UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CAMPUS PROF. ALBERTO CARVALHO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE ITABAIANA – DMAI

KLEBER LUCAS FREITAS SOUSA

UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Itabaiana - Sergipe
2024

KLEBER LUCAS FREITAS SOUSA

UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática de Itabaiana da Universidade Federal de Sergipe, como requisito avaliativo para obtenção de grau de licenciado em Matemática.
Orientador (a): Prof. Me. Wagner Ferreira Santos

Itabaiana - Sergipe
2024

KLEBER LUCAS FREITAS SOUSA

UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção de grau de licenciado ou licenciada em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Me. Wagner Ferreira Santos
Universidade Federal de Sergipe
Orientador

____

Prof. Dr. Mateus Alegri
Universidade Federal de Sergipe
Examinador 2

____

Profa. Dra. Marta Élid Amorim Mateus
Universidade Federal de Sergipe
Examinador 3

Resultado: ______________________________ Data: ____/____/_____

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus, pelo dom da vida e por todas as oportunidades que me tem proporcionado, sem ele, certamente não poderia concluir este trabalho.

Quero agradecer também pela minha esposa, Islaine Yasmin, que em todos os momentos, fáceis ou difíceis, esteve ao meu lado, me dando todo o apoio necessário para que pudesse concluir mais uma realização em minha vida. A realização de um, torna-se para mim, a nossa realização.

Desde pequeno, o sonho de me formar no curso de Licenciatura em Matemática, foi compartilhado por mulheres que sonharam meus sonhos, juntamente ao meu lado. Com este trabalho, estou um passo mais perto desse grande sonho, por isso, sou grato a minha mãe Helenice e a minha avó materna Josefa Neuzisse, que em todos os momentos se demonstraram mulheres fortes e pacientes.

Agradeço também a meu Pai, Jailton, que em todos os momentos se preocupou comigo, demonstrando o enorme carinho por seu filho. Aos meus tios, Genilton e Divani, que certamente se alegram com minhas vitórias.

A todos os professores do Departamento de Matemática de Itabaiana – DMAI, que enriquecem o nosso curso, proporcionando novas experiencias para os discentes, contribuindo para uma melhor formação de futuros professores.

Quero também agradecer ao meu Orientador Wagner, que com muita paciência e disponibilidade me direcionou, desde o início, ao fim deste trabalho. Meus sinceros agradecimentos e admiração pelo bom trabalho executado no Departamento de Matemática Itabaiana – UFS.

RESUMO

O ensino de Análise Combinatória muitas vezes é reduzido à aplicação de fórmulas prontas. Este trabalho propõe uma abordagem investigativa para o ensino de tópicos de Análise Combinatória, especificamente em relação a contagens de anagramas. Em substituição do enfoque de aplicação de fórmulas, os alunos foram conduzidos por uma sequência de atividades investigativas envolvendo enumeração de anagramas e incentivados a explorar processos de contagem de forma autônoma, promovendo a construção de seus próprios resultados e justificativas. Assim, as atividades propostas visaram incentivar uma relação mais ativa e participativa com a matemática, nas quais o estudante se tornasse protagonista na construção de seu conhecimento. Esse processo destacou o papel ativo do aluno na busca por soluções próprias, tornando-o agente central de seu aprendizado. Além disso, permitiu que o professor observasse as dificuldades tanto na interpretação quanto na resolução das questões em sua origem. Contudo, a limitação de tempo acabou prejudicando uma exploração mais ampla.

Palavras-chave: Aula Investigativa; Análise Combinatória; Fórmulas; Contagens; Anagramas.

ABSTRACT

The teaching of Combinatorial Analysis is often reduced to the application of ready-made formulas. This work proposes an investigative approach to teaching Combinatorial Analysis topics, specifically related to anagram counting. Instead of focusing on formula application, students were guided through a sequence of investigative activities involving anagram enumeration and encouraged to explore counting processes autonomously, promoting the construction of their own results and justifications. Thus, the proposed activities aimed to foster a more active and participatory relationship with mathematics, in which students become protagonists in building their knowledge. This process highlighted the student's active role in seeking their solutions, making them central agents in their learning. Additionally, it allowed the teacher to observe difficulties in both interpretation and resolution of questions from their source. However, time limitations hindered a broader exploration.

Keywords: Investigative Class; Combinatorial Analysis; Formulas; Counting; Anagrams.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes, ao apresentarmos um conteúdo matemático para alunos do ensino básico, percebemos que surge uma dúvida constante por parte deles quanto à necessidade de aprender aquele tema. Segundo Merris (2003) “Para os não iniciados, a matemática pode aparecer apenas tantos números e fórmulas”. Nesta perspectiva, as aulas de matemática podem se tornar um estudo enfadonho para os alunos se não planejadas de forma adequada.

Quando não entendemos o real significado de ser um matemático, ou o real sentido de se estudar certos conteúdos matemáticos, não conseguimos associar o que estamos fazendo no papel com abstração necessária para absorver aquele conteúdo. Ou seja, quando não desempenhamos corretamente o estudo da matemática, corremos o risco de passar aos nossos alunos uma visão superficial do verdadeiro sentido da matemática. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001),

> Poderíamos pensar que cada um de nós, individualmente, pode viver sem necessidade de matemática ou, pelo menos, sem muitas das matemáticas estudadas na educação obrigatória. Mas essa crença somente existe porque, de fato, não vivemos sozinhos, mas em sociedade: em uma sociedade que funciona com base na matemática e na qual existem pessoas capazes de fazer matemática para atender às necessidades dos outros, mesmo quando estas não reconhecem suas próprias necessidades matemáticas. (pág. 45)

Mas como podemos mudar nossos métodos fazendo com que nossos alunos realmente façam parte do processo de aprendizagem da matemática, em especial do estudo de contagens da análise combinatória? Como instrui-los a se responsabilizarem por suas próprias soluções?

Esta não é uma pergunta trivial, com apenas uma solução. Entretanto, tentaremos ilustrar com as pesquisas feitas em sala e com as experiências vividas pelos alunos, como podemos mudar o modelo de aprendizagem, no qual, a matemática é só algo distante da realidade presenciada pelos alunos, com muitas fórmulas desnecessárias.

O trabalho será apresentado em três seções: Metodologia de Ensino e Pesquisa; Análise de Dados; Considerações. A primeira seção indicará como funciona o método de investigação matemática em sala de aula. Em particular, será elaborada e discutida uma sequência de atividades na subseção design de tarefas. Esta tem como objetivo facilitar a exploração de contagem de anagramas e posteriores interpretações combinatórias apoiando a investigação matemática. Na segunda seção, serão discutidos os dados obtidos após aplicação da metodologia na escola. Na última seção, serão feitas algumas considerações críticas sobre vantagens e limitações da aplicação do método de investigação matemática na sala de aula além de sugeridas algumas adaptações para possíveis trabalhos futuros.

1. METODOLOGIA DE ENSINO E PESQUISA

Quando mantemos uma postura tradicional de ensino, estamos induzindo nossos alunos de forma discreta a adotarem um posicionamento tradicional de mesma forma, na qual o professor mantém-se a frente dos alunos em todo o momento e os alunos são somente receptores do conhecimento passado. Contrário a esse posicionamento tradicional, Freire (1987) afirma que

> [...] o educador já não é o que apenas educa, mas o que, enquanto educa, é educado, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também educa. Ambos, assim, se tornam sujeitos do processo em que crescem juntos e em que os "argumentos de autoridade" já, não valem. (pág. 67)

Com base nisso, podemos perceber que o professor pode dividir a autoridade dos argumentos de aprendizagem e trazer o aluno à frente de seu próprio processo de aprendizagem. Dessa maneira, vemos que por meio de discussões entre os alunos e até entre aluno e professor, pode se fomentar uma visão crítica e lógica.

Nesta perspectiva, adotamos uma metodologia ativa que propõe ao aluno perceber padrões, responder questões e justificar o porquê, isto é, responsabilizar-se pela sua resposta. Isto difere do modelo tradicional de ensino, no qual o professor é visto como um validador das soluções dos alunos. A adoção dessa metodologia espera induzir uma mudança na postura do aluno: de um simples receptor de informações para um crítico matemático.

1.1. MÉTODO INVESTIGATIVO NA SALA DE AULA

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) "Investigar é procurar conhecer aquilo que não se sabe". A investigação no âmbito escolar consiste na busca pelo conhecimento por meio do raciocínio e construções lógicas possibilitando o aluno a formular conjecturas, tomando como base seu próprio saber.

Indo em contrapartida ao modelo tradicional de ensino, no qual o professor apresenta ao aluno os conteúdos que ele espera que sejam aprendidos, os alunos assumem o papel de matemáticos, desenvolvendo assim, a habilidade em criar e observar padrões presentes na matemática. "O processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para a frente e para trás." (PONTE; BROCADO; OLVEIRA, 2009, p. 15).

Então, ao invés do professor levar um problema que faça o aluno se perguntar qual fórmula vai utilizar, levar um problema que faça o aluno pensar nas possíveis soluções, ou até mesmo que o leve a chegar na generalização do problema, esse é um dos objetivos dessa metodologia.

Saber as possíveis dificuldades que serão enfrentadas pelos alunos no momento da preparação da atividade, nem sempre é uma tarefa fácil, entretanto, reconhecê-las antes do momento de aplicação da atividade é essencial para um bom sucesso da investigação, uma vez que, segundo Ponte (2014) “As tarefas que o professor propõe na sala de aula marcam de forma fundamental o ensino que este realiza.” (pág. 19)

Note que no método investigativo, o aluno ocupa a posição de protagonista no processo de aprendizagem. Isso não quer dizer que o professor não ocupe um papel importante, mas sim que o aluno e professor ocupem posições parecidas, quando nos referimos ao papel de matemático exercido por cada um. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) “O professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.”

É essencial que, para uma boa fluidez do processo investigativo realizado pelo aluno, o problema esteja bem definido e que o possibilite a pensar livremente. Por isso, antes e durante o processo de investigação são tomados alguns cuidados.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), definem quatro momentos durante a realização de uma investigação matemática:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (pág. 20)

O primeiro momento está ligado ao reconhecimento da atividade, ou seja, identificar quais são os possíveis caminhos, ou soluções alternativas do problema. Este é um momento crucial da investigação, pois, se há uma interpretação equivocada da tarefa proposta, isso afetará todo o processo de resolução.

Já depois do reconhecimento da atividade, se inicia o processo de formulação de conjecturas. Basicamente neste momento, serão feitas buscas por padrões que talvez em alguns momentos possam parecer corretos e em outros não. Para isso, além das formulações das conjecturas é importante que sejam testadas antes de serem assumidas como verdadeiras. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009):

> O teste de conjecturas é um aspecto do trabalho investigativo que os alunos, em geral, interiorizam com facilidade e que se funde, por vezes, com o próprio processo indutivo. Isto é, a manipulação dos dados começa a apontar no sentido de certa conjectura para logo em seguida essa ser refutada por um caso em que não se verifica. No entanto, existe alguma tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas num número reduzido de casos. (pág. 33)

A terceira e quarta etapa estão bem interligadas, pois na tentativa de uma demonstração de uma possível conjectura, precisamos que esteja bem definida e sem possíveis refutações durante o seu processo. Tal pensamento, nos ajuda no momento de comunicá-la, uma vez que, precisaremos de clareza para o processo de aceitação por terceiros. Com isso, concluímos as etapas do processo investigativo.

Embora os alunos tenham a tendência de usar suas conjecturas antes de demonstrá-las, talvez já tenham acesso em suas resoluções feitas informalmente, de como chegaram aquela conjectura e até mesmo esse próprio processo seja uma demonstração de seu pensamento. Porém, um dos objetivos da investigação é que ele consiga comunicar o processo de resolução e sua demonstração em grupo.

1.2. DESIGN DE TAREFAS

Para uma melhor compreensão da atividade, nesta seção apresentaremos como a sequência de tarefas foi formulada, quais objetivos específicos esperávamos que os alunos cumprissem e como planejamos a disposição das atividades divididas em cinco momentos. Da enumeração à contagem pretende levar os estudantes a perceberem a possibilidade de contagem sem necessariamente enumerar todos os elementos. Para os primeiros exemplos, são trabalhados anagramas sem repetição de letras. Para dar continuidade, o objetivo seguinte faz uma pequena generalização, apresentando palavras com repetição de um tipo de letra. Para concluir esse tipo de generalização, o terceiro objetivo é a contagem de anagramas com repetição de vários tipos de letras. Esses três primeiros objetivos concluem um dos principais objetivos de Análise Combinatória de contagem de anagramas em geral. O quarto objetivo é uma estratégia de resolução de problemas: a codificação com anagrama. Ela dará munição aos estudantes para resolver alguns problemas de contagem transformando-os em problemas de contagem de anagramas em geral que foi investigado no objetivo anterior. Por fim, o quinto objetivo é usar o anagrama como uma interpretação dos coeficientes dos números binomiais.

A seguir, detalhamos o objetivo de cada tarefa apresentada nesta sequência de ensino.

Indicamos como espera-se que cada uma delas possa colaborar no processo investigativo dos alunos. O design considera a falta de experiência dos alunos com aulas investigativas ao apresentar questões que pretendem induzir o raciocínio dos estudantes. Apresenta ainda um modelo de resolução para auxiliar professores que se interessem futuramente por aulas investigativas em suas abordagens para o ensino de Análise Combinatória.

1.2.1. Da Enumeração à Contagem

Para o design das tarefas contidas na sequência de atividades, pretende-se apresentar aos estudantes problemas envolvendo contagem de anagramas de uma palavra dada. Essa apresentação é feita de modo *paulatino*, inclusive com relação aos conceitos utilizados.

Primeiramente, é importante que os alunos percebam a diferença entre contar e enumerar. Na enumeração é feita uma lista completa de todos os elementos que satisfazem certa característica, o que pode demandar bastante tempo. Já a contagem é dizer a quantidade total de elementos que satisfazem certa característica.

As tarefas iniciais foram desenvolvidas partindo da enumeração para se chegar à contagem. O objetivo é fazer os alunos perceberem padrões de repetição e notarem que é possível contar sem a necessidade de enumerar, capacidade desenvolvida através do estudo da análise combinatória.

Por exemplo, as letras da palavra ANO podem ser reorganizadas, no máximo, como:

ANO, AON, NAO, NOA, OAN, ONA

Esta é uma enumeração do conjunto de palavras cuja contagem é seis. Numa primeira etapa de enumeração de todos os elementos de um certo conjunto, os estudantes podem apresentar dificuldades quanto à definição dos elementos que compõe a lista, por exemplo, considerar que a própria palavra ANO não faça parte da lista de seus anagramas, afinal não há trocas de posição de suas letras. Ou ainda, considerar apenas ANO e NAO, como os possíveis anagramas, porque apenas estas palavras têm sentido, desconsiderando o acento da palavra NÃO.

Para introduzir os conceitos de enumeração e contagem, propomos a seguinte tarefa.

Tarefa 1

Faça uma lista de todas as palavras distintas, com significado ou não, que podemos formar a partir da troca de posição das letras da palavra ANO. Incluindo a própria palavra, quantos elementos possui sua lista?

As enumerações apresentadas pelos estudantes podem ser classificadas em completa e incompleta. Qualquer enumeração com menos de 6 elementos ou com 6 elementos, mas algum deles repetidos, será classificada como incompleta. Por outro lado, as enumerações completas podem ser padronizadas ou não padronizadas. Um exemplo de enumeração completa padronizada é escrever as palavras em ordem alfabética ou ainda dividi-la em duas colunas como

$$\begin{array}{ll} ANO & AON \\ NAO & NOA \\ OAN & ONA \end{array} \tag{1}$$

Esta percepção de padrão poderá auxiliar na passagem do raciocínio enumerativo para o raciocínio de contagem. Note que no padrão com duas colunas de (1), as palavras formadas em cada linha são iniciadas pela mesma letra. A contagem pode ser obtida pela multiplicação do número de letras iniciais, três, pelo total de palavras formadas quando a letra inicial é fixada, dois. Isto é, sua contagem é igual a seis.

