depende da variável de integração:

$$\frac{\partial U}{\partial P_r^i} = \sum_{m=1}^{n}\left(\int_0^L\{\mathrm{I}_i\}^T\left[k\right]_r^m\left\{\overline{d}_1\right\}_m dx\right), \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_r^i} = -\int_0^L\{\mathrm{I}_i\}^T\left[\overline{\chi}_1\right]_r^T\left[T_3\right]^T q(x)\,dx, \tag{6.56}$$

em que:

$$\begin{aligned}\left[k\right]_r^m = &\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[A_1\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m+\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[A_2\right]\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m+\\
&+\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_r^T\left[A_3\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m+\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_r^T\left[A_4\right]\left[\overline{\chi}_{1,xx}\right]_m+\\
&+\left[\overline{\chi}_1\right]_r^T\left[B_1\right]\left[\overline{\chi}_1\right]_m+\left[\overline{\chi}_1\right]_r^T\left[B_2\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m+\\
&+\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[B_3\right]\left[\overline{\chi}_1\right]_m+\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_r^T\left[B_4\right]\left[\overline{\chi}_{1,x}\right]_m,\end{aligned} \tag{6.57}$$

em que as integrais de área são dadas por:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_A Q_{11}^{(k)} \left[T_1^{(k)}(z)\right]^T \left[T_1^{(k)}(z)\right] dA,\ A_2 = \int_A Q_{11}^{(k)} \left[T_1^{(k)}(z)\right]^T \left[T_2^{(k)}(z)\right] dA, \\
A_3 &= \int_A Q_{11}^{(k)} \left[T_2^{(k)}(z)\right]^T \left[T_1^{(k)}(z)\right] dA,\ A_4 = \int_A Q_{11}^{(k)} \left[T_2^{(k)}(z)\right]^T \left[T_2^{(k)}(z)\right] dA, \\
B_1 &= \int_A Q_{55}^{(k)} \left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]^T \left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right] dA,\ B_2 = \int_A Q_{55}^{(k)} \left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right]^T \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right] dA, \\
B_3 &= \int_A Q_{55}^{(k)} \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]^T \left[T_{1,z}^{(k)}(z)\right] dA,\ B_4 = \int_A Q_{55}^{(k)} \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right]^T \left[\overline{T}^{(k)}(z)\right] dA.
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

Assim, substituindo as Equações 6.55 e 6.56 na Equação 6.49:

$$
\{\mathrm{I}_i\}^T \sum_{m=1}^{n} \left(\int_0^L \left[k\right]_r^m \left\{\overline{d}_1\right\}_m dx \right) - \{\mathrm{I}_i\}^T \int_0^L \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[T_3\right]^T q(x)\, dx = 0. \tag{6.59}
$$

Resultando no seguinte sistema:

$$
\sum_{m=1}^{n} \left[\overline{\overline{k}}\right]_r^m \left\{\overline{d}_1\right\}_m = \{F\}_r, \tag{6.60}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\left[\overline{\overline{k}}\right]_r^m &= \int_0^L \left[k\right]_r^m dx, \\
\{F\}_r &= \int_0^L \left[\overline{\chi}_1\right]_r^T \left[T_3\right]^T q(x)\, dx.
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

7 RESULTADOS

7.1 Análise comparativa

Foi realizada uma análise comparativa utilizando o trabalho de Pagano (1969) como referência. Nesta análise foi medida a precisão dos resultados para os deslocamentos, tensões normais axial, tensões normais transversais e tensões cisalhantes tanto para camadas regulares quanto não-regulares. Adicionalmente, foi analisado a dependência dos resultados quando é variada a função de forma de cisalhamento e a função zig-zag na cinemática de alta-ordem com e sem consideração da continuidade da tensão cisalhante. Após a análise da precisão quando é variada a função de forma de cisalhamento e a função zig-zag, foi observado o comportamento dos resultados quando considera ou não o efeito quase-3D. Foram utilizadas as seguintes grandezas adimensionalizadas:

$$U_a^{(k)}(x,z) = \frac{u_x^{(k)}(x,z)E_y}{bhq_0} \tag{6.1}$$

$$W_{xa}^{(k)}(x,z) = \frac{100E_y h^3 u_z^{(k)}(x,z)}{bq_0 L^4} \tag{6.2}$$

$$\sigma_{xa}^{(k)}(x,z) = \frac{\sigma_x^{(k)}(x,z)}{q_0} \tag{6.3}$$

$$\sigma_{za}^{(k)}(x,z) = \frac{\sigma_z^{(k)}(x,z)}{q_0} \tag{6.4}$$

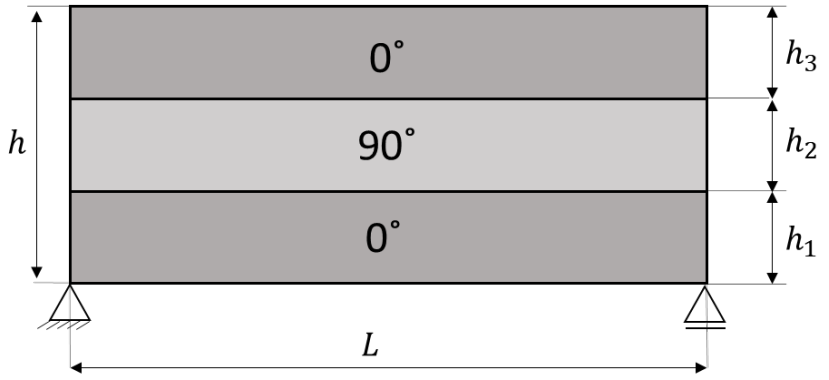
$$\tau_{xza}^{(k)}(x,z) = \frac{\tau_{xz}^{(k)}(x,z)}{q_0} \tag{6.5}$$

em que E_y é o módulo de Young na direção y e q_0 corresponde a intensidade máxima do carregamento.

7.2 Exemplos

Foi utilizada uma viga com três camadas sujeita a um carregamento senoidal com vinculação simplesmente apoiada, seção transversal retangular com largura b e altura total h. Foi adotada a orientação de fibra 0˚/90˚/0˚, com duas configurações de lâminas diferentes (h_1-h_2-h_3), 1-1-1 (configuração simétrica) e 2-1-1 (configuração assimétrica), como mostra a Figura 8:

Figura 8 – Exemplo de viga utilizada.



7.3 Análise por modelo sem continuidade do cisalhamento – Modelo 1

Os erros relativos para esse modelo estão apresentados nas Tabelas 1 a 7 abaixo. As abreviações Red e Sol, nas tabelas, são referentes às funções $f(z)$ de Reddy (1990) e Soldatos (1992), respectivamente. E as abreviações Mur, Zhen, Seno e Hiper são referentes às funções zig-zag de Murakami (1986), Zhen e*t al.* (2018), Leite e Da Rocha (2023) e Leite (2022), respectivamente. O erro foi calculado com base na métrica WAPE (*Weighted Absolute Percentage Error* - Erro percentual absoluto ponderado), dado por:

$$WAPE(\%) = 100\frac{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j - X_j\right|}{\sum_{j=1}^{n}\left|X_j\right|}$$

em que, x_j é o valor calculado nesse trabalho e X_j o valor calculado por Pagano.

Também serão apresentados os resultados quando o efeito quase-3D é desconsiderada na análise para laminado com 3 camadas com configurações regular (1-1-1) e não-regular (2-1-1). Nas tabelas abaixo mostram os valores da métrica WAPE para diversas combinações de formulações. Na Tabela 1, para $x = L$, é mostrado a norma WAPE para o deslocamento axial. Em $z = 0$, na Tabela 2, os resultados da norma WAPE para o deslocamento transversal. Em $x = L/2$, os resultados WAPE para a tensão normal longitudinal, tensão normal transversal por equação de equilíbrio e pelo modelo constitutivo são mostrados nas Tabelas 3-5, respectivamente. E em $x = 0$, nas Tabelas 2, 6 e 7 mostram o valor da métrica WAPE para o deslocamento transversal e a tensão cisalhante calculado pela equação de equilíbrio e pelo modelo constitutivo, respectivamente.

Tabela 1 – WAPE para deslocamento axial, $U_a(L, z)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	11,84%	7,41%	7,15%	4,09%	11,78%	7,27%	7,02%	3,91%
	2-1-1	26,80%	16,25%	14,40%	10,62%	26,52%	15,81%	13,97%	10,15%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	11,79%	7,14%	7,12%	4,28%	11,73%	7,00%	7,01%	4,19%
	2-1-1	26,24%	15,34%	13,53%	10,05%	25,97%	14,92%	13,13%	9,64%

Tabela 2 – WAPE para deslocamento transversal, $W_a(x, 0)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	3,36%	1,10%	1,79%	0,19%	3,31%	1,04%	1,74%	0,17%
	2-1-1	6,19%	2,87%	3,31%	1,76%	6,09%	2,78%	3,23%	1,70%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	2,70%	0,43%	1,12%	0,48%	2,65%	0,38%	1,08%	0,49%
	2-1-1	6,19%	2,87%	3,31%	1,76%	6,09%	2,78%	3,23%	1,70%

Tabela 3 – WAPE para tensão normal longitudinal, $\sigma_{xa}(L/2, z)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	9,16%	6,98%	6,33%	3,00%	9,10%	6,82%	6,20%	2,74%
	2-1-1	13,20%	9,72%	8,96%	6,21%	13,11%	9,52%	8,77%	5,99%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	8,67%	6,29%	5,79%	2,24%	8,62%	6,14%	5,66%	2,02%
	2-1-1	12,88%	9,30%	8,61%	5,77%	12,78%	9,08%	8,42%	5,59%

Tabela 4 – WAPE para tensão normal transversal por equação de equilíbrio, $\sigma_{za}(L/2, z)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	0,42%	0,59%	0,45%	0,32%	0,42%	0,58%	0,44%	0,30%
	2-1-1	1,82%	0,70%	0,73%	0,70%	1,81%	0,69%	0,72%	0,69%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	0,39%	0,54%	0,41%	0,28%	0,39%	0,53%	0,40%	0,27%
	2-1-1	1,82%	0,70%	0,73%	0,70%	1,81%	0,69%	0,72%	0,69%

Tabela 5 – WAPE para tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, $\sigma_{za}(L/2, z)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	2-1-1	84,98%	84,52%	84,40%	84,23%	85,05%	84,58%	84,46%	84,29%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	2-1-1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabela 6 – WAPE para tensão de cisalhamento por equação de equilíbrio, $\tau_{xza}(0, z)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	1,44%	2,11%	1,66%	0,93%	1,43%	2,07%	1,61%	0,85%
	2-1-1	5,31%	3,06%	2,86%	2,38%	5,28%	3,01%	2,82%	2,32%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	1,28	1,91	1,46	0,73	1,26	1,87	1,42	0,66
	2-1-1	5,40	2,87	2,68	2,20	5,37	2,83	2,64	2,15

Tabela 7 – WAPE para tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, $\tau_{xza}(0, z)$.

Tipo de análise	Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper
Com efeito Quase-3D	1-1-1	22,16%	11,32%	15,08%	3,64%	22,01%	11,03%	14,89%	3,36%
	2-1-1	25,80%	14,24%	16,21%	9,96%	25,56%	13,88%	15,94%	9,63%
Sem efeito Quase-3D	1-1-1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	2-1-1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

A partir dos resultados, pode-se concluir que a função $f(z)$ de Soldatos (1992) em conjunto com a função zig-zag hiperbólica-exponencial produziram resultados melhores em todos os campos de resposta, garantindo uma maior precisão. Outro ponto a ser observado é a diferença entre os campos de tensão normal transversal e cisalhamento quando calculados pela equação de equilíbrio e pelo modelo constitutivo, apontando uma inconsistência no cálculo pelo modelo constitutivo. Essas observações são corroboradas com a análise qualitativa por meio dos gráficos das Figuras 9 a 15 abaixo, com valores adimensionalizados considerando a configuração de camadas 1-1-1 (altura regular).

Observa-se que a combinação Sol+Hiper apresentaram os valores mais baixos para o erro calculado pela metrica WAPE. O erro em alguns campos de respostas foi menor após desconsiderar o efeito quase-3D, porém os resultados quando calculados pelo modelo constitutivo foram totalmente discrepantes. Mostrando que as tensões obtidas pelos modelos constitutivos perdem a capacidade de satisfazer as equações de equilíbrio em tensão.

Também é possível verificar que quando a camada é regular o modelo considerando com efeito quase-3D apresentam menores valores do WAPE para os campos de deslocamentos. No entanto, para os campos de tensão o modelo sem o efeito quase-3D apresentou menores valores do WAPE. Quando é considerada configuração da camada não-regular 2-1-1, observa-se nas Tabelas 1-7 que os modelos sem efeito quase-3D apresentam resultados ligeiramente menores do WAPE quando comparado com o modelo com efeito quase-3D. Exceto nas análises quando os campos de tensão cisalhante e tensão normal transversal são calculados pelo modelo constitutivo, em que o modelo sem efeito quase-3D mostrou-se pior que o com efeito quase-3D.

