UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoremas do tipo Liouville e Aplicações

Dissertação de Mestrado

Claudemir Alcantara dos Santos Junior

DMA

São Cristóvão – Sergipe

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Claudemir Alcantara dos Santos Junior

Teoremas do tipo Liouville e Aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Disson Soares dos Prazeres

São Cristóvão – Sergipe

2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Santos Junior, Claudemir Alcantara
S237t	Teoremas do tipo Liouville e aplicações / Claudemir Alcantara Santos Junior ; orientador Disson Soares dos Prazeres. – São Cristóvão, 2025.
	78 f.
	Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.
	1. Teoremas de existência. 2. Autovalores. Prazeres, Disson Soares dos orient. II. Título.
	CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Teoremas do tipo Liouville e Aplicações

por

Claudemir Alcântara dos Santos Junior

Aprovada pela banca examinadora:

Disson dos Prazeres

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres - UFS
Orientador

Uberlândio Batista Severo

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB
Primeiro Examinador

Gabrielle Saller Nornberg

Prof. Dra. Gabrielle Saller Nornberg - UChile
Segundo Examinador

Edgard Almeida Pimentel

Prof. Dr. Edgard Almeida Pimentel - PUC-RJ
Segundo Examinador

São Cristóvão, 09 de Agosto de 2021

Dedicado à minha noiva, a minha família e aos meus amigos matemáticos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe Elisangela e a meu irmão Vinicius por todo apoio durante todos estes anos, possibilitando assim que eu pudesse me dedicar aos meus estudos.

A minha noiva Fernanda, por ter me incentivado, ajudado na busca por meus sonhos e objetivos, por toda paciência quanto aos momentos de ausência e por toda compreensão com a minha dedicação aos estudos.

Aos meus amigos que conseguiram tornar o período do mestrado mais leve, sempre dispostos a ajudar com dúvidas ou a rir dos momentos de tensão : Thyago Rosa, Thiago Dantas, Carol, Aelson, Pablo, Alexandre, Thiago Guimarães, Antônio, Fernando.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica, em especial : Disson, Valdenberg, Giovana, André, Samuel, Maria, Arlúcio, José Anderson e Humberto.

Ao meu orientador/amigo Disson por todos ensinamentos acadêmicos e pessoais, por toda paciência e por cada momento de descontração que tivemos.

Aos professores, Edgard Pimentel, Gabrielle Nornberg e Uberlandio Severo pela disponibilidade para participar da banca.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

"A matemática é a mais bonita e a mais poderosa criação do espirito humano"

(Stefan Banach)

Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre os resultados do tipo Liouville para equações envolvendo operadores elípticos não divergente e suas aplicações. Para isso, utilizaremos uma abordagem recente do tema que relaciona a existência de soluções positivas de equações elípticas em $\mathbb{R}^N$ ao scalling da equação, a homogeneidade da solução fundamental associada ao operador elíptico e a existência e finitude do primeiro autovalor associado ao operador elíptico.

Palavras-chave: Teoremas do tipo Liouville. Soluções Fundamentais. Primeiro autovalor.

Abstract

The goal of this work is to perform a study about Liouville type results for equations involving non-divergent elliptical operators and their applications. For this, we will use a recent approach ot the topic that relates the existence of positive solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ to the scalling of the equation, the homogeneity of the fundamental solution associated with the elliptical operator and the existence and finitude of the first eigenvalue associated with the elliptical operator.

Keywords: Liouville-type Theorems. Fundamental Solutions. First eigenvalue.

Sumário

Introdução

As propriedades qualitativas para soluções das equações diferenciais parciais (EDP's) é um dos temas mais estudados na matemática devido ao grande número de aplicações como por exemplo em fenômenos físicos, químicos, biológicos, atmosféricos e econômicos. Entre essas propriedades, uma das mais importantes é o princípio de Liouville que consiste em determinar o perfil de soluções de EDP's no $\mathbb{R}^N$. Na primeira metade do século XIX, Liouville mostrou que as únicas funções harmônicas limitadas em $\mathbb{R}^N$ são as constantes.

Na década de 60 do século XX, Moser mostrou que se $\Delta u \leq 0$ em $\mathbb{R}^2$ e $u \geq 0$ então $u = 0$. Quando $N > 2$ este fato não é verdade, basta observar que

$$u = \frac{1}{(1 + |x|)^{2q}}$$

é solução de

$$\Delta u \leq -u^p \text{ em } \mathbb{R}^N$$

onde, $N > 2$, $p > 1$ e $\frac{1}{p-1} < q < \frac{N-2}{2}$.

Porém Gidas e Spruck em (GIDAS; SPRUCK, 1981) mostraram que existe um $p^* > 1$ tal que se

$$\Delta u + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

$u \geq 0$ e $1 < p < p^*$ então $u = 0$. Em 2000 Cutrí e Leoni mostraram em (CUTRí; LEONI, 2000) que o mesmo tipo de resultado vale para equações envolvendo os operadores de Pucci. Por sua vez Birindelli e Demengel em (BIRINDELLI; DEMENGEL, 2006) provaram que existe um $p^* > 1$ tal que se

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + u^p \leq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

$u \geq 0$ e $1 + \alpha < p < p^*$ então $u = 0$. Este tipo de operador está incluído na classe dos operadores que são elípticos quando o gradiente é grande, ver (IMBERT, 2011). Resultados do tipo Liouville são centrais no estudo de existência de soluções e no estudo de regularidade de soluções, ver, por exemplo, (GIDAS; SPRUCK, 1981)(PRAZERES; TEXEIRA, 2016).

Nesta dissertação nós iremos utilizar uma abordagem mais recente para obter esses resultados. Tal abordagem foi dada por Armstrong e Sirakov, ver (ARMSTRONG; SIRAKOV, 2011), e nos fornece uma estrategia para a demonstração de teoremas do tipo Liouville.

A fim de ilustrar tal estratégia iremos escrever o trabalho em uma ordem crescente de dificuldade, abordando primeiro o caso do Laplaciano e em seguida trabalhando com operadores mais gerais. Por fim, adaptando a mesma estratégia provaremos o teorema de Liouville no caso do semiespaço e encerramos a dissertação com uma aplicação.

No capítulo 1 demonstraremos o Teorema do tipo Liouville para o caso do Laplaciano. Primeiro provaremos a existência da solução fundamental para a equação de Laplace, isto é, vamos exibir uma função radial $\varphi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} :\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi = |x|^{2-N}$, de tal forma que

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Em seguida provaremos o princípio do máximo fraco, lema de Hopf e princípio da comparação. No passo seguinte mostraremos que o primeiro autovalor do Laplaciano, com Ω suave, aberto e limitado, pode ser caracterizado como

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda; \exists v > 0 \quad em \quad \Omega \quad e \quad \Delta v \leq -\lambda v\}.$$

Observamos que se $u \geq 0$ é solução de

$$\Delta u + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

então $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x)$ também é. Assim usaremos o principio da comparação para garantir que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$u_\lambda \geq C\lambda^{\frac{2}{p-1}-(2-N)},$$

e portanto

$$\Delta u_\lambda \leq -C^{p-1}\lambda^{\left(\frac{2}{p-1}-(2-N)\right)(p-1)} u_\lambda.$$

Logo se

$$\frac{2}{p-1} - (2-N) > 0$$

então $u_\lambda = 0$, pois caso contrário poderíamos fazer λ tão grande quanto quiséssemos e portanto λ_1 ilimitado.

O capítulo 2 é destinado ao estudo das equações envolvendo os operadores de Pucci $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}$, $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}$ e iremos fazer os mesmos passos do capitulo 1. No entanto neste caso cada passo será mais envolvente e desafiador. Iremos provar a existência de uma solução fundamental, e seguindo as ideias que aparecem em (ARMSTRONG, 2009) definiremos e provaremos a existência dos semiautovalores principais e suas respectivas autofunções. Estes semiautovalores principais são os substitutos naturais do primeiro autovalor do Laplaciano neste contexto. Além disso, provaremos o princípio da comparação e por fim entregaremos o princípio de Liouville, ou seja, existe um p^* tal que toda solução não negativa u de

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

é identicamente nula em $\mathbb{R}^N$ quando $1 < p < p^*$.

O capitulo 3 é desenvolvido de maneira semelhante aos capítulos anteriores, com a diferença que neste capítulo estaremos provando um teorema do tipo Liouville para um operador degenerado da forma

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $\alpha \geq 0$ e $1 + \alpha < p < p^*$. Ao contrário dos capítulos anteriores, não se espera que soluções de equações envolvendo este tipo de operador sejam clássicas, e para contornar tal problema introduziremos a noção de soluções no sentido da viscosidade. De maneira análoga ao feito para o caso do operador de Pucci e do Laplaciano, podemos definir uma constante que faz o o papel qualitativo do primeiro autovalor do Laplaciano para um operador não divergente, degenerado. Um resultado técnico de grande importância nesse capitulo, é o que chamamos de Lema do cancelamento , cuja a ideia vem do trabalho (IMBERT; SILVESTRE, 2013), com esse Lema podemos transferir muitas das propriedades das soluções da equação envolvendo o operador de Pucci para equações envolvendo os operadores degenerados trabalhados aqui. Em seguida provaremos que o primeiro autovalor é limitado e usaremos a estrategia do capítulo anterior para provar o princípio de Liouville.

O capítulo 4 é dedicado a provar o Teorema de Liouville para operadores degenerados no semiespaço, isto é,

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+.$$

onde $\alpha \geq 0$ e $1 + \alpha < p < p^*$. Para tal iremos provar a existência da solução fundamental para o operador de Pucci no semiespaço como Leoni em (LEONI, 2012). Diferentemente dos capítulos anteriores aqui teremos que lidar com o comportamento de u e da solução fundamental ao longo do $\mathbb{R}^{N-1}$, para tal usaremos as ideias que aparecem em (ARMSTRONG; SIRAKOV, 2011).

O capítulo 5 se baseia no trabalho de (GIDAS; SPRUCK, 1981), nele mostramos que existe uma constante C que depende somente de p, de tal forma que

$$u(x) \leq C,$$

sempre que $u > 0$ é solução no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} |\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + u^p & = 0 \quad \text{em} \quad B_1(0) \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial B_1(0). \end{cases}$$

A demonstração do problema consiste em mostrar que se houver uma sequencia de soluções desse problema ilimitada, podemos provar que existe uma solução não negativa para

$$\begin{cases} |\nabla v|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + v^p & \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ v(0) & = 1. \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} |\nabla v|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + v^p & \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ v(0) & = 1, \end{cases}$$

o que não pode ocorrer pois vai de encontro com os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4.

Ao longo do texto iremos sempre considerar Ω aberto, limitado, conexo e suave. Diremos que $u \in C^k(\Omega)$ se suas derivadas parciais de ordem k forem contínuas e que $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ se suas derivadas parciais de ordem k forem $\alpha-$Hölder continuas.

Notações

Aqui serão apresentadas algumas notações utilizadas ao longo do trabalho.

Notações geométricas

1. $\mathbb{R}^N$ é o espaço Euclidiano de dimensão $N \geq 3$.
2. $\mathbb{R}^N_+$ é o semi-espaço de dimensão $N \geq 3$.
3. $\mathbb{S}^{N-1}$ é a esfera unitária.
4. $x = (x_1, ..., x_N)$ é a representação de um ponto do espaço $\mathbb{R}^N$.
5. Ω é um subconjunto aberto, limitado, conexo e suave do espaço $\mathbb{R}^N$.
6. Ω^c denota o complementar do conjunto Ω.
7. $\partial\Omega$ é a borda do conjunto Ω.
8. $\overline{\Omega}$ é o fecho do conjunto Ω.
9. $B_r = B_r(x)$ é a bola aberta de centro em x e raio $r > 0$.
10. Se $a, b \in \mathbb{R}^N$, denotamos o produto interno usual por $a \cdot b = \sum_{i=1}^N a_i b_i$.
11. $|a|$ denota a norma Euclidiana.
12. $||u||_{L^N(\Omega)}$ denota a norma do espaço $L^N(\Omega)$.
13. $||u||_\infty = \inf\{C \geq 0; |u(x)| \leq C$ para quase todo $x\}$.
14. $||u||_{C^k(\Omega)}$ denota a norma no espaço $C^k(\Omega)$.
15. $||u||_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ denota a norma no espaço $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Constantes especiais

1. $N \geq 3$ indica a dimensão do espaço.
2. a, Λ são as constantes de elipticidade.
3. λ_1 denota o primeiro autovalor do Laplaciano
4. $\lambda_1^\pm(\Omega)$ denotam os semi-autovalores principais de $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}.$ em Ω.
5. $\overline{\lambda}$ é o primeiro autovalor associado ao operador $|\nabla.|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}. + \lambda I$ em Ω.

Espaços de Funções

1. $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é k vezes continuamente diferenciável$\}$.
2. $C^{K,\alpha}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{As derivadas parciais de ordem} k \text{de} u \text{são} \alpha - \text{Hölder continuas}\}$
3. $L^N(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é mensuarável, e $\|u\|_{L^N(\Omega)} < +\infty\}$.

Notações Matriciais

1. Escrevemos $A = ((a_{ij}))$ para dizer que A é uma matriz de ordem $m \times n$ com entradas a_{ij}.
2. $tr(M) = \sum_{i=1}^{N} m_{ii}$ é o traço da matriz M.
3. $x \otimes x$ é a matriz com entradas $x_i x_j$.
4. $I = I_N$ é a matriz identidade.
5. A^T é a transposta da matriz A.
6. $\mathcal{S}^N$ é o espaço das matrizes simétricas de ordem N.
7. $\mathcal{A}_{a,\Lambda}$ é o conjunto das matrizes simétricas de ordem $N \times N$ cujo os autovalores pertencem ao intervalo $[a, \Lambda]$.

