MARIANY ARAUJO DE SOUZA

MÓDULOS SOBRE ANÉIS: PROPRIEDADES ESTRUTURAIS E O TEOREMA DE NULLSTELLENSATZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Aislan Leal Fontes

Itabaiana
2024

MARIANY ARAUJO DE SOUZA

MÓDULOS SOBRE ANÉIS: PROPRIEDADES ESTRUTURAIS E O TEOREMA DE NULLSTELLENSATZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática de Itabaiana, Universidade Federal de Sergipe, como requisito avaliativo para obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Primeiro, Dr.
Instituição xxxx

Prof. Segundo, Dr.
Instituição xxxx

Prof. Terceiro, Dr.
Instituição xxxx

Resultado _____ Data _____/_____/_____

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela força, sabedoria e proteção em cada passo dessa jornada. Sem Sua presença constante e graça em minha vida, nada disso seria possível.

Aos meus pais, Patricia e Lealdo, por serem exemplos de perseverança, apoio e amor incondicional. Vocês sempre me incentivaram a buscar os meus sonhos e me ensinaram o verdadeiro valor do esforço e da dedicação.

Aos meus irmãos, Daniely e João Paulo, e aos meus sobrinhos, Pedro Henrique e Yuri, por serem uma fonte constante de alegria, motivação e por me lembrarem da importância da família. A cada momento de dificuldade, foram vocês que trouxeram o alívio e a esperança que eu precisava.

Ao meu esposo, Mikael, por estar ao meu lado em todos os momentos, oferecendo compreensão e apoio. Sua parceria foi essencial para que eu conseguisse concluir essa etapa.

Aos meus amigos, Danielle, Juliana, Graziela, Natália e Rádja, que estiveram ao meu lado durante essa caminhada acadêmica, compartilhando momentos de estudo, desafios e alegrias. A amizade de vocês fez toda a diferença.

Ao meu professor orientador, Aislan, pela paciência, orientações e ensinamentos valiosos. Agradeço por acreditar no meu potencial e por me guiar com tanta paciência e dedicação.

Por fim, agradeço a todos os professores do departamento, que ao longo dessa jornada me transmitiram conhecimento e me inspiraram a crescer academicamente e pessoalmente. Cada um de vocês contribuiu para a minha formação de maneira especial.

A todos, o meu mais sincero agradecimento.

“A persistência é o caminho do êxito.” (Charles Chaplin)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar o conceito de módulos sobre anéis, generalizando o conceito de espaços vetoriais. Apresenta-se uma análise detalhada de módulos Noetherianos e Artinianos, discutindo suas principais propriedades, teoremas associados e exemplos relevantes na álgebra abstrata/Geometria algébrica. O estudo inclui módulos graduados e suas aplicações em variedades algébricas, com foco especial no Teorema de Nullstellensatz. Os resultados obtidos fornecem uma base sólida para o estudo avançado da teoria dos módulos, especialmente na intersecção entre álgebra e geometria algébrica. Além disso, compara-se brevemente espaços vetoriais e módulos, com o objetivo de compreender suas distinções e similaridades, proporcionando uma visão ampla das estruturas e suas aplicações em variados contextos matemáticos.

Palavras-chave: Módulos; Anéis; Geometria Algébrica; Nullstellensatz.

ABSTRACT

This work aims to explore the concept of modules over rings, generalizing the concept of vector spaces. A detailed analysis of Noetherian and Artinian modules is presented, discussing their main properties, associated theorems and relevant examples in abstract algebra/algebraic geometry. The study includes graded modules and their applications in algebraic varieties, with a special focus on the Nullstellensatz Theorem. The results obtained provide a solid basis for the advanced study of module theory, especially at the intersection between algebra and algebraic geometry. Furthermore, vector spaces and modules are briefly compared, with the aim of understanding their distinctions and similarities, providing a broad view of structures and their applications in various mathematical contexts.

Keywords: Modules; Rings; Algebraic Geometry; Nullstellensatz.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Abstrata é uma área fundamental da Matemática, responsável por estudar estruturas algébricas que desempenham papéis importantes tanto em contextos teóricos quanto aplicados. Entre essas estruturas, destacam-se os anéis e os corpos, que são objetos de grande relevância para diversas áreas do conhecimento como a Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica e a Teoria das Representações.

Dessas estruturas, emergem duas teorias matemáticas importantes: a teoria dos espaços vetoriais e a teoria dos módulos. Enquanto os espaços vetoriais se baseiam na estrutura de corpos, a teoria dos módulos expande essa ideia ao permitir a multiplicação por elementos de um anel. Essa generalização oferece uma visão mais ampla das operações algébricas e permite o estudo de uma variedade maior de estruturas, abrindo caminho para novas aplicações em áreas como Geometria Algébrica e Álgebra Comutativa. A análise dessas duas teorias permite identificar suas conexões e diferenças, o que é crucial para o avanço do entendimento de estruturas algébricas complexas.

A teoria dos módulos, por sua vez, é uma extensão natural dos espaços vetoriais, onde os escalares de um corpo são substituídos por elementos de um anel. Essa generalização, introduzida por Richard Dedekind, tinha como objetivo investigar quais propriedades dos espaços vetoriais se mantêm em um contexto mais abrangente. Assim, o estudo dos módulos não se limita a novas estruturas, mas reflete o avanço de ideias matemáticas fundamentais para abranger maior generalidade e complexidade.

Neste trabalho, iremos abordar diferentes tipos de módulos: livres; Noetherianos e Artinianos, e suas propriedades. Além disso, exploraremos o conceito de módulos graduados e suas conexões com variedades afins, baseando-se no Teorema de Nullstellensatz para entender as interações entre Álgebra e Geometria Algébrica. Este estudo teve como base quatro bibliografias principais: (TEGAN E.; BORGES, 2014), (D. COX J. LITTLE, 2015), (JESUS *et al.*, 2017) e (SANTOS, 2018), cujas contribuições forneceram os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa.

Resumindo, o Capítulo 2 desse material é dedicada ao conceito de módulos onde listamos vários exemplos e propriedades, sempre fazendo um paralelo com o que acontece em Álgebra Linear ressaltando as particularidades em cada caso. São apresentados no Capítulo 3 tipos especiais de módulos/anéis que são os módulos Noetherianos e Artinianos, listamos exemplos e obtemos caracterizações desses tipos de módulos. No capítulo 4 estudamos o conceito de módulos graduados com o intuito de generalizar o Teorema da base de Hilbert e obtermos sua versão para módulos graduados. Por fim, o Capítulo 5 desse material é dedicado a algumas aplicações dos temas acima mencionados e que consiste basicamente no estudo da correspondência entre ideais e variedades afim, permitindo resolver problemas de Geometria através de uma reformulação algébrica e vice-versa.

1.1 OBJETIVOS

Nas seguintes subseções, apresentamos o objetivo geral e os objetivos específicos que guiaram a estrutura e o desenvolvimento deste trabalho.

1.1.1 Objetivo Geral

Proporcionar uma análise aprofundada sobre a teoria dos módulos, com foco em módulos sobre anéis Noetherianos e Artinianos, além de explorar as aplicações dos módulos graduados em Geometria Algébrica através do Teorema de Nullstellensatz.

1.1.2 Objetivos Específicos

i. Definir e explorar o conceito de módulos sobre anéis e suas propriedades fundamentais;

ii. Apresentar e demonstrar os principais teoremas relacionados a módulos Noetherianos e Artinianos;

iii. Analisar o conceito de módulos graduados e suas aplicações;

iv. Aplicar o Teorema de Nullstellensatz no estudo de variedades afins, mostrando a relação entre ideais e variedades geométricas;

v. Fornecer exemplos práticos que ilustrem as propriedades e teoremas discutidos ao longo do trabalho.

2 MÓDULOS

Este capítulo possui como principal objetivo introduzir o conceito de módulos sobre um anel, o qual generaliza o conceito de espaço vetorial sobre um corpo K. O roteiro de seus conteúdos será de modo semelhante ao utilizado para o estudo de espaços vetoriais, com adaptações para refletir algumas das diferenças entre corpos e anéis.

2.1 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS

Considerando A um anel comutativo com unidade. Caso o anel não seja comutativo, isso será explicitamente mencionado.

Definição 1 Sejam A um anel e $(M, +)$ um grupo abeliano, no qual temos definida a operação multiplicação por escalar

$$\begin{array}{rcl} A \times M & \longrightarrow & M \\ (a, m) & \longmapsto & a * m. \end{array}$$

Dizemos que M é um *A-módulo* se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $1 * m = m, \forall m \in M$;
2. $(ab) * m = a * (b * m), \forall m \in M, a, b \in A$;
3. $(a + b) * m = a * m + b * m, \forall m \in M, a, b \in A$;
4. $a * (m_1 + m_2) = a * m_1 + a * m_2, \forall m_1, m_2 \in M, a \in A$.

Exemplo 1 Se $A = K$ e V é um K-espaço vetorial, então V é um K-módulo.

Exemplo 2 Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e

$$A^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in A\}.$$

Dados $x = (a_1, a_2, \cdots, a_n), y = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ em A^n e $\alpha \in A$, definindo a operação de adição e multiplicação por escalar, respectivamente, por:

$$x \oplus y := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

e

$$\alpha \odot x := (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \cdots, \alpha \cdot a_n),$$

verifica-se que A^n é um A-módulo.

De fato, para todo $\alpha, \beta \in A$ e $x, y, z \in A^n$ temos

$$1 \odot x = (1 \cdot a_1, \cdots, 1 \cdot a_n) = x.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\odot x &= ((\alpha\cdot\beta)\cdot a_1,\cdots,(\alpha\cdot\beta)\cdot a_n)\\ &= (\alpha\cdot(\beta\cdot a_1),\cdots,\alpha\cdot(\beta\cdot a_n))\\ &= \alpha\odot((\beta\cdot a_1,\cdots,\beta\cdot a_n))\\ &= \alpha\odot(\beta\odot x)\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\odot x &= ((\alpha+\beta)\cdot a_1,\cdots,(\alpha+\beta)\cdot a_n)\\ &= (\alpha\cdot a_1,\cdots,\alpha\cdot a_n)\oplus(\beta\cdot a_1,\cdots,\beta\cdot a_n)\\ &= (\alpha\odot x)\oplus(\beta\odot x).\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\alpha\odot(y\oplus z) &= \alpha\odot(b_1+c_1,\cdots,b_n+c_n)\\ &= (\alpha\cdot(b_1+c_1),\cdots,\alpha\cdot(b_n+c_n))\\ &= (\alpha\cdot b_1,\cdots,\alpha\cdot b_n)\oplus(\alpha\cdot c_1,\cdots,\alpha\cdot c_n)\\ &= (\alpha\odot y)\oplus(\alpha z).\end{aligned}$$

Logo, A^n é um A-módulo.