A partir dessa tarefa definimos o conceito de anagrama de uma palavra como sendo uma palavra obtida através de uma organização das letras que compõem aquela palavra dada, com ou sem sentido. Passaremos a dizer que o número de anagramas da palavra ANO é igual a seis, porque uma enumeração completa dos anagramas da palavra ANO possui seis elementos.

Espera-se que os estudantes notem que é vantajoso organizar a lista de anagramas de modo a evitar dúvidas na contagem. Por exemplo, quantos anagramas podemos formar a partir da palavra *CANO*? Caso não seja feito seguindo uma ordem ao listarmos as possibilidades, os alunos podem ter certa dificuldade em saber quais “palavras” faltam e se já teriam sido listadas todas elas a partir das trocas das letras. Para isso, seria interessante que organizassem os anagramas seguindo um padrão. Vale lembrar que uma das habilidades a ser desenvolvida, de acordo com a BNCC, é a de reconhecimento de padrões.

Com o objetivo de que os alunos percebessem um padrão na organização dos anagramas, propomos a seguinte tarefa.

Tarefa 2

Apresente os anagramas de $\mathcal{A}(CANO)$. Quantos começam com a letra C? E com a letra A? E com a letra N? E com a letra O?

Para reduzirmos a notação, definimos anteriormente a notação $\mathcal{A}(\ )$, como sendo a lista dos anagramas formados pela palavra inserida nela, isto é, o conjunto que possui a enumeração de todos os anagramas da palavra entre parêntesis. Se os alunos pensarem em apresentar os anagramas de *CANO* de forma desordenada, talvez sintam dificuldade em afirmar se listaram todos ou se faltam alguns elementos na enumeração. A seguir são apresentados os anagramas de CANO padronizado.

CANO	*ACON*	*NAOC*	*OCAN*
CAON	*ACNO*	*NACO*	*OCNA*
CONA	*ANOC*	*NCAO*	*ONAC*
COAN	*ANCO*	*NCOA*	*ONCA*
CNAO	*AOCN*	*NOCA*	*OANC*
CNOA	*AONC*	*NOAC*	*OACN*

Espera-se que os estudantes percebam que, para cada letra da palavra CANO, ao fixarem uma letra inicial, sempre obtém 6 anagramas distintos. Sendo CANO uma palavra com 4 letras distintas, cada conjunto de 6 anagramas obtido não possui nenhuma palavra repetida. Daí, espera-se que os estudantes possam concluir que o número de anagramas de CANO é igual a

$$4 \times 6 = 24 \tag{2}$$

Como podemos ajudar os alunos a generalizar essas duas últimas questões? Como determinar o número de anagramas de uma palavra com uma quantidade de letras maior, sem repetição de letras? Como podem estabelecer um padrão para contar essas palavras?

O modo mais comum de definir uma sequência é pela sua lei de formação, dita sua fórmula explícita. Porém, é possível definir uma sequência por recorrência, isto é, uma definição que evoca a própria sequência e valores iniciais dados. Com objetivo de que os alunos utilizassem a recorrência como ferramenta para descobrir a próxima quantidade de anagramas sem listá-los e que não precisassem necessariamente dos valores para conjecturarem uma possível fórmula, elaboramos a seguinte tarefa.

Tarefa 3

Complete os espaços em branco de cada sentença, seguindo o modelo.

Se o número de anagramas de $\boldsymbol{O}$, for $\boldsymbol{a_1}$, então o de anagramas de $\boldsymbol{NO}$ é igual a $\boldsymbol{a_2 = 2a_1}$

Se o número de anagramas de $\boldsymbol{NO}$, for $\boldsymbol{a_1}$, então o de anagramas de $\boldsymbol{ANO}$ é igual a $\boldsymbol{a_3 = \_\_ a_2}$

Se $\boldsymbol{\#\mathcal{A}(ANO) = a_3}$, então $\boldsymbol{\#\mathcal{A}(CANO) = a_4 = \_\_\_}$

Se $\boldsymbol{\#\mathcal{A}(ANO) = a_3}$, então $\boldsymbol{\#\mathcal{A}(\boxed{C}ANO) = \#\mathcal{A}(\boxed{N}CAO) = \#\mathcal{A}(\boxed{O}CAN) = \#\mathcal{A}(\boxed{O}CAN) = \_\_\_\_}$

Como vimos na tarefa 2, ao fixarmos letras de uma palavra podemos reduzir sua quantidade de anagramas para uma quantidade menor. Por exemplo, o número a_4 de anagramas de uma palavra com 4 letras distintas pode ser calculado pela fixação de uma delas, reduzindo os anagramas para uma palavra com 3 letras distintas, digamos a_3. Como a letra fixada pode ser escolhida de 4 maneiras, segue que o número de anagramas de uma palavra com 4 letras é igual $a_4 = 4a_3$. Analogamente, $a_3 = 3a_2$, $a_2 = 4a_1$. O valor inicial conhecido é $a_1 = 1$, pois uma palavra formada por 1 única letra só tem 1 anagrama, a própria palavra. Podemos assim descobrir que $a_2 = 2 \times 1$, $a_3 = 3 \times 2 \times 1$, $a_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Isso permite a definição de uma operação essencial na contagem de anagramas: o fatorial de um número. Como anteriormente, na contagem de anagramas podemos usar uma relação de recorrência envolvendo a quantidade de anagramas de uma palavra com uma letra fixada (a inicial, por exemplo), para encontrar o número de anagramas daquela palavra. Além disso, a notação de fatorial nos ajuda como uma representação econômica visto que definimos o fatorial de um número n, denotado por $n!$, como o produto $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Buscando a generalização para a contagem do número de anagramas de uma palavra com *n* letras distintas, esperamos que os alunos consigam descobrir uma fórmula geral $a_n = n!$.

1.2.2. Anagramas com repetição de um tipo de letra

As questões anteriores foram pensadas para casos de anagramas de palavras que não possuíam nenhuma letra que se repetisse. Contudo, queremos estender o método de contagens de anagramas para palavras que possuam repetições de letras de uma forma que os alunos possam utilizar seu conhecimento prévio para entender as contagens de anagramas de palavras gerais. Como antes, partiremos de situações menores e mais simples de serem enumeradas, palavras com apenas duas letras que se repetem.

A partir deste ponto passamos a utilizar o termo *comprimento* de uma palavra para nos referir ao número de letras, contando as repetições, que uma palavra possui. Com o objetivo de que os alunos diferenciassem a contagem de anagramas de palavras com mesmo comprimento sem letras repetidas e com letras repetidas, propusemos a seguinte tarefa.

Tarefa 4

É verdade que o número de anagramas de uma palavra depende exclusivamente do seu comprimento? Liste $\mathcal{A}(ANa)$ e $\mathcal{A}(ANA)$. Sabemos que o número de anagramas de uma palavra com 3 letras, todas distintas, é igual a 3!. Este número é quantas vezes maior do que o número de anagramas de uma palavra de comprimento 3 sendo que uma das letras se repete

2 vezes?

Como já mencionado, queremos que os alunos façam a contagem do número de anagramas de uma palavra de comprimento qualquer, a partir do reconhecimento de um padrão. Por exemplo, existem apenas 3 anagramas da palavra *ANA*, a saber: *AAN*, *ANA* e *NAA*. Por outro lado, existem 6 anagramas da palavra *ANa*: *AaN*, *aAN*, *ANa*, *aNA*, *NAa* e *NaA*. Esperamos que os alunos observem que para cada anagrama de ANA existem dois anagramas de *ANa*. Por exemplo, para o anagrama AAN podemos associar dois anagramas distintos *AaN* e *aAN*, nos quais as letras A indistinguíveis no primeiro caso passam a serem distinguíveis quando uma delas passa a ser minúscula. Daí, espera-se que os alunos concluam que o número de anagramas de ANa é o dobro do número de anagramas de ANA, isto é,

$$\#\mathcal{A}(ANa) = 2 \times \#\mathcal{A}(ANA)$$

Sendo *ANa* uma palavra com 3 letras distintas, sabemos que $\#\mathcal{A}(ANa) = 3!$. Donde concluímos que $\#\mathcal{A}(ANA) = \frac{3!}{2}$, ou simplesmente, $\#\mathcal{A}(ANA) = 3$.

Podemos pensar num caso pouco mais geral, de uma palavra com n letras todas distintas exceto duas. O estudo de um caso a mais pode ajudar encontrar um padrão de contagem. Com esse intuito, desenvolvemos a seguinte tarefa:

Tarefa 5

Descobrimos que o número de anagramas de uma palavra de comprimento:

- **2 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $1 = \frac{2!}{2!}$.**
- **3 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a _______.**
- **4 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a _______.**
- **5 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a _______.**
- **n sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a _______.**

Sabemos que uma palavra de comprimento 3 sem letras repetidas, possui 6 anagramas, que é justamente o fatorial da quantidade de letras. E que o número de anagramas das letras repetidas é justamente o fatorial dessas letras. Mas como podemos ajustar a forma que já conhecemos para esse tipo de caso?

Seja $a_{n;2}$ uma palavra de n letras, tais que, uma delas se repete duas vezes. O número *2* subscrito, representa a quantidade vezes que uma determinada letra se repete. Perceba-que pelo padrão encontrado, teríamos que uma palavra com n letras das quais duas se repetem, poderia ser escrito da seguinte forma:

$$a_{n;2} = \frac{n!}{2} \tag{16}$$

Sabemos também, que para anagramas de uma palavra com 2 letras isso é valido, pois se uma palavra da forma AA, possui apenas 1 anagrama, podemos escrever da forma da equação (16)

$$1 = \frac{2!}{2!}$$

Porém, será que este modelo pode ser aplicado em casos de anagramas de palavras com mais de uma repetição, ou seja, uma palavra com n letras, tais $r_i \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ se repetem k vezes, com $k \in \{1,2, \dots, n\}$?

Como já mencionado, poderia haver uma confusão por parte dos alunos no momento em que excluíssem os anagramas repetidos, fazendo com que dividissem somente pelo número de letras repetidas, ao invés de dividirem pelo fatorial desse número. Com o objetivo de que os alunos compreendessem melhor esse passo, desenvolvemos a seguinte tarefa.

Tarefa 6

Liste os anagramas da palavra CANAA para determinar o número de anagramas de uma palavra com comprimento 5 sendo que uma das suas letras se repete 3 vezes e as outras duas são distintas. Sabemos que uma palavra de comprimento 5, todas distintas, possui 120 anagramas. Este valor é quantas vezes maior do que o número de anagramas da palavra CANAA?

Considere a palavra CANAA como $CA_1NA_2A_3$ para que as letras repetidas sejam distinguíveis. Observe ainda que qualquer anagrama de CANAA se relaciona com 6 diferentes anagramas de $CA_1NA_2A_3$. Por exemplo, AAACN se associa a $A_1A_2A_3CN$, $A_1A_3A_2CN$, $A_2A_1A_3CN$, $A_2A_3A_1CN$, $A_3A_1A_2CN$ e $A_3A_2A_1CN$. Note que os 6 anagramas do tipo $A_1A_2A_3CN$ associados a AAACN são obtidos através dos anagramas de $A_1A_2A_3$, isto é, 3!. Daí, $\#\mathcal{A}(CA_1NA_2A_3) = 3!\,\#\mathcal{A}(CANAA)$. Portanto, $\#\mathcal{A}(CANAA) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

Pode ser útil usar uma notação para indicar o número de anagramas de uma palavra com n letras sendo todas distintas com excessão de uma que se repete k vezes como $a_{n;k}$, com $0 \leq k \leq n$. No caso em discussão, temos $\#\mathcal{A}(CANAA) = a_{n;3}$ e descobrimos que $a(5;0) = 3!\,a(5;3)$. Como já sabemos que $a_{5;0} = 5!$, concluímos que $a_{5;3} = \frac{5!}{3!}$. Isso induz à conjectura que $a_{n;k} = \frac{n!}{k!}$.

Podemos perceber que há uma relação entre o número de anagramas das letras repetidas com a quantidade total de seus anagramas, basta dividir o número total de anagramas de uma determinada palavra, pelo fatorial da quantidade de vezes que determinadas letras se repetem. Generalizar um padrão e obter uma fórmula geral para algo, se torna muitas das vezes uma tarefa difícil. Esperávamos que os alunos tivessem um pouco de dificuldade ao fazer a transição entre o caso particular que eles haviam feito, com a generalização para alguns casos diferentes.

Por isso, propusemos a seguinte tarefa.

Tarefa 7

Descobrimos que o número de anagramas de uma palavra de comprimento 5 tal que:

- **não há letras repetidas é igual a $5!$.**
- **há uma letra repetida 2 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{2!}$.**
- **há uma letra repetida 3 vezes e as demais são distintas é igual a ________.**
- **há uma letra repetida 4 vezes e as demais são distintas é igual a ________.**
- **todas as letras são iguais é igual a $\frac{5!}{5!}$.**

Seguindo o raciocínio anterior, podemos chegar as resoluções de cada item. Com esta tarefa, esperamos que os estudantes consigam transitar entre casos particulares até a generalização do problema, com enfoque nos anagramas de palavras que apenas 1 letra se repete mais de uma vez, e todas as outras são distintas.

Para finalizarmos esta etapa, propusemos a seguinte tarefa, que possibilita aos estudantes chegarem na generalização do problema.

Tarefa 8

Combinando os resultados das Questões 5 e 7, expresse o número de anagramas de uma palavra de comprimento n sendo que uma delas se repete r vezes e as demais são distintas.

Perceba que, com os resultados das questões 5 e 7, conseguimos encontrar relações entre a quantidade de anagramas de uma palavra sem repetições, com o número de anagramas de uma palavra com mesmo comprimento, na qual, uma das letras se repetem, assim podemos encontrar uma formula geral para este tipo de contagens.

Como uma palavra de comprimento n, tais que nenhuma letra se repete, possui $n!$ anagramas e que podemos dividir essa quantidade pelo fatorial do número de letras repetidas desta palavra, assim:

$$\frac{n!}{r!}$$

Que se assemelha muito com um caso particular de permutação dada pelos livros usuais de análise combinatória. Esperamos que futuramente os estudantes associem essa percepção em estudos futuros e que entendam como chegaram a esta fórmula.

Para nós é interessante que consigamos encontrar anagramas de qualquer “palavra”, isto é, palavras que possuam letras que se repitam indefinidamente para qualquer caso. Entretanto, devemos dar algum proposito aos estudos de contagens a partir dos anagramas, uma vez que, isso é fundamental, por exemplo, para calcular probabilidades de eventos que possamos codificar a partir dos anagramas. Certamente, nesses casos precisamos de uma melhor compreensão dos casos com repetições de letras, para chegarmos a uma generalização do objeto desejado.

1.2.3. Anagramas com repetição de vários tipos de letra

Para seguir o mesmo raciocínio anterior, porém para casos de sequências de letras que possuam mais de uma letra se repetindo, propusemos a seguinte tarefa.

Tarefa 9

Sabemos que uma palavra de comprimento 4 cujas letras são todas distintas possui 4! anagramas. Além disso, descobrimos que se essa palavra de comprimento 4 possui uma letra que se repete 2 vezes e as demais são distintas, então ela possui $\frac{4!}{2!}$ anagramas. Liste o número de anagramas da palavra $BABA$, que tem comprimento 4, sendo apenas 2 letras distintas, A e B, cada uma se repetindo 2 vezes.