Notações de Operadores

1. Δ é o operador de Laplace.
2. $\mathcal{M}^{\pm}_{a,\Lambda}$. é o operador de Pucci.
3. $|\nabla.|^{\alpha}\mathcal{M}^{\pm}_{a,\Lambda}$ é operador de Pucci degenerado.

1

Teorema do Tipo Liouville para o Laplaciano

Nesse capitulo iremos provar que soluções não negativas da equação

$$\Delta u + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

são identicamente nulas quando $1 < p < \frac{N}{N-2}$.

1.1 Solução fundamental e Princípio do Máximo

Iremos começar encontrando a solução fundamental para a equação de Laplace em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.1. *Existe uma função radial positiva $\varphi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\Delta\varphi = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

além disso,

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0 \quad e \quad \lim_{|x|\to 0} \varphi(x) = +\infty.$$

Prova: Seja $v(r)$ uma função radial tal que

$$u(x) = v(r),$$

onde $r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$. Observe que derivando r com relação x_i obtemos

$$r_{x_i} = 2x_i \cdot \frac{1}{2}|x|^{-1} \quad \forall i = 1, ..., N,$$

isto é

$$r_{x_i} = \frac{x_i}{r} \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Consequentemente

$$u_{x_i} = v'(r)r',$$

ou seja,

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r} \quad \forall i = 1, ..., N$$

e

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left[\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2}\right]$$

o que implica

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \ \forall i = 1, ..., N.$$

Agora observe que da hipótese decorre que

$$\Delta u(x) = \Delta v(r)$$

e por conseguinte

$$\Delta u(x) = \frac{v''(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + v'(r)\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right),$$

seguindo assim

$$\Delta u(x) = v''(r) + v'(r)\left(\frac{N-1}{r}\right)$$

consequentemente $\Delta u(x) = 0$ se, e somente se

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0.$$

Note que se $v' = 0$ segue que v é constante (solução trivial), dessa maneira faremos o caso em que $v' \neq 0$ então

$$v'' = -v'\left(\frac{N-1}{r}\right),$$

que fornece

$$\frac{v''}{v'} = \frac{N-1}{r}$$

dessa forma

$$(\ln(|v'|))' = \frac{1-N}{r},$$

donde obtemos

$$\ln(|v'|) = (1-N)\ln(r) + c.$$

Portanto

$$v' = cr^{1-N},$$

como $r > 0$ e $N \geq 3$ segue que

$$v' = \frac{c}{r^{N-1}}$$

e por conseguinte

$$v(r) = \frac{c}{r^{N-2}} + b.$$

Essas considerações motivam a seguinte definição.

Definição 1.1. *(Solução Fundamental) A função*

$$\varphi(x) := \frac{c}{|x|^{N-2}} + b$$

definida para $x \in \mathbb{R}^N$, com $x \neq 0$, é a solução fundamental da equação de Laplace.

Vamos agora demonstrar algumas propriedades clássicas para soluções de equações envolvendo o Laplaciano que irão nos auxiliar ao longo do capítulo. A primeira é o conhecido Princípio do Máximo Fraco.

Teorema 1.2. *(Princípio do Máximo Fraco) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ em Ω, então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Prova: A *priori* faremos o caso em que $\Delta u > 0$ em Ω. Suponha por contradição que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$. Como x_0 é ponto de máximo local, pois x_0 é ponto de interior, então

$$D^2u(x_0) \leq 0$$

e dessa maneira

$$\Delta u(x_0) = tr(D^2u(x_0)) \leq 0$$

o que é uma contradição pois, $\Delta u > 0$. Agora faremos o caso $\Delta u \geq 0$, e para isso considere a função auxiliar

$$u_\varepsilon = u + \frac{\varepsilon}{2N}|x|^2.$$

Calculando o Laplaciano da função auxiliar, obtemos

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta u + \Delta\left(\frac{\varepsilon}{2N}|x|^2\right)$$

consequentemente

$$\Delta u + \varepsilon > 0$$

o que implica em

$$\Delta u_\varepsilon > 0.$$

Sabemos do caso anterior que

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$$

fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ obtemos que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

■

Desde que o Laplaciano é linear, como consequência do resultado acima obtemos o seguinte teorema.

Teorema 1.3. *(Princípio do Mínimo Fraco) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \leq 0$ em Ω, então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Prova: Para provarmos este teorema basta tomarmos $v = -u$ e aplicarmos o Teorema 1.2.

$\blacksquare$

Como consequência do princípio do máximo fraco, obtemos o seguinte corolário, usualmente conhecido com princípio da comparação.

Corolário 1.1. *(Princípio da Comparação) Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, se*

$$\begin{cases} \Delta u \geq \Delta v & em \quad \Omega, \\ u \leq v & em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $v \geq u$ em Ω.

Prova: Defina $g = u - v$, então $\Delta g = \Delta u - \Delta v \geq 0$ em Ω e $g \leq 0$ na $\partial\Omega$, isto é,

$$\begin{cases} \Delta g & \geq & 0 & \text{em} & \Omega, \\ g & \leq & 0 & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue do Teorema 1.2 (Princípio do Máximo Fraco)

$$\max_{\overline{\Omega}} g = \max_{\partial\Omega} g \leq 0$$

assim

$$u - v \leq \max_{\overline{\Omega}} g \leq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

e consequentemente

$$u - v \leq 0.$$

Desse modo

$$u \leq v \quad \text{em} \quad \Omega.$$

$\blacksquare$

Outro resultado importante dentro da estrategia que utilizamos para obter nosso resultado principal é o seguinte.

Lema 1.1. *(Lema de Hopf) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ em B_1. Se existe x_0 em ∂B_1 tal que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in B_1.$$

Então a derivada normal $\dfrac{\partial}{\partial \nu} u(x_0) > 0$.

Prova: Sejam $w = |x|^2$ e $f(t) = e^{-\alpha t} - e^{\alpha}$. Defina a função $v(x) = f(w)$ e observe que $v(x) = 0$ para $|x| = 1$. Calculando as derivadas parciais de v, obtemos

$$v_{x_i} = f'(w)w_{x_i} \quad \text{e} \quad v_{x_i x_i} = f''(w)w_{x_i}^2 + f'(w)w_{x_i x_i}$$

assim

$$\nabla v = f'(w)\nabla w \quad \text{e} \quad \Delta v = f''(w)|\nabla w|^2 + f'(w)\Delta w.$$

Agora calculando as derivadas de f segue

$$f'(t) = -\alpha e^{-\alpha t} \quad \text{e} \quad f''(t) = \alpha^2 e^{-\alpha t}$$

e similarmente para w resulta em

$$\nabla w = 2x \quad \text{e} \quad \Delta w = 2N.$$

Por conseguinte obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta v &= 4\alpha^2|x|e^{-\alpha|x|^2} - 2N\alpha e^{-\alpha|x|^2} \\
&= 2\alpha e^{-\alpha|x|^2}\left(2\alpha|x|^2 - N\right) \\
&\geq 2\alpha e^{-\alpha/4}\left(\frac{\alpha}{2} - N\right) \\
&\geq 2\alpha e^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} - N\right),
\end{aligned}$$

sempre que $x \in B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$. Escolhendo $\alpha = 4N$ segue que

$$\Delta v \geq 8N^2 e^{-4N} > 0.$$

Defina agora $\Phi = u + \varepsilon v$, então

$$\Delta\Phi = \Delta u + \varepsilon\Delta v > 0 \quad \text{em} \quad B_1 \setminus B_{1/2}$$

segue do Teorema 1.2 (Princípio do Máximo Fraco)

$$\max_{\overline{B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}}} \Phi = \max_{\partial(B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}})} \Phi$$

o que implica que o máximo de Φ é atingido em ∂B_1 ou em $\partial B_{1/2}$. Note que

$$\Phi(x_0) = u(x_0) + \varepsilon v(x_0) = u(x_0)$$

pois $x_0 \in \partial B_1$. Como $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in B_1$ existe $\varepsilon > 0$ pequeno tal que

$$\begin{aligned}
u(x_0) &> \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u + \varepsilon \sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \\
&\geq \sup_{B_{\frac{1}{2}}} (u + \varepsilon v).
\end{aligned}$$

Logo

$$\Phi(x_0) \geq \sup_{B_{\frac{1}{2}}}(u + \varepsilon v)$$

assim Φ atinge seu máximo em ∂B_1. Dessa maneira

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u + \varepsilon v)(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{(u + \varepsilon v)(x_0) - (u + \varepsilon v)(x_0 - h\nu)}{h} \geq 0$$

consequentemente nos diz que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} u(x_0) &\geq -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \nu} v(x_0) \\ &= -\varepsilon \nabla v(x_0) \cdot x_0 \\ &= 8\varepsilon N e^{-4N} \\ &> 0. \end{aligned}$$

■

Como consequência direta do Lema 1.1 (Lema de Hopf) obtemos o princípio do máximo forte e com este é possível garantir que uma subsolução não-positiva da equação de Laplace não se anula dentro do domínio, a menos que a mesma seja identicamente nula.

Corolário 1.2. *(Princípio do Máximo Forte) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com Ω um domínio conexo. Se $\Delta u \geq 0$ em Ω e existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u,$$

então u é constante em Ω.

Prova: Considere o conjunto $M = \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\}$. Note que $M \neq \emptyset$ pois $x_0 \in M$ e além disso M é fechado pois é imagem inversa de $u(x_0)$ e como Ω é limitado segue que M é compacto. Observe agora que se $M = \Omega$ então o resultado esta provado. Suponha que $M \neq \Omega$, então existe $x_1 \in \Omega \setminus M$. Como $\Omega \setminus M$ é aberto e M é compacto podemos tomar uma vizinhança $B(x_1)$ que tangencia M em um ponto x_2. Note que

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{em} \quad B(x_1)$$

e $u(x_2) > u(x)$ para todo x em $B(x_1)$, com $x_2 \in \partial B(x_1)$. Segue do Lema 1.1 (Lema de Hopf) que

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(x_2) > 0. \tag{1.1}$$

Porém, como x_2 é um máximo de u interior à Ω, obtemos

$$\nabla u(x_2) = 0$$

e consequentemente

$$\nu \cdot \nabla u(x_2) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x_2) = 0,$$

contradizendo (1.1).

■

No que segue agora iremos apresentar a famosa estimativa de Alexandrov-Bakelman-Pucci (ABP). A origem dessa estimativa é devida à Alexandrov. Algumas contribuições não triviais foram feitas por Bakelman ao trabalho de Alexandrov. Mais tarde essa estimativa volta aparecer nos trabalhos de C.Pucci. É interessante observar que ABP não é tanto um resultado de equações diferenciais em si, mas sim de análise convexa e teoria da medida.

Lema 1.2. *(Estimativa ABP) Seja f função mensurável tal que $f \in L^N(\Omega)$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$\Delta u \leq f \quad em \quad \Omega.$$

Então,

$$-\inf_{\Omega} u \leq C\|f\|_{L^N(\Omega)}.$$

Prova: Ver (CABRé; CAFFARELLI, 1995) Teorema 3.2.

■

Como consequência do Lema 1.2 (Estimativa ABP), podemos obter princípio do máximo para equações do tipo

$$\Delta u + cu \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $c : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que eventualmente muda de sinal.

Teorema 1.4. *(Princípio do Máximo para domínios pequenos) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \in C(\overline{\Omega})$ tais que*

$$\Delta u + cu \leq 0 \quad em \quad \Omega,$$

com $||c||_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{C} < \infty$. Existe $\delta > 0$ tal que $|\Omega| < \delta$, então $u \geq 0$ em Ω.

Prova: Primeiramente definamos o seguinte conjunto

$$\Omega^- = \{x \in \Omega; u(x) < 0\}.$$

Vamos supor que $\Omega^- \neq \emptyset$, observe que

$$\begin{cases} \Delta u & \leq -cu \quad \text{em} \quad \Omega^-, \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega^-. \end{cases}$$

Segue então do Lema 1.2 (estimativa ABP) que

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega^-} u &\leq C||cu||_{L^N(\Omega^-)} \\ &= C\left(\int_{\Omega^-} |cu|^N dx\right)^{1/N} \\ &\leq C||c||_\infty \sup_{\Omega^-} |u| \left(\int_{\Omega^-} dx\right)^{1/N} \end{aligned}$$

e consequentemente

$$-\inf_{\Omega^-} u - \sup_{\Omega^-} |u| C\|c\|_\infty |\Omega^-|^{\frac{1}{N}} \leq 0.$$

Sabemos que $-\inf_{\Omega^-} u = \sup_{\Omega^-}(-u)$ e como u é negativa segue $\sup_{\Omega^-}(-u) = \sup_{\Omega^-} |u|$. Por conseguinte,

$$\sup_{\Omega^-} |u| \left(1 - C||c||_\infty |\Omega^-|^{\frac{1}{N}}\right) \leq 0.$$

Escolhendo $\delta = \frac{1}{C||c||_\infty}$, obtemos $1 - C||c||_\infty |\Omega^-|^{\frac{1}{N}} > 0$ e consequentemente

$$\sup_{\Omega^-} |u| \leq 0,$$

o que implica em

$$|u| = 0 \quad \text{em} \quad \Omega^-.$$

Logo $u = 0$ em Ω^-, o que é uma contradição uma vez que $u < 0$ em Ω^-. Portanto $u \geq 0$ em Ω.