Figura 9 – Deslocamento axial $U_a^{(k)}(L,z)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

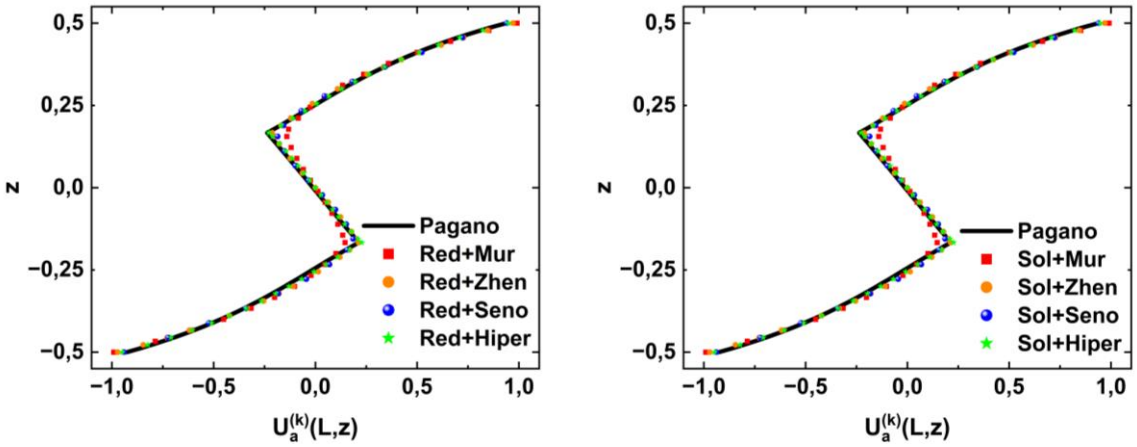


Figura 10 – Deslocamento transversal $W_a^{(k)}(x,0)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

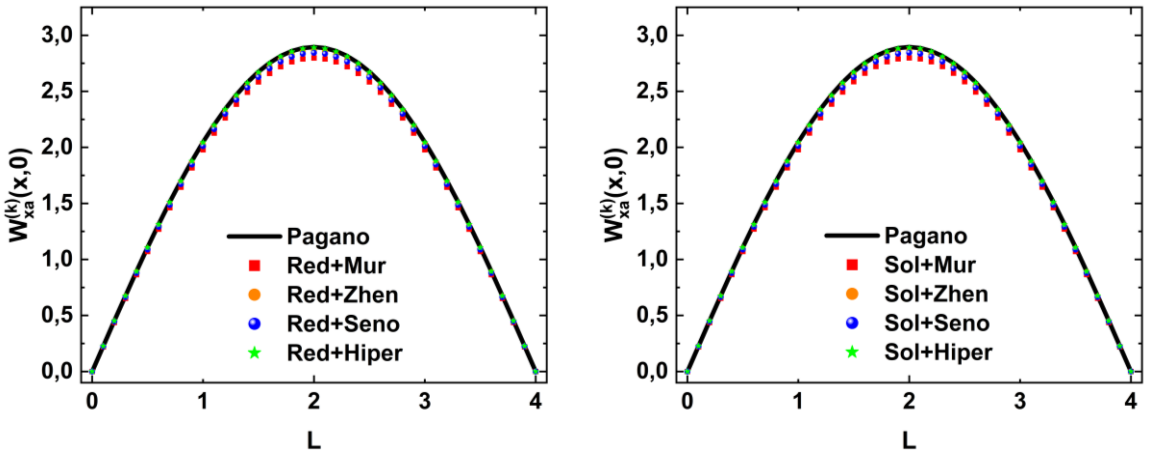


Figura 11 – Tensão normal longitudinal $\sigma_{xa}^{(k)}(L/2,z)$ configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

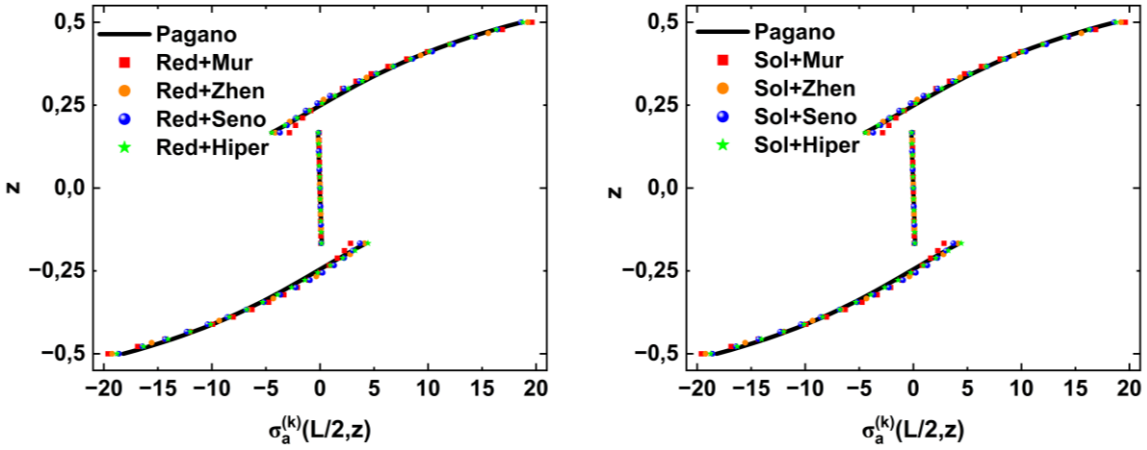


Figura 12 – Tensão normal transversal $\sigma_{za}^{(k)}(L/2,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

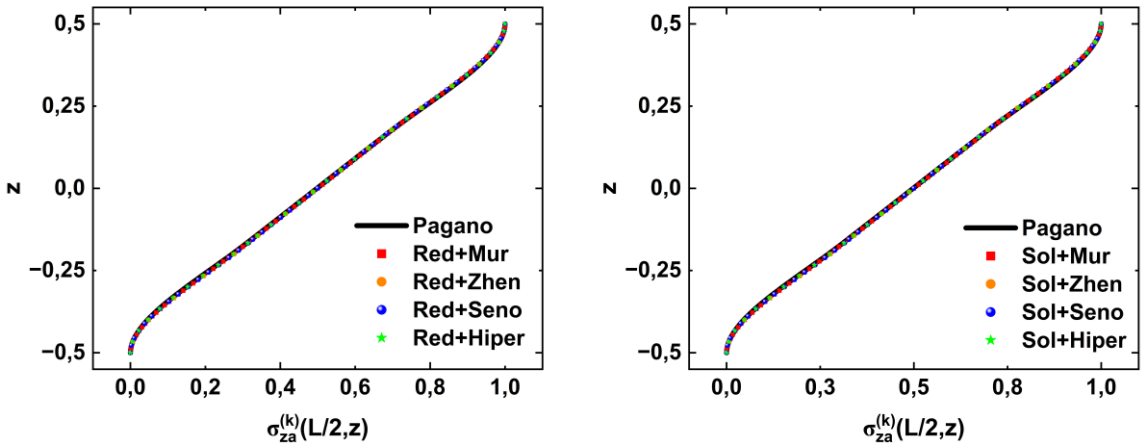


Figura 13 – Tensão normal transversal $\sigma_{za}^{(k)}(L/2,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

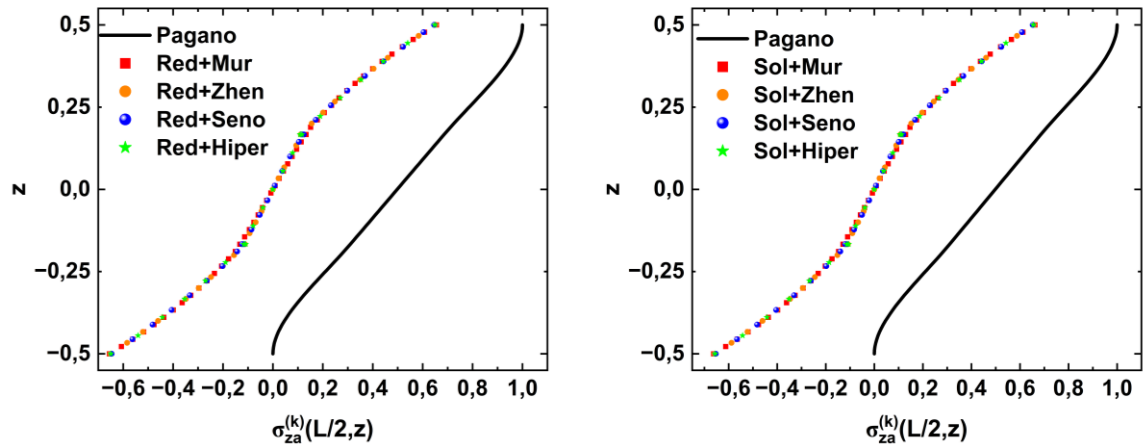


Figura 14 – Tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

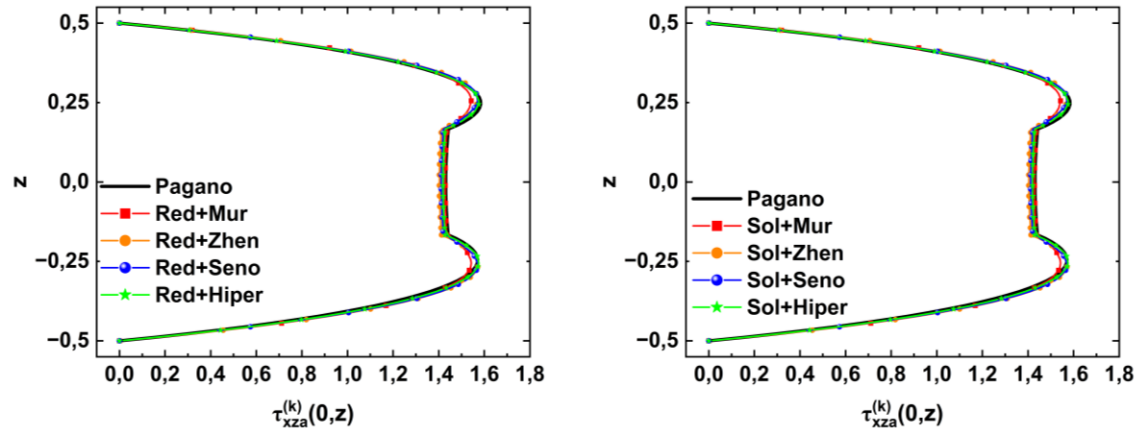
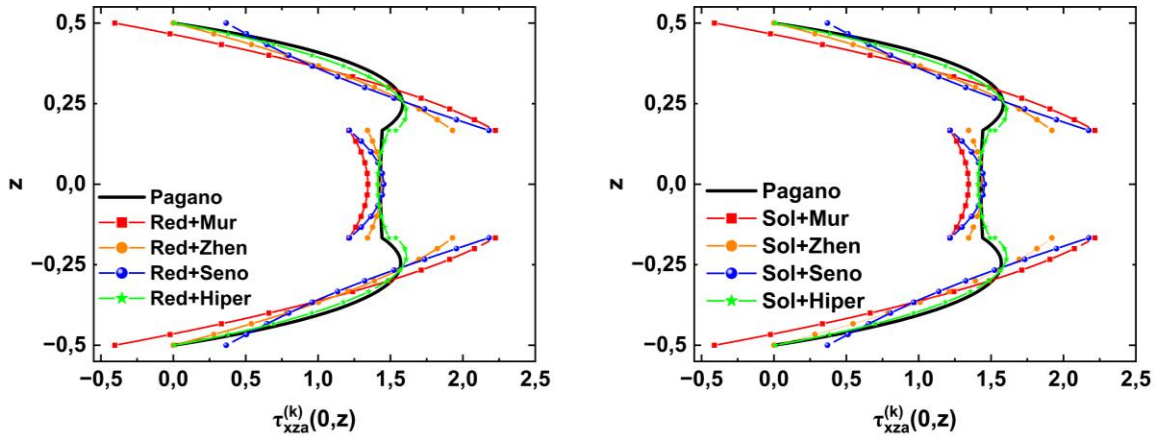


Figura 15 – Tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.



Os gráficos acima mostram os campos de resposta para um valor fixo na direção longitudinal da viga e variável na direção transversal. Observa-se que a combinação das funções Sol+Hiper apresenta uma melhor concordância da tensão de cisalhamento calculados pelo modelo constitutivo frente às outras funções ZZ, porém ainda apresenta descontinuidade no gráfico e erros superiores quando calculado pela equação de equilíbrio. Nas Figuras 16-22 estão as variações dos campos de respostas ao longo de toda viga, calculadas por meio das funções Sol+Hiper, que obtiveram o melhor desempenho, e pelos resultados de referência de Pagano (à direita de cada figura).

Figura 16 – Variação do deslocamento axial, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

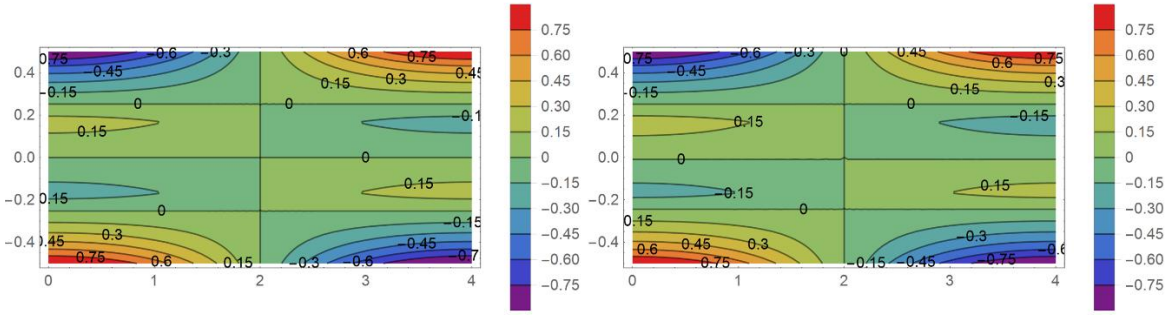


Figura 17 – Variação do deslocamento transversal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

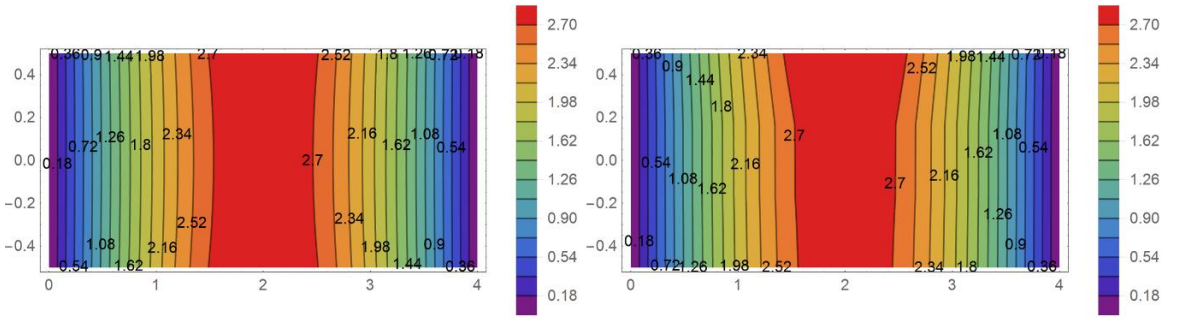


Figura 18 - Variação da tensão normal longitudinal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

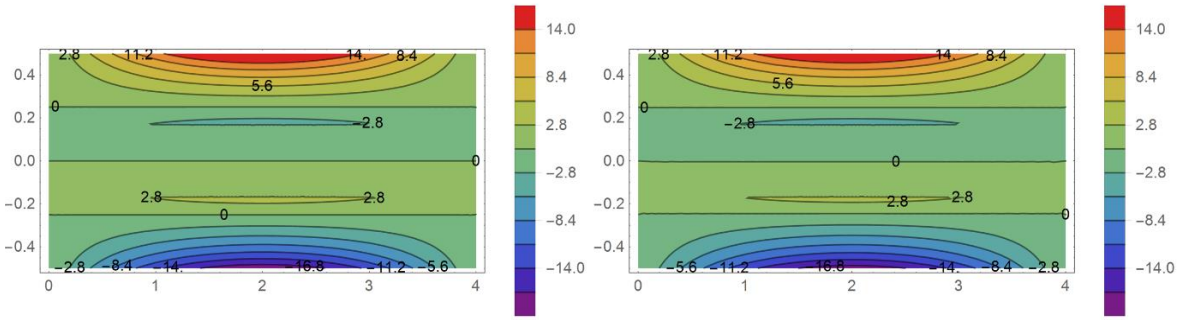


Figura 19 – Variação da tensão normal transversal por equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