Exemplo 3 Sejam $A=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ um anel e $(G,+)$ um grupo abeliano. Temos que G é um $\mathbb{Z}$-módulo com operação * definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}* \;:\; \mathbb{Z}\times G &\longrightarrow G\\ (a,v) &\longmapsto a*v := \begin{cases}\underbrace{v+\cdots+v}_{a\text{ vezes}}, & \text{se } a\geq 0;\\ \underbrace{(-v)+\cdots+(-v)}_{-a\text{ vezes}}, & \text{se } a<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Exemplo 4 Seja $A=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ um anel e tome $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$ um grupo abeliano. Definindo a multiplicação por escalar por:

$$\begin{aligned}* \;:\; \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\ (a,(x,y)) &\longmapsto a*(x,y) := (3ax,3ay),\end{aligned}$$

observa-se que $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo pois, a primeira propriedade não é satisfeita.

Definição 2 Sejam A um anel e M um A-módulo. Dado um subconjunto $W\subseteq M$ não vazio, dizemos que W é um *A-submódulo* de M se são satisfeitas:

1. $w_1+w_2\in W, \forall w_1,w_2\in W$;
2. $\alpha w\in W, \forall w\in W, \alpha\in A$.
   Equivalentemente, W é um A-submódulo de M se $\alpha w_1+w_2\in W$, $\forall\alpha\in A$ e $\forall w_1$, $w_2\in W$.

Observação 1 *Essa definição implica que $0\in W$. De fato, desde que W seja não vazio tome $w\in W$ qualquer. Para $a=0$, pela segunda condição, $0w=0\in W$.*

Exemplo 5 Seja V um K-espaço vetorial. Um subconjunto $S \subseteq V$ é um K-submódulo de V se, e so se, S é um subespaço vetorial de V.

Proposição 1 *Sejam M um A-módulo, S e W A-submódulos de M. Então:*

1. *$S + W = \{s + w; s \in S \text{ e } w \in W\}$ é um submódulo de M;*
2. *$S \cap W$ é um submódulo de M.*

Demonstração 1 Para o primeiro item, desde que S e W sejam A-módulos, tem-se $S + W$ não vazio. Considerando λ em A e $v_1 = s_1 + w_1, v_2 = s_2 + w_2$ em $S + W$, note que

$$\lambda v_1 + v_2 = \lambda(s_1 + w_1) + (s_2 + w_2) = (\lambda s_1 + s_2) + (\lambda w_1 + w_2)$$

e isso significa que $\lambda v_1 + v_2$ está em $S + W$, e portanto, $S + W$ é um A-submódulo de M. Para a interseção de submódulos, observe que $S \cap W$ é não vazio pois $0 \in S$ e $0 \in W$. Além disso, pela hipótese, ao tomar λ em A e v_1, v_2 em $S \cap W$, implica que $\lambda v_1 + v_2$ está em $S \cap W$.

Definição 3 Sejam $W_1, W_2, \cdots, W_k$ A-submódulos de M. Dizemos que M é a *soma direta* dos submódulos, ou seja, $M = W_1 \bigoplus W_2 \bigoplus \cdots \bigoplus W_k$ quando as seguintes afirmações são satisfeitas:

1. $M = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$;
2. Se $w_1 + \cdots + w_k = 0$, com w_i em W_i, então $w_i = 0, \forall i = 1, \cdots, k$. Equivalentemente, $\cap_{i=1}^{k} W_i = \{0\}$.

Exemplo 6 O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_6$ é a soma direta de seus submódulos $N_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ e $N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, pois $N_1 \cap N_2 = \{\bar{0}\}$ e $N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2; n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\} = \mathbb{Z}_6$.

Agora, apresentamos a definição de homomorfismo de A-módulos que é uma generalização de transformação linear.

Definição 4 Sejam $(M, +)$ e $(M', \uplus)$ dois A-módulos. Uma aplicação $\varphi : M \longrightarrow M'$ é um *A-homomorfismo* se são satisfeitas:

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) \uplus \varphi(v_2), \forall v_1, v_2 \in M$;
2. $\varphi(a \cdot v) = a \odot \varphi(v), \forall a \in A, v \in M$.

Observação 2 *Operações indicadas por $+, \cdot$ são olhadas no A-módulo M, já as indicadas por $\uplus, \odot$ são no A-módulo M'.*

Seja M um A-módulo e N um submódulo de M. O grupo quociente

$$(M/N, +) = \{m + N; m \in M\}$$

munido da multiplicação por escalar de A

$$r \cdot \bar{v} = r \cdot (v + N) = rv + N = r\bar{v}, \forall r \in A, v \in M$$

é um A-módulo, chamado de A-módulo quociente de M por N.

Exemplo 7 Sejam M e $N \subset M$ módulos sobre um anel A, as aplicações identidade e a projeção canônica $\pi : M \to M/N$, definida por $\pi(m) = m + N$ são homomorfismos. Além disso, a aplicação $f : M \to N$ definida por $f(m) = 0, \forall m \in M$ também é um homomorfismo.

Exemplo 8 A função $f : M \longrightarrow N$ definida por $f(u) = 0, \forall u \in M$ é um A-homomorfismo, chamado homomorfismo nulo, a qual será denotada por 0.

Exemplo 9 Seja M um A-módulo as funções homotetias, $f : M \longrightarrow M$ definida por $f(u) = a \cdot u, \forall u \in M$ e $a \in A$, são homomorfismos.

Ao considerar K corpo, temos os seguintes exemplos:

Exemplo 10 Os homomorfismo de K-módulos são as transformações lineares entre espaços vetoriais sobre K.

Definição 5 Dado um A-homomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M'$, definimos o *núcleo* de φ e a *imagem* de φ, respectivamente, como os conjuntos:

$$\ker(\varphi) := \{v \in M; \varphi(v) = 0\}; \mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(v) \in M'; v \in M\}.$$

Dizemos que φ é um *isomorfismo* de A-módulos se ele é bijetivo. Neste caso, M é isomorfo a M' e denota-se $M \simeq M'$.

Exemplo 11 Sejam M, M' A-módulos. Se $f : M \longrightarrow M'$ é um isomorfismo, então $f^{-1} : M' \longrightarrow M$ é um homomorfismo. De fato, sejam $v, v' \in M'$ e $a \in A$. Desde que f seja isomorfismo, existem $u, u' \in M$ tais que $f(u) = v$ e $f(u') = v'$. Daí,

$$\begin{aligned} f^{-1}(a \cdot v + v') &= f^{-1}(a \cdot f(u) + f(u')) \\ &= f^{-1}(f(a \cdot u + u') \\ &= a \cdot u + u' \\ &= a \cdot f^{-1}(v) + f^{-1}(v'). \end{aligned}$$

Proposição 2 *Seja $\varphi : M \longrightarrow M'$ um A-homomorfismo. O mapa φ é injetivo se, e somente se,* $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Demonstração 2 Caso φ seja injetiva, dado $u \in \ker(\varphi) \iff \varphi(u) = 0 = 0 \cdot \varphi(v)$, para algum $v \in M$. Daí, $\varphi(u) = \varphi(0) \implies u = 0$. Portanto, $\ker(\varphi) = \{0\}$. Supondo $\ker(\varphi) = \{0\}$, considere v_1, v_2 em M tais que

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_2).$$

Então,

$$\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0.$$

Daí, $v_1 - v_2 \in \ker(\varphi) \Rightarrow v_1 = v_2$. Logo, φ é injetiva.

Proposição 3 *Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ é um A-homomorfismo, então:*

1. $\ker(\varphi) = \{v \in M; \varphi(v) = 0\}$ *é um submódulo de* M;
2. $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \in M'; v \in M\}$ *é um submódulo de* M'.

Demonstração 3

1. Considere $\ker(\varphi)$ não vazio tomando $a \in A$ e v_1, v_2 em $\ker(\varphi)$, tem-se $\varphi(v_1) = 0$ e $\varphi(v_2) = 0$. Assim,

$$\varphi(a \cdot v_1 + v_2) = \varphi(a \cdot v_1) \uplus \varphi(v_2) = a \odot \varphi(v_1) \uplus 0 = a \odot 0 \uplus 0 = 0.$$

   Portanto, $a \cdot v_1 + v_2$ está em $\ker(\varphi)$, e dessa forma, $\ker(\varphi)$ é um submódulo de M.

2. Observe que, $\mathrm{Im}(\varphi)$ é não vazio, pois $\varphi(0) = 0 \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Dados $a \in A$ e w_1, w_2 em $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq M'$, existem $v_1, v_2 \in M$ tais que
   $\varphi(v_1) = w_1$ e $\varphi(v_2) = w_2$. Daí,

$$\varphi(a \cdot v_1 + v_2) = \varphi(a \cdot v_1) \uplus \varphi(v_2) = a \odot \varphi(v_1) \uplus \varphi(v_2) = a \odot w_1 \uplus w_2.$$

   Portanto, $a \odot w_1 \uplus w_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$ e assim, $\mathrm{Im}(\varphi)$ é um submódulo de M'.

Exemplo 12 Considere os módulos $M = \mathbb{Z}^3$ e $N = \mathbb{Z}^2$, ambos sobre o anel $\mathbb{Z}$. O homomorfismo $f : M \to N$ definido por: $f(x, y, z) = (2x - y, 3y + z)$ admite como núcleo o conjunto $\{(a_1, 2a_1, -6a_1); a_1 \in \mathbb{Z}^2\}$. De fato, dado $u = (a_1, b_1, c_1) \in \ker(f)$, por definição

$$(2a_1 - b_1, 3b_1 + c_1) = f(u) = 0 = (0, 0).$$

$$2a_1 - b_1 = 0 \tag{1}$$

$$3b_1 + c_1 = 0. \tag{2}$$

Assim, pela equação (1), obtem-se $b_1 = 2a_1$ que ao substituir na equação (2), segue que

$$c_1 = -6a_1.$$

Portanto, $\ker(f) = \{(a_1, 2a_1, -6a_1); a_1 \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado, o conjunto imagem é o próprio $\mathbb{Z}$, pois f é sobrejetora.

Exemplo 13 Seja $A = K[x, y]$, o anel de polinômios em duas variáveis sobre um corpo K, e considere o seguinte homomorfismo de módulos $\varphi : A \to A$ dado pela multiplicação $f(x, y) = x \cdot f(x, y)$ Assim, para cada $g(x, y) \in A$, temos

$$\varphi(g(x, y)) = x \cdot g(x, y).$$

O núcleo de φ é constituído pelos polinômios $g(x, y) \in A$ tais que $x \cdot g(x, y) = 0$. Como A é um domínio de integridade (não tem divisores de zero), o único polinômio $g(x, y) \in A$ que satisfaz essa condição é o polinômio zero. Portanto,

$$\ker(\varphi) = \{0\},$$

e assim φ é injetivo, pela Proposição 2. Por outro lado, a sua imagem é o conjunto de polinômios em A que são múltiplos de x, ou seja,

$$\operatorname{Im}\varphi = x \cdot A = \{x \cdot g(x,y) \mid g(x,y) \in A\}.$$

Dessa forma, o homomorfismo φ é injetivo, mas não é sobrejetivo, pois nem todo polinômio em A é da forma $x \cdot g(x,y)$.