■

1.2 O primeiro autovalor do Laplaciano

O problema de autovalor do Laplaciano para o problema de Dirichlet com dado de bordo zero, consiste em encontrar constantes λ_k e funções não-nulas φ_k que resolvam o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta\varphi_k + \lambda_k \varphi_k = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_k = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

É muito conhecido o fato de que o Laplaciano possui um primeiro autovalor positivo para o problema de Dirichlet com dado de fronteira zero. Além disso, sabemos que a autofunção φ_1 associado a esse primeiro autovalor é positiva em Ω. Este resultado pode ser encontrado com uma abordagem variacional em diversos livros do tema análise funcional (ver por exemplo (BREZIS, 2011)).

Nesta seção iremos apresentar uma caracterização não variacional para o primeiro autovalor do Laplaciano, tal caracterização motiva o desenvolvimento de teoria de autovalor para operadores que não possuem uma formulação variacional como, por exemplo, o operador de Pucci, o qual veremos no capítulo seguinte.

Como primeiro resultado para obter a caracterização temos o seguinte.

Teorema 1.5. *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta u + \rho u & \leq 0 \quad em \quad \Omega, \\ \quad u & \geq 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta v + \rho v & \geq 0 \quad em \quad \Omega, \\ \quad v & \leq 0 \quad em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe x_0 em Ω tal que $v(x_0) > 0$ então existe $t > 0$ tal que $u \equiv tv$.

Prova: Seja $K \subset \Omega$ compacto tal que $x_0 \in K$ e $|\Omega \setminus K| < \delta$. Suponha que $u > 0$ em Ω, então para todo $x \in K$ sabemos que $u \geq \inf_K u > 0$. Definindo $A = \{t > 0; u \geq tv \quad \text{em} \quad K\}$ temos que A é limitado superiormente pois $v(x_0) > 0$. Tomando $t_K := \sup A$ obtemos

$$u \geq t_K v \quad \text{em} \quad K.$$

Seja $w := u - t_K v$, observe que $w \geq 0$ em K e além disso

$$\Delta w + \rho w = (\Delta u + \rho u) - t_K(\Delta v + \rho v) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

isso implica que

$$\begin{cases} \Delta w + \rho w & \leq 0 \quad \text{em} \quad K, \\ \quad w & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial K, \end{cases}$$

e como $w = u - t_K v \leq 0$ em $\partial\Omega$ segue

$$\begin{cases} \Delta w + \rho w & \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus K, \\ \quad w & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial(\Omega \setminus K) = \partial\Omega \cup \partial K. \end{cases}$$

Segue do Teorema 1.4 (Princípio do Máximo para domínios pequenos) obtemos que $u \geq t_k v$ em $\Omega \setminus K$, então

$$w \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Agora considere o conjunto $B = \{t > 0; u \geq tv \quad \text{em} \quad \Omega\}$, como $t_K \in B$ temos que $B \neq \emptyset$ e além disso como $v(x_0) > 0$ podemos tomar

$$t_0 = \sup B \geq t_k > 0,$$

por conseguinte obtemos

$$u \geq t_0 v \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Note que se $u > t_0 v$ podemos definir $\Phi = u - t_0 v$, repetir argumento acima e encontrar um $\bar{t}_0 > 0$ tal que

$$\Phi \geq \bar{t}_0 v,$$

o que implica

$$u - t_0 v \geq \bar{t}_0 v.$$

Portanto obtemos

$$u \geq (t_0 + \bar{t}_0) v$$

o que é uma contradição com o fato de t_0 ser o supremo de B. Logo, $\Phi \equiv 0$ concluindo assim que $u = t_0 v$ em Ω.

■

O próximo teorema é conhecido como a caracterização de Donsker-Varadhan para o primeiro autovalor.

Teorema 1.6. *Se existe $\varphi_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi_1 > 0$ em Ω e satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 + \lambda_1 \varphi_1 = 0 \quad em \quad \Omega, \\ \qquad \varphi_1 = 0 \qquad em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $\lambda_1 = \rho := \sup\{\lambda \geq 0; \exists\, v > 0 \quad em \quad \Omega \quad e \quad \Delta v \leq -\lambda v\}$.

Prova: Por hipótese existe $\varphi_1 > 0$ em Ω tal que

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$$

o que implica

$$\lambda_1 \in \{\lambda \geq 0; \exists\, v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \Delta v \leq -\lambda v\}$$

e como consequência $\rho \geq \lambda_1$. Suponha que $\rho > \lambda_1$, então existe ρ_1 tal que $\rho \geq \rho_1 > \lambda_1$ e por conseguinte existe v_1 satisfazendo $v_1 > 0$ em Ω e

$$-\Delta v_1 \geq \rho_1 v_1.$$

Aplicando o Teorema 1.5 existe $t > 0$ de modo que $v_1 = t\varphi_1$, como consequência obtemos

$$-\Delta v_1 \geq \rho_1 v_1 = \rho_1(t\varphi_1) > t\lambda_1\varphi_1 = t(-\Delta\varphi_1) = -\Delta(t\varphi_1) = -\Delta v_1,$$

dessa forma

$$-\Delta v_1 > -\Delta v_1$$

o que é um absurdo. Portanto podemos concluir que $\rho = \lambda_1$.

■

1.3 Teorema do Tipo Liouville para o Laplaciano

O teorema que apresentaremos a seguir é o resultado principal deste capitulo, ele foi obtido em 1981 por Gidas e Spruck (GIDAS; SPRUCK, 1981). Porém as ideias da prova que iremos expor vem do artigo de Armstrong e Sirakov (ARMSTRONG; SIRAKOV, 2011).

Teorema 1.7. *(Princípio de Liouville) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $u \geq 0$ e*

$$\Delta u + u^p \leq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Então existe $p^* = \frac{N}{N-2}$ tal que quando $1 < p < p^*$, têm-se $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Prova: Primeiramente vamos mostrar que se $u \geq 0$ é solução de (1.2) e $u \neq 0$, então $u > 0$. De fato, suponha que existe x_0 tal que $u(x_0) = 0$ em $B_R(x_0)$. Sabemos que

$$\Delta u \leq -u^p,$$

então

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{em} \quad B_R(x_0).$$

Segue através do Teorema 1.2 (Princípio do Máximo Forte)

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in B_R(x_0),$$

fazendo $R \longrightarrow +\infty$ obtemos que $u(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N$. Agora considere a solução fundamental $\varphi(x) = |x|^{-(N-2)}$ e observe que

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^{-(N-2)}|x|^{-(N-2)} = \lambda^{-(N-2)}\varphi(x) \quad \text{para todo} \quad \lambda \geq 0.$$

Seja $\beta^* = \dfrac{2}{p-1}$ e tome o seguinte *scalling*

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\beta^*} u(\lambda x). \tag{1.3}$$

Então calculando o Laplaciano de (1.3) segue

$$\Delta u_\lambda(x) = \Delta(\lambda^{\beta^*} u(\lambda x)) = \lambda^{\beta^*} \Delta(u(\lambda x)) = \lambda^{\beta^*+2} \Delta u(\lambda x),$$

e somando $u_\lambda^p(x)$ obtemos

$$\Delta u_\lambda(x) + u_\lambda^p(x) = \lambda^{\beta^*+2}\Delta u(\lambda x) + \lambda^{p\beta^*} u^p(x).$$

Agora note que

$$p\beta^* = \frac{2p}{p-1} = \frac{2p+2-2}{p-1} = \frac{2}{p-1} + \frac{2(p-1)}{p-1} = \frac{2}{p-1} + 2 = \beta^* + 2,$$

desse modo temos $p\beta^* = \beta^* + 2$, e como consequência

$$\Delta u_\lambda(x) + u_\lambda^p(x) = \lambda^{p\beta^*}(\Delta u(\lambda x) + u^p(\lambda x)) \leq 0. \tag{1.4}$$

Observe que quando $\beta^* > N - 2$ temos

$$\frac{2}{p-1} > N - 2$$

o que implica

$$2 > pN - 2p - N + 2,$$

e por isso

$$p^* = \frac{N}{N-2} > p.$$

Desde que $u > 0$ em $\Omega = B_R(0) \setminus B_1(0)$, como

$$\Delta u + u^p \leq 0$$

segue que

$$\Delta u \leq -u^p,$$

e por conseguinte

$$\Delta u < 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Além disso sabemos que $\varphi(x)$ é solução fundamental, isto é,

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

então obtemos

$$\Delta u < \Delta \varphi.$$

Agora observe que $\varphi = 1$ e $u > 0$ em $\partial B_1(0)$ e desde que $\partial B_1(0)$ é compacto temos que existe uma constante $c \in (0, 1)$ tal que $u > c$, com isso

$$u \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial B_1(0).$$

Do fato que $\varphi \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ decorre que dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $c\varphi < \varepsilon$ quando $|x| \geq R$. Portanto

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial B_R(0),$$

e por conseguinte

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Como $\Delta(u + \varepsilon) = \Delta u$ obtemos

$$\begin{cases} \Delta(u+\varepsilon) & < & \Delta(c\varphi) & \text{em} & \Omega, \\ u + \varepsilon & \geq & c\varphi & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue então pelo Corolário 1.1 (Princípio da Comparação) que

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \Omega,$$

fazendo $R \longrightarrow +\infty$ podemos tomar $\varepsilon \longrightarrow 0$ e dessa maneira

$$u \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_1(0).$$

Em particular segue

$$u(x) \geq c|x|^{2-N} \quad \text{em} \quad B_{2\lambda}(0) \setminus B_\lambda(0),$$

para $\lambda > 1$. Agora considerando o *scalling*

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\beta^*} u(\lambda x) \geq \lambda^{\beta^*} c \lambda^{2-N} |x|^{2-N} \quad \text{em} \quad B_2(0) \setminus B_1(0),$$

e dessa maneira obtemos

$$u_\lambda(x) \geq \lambda^{\beta^* - (2-N)} b \quad \text{onde} \quad b = c \cdot 2^{2-N}.$$

Então

$$[u_\lambda(x)]^{p-1} \geq \lambda^{[\beta^* - (2-N)](p-1)} b,$$

e dessa forma

$$-[u_\lambda(x)]^{p-1} \leq -\lambda^{[\beta^* - (2-N)](p-1)} b.$$

Sabemos da equação (1.4) que

$$\Delta u_\lambda(x) + u_\lambda^p(x) \leq 0,$$

o que implica em

$$\Delta u_\lambda(x) \leq -[u_\lambda(x)]^{p-1} u_\lambda(x) \leq -b\lambda^{\beta^* - (2-N)} u_\lambda(x),$$

e portanto

$$\begin{cases} \Delta u_\lambda(x) & \leq & -b\lambda^{[\beta^* - (2-N)](p-1)} u_\lambda(x) & \text{em} & B_2(0) \setminus B_1(0), \\ u_\lambda(x) & > & 0 & \text{em} & \overline{B_2(0) \setminus B_1(0)}. \end{cases}$$

Consequentemente

$$b\lambda^{[\beta^* - (2-N)](p-1)} \in \{\lambda \geq 0; \exists\, v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \Delta v \leq -\lambda v\}$$

o que implica em

$$b\lambda^{\beta^* - (2-N)} \leq \lambda_1.$$

Entretanto como $[\beta^* - (2-N)](p-1) > 0$, podemos fazer $b\lambda^{[\beta^* - (2-N)](p-1)} \longrightarrow +\infty$ o que é uma contradição com o fato de λ_1 ser finito.

■

2

Teorema do tipo Liouville para o operadores de Pucci

Neste capítulo iremos provar um teorema do tipo Liouville para os conhecidos operadores de Pucci. Mostraremos que as soluções $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ não-negativas de

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

são identicamente nulas quando $1 < p < \frac{\beta}{\beta-2}$, onde $\beta = \frac{\Lambda}{a}(N-1)+1$. Observe que quando $\Lambda = a$ estamos no caso Laplaciano e recuperamos o resultado do capítulo anterior.

2.1 Operadores de Pucci

Seja $\mathcal{S}^N$ o espaço das matrizes simétricas, define-se os operadores de Pucci como $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}, \mathcal{M}^-_{a,\Lambda} : \mathcal{S}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, como

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M) = \Lambda \sum_{e_i \geq 0} e_i + a \sum_{e_i < 0} e_i$$

e

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M) = a \sum_{e_i \geq 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i,$$

onde e_i são os autovalores da matriz M. Uma definição equivalente para os operadores de Pucci é dada por

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{a,\Lambda}} tr(AM)$$

e

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{a,\Lambda}} tr(AM)$$

onde $\mathcal{A}_{a,\Lambda}$ é o conjunto de todas as matrizes simétricas cujo os autovalores pertencem ao intervalo $[a, \Lambda]$, ver (SIRAKOV, 2015) Lema 1.4.

No resultado abaixo vamos listar algumas propriedades dos operadores de Pucci que serão úteis no que segue.

Lema 2.1. *(Propriedades do operadores de Pucci)*

(1) $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M) \leq \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M)$.

(2) $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M) = -\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-M)$.

(3) $\mathcal{M}^\pm_{a,\Lambda}(\alpha M) = \alpha \mathcal{M}^\pm_{a,\Lambda}(M)$ *se* $\alpha \geq 0$.

(4) $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(N) \leq \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(N)$.

(5) $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(N) \leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(N)$.

Prova: Ver (CABRé; CAFFARELLI, 1995) Lema 2.10.