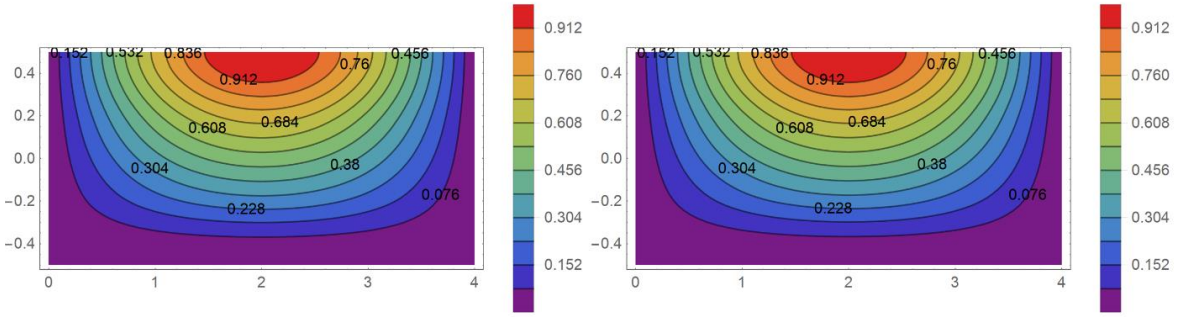


Figura 20 – Variação da tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

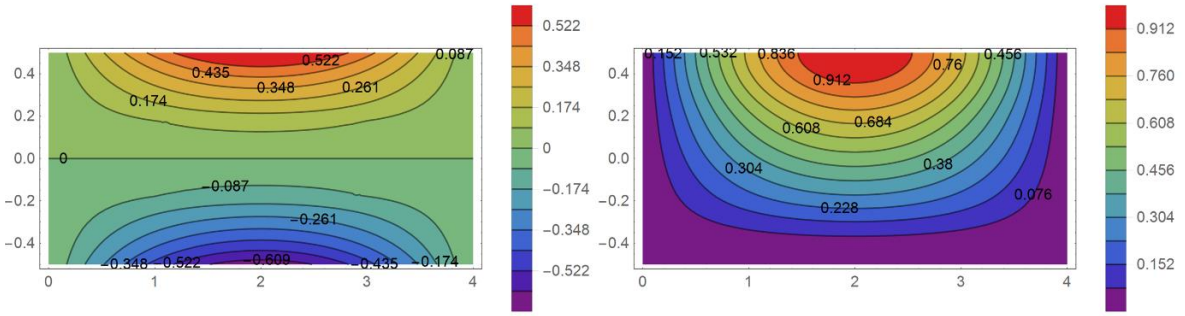


Figura 21 – Variação da tensão de cisalhamento por equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

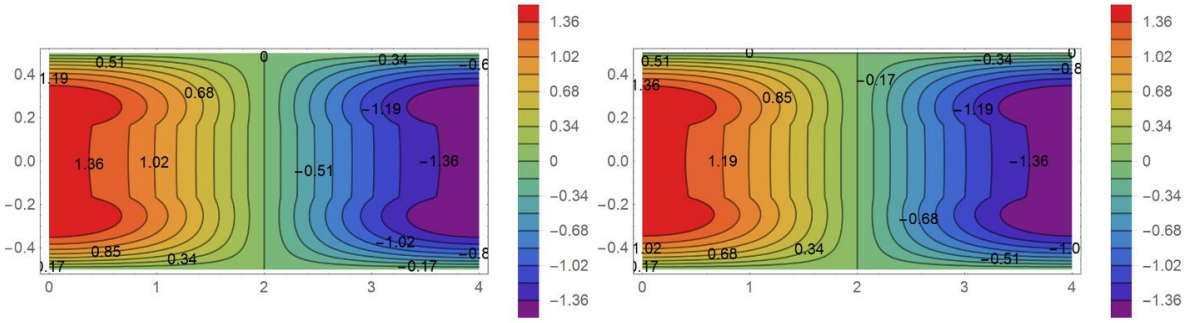
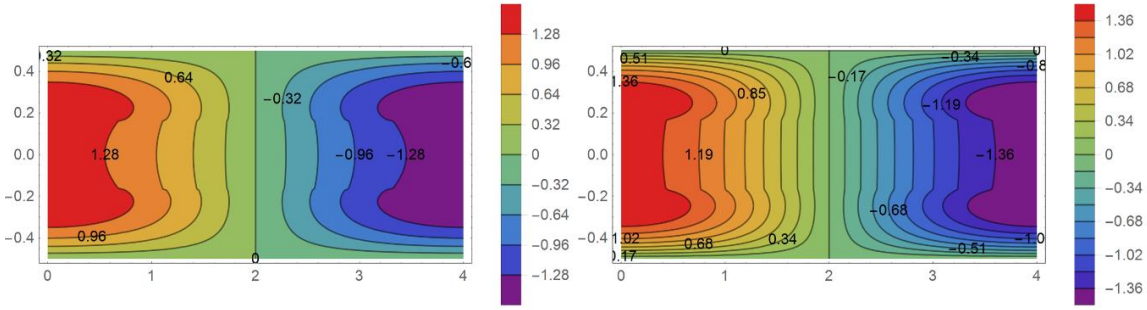


Figura 22 – Variação da tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda modelo Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).



As imagens mostradas nas Figuras 16 a 22 proporcionam uma compreensão mais aprofundada do comportamento dos campos de tensões e deslocamentos, permitindo uma comparação abrangente da distribuição ao longo de toda a viga. Os resultados apontam uma boa precisão da combinação Sol+Hiper ao longo da viga, e não em localizações isoladas, quando contrastados com os de referência, com exceção da tensão transversal calculada pelo modelo constitutivo. A distribuição do cisalhamento pelo modelo constitutivo apresenta uma tendência de concordância ao formato de referência, mas com valores não precisos.

Na sequência é realizada a análise da configuração assimétrica 2-1-1. Os gráficos abaixo mostram a variação ao longo da direção transversal para ponto fixo na direção longitudinal. As Figuras 23 a 29 mostram a comparação dos diversos modelos propostos e o de Pagano (1969) para o deslocamento axial, deslocamento transversal, tensão normal longitudinal, tensão normal transversal pela equação de equilíbrio, tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, tensão de cisalhamento pela equação de equilíbrio e tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, respectivamente. E as Figuras 30-36 mostram a variação dos campos de respostas ao longo de toda viga, sendo à esquerda os resultados obtidos pelo modelo Sol+Hiper e à direita o de referência de Pagano (1969).

Figura 23 – Deslocamento axial $U_a^{(k)}(L,z)$, configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

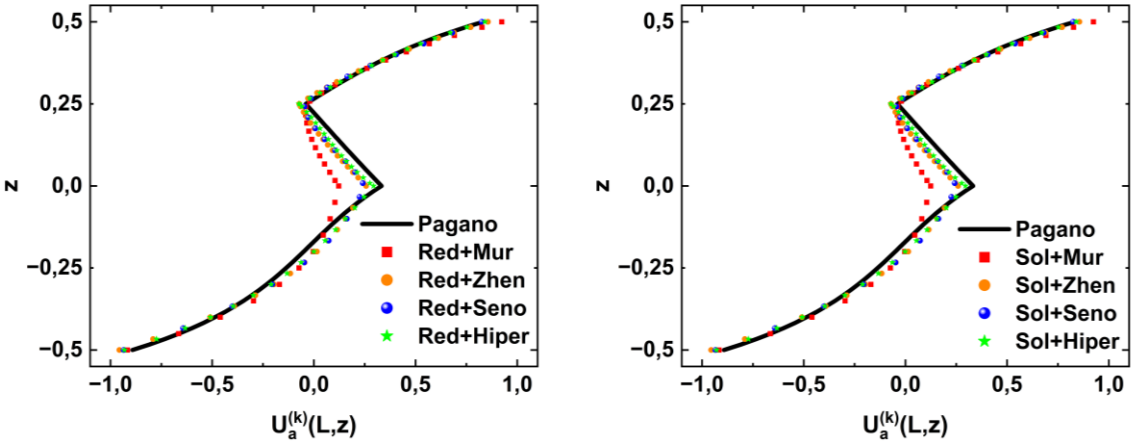


Figura 24 – Deslocamento transversal $W_{xa}^{(k)}(x,0)$, configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

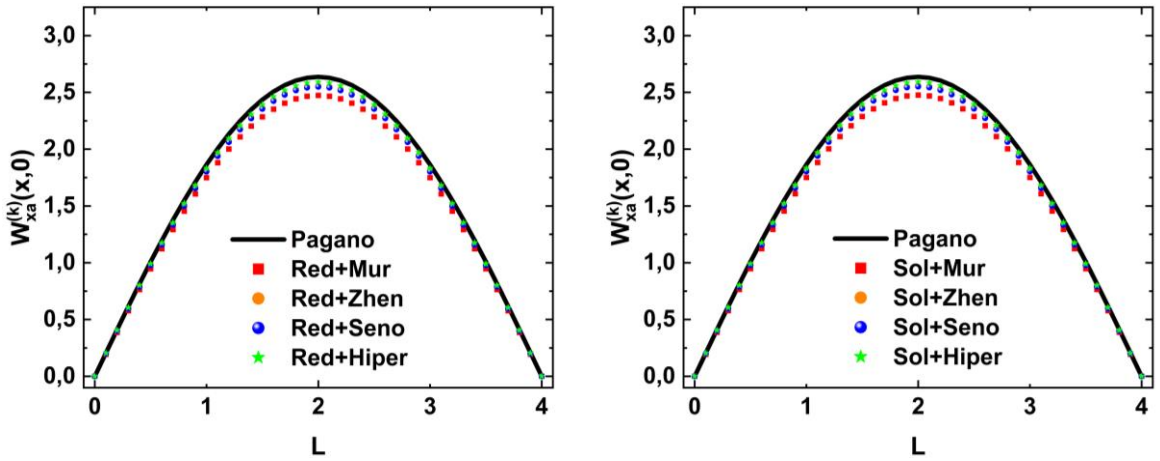


Figura 25 – Tensão normal longitudinal $\sigma_{xa}^{(k)}\ (L/2, z)$, configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

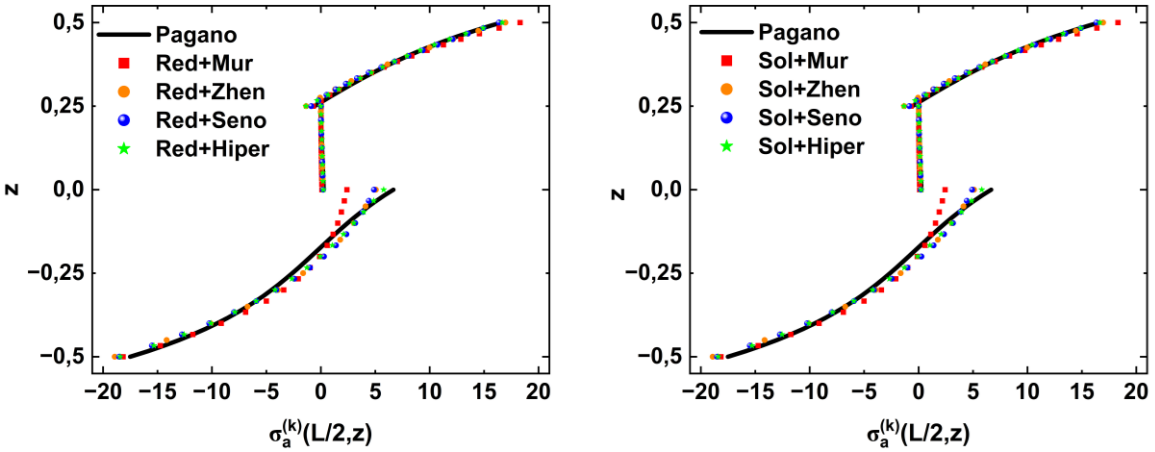


Figura 26 – Tensão normal transversal $\sigma_{za}^{(k)}\ (L/2, z)$ (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

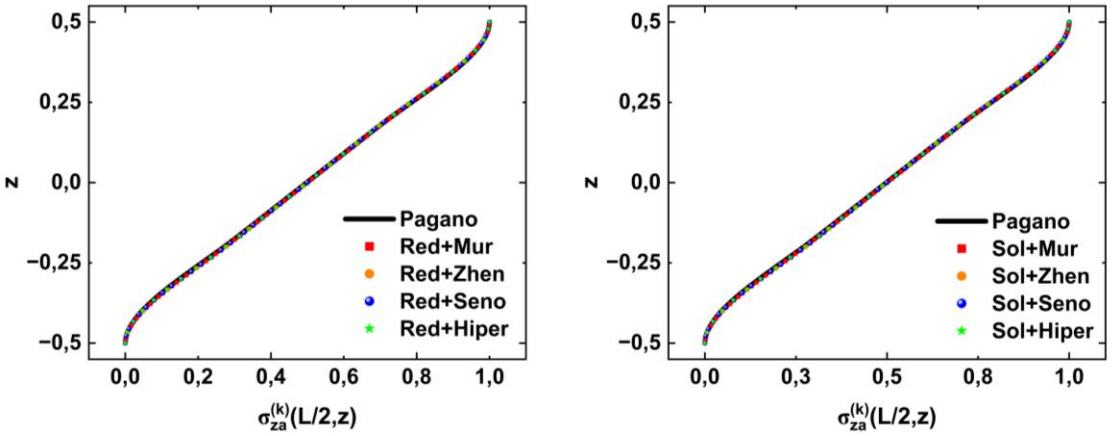


Figura 27 – Tensão normal transversal $\sigma_{za}^{(k)}\ (L/2, z)$ (modelo constitutivo), configuração 2-1-1 À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