Teorema 1 *Sejam M, M' dois A-módulos e N um submódulo de M :*

(i) Considere a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi: & M & \longrightarrow & M/N \\ & v & \longmapsto & v+N. \end{array}$$

Então, π é um homomorfismo sobrejetor cujo $\ker(\pi) = N$.

(ii) Seja $\varphi : M \longrightarrow M'$ um homomorfismo de A-módulos cujo $\ker(\varphi)$ *contém N. Então, existe um único homomorfismo de A-módulos $\psi : M/N \longrightarrow M'$ tal que $\varphi = \psi \circ \pi$.*

(iii) (Teorema do isomorfismo) Seja $\varphi : M \longrightarrow M'$ um homomorfismo sobrejetor de A-módulos cujo $\ker(\varphi) = N$. *Então ψ é um isomorfismo de A-módulos entre o quociente M/N e M'.*

(iv) (Teorema da correspondência) Seja $\pi : M \longrightarrow M/N$ o homomorfismo projeção. Então existe uma correspondência bijetiva entre os submódulos de M/N e os submódulos de M que contém N.

Demonstração 4 *(i)* Dados $v_1, v_2 \in M$ e $a \in A$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \pi(av_1 + v_2) & = & (av_1 + v_2) + N \\ & = & a(v_1 + N) + (v_2 + N) \\ & = & a\pi(v_1) + \pi(v_2). \end{array}$$

Dessa forma, π é um homomorfismo. Tomemos $\bar{v} \in M/N$ qualquer, temos que $v \in M$. Assim, existe $v \in M$ tal que $\pi(v) = \bar{v}$. Logo π é sobrejetor. Além disso, dado $v \in \ker(\pi)$, temos que $v + N = \pi(v) = 0 + N$. Por outro lado, dado $n \in N \subset M$ temos que $\pi(n) = n + N = N = \bar{0}$. Portanto, $\ker(\pi) = N$.

(ii) Para a existência, note que

$$\varphi(v) = \psi \circ \pi(v) = \psi(\pi(v)) = \psi(\bar{v}) = \psi(v+N), \forall v \in M.$$

Assim,

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & M/N & \longrightarrow & M' \\ & & v+N & \longmapsto & \varphi(v) \end{array}$$

está bem definida. Com efeito, dados $v_1, v_2 \in M$, tais que

$$\begin{aligned} v_1 + N = v_2 + N &\implies v_1 - v_2 \in N \subseteq \ker(\varphi) \\ &\implies \varphi(v_1 - v_2) = 0 \\ &\implies \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 \\ &\implies \psi(v_1 + N) = \psi(v_2 + N). \end{aligned}$$

Além disso, tomando $v, v_1, v_2 \in M$ e $a \in A$, segue-se

$$\psi((v_1+N)+(v_2+N) = \psi((v_1+v_2)+N) = \varphi(v_1) \uplus \varphi(v_2) = \psi(v_1+N) \uplus \psi(v_2+N)$$

e

$$\psi(a \cdot (v+N)) = \psi(a \cdot v + N) = \varphi(a \cdot v) = a \odot \varphi(v) = a \odot \psi(v+N).$$

Então, ψ é homomorfismo. (Unicidade) Seja $\varphi' : M/N \longrightarrow M'$ tal que $\varphi' \circ \pi = \varphi$. Então, $\varphi'(v+N) = \varphi(v) = \psi(v+N), \forall v \in M$ e assim, $\varphi' = \psi$.

(iii) Pelo Item *(ii)*, $\psi : M/N \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$ é um homomorfismo.
Afirmação: ψ é bijetivo. Com efeito, dado $v \in \mathrm{Im}(\varphi)$, existe $v' \in M$ tal que $\varphi(v') = v$. Portanto,

$$\psi(v' + N) = \varphi(v') = v.$$

Logo, ψ é sobrejetor. Por outro lado, dados $v_1, v_2 \in M$, com $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, tem-se

$$\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 \implies \varphi(v_1 - v_2) = 0 \implies v_1 - v_2 \in \ker(\varphi) = N.$$

Assim, $v_1 + N = v_2 + N$. Dessa forma, ψ é injetor.

(iv) Sejam L um submódulo de M, tal que $N \subset L$ e $S = \pi(L) = \{\pi(m); m \in L\}$. Note que, S é não vazio pois como L é um submódulo de M temos que $0 \in L \implies \pi(0) = \bar{0} \in S$. Dados $s_1, s_2 \in S, \lambda \in A$, tais que $\pi(m_1) = s_1, \pi(m_2) = s_2$ para algum $m_1, m_2 \in M$ temos que

$$\lambda s_1 + s_2 = \lambda\pi(m_1) + \pi(m_2) = \pi(\lambda(m_1) + \pi(m_2)).$$

Daí, $\lambda s_1 + s_2 \in S$ e assim, S é um submódulo de M/N.

Considerando S um submódulo de M/N, temos que $\bar{0} \in S, \pi(0) = \bar{0} \in S \Rightarrow 0 \in L \Rightarrow L \neq \emptyset$. Além disso, L é um submódulo de M. De fato, dados $m_1, m_2 \in M, \lambda \in A$ tais que $\pi(m_1) = s_1$ e $\pi(m_2) = s_2$,

$$\lambda s_1 + s_2 = \lambda\pi(m_1) + \pi(m_2) = \pi(\lambda m_1 + m_2) \Rightarrow \lambda m_1 + m_2 \in L.$$

Pela construção da correspondência ela já é sobrejetora. Assim, dados $L = \{m \in M; \pi(m) \in S\}, L' = \{m \in M; \pi(m) \in S'\}$ submódulos de M que contém N, com S submódulo de M/N correspondente a L e S' submódulo de M/N correspondente a L' e $S = S'$. Tomando um elemento em L, digamos a, temos que $a \in L \iff \pi(a) \in S \iff \pi(a) \in S' \iff a \in L'$. Logo, $L = L'$.

2.2 MÓDULOS LIVRES

Nesta subseção, consideremos β um conjunto de elementos de um A-módulo M.

Definição 6 Dizemos que β gera M se qualquer elemento $v \in M$ pode ser escrito como combinação finita de elementos de β, ou seja, existem escalares $a_i, \cdots, a_{i+j} \in A$ e $v_i, \cdots, v_{i+j} \in \beta$ tal que

$$v = a_i v_i + \cdots + a_{i+j} v_{i+j}.$$

Um A-módulos M é dito *finitamente gerado* se existe um conjunto finito de elementos que o gera.

Definição 7 Dizemos que β é *linearmente independente (LI)* se, para todo subconjunto $\{v_i, \cdots, v_{i+j}\}$ finito de β, sempre que

$$a_i v_i + \cdots + a_{i+j} v_{i+j} = 0,$$

implicar $a_i = \cdots = a_{i+j} = 0, \forall a_i, \cdots, a_{i+j} \in A$.

Definição 8 Dizemos que β é uma *base* de M se, β gera M e β é LI. Dizemos que M é um A-módulo livre se ele admite uma base.

Exemplo 14 Todo espaço vetorial não nulo de dimensão finita é um módulo livre.

No estudo de espaços vetoriais, observa-se que todo conjunto linearmente independente pode ser estendido a uma base, e, da mesma forma, de todo conjunto gerador pode ser extraído uma base. Abaixo, apresentaremos alguns exemplos nos quais esse processo nem sempre ocorre quando lidamos com módulos.

Exemplo 15 Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ livre e o conjunto $\alpha = \{2\}$ linearmente independente. Note que, α não é e não pode ser estendido a uma base, pois 1 não é gerado por α e todo conjunto com dois ou mais elementos do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ é linearmente dependente (LD). Visto que, dados $a, b \in \mathbb{Z}$ se escolhermos os escalares como $\alpha_1 = -b$ e $\alpha_2 = a$, a equação $\alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$.

Exemplo 16 Ao considerar $\beta = \{2, 3\}$ o conjunto gerador do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$, temos que β não é e nem pode ser reduzido a uma base.

Proposição 4 *Seja o homomorfismo $\varphi : A^n \longrightarrow M$ definido por*

$$\varphi(X) := BX = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

onde B é a matriz das coordenadas dos elementos de $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ na base canônica de A^n, ou seja, $\varphi(e_i) = v_i, \forall i = 1, \ldots n$. Então:

(i) φ é injetiva se, e somente se, β é LI;

(ii) φ *é sobrejetiva se, e somente se,* β *gera* M*;*

(iii) φ *é bijetiva se, e somente se,* β *é uma base de* M*.*

Demonstração 5 Para o primeiro Item, considere $X = (x_1, \cdots, x_n), X' = (x'_1, \cdots, x'_n) \in A^n$ tais que $\varphi(X) = \varphi(X')$, temos então $BX = BX'$, ou seja,

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = x'_1v_1 + \cdots + x'_nv_n \Longleftrightarrow (x_1 - x'_1)v_1 + \cdots + (x_n - x'_n) = 0$$

Desde que β seja LI, segue-se

$$x_1 = x'_1, \cdots, x_n = x'_n.$$

Assim, $X = X'$ e portanto, φ é injetiva.
Reciprocamente, seja $X = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$ tal que

$$\varphi(X) = BX = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0 = \varphi(0)$$

como φ é injetiva, segue que $X = 0$. Logo, β é LI. Para o Item *(ii)*, desde que φ seja sobrejetiva, para todo $v \in M$, existe $X \in A^n$ tal que $\varphi(X) = v$. Assim,

$$v = \varphi(X) = BX = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

Daí, β gera M.
Reciprocamente, como β gera M qualquer $v \in M$ pode ser escrito como

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n,$$

com $X = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.
Assim,

$$\varphi(X) = BX = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = v.$$

Logo, φ é sobrejetiva. As outras afirmações decorrem dos itens *(i)* e *(ii)*.

Corolário 1 *Seja* M *um* A*-módulo com* A *um anel comutativo e* $\{w_1, \cdots, w_m\}$ *seu conjunto gerador, então qualquer conjunto com quantidade maior que* m *é LD.*

Demonstração 6 Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ em M com $n > m$. Note que, se $\{w_1, \cdots, w_m\}$ gera M, então existem escalares $a_{ij} \in A$ tais que, para cada $j = 1, \cdots, n$ temos

$$v_j = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i.$$

Assim, se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são escalares quaisquer em A, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_1v_1 + \cdots + \lambda_nv_n &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij}) w_i. \end{aligned}$$

Como queremos verificar a independência de $\{v_1, \cdots, v_n\}$, basta analisar $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij}$ para cada $i =, \cdots, m$. Daí, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_n a_{mn} = 0 \end{cases}$$

com m equações e n incógnitas, sendo este um sistema possível e indeterminado, ou seja, o sistema tem uma solução não nula, digamos $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in A$, não todos nulos.
Portanto, para $i = 1, \cdots, m$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_{ij} = 0.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j v_j = 0,$$

o que implica $\{v_1, \cdots, v_n\}$ ser LD. Logo, $n \leq m$.

Teorema 2 *Se A é um anel comutativo e M um A-módulo livre com bases $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \cdots, w_m\}$, então $m = n$.*

Demonstração 7 Desde que β seja base, então β gera M e supondo que β' também seja base, segue que β' é LI. Assim, pelo Corolário $1, n \geq m$. A mesma análise considerando que β' gera M. Portanto, $n = m$.