2.2 Solução fundamental e Princípio do Máximo

Começaremos essa seção encontrando uma solução fundamental para o operador de Pucci, ou seja, encontraremos uma solução radial convexa e decrescente Φ de

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\Phi) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

de tal forma que

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{|x|\to+\infty} \Phi(x) = 0.$$

Para tal provaremos o seguinte lema técnico, o qual foi provado primeiramente por Cutrí e Leoni em(CUTRí; LEONI, 2000).

Lema 2.2. *Seja* $\varphi : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^2((0,\infty))$. *Para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *os autovalores da matriz Hessiana da função radial* $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ *são* $\varphi''(|x|)$, *que é simples e* $\varphi'(x)/|x|$, *que tem multiplicidade* $(N-1)$.

Prova: Calculando as derivadas parciais da função Φ obtemos

$$\Phi_{x_i} = \varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad \Phi_{x_ix_i} = \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} + \left[\frac{\varphi''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\varphi'(|x|)}{|x|^3}\right] x_i^2$$

e

$$\Phi_{x_ix_j} = \left[\frac{\varphi''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\varphi'(|x|)}{|x|^3}\right] x_ix_j,$$

dessa maneira

$$D^2\Phi(x) = \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} I_N + \left[\frac{\varphi''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\varphi'(|x|)}{|x|^3}\right] x \otimes x$$

onde I_N é a matriz identidade e $x \otimes x$ é a matriz com entradas x_ix_j. Consequentemente num primeiro caso podemos multiplicar o resultado acima por $x/|x|$, o que resulta

$$D^2\Phi(x) \cdot \frac{x}{|x|} = \left(\frac{\varphi'(|x|)}{|x|} I_N\right) \cdot \frac{x}{|x|} + \left[\frac{\varphi''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\varphi'(|x|)}{|x|^3}\right] x \otimes x \cdot \frac{x}{|x|},$$

isto é,

$$D^2\Phi(x)\cdot\frac{x}{|x|}=\varphi'(|x|)\cdot\frac{x}{|x|^2}+\varphi''(|x|)\cdot\frac{x}{|x|}-\varphi'(|x|)\cdot\frac{x}{|x|^2}$$

portanto

$$D^2\Phi(x)\cdot\frac{x}{|x|}=\varphi''(|x|)\cdot\frac{x}{|x|}.$$

No segundo caso basta notar que para todo ξ tal que $x\cdot\xi=0$ obtemos

$$D^2\Phi(x)\cdot\xi=\left(\frac{\varphi'(|x|)}{|x|}I_N\right)\cdot\xi+\left[\frac{\varphi''(|x|)}{|x|^2}-\frac{\varphi'(|x|)}{|x|^3}\right]x\otimes x\cdot\xi$$

e dessa maneira temos

$$D^2\Phi(x)\cdot\xi=\varphi'(|x|)\cdot\frac{\xi}{|x|}.$$

■

Teorema 2.1. *Existe uma função $\Phi\in C^2(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ radial positiva, convexa e decrescente tal que*

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\Phi)=0\quad \textit{em}\quad \mathbb{R}^N\setminus\{0\}.$$

Além disso,

$$\lim_{x\to 0}\Phi(x)=\infty\quad e\quad \lim_{|x|\to+\infty}\Phi(x)=0.$$

Prova: Vamos supor que $\Phi(x)=\varphi(|x|)$, onde $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^2((0,+\infty))$. Como queremos que Φ seja convexa e decrescente vamos admitir que

$$\varphi''\geq 0\quad \text{e}\quad \varphi'\leq 0,$$

então pelo Lema 2.2,

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\Phi(x))=a\varphi''(|x|)+\Lambda(N-1)\frac{\varphi'(|x|)}{|x|}\quad \text{em}\quad (0,+\infty).$$

A função Φ será determinada pela solução da equação diferencial ordinária

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\Phi)=0,$$

ou seja

$$a\varphi''(|x|)+\Lambda(N-1)\frac{\varphi'(|x|)}{|x|}=0\quad \text{em}\quad (0,+\infty),$$

consequentemente nos diz que

$$\frac{\varphi''(|x|)}{\varphi'(|x|)}=-\frac{\Lambda}{a}\frac{(N-1)}{|x|}. \tag{2.1}$$

Observe que podemos reescrever o lado esquerdo de (2.1) como sendo

$$[\ln[|\varphi'(|x|)|]]'=-\frac{\Lambda}{a}\frac{(N-1)}{|x|}$$

e integrando ambos os lados obtemos

$$\ln(|\varphi'(|x|)|) = -\frac{\Lambda}{a}(N-1)\ln(|x|) + C_1,$$

isto é

$$\varphi'(|x|) = C_2|x|^{-\frac{\Lambda}{a}(N-1)}.$$

Como $N \geq 3$, integrando novamente obtemos

$$\varphi(|x|) = C_2|x|^{-\frac{\Lambda}{a}(N-1)+1} + C_3,$$

portanto

$$\varphi(|x|) = C_2|x|^{2-\beta} + C_3,$$

onde $\beta = \frac{\Lambda}{a}(N-1) + 1$.

■

A Φ obtida no teorema anterior é uma das soluções fundamentais do $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}$, para mais detalhes ver (CUTRí; LEONI, 2000). De maneira similar obtemos uma solução fundamental para o $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}$.

Em seguida provaremos o Princípio do Máximo para os operadores de Pucci.

Teorema 2.2. *(Princípio do Mínimo Fraco) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \leq 0$ em Ω, então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Prova: Primeiramente faremos o caso em que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) < 0$. Para isso suponha que existe $x_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$. Consequentemente x_0 é um mínimo local, o que implica

$$\nabla u(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2(u(x_0)) \geq 0,$$

que multiplicando por $A \in \mathcal{A}_{a,\Lambda}$ nos fornece

$$AD^2(u(x_0)) \geq 0. \tag{2.2}$$

Tomando o traço em (2.2) obtemos

$$tr(AD^2(u(x_0))) \geq 0$$

para todo $A \in \mathcal{A}_{a,\Lambda}$. Dessa maneira

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u(x_0)) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{a,\Lambda}} tr(AD^2u(x_0)) \geq 0,$$

que é uma contradição com a nossa suposição de que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) < 0$. Agora faremos o caso $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u(x_0)) \leq 0$ e para isso considere a função auxiliar

$$u_\varepsilon = u - \frac{\varepsilon}{2aN}|x|^2.$$

Consequentemente pelo Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\varepsilon) &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2u - D^2\left(\frac{\varepsilon}{2aN}|x|^2\right)\right)\\
&\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2u\right) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}\left(D^2\left(\frac{-\varepsilon}{2aN}|x|^2\right)\right)\\
&= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2u\right) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2\left(\frac{\varepsilon}{2aN}|x|^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) = atr(D^2u^+) + \Lambda tr(D^2u^-)$ segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\varepsilon) &\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2u\right) - atr\left(\frac{\varepsilon I}{aN}\right)\\
&= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2u\right) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

e dessa maneira

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\varepsilon) < 0.$$

Então segue do caso anterior

$$\min_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \min_{\partial\Omega} u_\varepsilon,$$

fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ obtemos

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

■

Com uma prova análoga a feita no teorema anterior obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *(Princípio do Máximo Fraco) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \geq 0$ em Ω, então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Observe que não é possível obter o Teorema 2.3 do Teorema 2.2 diretamente como no caso do Laplaciano, desde de que se $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \leq 0$ então

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(D^2(-u)) = -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \geq 0.$$

Como consequência do Princípio do Máximo Fraco, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *(Princípio da Comparação) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e $f \in C(\Omega)$. Se $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \leq f$ e $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) \geq f$ em Ω, e se $u \geq v$ em $\partial\Omega$, então $u \geq v$ em $\overline{\Omega}$.*

Prova: Defina $w := u - v$ e observe que $w \geq 0$ em $\partial\Omega$, então usando o Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 w) &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u-v)) \\
&= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}\left(D^2 u - D^2 v\right) \\
&\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-D^2 v) \\
&= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) \\
&\leq f - f \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa maneira

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 w) & \leq & 0 & \text{em} & \Omega, \\ w & \geq & 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

e segue através do Teorema 2.3 (Princípio do Máximo Fraco) que

$$\min_{\overline{\Omega}} w = \min_{\partial\Omega} w \geq 0,$$

dessa forma

$$w \geq \min_{\overline{\Omega}} w \geq 0$$

e consequentemente

$$u - v \geq 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

Portanto

$$u \geq v \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

■

Agora iremos provar o princípio do máximo forte para os operadores de Pucci, e para isto precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.3. *(Lema de Hopf) Seja u tal que* $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2)u \geq 0$ *em* B_1*. Se existe* x_0 *em* ∂B_1 *tal que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in B_1.$$

Então a derivada normal $\dfrac{\partial}{\partial \nu} u(x_0) > 0.$

Prova: Considere a função radial $f(r) = e^{-\gamma r^2} - e^{-\gamma}$. Sabemos que suas derivadas são dadas por

$$f'(r) = -2\gamma r e^{-\gamma r^2} \quad \text{e} \quad f''(r) = 2\gamma e^{-\gamma r^2}\left(2\gamma r^2 - 1\right).$$

Note que

$$\begin{cases} f' & \leq 0 & \text{para todo} & r \geq 0 \\ f'' & \leq 0 & \text{para todo} & r \leq (\frac{1}{2\gamma})^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Logo f é uma função convexa e decrescente sempre que $r > (\frac{1}{2\gamma})^{1/2}$. Seja $v(x) = f(|x|)$, segue do Lema 2.2 que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) &= 2a\gamma e^{-\gamma r^2}(2\gamma r^2 - 1) + \frac{\Lambda(N-1)}{r}(-2\gamma r e^{-\gamma r^2}) \\ &= 2\gamma e^{-\gamma r^2}\left[a(2\gamma r^2 - 1) - \Lambda(N-1)\right].\end{aligned}$$

Dessa maneira $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) \geq 0$ se, e somente se

$$a(2\gamma r^2 - 1) \geq \Lambda(N-1),$$

ou seja

$$2\gamma r^2 \geq \frac{\Lambda}{a}(N-1) + 1,$$

isto é

$$\gamma \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a}(N-1) + 1\right).$$

Escolhendo $\gamma \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a}(N-1)+1\right)$ obtemos $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) \geq 0$. Definindo $\Phi = u + \varepsilon v$ segue do Lema 2.1 que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\Phi) \geq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + \varepsilon\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v)$$

e sabendo que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + \varepsilon\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) > 0 \quad \text{em} \quad B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$$

temos

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\Phi) > 0 \quad \text{em} \quad B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}.$$

Segue do Teorema 2.3 (Princípio Máximo Fraco)

$$\max_{\overline{B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}}} \Phi = \max_{\partial(B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}})} \Phi$$

logo temos que o máximo da Φ é atingido em ∂B_1 ou em $\partial B_{\frac{1}{2}}$. Observe que $\Phi(x_0) = u(x_0)$ uma vez que $x_0 \in \partial B_1$ e $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in B_1$. Então existe $\varepsilon > 0$ pequeno tal que

$$\begin{aligned}u(x_0) + \varepsilon v(x_0) &= u(x_0) \\ &> \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u + \varepsilon \sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \\ &\geq \sup_{B_{\frac{1}{2}}}(u + \varepsilon v).\end{aligned}$$

Por conseguinte, Φ atinge o seu máximo no ponto x_0 da fronteira de B_1. Calculando a sua derivada normal em x_0, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(u + \varepsilon v)(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{(u+\varepsilon v)(x_0) - (u+\varepsilon v)(x_0 - h\eta)}{h} \geq 0.$$

Em vista disso

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}u(x_0) &\geq -\varepsilon\frac{\partial}{\partial\eta}v(x_0)\\ &= -\nabla v(x_0)\cdot x_0\\ &= 2\varepsilon\gamma e^{-\gamma},\end{aligned}$$

como $\gamma > \dfrac{1}{2}$ segue que

$$\frac{\partial}{\partial\eta}u(x_0) > \varepsilon e^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

■

Teorema 2.4. *(Princípio do Máximo Forte) Seja Ω um domínio conexo. Se $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \geq 0$ em Ω, e além disso existe $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Então u é constante em Ω.

Prova: Considere o conjunto $M = \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\}$, observe que $M \neq \emptyset$ uma vez que x_0 é ponto de máximo da u, além disso M é fechado por ser imagem inversa de $u(x_0)$ e é compacto pois Ω é limitado. Note que se $M = \Omega$ então o teorema está provado, dessa forma suponha que $M \neq \Omega$, então existe x_1 em $\Omega \setminus M$, como $\Omega \setminus M$ é aberto e M é compacto podemos tomar uma vizinhança $B(x_1)$ que tangencia M pela primeira vez em um ponto x_2. Assim,

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \geq 0 \quad \text{em} \quad B(x_1)$$

e $u(x_2) > u(x)$ para todo x em $B(x_1)$ com x_2 em $\partial B(x_1)$, então segue do Lema 2.3(Lema de Hopf) que

$$\frac{\partial}{\partial\eta}u(x_2) > 0$$

porém x_2 é ponto de máximo interior de u em Ω, o que implica que

$$\nabla u(x_2) = 0$$

consequentemente,

$$\eta\nabla u(x_2) = \frac{\partial}{\partial\eta}u(x_2) = 0$$

o que é uma contradição

■

Vamos encerrar esta seção mostrando o princípio do máximo para domínios pequenos para equações envolvendo o operador de Pucci, para tanto precisamos da seguinte estimativa ABP.