Se listarmos os anagramas de $BABA$, temos:

BABA	*ABAB*
BAAB	*ABBA*
BBAA	*AABB*

Note que uma palavra de comprimento 4, possui 4! anagramas que é justamente 24 e que os anagramas de uma palavra $a_{4.1}$ de mesmo comprimento com 1 letra se repetindo 2 vezes possui 12 anagramas que corresponde a $\frac{4!}{2!}$. Ao listarmos os anagramas de $BABA$, percebemos que ela possui 6 anagramas distintos, e que $a_{4;2,2}$ é 2 vezes maior que ela.

Assim,

$$a_{4;2,2} = 2! \times a_{4.2}$$

$$a_{4;2,2} = \frac{a_{4.1}}{2!}$$

$$a_{4;2,2} = \frac{4!}{2!} \times \frac{1}{2!} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

No estudo de análise combinatória, encontramos as chamadas permutações com repetição que geralmente é apresentada no início do capítulo. O propósito dessas questões é possibilitar ao aluno que compreenda o raciocínio e que ele mesmo consiga conjecturar essa fórmula. Com esse objetivo propomos a seguinte tarefa que possibilita ao aluno transitar entre as permutações com apenas 2 repetições para permutações com uma quantidade qualquer de repetições.

Vale lembrar que nesta possibilidade, obtemos um caso particular de permutação, no qual o número de repetições soma justamente o total de letras. Uma fórmula muito parecida é apresentada nos livros de Análise Combinatória.

Tarefa 10

Descobrimos que uma palavra de comprimento 6 tal que:

- **Nenhuma das letras se repetem, como ABCDEF, possui $6!$ anagramas.**
- **Uma das letras se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABCDE, possui $\frac{6!}{2!}$ anagramas.**
- **Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABBCD, possui _____________ anagramas.**
- **Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 3 vezes, como AABBBC, possui _____________ anagramas.**
- **Uma das letras se repete ____ vezes e a outra ____ vezes, como AAAABB, possui _____________ anagramas.**
- **Uma letra se repete 3 vezes e a outra também se repete 3 vezes, como __________, possui __________ anagramas.**

Note que é importante que os estudantes façam a bijeção entre o número de letras repetidas para que possam “dividir” pelo fatorial em cada processo. Senão, torna-se somente um processo repetitivo, por isso no 4º momento ampliamos a pergunta para os alunos entendessem o que estavam fazendo em cada etapa.

Para que os alunos conseguissem generalizar este raciocínio propusemos a seguinte tarefa.

Tarefa 11

Em geral, uma palavra de comprimento n tal que uma das letras se repete r_1 vezes, outra letra se repete r_2 vezes e assim por diante até a k-ésima letra se repete r_k vezes, possui quantos anagramas?

Perceba que existem notações que comumente não são usadas no ensino básico, como "*k-ésima*" pelo fato de que os alunos costumam pensar em casos particulares de situações, ao invés de casos gerais, e assim não se há a necessidade de pensar em algo muito geral. Indo em contrapartida, esperamos que os estudantes consigam generalizar os casos maiores e que cheguem a uma conjectura que talvez seja demonstrada por eles futuramente.

Porém podemos pensar nessa tarefa em casos separados, por exemplo podemos notar que uma palavra de comprimento n, ou seja, com n letras, que possui uma letra que se repete r_1 vezes, é $\frac{n!}{r_{1!}}$ e que a mesma palavra agora que possui uma letra que se repete r_1 vezes, outra que se repete r_2 vezes, temos $\frac{n!}{r_1!r_2!}$. Se fizermos esse processo k vezes, obteremos

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,...\,r_k!}$$

1.2.4. Codificação com anagrama

Um conjunto muito utilizado na matemática, é conjunto das partes. Em especifico, nos perguntamos quantos subconjuntos podemos formar a partir de um dado conjunto. Essa pergunta pode ser respondida por meio da contagem de anagramas, se estabelecermos uma bijeção entre as escolhas que fazemos para contar ou não aquele elemento no conjunto das partes. Para isso definiremos as escolhas seguindo essa estratégia:

Seja $A = \{1,2,3\}$. Para cada elemento de A que for selecionado para fazer parte do subconjunto B, atribua a letra S de **Sim**, caso contrário atribua a letra N de **Não**. Por exemplo no subconjunto $B = \{1,2\}$, atribuímos SSN pois 1 e 2 foram escolhidos, porém 3 não. Já $B = \{3\}$ é associado a NNS. Assim, a contagem do número de subconjuntos de A pode ser feita a partir da contagem de anagramas.

Por exemplo, quantos subconjuntos podemos formar a partir do conjunto $A = \{1,2,3\}$? Para respondermos este exemplo, primeiro devemos saber quais subconjuntos escolheremos, por exemplo, poderíamos tomar os subconjuntos unitários, ou que possuem dois elementos, ou três, ou nenhum. Para isso pensaríamos primeiro nos unitários.

Se pensarmos nos subconjuntos unitários de A seguindo o modelo anterior, obtemos somente a sequência de letras SNN, pois só podemos escolher um número para compor o subconjunto unitário, e as demais possibilidades subconjuntos unitários, serão os anagramas de SNN, ou seja, 3 subconjuntos unitários, o que faz sentido, pois o conjunto A só possui 3 elementos.

Para que melhor fixasse esse modelo propusemos as seguintes questões, com o objetivo de que os alunos associassem essas quantidades com a contagem de anagramas.

Tarefa 12

Seja $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Usando a estratégia 1 de associar subconjuntos a anagramas, como o subconjunto vazio de B é representado? Como podemos representar subconjuntos unitários de B? E subconjuntos com dois elementos? E com três elementos? E o subconjunto B?

Perceba que conseguimos o subconjunto vazio, quando nenhum elemento é escolhido para fazer parte do conjunto, logo obtemos a sequência $NNNN$. Os subconjuntos unitários quando escolhemos apenas 1 vez cada elemento, logo poderíamos representar das seguintes formas

$$SNNN, NSNN, NNSN, NNNS$$

Os subconjuntos com 2 elementos, quando escolhermos os elementos "desejados" para fazer parte do conjunto, assim obteríamos uma sequência de letras da forma $SSNN$ e os anagramas obtidos a partir dela. Se fizermos da mesma forma para os demais subconjuntos, chegaremos que os subconjuntos contendo três elementos, podem ser escritos da forma $SSSN$ e seus respectivos anagramas, e o de quatro elementos da forma $SSSS$.

Perceba que o número de anagramas das palavras com todas as letras repetidas, independente de qual letra seja repetida é 1, pois como a palavra possui comprimento 4 com 1 letra se repetindo 4 vezes, a quantidade de anagramas dessa palavra é igual a $\frac{4!}{4!} = 1$. O que faz sentido pois só existe uma possibilidade de formarmos os subconjuntos vazio e todo.

Com o objetivo de que os alunos fixassem melhor a estratégia desenvolvida, desenvolvemos as seguintes questões.

Tarefa 13

De acordo com as questões anteriores como você contaria o número total de subconjuntos de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Organizando e classificando os subconjuntos como feito anteriormente, podemos obter melhor uma relação entre os subconjuntos e os respectivos anagramas que podem ser formados a partir deles.

Subconjuntos	Anagrama
Vazio	$NNNNN$
Unitário	$SNNNN$
2 elementos	$SSNNN$
3 elementos	$SSSNN$
4 elementos	$SSSSN$
5 elementos	$SSSSS$

Note que a priori, não pensamos nas quantidades de conjuntos, mas sim em como eles podem ser representados. Uma vez que conhecemos o modelo, podemos calcular o número de anagramas de cada sequência de letras compostas por S e N, que serão justamente a quantidade do conjunto das partes de um conjunto.

Subconjuntos	Anagrama	Nº de Anagramas	Subconjuntos	Anagrama	Nº de Anagramas
Vazio	$NNNNN$	$\frac{5!}{5!} = 1$	***3 elementos***	$SSSNN$	$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$
Unitário	$SNNNN$	$\frac{5!}{1!\,4!} = 5$	***4 elementos***	$SSSSN$	$\frac{5!}{4!\,1!} = 5$
2 elementos	$SSNNN$	$\frac{5!}{2!\,3!} = 10$	***5 elementos***	$SSSSS$	$\frac{5!}{5!} = 1$

Com o objetivo de que os alunos generalizassem o modelo acima, propusemos a seguinte tarefa.

Tarefa 14

Suponha agora que o conjunto B possui n elementos. Como representar os subconjuntos com k elementos de B usando a estratégia 1? Quantos são os subconjuntos com k elementos de um conjunto B com n elementos?

Se seguirmos a estratégia 1, podemos notar que um conjunto com k elementos, terão que ser feitas k escolhas S e $n - k$ escolhas não, assim

$$S \ldots SN \ldots N$$

Note que formou uma sequência de n letras nas quais 1 se repete k vezes e outra que se repete $(n - k)$ vezes, assim

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ao preenchermos a tabela da tarefa 13, notamos um certo padrão na quantidade do conjunto das partes. Se listarmos a sequência “1,5,10,10,5,1” percebemos que a uma repetição nas extremidades da sequência. Por exemplo, o número 1 presente na primeira entrada e última, o número 5 na segunda e penúltima entrada.

1.2.5. Dos anagramas ao número binomial

Uma aplicação conhecida da analise combinatória é a utilização de uma ferramenta para encontrar coeficientes de um determinado binômio. Por exemplo, qual o coeficiente do termo 3 do binômio $(S+N)^5$? Certamente, não é uma resposta imediata. Porém nos é possível associar este binômio com algo já conhecido “A contagem de anagramas”.

Perceba que, em um binômio encontramos parcelas compostas por produtos, nos quais, apresentam uma sequência de termos que podem ser enxergadas como uma sequência de letras. No binômio anterior, encontramos tais parcelas:

$$a_5 S^5 + a_{5;4} S^4 N + \cdots + a_5 N^5$$

Se levarmos em consideração os termos desses binômios, podemos escreve-los como anagramas, podemos adaptar esta notação para que os fatores do produto de S^5, possam ser escritos como $SSSSS$, uma vez que $S^5 = SSSSS$, cujo número de anagramas é 1.

Perceba que cada vez que calculamos um produto, “escolhemos” os fatores para aquela parcela. Por exemplo, no binômio $(S+N)^2 = (S+N)(S+N)$, tomamos os produtos como escolhas de cada termo S ou N, sabemos também que a soma dos expoentes em cada parcela é igual a 2.

Como em todas as parcelas devemos ter a combinação dos termos do binômio, sabemos que o número de parcelas iguais pode ser dado pela quantidade de anagramas da determinada parcela. Por exemplo no binômio anterior, sabemos que sua expansão é

$$SS + SN + NS + NN \tag{16}$$

$$S^2 + 2SN + N^2 \tag{17}$$

Note que os termos SN e NS na equação 16, são iguais, e que eles são justamente os únicos anagramas de SN, assim o seu coeficiente será 2, pois somamos duas vezes o mesmo termo. Se fizermos para o binômio $(S+N)^3$, teremos

$$SSS + SSN + SNS + SNN + NSS + NSN + NNS + NNN$$

Perceba que os termos iguais, formam justamente os anagramas da sequência de letras expressas, assim se somarmos os termos iguais, encontraremos os coeficientes de cada termo que serão justamente os anagramas da palavra formada a partir deles. Assim, um binômio da forma $(S+N)^n$, pode ser dado pela contagem dos anagramas da seguinte forma:

Se considerarmos que um termo sempre terá $(n-k)$ repetições do primeiro termo que no caso é dado por S, e k repetições do segundo, dado por N, onde $k \leq n$. Temos que

$$(S+N)^n = \frac{n!}{n!\,0!}S^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}S^{n-1}N + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}S^{n-k}N^k$$

Essa interpretação por meio dos anagramas, pode proporcionar aos estudantes uma melhor forma de entender a formula dos coeficientes do Binômio de Newton, dada por

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Com esse objetivo, propusemos as questões 15 e 16.

Tarefa 15

Como escrever a expansão do produto $(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S})$? Qual o coeficiente de do termo $\boldsymbol{N^{3-k}S^k}$, para $\boldsymbol{k} \in \{\boldsymbol{0},\dots,\boldsymbol{3}\}$, isto é, o coeficiente de $\boldsymbol{N^3}$, $\boldsymbol{N^2S}$, $\boldsymbol{NS^2}$ e $\boldsymbol{S^3}$, nessa ordem?

O produto pode ser expandido em duas etapas:

$$(N+S)(N+S)(N+S) = (N+S)(NN + NS + SN + SS)$$
$$= NNN + NNS + NSN + NSS + SNN + SNS + SSN + SSS$$

Que após reorganização e simplificação

$$N^3 + 3N^2S + 3NS^2 + S^3$$

Esperamos que os estudantes ao resolverem, correlacionem os seus conhecimentos de anagramas com os coeficientes dos termos do Binômio de Newton.

Tarefa 16

Em geral, qual o coeficiente do termo $\boldsymbol{N^{4-k}S^k}$, para $\boldsymbol{k} \in \{\boldsymbol{0},\dots,\boldsymbol{4}\}$, do binômio $(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S})^{\boldsymbol{4}}$?

Com o mesmo raciocínio anterior podemos chegar à resposta dessa tarefa, pois sabemos que os coeficientes de um termo é justamente o número de anagramas da sequência de letras desejada, assim em geral para o exemplo dado, temos

$$\frac{4!}{(4-k)!\,k!}$$

Uma das contribuições do matemático Pascal, foi o conhecido triangulo de pascal, que relaciona os coeficientes do binômio de Newton. Com o objetivo de que os alunos descobrissem algumas relações nesse “triangulo”, propusemos a seguinte tarefa.

Tarefa 17

Os números organizados em formato de triângulo abaixo, recebem o nome de *Triângulo de Pascal*. Quais relações podem ser identificadas nesta tabela?

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A partir do Triângulo de Pascal, esperamos que os alunos possam observar alguns padrões ao analisarem os elementos do “triângulo” mostrado acima. Como já mencionado anteriormente, o reconhecimento de padrões é uma característica fundamental do método investigativo, uma vez que permite aos alunos em grupo, analisarem e descreverem o padrão formalmente, justificando os passos necessários para demonstrarem suas conjecturas. Com base nisso, a tarefa 17 permite aos estudantes de forma livre, se questionarem a respeito de alguns padrões apresentados acima.

Ao propor essa tarefa, talvez os estudantes pudessem perceber alguns dos padrões abaixo.

a) O primeiro elemento e último de cada linha é igual a 1.

b) O número de elementos de cada linha é sempre igual a posição em que a linha se encontra. Por exemplo, a linha 2 possui 2 elementos, a linha 3 possui 3 elementos, da linha n possui n elementos.

c) A soma dos elementos da linha 1 é igual a 1, dos elementos da linha 2 é igual a 2, da linha 3, vale 4, da linha 4 vale 8, e assim por diante, a soma dos elementos da linha n valerá 2^{n-1}.

d) A soma dos elementos de uma determinada coluna m, do primeiro elemento até o elemento da linha n, vale $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

2. ANÁLISE DOS DADOS

Como o método investigativo ocorre de forma fluida, procuramos uma turma que naturalmente iria ver o conteúdo em seu ano letivo, mas que ainda não tivesse sido exposta ao estudo de Análise Combinatória, uma vez que se já conhecessem as fórmulas que iriam descobrir ao longo da sequência, a sequência perderia seu caráter investigativo central.

Inicialmente, encontramos uma turma de 3º ano que trabalharia o conteúdo em seu currículo, porém devido as adaptações feitas pela escola, os alunos já tiveram contato com o conteúdo no ano anterior. Foi realizada a mudança para uma turma de 2º ano, composta por 35 alunos. No entanto, descobrimos que aquela turma não iria ver os conteúdos de análise combinatória, de modo que aquele conteúdo não seria cobrado pelo professor da turma. Por causa disso, tivemos nosso tempo de realização da sequência reduzido para 250 minutos distribuídos em três dias ao longo de 5 encontros de 50 minutos cada.