O seguinte exemplo mostra que ao considerar um anel não comutativo o Teorema 2 pode não ser válido, ou seja, as bases de um A-módulo livre com A não comutativo podem não ter a mesma quantidade de elementos.

Exemplo 17 Seja $A := \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{Z}[X]$ o anel dos endomorfismos (não comutativo). O A-módulo A possui duas bases finitas com diferentes cardinalidades.

O conjunto A como A-módulo é finitamente gerado por apenas um elemento, tendo o endomorfismo identidade como base. Definamos, respectivamente, $f_1, f_2 \in A$ da seguinte maneira: para todo $n \in \mathbb{N}_0$, tomemos

$$f_1(X^{2n+1}) = X^n, f_1(X^{2n}) = 0, f_2(X^{2n+1}) = 0, f_2(X^{2n}) = X^n.$$

Afirmação: O conjunto $\beta = \{f_1, f_2\}$ é uma base de A.
De fato, sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, tais que

$$\begin{array}{rcc} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 & = & 0 \\ 0 = 0(X^{2n+1}) & = & (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(X^{2n+1}) \\ & = & \alpha_1(f_1(X^{2n+1})) + \alpha_2(f_2(X^{2n+1})) \\ & = & \alpha_1(X^n). \end{array}$$

Logo, para $X^n \in \mathbb{Z}[X]$, tem-se $\alpha_1(X^n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$. Da mesma forma, considerando o outro caso temos que $\alpha_2 = 0$. Seja $f \in A$, considere $\beta_1, \beta_2 \in A$ tais que

$$\begin{cases} \beta_1(X^n) := f(X^{2n+1}) \\ \beta_2(X^n) := f(X^{2n}), n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Note que,

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2)(X^{2n}) = \beta_2(X^n) = f(X^{2n}).$$

De forma análoga, para

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2)(X^{2n+1}) = f(X^{2n+1}).$$

Assim, temos $f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$.

Teorema 3 *Seja $\varphi : M \longrightarrow M'$ um homomorfismo. Se $\ker(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ são A-módulos finitamente gerados, então M é finitamente gerado.*

Demonstração 8 Considere $\{u_1, \cdots, u_m\}$ e $\{w_1, \cdots, w_n\}$ conjuntos geradores de $\ker(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$, respectivamente. Além disso, existem elementos $v_i \in M$ tais que

$$\varphi(v_i) = w_i, i = 1, \cdots, n.$$

Tomando um elemento qualquer $v \in M$, existem $\alpha_i \in A$ tais que

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i).$$

Dessa forma,

$$\varphi(v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in \ker(\varphi).$$

Então, existem $\gamma_j \in A$ tais que

$$v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j u_j \Longleftrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j u_j.$$

Logo, M é finitamente gerado por $\{v_1, \cdots, v_n, u_1, \cdots, u_m\}$.

Na primeira seção do seguinte cápitulo definiremos formalmente anéis e módulos Noetherianos, para agora consideremos a seguinte:

Definição 9 Um anel A é dito *Noetheriano* se todos os seus ideais são finitamente gerados

Teorema 4 *Se A é Noetheriano e M é um A-módulo finitamente gerado, então todos os A-submódulos de M são finitamente gerados.*

Demonstração 9 Quando $M = A^m$. Utilizaremos indução sobre m, caso $m = 1$ um A-submódulo de A é um ideal de A. Como, por hipótese, A é Noetheriano segue que um A-submódulo de A é finitamente gerado. Agora, suponhamos por hipótese de indução que $m > 1$ e que qualquer A-submódulo de A^{m-1} seja finitamente gerado. Considere a projeção

$$\pi : A^m \longrightarrow A^{m-1}.$$

Note que π é um A-homomorfismo sobrejetor e seu núcleo é o conjunto de A^m cujas primeiras $m-1$ coordenadas são nulas, ou seja,

$$\ker(\pi) = \{(0, \cdots, 0, x_m); x_m \in A\} \simeq A.$$

Portanto, $\ker(\pi)$ é finitamente gerado e, por hipótese, $\mathrm{Im}(\pi) = A^{m-1}$ é finitamente gerado consequentemente pelo Teorema 3, A^m é finitamente gerado. Além disso, podemos restringir π a um submódulo N de A^m, isto é,

$$\varphi = \pi|_N : N \longrightarrow A^{m-1}.$$

Sendo assim, por hipótese $\varphi(N)$ é finitamente gerado e

$$\ker(\varphi) = (\ker(\pi)) \cap N \subset \ker(\pi) \simeq A$$

no qual A é finitamente gerado. Daí, $\ker(\varphi)$ é finitamente gerado e novamente pelo Teorema 3, N é finitamente gerado. Agora, vamos mostrar o caso para um A-módulo arbitrário. Seja N um A-módulo M. Desde que M é finitamente gerado, por hipótese, existe um homomorfismo sobrejetor

$$\varphi : A^m \longrightarrow M.$$

Pelo Teorema 1, temos que $S = \varphi^{-1}(N)$ é submódulo de A^m e que $N = \varphi(S)$. Assim, pelo caso anterior S é finitamente gerado. Considerando

$$\bar{\varphi} : S \longrightarrow N$$

uma restrição de φ para S obtém-se N finitamente gerado.

3 MÓDULOS ARTINIANOS E NOETHERIANOS

Neste capítulo, exploraremos os conceitos de módulos Artinianos e Noetherianos, que são essenciais na teoria de anéis e módulos. Apresentaremos definições formais, exemplos e teoremas que demonstram a preservação dessas propriedades, além de discutir o comprimento dos módulos como uma medida de sua complexidade.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

Na presente seção, apresentaremos algumas definições e resultados relacionados a anéis e módulos Artinianos. O conceito de módulos Noetherianos é obtido ao invertermos a "direção"das cadeias e é importante destacar que os principais resultados e suas respectivas demonstrações se aplicam de maneira análoga a ambos os tipos de módulos.

Definição 10 Seja A um anel. Dizemos que um A-módulo M é *Artiniano* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

1. Dada uma cadeia descendente de submódulos de M

$$N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots,$$

então $N_i = N_{i+1}$ para $i \gg 0$, ou seja, a cadeia de submódulos se estabiliza.

2. Todo conjunto $\mathcal{N} \neq \emptyset$ de submódulos de M possui um elemento que é minimal em $\mathcal{N}$ com relação a inclusão.

Dizemos que um anel A é *Artiniano* se, visto como módulo sobre si mesmo é um módulo Artiniano.

Exemplo 18 Seja $A = \mathbb{Z}$, o $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_6$ é Artiniano pois, $\mathbb{Z}_6$ possui uma quantidade finita de submódulos, daí obviamente qualquer sequência descendente de submódulos estabiliza.

Definição 11 Um complexo,

$$\cdots M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

tal que $f_{i-1} \circ f_i = 0$, é dito uma *sequência exata* se $\mathrm{Im}(f_i) = \ker(f_{i-1})$. Em particular,

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M" \to 0$$

na qual $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ é dita sequência exata.

Teorema 5 *Seja A um anel.*

1. Seja

$$0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos. Então, M é Artiniano se, e somente se, M' e M'' são Artinianos.

2. Seja M um A-módulo finitamente gerado. Se A é Artiniano, então M é Artiniano.

Demonstração 10

1. Sem perda de generalidade, suponha que M' é submódulo de M e que $M'' = M/M'$. Assuma que M é Artiniano. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de submódulos de M' e estes são submódulos de M. Como M é Artiniano, segue que $\mathcal{N}$ possui um elemento minimal. Portanto, M' é Artiniano.
   Afirmação: M'' é Artiniano.
   Com efeito, considere a cadeia descendente

$$\frac{N_0}{M'} = N_0'' \supseteq N_1'' \supseteq \cdots \tag{3}$$

   de submódulos de M'', onde pelo teorema 1 $N_i \supset M', i \geq 0$ e

$$N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots . \tag{4}$$

   Como M é Artiniano, a cadeia (4) estabiliza e, assim, a cadeia (3) também se estabilizará. Reciprocamente, suponha que M' e M'' são Artinianos. Dada uma cadeia descendente de submódulos de M

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots ,$$

   temos que as cadeiais de submódulos

$$M_1 \cap M' \supseteq M_2 \cap M' \supseteq \cdots \supseteq M'$$

   e $\frac{(M_1+M')}{M'} \supseteq \frac{(M_2+M')}{M'} \supseteq \cdots \supseteq \frac{M}{M'} = M''$ estabilizam, pois M' e M'' são Artinianos, ou seja, para $i \gg 0$ temos que

$$\begin{cases} M_i \cap M' = M_{i+1} \cap M' \\ M_i + M' = M_{i+1} + M' \end{cases} \Rightarrow M_i = M_{i+1}.$$

2. Note que A^n é Artiniano, pois para $n = 1$ sabemos que A é Artiniano, conforme a hipótese. Agora, suponha, por hipótese de indução, que para $n > 1$, A^{n-1} é Artiniano. Temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow A^n \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

   e pelo item 1, segue que A^n é Artiniano. Observe que um módulo M finitamente gerado sobre A é um quociente de um módulo livre: se $M = Aw_1 + \cdots + Aw_n$, temos uma sobrejeção

$$\varphi : A^n \twoheadrightarrow M$$

   definida por $a_1w_1 + \cdots + a_nw_n; (a_1, \cdots, a_n) \in A^n$. Assim, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \hookrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0; \varphi : A^n \longrightarrow M.$$

   Portanto, segue do item 1 que M é Artiniano.

Observação 3 Anéis e módulos finitos são Artinianos. Se K é um corpo, então um K-módulo V[2] é Artiniano se, e somente se, $\dim_K V < \infty$.

Definição 12 Seja A um anel. Dizemos que um A-módulo M é *Noetheriano* se satisfaz as condições equivalentes:

1. todo submódulo $N \subseteq M$ é finitamente gerado.
2. toda cadeia ascendente de submódulos estabiliza, isto é, se

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$$

é uma cadeia de submódulos de M, então existe $i_0 \geq 1$ tal que $N_i = N_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

3. todo subconjunto $S \neq \emptyset$ de submódulos de M tem um elemento maximal em S com relação a inclusão.

Dizemos que um anel A é *Noetheriano* se, visto como módulo sobre si mesmo é um módulo Noetheriano.

Exemplo 19 Corpos e DIPs (tais como $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{C}[x], \mathbb{Q}[[x]]$ ou $\mathbb{Z}_p$) são todos Noetherianos pois todos os seus ideais são finitamente gerados.

Exemplo 20 Seja K um corpo. Temos que, o anel dos polinômios em infinitas variáveis $R = K[x_1, ..., x_n, ...]$ não é Noetheriano. De fato, basta tomar a seguinte cadeia ascendente $\langle x_1 \rangle \subseteq \langle x_1, x_2 \rangle \subseteq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subseteq \cdots$ de submódulos de R a qual não estabiliza.

As demonstrações do teorema seguinte e da equivalência das condições acima seguem argumentos análogos ás demonstrações para anéis Artinianos.