Lema 2.4. *(Estimativa ABP) Sejam c, f funções mensuráveis tal que $c, f \in L^N(\Omega)$, e $c \leq 0$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) \leq f.$$

Então,

$$-\inf_{\Omega} \leq C\|f\|_{L^N(\Omega)}.$$

Prova: Ver (CABRé; CAFFARELLI, 1995) Teorema 3.2.

Teorema 2.5. *(Princípio do Máximo para domínios pequenos) Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \in C(\overline{\Omega})$, satisfazendo*

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + cu \leq 0 \quad em \quad \Omega,$$

com $\|c\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq \overline{C} < \infty$. Se existe $\delta > 0$ tal que $|\Omega| < \delta$, então $u \geq 0$ em Ω.

Prova: Primeiramente definamos o seguinte conjunto

$$\Omega^- = \{x \in \Omega; u(x) < 0\} = u^-((-\infty, 0)).$$

Vamos supor que $\Omega^- \neq \emptyset$, observe que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) & \leq -cu \quad \text{em} \quad \Omega^-, \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega^-. \end{cases}$$

Segue então do Lema 2.4 (estimativa ABP) que

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega^-} u &\leq C||cu||_{L^N(\Omega^-)} \\ &= C\left(\int_{\Omega^-} |cu|^N dx\right)^{1/N} \\ &\leq C||c||_\infty \sup_{\Omega^-} |u| \left(\int_{\Omega^-} dx\right)^{1/N} \end{aligned}$$

e consequentemente

$$-\inf_{\Omega^-} u - \sup_{\Omega^-} |u| C\|c\|_\infty |\Omega^-|^{\frac{1}{N}} \leq 0.$$

Sabemos que $-\inf_{\Omega^-} u = \sup_{\Omega^-}(-u)$ e como u é negativa segue $\sup_{\Omega^-}(-u) = \sup_{\Omega^-} |u|$. Por conseguinte,

$$\sup_{\Omega^-} |u| \left(1 - C||c||_\infty |\Omega^-|^{\frac{1}{N}}\right) \leq 0.$$

Escolhendo $\delta = \frac{1}{C||c||_\infty}$, obtemos $1 - C||c||_\infty |\Omega^-|^{\frac{1}{N}} > 0$ e consequentemente

$$\sup_{\Omega^-} |u| \leq 0,$$

o que implica em

$$|u| = 0 \quad \text{em} \quad \Omega^-.$$

Logo $u = 0$ em Ω^-, o que é uma contradição uma vez que $u < 0$ em Ω^-. Portanto $u \geq 0$ em Ω.

■

2.3 Principal Semiautovalor

A caracterização não variacional de Dorsken-Varadhan para o primeiro autovalor do Laplaciano, nos permite generalizar a ideia de primeiro autovalor para operadores da forma não divergente, como por exemplo os operadores de Pucci.

Nesta seção iremos seguir a estratégia tomada por Armstrong em (ARMSTRONG, 2009) para definirmos e provarmos a existência de números que são os substitutos adequados para o que seria o primeiro autovalor no caso dos operadores de Pucci.

Teorema 2.6. *Sejam $u, v \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in C(\Omega)$ satisfazendo*

$$\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + \lambda u \geq g \geq \mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2v) + \lambda v \quad em \quad \Omega.$$

Além disso $u(x_0) > v(x_0)$ para algum $x_0 \in \Omega$. Assuma também que vale uma das condições:

(i) $g \geq 0$ e $u < 0$ em Ω, $v \geq 0$ em $\partial\Omega$;

(ii) $g \leq 0$ e $v > 0$ em Ω , $u \leq 0$ em $\partial\Omega$.

Então $v \equiv tu$ para algum $t > 0$.

Prova: Vamos assumir que vale a condição (ii). Seja $K \subset \Omega$ um compacto tal que $x_0 \in K$. Como $v > 0$ em Ω então

$$v \geq \inf_K v > 0 \quad \forall x \in K,$$

considere o conjunto $A = \{t > 0; v \geq tu \quad \text{em} \quad K\}$, note que $v > 0$ garante uma boa definição do conjunto e além disso como $u(x_0) > v(x_0) > 0$ segue que $t < 1$ e assim o conjunto A é limitado superiormente. Definindo $t_K := \sup A$, obtemos

$$v \geq t_K u \quad \text{em} \quad K.$$

Seja $w = v - t_K u \geq 0$ em K e dessa forma por continuidade temos $w \geq 0$ em ∂K. Além disso pelo Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2w) + \lambda w &= \mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2v - t_K D^2u) + \lambda(v - t_K u) \\
&\leq \mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2v) + \lambda v + t_K \mathcal{M}^{+}_{a,\Lambda}(-D^2u) + \lambda v - \lambda t_k u \\
&\leq \mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2v) + \lambda v - t_K \left(\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + \lambda u\right) \\
&\leq g - t_K g \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

O que implica em

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2w) + \lambda w & \leq 0 \quad \text{em} \quad K, \\ \qquad w & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial K. \end{cases}$$

Observe agora que $w \geq 0$ em $\partial\Omega$ consequentemente

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2w) + \lambda w & \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus K, \\ \qquad w & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial(\Omega \setminus K). \end{cases}$$

Segue do Teorema 2.5 (Princípio do Máximo para domínios pequenos) que $w \geq 0$ em $\Omega \setminus K$, então

$$w \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

e dessa maneira

$$v \geq t_K u \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Agora defina o conjunto $B = \{t > 0; v \geq tu \quad \text{em} \quad \Omega\}$ e observe que $t_K \in B$, logo $B \neq \emptyset$. Além disso como $u(x_0) > v(x_0)$ o conjunto B é limitado superiormente e assim podemos tomar

$$t_0 = \sup B \geq t_K,$$

e por conseguinte $v \geq t_0 u$. Definindo $\varphi := v - t_0 u$ e aplicando o Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) + \lambda\varphi &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v - t_0 D^2u) + \lambda(v - t_0 u) \\ &\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) + t_0\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-D^2u) + \lambda v - \lambda t_0 u \\ &\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v)\lambda v - t_0\left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + \lambda u\right) \\ &\leq g - t_0 g \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) + \lambda\varphi & \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad \varphi & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Se existe $\overline{x} \in \Omega$ tal que $\varphi(\overline{x}) = 0$ segue do Teorema 2.4 (Princípio do Máximo Forte) que $\varphi \equiv 0$ em Ω. No caso contrario, ou seja , se $\varphi > 0$ em Ω note que

$$\varphi(x_0) = v(x_0) - t_0 u(x_0) < u(x_0) - t_0 u(x_0) = (1 - t_0)u(x_0) \leq u(x_0),$$

isto é , $\varphi(x_0) < u(x_0)$ assim podemos repetir o processo anterior e dessa forma encontrarmos um $h_0 > 0$ tal que $\varphi \geq h_0 u$. Então

$$v - t_0 u \geq h_0 u,$$

e consequentemente

$$v \geq (t_0 + h_0)u$$

o que é uma contradição pois $t_0 = \sup B$. Portanto $\varphi \equiv 0$ em Ω, concluindo assim que $v = t_0 u$ em Ω.

■

Definição 2.1. *Dizemos que*

$$G_\rho v = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \rho v$$

satisfaz o princípio da negatividade em Ω *se, sempre que* $v \in C(\Omega)$ *satisfaz*

$$\begin{cases} G_\rho v & \geq 0 \quad em \quad \Omega, \\ v & \leq 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

obtemos $v \leq 0$ *em* Ω*. Similarmente, dizemos que* G_ρ *satisfaz o princípio da positividade em* Ω *se, sempre que* $v \in C(\Omega)$ *satisfaz*

$$\begin{cases} G_\rho v & \leq 0 \quad em \quad \Omega, \\ v & \geq 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então $v \geq 0$ *em* Ω*.*

Corolário 2.2. *Se existe solução* $v \in C(\overline{\Omega})$ *de*

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \lambda v \leq (\geq) 0 \quad em \quad \Omega$$

para o qual $v > 0 (v < 0)$ *em* Ω *e* $v \neq 0$ *em* $\partial\Omega$*, então* G_λ *satisfaz o princípio do negatividade (positividade) em* Ω*.*

Prova: Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + \lambda u & \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & \leq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Suponha que existe x_0 em Ω tal que $u(x_0) > 0$. Considere k uma constante pequena o suficiente tal que $u(x_0) > kv(x_0) > 0$. Como u satisfaz (2.3) e

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(kv)) + \lambda(kv) \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

obtemos do Teorema 2.6, que existe um $t > 0$ tal que $u = tv$. Desde que existe $x_1 \in \partial\Omega$ onde $v(x_1) > 0$ e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ chegamos a uma contradição.

■

Agora iremos definir os semiautovalores principais para $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}$

Definição 2.2. *Defina as constantes*

$$\lambda_1^+(\Omega) = \sup\{\rho; \exists v > 0 \quad em \quad \Omega \quad e \quad -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) \geq \rho v \quad em \quad \Omega\}$$

e

$$\lambda_1^-(\Omega) = \sup\{\rho; \exists v < 0 \quad em \quad \Omega \quad e \quad -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) \leq \rho v \quad em \quad \Omega\},$$

essas constantes $\lambda_1^+(\Omega)$ *e* $\lambda_1^-(\Omega)$ *são chamadas de semiautovalores principais de* $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}$ *em* Ω*.*

No lema abaixo iremos mostrar a finitude de $\lambda_1^{\pm}(\Omega)$.

Lema 2.5. *Defina as constantes*

$$\mu^+(\Omega) = \sup\{\rho; G_\rho \quad \textit{satisfaz o princípio da negatividade em} \quad \Omega\}$$

e

$$\mu^-(\Omega) = \sup\{\rho; G_\rho \quad \textit{satisfaz o princípio da positividade em,} \quad \Omega\}$$

então

$$0 \leq \lambda_1^{\pm}(\Omega) \leq \mu^{\pm}(\Omega) < +\infty.$$

Prova: Sabendo que

$$\lambda_1^+(\Omega) = \sup\{\rho; \exists v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad -\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v) \geq \rho v \quad \text{em} \quad \Omega\}$$

e

$$\lambda_1^-(\Omega) = \sup\{\rho; \exists v < 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad -\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v) \leq \rho v \quad \text{em} \quad \Omega\}$$

considere $v = 1$, então $D^2 v = 0$ e por consequência obtemos $\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v) = 0$, portanto $0 \leq \lambda_1^+(\Omega)$. De maneira análoga considerando $v = -1$ segue que $\lambda_1^-(\Omega) \geq 0$. Agora vamos mostrar que $\lambda_1^{\pm}(\Omega) \leq \mu^{\pm}(\Omega) < +\infty$.
Suponha por contradição que $\mu^+ < \rho_1 < \rho_2 < \lambda_1$, então existem $v_2 > 0$ e v_1 tais que

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_2) + \rho_2 v_2 & \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v_2 & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_1) + \rho_1 v_1 & \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v_1 & \leq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e além disso existe $x_0 \in \Omega$ tal que $v_1(x_0) > 0$. Seja $k > 0$ uma constante pequena o suficiente tal que $v_1(x_0) > k v_2(x_0)$, assim segue do Teorema 2.6 que existe $t > 0$ tal que $k v_2 = t v_1$, consequentemente $v_2 = \bar{t} v_1$ com $\bar{t} = t/k$. Por conseguinte

$$\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_2) = \bar{t}\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_1)$$

o que implica

$$-\rho_2 v_2 \geq \bar{t}\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_1)$$

e consequentemente

$$\bar{t}\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_1) + \rho_2 v_2 \leq 0.$$

Sabendo que

$$\bar{t}\left(\mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 v_1) + \rho_1 v_1\right) \geq 0$$

segue $\rho_1 \bar{t} v_1 \geq \rho_2 v_2$ e como consequência $\rho_1 v_2 \geq \rho_2 v_2$, isto é, $\rho_1 \geq \rho_2$ o que é uma contradição com a suposição, provando assim que $\lambda_1^+(\Omega) \leq \mu^+(\Omega)$. A desigualdade $\lambda_1^-(\Omega) \leq \mu^-(\Omega)$ é obtida de maneira similar. Vamos mostrar a finitude de $\mu^+(\Omega)$, e para isso considere a função $h \geq 0$ e $h \neq 0$ com suporte compacto em Ω, sabemos do teorema de existência de soluções, ver (KOIKE, 2004), que existe $v \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) & = -h \quad \text{em} \quad \Omega \\ v & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo corolário 2.1 (Princípio da comparação) obtemos $v \geq 0$ em Ω e do fato que $h \neq 0$ segue que $v \neq 0$. Por conseguinte segue do Teorema 2.4 (Princípio do Máximo Forte) que $v > 0$ em Ω. Como h tem suporte compacto podemos escolher ρ_0 tal que $\rho_0 v \geq h$, dessa maneira

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) & \geq -\rho_0 v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo G_ρ não satisfaz 2.1 (princípio da negatividade) para qualquer $\rho \geq \rho_0$. Portanto $\mu^+(\Omega) \leq \rho_0$, e de maneira similar podemos mostrar que $\mu^-(\Omega) < +\infty$.

■

A seguir iremos provar a existência das semiautofunções principais, bem como justificar porque o nome semiautovalores principais é adequado para $\lambda_1^+(\Omega)$ e $\lambda_1^-(\Omega)$. Para tanto iremos usar o seguinte teorema,

Teorema 2.7. *(Alternativa de Leray-Schauder) Suponha que X é um espaço de Banach, e $C \subseteq X$ é um subconjunto convexo de X tal que $0 \in C$. Assuma $\mathcal{B} : C \longrightarrow C$ é um operador compacto e continua. Então vale ao menos uma das afirmações*

(i) o conjunto $\{x \in C; x = \lambda\mathcal{B}(x) \quad \text{para algum} \quad 0 < \lambda < 1\}$ é ilimitado em X,

ou

(ii) existe $x \in C$ para qual $x = \mathcal{B}(x)$.