A redução dos encontros implicou a redução da sequência de atividades trabalhadas pela turma. Da sequência original que contava com 17 questões distribuídas em 5 seções, foram aplicadas apenas as três primeiras seções com 11 questões. Divididas da seguinte forma: primeiro dia (100 minutos) aplicamos a primeira seção: da enumeração à contagem (questões 1 a 3); segundo dia (100 minutos) aplicamos a segunda seção: anagramas com repetição de um tipo de letra (questões 4 a 8) além de ter aplicado a tarefa 3 modificada por conta das dificuldades apresentadas pela turma no primeiro dia; terceiro dia (50 minutos) terceira seção: anagramas com repetição de vários tipos de letras (questões 9 a 11). Cada encontro foi organizado para ter 10% do tempo reservado para a organização dos grupos e apresentação das questões; 60% para resolução das questões pelos grupos; 30% para discussão das resoluções entre os grupos.

A turma foi dividida em 5 grupos, identificados como A, B, C, D e E, compostos por no máximo 7 integrantes. Contudo, os membros do grupo E não demonstraram interesse em prosseguir com a atividade. Ao invés de distribuir os integrantes dos outros grupos num quinto grupo, optamos por manter os quatro grupos com sete estudantes, para facilitar o atendimento de cada grupo. Ao longo desse texto, para nos referirmos ao estudante 2 do grupo A usaremos o código A2.

2.1. Encontro 1

O primeiro encontro foi iniciado com breves explicações sobre a sequência de ensino e a metodologia de ensino de investigação matemática. Após dez minutos para distribuição dos alunos em grupos, foi entregue uma folha impressa contendo as questões 1 e 2 e algumas definições necessárias para o prosseguimento dos alunos. Na folha entregue, foram dadas as definições de anagramas, o conceito de enumeração e contagem. Assim, podemos dar início à primeira etapa investigativa: reconhecimento da situação.

Ao entregarmos a atividade, já pudemos notar uma visão pré-estabelecida de atividade difícil por estar associada à matemática. Por exemplo, ouvimos do grupo B:

Quadro 1 – Crenças e atitudes de um estudante antes mesmo de ver a atividade investigativa.

Interlocutor	Fala
B1	"É de matemática, vai ser difícil".

Fonte: Autor (2024)

No processo de ensino da matemática podem aparecer situações semelhantes, que podem advir de algumas causas. Conforme Brito (1996, apud Machado, 2013, p.2) "as atitudes em relação à Matemática podem ser compreendidas por meio das experiências que o indivíduo teve com esta disciplina". Assim, podemos entender que as predisposições apresentadas pelos estudantes, ou atitudes, podem ser derivadas de vivências anteriormente experimentadas pelos alunos.

Além disso, o método investigativo causou estranhamento na turma, por ser bem diferente do comumente usados pelos professores. Por exemplo, os estudantes queriam que fossem dados meios de resoluções para resolverem as questões, ou seja, esperavam que o professor desse algum tipo de fórmula para que respondessem a atividade. Por meio do diálogo, os alunos foram entendendo que seria uma atividade autoexplicativa e que, à medida que eles resolvessem obteriam o conhecimento necessário para prosseguir.

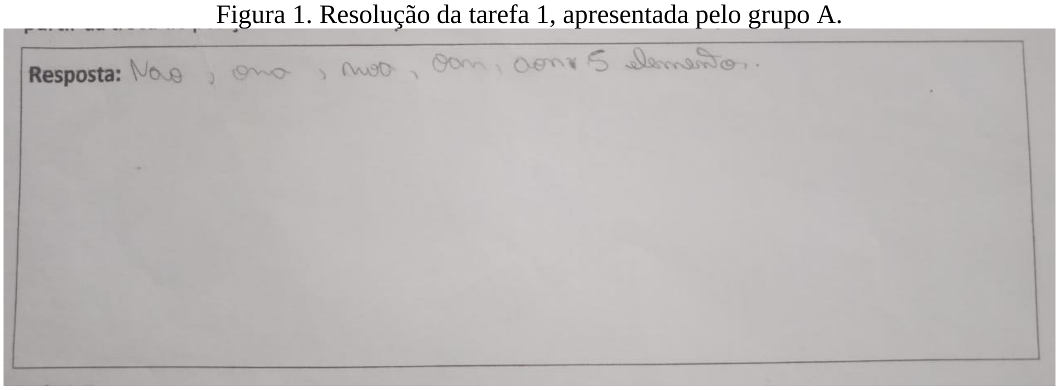
Tarefa 1

Faça uma lista de todas as palavras distintas, com significado ou não, que podemos formar a partir da troca de posição das letras da palavra ANO. Quantos elementos possui sua lista?

O grupo A, inicialmente, teve um pouco de dificuldade para entender o que era um anagrama de uma palavra e se questionaram a respeito dos anagramas, se eles as palavras formadas deveriam fazer sentido ou não, mesmo isso sendo explicito na tarefa. Isso reforça a necessidade do desenvolvimento conceitual das definições a fim de evitar má interpretações. O conceito de anagrama da palavra ANO poderia ser desenvolvido via incorporação usando três cartões, cada um contendo uma das letras que formam a palavra e pedir que os alunos registrassem todas as palavras com três letras formadas pela troca ou não de posição das letras que forma a palavra ANO. Provavelmente isso aconteceu por uma falta de leitura adequada da tarefa.

Percebemos que o grupo A lista os anagramas da palavra "ANO" sem um padrão específico. Isso dificultará o reconhecimento de padrão, afinal a lista apresentada não dá destaque a nenhum padrão de formação das palavras enumeradas. Mesmo que consigam chegar à resposta para palavras com um número pequeno de letras (3 nesse caso), ao tentar resolver o mesmo problema para uma palavra maior essa falta de padronização dificultará até mesmo a enumeração das palavras e este se questionará se já contou todas, falta alguma, existe alguma duplicada?

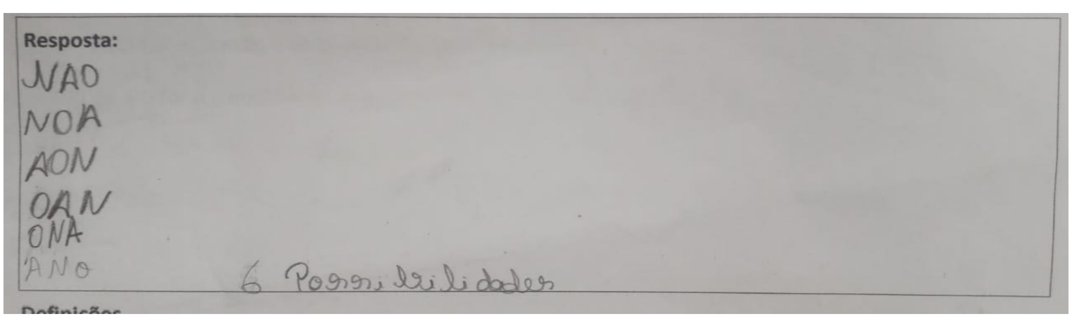
Figura 1. Resolução da tarefa 1, apresentada pelo grupo A.



Fonte: própria

Já o grupo B, apresenta um padrão ao listar os anagramas de ANO. Esse tipo de raciocínio pode ajudar nas enumerações futuras de palavras com uma maior quantidade de letras e no reconhecimento desses padrões.

Figura 2. Resolução da tarefa 1, apresentada pelo grupo B.



Fonte: própria

Podemos perceber, por meio da resolução dada pelo grupo A, que não foi listada a palavra

“ANO”, totalizando assim 5 anagramas, enquanto no grupo B, esta palavra foi listada, porém em último, contabilizando 6 anagramas. Vale lembrar que neste caso e em casos gerais, consideramos todos os anagramas da palavra inclusive a própria palavra apresentada. Esse padrão, listando a palavra “ANO” por último, se repetiu nos demais grupos. Talvez uma dúvida se a própria palavra deveria ou não constar na lista.

Após a resolução da primeira tarefa, percebemos que o grupo B mudou o posicionamento em relação ao seu comentário inicial.

Quadro 2 – Questionamento do professor após o grupo B resolver a primeira atividade.

Interlocutor	Fala
Professor	O que acharam da tarefa?
B1	Era tão fácil assim?

Fonte: Autor (2024)

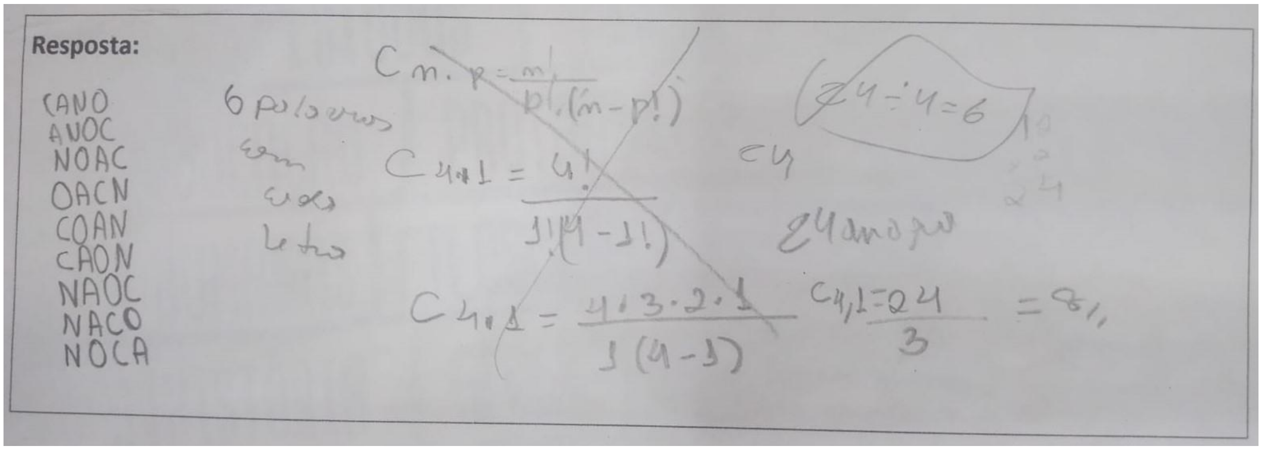
A partir do diálogo, podemos perceber que o grupo estava mais confortável para expor suas soluções, uma vez que o foco da atividade não era julgar as respostas dadas pelos estudantes como certas ou erradas. Por isso, ao ser aplicada uma atividade em sala, deve-se criar um espaço livre para possíveis soluções, independentemente do valor lógico de cada uma das afirmações.

Tarefa 2

Apresente os anagramas de $\mathcal{A}(CANO)$. Quantos começam com a letra C? E com a letra A? E com a letra N? E com a letra O?

Levando em consideração a proposta da atividade à luz do método investigativo, esperávamos que os estudantes se desprendessem do uso de fórmulas para resoluções das atividades e que eles conjecturassem os resultados para contagens de anagramas. Contudo, o grupo C utilizou uma fórmula, que inclusive não se adequava à contagem solicitada, vista por um de seus integrantes. Ao perceber isso, pedi a eles que tentasse seguir o modelo como as questões fluíam, para que aproveitasse essa “nova forma” de ver as contagens. Destacamos que este grupo, na explicitação da fórmula acima, escreveu a expressão algébrica $\frac{n!}{p!(n-p!)}$ sem compreender o que seu resultado exprime, que o levou a conclusões equivocadas.

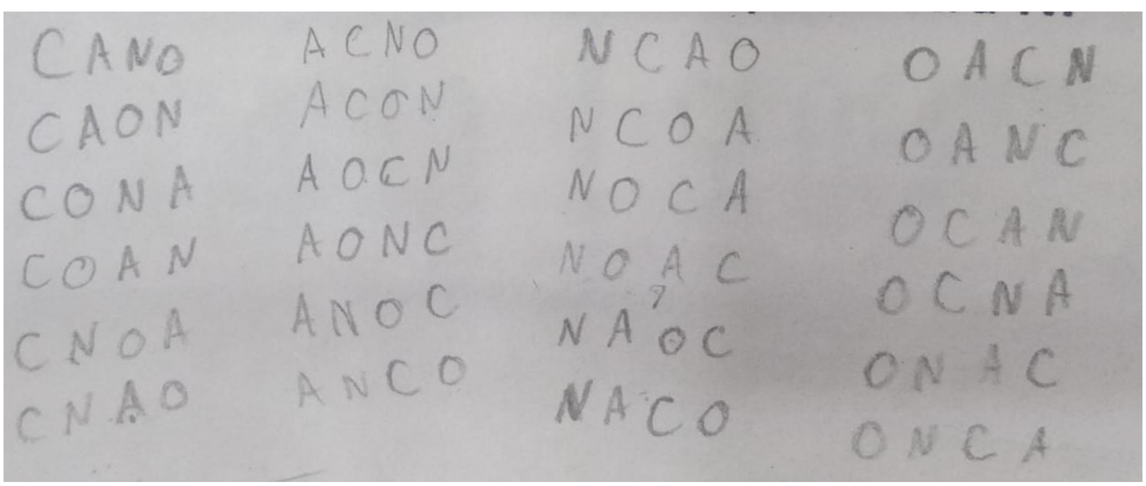
Figura 3. Resposta da tarefa 2 do grupo C



Fonte: própria.

Ao fazer a listagem, o grupo C não usa uma ordenação que facilita sua enumeração. Conseguiram listar 9 anagramas, observaram que a aplicação da fórmula dava 8. Após descobrirem que a quantidade de anagramas estipulada por eles não era correta, construíram outra estratégia em outra parte do papel, fixando as letras para que diminuíssem os casos possíveis para as demais sequências de letras, chegando ao resultado de 24 anagramas da figura 4.

Figura 4. Segunda solução dos alunos do grupo C.

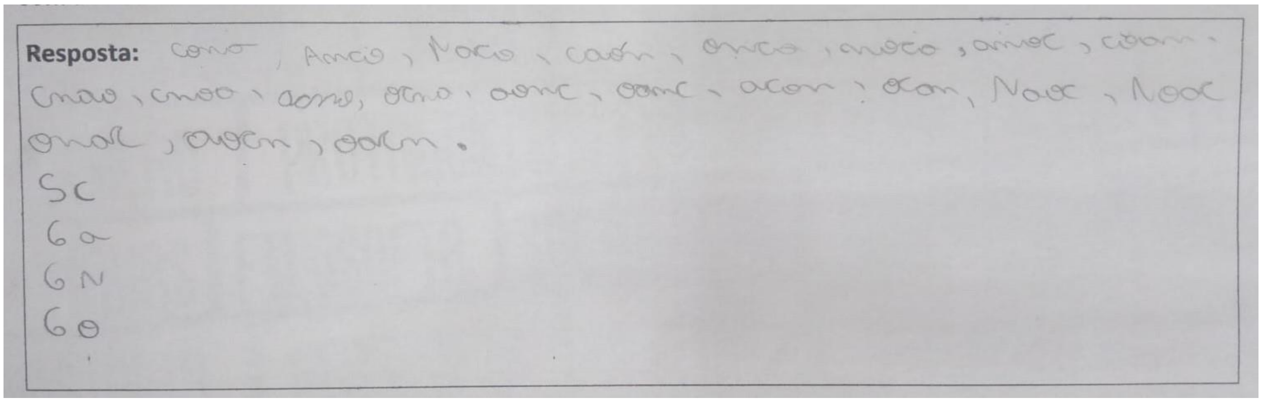


Fonte: própria.

Como não revelamos a quantidade de anagramas da palavra CANO, um dos integrantes do grupo A perguntava se já tinha acabado de listar todas as possibilidades. Podemos perceber aqui a visão do aluno em relação ao professor, que o enxerga como validador de suas soluções.

Observamos que mantiveram uma estratégia pouco adequada na tarefa 2, sem estabelecer um padrão ao listar os anagramas.