Teorema 6 *Seja A um anel.*

1. *Seja*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos. Então, M é Noetheriano se, e somente se, M' e M'' são Noetherianos. Em particular quocientes e submódulos de módulos Noetherianos são Noetherianos.

2. *Seja M um A-módulo finitamente gerado. Se A é Noetheriano, então M é Noetheriano.*

Observação 4 *Todo anel Artiniano é Noetheriano, ver em (TEGAN E.; BORGES, 2014, p.166).*

Exemplo 21 Temos o anel $\mathbb{Z}$ como um exemplo de anel Noetheriano que não é Artiniano. De imediato, temos que $\mathbb{Z}$ é Noetheriano, pois todos os seus ideais são finitamente gerados. Se $0 \neq a \in \mathbb{Z}$, temos a cadeia

$$\langle a \rangle \supsetneq \langle a^2 \rangle \supsetneq \cdots \supsetneq \langle a^n \rangle \supsetneq \cdots$$

descendente infinita. Logo, $\mathbb{Z}$ não é Artiniano.

3.2 COMPRIMENTO DE MÓDULOS

Nesta seção, vamos explorar o conceito de comprimento de módulos, o qual fornece a medida de um módulo, avaliando a profundidade de suas subestruturas por meio de séries de composição. Começamos definindo quando um módulo é considerado simples (ou irredutível), seguido pela introdução das séries de composição e, finalmente, a definição formal do comprimento de um módulo. Além disso, vamos ilustrar esses conceitos com alguns exemplos práticos e apresentar teoremas que demonstram propriedades fundamentais, como a finitude do comprimento e sua aditividade em sequências exatas.

Definição 13 Seja A um anel e seja M um A-módulo.

1. M é dito simples ou *irredutível* se $M \neq 0$ e seus únicos submódulos são 0 e M.
2. Uma *série de composição* de M de tamanho n é uma sequência de submódulos

$$M = M_n \supsetneq \cdots \supsetneq M_1 \supsetneq M_0 = 0$$

   tal que os quocientes consecutivos M_{i+1}/M_i são todos simples.
3. O *comprimento* de M sobre A, denotado por $\operatorname{len}_A M$, é o mínimo entre todos os tamanhos das séries de composição de M. Caso M não admita série de composição $\operatorname{len}_A M = \infty$.

Exemplo 22 Seja K um corpo. Um K-espaço vetorial é irredutível se, e só se, tem dimensão 1. Assim, uma série de composição para um espaço vetorial V é uma sequência

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

onde $\dim_K V_i = i$. Portanto, $\operatorname{len}_K V = n = \dim_K V$.

Lema 1 *Um A-módulo M é simples se, e somente se, $M \simeq A/m$ para algum ideal maximal $m \subset A$.*

Demonstração 11 Se m é um ideal maximal, então $M = A/m$ é irredutível pelo teorema da correspondência. Reciprocamente, se M é simples e $m' \in M$ é qualquer elemento não nulo, então $M = Am'$. Considere o homomorfismo

$$\varphi : A \longrightarrow M = Am'$$

definido por $\varphi(a) = am'$. Note que $m' \in \operatorname{Im}(\varphi)$, pois $\varphi(1) = m'$. Logo, pelo teorema do isomorfismo, temos que

$$A/\ker(\varphi) \simeq M$$

e, novamente, aplicando o teorema da correspondência para M e usando o fato de M ser simples, segue que $\ker(\varphi) \subset A$ é maximal.

Observação 5 *Definimos o anulador de m por:*

$$\mathrm{ann}(m) := \{a \in A; am = 0\} = \ker(\varphi).$$

Teorema 7 *Seja M um A-módulo*

1. *O comprimento de M sobre A é finito se, e somente se, M é Artiniano e Noetheriano.*
2. *Se $\mathrm{len}_A M < \infty$, então todas as séries de composição de M têm mesmo tamanho (igual a $\mathrm{len}_A M$).*
3. *(Aditividade em sequências exatas) Seja*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos. Então,

$$\mathrm{len}_A(M) < \infty \Longleftrightarrow \mathrm{len}_A(M') < \infty, \mathrm{len}_A(M") < \infty.$$

Neste caso,

$$\mathrm{len}_A(M) = \mathrm{len}_A(M') + \mathrm{len}_A(M").$$

Demonstração 12 Para a primeira afirmação, suponha que M é Artiniano e Noetheriano. Podemos construir uma série de composição da seguinte forma: como M é Artiniano, tome M_1 como o submódulo minimal dentre os submódulos não nulos de M. Assim, M_1 é irredutível. Dentre os submódulos de M que contém M_1 tome M_2 minimal, desta maneira pelo Teorema 1 segue que M_2/M_1 é irredutível. Repetindo esse processo, teremos uma cadeia ascendente

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M$$

que estabiliza, pois M é Noetheriano. Portanto, $\mathrm{len}_A M < \infty$. Reciprocamente, utilizando indução sobre $\mathrm{len}_A M$. Se $\mathrm{len}_A M = 0 \Rightarrow M = 0$, se $\mathrm{len}_A M = 1 \Rightarrow M$ é simples. Além disso, em ambos os casos M é Artiniano e Noetheriano. Tome $n = \mathrm{len}_A M$. Agora, suponha por hipótese de indução que todo módulo de comprimento menor que n é Artiniano e Noetheriano. Se $n > 1$, existe uma série de composição

$$M = M_n \supsetneq \cdots \supsetneq M_0 = 0$$

tal que $M_{i+1}/M_i, i = 0, \cdots n-1$ é simples. Considerando a seqência exata

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0,$$

observa-se que como M_1 é simples, então $\mathrm{len}_A M_1 < n = \mathrm{len}_A M$. Logo, pela hipótese de indução, M_1 é Artiniano e Noetheriano. Considere a série de composição simples de M/M_1 dada por

$$M/M_1 = M_d/M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_1/M_1 = 0;$$

$(M_i/M_1)/(M_{i-1}/M_1) \simeq M_i/M_{i-1}$. Daí, $\text{len}_A\, M/M_1 \leq d < n$ e,novamente pela hipótese de indução, M/M_1 é Artiniano e Noetheriano. Portanto, M é Artiniano e Noetheriano. Utilizando indução sobre $\text{len}_A\, M = d$ para a segunda afirmação: Se $d = 0$ não há nada a fazer. Suponha $\text{len}_A\, M < d$. Considere

$$M = M_d \supsetneq \cdots \supsetneq M_1 \supsetneq M_0 = 0$$

uma série de composição de tananho d. Pela demonstração do item anterior, $\text{len}_A(\frac{M}{M_1}) \leq d-1$ e, pela hipótese de indução, todas as series de composição de $\frac{M}{M_1}$ possuem mesmo tamanho $d-1$. Seja

$$M = M'_e \supsetneq \cdots \supsetneq M'_1 \supsetneq M'_0 = 0$$

uma segunda série de composição de M. Observe que, como M_1 é simples temos $M'_i \cap M_1 = 0$ ou $M'_i \cap M_1 = M_1$. Tome r o menor dos i para o qual $M'_r \cap M_1 = M_1 \Longrightarrow M_1 \subseteq M'_r$. Assim,

$$\frac{M}{M_1} = \frac{M'_e}{M_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \frac{M'_r}{M_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \frac{M'_1}{M_1} \supsetneq 0,$$

onde $\frac{M'_r}{M_1} = \frac{M'_{r-1}+M_1}{M_1}$. Portanto,

$$\frac{M}{M_1} = \frac{M'_e}{M_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \frac{M'_{r-1}+M_1}{M_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \frac{M'_0+M_1}{M_1} = 0$$

é uma série de composição de $\frac{M}{M_1}$ com tamanho $e-1$. Dessa forma, aplicando a hipótese de indução, $d-1 = e-1$ e assim, $d = e$. Para a aditividade em sequências exatas, considere a sequência

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

exata de A-módulos. Sem perda de generalidade podemos supor $M' \subseteq M$ e $M'' = \frac{M}{M'}$. Assumindo $\text{len}_A\, M < \infty$, pelo item 1, M é Artiniano e Noetheriano e, aplicando o teorema 5, M' e M'' são Artinianos e Noetherianos. Novamente, pelo item 1, $\text{len}_A\, M' < \infty$ e $\text{len}_A\, M'' < \infty$. Considere $M' = M'_d \supsetneq \cdots \supsetneq M'_1 \supsetneq M'_0 = 0$ e $M'' = M''_e \supsetneq \cdots \supsetneq M''_1 \supsetneq M''_0 = 0$ duas séries de composição de M' e M'', respectivamente. Denote o submódulo de M correspondente ao submódulo M''_i de M'' por

$$\widetilde{M}''_i \supseteq M',$$

então

$$M = \widetilde{M}''_e \supsetneq \cdots \supsetneq \widetilde{M}''_0 = M' = M'_d \supsetneq \cdots \supsetneq M'_0 = 0$$

é uma série de composição de M de tamanho $d+e$. Logo, $\text{len}_A\, M = d+e = \text{len}_A\, M' + \text{len}_A\, M''$.

Definição 14 Sejam A e B anéis. Dizemos que B é uma *A-álgebra* quando existir um homomorfismo $A \longrightarrow B$ tal que B é um A-módulo. Em particular, se $A = K$ é um corpo B é dito ser uma K-álgebra se em B estiver definida uma multiplicação, que denotaremos por $(*)$, e as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $(\alpha v) * u = v * (\alpha u), \forall \alpha \in K, \forall u, v \in B$;
2. $u * (v + w) = u * v + u * w, \forall u, v, w \in B$;
3. $(u + v) * w = u * w + v * w, \forall u, v, w \in B$.

Lema 2 *Seja A um anel e M um A-módulo.*

1. *Se $a \subseteq A$ é um ideal tal que $aM = 0$ então $\operatorname{len}_A M = \operatorname{len}_{A/a} M$.*
2. *(**Localização**)* $\operatorname{len}_A M = \sum_{m \in Specm A} \operatorname{len}_{A_m} M_m$.
3. *(**Mudança de base**) Suponha que (A, m, K) seja local e que (B, n, L) é uma A-álgebra local. Se N é um B-módulo, então*

$$\operatorname{len}_A N = [L : K] * \operatorname{len}_B N.$$

Demonstração 13

1. Como $aM = 0$ e os submódulos de M são naturalmente (A/a)-módulos, uma série de composição de M visto como A-módulo é o mesmo que uma série de composição de M visto como (A/a)-módulo. Dessa forma, $\operatorname{len}_A M = \operatorname{len}_{A/a} M$.
2. Considere

$$M = M_n \supsetneq \cdots \supsetneq M_1 \supsetneq M_0 = 0$$

uma série de composição de M sobre A, pelo Lema 1, com $m_i \subset A$ maximal. Para $p \in SpecA$, temos

$$(A/m_i)_p = \begin{cases} \frac{A_{m_i}}{m_i A_{m_i}} = A/m_i, & p = m_i \\ 0, & p \neq m_i \end{cases}.$$

Note que, usando a propriedade de localização, temos

$$(\frac{A}{m_i})_p = \frac{A_p}{m_i A_p}$$

e, considerando $p \neq m_i$, existe $x \in m_i$ tal que $\frac{1}{x} \in A_p$. Portanto, $A_p \subset m_i A_p$. Assim, $M_p = (M_n)_p \supseteq \cdots \supseteq (M_1)_p \supseteq (M_0)_p = 0$ é uma série de composição de M_p sobre A_p, na qual pela propriedade de localização, tem-se

$$\frac{(M_{i+1})_p}{(M_i)_p} \simeq (\frac{M_{i+1}}{M_i})_p \simeq (\frac{A}{m_i})_p.$$

Sempre que $(M_{i+1})_p = (M_i)_p$, temos

$$\frac{(M_{i+1})_p}{(M_i)_p} = 0 \Longrightarrow (\frac{A}{m_i})_p = 0 \Longrightarrow m_i \neq p.$$

Dessa forma, $n = \operatorname{len}_A M = \sum_{m \in \operatorname{Specm} A} \operatorname{len}_{A_m} M_m$.