Prova: Ver (ARMSTRONG, 2009) Teorema 3.9.

Teorema 2.8. *Existem funções $\varphi_1^+, \varphi_1^- \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi_1^+ > 0$ e $\varphi_1^- < 0$ em Ω que satisfazem*

$$\begin{cases} -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) = \lambda_1^+(\Omega)\varphi_1^+ & \text{em} \quad \Omega, \\ -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^-) = \lambda_1^-(\Omega)\varphi_1^- & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_1^+ = \varphi_1^- = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, os autovalores $\lambda_1^+(\Omega)(\lambda_1^-(\Omega))$ são únicos no sentido que se ρ é um autovalor de F em Ω com uma autofunção correspondente não-negativa (não-positiva), então $\rho = \lambda_1^+(\Omega)(\lambda_1^-(\Omega))$, e é simples no sentido que se $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ é uma solução da equação acima com φ no lugar de $\varphi_1^+(\varphi_1^-)$, então φ é uma constante múltipla de $\varphi_1^+(\varphi_1^-)$.

Prova: Dado $v \in C(\overline{\Omega})$ temos que existe uma única solução $u \in C(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) = v & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim definimos $\mathcal{B} : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ e afirmamos que ele é um operador contínuo e compacto. De fato, para mostrar a continuidade considere $u_1 = \mathcal{B}(v_1)$ e $u_2 = \mathcal{B}(v_2)$, definindo $w = u_1 - u_2$ e aplicando o Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2w) &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_1 - D^2u_2) \\ &\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_1) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-D^2u_2) \\ &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_1) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_2) \\ &\leq v_1 - v_2 \quad \text{em} \quad \{w > 0\}. \end{aligned}$$

Então pelo Teorema 2.4 (estimativa ABP) obtemos

$$w \geq \inf w \geq -C\|v_1 - v_2\|_{L^N(\Omega)},$$

e consequentemente

$$u_1 - u_2 \geq -C\|v_1 - v_2\|_{L^N(\Omega)}$$

dessa maneira

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &\leq C\|v_1 - v_2\|_{L^N(\Omega)} \\ &\leq C\|v_1 - v_2\|_{C(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Agora tomemos $\overline{w} = u_2 - u_1$, então do Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2w) &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_2 - D^2u_1) \\ &\leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_2) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-D^2u_1) \\ &= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_2) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_1) \\ &\leq v_2 - v_1 \quad \text{em} \quad \{\overline{w} > 0\}. \end{aligned}$$

Usando novamente o Lema 2.4 (estimativa ABP) obtemos

$$\overline{w} \geq \inf \overline{w} \geq -C||v_1 - v_2||_{L^N(\Omega)},$$

e por conseguinte

$$u_2 - u_1 \geq -C||v_1 - v_2||_{L^N(\Omega)}$$

dessa maneira

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\leq C||v_1 - v_2||_{L^N(\Omega)} \\ &\leq C||v_1 - v_2||_{C(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

e como consequência

$$w \leq C||v_1 - v_2||_{C(\overline{\Omega})}.$$

Portanto

$$||u_1 - u_2||_{C(\overline{\Omega})} \leq C||v_1 - v_2||_{C(\overline{\Omega})},$$

concluindo assim que $\mathcal{B}$ é contínua. Agora vamos mostrar que o operador $\mathcal{B}$ é compacto. Para isso considere a bola unitária $B_1 \subset C(\overline{\Omega})$, vamos mostrar que $\mathcal{B}(B_1)$ é pré-compacto. Como $\mathcal{B}$ é um operador continuo e $\mathcal{B}(0) = 0$, dado $u \in \mathcal{B}(B_1)$ existe $v \in B_1$ tal que $\mathcal{B}(v) = u$ e

$$||\mathcal{B}(v)||_{C(\overline{\Omega})} \leq C||v||_{C(\overline{\Omega})}$$

o que implica

$$||u||_{C(\overline{\Omega})} \leq C \quad \forall v \in B_1,$$

logo $\mathcal{B}(B_1)$ é uniformemente limitada. Por outro lado, usando estimativas de regularidade, ver Teorema 4.5 em (WINTER, 2009), temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{\alpha}(\Omega)} = \|\mathcal{B}(v)\|_{C^{\alpha}(\Omega)} &\leq \overline{C}\,(||\mathcal{B}(v)||_{\infty} + ||v||_{\infty}) \\ &\leq \overline{C}(C+1), \end{aligned}$$

consequentemente $\mathcal{B}(B_1)$ é equicontinuo. Portanto pelo Teorema de Arzela-Ascoli, ver (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012) Teorema B.7, segue que $\mathcal{B}$ é um operador compacto, provando assim a afirmação acima. Agora tomamos o cone $C = \{v \in C(\overline{\Omega}); v \geq 0\}$ de funções contínuas não-negativas em $\overline{\Omega}$ e consideramos $\mathcal{B} : C \longrightarrow C$ que está bem definida. De fato, seja $v \in C$ então existe $u = \mathcal{B}(v)$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) & = -v \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

segue do Teorema 2.3 (Princípio do Máximo Fraco) que $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Agora escolhemos h não nula em C tal que h tem suporte compacto em Ω e afirmamos que se $u \in C$ satisfazer $u = \lambda\mathcal{B}(u + h)$, então $\lambda \leq \lambda_1^{+}(\Omega)$. De fato, suponha u e $\lambda > 0$ satisfazem as hipóteses, então

$$\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) = -\lambda(u + h) \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Observamos que se $u \equiv 0$, então $\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) = 0$ o que implica $-\lambda h = 0$, isto é, $h = 0$ ou $\lambda = 0$ de todo modo obtemos uma contradição. Logo $u \geq 0$ e $u \neq 0$, então segue do Teorema 2.4 (Princípio do Máximo Forte) que $u > 0$ em Ω. Isso implica dizer que

$$\lambda \in \{\rho; \exists v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad -\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2v) \geq \rho v \quad \text{em} \quad \Omega\},$$

portanto $\lambda \leq \lambda_1^{+}(\Omega)$. Definimos agora

$$D_{\varepsilon} = \{u \in C; 0 < \lambda < 1 \quad \text{e} \quad u = \overline{\lambda}\mathcal{B}(u + \varepsilon h), \quad \text{onde} \quad \overline{\lambda} = \lambda(\lambda_1^{+}(\Omega) + \varepsilon)\}.$$

Notamos que o operador $(\lambda_1^+(\Omega)+\varepsilon)\mathcal{B}(.+\varepsilon h)$ não pode ter tenha um ponto fixo, pois caso contrário existiria $u \in C$ tal que

$$u = (\lambda_1^+(\Omega)+\varepsilon)\mathcal{B}(u+\varepsilon h),$$

assim

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) & \leq -(\lambda_1^+(\Omega)+\varepsilon)(u+\varepsilon h) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Por conseguinte

$$\lambda_1^+(\Omega)+\varepsilon \in \{\rho; \exists v>0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) \geq \rho v \quad \text{em} \quad \Omega\},$$

e consequentemente $\lambda_1^+(\Omega)+\varepsilon \leq \lambda_1^+(\Omega)$ o que é uma contradição. Portanto, pela alternativa de Leray-Schauder D_ε é ilimitado em C. Assim podemos escolher as sequências $(u_\varepsilon) \subset C$ e $(\lambda_\varepsilon) \subset [0, \lambda_1^+(\Omega)+\varepsilon]$ tal que $\|u_\varepsilon\| \geq 1$ e $u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \mathcal{B}(u_\varepsilon + \varepsilon h)$, normalizando podemos considerar

$$v_\varepsilon := \frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_{C(\Omega)}}.$$

Dessa maneira

$$v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \mathcal{B}\left(v_\varepsilon + \frac{\varepsilon h}{\|u_\varepsilon\|_{C(\Omega)}}\right)$$

e portanto v_ε é uniformemente limitado e equicontínua, assim segue do Teorema de Ascoli-Arzela, ver (LIMA, 1993) Proposição 16, existe uma sequência (v_{ε_k}) tal que $v_{\varepsilon_k} \to \varphi_1^+$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, além disso existe λ^* tal que $\lambda_{\varepsilon_k} \to \lambda^* \in [0, \lambda_1^+(\Omega)]$. Dessa forma, fazendo $k \to +\infty$ podemos tomar $\varepsilon_k \to 0$ o que implica

$$\varphi_1^+ = \lambda^* \mathcal{B}(\varphi_1^+).$$

Além disso, observe que $\|v_{\varepsilon_k}\| \to \|\varphi_1^+\| = 1$ quando $k \to \infty$, consequentemente $\varphi_1^+ \neq 0$. Portanto

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \lambda^*\varphi_1^+ & = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_1^+ & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

segue então do Lema 2.3 (Lema de Hopf) que $\varphi_1^+ > 0$ em Ω.

Vamos mostrar que $\lambda^* = \lambda_1^+(\Omega)$. Temos, por definição, que $\lambda^* \leq \lambda_1^+(\Omega)$. Notamos também que $\lambda^* \geq \mu^+(\Omega)$, pois caso contrário existe ρ tal que $\lambda^* < \rho \leq \mu^+(\Omega)$ se v é tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) + \rho v & \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v & \leq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então $v \leq 0$, e como

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \rho\varphi_1^+ > \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \lambda^*\varphi_1^+ & = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_1^+ & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

segue que $\varphi_1^+ \leq 0$ o que é uma contradição. Portanto, $\mu^+(\Omega) \leq \lambda^* \leq \lambda_1^+(\Omega)$, e vimos no Lema 2.5 que $\lambda_1^+(\Omega) \leq \mu^+(\Omega) \leq +\infty$. Assim $\mu^+(\Omega) = \lambda^* = \lambda_1^+(\Omega)$.

Para mostrar a unicidade de $\lambda_1^+(\Omega)$, suponha que existe uma ρ e uma respectiva função $v > 0$ em Ω tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \rho v & = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

assim podemos observar que $\rho \leq \lambda_1^+(\Omega)$. Supondo agora que $\rho < \lambda_1^+(\Omega)$, então

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \rho\varphi_1^+ < \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \lambda_1^+(\Omega)\varphi_1^+ = 0$$

dessa maneira

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \rho v = 0 > \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \rho\varphi_1^+.$$

Como v e φ_1^+ são positivas em Ω, existe um $t_0 > 0$ grande o suficiente tal que $t_0\varphi_1^+(\overline{x}) > v(\overline{x})$ para algum $\overline{x} \in \Omega$. Além disso sabemos que $\varphi_1^+ = 0$ em $\partial\Omega$, então segue do Teorema 2.6 que existe um $t > 0$ tal que $v \equiv t(t_0\varphi_1^+)$. Por fim observe que

$$t_1\left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi_1^+) + \rho\varphi_1^+\right) < 0$$

onde $t_1 = t \cdot t_0$, e por outro lado

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(t_1\varphi_1^+)) + \rho(t_1\varphi_1^+) = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \rho v = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto $\rho = \lambda_1^+(\Omega)$.

■

2.4 Teorema do tipo de Liouville para operadores de Pucci

Agora entregaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.9. *(Princípio de Liouville) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $u \geq 0$ e*

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + u^p \leq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.4}$$

então existe $p^* = \frac{\beta}{\beta-2}$ tal que quando $1 < p < p^*$, têm-se $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Prova: Mostraremos primeiramente que se $u \geq 0$ é solução de (2.4) e $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^N$, então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. De fato, suponha que existe x_0 tal que $u(x_0) = 0$. Como $-u^p \leq 0$ segue que

$$\begin{cases} -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) & \leq 0 \quad \text{em} \quad B_r(x_0), \\ u & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial B_r(x_0), \end{cases}$$

e por 2.4 (Princípio do Máximo Forte) temos que $u(x) = 0$ em $B_r(x_0)$. Fazendo $r \longrightarrow +\infty$ obtemos

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Agora considere a solução fundamental $\varphi = |x|^{2-\beta}$ e observe que

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^{2-\beta}|x|^{2-\beta} = \lambda^{2-\beta}\varphi(x) \quad \text{para todo} \quad \lambda \geq 0.$$

Considere o *scalling*

$$u_\lambda(x) = \lambda^\alpha u(\lambda x), \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{2}{p-1}$$

então calculando o Pucci de u_λ segue

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u(\lambda x))) = \lambda^{\alpha+2}\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x))$$

somando $(u_\lambda(x))^p$, obtemos

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p = \lambda^{\alpha+2}\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x)) + \lambda^{\alpha p}\left(u(\lambda x)\right)^p.$$

Observe que

$$\alpha p = \frac{2p}{p-1} = \frac{2p+2-2}{p-1} = \frac{2}{p-1} + 2 = \alpha + 2,$$

então

$$\lambda^{\alpha+2}\left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x)) + (u(\lambda x))^p\right) \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e consequentemente

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Sendo $u > 0$ em $\Omega = B_R(0) \setminus B_1(0)$, segue que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) \leq -u^p < 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

além disso sabemos que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

uma vez que φ é solução fundamental, então

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) > \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Além disso, $\varphi \equiv 1$ em $\partial B_1(0)$ e como $u > 0$ em $\partial B_1(0)$ que é compacto, então existe c em $(0,1)$ tal que

$$u \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial B_1(0).$$

Desde que $\varphi \longrightarrow 0$ quando $|x| \longrightarrow +\infty$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $\varepsilon > \varphi$ sempre que $|x| \geq R$. Logo,