Figura 5. Solução da tarefa 2 apresentada pelo grupo A.



Fonte: própria.

Tarefa 3

Complete os espaços em branco de cada sentença, seguindo o modelo.

Se o número de anagramas de O, *for* a_1, *então o de anagramas de* NO *é igual a* $a_2 = 2a_1$

Se o número de anagramas de NO, *for* a_2, *então o de anagramas de* ANO *é igual a* $a_3 =$ __

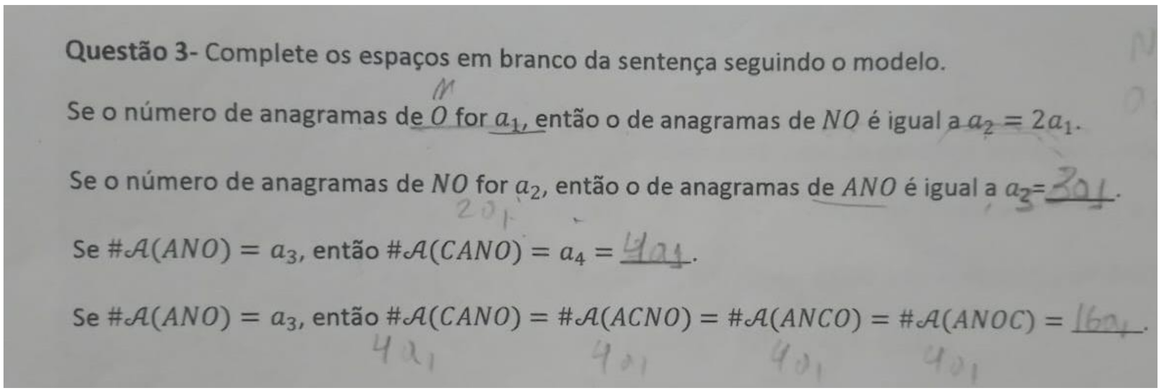
Se $\#\mathcal{A}(ANO) = a_3$, *então* $\#\mathcal{A}(CANO) = a_4 =$ ___

Se $\#\mathcal{A}(ANO) = a_3$, *então* $\#\mathcal{A}(\boxed{C}ANO) = \#\mathcal{A}(\boxed{N}CAO) = \#\mathcal{A}(\boxed{O}CAN) = \#\mathcal{A}(\boxed{O}CAN) =$ ____

Em geral, os grupos sentiram dificuldade de interpretar a tarefa 3. Alguns dos alunos relataram que não compreendiam o significado das letras a_1, a_2, a_3 e a_4. Na tentativa de ajudá-los, expliquei que estas eram as representações de cada quantidade de anagramas, mesmo assim, sentimos que os estudantes tiveram dificuldade ao associarem as notações as quantidades. O grupo C, por exemplo, seguiu o primeiro modelo e escreveu todos os outros produtos em função do a_1 e não observaram o padrão recursivo que se apresentava, isto é, a_2 era função de a_1, enquanto a_3 era função de a_2, e assim por diante. Outra dificuldade foi a associação de quantidades a símbolos.

Considerando as dificuldades apresentadas na resolução da tarefa 3, a limitação do tempo do encontro do dia 1 e o foco no processo de aprendizagem do aluno das aulas investigativas, encerramos a atividade do dia 1. Em seguida, foi realizada uma reunião de emergência com meu orientador para adaptação da tarefa 3. Adaptamos a atividade ao aluno e não insistimos no inverso, isto é, a adaptação do aluno à atividade, visto que as atividades propostas pelo professor devem servir de apoio para que os estudantes consigam vencer as barreiras de aprendizagem.

Figura 6. Resolução apresentada pelo grupo C



Questão 3- Complete os espaços em branco da sentença seguindo o modelo.

Se o número de anagramas de O for a_1, então o de anagramas de NO é igual a $a_2 = 2a_1$.

Se o número de anagramas de NO for a_2, então o de anagramas de ANO é igual a $a_3 =$ 3a1.

Se $\#\mathcal{A}(ANO) = a_3$, então $\#\mathcal{A}(CANO) = a_4 =$ 4a1.

Se $\#\mathcal{A}(ANO) = a_3$, então $\#\mathcal{A}(CANO) = \#\mathcal{A}(ACNO) = \#\mathcal{A}(ANCO) = \#\mathcal{A}(ANOC) =$ 16a1.

Fonte: própria.

Nesta perspectiva, reformulamos a tarefa 3 anterior mudando os símbolos pelas palavras que eles listaram, para que conseguissem avançar em seu raciocínio e conjecturas. A tarefa adaptada, denominaremos por *3**, apresentada a seguir.

Tarefa 3*

Complete os espaços em branco da sentença seguindo o modelo.

O número de anagramas de:

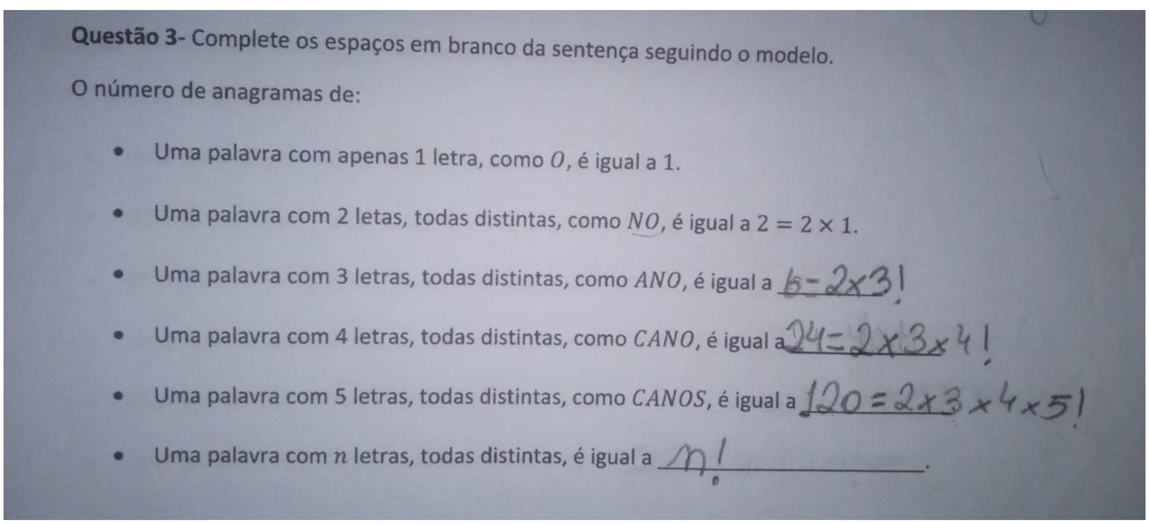
- *Uma palavra com apenas 1 letra, como O, é igual a 1.*
- *Uma palavra com 2 letras, todas distintas, como NO, é igual a 2 = 2 × 1.*
- *Uma palavra com 3 letras, todas distintas, como ANO é igual a* _________.
- *Uma palavra com 4 letras, todas distintas, como CANO é igual a* _____________.
- *Uma palavra com 5 letras, todas distintas, como CANOS é igual a* _____________.
- *Uma palavra com n letras, todas distintas, é igual a* _______________________.

Assim como na tarefa 3, esperávamos que os alunos utilizassem a recorrência para introduzirmos a noção de fatorial de um número. Os símbolos para representarem as quantidades de anagramas usados na tarefa 3 podem ter atrapalhado a interpretação dos alunos e foram substituídos por casos particulares, incluindo casos com 3 e 4 letras distintas que foram discutidos nas questões 1 e 2. Os alunos descobriram que o número de anagramas da palavra ANO é 6, que pode ser escrito como $6 = 3 \times 2 \times 1$ e que o número de anagramas da palavra CANO é 24, escrito como $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Espera-se que percebam o padrão e, mesmo sem enumerar todos os anagramas da palavra CANOS eles pudessem contá-los igual a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Por fim, seguindo mesma justificativa, o número de anagramas de uma palavra com n letras, todas distintas, deve ser igual a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, que receberá uma notação especial, dita o fatorial de n, e denotada como $n!$.

2.2. Encontro 2

Após a adaptação da tarefa 3, podemos perceber uma melhora significativa na construção dos alunos a respeito do fatorial de um número. O grupo B conseguiu perceber como calculava o fatorial de um número por meio da recorrência como podemos notar na figura 7 e 8, apesar de ter dificuldades ao generalizar esse pensamento para o fatorial de *n*. Por exemplo, em um diálogo entre o grupo, notamos que o aluno B2, associou o n ao 6, pela sequência que havia seguido, após perceber isso, conversei com o grupo explicando que o n presente na tarefa, correspondia a uma palavra com uma quantidade de letras qualquer.

Figura 7. Resposta da tarefa 3 apresentada pelo grupo B



Questão 3- Complete os espaços em branco da sentença seguindo o modelo.

O número de anagramas de:

- Uma palavra com apenas 1 letra, como O, é igual a 1.
- Uma palavra com 2 letas, todas distintas, como NO, é igual a $2 = 2 \times 1$.
- Uma palavra com 3 letras, todas distintas, como ANO, é igual a 6=2x3!
- Uma palavra com 4 letras, todas distintas, como $CANO$, é igual a 24=2x3x4!
- Uma palavra com 5 letras, todas distintas, como $CANOS$, é igual a 120=2x3x4x5!
- Uma palavra com n letras, todas distintas, é igual a n!.

Fonte: própria.

Ao observamos a resolução do grupo B, notamos a repetição do símbolo (!) para representar o fatorial de um número, mesmo que ele já esteja representado pelos produtos descritos. Por exemplo, $2 \times 3!$ é usado no lugar de 2×3, que significa $3!$. Isso pode ser apresentado por uma preocupação dos estudantes em detalhar que estão calculando o fatorial daquele número, mesmo que o produto já descreva isso. Por ser a primeira vez que usam a notação fatorial estão sujeitos a erros. É essencial que o professor retome essa notação no momento da discussão dos resultados.

Ainda nesta tarefa, observei certa dificuldade dos grupos para responder a última pergunta. Ao ouvir as discussões do grupo B fiz a intervenção apresentada no Quadro *3*.

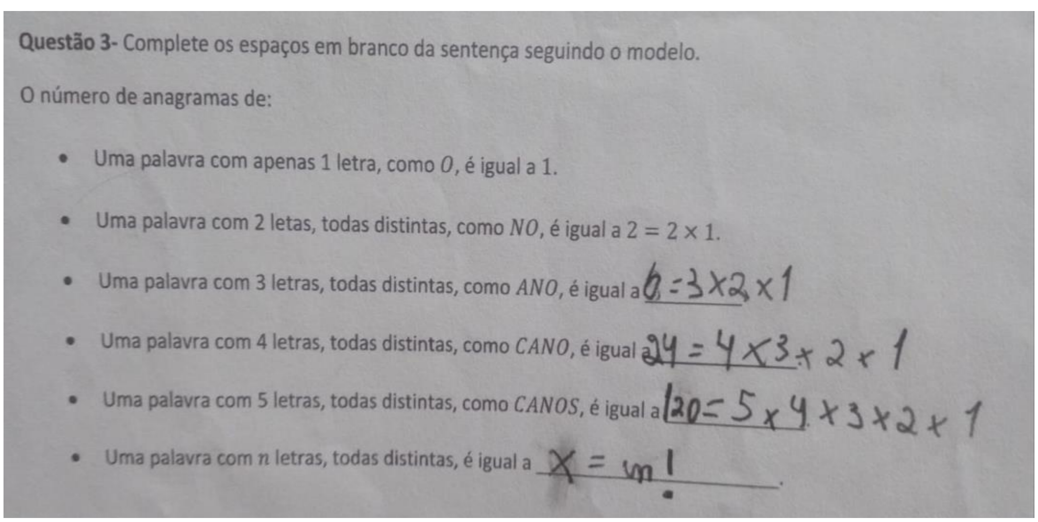
Quadro 3 – Intervenção do professor ao observar dificuldade de conjectura.

Interlocutor	Fala
Professor	O que representa o n na tarefa?
B1	Quando não sabemos o valor de algo usamos x.

Fonte: Autor (2024)

Apesar de ser um comentário simples, percebemos que a Álgebra utiliza regularmente a letra latina minúscula x como incógnita para soluções de equações. A não compreensão do significado de uma incógnita numa expressão algébrica pode causar confusão como na solução apresentada pelo grupo C. Quando o grupo se depara com uma palavra de n letras não consegue expressar um resultado para o fatorial de n, uma vez que, esse valor é arbitrário. Assim, surge a necessidade de representar o valor real do fatorial utilizando a incógnita "x", mesmo que o próprio $n!$ já representasse isso.

Figura 8. Solução da tarefa 3 pelo grupo C


Questão 3- Complete os espaços em branco da sentença seguindo o modelo.

O número de anagramas de:

- Uma palavra com apenas 1 letra, como O, é igual a 1.
- Uma palavra com 2 letas, todas distintas, como NO, é igual a $2 = 2 \times 1$.
- Uma palavra com 3 letras, todas distintas, como ANO, é igual a 6 = 3x2x1
- Uma palavra com 4 letras, todas distintas, como $CANO$, é igual a 24 = 4x3x2x1
- Uma palavra com 5 letras, todas distintas, como $CANOS$, é igual a 120 = 5x4x3x2x1
- Uma palavra com n letras, todas distintas, é igual a X = n!.

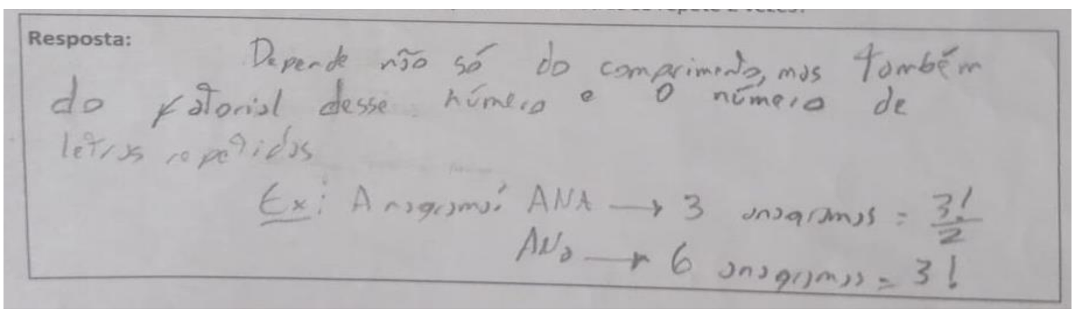
Fonte: própria.

Tarefa 4

É verdade que o número de anagramas de uma palavra depende exclusivamente do seu comprimento? Liste $\mathcal{A}(ANa)$ *e* $\mathcal{A}(ANA)$. *Sabemos que o número de anagramas de uma palavra com 3 letras, todas distintas, é igual a* $3!$. *Este número é quantas vezes maior do que o número de anagramas de uma palavra de comprimento 3 sendo que uma das letras se repete 2 vezes?*

Inicialmente os grupos A e B, tiveram dificuldade em perceber que *ANa* é diferente de *ANA*, pois provavelmente associaram as palavras ao seu significado e não a sua grafia. Após perceber isso pedimos aos alunos que listassem os anagramas de acordo com sua grafia e assim conseguiram perceber que o número de anagramas de palavras não depende somente de seu comprimento, mas também da quantidade de letras repetidas. Podemos notar isso, na resolução do grupo D:

Figura 9. Reposta apresentada pelo grupo D.