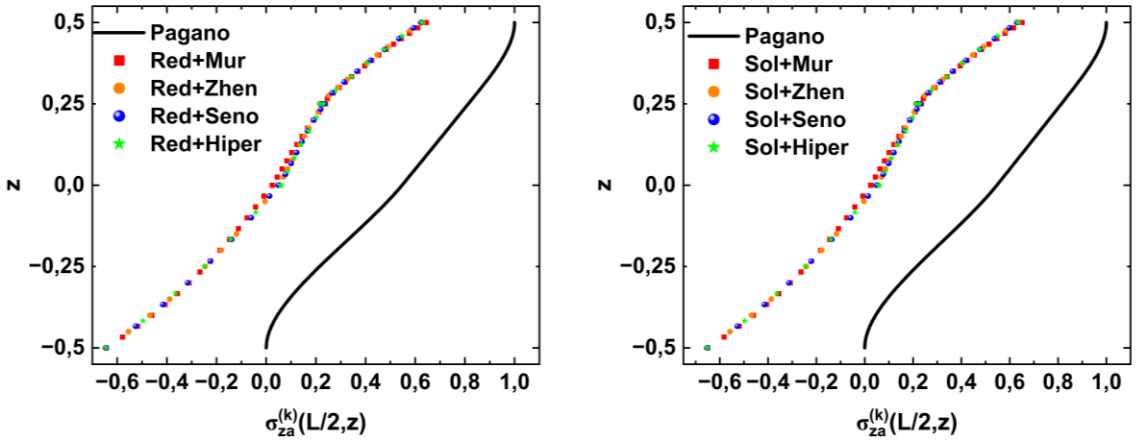


Figura 28 – Tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

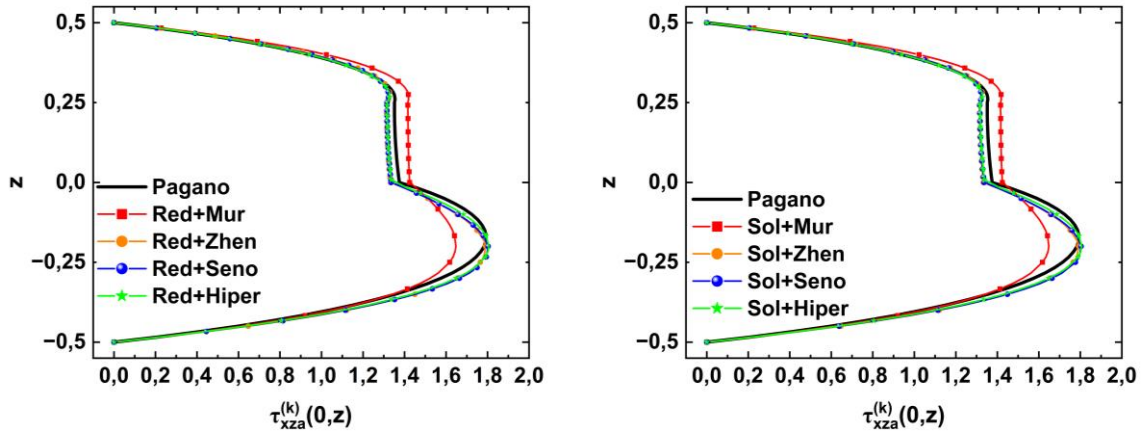


Figura 29 – Tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}\ (0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 2-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

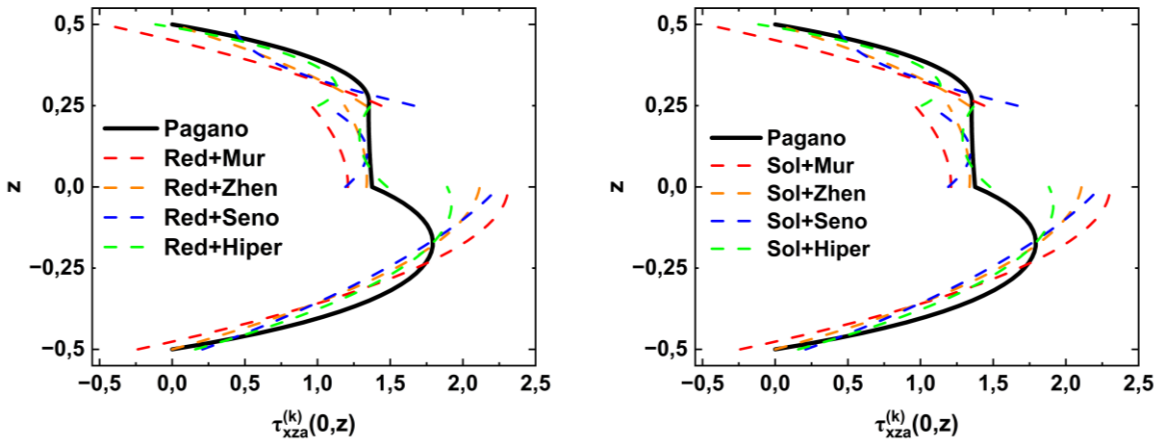


Figura 30 – Comparação da distribuição do deslocamento axial, configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

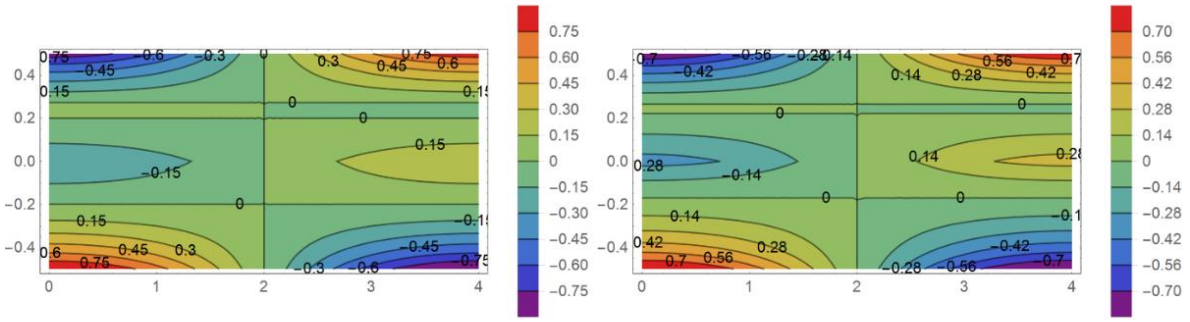


Figura 31 – Comparação da distribuição do deslocamento transversal, configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

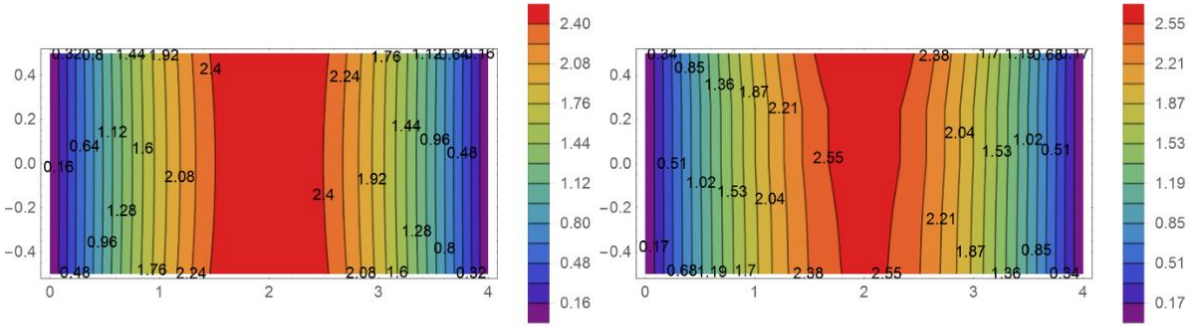


Figura 32 – Comparação da distribuição de tensão normal longitudinal, configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

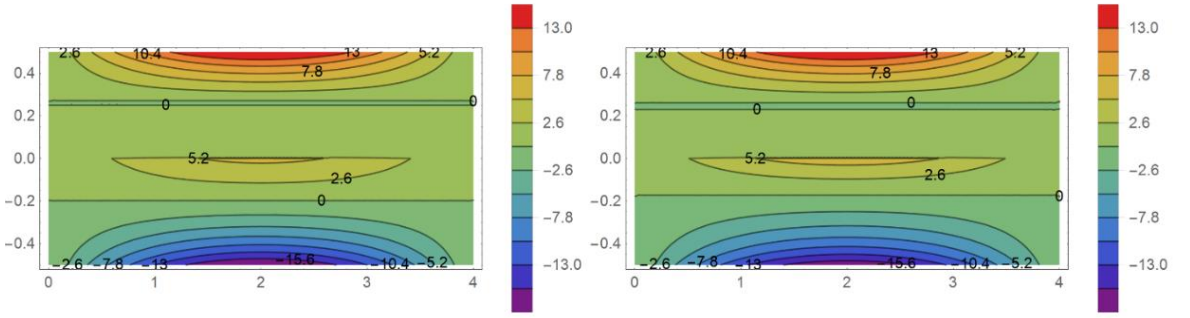


Figura 33 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

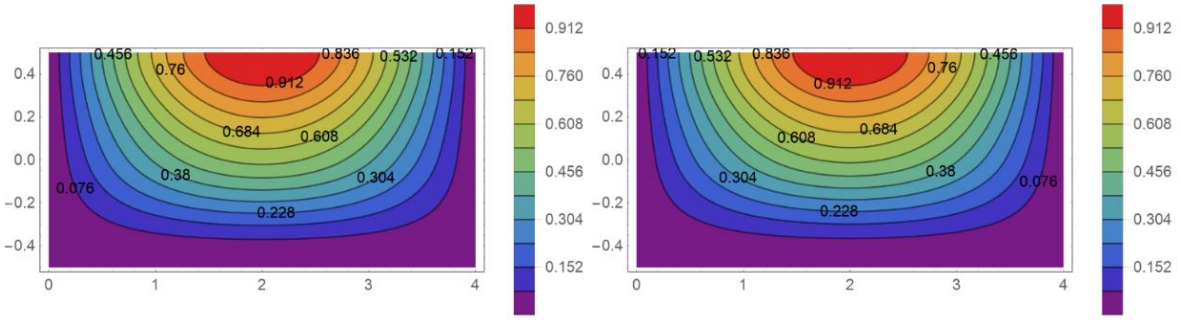


Figura 34 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal (modelo constitutivo), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

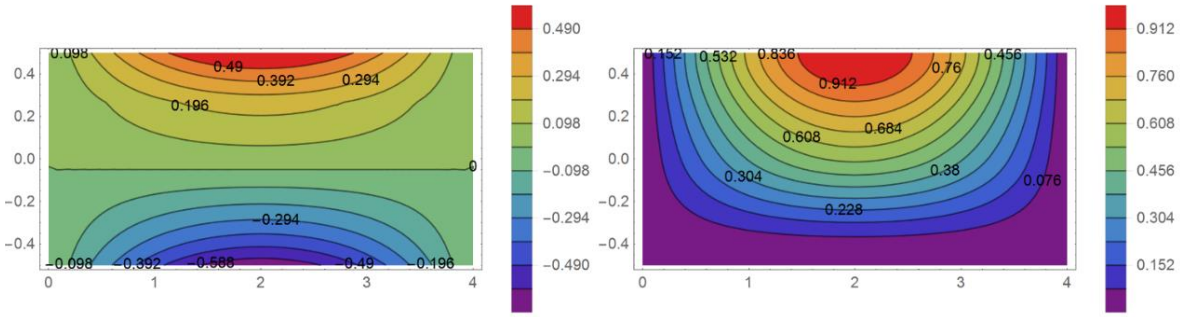


Figura 35 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento (equação de equilíbrio), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).

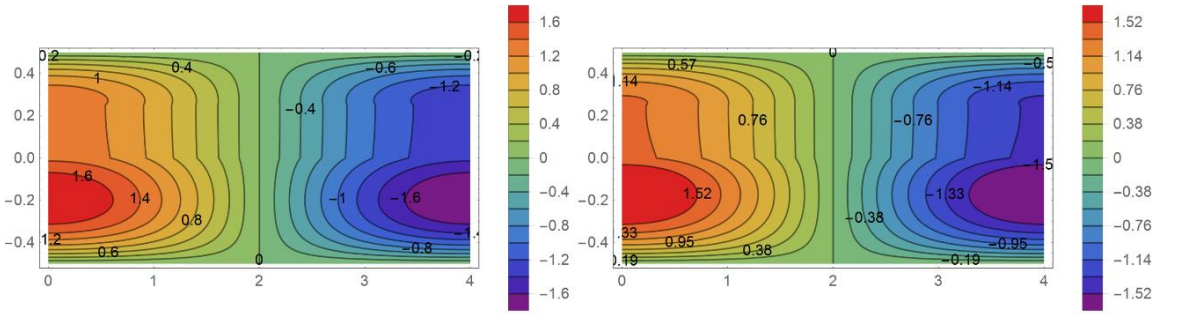
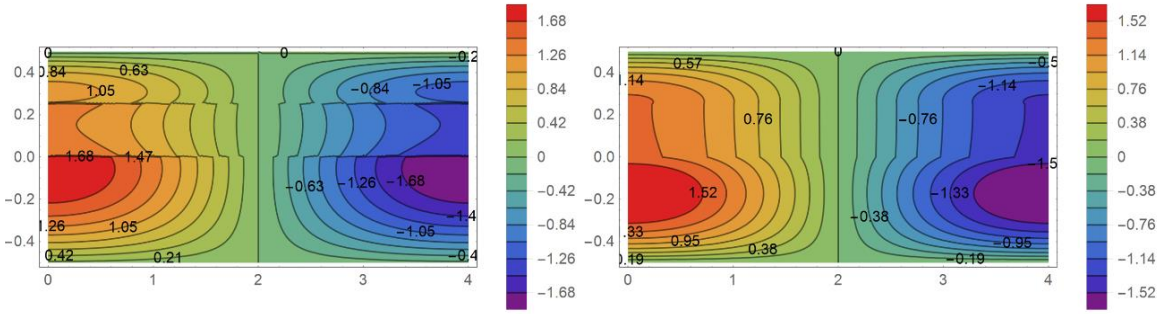


Figura 36 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento (modelo constitutivo), configuração 2-1-1. À esquerda a combinação Sol+Hiper e à direita Pagano (1969).



Nota-se que a formulação utilizando altura de camadas não-regulares mantém um padrão semelhante ao das camadas regulares, embora apresente erros maiores quando comparados as camadas regulares. Essa discrepância é particularmente evidente no deslocamento axial. No campo de cisalhamento calculado pelo modelo constitutivo para camadas não-regulares, a função hiperbólica-exponencial teve dificuldade em acompanhar o formato do gráfico no campo de cisalhamento, como era esperado.

Vários trabalhos que fazem uso da teoria zig-zag só conseguem apresentar bons resultados quando calculados pelas equações de equilíbrio. Para contornar esse problema, foi utilizada o segundo modelo com imposição de continuidade no cisalhamento.

7.4 Análise com continuidade do cisalhamento – Modelo 2

A mesma estrutura das análises anteriores, ver Figura 8, é realizada para comparar os diversos combinações com funções zig-zag, com continuidade da tensão de cisalhamento na região entre camadas, e o modelo proposto por Han *et al.* (2018) em que não são incorporadas funções zig-zag adicionais. As análises foram feitas para laminados regulares (1-1-1) e não-regulares (2-1-1).

Nas Tabelas 8-14 apresentam os valores para a métrica WAPE de diversos combinações propostas e o de Han *et al.* (2018), este último aqui denotado por Sol + Sem ZZ, por utilizar a função de forma de cisalhamento proposta por Soldatos, o que torna uma modificação ao trabalho de Han *et al.* (2018). Nestas tabelas são apresentados os resultados para o deslocamento axial, deslocamento transversal, tensão normal longitudinal, tensão normal transversal pela equação de equilíbrio, tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, tensão cisalhante pela equação de equilíbrio e tensão cisalhante pelo modelo constitutivo, respectivamente.