3. Basta verificar a igualdade para o caso em que N é um B-módulo simples, ou seja, $\operatorname{len}_B N = 1$. Pelo Lema 1, temos $N \simeq B/n = L$. Como B é uma A-álgebra local, existe um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que $\varphi(m) \subseteq n$. Assim, $mN = 0$ e, pelo primeiro item, obtém-se

$$\operatorname{len}_A N = \operatorname{len}_{A/m} N = \dim_K L = [L : K].$$

Exemplo 23 Seja A um anel Noetheriano e seja $m \subset A$ um ideal maximal. Então, para todo $n \geq 0$, o anel A/m^n é Artiniano. De fato, usaremos indução sobre n. Se $n = 0$ é imediato. Suponha que para $n > 0$, $\operatorname{len} A/m^{n-1} < \infty$. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{m^{n-1}}{m^n} \longrightarrow \frac{A}{m^n} \longrightarrow \frac{A}{m^{n-1}} \longrightarrow 0.$$

Para mostrar que $\operatorname{len}_A A/m^n < \infty$, basta mostrar que $\operatorname{len}_A m^{n-1}/m^n < \infty$. Assim, pelo Lema 2, $\operatorname{len}_A m^{n-1}/m^n = \operatorname{len}_{A/m} \frac{m^{n-1}}{m^n} = \dim_{A/m} m^{n-1}/m^n$. Como m^{n-1} é finitamente gerado, por ser um ideal de um anel Noetheriano seque que $\dim_{A/m} m^{n-1}/m^n < \infty$. Dessa forma, aplicando o Teorema 7, temos

$$\operatorname{len}_A(A/m^n) = \operatorname{len}_A \frac{m^{n-1}}{m^n} + \operatorname{len}_A A/m^{n-1}.$$

Portanto, A/m^n é Artiniano.

4 MÓDULOS GRADUADOS

Neste cápitulo temos como objetivo definir assim como demonstrar alguns resultados associados a anéis e módulos graduados.

Definição 15 Seja $(G,+)$ um monóide comutativo. Dizemos que um *anel* R é *G-graduado* se seu grupo aditivo $(R,+)$ admite uma decomposição em soma direta de subgrupos abelianos R_g, isto é,

$$R = \bigoplus_{g\in G} R_g,$$

satisfazendo $R_gR_h \subseteq R_{g+h}, \forall g,h \in G$.

Observação 6
1. *Os elementos R_g são chamados de elementos homogêneos de grau g no anel graduado R.*
2. *Todo elemento $a \in R$ pode ser escrito de forma única como uma soma finita $a = \sum_{g\in G} a_g; a_g \in R_g$. Chamamos a_g de componente homogênea de grau g de a.*
3. *As graduações $R = R_0$ e $R_g = 0$ para cada $g \neq 0$ são chamadas de graduações triviais.*

Exemplo 24 *Os conjuntos $\mathbb{Z}, n\cdot\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}^n$ são Monóides Comutativos.*

Exemplo 25 Seja S um anel. Um exemplo padrão de um anel $\mathbb{N}$-graduado é o de polinômios $R = S[x_1, \cdots, x_n]$, com sua $\mathbb{N}$-graduação usual dada por

$$R = \bigoplus_{d\geq 0} R_d,$$

onde R_d é o conjunto dos polinômios homogêneos de grau d.

Exemplo 26 Seja $R = S[x]$ o anel de polinômios sobre um anel S. Podemos tornar R um anel $\mathbb{Z}_2$-graduado da seguinte forma:

$$R = S_p \oplus S_i,$$

onde $S_p = S + Sx^2 + Sx^4 + \cdots$ é a composição de grau $\bar{0}$ e $S_i = Sx + Sx^3 + Sx^5 + \cdots$ é a composição de grau $\bar{1}$.

Definição 16 Um morfismo $\varphi : R \longrightarrow S$ entre dois anéis G-graduados é dito ser *morfismo graduado* se preserva graduação, ou seja, se $\varphi(R_g) \subseteq S_g, \forall g \in G$.

Definição 17 Seja R um anel G-graduado. Dizemos que um *R-módulo M* é um *G-graduado* se seu grupo aditivo $(M,+)$ admite uma decomposição em soma direta de subgrupos abelianos M_g, ou seja,

$$M = \bigoplus_{g\in G} M_g$$

satisfazendo $R_gM_h \subseteq M_{g+h}, \forall g,h \in G$.

As observações feitas para o anel G-graduado também se aplicam ao módulo G-graduado. De modo similar, a definição de morfismos graduados entre anéis vale igualmente para módulos.

Definição 18 Sejam R um anel G-graduado e M um R-módulo G-graduado. Definimos o R-módulo G-graduado $M(d), d \in G$ como o R-módulo M dado por

$$M_g(d) := M_{d+g}; g \in G.$$

No qual, é dito ser o deslocamento por d.

Teorema 8 (Teorema da Base de Hilbert) *Se R é um anel Noetheriano, então $R[x]$ também é Noetheriano.*

Demonstração 14 Suponha que $R[x]$ não é Noetheriano, então existe um ideal $I \subseteq R[x]$ que não é finitamente gerado. Sejam $f_1(x) \in I$ de menor grau possível, $f_2(x) \in \frac{I}{(f_1)}$ de menor grau possível. Do mesmo modo, seja

$$f_n \in \frac{I}{(f_1, \cdots, f_{n-1})}.$$

Para cada i defina

$$\deg(f_i) := m_i \neq 0$$

e

$$f_i := a_i x^{m_i} + a_{i-1} x^{m_{i-1}} + \cdots a_0, a_i \in R.$$

Considere a cadeia

$$I_1 = (a_1) \subseteq I_2 = (a_1, a_2) \subseteq \cdots \subseteq I_n = (a_1, \cdots, a_n) \subseteq \cdots,$$

na qual cada componente é ideal em R. Desde que R seja Noetheriano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+1}$. Daí, $a_{n+1} \in I_n$. Tome

$$g(x) = f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{m_{n+1} - m_i} f_i(x).$$

Afirmações:

1. $g(x) \neq 0$.
2. $g(x) \notin (f_1, \cdots, f_n)$.
3. $\deg(g(x)) < \deg(f_{n+1}(x))$.

Com efeito, se $g(x) = 0$, então $f_{n+1}(x) \in (f_1, \cdots, f_n)$ o que é uma contradição. Supondo que $g(x) \in (f_1, \cdots, f_n)$, temos que

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{m_{n+1} - m_i} f_i(x),$$

implicando que $f_{n+1}(x) \in (f_1, \cdots, f_n)$. Portanto, $g(x) \notin (f_1, \cdots, f_n)$. Observando $g(x)$, e analisando o somatório é fácil ver a terceira afirmação. Logo, f_{n+1} não é o de menor grau possível em $\frac{I}{(f_1, \cdots, f_n)}$. Portanto, $R[x]$ é Noetheriano.

Corolário 2 *Sejam R um anel Noetheriano e $x_1, \cdots, x_n$ indeterminadas. Então o anel de polinômios $R[x_1, \cdots, x_n]$ é Noetheriano. Em particular, se K é um corpo qualquer, então $K[x_1, \cdots, x_n]$ é Noetheriano.*

Demonstração 15 Utilizaremos indução sobre n. Caso $n = 1$, pelo Teorema 8 segue que $R[x_1]$ é Noetheriano. Suponhamos assim que $R[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ é Noetheriano. considerando $R' = R[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ e aplicando o Teorema 8 em R', tem-se $R'[x_n]$ Noetheriano. Note que,

$$R'[x_n] = R[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n] = R[x_1, \cdots, x_n].$$

Portanto, $R[x_1, \cdots, x_n]$.

A proposição apresentada abaixo é uma generalização do Teorema 8, envolvendo estruturas mais complexas, mas mantendo a essência do teorema original, que é a propriedade de serem Noetherianos, ou seja, a condição de que todo ideal seja finitamente gerado, aplicada agora em um contexto ampliado.

Proposição 5 *Seja $R = \bigoplus_{d\geq 0} R_d$ um anel graduado. Então R é Noetheriano se, e somente se, R_0 é Noetheriano e R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0.*

Demonstração 16 Suponha que R é finitamente gerado como R_0-álgebra e que $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R_0$ sejam geradores de R. Defina o homomorfismo

$$\varphi : R_0[x_1, \cdots, x_n] \longrightarrow R$$

por $\varphi(x_i) = a_i$. Dado $m \in R$. Considere $f \in R_0[x_1, \cdots, x_n]$ tal que

$$\varphi(f) = \varphi(\sum b_j P_j(x_1, \cdots, x_n)) = \sum b_j P_j(a_1, \cdots, a_n)$$

então, $m = \sum b_j P_j(a_1, \cdots, a_n)$. Pelo Teorema 1, tem-se

$$\frac{R_0[x_1, \cdots, x_n]}{\ker(\varphi)} \simeq \mathrm{Im}(\varphi) = R$$

e, portanto, pelo Teorema 8, $R_0[x_1, \cdots, x_n]$ é Noetheriano. Logo, R é Noetheriano. Reciprocamente, ao considerar $I = \bigoplus_{d\geq 1} R_d$ como um ideal de R, segue que $\frac{R}{I}$ é Noetheriano. Como $R = \bigoplus_{d\geq 0} R_d$, conclui-se $R/I \simeq R_0$. Assim, R_0 é Noetheriano e, por hipótese, I é finitamente gerado, digamos que seus geradores homogêneos sejam $a_1, \cdots, a_r$ com respectivos graus $n_1, \cdots, n_r$. Seja $R' = R_0[a_1, \cdots, a_r]$, para mostrar que $R = R'$ é suficiente verificar a inclusão $R_n \subseteq R', \forall n \geq 0$. Pela definição de R' temos que $R_0 \subseteq R'$. Por indução, assuma $R_d \subseteq R', \forall d \leq n-1$ e $n > 0$. Desde que $I = \bigoplus_{d\geq 1} R_d$, temos que $R_n \subseteq I$ e daí, dado $a \in R_n$, podemos escrever

$$a = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i,$$

onde c_i é um elemento homogêneo de grau $n - n_1 < n$. Pela hipótese de indução, $c_i \in R_{n-n_i} \subset R'$ e uma vez que $a_i \in R'$, conclui-se $a \in R'$.