Resposta: Depende não só do comprimento, mas também do fatorial desse número e o número de letras repetidas

Ex: Anagramas: ANA → 3 anagramas = $\frac{3!}{2}$

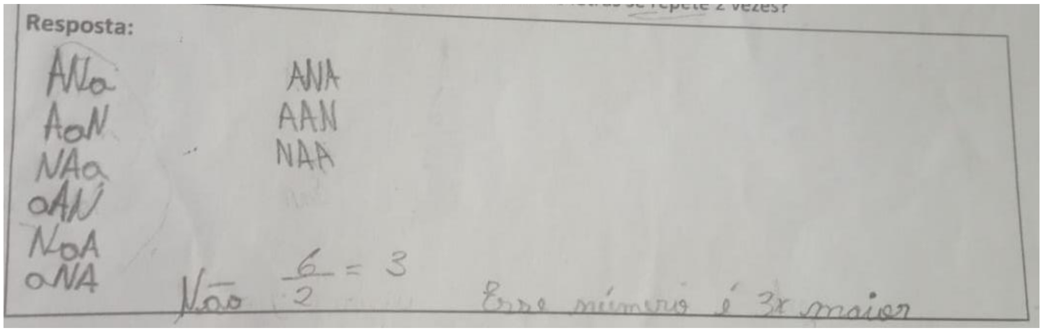
ANa → 6 anagramas = 3!

Fonte: própria.

O grupo B também conseguiu compreender o objetivo da atividade. Porém relataram que tinham uma certa dificuldade ao passar esse pensamento para o papel, ou seja, o seu raciocínio estava completo, porém o grupo tinha dificuldades ao registrar sua resolução. Essa dificuldade talvez possa ser apresentada, em virtude do pouco contato dos alunos com problemas em que se precisam modelar matematicamente problemas envolvendo operações básicas.

Podemos perceber isso quando o B1 responde que o número de anagramas de *ANa* é três vezes maior que o de *ANA*. O grupo enumera os 6 anagramas de ANa e os 3 de ANA. Portanto, ANa possui o dobro de, ou duas vezes mais, anagramas do que ANA. Isso nos mostra que relações do tipo: dobro, metade, triplo, terça parte, entre outras, podem ainda não serem dominadas pelos estudantes.

Figura 10. Solução apresentada pelo grupo B.



Fonte: própria.

Como entregamos uma lista com várias questões, em certo momento percebi que os alunos estavam separando as questões para cada integrante do grupo, porém isso os impedia na troca de conhecimento entre cada tarefa, uma vez que, precisam responder todas as questões em grupo e assim avançar nas demais. Com isso, reforçamos aos alunos a importância de responderem e discutirem suas soluções em grupo.

Tarefa 5

Descobrimos que o número de anagramas de uma palavra de comprimento:

- *2 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a* $1 = \frac{2!}{2!}$.
- *3 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a* _______.
- *4 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a* _______.
- *5 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a* _______.
- n *sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a* _______.

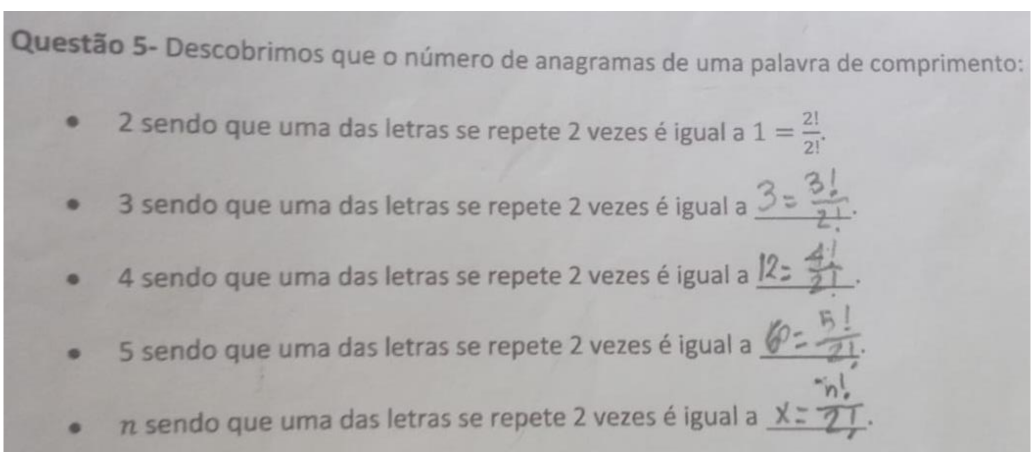
Os estudantes conseguiram utilizar bem o resultado da última tarefa e começaram a generalizar o caso particular para uma palavra com n letras com uma delas se repetindo duas vezes, começando a contar a quantidade de anagramas sem necessariamente listá-las.

Podemos perceber por meio das soluções dos grupos C e D, que os estudantes ao chegarem na generalização para uma palavra com n letras, sendo que uma delas se repete duas vezes, preenchem o "vazio" que ficaria caso escrevessem apenas $\frac{n!}{2}$, por não poderem calcular esse resultado. Por exemplo, os alunos do grupo D, colocaram do outro lado da igualdade um x para representar uma quantidade que não sabiam, já o grupo C em sua tentativa, colocaram $n!$, mesmo sendo falsa a igualdade entre um número natural e sua metade. É importante que o professor se utilize de “erros” para retomar conceitos mais básicos, mesmo o foco da atividade não sendo a relação entre números naturais.

Era esperado que os alunos se perguntassem a respeito de qual seria o valor de $\frac{n!}{2!}$, uma vez que a matemática apresentada no ensino básico, volta-se a encontrar valores e não analisar padrões. Outro fator relevante, é a progressão gerada pelos itens anteriores, que resultam em números naturais, gerando talvez uma necessidade de quantificar o resultado da fração em n. Mesmo sem perceberem, os alunos encontraram uma fórmula geral para o caso de anagramas que possuem uma única palavra, com uma letra se repetindo duas vezes.

Para que os alunos pudessem enxergar a variabilidade do n presente na tarefa, para um n pertencente aos naturais, poderíamos instigar os alunos a fazerem o processo inverso, por exemplo, pedindo aos alunos que substituíssem o valor de n, na fórmula geral que encontraram, pelos valores dos itens anteriores e que comparassem os resultados, fazendo com que os estudantes vissem que suas conjecturas eram as certas para o problema inicial que eles tinham, e indo além, compreendessem melhor qual a função do resultado encontrado por eles.

Figura 11. Resposta apresentada pelo grupo D.

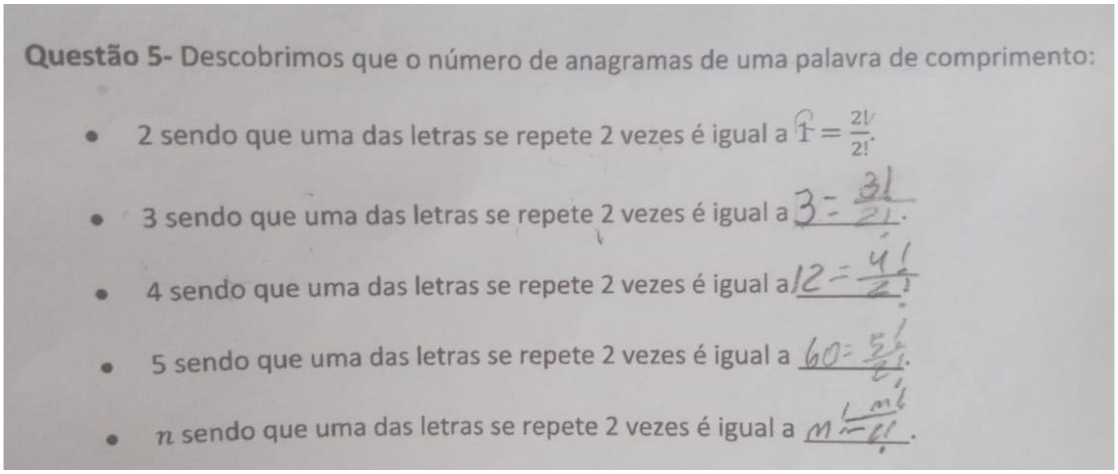


Questão 5- Descobrimos que o número de anagramas de uma palavra de comprimento:

- 2 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $1 = \frac{2!}{2!}$.
- 3 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $3 = \frac{3!}{2!}$.
- 4 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $12 = \frac{4!}{2!}$.
- 5 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $60 = \frac{5!}{2!}$.
- n sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $x = \frac{n!}{2!}$.

Fonte: própria.

Figura 12. Resposta apresentada pelo grupo C.



Questão 5- Descobrimos que o número de anagramas de uma palavra de comprimento:

- 2 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $1 = \frac{2!}{2!}$.
- 3 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $3 = \frac{3!}{2!}$.
- 4 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $12 = \frac{4!}{2!}$.
- 5 sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $60 = \frac{5!}{2!}$.
- n sendo que uma das letras se repete 2 vezes é igual a $n = \frac{n!}{2!}$.

Fonte: própria.

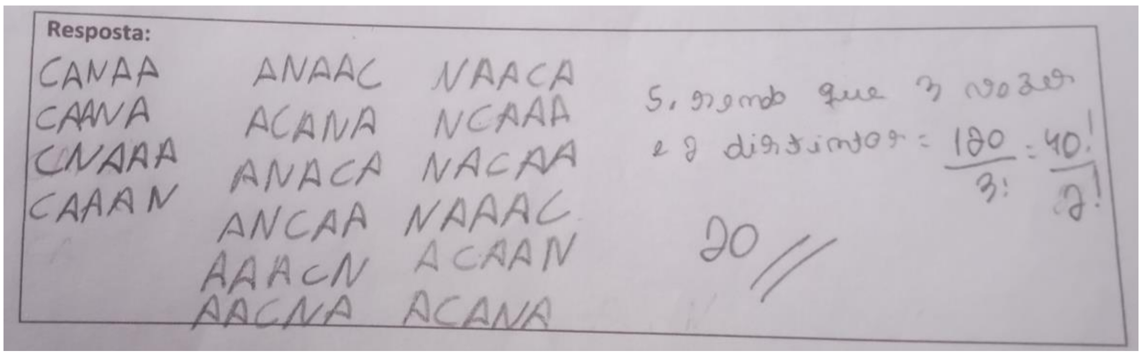
Tarefa 6

Liste os anagramas da palavra CANAA para determinar o número de anagramas de uma palavra com comprimento 5 sendo que uma das suas letras se repete 3 vezes e as outras duas são distintas. Sabemos que uma palavra de comprimento 5, todas distintas, possui 120 anagramas. Este valor é quantas vezes maior do que o número de anagramas da palavra CANAA?

Como a quantidade de anagramas das questões anteriores eram pequenas, os estudantes de todos os grupos conseguiam enumerá-los e contar sua quantidade. Porém, é necessário que os alunos consigam analisar os padrões de casos menores e transitar para casos maiores por meio de abstrações com recursos da escrita para visualizarem as informações que já possuíam anteriormente. Para incentivar isso, escrevemos uma palavra de comprimento maior na lousa, a palavra “AMANHA”. Após isso, pedi que os estudantes me dissessem o número de anagramas que essa palavra possuía. Posteriormente, um dos integrantes do grupo A veio a lousa e tentou enumerar no quadro os anagramas possíveis. Com base nisso, pude perceber que o grupo A não se utilizou dos resultados que já obtinham para calcular a quantidade de anagramas da palavra “AMANHA” e por isso talvez não conseguiram generalizar seu pensamento para uma palavra de comprimento maior.

Observe que o grupo B manteve o erro de notação da tarefa 3*. Escreverem corretamente que o número de anagramas de CANAA era $\frac{120}{3!}$, mas em seguida afirmam que esta fração é equivalente a $\frac{40!}{2!}$ e, por fim, concluíram que eram 20 anagramas. É preciso desenvolver a aquisição da linguagem matemática, neste caso o domínio de manipulações algébricas envolvendo o símbolo de fatorial (!). Observe que $40! \neq 40$ e, na verdade, eles pretendiam escrever a seguinte sequência de igualdades $\frac{120}{3!} = \frac{120}{3\times 2!} = \frac{40}{2!} = 20$. Além disso, enumeraram apenas 16 dos 20 anagramas da palavra CANAA.

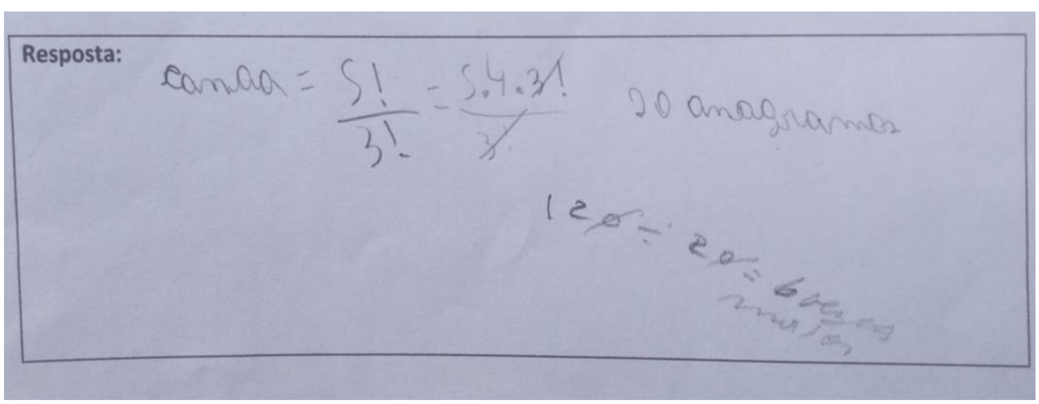
Figura 13. Reposta da tarefa 6 apresentada pelo grupo B



Fonte: própria.

O grupo C, por sua vez, apresentou resolução utilizando a notação e álgebra fatorial adequadas. Observando que $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ e que $3! = 3 \times 2 \times 1$, escreveu $\frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times3!}{3!}$, mas não enumerou os 20 anagramas.

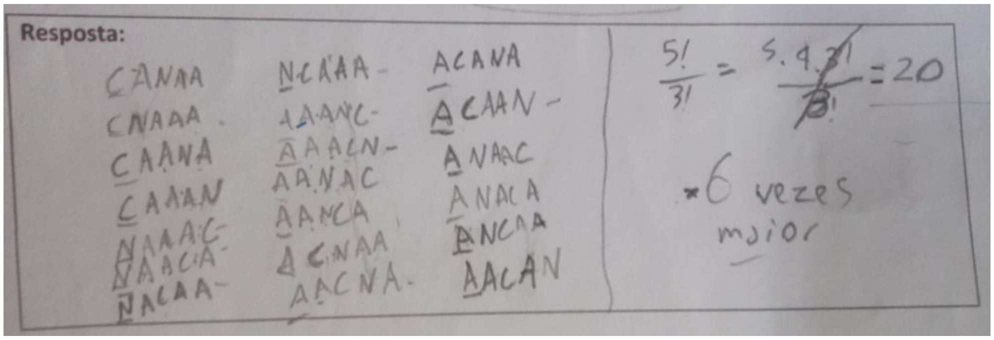
Figura 14. Reposta da tarefa 6 apresentada pelo Grupo C



Fonte: própria.

O grupo D listou todos os casos de anagramas da palavra posta e se utilizou de um raciocínio parecido ao dos outros grupos. Podemos notar também que os grupos C e D responderam corretamente que o 120 é 6 vezes maior do que o número de anagramas de CANAA.

Figura 15. Solução da tarefa 6 apresentada pelo grupo D



Fonte: própria.