Tabela 8 – WAPE para deslocamento axial, $U_a^{(k)}(L,z)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	11,54%	11,75%	19,63%	22,86%	23,81%	11,49%	11,86%	19,59%	22,47%	23,55%
2-1-1	17,38%	24,43%	24,04%	22,62%	24,25%	17,38%	24,20%	23,91%	22,25%	24,06%

Tabela 9 – WAPE para deslocamento transversal, $W_{xa}^{(k)}(x,0)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	1,55%	1,79%	3,07%	3,25%	3,91%	1,53%	1,82%	3,02%	3,13%	3,81%
2-1-1	3,51%	5,26%	5,23%	4,35%	5,46%	3,49%	5,20%	5,16%	4,23%	5,36%

Tabela 10 – WAPE para tensão normal longitudinal, $\sigma_{xa}^{(k)}(L/2,z)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol +Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	8,09%	10,57%	13,85%	13,66%	18,18%	8,08%	10,84%	13,86%	13,35%	18,01%
2-1-1	16,26%	22,55%	21,73%	13,95%	21,03%	16,25%	22,34%	21,61%	13,75%	20,93%

Tabela 11 – WAPE para tensão normal transversal (equação de equilíbrio), $\sigma_{za}^{(k)}(L/2,z)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol+ Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	0,55%	0,91%	1,25%	1,19%	3,75%	0,55%	0,93%	1,25%	1,16%	1,58%
2-1-1	3,10%	3,94%	3,87%	2,20%	5,21%	3,10%	3,90%	3,85%	2,18%	3,45%

Tabela 12 – WAPE para tensão normal transversal (modelo constitutivo), $\sigma_{za}^{(k)}(L/2,z)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol+ Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2-1-1	100%	83,83%	83,97%	84,66%	84,30%	83,69%	83,94%	84,05%	84,72%	84,36%

Tabela 13 – WAPE para tensão de cisalhamento (equação de equilíbrio), $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol+ Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	2,30%	3,36%	4,53%	4,52%	6,02%	2,30%	3,46%	4,54%	4,42%	5,96%
2-1-1	8,76%	11,70%	11,39%	6,88%	10,64%	8,76%	11,58%	11,33%	6,80%	10,60%

Tabela 14 – WAPE para tensão de cisalhamento (modelo constitutivo), $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$.

Configuração	Red +Mur	Red +Zhen	Red +Seno	Red +Hiper	Red +Sem ZZ	Sol +Mur	Sol +Zhen	Sol+ Seno	Sol +Hiper	Sol +Sem ZZ
1-1-1	13,82%	14,82%	20,79%	20,99%	21,50%	13,73%	14,97%	20,62%	20,59%	21,22%
2-1-1	14,69%	17,85%	19,12%	20,16%	20,71%	14,60%	17,86%	18,95%	19,78%	20,44%

Os resultados mostrados nas Tabelas 8-14 indicam que a cinemática de Soldatos proporciona erros ligeiramente menores que a de Reddy. Observa-se que o tipo de função zig-zag influencia mais nos resultados do que no tipo de cinemática aqui analisada. Nota-se nas tabelas acima que para a configuração regular (1-1-1) a combinação Sol+Mur apresentaram os menores erros na norma WAPE. Na configuração não-regular (2-1-1), a combinação Sol+Mur apresenta menores erros para os deslocamentos e a combinação Sol+Hiper para os campos de tensão, tendo-se assim, as duas melhores combinações. Chama a atenção que o modelo adaptado proposto por Han *et al.* (2018) apresentaram os maiores erros em todas as análises estáticas. Destaca aqui que no trabalho de Han *et al.* (2018) foi proposto o modelo com continuidade do campo de tensão de cisalhamento,

mas não foi verificada na análise estática, limitando-se a análise de vibração livre acoplada a efeitos térmicos.

Nas Figuras 37 a 43 são apresentados os campos de deslocamento axial ($x = L$), o deslocamento transversal ($z = 0$), a tensão normal longitudinal ($x = L/2$), a tensão normal transversal obtida pela equação de equilíbrio ($x = L/2$), a tensão normal transversal obtida pelo modelo constitutivo ($x = L/2$), a tensão de cisalhamento obtida pela equação de equilíbrio ($x = 0$) e a tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo ($x = 0$), respectivamente.

Figura 37 – Deslocamento axial $U_a^{(k)}(L, z)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

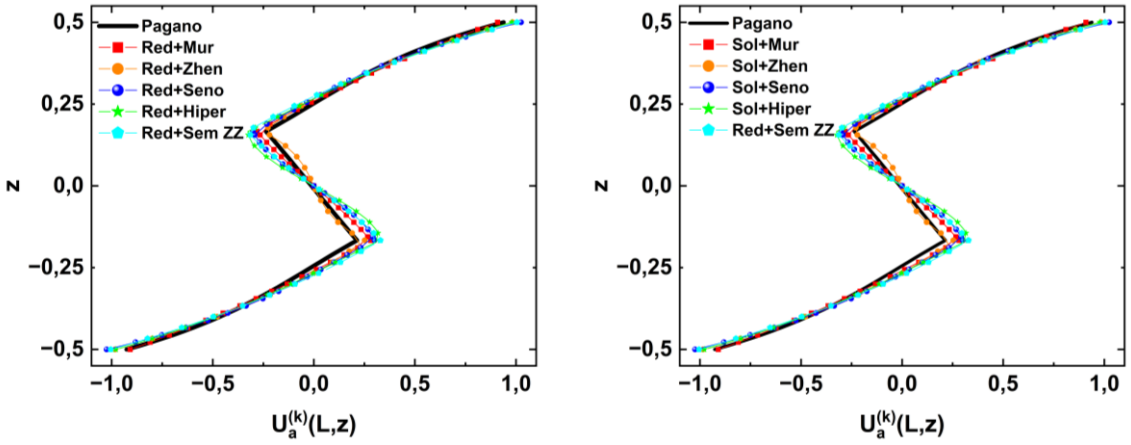


Figura 38 – Deslocamento transversal $W_{xa}^{(k)}(x, 0)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

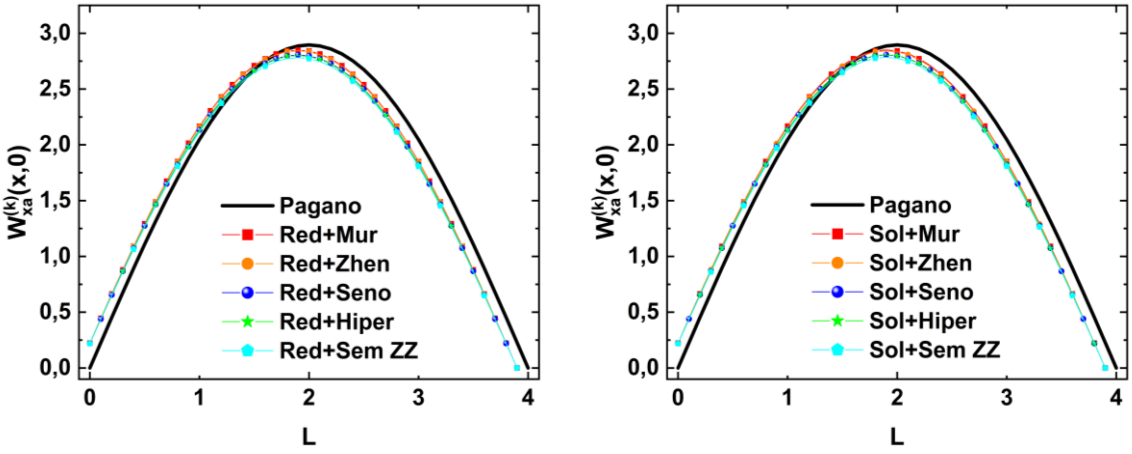


Figura 39 – Tensão normal longitudinal $\sigma_{xa}^{(k)}(L/2,z)$, configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

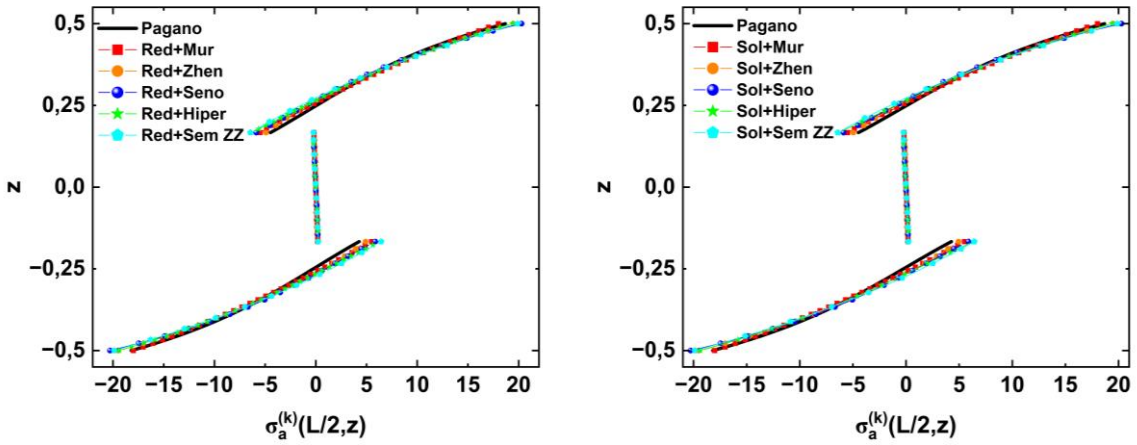


Figura 40 – Tensão normal transversal $\sigma_{za}^{(k)}(L/2,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

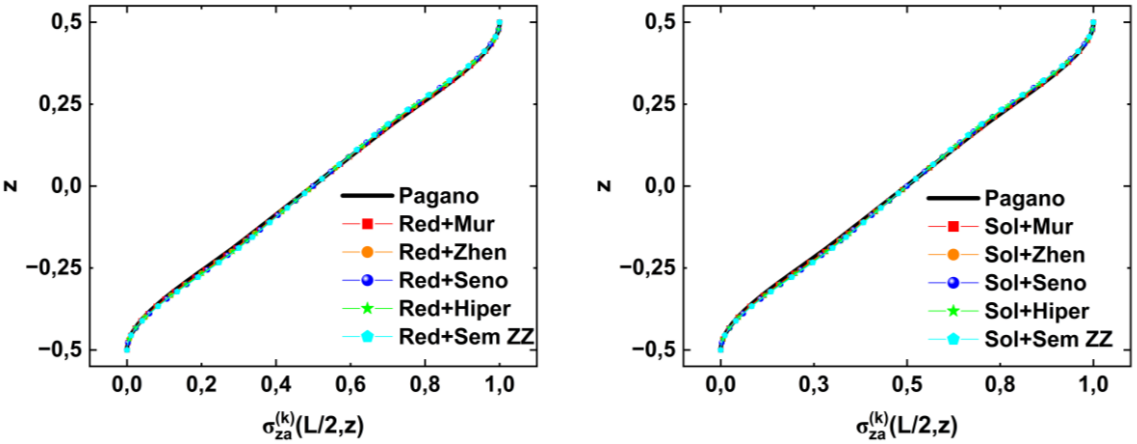


Figura 41 – Tensão normal transversal $\sigma_{za}^{(k)}(L/2,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

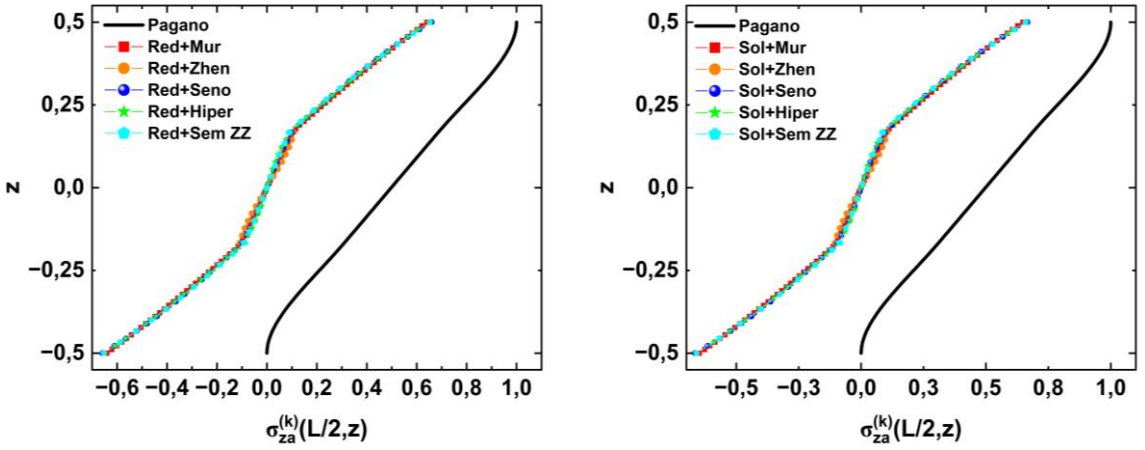


Figura 42 – Tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$ (equação de equilíbrio), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.

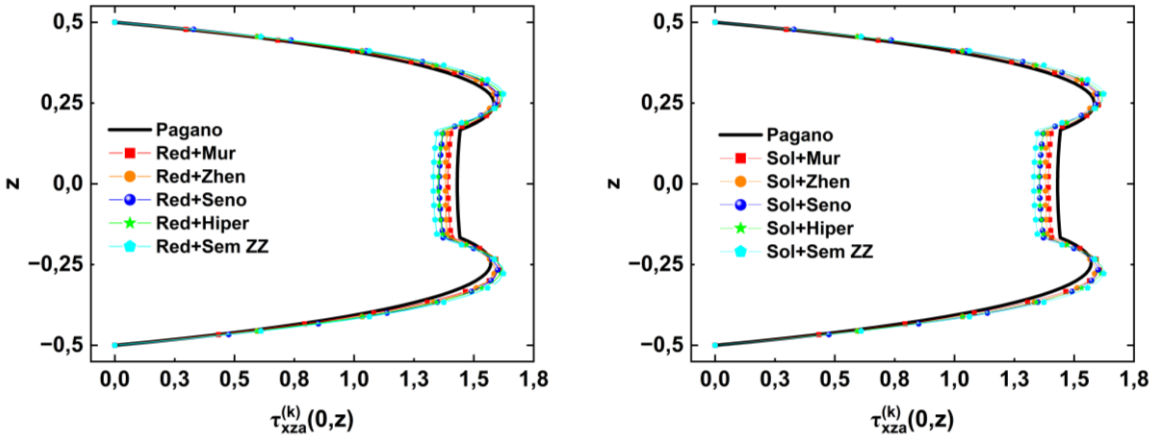
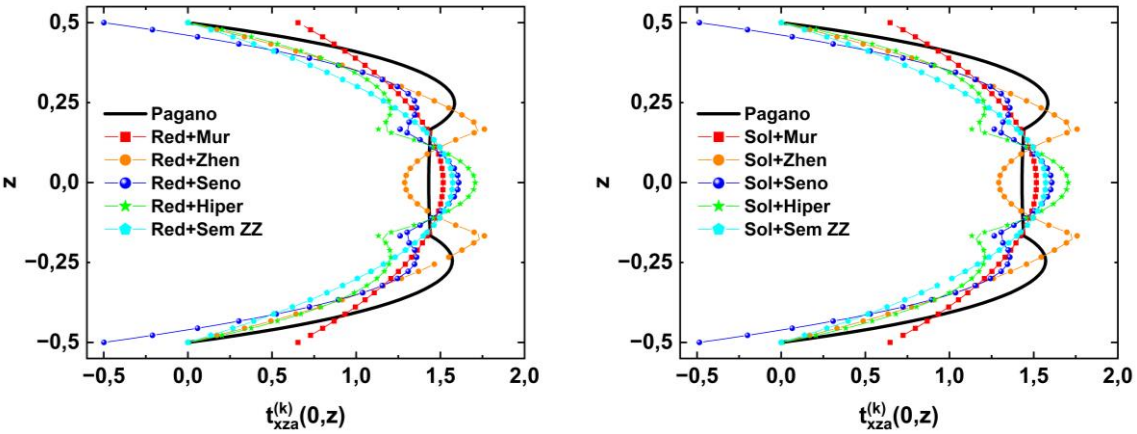


Figura 43 – Tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}(0,z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1. À esquerda função de Reddy e à direita função de Soldatos.