Proposição 6 *Seja $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ um anel graduado. Assuma que R_0 é artiniano e R finitamente gerado como R_0-álgebra. Se $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ é um R-módulo graduado finitamente gerado, então cada M_n é finitamente gerado como R_0-módulo.*

Demonstração 17 Por hipótese, R_0 é artiniano e R é finitamente gerado como R_0-álgebra, pela proposição anterior R é Noetheriano.Considerando $N_m = M_n \bigoplus(\bigoplus_{m>n} M_m)$ temos que, N_n é finitamente gerado sobre R, digamos que $x_1, \cdots, x_t$ sejam seus geradores. Por definição de N_n, cada x_i pode ser escrito como $x_i = y_i + z_i$, com $y_i \in M_n$ e $z_i \in \bigoplus_{m>n} M_m$.
Afirmação: $y_1, \cdots, y_t$ geram M_n sobre R_0. Com efeito, se $y \in M_n \subset N_m$, então y é da forma

$$y = \sum_{i=1}^{t} a_i x_i, a_i \in R.$$

Pela graduação de R, podemos escrever $a_i = b_i + c_i$ com $b_i \in R_0$ e $c_i \in (\bigoplus_{j>0} R_j)$. Dessa forma,

$$y = \sum_{i=1}^{t} (b_i + c_i)(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{t} b_i y_i$$

pois, $b_i z_i, c_i y_i$ e $c_i z_i \in \bigoplus_{m>n} M_m$.

Corolário 3 *Com as mesmas hipóteses da proposição anterior, o comprimento* $\text{len}_{R_0}(M_n) < \infty, \forall n \geq 0$.

Definição 19 Sejam R um anel G-graduado e M um R-módulo G-graduado. Um *submódulo $N \subseteq M$* é dito *G- graduado* se N herda a graduação de M, ou seja, $(N, +)$ se decompõe como

$$N = \bigoplus_{g\in G} N \cap M_g.$$

Dizemos que um ideal $I \subseteq R$ é ideal homogêneo se I é submódulo graduado de R, visto como R-módulo.

Observação 7 *O quociente de M por N admite graduação natural, dada por*

$$M/N = \bigoplus_{g\in G} \frac{M_g}{N \cap M_g}.$$

Além disso, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N.$$

Proposição 7 *Considere $(G, +)$ um grupo abeliano, $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ um anel G-graduado e $I \subseteq R$ um ideal. Então são equivalentes:*

1. *I é ideal homogêneo.*
2. *Para todo $a = \sum_{g\in G} a_g$ em $R, a \in I$ se, e somente se, $a_g \in I, \forall g \in G$.*

3. I é gerado por elementos homogêneos.

Demonstração 18 A equivalência entre (1) e (2) segue das definições. Para a (3) $\Longrightarrow$ (1), suponha que I seja gerado pelos elementos homogêneos a_i. Daí, cada $a \in I$ é da forma

$$a = a_{i_1}b_1 + \cdots + a_{i_n}b_n; b_i \in R.$$

Como R é G-graduado, escreva $b_i = \sum_{g\in G} b_{i,g}; b_{i,g} \in R_g$. Assim, o termo de grau g em a é

$$a_g = a_{i_1}b_{1,g-\deg(a_{i_1})} + \cdots + a_{i_n}b_{n,g-\deg(a_{i_n})}.$$

Então, $a_g \in I$.

Lema 3 (Nakayama) *Sejam (R, m, K) um anel local, $a \subsetneq R$ um ideal próprio e M um R-módulo finitamente gerado. Se $aM = M$, então $M = 0$.*

Demonstração 19 Tome $w_1, \cdots, w_r$ geradores de M. Dado $w_r \in M_r$, como $aM = M$, existem $a_{rj} \in a$ tal que

$$w_r = \sum_{j=1}^{r} a_{rj}w_j.(*)$$

Considere T a matriz $r \times r$ da seguinte forma:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Denote por I a matriz identidade. Podemos reescrever $(*)$ por

$$(I - T)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow w_i = 0, \forall i = 1, \cdots, r.$$

Portanto, $M = 0$.

Lema 4 (Nakayama homogêneo) *Sejam $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ um anel graduado, sendo (R_0, m_0, K) um anel local e $m = m_0 \bigoplus_{n>0} R_n$ o ideal homogêneo maximal de R. Se M é um R-módulo graduado finitamente gerado então*

$$\mu_R(M) := \dim_K(M/mM).$$

$\mu_R(M)$ é a quantidade mínima de geradores homogêneos de M.

Demonstração 20 Sejam $m_1, \cdots, m_s \in M$ geradores de M tais que $\bar{m_1}, \cdots, \bar{m_s} \in M/mM$ formam uma base, onde $r \leq s$. Assim, $\mu_R(M) = s \geq r$. Defina

$$N = \langle m_1, \cdots, m_r \rangle = M/mM.$$

Dessa forma, $M = N + mM$ e assim, $M/N = m/N$. Suponha que $M \neq N$, então M/N é um R-módulo não-nulo graduado finitamente gerado. Daí, tome s o menor inteiro tal que $(M/N)_s \neq 0$. Então, $(M/N)_s = m_0(M/N)_s$ e pelo Lema 3, $(M/N)_s = 0$.
Portanto,

$$M = N$$

e

$$\mu_R(M) = s \leq r,$$

ou seja, $\mu_R(M) = r = \dim_K(M/mM)$.

5 APLICAÇÕES: VARIEDADES AFINS E O TEOREMA DE NULLES-TELLENSATZ

Como uma aplicação do Teorema dos Zeros de Hilbert e do contexto de módulos, nesse capítulo vamos enunciar e provar o Teorema 9 o qual garante que sobre um corpo algebricamente fechado que o único ideal que representa a variedade afim vazia é o próprio anel dos polinômios. Uma variedade afim pode ser definida como o conjunto de soluções de um sistema de equações polinomiais em um espaço afim $\mathbb{A}^n_K$ sobre K o qual é conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com $x_i \in K$, munido da topologia de Zarisk cujos fechados são zeros de polinômios.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 20 Seja K um corpo e $K[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre K. Para um conjunto $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, define-se o conjunto de zeros ou *variedade afim* associada a S como:

$$V(S) = \{a \in K^n \mid f(a) = 0, \forall f \in S\}.$$

É importante ressaltar que essa definição faz sentido por conta do Teorema da Base de Hilbert, uma vez que todo ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ é finitamente gerado. Caso contrário, não seria possível encontrar o conjunto de zeros.

Em particular, se considerarmos $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ como um ideal gerado por um conjunto finito de polinômios $f_1, f_2, \ldots, f_m$, a variedade afim associada a esse ideal I é definida como:

$$V(I) = V(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \{a \in K^n \mid f_i(a) = 0, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Por convenção, vamos denotar variedades afins apenas por V.

Exemplo 27

1. A variedade afim associada ao polinômio $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ em $\mathbb{R}[x, y]$ é

   $$V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

   que é o círculo unitário no plano.

2. Outros exemplos de variedades afins são: parábolas, hiperbóles e elipses.

Através da definição de variedade associada a um ideal e dos exemplos acima, podemos induzir um mapa

$$I \longrightarrow V(I).$$

Por outro lado, também podemos definir:

Definição 21 Considere V uma variedade afim, definimos o *ideal* $I(V)$ por

$$I(V) := \{f \in K[x_1, \cdots, x_n]; f(x) = 0, \forall x \in V\}.$$

Observação 8 *Para I, J ideais tais que $V(I) = V(J)$ observe que não implica $I = J$. Com efeito, podemos considerar $K = \mathbb{R}$ e os ideais $I = (x^2 + y^2 + 1)$ e $J = (x^4 + y^6 + 2)$, note que ambos possuem variedade afim vazia pois não admitem soluções reais mas $I \neq J$.*

Com a finalidade de estabelecer uma correspondência injetiva entre variedades afim e ideais vamos precisar dos Teoremas de Nullstellensatz.

Teorema 9 (Fraco Nullstellensatz) *Se K é um corpo algebricamente fechado e $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ um ideal tal que $V(I) = \emptyset$. Então, $I = K[x_1, \cdots, x_n]$.*

Demonstração 21 É suficiente mostrarmos que $1 \in I$, para tal, usaremos indução sobre n. Caso $n = 1$, temos o anel $K[x_1]$, e $I \subset K[x_1]$ um ideal. Suponha que $V(I) = \emptyset$, ou seja, não existem zeros comuns para os polinômios em I. Desde que K seja um corpo algebricamente fechado, qualquer polinômio não constante tem pelo menos uma raiz. Daí, a única forma de $V(I) = \emptyset$ é se o ideal contiver o polinômio constante 1, pois esse é o único polinômio sem zeros em $K[x_1]$. Logo, $I = K[x_1]$. Agora, suponha que o Teorema é verdadeiro para polinômios em $n - 1$ variáveis, para o anel $K[x_2, \cdots, x_n]$.
Seja $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ um ideal, tal que $V(I) = \emptyset$. Escolha $f_1 \in I$ de grau $p \geq 1$. Se f_1 fosse uma constante, o ideal I já conteria 1, e o teorema estaria provado. Então, podemos supor que f_1 é um polinômio não constante. Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2' + a_2 x_1' \quad \dots \quad x_n = x_n' + a_n x_1',$$

onde $a_2, \ldots, a_n \in K$, tem-se

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_1(x_1', x_2' + a_2 x_1', \ldots, x_n' + a_n x_1') \\ &= c(a_2, \ldots, a_n)(x_1')^p + \text{termos de menor grau em } x_1'. \end{aligned}$$

Note que o termo $c(a_2, \ldots, a_n)$ é um polinômio não nulo, pois f_1 tem grau p. Desde que K seja um corpo algebricamente fechado e, portanto, infinito, podemos aplicar (D. COX J. LITTLE, 2015, Proposition 5, Chapter 1). Essa Proposição garante que $f = 0$ em $K[x_1, \cdots, x_n]$ se, e somente se, $f : K^n \longrightarrow K$ é a função zero. Isso implica que, podemos escolher os valores de $a_2, \ldots, a_n$ de modo que $c(a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. Com essa escolha, todo polinômio $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ vai para um polinômio $f' \in K[x_1', \cdots, x_n']$. Considere $I' = \{f'; f \in I\}$ um ideal de $K[x_1', \cdots, x_n']$, tal que $V(I') = \emptyset$. É suficiente mostrar que $1 \in I'$, pois as constantes não são afetadas pela mudança de variável implicando assim $1 \in I$. Desde que $I' \subset I$, $f_1' \in I'$ pode ser escrito da forma:

$$f_1'(x_1', x_2', \ldots, x_n') = c(a_2, \ldots, a_n)(x_1')^p + \text{termos de menor grau em } x_1',$$

com $c(a_2, \cdots, a_n) \neq 0$. Considere $I_1' = I' \cap K[x_2', \cdots, x_n']$ ideal. Aplicando a observação 9 tem-se,

$$\pi_1(V(I')) = V(I_1') \Longrightarrow V(I_1') = \pi_1(\emptyset) = \emptyset.$$

Logo, pela hipótese de indução $I_1' = K[x_2', \cdots, x_n']$, isto é, $1 \in I_1' \subset I'$, e portanto, $I = K[x_1, \cdots, x_n]$.