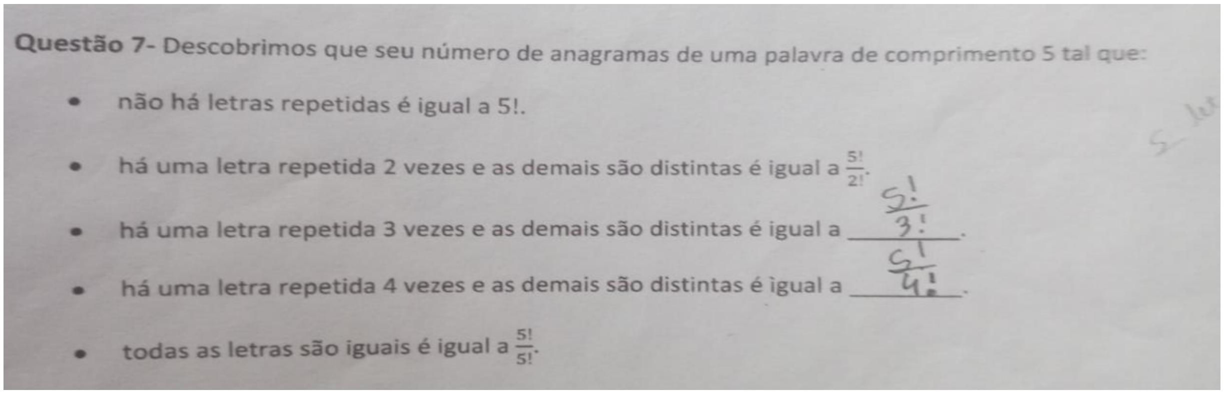
Tarefa 7

Descobrimos que o número de anagramas de uma palavra de comprimento 5 tal que:

- *não há letras repetidas é igual a* $5!$.
- *há uma letra repetida 2 vezes e as demais são distintas é igual a* $\frac{5!}{2!}$.
- *há uma letra repetida 3 vezes e as demais são distintas é igual a* ________.
- *há uma letra repetida 4 vezes e as demais são distintas é igual a* ________.
- *todas as letras são iguais é igual a* $\frac{5!}{5!}$.

Notando que o grupo A ainda estava preso ao raciocínio enumerativo e não desenvolveu o raciocínio de contagem pretendido pelas atividades, o professor poderia apresentar caminhos alternativos para que os estudantes pudessem progredir. Duas alternativas que poderiam ser utilizadas: 1) trocar um ou dois membros do grupo A com membros de outros grupos; 2) iniciar uma discussão geral com todos os grupos. Infelizmente, não foram tomadas nenhuma dessas atitudes e mantivemos os grupos como estavam e a discussão foi adiada para o final da atividade.

Figura 16. Resposta da tarefa 7 pelo grupo B.

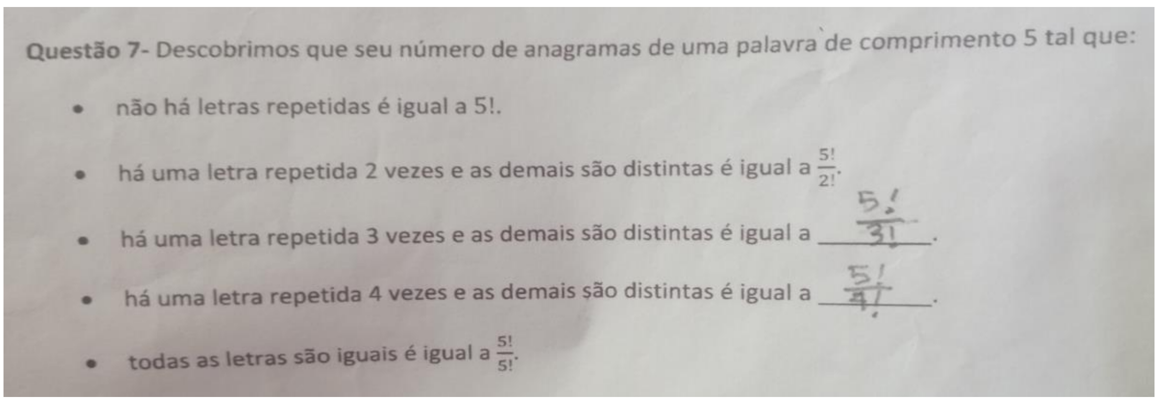


Questão 7- Descobrimos que seu número de anagramas de uma palavra de comprimento 5 tal que:

- não há letras repetidas é igual a 5!.
- há uma letra repetida 2 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{2!}$.
- há uma letra repetida 3 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{3!}$.
- há uma letra repetida 4 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{4!}$.
- todas as letras são iguais é igual a $\frac{5!}{5!}$.

Fonte: própria.

Figura 17. Resposta da tarefa 7 pelo grupo C.



Questão 7- Descobrimos que seu número de anagramas de uma palavra de comprimento 5 tal que:

- não há letras repetidas é igual a 5!.
- há uma letra repetida 2 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{2!}$.
- há uma letra repetida 3 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{3!}$.
- há uma letra repetida 4 vezes e as demais são distintas é igual a $\frac{5!}{4!}$.
- todas as letras são iguais é igual a $\frac{5!}{5!}$.

Fonte: própria.

Tarefa 8

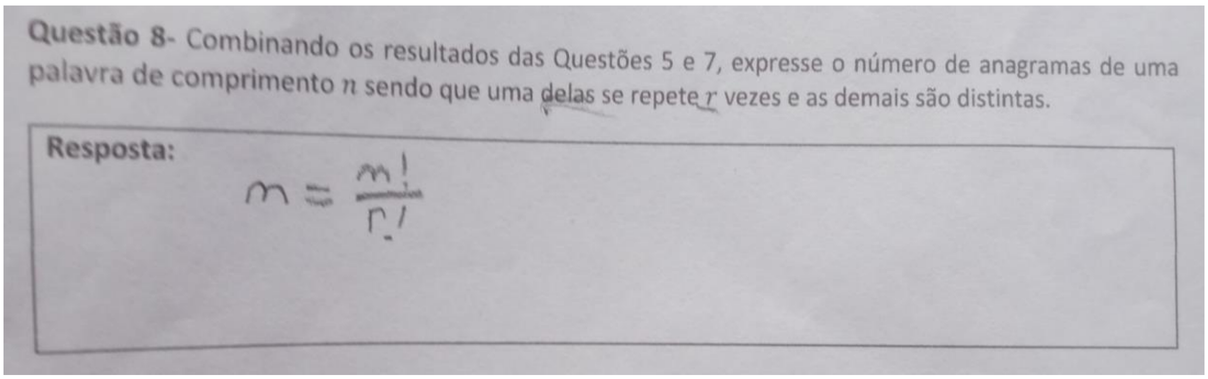
Combinando os resultados das Questões 5 e 7, expresse o número de anagramas de uma palavra de comprimento n sendo que uma delas se repete r vezes e as demais são distintas.

Com exceção do grupo A os demais grupos já estavam acostumados com as notações. Conseguiram resolver a tarefa 8 sem nenhuma dificuldade. É observável que o grupo A não conseguiu avançar nas questões por se prender a enumeração dos anagramas. Ao conversar com o grupo, o aluno A2 me relatou a dificuldade de passar seu raciocínio para o papel.

A apresentação dos resultados dos grupos pode ser vista como um método que dá suporte ao prosseguimento das atividades. Como não foi realizada, pode-se observar como os grupos estão isolados e não desenvolver a cooperação entre eles, apenas internamente. Com isso, podemos notar a dificuldade de avançar apresentada pelo grupo A, que aparentemente ainda está preso à ideia de enumeração. Durante essa o professor deve evitar interferir no raciocínio do aluno, mas pode testá-lo.

O grupo C escreveu $n = \frac{n!}{r!}$ ao invés de simplesmente $\frac{n!}{r!}$. Isso indica certa falta de costume dos alunos em soluções mais formais.

Figura 18. Resposta da tarefa 8 apresentada pelo grupo C



Questão 8- Combinando os resultados das Questões 5 e 7, expresse o número de anagramas de uma palavra de comprimento n sendo que uma delas se repete r vezes e as demais são distintas.

Resposta:

$n = \frac{n!}{r!}$

Fonte: própria.

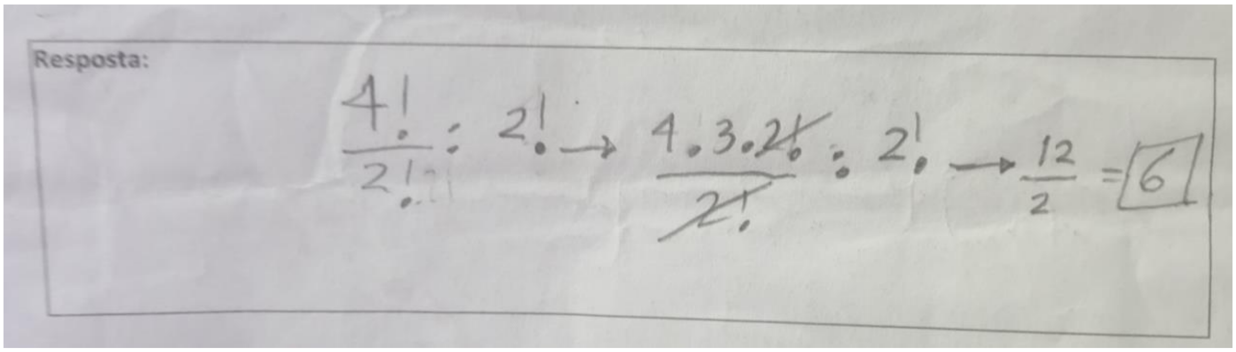
2.3. Encontro 3

Tarefa 9

Sabemos que uma palavra de comprimento 4 cujas letras são todas distintas possui $4!$ *anagramas. Além disso, descobrimos que se essa palavra de comprimento 4 possui uma letra que se repete 2 vezes e as demais são distintas, então ela possui* $\frac{4!}{2!}$ *anagramas. Liste o número de anagramas da palavra* $BABA$*, que tem comprimento 4, sendo apenas 2 letras distintas, A e B, cada uma se repetindo 2 vezes.*

O estudante D1, utilizou o modelo já conhecido anteriormente e dividiu novamente pelo fatorial de letras repetidas. Interessante o registro feito para as duas divisões que devem ser feitas. Primeiramente, expressa o número de anagramas que uma palavra com 4 letras sendo 2 iguais possui, registrando como $\frac{4!}{2!}$. Em seguida, como existe outra letra também com duas repetições divide o resultado anterior por 2!, mas registra esta operação como $\frac{4!}{2!} : 2!$. O padrão utilizado seria $\frac{4!}{2!2!}$, mas tem o mesmo significado do registrado por D1. As operações realizadas em seguida pelo estudante indicam certo domínio da linguagem algébrica e ele conclui corretamente a existência de 6 anagramas da palavra BABA.

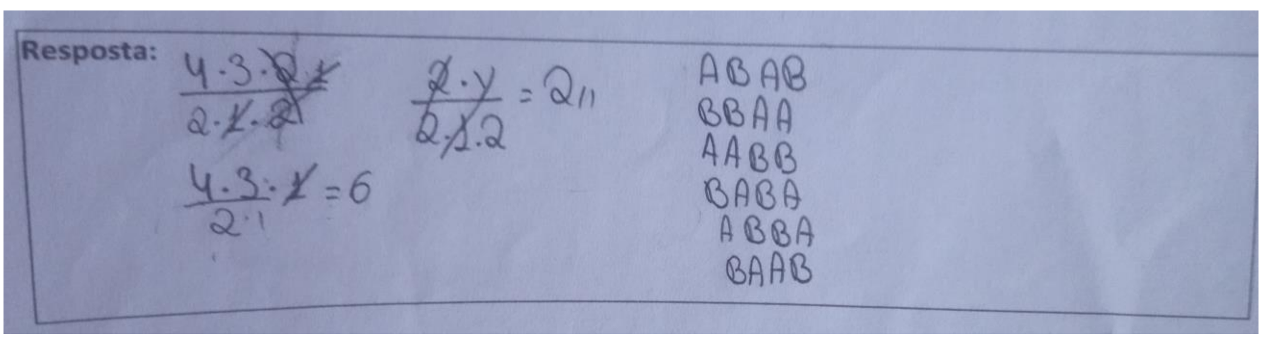
Figura 19. Resposta da tarefa 9 apresentada pelo grupo D



Fonte: própria.

O grupo C, chegou ao mesmo resultado, porém listando os anagramas e utilizando uma notação diferente.

Figura 20. Resposta da tarefa 9 apresentada pelo grupo C



Fonte: própria.

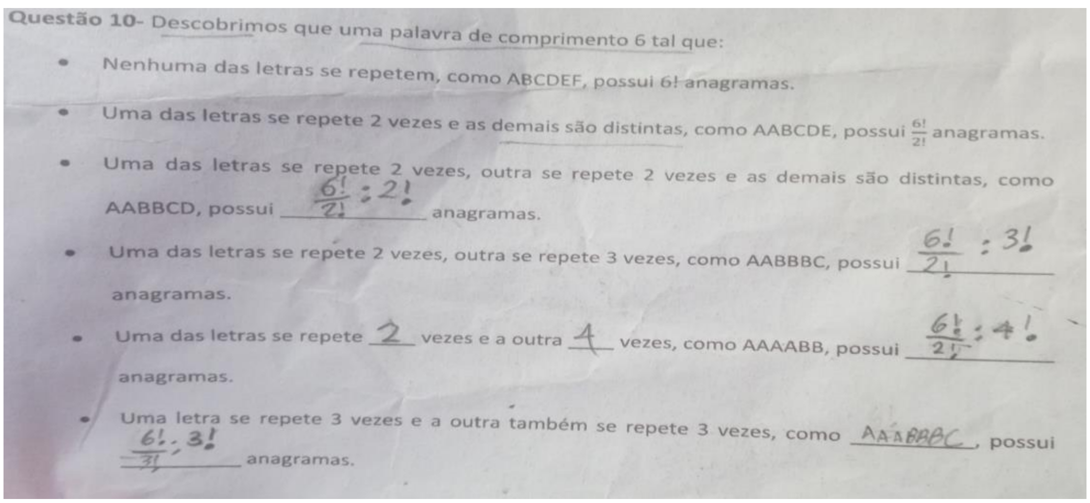
Tarefa 10
Descobrimos que uma palavra de comprimento 6 tal que:

- *Nenhuma das letras se repetem, como ABCDEF, possui* $6!$ *anagramas.*
- *Uma das letras se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABCDE, possui* $\frac{6!}{2!}$ *anagramas.*
- *Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABBCD, possui _____________ anagramas.*

- *Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 3 vezes, como AABBBC, possui ____________ anagramas.*
- *Uma das letras se repete ____ vezes e a outra ____ vezes, como AAAABB, possui ____________ anagramas.*
- *Uma letra se repete 3 vezes e a outra também se repete 3 vezes, como __________, possui __________ anagramas.*

Nesta tarefa, podemos verificar se o raciocínio dos estudantes se estende para uma palavra mais ampla. Notamos que o aluno do grupo D, conseguiu entender bem a ideia e estender sua conjectura a uma palavra com mais repetições.

Figura 21. Resolução da tarefa 10 apresentada pelo grupo D.