Observa-se pelas Figuras 37 a 43 e Tabelas 15-21 que os campos de tensão normal transversal e cisalhamento calculados pelo modelo constitutivo ainda apresentam erros significativos quando comparado com Pagano (1969). No entanto, avanços na melhoria da descrição do campo de tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo foram alcançados, tal como, continuidade nas interfaces entre lâminas e redução do erro abaixo de 14% para a combinação Sol+Mur, na configuração 1-1-1, e abaixo de 20% na configuração 2-1-1, onde antes tinham erros de 100% em ambas as configurações (1-1-1 e 2-1-1) para o modelo descontínuo sem consideração do efeito quase 3D. Destaca-se aqui que o modelo de campos descontínuo de cisalhamento pela equação constitutiva e com consideração de efeito quase 3D apresentaram erros abaixo de 4%, usando a combinação Sol+Hiper (1-1-1), e 10% na combinação Sol+Hiper (2-1-1). Mostrando que o modelo com continuidade do campo de tensão cisalhante calculados pela equação constitutiva proposto por Han *et al.* (2018) apresentam desempenho inferior aos modelos

sem continuidade do referido campo. Ficando apenas a vantagem do modelo de Han *et al.* (2018) ter a continuidade do campo de tensão cisalhante para análise estática de flexão em pequenos deslocamentos e rotações.

Nas Figuras 44 a 50 são apresentados os campos de deslocamentos e de tensão para a combinação cinemática Sol+Mur (à esquerda) e de Pagano (à direita), ambos para laminado de camada regular (1-1-1). É observado concordância em toda viga, e não apenas em determinada seção, entre os resultados da combinação Sol+Mur e Pagano (1969) para o modelo com continuidade dos campos de tensão cisalhante.

Figura 44 – Comparação da distribuição do deslocamento axial, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).

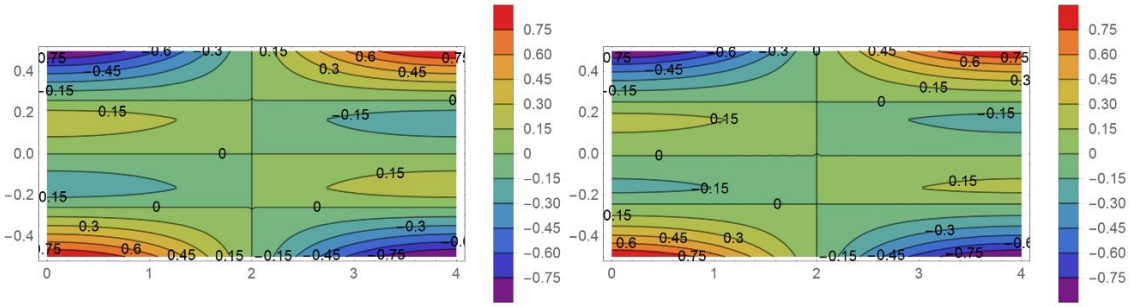


Figura 45 – Comparação da distribuição do deslocamento transversal, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).

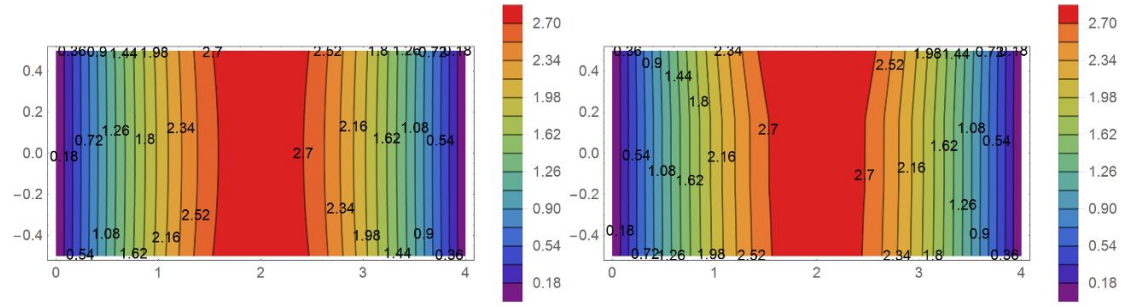


Figura 46 – Comparação da distribuição da tensão normal longitudinal, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).

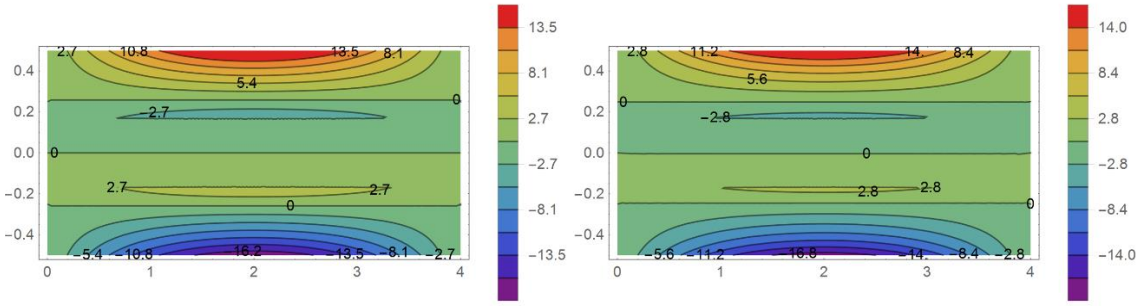


Figura 47 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal pela equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).

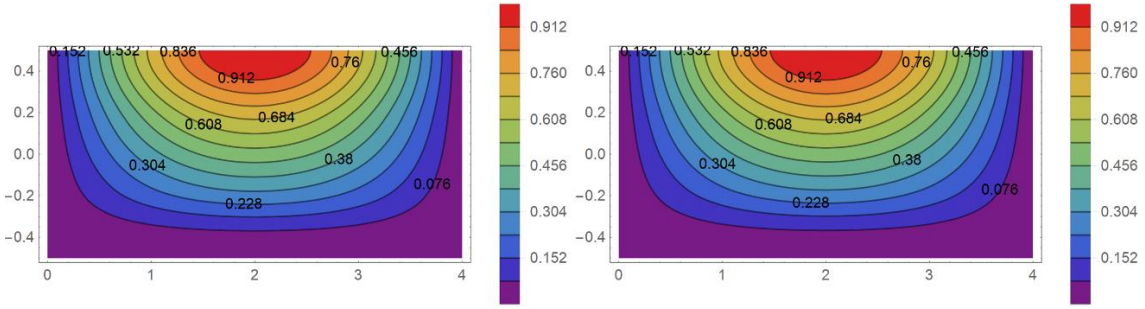


Figura 48 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).

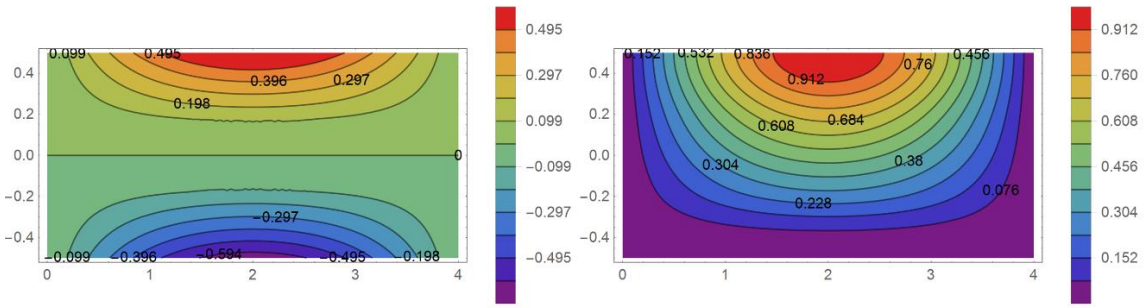


Figura 49 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento pela equação de equilíbrio, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).

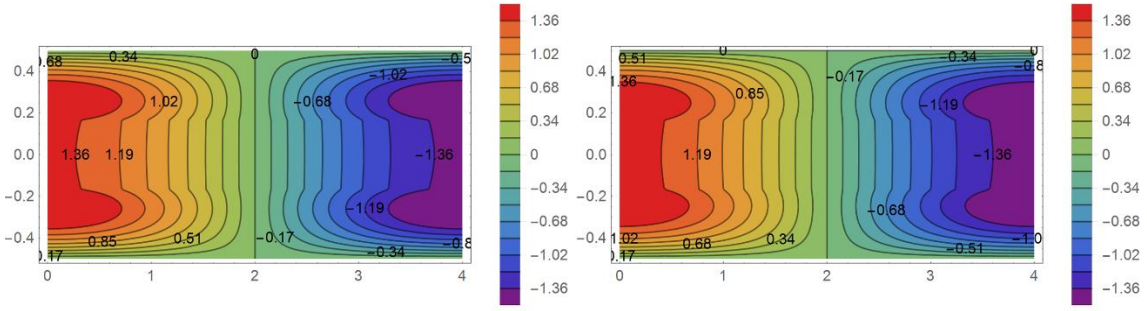
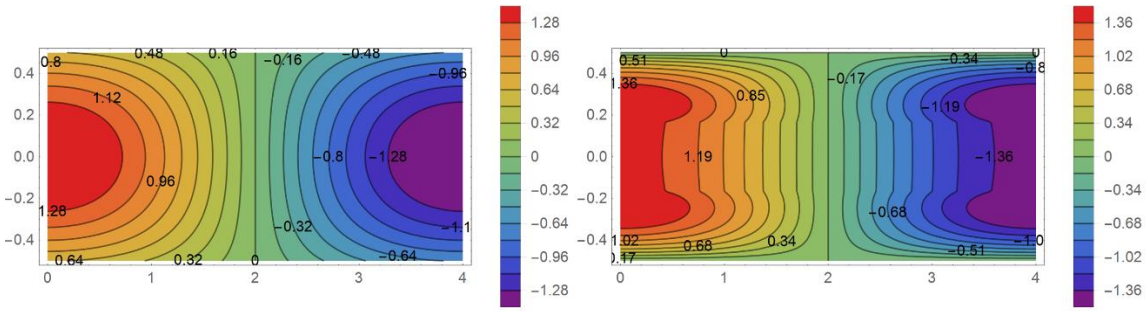


Figura 50 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, configuração 1-1-1. À esquerda a combinação Sol+Mur e à direita Pagano (1969).



7.5 Análise com continuidade do cisalhamento – Modelo 3

O terceiro modelo foi analisado utilizando o trabalho de Pagano (1969) como referência, para o tipo de vinculação simplesmente apoiada, assim como os modelos anteriores. Abaixo a Tabela 15 apresenta os valores para a métrica WAPE.

Tabela 15 – WAPE para deslocamento e tensões para configuração 1-1-1.

$U_a(L,z)$	$W_a(x,0)$	$\sigma_{xa}(L/2,z)$	$\tau_{xza}(0,z)$
0,25%	1,54%	1,42%	0,99%

Observa-se que o modelo proposto por Chen e Huang (2023), e aqui adaptado para a laminados fibrosos ortotrópicos, produziu resultados melhores em todos os campos de resposta, garantindo uma maior precisão. Destaca aqui que o trabalho do Chen e Huang (2023) não utiliza a teoria quase-3D e devido isso não há como comparar o campo de tensão normal transversal. O campo de tensão de cisalhamento foi calculado somente pelo

modelo constitutivo, mostrando grandes avanços na melhoria da descrição do campo de tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo em relação aos modelos propostos anteriormente.

A seguir nas Figuras 51 a 56 são apresentados os campos de deslocamento axial ($x = L$), o deslocamento transversal ($z = 0$), a tensão normal longitudinal ($x = L/2$) e a tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo ($x = 0$).

Figura 51 – À esquerda o deslocamento axial $U_a^{(k)}(L, z)$ e à direita deslocamento transversal $W_{xa}^{(k)}(x, 0)$, configuração 1-1-1.

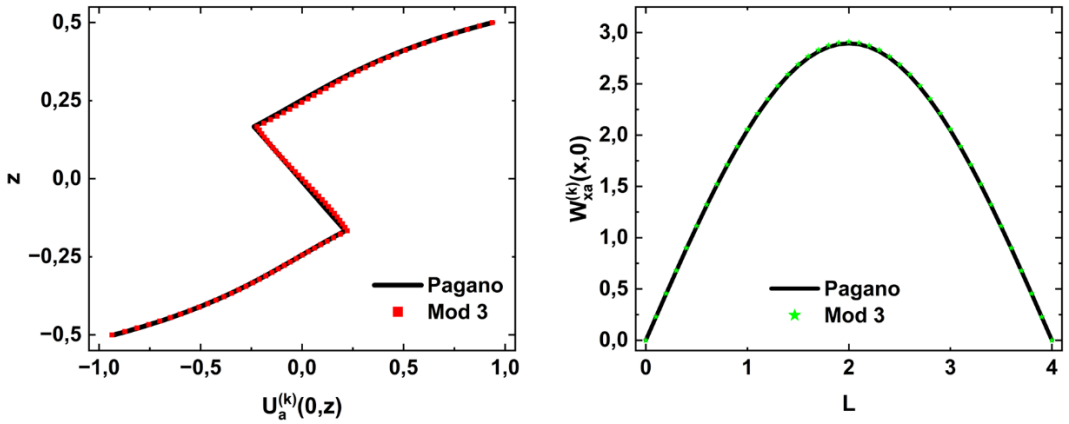
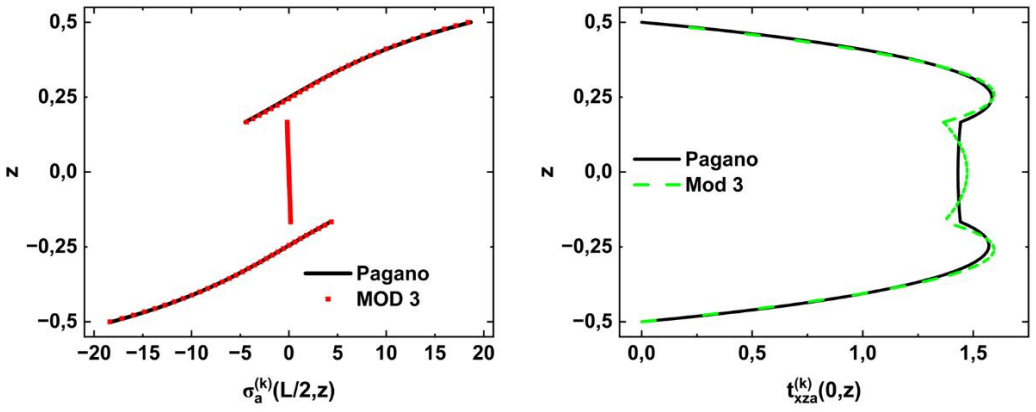


Figura 52 – À esquerda a tensão normal longitudinal $\sigma_{xa}^{(k)}(L/2, z)$ e à direita a tensão de cisalhamento $\tau_{xza}^{(k)}(0, z)$ (modelo constitutivo), configuração 1-1-1.