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial B_R(0).$$

Assim

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial\Omega = \partial B_R(0) \cup \partial B_1(0),$$

consequentemente

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u+\varepsilon)) = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) & \leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue do corolário 2.1 (Principio da Comparação) que

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \Omega,$$

fazendo $R \longrightarrow +\infty$ podemos tomar $\varepsilon \longrightarrow 0$ e assim obtemos

$$u \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_1(0),$$

por conseguinte

$$u \geq c|x|^{2-\beta} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_1(0).$$

Em particular para $\lambda \geq 1$ segue

$$u \geq c|x|^{2-\beta} \quad \text{em} \quad B_{2\lambda}(0) \setminus B_\lambda(0),$$

considerando o *scalling*

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) = \lambda^\alpha u(\lambda x) &\geq \lambda^{\alpha+2-\beta} c|x|^{2-\beta} \\ &\geq \lambda^{\alpha+2-\beta} c 2^{2-\beta} \quad \text{em} \quad B_2(0) \setminus B_1(0), \end{aligned}$$

consequentemente

$$-(u_\lambda(x))^{p-1} \leq -\lambda^{(\alpha+2-\beta)(p-1)} c_2.$$

Como

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p \leq 0,$$

podemos observar que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\lambda(x)) \leq -(u_\lambda(x))^{p-1} u_\lambda(x).$$

Portanto

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u_\lambda(x))) & \leq -u_\lambda(x)\lambda^{(\alpha+2-\beta)(p-1)} c_2 \quad \text{em} \quad B_2(0) \setminus B_1(0), \\ u_\lambda & > 0 \quad \text{em} \quad \overline{B_2(0) \setminus B_1(0)}, \end{cases}$$

consequentemente

$$\lambda^{(\alpha+2-\beta)(p-1)} c_2 \in \{\rho; \exists v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad -\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2v) \geq \rho v \quad \text{em} \quad \Omega\}.$$

Observe que

$$\alpha + 2 - \beta > 0$$

uma vez que

$$\frac{2}{p-1} > \beta - 2.$$

Dessa maneira podemos fazer $\lambda^{(\alpha+2-\beta)(p-1)} c_2 \longrightarrow +\infty$ o que gera uma contradição com o fato de $\lambda_1^+(\Omega) < +\infty$. Concluindo dessa maneira a prova do teorema.

∎

3

Teorema do tipo Liouville para operadores Elípticos Degenerados

3.1 Soluções no sentido da viscosidade

Nesta capítulo iremos trabalhar com equações do tipo

$$|\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2) + \lambda u^p = 0 \tag{3.1}$$

com $\alpha \geq 0$ e $p > 1 + \alpha$.

Ao contrario do que acontece nos capítulos anteriores não podemos esperar que tais equações tenham soluções clássicas, dessa forma iremos trabalhar com soluções no sentido da viscosidade

Definição 3.1. *Seja $u \in C(\Omega)$. Dizemos que u é uma subsolução no sentido da viscosidade de 3.1 se dado uma $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tem um máximo em $x_0 \in \Omega$, então*

$$|\nabla\varphi(x_0)|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi(x_0)) + \lambda u^p(x_0) \geq 0.$$

Por outro lado, dizemos que u é uma supersolução no sentido da viscosidade de 3.1 se dado uma $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tem um mínimo em $x_0 \in \Omega$, então

$$|\nabla\varphi(x_0)|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi(x_0)) + \lambda u^p(x_0) \leq 0.$$

Finalmente dizemos que u é uma solução no sentido da viscosidade de 3.1 se u é uma subsolução e uma supersolução no sentido da viscosidade. Para mais detalhes ver (KOIKE, 2004).

Ao longo do capítulo iremos omitir a expressão "no sentido da viscosidade"depois de subsolução, supersolução e solução.

Iremos provar que se u é não-negativa e resolve

$$|\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

então $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$, onde $\alpha \geq 0$, $1 + \alpha < p < \frac{\alpha(\beta-1)+\beta}{\beta-2}$ e $\beta = \frac{\Lambda}{a}(N-1) + 1$. Observe que este resultado generaliza os resultados obtidos nos dois capítulos anteriores.

O princípio de Liouville apresentado nesse capítulo foi provado primeiro por Birindelli e Demengel em (BIRINDELLI; DEMENGEL, 2004) e ao longo do capítulo vamos apresentar muitas das ideias que aparecem nesse artigo. Porém a estrategia central da demonstração do resultado principal segue as ideias do Armstrong e Sirakov (ARMSTRONG; SIRAKOV, 2011).

3.2 Lema do cancelamento

Nesta seção iremos mostrar um lema técnico mostrado por Imbert e Silvestre em (IMBERT; SILVESTRE, 2013) que irá nos auxiliar na demonstação de muitos resultados deste capítulo.

Lema 3.1. *Se* $|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) \geq 0$*, então* $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) \geq 0$.

Prova: Seja $\Phi(x) = x^T A x + bx + c$ uma função que toca u por cima em x_1 em Ω, isto é,

$$u \leq \Phi \quad \text{em} \quad \Omega \qquad \text{e} \quad u(x_1) = \Phi(x_1)$$

a partir daqui a prova segue por dois casos distintos, num primeiro caso iremos considerar $b \neq 0$. Para isso suponha sem perda de generalidade que $x_1 = 0$ e a menos de uma translação podemos considerar $\Phi(x_1) = 0$, então

$$\nabla\Phi(x_1) = b \quad \text{e} \quad D^2\Phi(x_1) = A.$$

Testando a Φ contra a u em x_1, segue que

$$|b|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) \geq 0$$

como $b \neq 0$, então

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) \geq 0.$$

Agora faremos o caso em que $b \neq 0$ e para isso vamos supor por contradição que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) < 0$, então existe ao menos um autovalor negativo de A. Considere S como a soma direta dos subespaços gerados pelos autovalores negativos da matriz A . Seja $P_S : \mathbb{R}^N = S \oplus S^c \to S$ a projeção ortogonal e definindo

$$w = \Phi - \varepsilon|P_s x|,$$

como $\Phi > u$ em $\Omega \setminus \{x_1\}$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe x_2 em $\Omega \setminus \{x_1\}$ tal que

$$w \geq u \quad \text{e} \quad w(x_2) = u(x_2).$$

Vamos mostrar que $|P_S x_2| \neq 0$ e para isso suponha por contradição que $|P_S x_2| = 0$. Sabemos que

$$|P_S x| = \max_{|e|=1} P_S x \cdot e,$$

considere a função $g = \Phi - \varepsilon P_S x \cdot e$ e observe que g toca u por cima em x_2. De fato,

$$g = \Phi - \varepsilon P_S x \cdot e \geq \Phi - \varepsilon |P_S x| = w \geq u,$$

então $g \geq u$ em $\Omega \setminus \{x_2\}$, e além disso sabemos que

$$-\varepsilon |P_S x| \leq \varepsilon P_S x \cdot e \leq \varepsilon |P_S x|$$

e quando analisamos no ponto x_2 segue que

$$0 \leq \varepsilon P_S x_2 \cdot e \leq 0,$$

isso implica que

$$g(x_2) = u(x_2),$$

assim g toca u por cima em x_2 e podemos usá-la como função teste. Agora vamos mostrar que $|Ax_2 - \varepsilon P_S e|^\alpha \neq 0$ para algum e em $\mathbb{S}^{N-1}$. Suponha que $Ax_2 - \varepsilon P_S e = 0$ para todo e em $\mathbb{S}^{N-1}$, então

$$Ax_2 = \varepsilon P_S e \quad \forall e \in \mathbb{S}^{N-1}$$

consequentemente

$$P_S x = P_S y \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Escolhendo $y = -x$ segue que

$$P_S(2x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^{N-1}$$

e assim

$$P_S x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^{N-1},$$

o que implica dizer que P_S é a projeção nula, o que uma contradição pois por hipótese existe ao menos um autovalor negativo da matriz A. Portanto existe $\overline{e}$ em $\mathbb{S}^{N-1}$ tal que $|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}| \neq 0$. Dessa maneira usando g como função teste, obtemos

$$|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) \geq 0$$

portanto

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) \geq 0,$$

o que é uma contradição com $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) < 0$, logo $|P_S x_2| \neq 0$.

Usaremos w como função teste e para isso observe que

$$\nabla w(x_2) = Ax_2 - \varepsilon \frac{P_S x_2}{|P_S x_2|} \quad \text{e} \quad D^2 w(x_2) = A - \varepsilon B,$$

onde B é a matriz Hessiana de $|P_S x|$ em x_2, então

$$\left| Ax_2 - \varepsilon \frac{P_S x_2}{|P_S x_2|} \right|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) \geq 0.$$

Observe que

$$\left(Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x}{|P_S x|}\right)\cdot P_S x_2 = Ax_2\cdot P_S x_2 - \varepsilon\frac{(P_S x_2)^2}{|P_S x_2|}$$
$$= Ax_2\cdot P_S x_2 - \varepsilon|P_S x_2|,$$

como o operador projeção é autoadjunto segue que

$$Ax_2\cdot P_S x_2 - \varepsilon|P_S x_2| = P_S A x_2\cdot x_2 - \varepsilon|P_S x_2|$$

e sabemos que P_S tem sua imagem contida no espaço onde A tem autovalor negativo, então $P_S A x_2\cdot x_2 \le 0$ e dessa maneira

$$P_S A x_2\cdot x_2 - \varepsilon|P_S x_2| \le 0 - \varepsilon|P_S x_2| < 0 \quad \text{uma vez que} \quad |P_S x_2| \neq 0.$$

Logo $\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right| \neq 0$ e por conseguinte

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) \ge 0,$$

observe que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A + (-\varepsilon B))$$

e do Lema 2.1 obtemos

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A + (-\varepsilon B)) \le \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-\varepsilon B)$$
$$= \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(\varepsilon B),$$

como $|P_S x|$ é uma função convexa, então $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(B) \ge 0$ e assim

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \varepsilon\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(B) \ge 0$$

o que implica

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) \ge \varepsilon\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(B) \ge 0,$$

o que é uma contradição com a suposição de que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) < 0$.

■

3.3 O primeiro autovalor

Como feito no capítulo anterior, nessa seção iremos nos dedicar a definição de um número que faça o papel qualitativo do primeiro autovalor do Laplaciano, sendo assim definimos.

Definição 3.2. *Definimos o primeiro autovalor associado ao operador $|\nabla .|^\alpha\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}$, como*

$$\overline{\lambda} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}; \exists v > 0 \quad em \quad \Omega, |\nabla v|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \lambda v^{\alpha+1} \le 0\}.$$

Como primeira propriedade provaremos que o primeiro autovalor é o supremo dos valores de λ tal que $|\nabla.|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda} + \lambda I$ satisfaz o princípio da negatividade. A prova do teorema a seguir segue as ideias que aparecem em (IMBERT; SILVESTRE, 2013).

Teorema 3.1. *Seja Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $\tau < \overline{\lambda}$, então toda solução no sentido da viscosidade de*

$$\begin{cases} |\nabla\sigma|\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\sigma) + \tau|\sigma|^{\alpha}\sigma & \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \sigma & \leq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

satisfaz $\sigma \leq 0$ em Ω.

Prova:Como $\tau < \overline{\lambda}$ existe λ com $\tau < \lambda < \overline{\lambda}$ e $\varphi > 0$ em Ω tal que

$$\begin{cases} |\nabla\varphi|\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi) + \lambda\varphi^{\alpha+1} & \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que existe x_0 em Ω tal que $\sigma(x_0) > 0$ e definindo

$$\psi(x) := t\varphi(x)$$

de tal modo que $\sigma(x_0) > \psi(x_0)$ para um t fixo e pequeno suficiente, dessa maneira podemos definir o conjunto

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; \sigma - \psi > 0\}.$$

Afirmação: $\mathcal{M}^{+}_{a,\Lambda}(D^2(\sigma - \psi)) \geq 0$. De fato, seja $\phi(x) = x^T Ax + bx + c$ tal que ϕ toca $\sigma - \psi$ por cima em $x_1 \in \Omega$, isto é,

$$(\sigma - \psi) - \phi \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1 \quad \text{e} \quad (\sigma(x_1) - \psi(x_1)) = \phi(x_1).$$

A continuação da demonstração segue dividida em dois casos, para o primeiro caso iremos supor que $b \neq 0$. Para isso suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 = 0$ e a menos de uma translação podemos $\phi(x_1) = 0$, então

$$\nabla\phi(x_1) = b \quad \text{e} \quad D^2\phi(x_1) = A.$$

Fixando x_1 em ψ obtemos

$$\sigma - (\psi(x_1) + \phi) \leq 0,$$

ou seja, $\psi(x_1) + \phi$ toca σ por cima em x_1. Testando $\psi(x_1) + \phi$ contra σ, segue

$$|b|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(A) + \tau\sigma^{\alpha+1}(x_1) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1, \tag{3.3}$$

e fixando x_1 em σ, temos

$$\psi - (\sigma(x_1) - \phi) \geq 0,$$

ou seja, $\sigma(x_1) - \phi$ toca ψ por baixo em x_1 e testando $\sigma(x_1) - \phi$ contra ψ, segue

$$|b|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A) + \lambda\psi^{\alpha+1}(x_1) \le 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1. \tag{3.4}$$