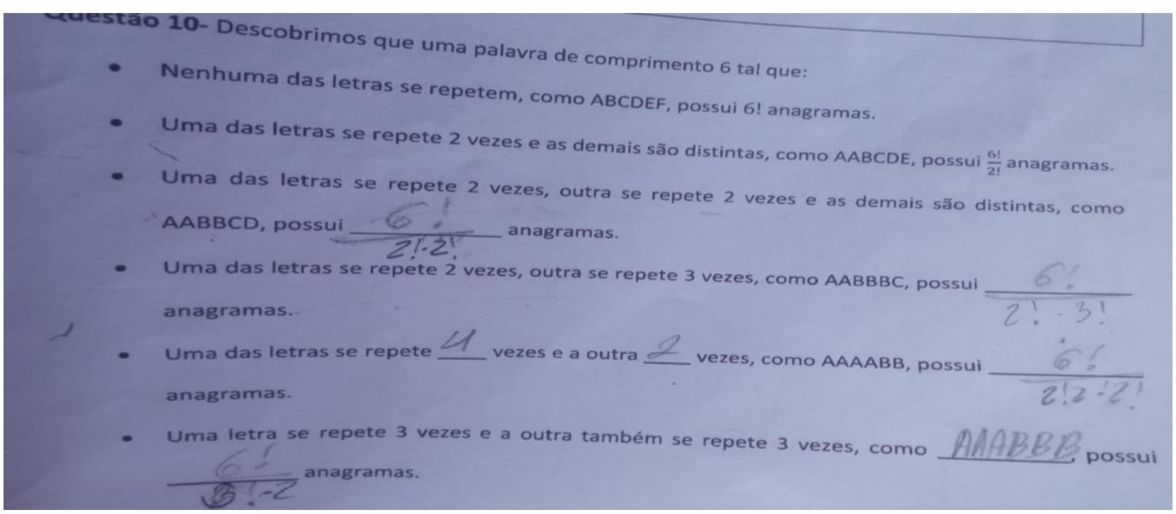


Questão 10- Descobrimos que uma palavra de comprimento 6 tal que:

- Nenhuma das letras se repetem, como ABCDEF, possui 6! anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABCDE, possui $\frac{6!}{2!}$ anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABBCD, possui $\frac{6!}{2!} : 2!$ anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 3 vezes, como AABBBC, possui $\frac{6!}{2!} : 3!$ anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes e a outra 4 vezes, como AAAABB, possui $\frac{6!}{2!} : 4!$ anagramas.
- Uma letra se repete 3 vezes e a outra também se repete 3 vezes, como AAABBBC, possui $\frac{6!}{3!} . 3!$ anagramas.

Fonte: própria.

Figura 22. Resolução da tarefa 10 apresentada pelo grupo C.



Questão 10- Descobrimos que uma palavra de comprimento 6 tal que:

- Nenhuma das letras se repetem, como ABCDEF, possui 6! anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABCDE, possui $\frac{6!}{2!}$ anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 2 vezes e as demais são distintas, como AABBCD, possui $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$ anagramas.
- Uma das letras se repete 2 vezes, outra se repete 3 vezes, como AABBBC, possui $\frac{6!}{2!\cdot 3!}$ anagramas.
- Uma das letras se repete 4 vezes e a outra 2 vezes, como AAAABB, possui $\frac{6!}{2!2\cdot 2!}$ anagramas.
- Uma letra se repete 3 vezes e a outra também se repete 3 vezes, como AAABBB, possui $\frac{6!}{3!\cdot 2}$ anagramas.

Fonte: própria.

Inicialmente o grupo C, nos dois primeiros itens, mostrou ter entendido a contagem de anagramas para palavras que possuem mais de uma letra que se repetem. Entretanto, percebemos que o grupo se desviou um pouco em suas divisões nos dois últimos itens.

Podemos perceber a partir dos itens 3 e 4, que o grupo C divide corretamente pelo fatorial do número de letras que se repetem, porém não consegue manter o raciocínio nos dois últimos itens. A apresentação para os outros grupos poderia ser usada pelo professor para tentar testar as conjecturas do grupo C. Por exemplo, a resposta do grupo C para o número de anagramas de AAAABB dada seria de $\frac{6!}{2!2!2!}$, que é igual a 90. Porém, o número correto seria apenas 15, que podem até mesmo ser enumerado como três que se iniciam com AAA: AAA|ABB, AAA|BAB e AAA|BBA; três que finalizam com AAA: ABB|AAA, BAB|AAA e BBA|AAA; três que iniciam com AAB: AAB|AAB, AAB|ABA e AAB|BAA; três que iniciam com ABA: ABA|AAB, ABA|ABA e ABA|BAA; três que iniciam com BAA: BAA|AAB, BAA|ABA e BAA|BAA. O professor poderia questionar ao grupo C se existe algum outro anagrama da palavra AAAABB além das 15 enumeradas. Em seguida, poderia perguntar ao grupo qual seria o número de anagramas da palavra AABBCC e esperaria que todos notassem que a resposta dada pelo grupo C está correta para AABBCC e não para AAAABB.

Esse raciocínio se comprova quando o grupo escreve no último item que $\frac{6!}{3!\times 2}$ ao invés de $\frac{6!}{3!3!}$, isso pela confusão de que $3! \times 3!$ é igual a $3! \times 2$. Um possível caminho para solucionarmos isso, seria instigar os alunos a calcular esses produtos fazendo uma comparação entre eles, assim os estudantes poderiam reavaliar sua escrita e verificar suas conjecturas.

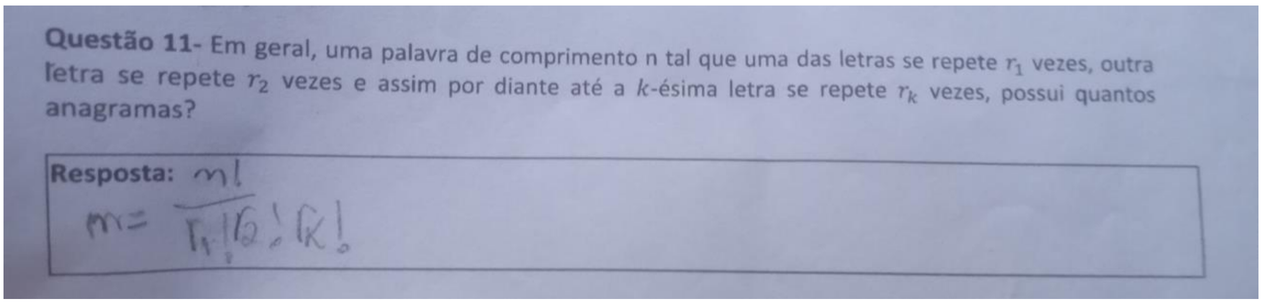
Por meio deste fato, podemos perceber a importância do processo de resolução dos estudantes até a resposta final estar bem definido, pois apesar dos alunos entenderem bem o que a tarefa lhes pedia, a sua resposta final não corresponde com seu pensamento. Cabe ao professor estar atento aos pequenos desvios em cada solução, pois assim pode evitar que o aluno se prenda a estes em conjecturas futuras.

Tarefa 11

Em geral, uma palavra de comprimento n tal que uma das letras se repete r_1 vezes, outra letra se repete r_2 vezes e assim por diante até a k-ésima letra se repete r_k vezes, possui quantos anagramas?

Aqui, vemos uma mudança de postura na solução do grupo C, atestando talvez que o desvio apresentado na tarefa anterior tenha se passado por mal registro da sua solução no papel, embora seu pensamento estivesse correto. Notamos que o grupo conseguiu uma generalização do problema. Novamente, há o uso da expressão $n = \frac{n!}{r_1!r_2!r_k!}$ ao invés de $\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$, apresentando dois erros: 1) o uso do sinal de igualdade; 2) a falta das reticências, indicando que o produto fatorial no denominador possui k termos.

Figura 23. Resolução da tarefa 11 apresentada pelo grupo C.



Questão 11- Em geral, uma palavra de comprimento n tal que uma das letras se repete r_1 vezes, outra letra se repete r_2 vezes e assim por diante até a k-ésima letra se repete r_k vezes, possui quantos anagramas?

Resposta: $n = \frac{n!}{r_1!r_2!r_k!}$

Fonte: própria.

Porém o grupo D, mesmo entendendo o processo para casos particulares não conseguiu generalizar sua conjectura para um caso geral.

Discussão Geral

Por conta de imprevistos, apesar de termos planejado reservar 30% do tempo de cada encontro para discussões, não foi possível executá-lo nos primeiros encontros. Dessa forma, apenas no último encontro os grupos discutiram as questões feitas e assim conseguimos abordar somente uma quantidade pequena de questões. Ao longo da atividade o grupo B demonstrou estar interessado na atividade, apesar de enfrentar algumas dificuldades no começo em suas resoluções, se dispôs a discutir sua solução para os demais colegas. Eles escolheram a tarefa 3, por estarem mais confiantes.

Quadro 4 – Apresentação da solução da tarefa 3 pelo grupo B.

Interlocutor	Fala
B1	Se só tem uma letra como O, a gente só pode escrever 1 vez, ou seja, 1.
B2	Uma palavra com duas letras como NO é igual à $2 = 2 \times 1$, porque só tem duas letras, e só pode fazer 2 vezes.

B1	Porque NO, a gente vai ter que é igual 2, e $2 = 2 \times 1$, o 2 vai ser a possibilidade de vezes que a gente pode escrever.
B1	Uma palavra com 3 letras todas distintas como ANO, é igual a 6, quantidade de possibilidades, que vai ser igual a 2×3, onde 3 vai ser a quantidade de letras.
B2	Uma palavra com 4 letras todas distintas como $CANO$, é igual a 24, que é a quantidade de possibilidades, igual a $2 \times 3 \times 4$ que dá 24.
B1	Porque o 2×3 antecede o 6 que é a de 3 letras.
B2	Uma palavra com 5 letras todas distintas como $CANOS$, é igual a 120 = $2 \times 3 \times 4 \times 5$.
B1	E aí agora complica, porque entra o famoso n.
B2	Uma palavra com n letras, todas distintas, é igual a $n!$
B1	A gente percebeu, pelos outros, que é sempre o consecutivo ou o anterior, não deu a quantidade de letras nem deu a quantidade de possibilidades, porém a gente concluiu que é $n!$

Fonte: Autor (2024)

Por meio do diálogo, podemos notar que os estudantes relacionaram bem os elementos das contagens de anagramas, pois eles explicaram o que significava cada elemento da sua solução. Na última fala dos estudantes, percebemos que não houve uma boa abstração do que significava o n da tarefa, por trás disso os estudantes se utilizaram do pensamento indutivo para afirmar sua conjectura, porém sem o uso de uma demonstração formal de seu pensamento. Percebemos isso na frase utilizada por B1 "a gente concluiu que é $n!$". Os estudantes assumiram que isso era verdade e se convenceram de que era a única maneira de calcular o número de anagramas de uma palavra de comprimento n.

Esse pensamento foi comum entre os estudantes, no momento em que recebiam algum questionamento sobre seu pensamento era dado uma resposta definitiva sem uma construção lógica.

3. CONSIDERAÇÕES

As experiências com os encontros descritos acima, permitiram notar uma mudança no comportamento dos alunos em relação à aula tradicional. Como na aula investigativa o professor não tem papel de validador de respostas, mas apenas de uma espécie de condutor ou orientador, os alunos buscam validar suas respostas entre seus colegas de equipe. Essa conduta pode ajudar os alunos a desmistificarem o pensamento de que "fazer matemática é algo tão difícil". De fato, após ainda no primeiro encontro pude ouvir expressões do tipo "era tão fácil assim?" ou "era só isso?".

Essa mudança de atitude pode se mostrar favorável para o ensino e aprendizagem de matemática.

A sequência apresentada foi adaptada ao método investigativo descrito anteriormente. Pela amplitude do nosso objeto de estudo “As contagens a partir de anagramas” voltadas ao ensino, buscamos estreitar alguns passos da investigação, porém mantendo sua essência. Por exemplo, a habilidade de reconhecer padrões, a exploração da atividade de forma autônoma pelos estudantes, pequenos testes de pensamentos obtidos a partir de leves conjecturas, como também a exposição da solução da *Questão 3**, pelo grupo B. Por ser um método novo aos estudantes, procuramos adaptar a turma em alguns aspectos. A sequência pode ser vista como um primeiro passo para uma adaptação da turma a “nova” forma de estudar as contagens em sala.

Algumas das vantagens de se trabalhar com o método investigativo é que o aluno participa de quase todo o processo de sua aprendizagem, exigindo do professor uma postura de observador, mas que também pode intervir quando necessário. As principais dificuldades são saber o momento em que intervir ou acompanhar a ideia de um grupo. Talvez com mais experiências de atividades de ensino investigativo possam ajudar a notar o momento certo para intervir, nem antes da ideia estar fechada e atrapalhar o desenvolvimento completo do raciocínio da equipe, nem depois e deixar a equipe gastar tempo e energia com uma ideia errada. Por sua vez, acompanhar a ideia de uma equipe é difícil porque por um lado a equipe precisa traduzir seu raciocínio para a linguagem comum e o professor a traduz para a linguagem científica.

Por não ser uma atividade usual, antes de usar uma atividade sobre o método exploratório deve ser exercitado o processo de comunicação entre os alunos, utilizar atividades menos complexas anteriormente, para que o aluno se acostume com este tipo de atividade e que mude seu pensamento de somente reescrever o que o professor escreveu na lousa. É importante também não sobrecarregar o estudante durante esse processo, mesmo que necessite cumprir o conteúdo. Por exemplo, no primeiro dia conseguimos avançar somente três questões.

Muitas das vezes, o distanciamento entre o aluno e a matemática pode se dar pelo uso excessivo de uma linguagem muito simbólica ou muito formal. Apesar de ser uma característica da área, o professor deve estar atento para as dificuldades encontradas por estudantes que estão iniciando naquele conteúdo. Desse modo, ao formular atividade, deve ser um dos objetivos a compreensão do problema integralmente, pois se o aluno não interpreta corretamente o enunciado da tarefa, pode-se ter uma perca significativa em seu processo de aprendizagem. À medida que os estudantes estiverem acostumados com aquela linguagem proposta inicialmente, poderá se trabalhar com mais notações e formalidades das demonstrações necessárias no processo matemático.

Alguns dos alunos não abstraíram suficientemente o que seria uma palavra de n letras, pois não é usual, seja qual for o idioma, ter uma palavra com uma quantidade muito grande de letras. Mesmo que necessitemos dessa generalização, pensar em casos concretos sempre fazendo uma bijeção entre o novo e o conhecido, pode ajudar. Uma possível alteração fosse trabalhar com cubos coloridos enfileirados. Dessa forma, as cores fariam o papel das letras e o total de cubos enfileirados seria o tamanho da palavra. Outro momento agudo da atividade é na conjectura, quando os números passam a ser vistos como uma variável n, tamanho da palavra. É fundamental que os estudantes percebam essa nuance. Talvez a expressão “uma palavra com n letras” não evidencie de forma adequada para iniciantes que o n indica a quantidade variável de letras que compõem a palavra. Se for substituída por outra como “uma palavra formada por qualquer quantidade de letras” talvez os alunos se questionassem como representar uma quantidade de letras qualquer, ou como ele representaria essa quantidade e assim aparecesse a necessidade de utilizar um símbolo (do alfabeto latino) para representar essa quantidade.

Vale lembrar que esta foi uma atividade aplicada em pouco tempo, sujeita a adaptações para este trabalho de conclusão de curso. Porém, se fosse aplicada com uma quantidade de encontros maior, poderia explorar outras questões com base em anagramas de palavras, por exemplo coeficientes binomiais e multinominais, conjunto das partes, entre outros.

Apesar de incomum, no Ensino Básico as demonstrações podem ser inseridas de um modo natural nas salas de aula a partir da abordagem investigativa. Vimos nessa sequência de ensino como a exploração de situações envolvendo anagramas levaram os alunos a conjecturas próprias. Nossa abordagem permitiu trazer conceitos curriculares como enumeração, contagem, permutação e combinação de um modo mais natural, no ritmo de cada equipe. Seguindo um pouco mais na sequência os estudantes poderiam dar interpretações combinatórias aos números binomiais e multinominais. Estas podem ser vistas como demonstrações combinatórias que não são nem algébricas nem geométricas.

REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. e GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. São Paulo: Artmed, 2001.

FREIRE, Paulo. **PEDAGOGIA DO OPRIMIDO**. 17ª Edição. São Paulo: Paz e Terra, 1987.

PONTE, J. P., BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Segunda Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

PONTE, João Pedro. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

MERRIS, Russel. **Combinatorics**. Segunda Edição. Willey, 2003.

MACHADO, Milene Carneiro. **Um estudo sobre as atitudes em relação à matemática, crenças de autoeficácia matemática e o desempenho escolar dos estudantes**. Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/3116_1578_ID.pdf. Acesso em: 19 dez. 2024.