Nota-se que todos os campos de resposta do modelo 3 apresentaram boa concordância com o modelo de Pagano. Há uma grande melhoria na descrição do campo de tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, onde há uma continuidade da tensão.

Nas Figuras 53 a 56 são apresentados os campos de deslocamentos e de tensão para o modelo 3 (à esquerda) e de Pagano (à direita), ambos para laminado de camada regular (1-1-1).

Figura 53 – Comparação da distribuição do deslocamento axial, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969).

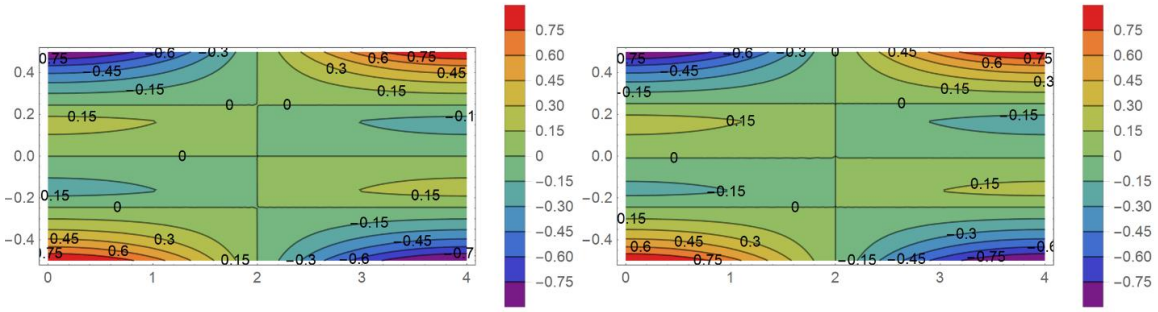


Figura 54 – Comparação da distribuição da tensão normal transversal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969).

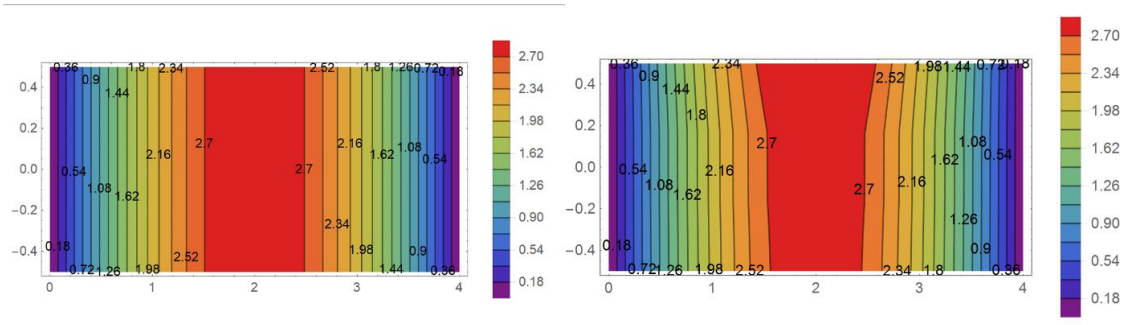


Figura 55 – Comparação da distribuição da tensão normal longitudinal, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969).

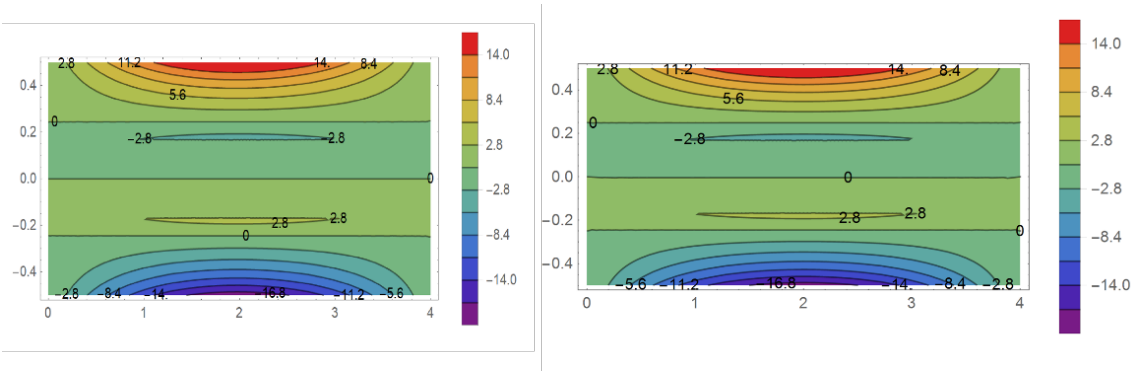
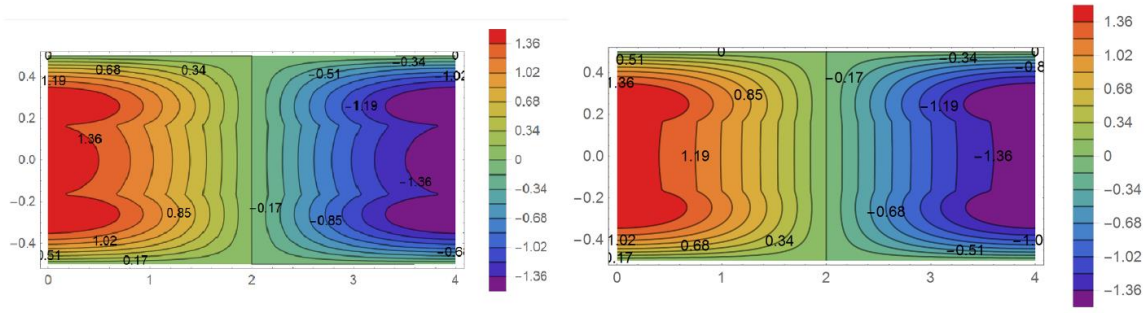


Figura 56 – Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento, configuração 1-1-1. À esquerda modelo 3 e à direita Pagano (1969).

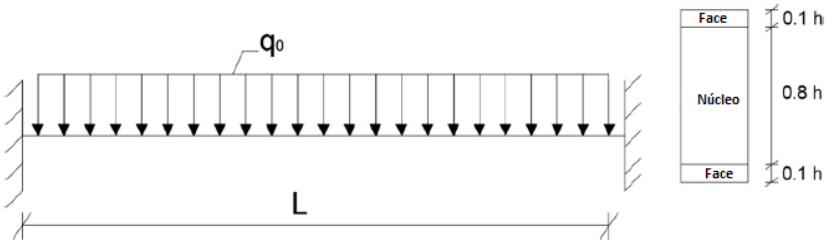


Observa-se concordância das tensões e deslocamentos em toda viga, e não apenas em determinada seção, entre os resultados do modelo 3 e Pagano (1969) para o modelo com continuidade dos campos de tensão cisalhante.

7.6 Análise com outros tipos de vinculações para os modelos 1 e 3.

Neste exemplo é analisada uma viga sanduíche submetida a um carregamento uniformemente distribuído q_0, conforme Figura 57. O Modelo 3 é avaliado neste teste severo, com objetivo de analisar as limitações, a importância da função zig-zag e da continuidade dos campos de tensão cisalhante.

Figura 57 - Viga sanduíche de três camadas em balanço submetida a um carregamento uniformemente distribuído



É considerado o exemplo de Vidal e Polit (2009) que utilizaram uma viga sanduíche bi-engastada de três camadas, tendo époxi-grafite nas faces e um núcleo macio de espessuras 0,1h/0,8h/0,1h e com relação comprimento/espessura de $S = 2{,}5$, $S = 5$, $S = 10$. As seguintes propriedades dos materiais foram consideradas:

Para as faces: $E_{11} = 131{,}1$ GPa, $E_{22} = E_{33} = 6{,}9$ GPa, $G_{12} = 3{,}588$ GPa, $G_{13} = 3{,}088$ GPa, $G_{23} = 2{,}3322$ GPa, $\upsilon_{12} = \upsilon_{13} = 0{,}32$, $\upsilon_{23} = 0{,}49$.

Para o núcleo: $E_{11} = 0,2208$ MPa , $E_{22} = 0,2001$ MPa , $E_{33} = 2760$ MPa , $G_{12} = 16,56$ MPa , $G_{13} = 545,1$ MPa , $G_{23} = 455,4$ MPa , $\upsilon_{12} = 0,99$, $\upsilon_{13} = 0,00003$, $\upsilon_{23} = 0,00003$.

O E corresponde ao módulo de Young, G ao módulo de elasticidade transversal e υ é o coeficiente de Poisson. Os subscritos $1,2,3$ correspondem as direções x, y, z respectivamente.

As grandezas são normalizadas como segue:

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{h}}, \quad \overline{z} = \frac{z}{h}, \quad \overline{w}(x,z) = \frac{100\mathrm{Y}_0 \mathrm{w(x,z)}}{h\mathrm{S}^4\mathrm{q}_0}, \quad \overline{u}(x,z) = \frac{\mathrm{Y}_0 \mathrm{u(x,z)}}{bh\mathrm{q}_0}, \quad \overline{\sigma}_{xx}(x,z) = \frac{\sigma(\mathrm{x,z})}{\mathrm{S}^2\mathrm{q}_0},$$

$$\overline{\tau}_{xz}(x,z) = \frac{\tau_{xz}(\mathrm{x,z})}{\mathrm{Sq}_0},$$

onde $\mathrm{Y}_0 = 6,9 \quad GPa$.

Para comparação, foi utilizado os resultados de um código comercial, ANSYS, com uma malha muito refinada contendo 3800 graus de liberdades (Vidal; Polit, 2009). Adicionalmente, foram utlizados os resultados obtidos para os modelos Sinzz, Sin-c e Sin, proposto por Vidal e Polit (2011), e o modelo MEF-Isogeometrico proposto por Hasim (2018). Destaca-se que neste exemplo a tensão cisalhante transversal é calculada em $\overline{x} = S/8$, uma vez que a solução MEF 2D não é válida nos engastes (Vidal e Polit, 2009; Hasim, 2018). Na tabela abaixo são apresentados os resultados dos modelos propostos por Vidal e Polit (2011), a saber: modelo Sin, que não considera o efeito zig-zag, o modelo Sinzz, que incorpora função zig-zag e o modelo Sin-c que considera tanto o efeito zig-zag quanto a continuidade da tensão cisalhante transversal. Ainda na Tabela 16 são apresentados os resultados do modelo MEF-IG (Hasim, 2018) que incorpora funções isogeométricas ao modelo da teoria zig-zag refinada e como técnica de resolução é empregado o método dos elementos finitos. Os valores entre parênteses, presentes na Tabela 16, representam o erro relativo dado em porcentagem. A Tabela 16 mostra que o modelo proposto neste trabalho, denominado de Modelo 3, está concordante com os valores de referência (ANSYS), além de apresentar precisão similar aos de Hasim (2018) e com melhor precisão melhor frente aos resultados dos modelos senoidais (Vidal; Polit, 2011).

Tabela 16 - Comparação entre os modelos Sinzz, Sin-c, Sin, MEF-IG e o modelo proposto (modelo 3).

S		Sinzz*	Sin-c*	Sin*	MEF-IG **	Modelo 3	ANSYS ***
2,5	$\bar{\tau}_{xz}\left(\frac{S}{8},0\right)$	0,3261	0,3089	0,3306	0,3291	0,3203	0,3263
		(0,06)	(5,33)	(1,32)	(0,86)	(1,84)	
	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{S}{2},-\frac{h}{2}\right)$	2,0642	2,2184	1,9416	2,0091	2,1410	2,1000
		(1,70)	(5,64)	(7,54)	(4,33)	(1,95)	
	$\bar{w}\left(\frac{S}{2},0\right)$	19,1094	17,9749	17,8530	20,5466	20,2058	20,5340
		(6,94)	(12,46)	(13,06)	(0,06)	(1,60)	
	$\bar{u}\left(\frac{1}{10},\frac{h}{2}\right)$	-----	-----	-----	-----	-0,2439	-----
5	$\bar{\tau}_{xz}\left(\frac{S}{8},0\right)$	0,3795	0,3844	0,3912	0,3956	0,3763	0,3880
		(2,19)	(0,93)	(0,82)	(1,96)	(3,01)	
	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{S}{2},-\frac{h}{2}\right)$	0,9295	0,9459	0,8717	0,9163	0,9713	0,9398
		(1,10)	(0,65)	(7,25)	(2,50)	(3,35)	
	$\bar{w}\left(\frac{S}{2},0\right)$	5,5730	5,6569	5,3975	5,9876	5,9007	5,9550
		(6,41)	(5,17)	(9,36)	(0,55)	(0,91)	
	$\bar{u}\left(\frac{1}{10},\frac{h}{2}\right)$	-----	-----	-----	-----	-0,6254	-----
10	$\bar{\tau}_{xz}\left(\frac{S}{8},0\right)$	0,3965	0,3973	0,3976	0,4258	0,4118	0,4125
		(3,88)	(3,68)	(3,61)	(3,22)	(0,17)	
	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{S}{2},-\frac{h}{2}\right)$	0,6175	0,6215	0,6029	0,6125	0,6721	0,6193
		(0,29)	(0,36)	(2,64)	(1,10)	(8,52)	
	$\bar{w}\left(\frac{S}{2},0\right)$	1,7153	1,7810	1,6868	1,8268	1,8029	1,8358
		(6,56)	(2,98)	(8,12)	(0,49)	(1,79)	
	$\bar{u}\left(\frac{1}{10},\frac{h}{2}\right)$	-----	-----	-----	-----	-1,5387	-----

* Modelos propostos por Vidal e Polit (2011); ** Modelo proposto por Hasim (2018); *** Modelagem realizada por Vidal e Polit (2009).