Definição 22 Dado $I = \langle f_1, \cdots, f_s \rangle \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ o l-ésimo ideal de eliminação é o ideal $K[x_{l+1}, \cdots, x_n]$ definido por

$$I_l = I \cap K[x_{l+1}, \cdots, x_n].$$

Observação 9 *Seja $V = V(f_1, \cdots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$, e suponha para algum i, o polinômio f_i é da forma*

$$f_i = cx_1^N + \textit{termos de grau menor em } x_1.$$

Se I_1 é o primeiro ideal de eliminação, então em $\mathbb{C}^{n-1}$ vale a igualdade $\pi_1(V) = V(I_1)$, onde π_1 é a projeção nos últimos $n-1$ componentes, ver (D. COX J. LITTLE, 2015, p.127).

Portanto, a ausência de zeros força o ideal a conter o polinômio 1, o que, por sua vez, implica que o ideal é o anel de polinômios inteiro.

Definição 23 Seja $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ um ideal, o conjunto

$$\sqrt{I} := \{f \in K[x_1, \cdots, x_n]; \exists m \in \mathbb{N}, \text{tal que} f^m \in I\}$$

é um ideal, o qual é chamado *radical* de I. Além disso, o ideal I é dito radical se $I = \sqrt{I}$.

Proposição 8 *Sejam I, J ideais de $K[x_1, \cdots, x_n]$. Então valem as seguintes:*

1. *$I \subset \sqrt{I}$;*
2. *$\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$;*
3. *Se $J \subset I$, então $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$.*

Exemplo 28 Seja $I \subset \mathbb{R}[x]$ o ideal finitamente gerado pelo polinômio $f(x) = x^2 + 1$. Dado $g(x) \in \sqrt{I}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(x)^n \in I$. Daí,

$$g(x)^n = h(x) \cdot f(x)$$

para algum $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Então, $f(x)/g(x)^n$. Desde que $f(x)$ seja irredutível em $\mathbb{R}[x]$ temos que $f(x)/g(x)$. Portanto, $g(x) \in I$ e dessa forma, I é um ideal radical, ou seja, $I = \sqrt{I}$.

Teorema 10 (Nullstellensatz Hilbert) *Seja K um corpo algebricamente fechado, $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_s \rangle \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ um ideal e $V = V(I)$. Seja $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ tal que*

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall (a_1, \cdots, a_n) \in V.$$

Então, $f \in \sqrt{I}$.

Demonstração 22 Dado $f \in I(V(I)$ é suficiente mostrarmos que existem $m \geq 1$ inteiro e polinômios $A_1, \cdots, A_m$ tais que

$$f^m = A_1 f_1 + \cdots + A_m f_m.$$

Para mostrar essa fato, consideremos o ideal

$$J = \langle f_1, f_2, \cdots, f_s, 1 - yf \rangle \subset K[x_1, \cdots, x_n, y].$$

Para $(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1})$ ponto de K^{n+1} temos duas possibilidades:

- Ou $(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1})$ é zero comum de $f_i, i = 1, \cdots, s$.
- Ou $(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1})$ não é zero comum de $f_i, i = 1, \cdots, s$.

No primeiro caso temos que $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$ desde que $f \in I(V(I))$ e assim

$$(1 - yf)(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) = 1 \neq 0$$

e assim $V(J) = \emptyset$. No segundo caso, existe i de modo que $f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$. Olhando f_i como uma função de $n+1$ variáveis que independe da última variável concluímos que $f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \neq 0$ e portanto $(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \notin V(J)$. Em ambos os casos concluímos que $V(J) = \emptyset$. Pela versão fraca do Teorema de Nullstellensatz concluímos que $1 \in J$ e podemos escrever

$$1 = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_1, \cdots, x_n, y) f_i + q(x_1, \cdots, x_n, y)(1 - yf)$$

para $q_i, q \in K[x_1, \cdots, x_n, y]$. Tomando $y = 1/f(x_1, \cdots, x_n)$ em $K[x_1, \cdots, x_n](y)$ segue que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_1, \cdots, x_n, 1/f) f_i \Rightarrow f^m = \sum_{i=1}^{n} A_i f_i,$$

sendo $m \geq 1$ inteiro suficientemente grande de modo que cancele os denominadores. Mostramos assim que $f \in \sqrt{I}$ como desejado.

Teorema 11 (Forte Nullestellensatz) *Seja K um corpo algebricamente fechado.Se I é um ideal em $K[x_1, \cdots, x_n]$, então*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Demonstração 23 Note que, $I(V(I)) \subset \sqrt{I}$, pois dado $f \in I(V(I))$, por definição, $f(x) = 0, \forall x \in V(I)$ e aplicando o Teorema 10, $f \in \sqrt{I}$. Por outro lado, dado $g \in \sqrt{I}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m \in I$. Note que, pela correspondência entre ideais e variedades, tem-se

$$f^m(v) = 0,$$

para algum $v \in K^n$. Em particular, $f(v) = 0$. Daí, $f \in I(V(I))$.

Vale destacar que existem situações em que a igualdade demonstrada no Teorema 11 não vale caso não seja considerado sob um corpo algebricamente fechado, como ilustrado no exemplo seguinte:

Exemplo 29 Considere $K = \mathbb{R}$ um corpo que não é algebricamente fechado. Seja $I = \langle x^2 + 1\rangle \subset \mathbb{R}[x]$ um ideal. Note que, $V(I) = \emptyset$, pois dado $f \in I$, $\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$. Assim, o ideal de todos os polinômios que se anulam no conjunto vazio é o ideal total, ou seja, $I(V(I)) = \mathbb{R}[x]$. Além disso, como I é um ideal radical segue que

$$I = \sqrt{I} \neq I(V(I)).$$

A principal consequência do Nullstellensatz é que ele nos possibilita estabelecer uma "conexão"entre geometria e álgebra. Essa conexão se fundamenta no seguinte teorema.

Teorema 12 *1. Seja K um corpo arbitrário, os mapas*

$$\textit{Variedade Afim} \xrightarrow{\varphi} \textit{Ideal}$$

e

$$\textit{Ideal} \xrightarrow{\psi} \textit{Variedade afim}$$

são inclusões reversas, isto é, se $I_1 \subset I_2$, então $V(I_1) \supset V(I_2)$. Dá mesma forma, se $V_1 \subset V_2$, então $I(V_1) \supset I(V_2)$. Em particular,

$$V(I(V)) = V.$$

2. Se K é algebricamente fechado e se restrigirmos a ideais radicais os mapas φ e ψ são bijeções reversas de inclusão e inversas uma da outra.

Demonstração 24 Para o item 1, dado $v \in V(I_2)$, tem-se $f(v) = 0, \forall f \in I_2$ e como $I_1 \subset I_2, \forall f' \in I_1, f'(v) = 0$. segue que $v \in V(I_1)$ e portanto, $V(I_2) \subset V(I_1)$. Por outro lado, dado $f \in I(V_2)$ tem-se $f(x) = 0, \forall x \in V_2$. Como $V_1 \subset V_2$, temos que $\forall x' \in V_1, f(x') = 0$. Daí, $f \in I(V_1)$. Assim, $I(V_2) \subset I(V_1)$. Agora mostremos que $V(I(V)) = V$. De fato, considerando $f_1, \cdots, f_s \in I(V)$, temos que $(f_1, \cdots, f_s) \subset I(V)$ o que implica $V(I(V)) \subset V((f_1, \cdots, f_s)) = V$. A inclusao contrária segue imediatamente da definição de V. Por último, pelo primeiro item, $V = V(I(V))$. Resta mostrar que $I(V(I)) = I$. Desde que K seja um corpo algebricamente fechado, aplicando o Teorema 11,

$$\sqrt{I} = I(V(I))$$

e como $I = \sqrt{I}$ segue que, I e V são inversas uma da outra e, assim, definem bijeções entre si.

Uma importante consequência da correspondência entre ideias e variedades consiste na caracterização dos ideais maximais de $K[x_1, \ldots, x_n]$ para um corpo algebricamente fechado K. Com efeito,

Proposição 9 *Sejam K um corpo e $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios. O ideal $I = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle$ de A é maximal, para constantes $a_i \in K, i = 1, \cdots, n$.*

Demonstração 25 Dado J ideal de A tal que $I \subset J \subset A$, suponha $I \neq J$. Dessa forma, existe $f \in J$ com $f \notin I$ e aplicando o algoritmo da divisão para n variáveis c.f. (D. COX J. LITTLE, 2015, Theorem 3, p.g. 64) podemos escrever

$$f = A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) + b,$$

onde cada A_i é ... e $b \in K - \{0\}$. Mas então, $b = f - A_1(x_1 - a_1) - \cdots - A_n(x_n - a_n) \in J$ o que implica $J = A$.

Desde que $V(\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle) = \{(a_1, \cdots, a_n)\}$, dado $P = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ o associamos ao ideal maximal $\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle$. A recíproca dessa implicação não é verdadeira quando K não é algebricamente fechado, por exemplo, $I = \langle x^2 + 1\rangle$ é um ideal maximal em $\mathbb{R}[x]$ mas o mesmo não corresponde a um ponto de $\mathbb{R}$.

Observação 10 *Os maximais correspondem a pontos em K^n.*

Teorema 13 *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios. Se I é ideal maximal de A, então existem $a_1, \cdots, a_n \in K$ tal que $I = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle$.*

Demonstração 26 Como I é ideal maximal em A temos $I \neq A$ e assim pelo Teorema 9 segue que $V(I) \neq \emptyset$, ou seja, existe $(a_1, \cdots, a_n) \in V(I)$. Em termos de ideais vamos ter a inclusão

$$I(V(I)) \subset I(\{(a_1, \cdots, a_n)\})$$

e pelo Teorema 11 vamos ter $I(V(I)) = \sqrt{I} = I$, logo

$$I \subseteq I(\{(a_1, \cdots, a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle \subseteq A.$$

Desde que I é maximal segue que $I = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle$.

REFERÊNCIAS

D. COX J. LITTLE, D. O'Shea. **Ideals, Varieties, and Algorithms**: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. [*S.l.*], 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-662-41154-4.

JESUS, E. V. de *et al.* **Módulos e grupos abelianos finitamente gerados**. [*S.l.*], 2017. Disponível em: https://ri.ufs.br/handle/riufs/6512.

SANTOS, J. T. D. **A Regularidade de Castelnuovo-Mumford de Módulos sobre Anéis de Polinômios**. [*S.l.*], 2018. Disponível em: https://ri.ufs.br/handle/riufs/7549.

TEGAN E.; BORGES, H. **Álgebra comutativa em 4 movimentos**. [*S.l.*], 2014. Disponível em: https://impa.br/page-livros/algebra-comutativa-em-quatro-movimentos.