8 CONCLUSÕES

A análise para os modelos sem continuidade revela que a combinação Sol+Hiper proporciona resultados mais precisos em todos os campos de resposta, com uma menor taxa de erro em comparação com outras combinações, sugerindo que a função zig-zag hiperbólica-exponencial, quando combinada com a função de forma de Soldatos, oferece uma representação mais precisa do comportamento da viga, resultando em deslocamentos e tensões mais próximos dos valores de referência. O modelo em que o efeito quase-3D é desconsiderado, apresentou erros um pouco menores na maioria dos campos de resposta quando comparado com a modelo em que esse efeito é incluído, entretanto é crucial notar que esse modelo não foi capaz de satisfazer os campos de tensões normal transversal e cisalhante, quando calculados pelo modelo constitutivo. Além disso, para os campos de deslocamentos com alturas das camadas simétricas, a formulação com o efeito quase-3D apresentou menores erros quando utilizado a função zig-zag hiperbólica – exponencial. Isso indica que ao utilizar o efeito quase-3D o modelo se torna mais preciso em relação aos campos de deslocamentos e de tensões quando calculadas pelo modelo constitutivo.

Na análise para os modelos com continuidade de cisalhamento, a cinemática de Soldatos continuou apresentando menores erros. As funções zig-zag tiveram uma maior influência nos resultados, sendo que a função de Murakami (1986) apresentou resultados mais próximos do modelo de referência. Também foi feito a análise feita pelo modelo de Han *et al.* (2018), sem a função zig-zag, que apresentou resultados inferiores. Esse contraste evidencia a importância da função zig-zag na melhoria da precisão. Houve uma melhoria na descrição do campo de tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, em que foi obtido a continuidade nas interfaces entre lâminas e redução dos erros para a combinação Sol+Mur. Porém o modelo não se mostrou promissor quando comparados ao modelos dos campos descontínuos.

O terceiro modelo, analisado com referência ao trabalho de Pagano (1969), demonstrou excelente concordância com os resultados de referência, especialmente em relação aos deslocamentos e tensões ao longo de toda a viga. O modelo adaptado de Chen e Huang (2023) se destacou, produzindo resultados mais precisos em todos os campos de resposta, o que evidencia a eficácia desse modelo, mesmo sem a consideração do efeito quase-3D. A melhoria significativa na descrição do campo de tensão de cisalhamento pelo modelo constitutivo, dispensou a necessidade de calcular por equações de equilíbrio, garantindo a continuidade das tensões nas interfaces das lâminas. Além disso, a análise

de modelo 3 com a utilização do método Ritz-Lobatto proporcionou a análise de diferentes tipos de vinculações e mostrou que, a incorporação da função zig-zag e a continuidade do campo de tensão cisalhante, apresentou resultados comparáveis aos obtidos por métodos avançados como o MEF-Isogeométrico de Hasim (2018) e superiores aos modelos sinusoidais de Vidal e Polit (2011). Esses achados confirmam a importância da função zig-zag e da imposição da continuidade dos campos de tensão cisalhante para a obtenção de previsões precisas em estruturas laminadas compostas.

REFERÊNCIAS

AITHARAJU, V.; AVERILL, R. C. C0 zig-zag finite element for analysis of laminated composite beams. **Journal of Engineering Mechanics**. v. 125, p. 323-330, 1999.

AKAVCI, S. S. Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. **Mechanics of Composite Materials**, v. 46, n. 2, p. 215-226, 2010.

ASCIONE, A.; GHERLONE, M. Nonlinear static response analysis of sandwich beams using the refined zigzag theory. **Journal of Sandwich Structures & Materials**, v. 22, n. 7, p. 2250-2286, 2020.

ASTM INTERNATIONAL. **ASTM D3878-95: standard terminology for composite materials.** West Conshohocken, 1995.

AVERILL, R. C. Static and dynamic-response of moderately thick laminated beams with damage. **Composites Engineering**, v. 4, n. 4, p. 381-395, 1994.

CANALES, F.; MANTARI, J. Boundary discontinuous Fourier analysis of thick beams with clamped and simply supported edges via CUF. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 30, p. 1708-1718, 2017.

CARRERA, E.; GIUNTA, G. Refined beam theories based on a unified formulation. **International Journal of Applied Mechanics**, v. 2, n. 1, p. 117-143, 2010.

CHANDA, A.; SAHOO, R. Analytical modeling of laminated composite plates integrated with piezoelectric layer using Trigonometric Zigzag theory. **Journal of Composite Materials**, v. 54, n. 29, p. 4691-4708, 2020.

CHEN, C.; HUANG, B. A novel higher-order refined zigzag theory for static bending analysis in sandwich composite beam. **Applied Mathematical Modelling**, v. 119, p. 586-604, 2023.

CHEN, C. D.; HUANG, B. F. A novel higher-order refined zigzag theory for static bending analysis in sandwich composite beam. **Applied Mathematical Modelling**, v. 119, p. 586-604, 2023.

CHO, M. H.; PARMERTER, R. R. An efficient higher-order plate theory for laminated composites. **Composite Structures**, v. 20, n. 2, p. 113-123, 1992.

DI SCIUVA, M.; GHERLONE, M.; IURLARO, L.; TESSLER, A. A class of higher-order C0 composite and sandwich beam elements based on the Refined Zigzag Theory. **Composite Structures**, v. 132, p. 784-803, 2015.

DI SCIUVA, M. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: An evaluation of a new displacement model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 105, n. 3, p. 425-442, 1986.

DI SCIUVA, M. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, n. 3, p. 589-596, 1987.

GHERLONE, M. On the use of zigzag functions in equivalent single layer theories for laminated composite and sandwich beams: A comparative study and some observations on external weak layers. **Journal of Applied Mechanics**, v. 80, p. 061004, 2013.

GHERLONE, M.; TESSLER, A.; DI SCIUVA, M. C0 beam elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayered composite and sandwich laminates. **Composite Structures**, v. 93, n. 11, p. 2882-2894, 2011.

GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 21, n. 9, p. 775-813, 2002.

HAN, B.; HUI, W. W.; ZHANG, Q. C.; ZHAO, Z. Y.; JIN F.; ZHANG, Q.; LU T. J.; LU B. H. A refined quasi-3D zigzag beam theory for free vibration and stability analysis of multilayered composite beams subjected to thermomechanical loading. **Composite Structures**, v. 204, p. 620-633, 2018.

HASIM, K. Isogeometric static analysis of laminated composite plane beams by using refined zigzag theory. **Composite Structures**, v. 186, p. 365-374, 2018.

IURLARO, L.; GHERLONE, M.; DI SCIUVA, M.; TESSLER, A. Assessment of the refined zigzag theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. **Composite Structures**, v. 106, p. 777-792, 2013.

KARAMA, M.; AFAQ, K. S.; MISTOU, S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity**. International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 6, p. 1525-1546, 2003.

KRUSZEWSKI, E. T. Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam. **National Advisory Committee for Aeronautics**, p. 15, 1949.

LEE, C. Y.; LIU, D. An interlaminar stress continuity theory for laminated composite analysis. **Computers & Structures**, v. 42, n. 1, p. 69-78, 1992.

LEITE, L. F. P. **Novas funções zig-zag de alta ordem para análise de vigas compósitas laminadas**. 2022. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2022.

LEITE, L. F. P.; DA ROCHA, F. C. A novel higher-order zigzag function applied to refined unified beam theory for the analysis of composite laminated materials. **Periodica Polytechnica-Civil Engineering**, v. 67, n. 3, p. 867-874, 2023.

MANTARI, J. L.; OKTEM, A. S.; SOARES, C. G. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, n. 1, p. 43-53, 2012.

MORENO-GARCÍA, P.; DOS SANTOS, J. V. A.; LOPES, H. A review and study on Ritz method admissible functions with emphasis on buckling and free vibration of isotropic and anisotropic beams and plates. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 25, n. 3, p. 785-815, 2018.

MURAKAMI, H. Laminated composite plate theory with improved inplane responses. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME**, v. 53, n. 3, p. 661-666, 1986.

MURAKAMI, H.; MAEWAL, A.; HEGEMIER, G. A. A mixture theory with a director for linear elastodynamics of periodically laminated media. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, n. 2, p. 155-173, 1981.

NGUYEN, N. D.; NGUYEN, T. K.; VO, T. P.; THAI, H. T. Ritz-based analytical solutions for bending, buckling and vibration behavior of laminated composite beams. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 11, 2018.

NGUYEN, T.; NGUYEN, B. A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams. **Journal of Sandwich Structures & Materials**, v. 17, p. 613-631, 2015.

PAGANO, N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. **Journal of Composite Materials**, v. 3, p. 398, 1969.

PATHAN, F.; SINGH, S.; NATARAJAN, S.; WATTS, G. An analytical solution for the static bending of smart laminated composite and functionally graded plates with and without porosity. **Archive of Applied Mechanics**, v. 92, n. 3, p. 903-931, 2022.

PRADO LEITE, L. F.; DA ROCHA, F. C. A novel exponential zigzag function coupled high-order beam theory for advanced laminated composite analysis. **Journal of Applied and Computational Mechanics**, v. 10, n. 2, p. 330-341, 2024.

REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates**. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME**, v. 51, n. 4, p. 745-752, 1984.

REDDY, J. N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 25, p. 677-686, 1990.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press LLC, 2004.

SAYYAD, A.; GHUGAL, Y. Effect of transverse shear and transverse normal strain on bending analysis of cross-ply laminated beams. **International Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 7, p. 85-118, 2011.

SAYYAD, A. A. G. Y. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory. **Mechanics of Advanced Composite Structures**, v. 2, p. 45-53, 2015.

SAYYAD, A. S.; GHUGAL, Y. M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: a critical review of literature. **Composite Structures**, v. 171, p. 486-504, 2017.

SOLDATOS, K. P. A transverse-shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. **Acta Mechanica**, v. 94, n. 3-4, p. 195-220, 1992.

TESSLER, A.; DI SCIUVA, M.; GHERLONE, M. A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams. **Journal of Composite Materials**, v. 43, n. 9, p. 1051-1081, 2009.

TESSLER, A.; DI SCIUVA, M.; GHERLONE, M. **Refinement of Timoshenko Beam Theory for Composite and Sandwich Beams Using Zigzag Kinematics**. Hampton: NASA, 2007. (Technical Publication, NASA/TP-2007-215086)

THAI, H. T.; VO, T. P. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 62, n. 1, p. 57-66, 2012.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**, v. 41, p. 744, 1921.

TOLEDANO, A.; MURAKAMI, H. A composite plate theory for arbitrary laminate configurations. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME**, v. 54, n. 1, p. 181-189, 1987.

VIDAL, P.; POLIT, O. A refined sine-based finite element with transverse normal deformation for the analysis of laminated beams under thermomechanical loads. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 4, p. 1127-1155, 2009.

VIDAL, P.; POLIT, O. A sine finite element using a zig-zag function for the analysis of laminated composite beams. **Composites Part B-Engineering**, v. 42, n. 6, p. 1671-1682, 2011.

VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L. **The behavior of structures composed of composite materials**. 2. ed. Springer Dordrecht, 2008. XIV, 442 p.

ZHAO, D. L.; WU, Z.; REN, X. H. New sinusoidal higher-order theory including the zigzag function for multilayered composite beams. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 32, n. 3, 2019.

ZHEN, W.; YANG, C.; ZHANG, H. G.; ZHENG, X. T. Stability of laminated composite and sandwich beams by a Reddy-type higher-order zig-zag theory. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 26, n. 19, p. 1622-1635, 2018.

APÊNDICE A – COEFICIENTES ELÁSTICOS TRANSFORMADOS

Segundo Reddy (2004), um material é chamado de ortotrópico quando existe simetria do material em três planos ortogonais, o número de coeficientes elásticos é reduzido utilizando argumentos semelhantes aos dados para um único plano de simetria material. Fazendo as simplificações para esse tipo de material, a relação entre tensão e deformação é descrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Em que os coeficientes elásticos são dados por:

$$C_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1-\nu_{13}+\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{33} = \frac{1-\nu_{12}+\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{44} = G_{23}$$

$$C_{55} = G_{13}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \tag{2}$$

E_i, ν_{ij} e G_i são grandezas que correspondem ao módulo de Young, coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade transversal, respectivamente. Porém, nem sempre o eixo de cada lâmina vai coincidir com a orientação da estrutura em materiais compósitos. Para

capturar a rotação das fibras em cada lâmina, é necessária uma transformação dos eixos de referência seguindo a seguinte regra:

$$\left[\overline{C}\right]=[T][C]\left[T^{-1}\right] \tag{3}$$

Onde $[C]$ é a matriz de rigidez do material, $[\bar{C}]$ é a matriz de rigidez transformada e $[T]$ corresponde à matriz de transformação dada por:

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{4}$$

Em que θ corresponde ao ângulo de rotação das fibras. Assim os coeficientes de rigidez transformados são dados por:

$$\begin{gathered} \overline{C}_{11}=C_{11}\cos^4\theta+2\left(C_{12}+2C_{66}\right)\cos^2\theta sin^2\theta+C_{22}sin^4\theta \\ \overline{C}_{12}=C_{12}\cos^4\theta+\left(C_{11}+C_{22}-4C_{66}\right)\cos^2\theta sin^2\theta+C_{12}sin^2\theta \\ \overline{C}_{13}=C_{13}\cos^2\theta+C_{23}sin^2\theta \\ \overline{C}_{16}=\left(C_{11}-C_{12}-2C_{66}\right)\cos^3\theta sin\theta+\left(2C_{66}+C_{12}-C_{22}\right)\cos\theta sin^3\theta \\ \overline{C}_{22}=C_{22}\cos^4\theta+2\left(C_{12}+2C_{66}\right)\cos^2\theta sin^2\theta+C_{11}sin^4\theta \\ \overline{C}_{23}=C_{23}\cos^2\theta+C_{13}sin^2\theta \\ \overline{C}_{26}=\left(C_{12}-C_{22}+2C_{66}\right)\cos^3\theta sin\theta+\left(C_{11}-C_{12}-2C_{66}\right)\cos\theta sin^3\theta \\ \overline{C}_{33}=C_{33} \\ \overline{C}_{36}=\left(C_{13}-C_{23}\right)\cos\theta sin\theta \\ \overline{C}_{44}=C_{44}\cos^2\theta+C_{55}sin^2\theta \\ \overline{C}_{45}=\left(C_{55}-C_{44}\right)\cos\theta sin\theta \\ \overline{C}_{55}=C_{55}\cos^2\theta+C_{44}sin^2\theta \\ \overline{C}_{66}=\left(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-2C_{66}\right)\cos^2\theta sin^2\theta+C_{66}\left(\cos^4\theta+sen^4\theta\right) \end{gathered} \tag{5}$$