Subtraindo a equação (3.4) de (3.3) segue

$$|b|^\alpha \left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A)\right) + \tau\sigma^{\alpha+1}(x_1) - \lambda\psi^{\alpha+1}(x_1) \ge 0,$$

como $\phi(0) = 0$ então

$$|b|^\alpha \left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A)\right) \ge (\lambda - \tau)\sigma^{\alpha+1}(x_1) \ge 0$$

e sabemos do Lema 2.1 obtemos

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2A) \ge \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A),$$

e do fato que $b \neq 0$ segue

$$|b|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2A) \ge 0$$

o que implica que

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2A) \ge 0,$$

e por conseguinte

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) \ge 0.$$

Agora faremos para o caso $b = 0$ e para isso usaremos uma hipótese de contradição. Suponha que $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) < 0$, então existe ao menos um autovalor não-positivo de A, considerando S como sendo a soma direta dos subespaços gerados por todos os autovalores não-positivos da matriz A. Seja $P_S : \mathbb{R}^N = S \oplus S^c \longrightarrow S$ a projeção ortogonal e definindo

$$w(x) := \phi - \varepsilon|P_S x|, \tag{3.5}$$

como $\phi > \sigma - \psi$ em $B_r \setminus \{0\} \subset \Omega_1$, então existe ε pequeno o suficiente tal que

$$w > \sigma - \psi \quad \text{e} \quad w(x_2) = \sigma(x_2) - \psi(x_2) \quad \text{para algum} \quad x_2 \in B_r \setminus \{0\},$$

sem perda de generalidade assuma que $w(x_2) = 0$. Vamos mostrar que $|P_S x_2| \neq 0$ e para tal suponha que $|P_S x_2| = 0$, sabemos que

$$|P_S x| = \max_{|e|=1} P_S x \cdot e,$$

considere a função teste $\phi - \varepsilon P_S x \cdot e$ que toca $\sigma - \psi$ por cima em x_2. De fato,

$$\phi - \varepsilon P_S x \cdot e \ge \phi - \varepsilon|P_S x| \ge \sigma - \psi$$

e observe que

$$-\varepsilon|P_S x| \le \varepsilon P_S x \cdot e \le \varepsilon|P_S x|.$$

Além disso

$$0 = -\varepsilon|P_S x_2| \le \varepsilon P_S x_2 \cdot e \le \varepsilon|P_S x_2| = 0,$$

dessa maneira o mínimo é em x_2 e por consequência $\phi - \varepsilon P_S x \cdot e$ toca $\sigma - \psi$ por cima em x_2. Agora provaremos que $|Ax_2 - \varepsilon P_S e|^\alpha \neq 0$ para algum $e \in \mathbb{S}^{N-1}$, e para isso suponha que $Ax_2 - \varepsilon P_S e = 0$ para todo $e \in \mathbb{S}^{N-1}$, o que implica

$$Ax_2 = \varepsilon P_S e \quad \forall e \in \mathbb{S}^{N-1},$$

consequentemente

$$P_S x = P_S y \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Escolhendo $y = -x$ obtemos

$$P_S(2x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^{N-1}$$

e assim

$$P_S x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^{N-1},$$

o que implica que P_S é a projeção nula, porém isto é uma contradição uma vez que por hipótese existe ao menos um autovalor negativo da matriz A. Dessa maneira existe $\overline{e} \in \mathbb{S}^{N-1}$ tal que $|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}| \neq 0$. Por conseguinte, aplicando nas funções teste obtemos

$$|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) + \tau\sigma^{\alpha+1}(x_2) \ge 0$$

e

$$|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A) + \lambda\varphi^{\alpha+1}(x_2) \le 0,$$

como $\sigma(x_2) = \varphi(x_2)$, podemos subtrair os resultados acima e assim obtemos

$$|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A)\right) + (\tau - \lambda)\sigma^{\alpha+1}(x_2) \ge 0,$$

consequentemente

$$|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-A)\right) \ge (\lambda - \tau)\sigma^{\alpha+1}(x_2) \ge 0.$$

Portanto aplicando o Lema 2.1 segue

$$|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2A) \ge 0$$

vimos que $|Ax_2 - \varepsilon P_S \overline{e}|^\alpha \neq 0$, então

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) \ge 0$$

e por conseguinte

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) \ge 0,$$

o que contradiz a nossa suposição. Portanto, $|P_S x_2| \neq 0$ e assim podemos usar (3.5) como função teste em x_2, então

$$\nabla w(x_2) = Ax_2 - \frac{\varepsilon P_S x_2}{|P_S x_2|} \quad \text{e} \quad D^2 w(x_2) = A - \varepsilon B$$

onde B é a hessiana de $|P_S x|$ em x_2, dessa maneira

$$\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right|^{\alpha} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) + \tau\sigma^{\alpha+1}(x_2) \geq 0$$

e

$$\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right|^{\alpha} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-(A - \varepsilon B)) + \lambda\varphi^{\alpha+1}(x_2) \leq 0$$

subtraindo as equações acima, obtemos

$$\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right|^{\alpha} \left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-(A - \varepsilon B))\right) + (\tau - \lambda)\sigma^{\alpha+1}(x_2) \geq 0,$$

consequentemente

$$\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right|^{\alpha} \left(\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) - \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(-(A - \varepsilon B))\right) \geq (\lambda - \tau)\sigma^{\alpha+1}(x_2) \geq 0$$

e por conseguinte segue do Lema 2.1 segue

$$\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right|^{\alpha} \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2(A - \varepsilon B)) \geq 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}\left(Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right) \cdot P_S x_2 =& Ax_2 \cdot P_S x - \varepsilon\frac{(P_S x_2)^2}{|P_S x_2|}\\ =& P_S A x_2 \cdot x_2 - \varepsilon|P_S x_2|,\end{aligned}$$

como o P_S tem sua imagem contida no espaço onde A tem auto valor negativo, segue que

$$P_S A x_2 \cdot x_2 \leq 0,$$

e dessa maneira

$$P_S A x_2 \cdot x_2 - \varepsilon|P_S x_2| \leq 0 - \varepsilon|P_S x_2| < 0 \quad \text{pois} \quad |P_S x_2| \neq 0.$$

Logo $\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right| \neq 0$, então

$$\left|Ax_2 - \varepsilon\frac{P_S x_2}{|P_S x_2|}\right|^{\alpha} \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2(A - \varepsilon B)) \geq 0,$$

implica que

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(2(A - \varepsilon B)) \geq 0$$

e por conseguinte

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) \geq 0,$$

como

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A - \varepsilon B) \leq \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-\varepsilon B),$$

então

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) + \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-\varepsilon B) \geq 0.$$

Sabemos que $|P_S x|$ é o modulo de uma função linear, isto é , $|P_S x|$ é uma função convexa o que implica que B é positiva definida e como consequência $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(B) \geq 0$, por conseguinte $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(-\varepsilon B) \leq 0$, concluindo assim que $\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(A) \geq 0$ o que é uma contradição com nossa suposição. Portanto toda função que toque por cima $\sigma - \psi$ é também supersolução e dessa maneira,

$$\mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(D^2(\sigma - \psi)) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1$$

e por definição de Ω_1 sabemos que $\sigma - \psi = 0$ em $\partial\Omega_1$, segue de 2.1 (Princípio da negatividade) que $\sigma - \psi \leq 0$ em Ω_1, em particular $\sigma(x_0) - \psi(x_0) \leq 0$ o que é uma contradição com nossa hipótese inicial. Concluindo assim que vale o princípio do negatividade para (3.2), ou seja, $\sigma \leq 0$.

∎

O lema a seguir nos auxiliara na prova da finitude do primeiro autovalor.

Lema 3.2. *Sejam $\Omega = B_R(0)$, $q = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ e*

$$\sigma(x) = \frac{(|x|^q - R^q)^2}{2q}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ que depende de a, Λ, N e α tal que

$$\sup_{x \in B_R(0)} \frac{-|\nabla\sigma|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\sigma)}{\sigma^{\alpha+1}} \leq \frac{C}{R^{\alpha+2}}.$$

Prova: Considere a função $g(r) = \sigma(|x|)$, calculando suas derivadas obtemos

$$g'(r) = r^{q-1}(r^q - R^q)$$

e

$$g''(r) = (2q-1)r^{2(q-1)} - (q-1)R^q r^{q-2},$$

observe que se $r \leq R$, então $g' \leq 0$, enquanto que $g'' \leq 0$ se, e somente se

$$(2q-1)r^{2(q-1)} \leq (q-1)R^q r^{q-2}$$

consequentemente

$$r^q \leq \frac{q-1}{2q-1}R^q$$

ou seja,

$$g'' \leq 0 \quad \text{sempre que} \quad r \leq R\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

isto é, g é concava quando $r \leq R\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1/q}$ e por conseguinte g é convexa sempre que $r > R\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1/q}$. Usando g concava e aplicando o Lema 2.2 segue

$$-|\nabla g|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 g) = -|g'|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 g) \leq -\Lambda|g'|\left[g''(r) + \frac{(N-1)}{r}g'(r)\right],$$

considere $B_1 = (N + 2q - 2)$, $B_2 = (N + q - 2)$ e note que

$$\begin{aligned}
r^{q-2}(B_1 r^q - B_2 R^q) &= (N + 2q - 2)r^{2(q-1)} - (N + q - 2)R^q r^{q-2} \\
&= Nr^{2q-1} + 2qr^{2(q-1)} - 2r^{2(q-1)} - NR^q r^{q-2} - qR^q r^{q-2} + 2R^q r^{q-2} \\
&= r^{2(q-1)}(2q - 1) - (q - 1)R^q r^{q-2} - r^{2(q-1)} + Nr^{2(q-1)} - NR^q r^{q-2} + R^q r^{q-2} \\
&= r^{2(q-1)}(2q - 1) - (q - 1)R^q r^{q-2} r^{q-1}\left[r^{q-1}(N - 1) + (1 - N)\frac{R^q}{r}\right] \\
&= g''(r) + \frac{(N - 1)}{r} g'(r).
\end{aligned}$$

Logo

$$-|\nabla\sigma|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\sigma) \leq |g'|^\alpha r^{q-2}\Lambda(-B_1 r^q + B_2 R^q),$$

dividindo por $\sigma^{\alpha+1}$ segue que

$$\begin{aligned}
-\frac{|\nabla\sigma|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\sigma)}{\sigma^{\alpha+1}} &\leq \frac{(2q)^{\alpha+1}|g'|^\alpha r^{q-2}\Lambda(-B_1 r^q + B_2 R^q)}{(R^q - r^q)^{2(\alpha+1)}} \\
&\leq \frac{(2q)^{\alpha+1} r^{\alpha(q-1)}(R^q - r^q)^\alpha r^{q-2}\Lambda(-B_1 r^q + B_2 R^q)}{(R^q - r^q)^{2(\alpha+1)}} \\
&= \frac{(2q)^{\alpha+1} r^{\alpha(q-1)+q-2}\Lambda(-B_1 r^q + B_2 R^q)}{(R^q - r^q)^{\alpha+2}} \\
&= \frac{(2q)^{\alpha+1} r^{q(\alpha+1)-\alpha-2}\Lambda(-B_1 r^q + B_2 R^q)}{(R^q - r^q)^{\alpha+2}},
\end{aligned}$$

então

$$-\frac{|\nabla\sigma|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\sigma)}{\sigma^{\alpha+1}} \leq \frac{(2q)^{\alpha+1}\Lambda\,(-B_1 r^q + B_2 R^q)}{(R^q - r^q)^{\alpha+2}}.$$

Definindo

$$\varphi(r) = \frac{-B_1 r^q + B_2 R^q}{(R^q - r^q)^{\alpha+2}},$$

vamos determinar um ponto de máximo de φ e para isso faremos $\varphi' = 0$, isto é,

$$\frac{(R^q - r^q)^{\alpha+2}[-qB_1 r^{q-1}] - [-B_1 r^q + B_2 R^q](\alpha + 2)(R^q - r^q)^{\alpha+1}(-q)r^{\alpha+1}}{(R^q - r^q)^{2(\alpha+2)}} = 0$$

o que implica que

$$(R^q - r^q)B_1 = (\alpha + 2)[-B_1 r^q + B_2 R^q],$$

e dessa maneira

$$(\alpha + 2)B_1 r^q - B_1 r^q = (\alpha + 2)B_2 R^q - B_1 R^q$$

consequentemente

$$r^q = R^q \frac{(\alpha + 2)B_2 - B_1}{B_1(\alpha + 1)}.$$

Substituindo em φ obtemos

$$\varphi(r) = \frac{-B_1 R^q \frac{(\alpha+2)B_2 - B_1}{B_1(\alpha+1)} + B_2 R^q}{\left(R^q - R^q \frac{(\alpha+2)B_2 - B_1}{B_1(\alpha+1)}\right)^{\alpha+2}},$$

consequentemente

$$\varphi(r) = \frac{\frac{R^q(B_1-B_2)}{(\alpha+1)}}{R^{q(\alpha+2)}(\alpha+2)^{\alpha+2}\frac{(B_1-B_2)^{\alpha+2}}{[B_1(\alpha+1)]^{\alpha+2}}},$$

dessa maneira

$$\varphi(r) = \frac{[B_1(\alpha+1)]^{\alpha+2}}{R^{q(\alpha+1)}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\alpha+2}(B_1-B_2)^{\alpha+1}}.$$

Sabendo que $q = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ então

$$\varphi(r) = \frac{C}{R^{\alpha+2}}$$

onde $C = \frac{[B_1(\alpha+1)]^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)^{\alpha+2}(B_1-B_2)^{\alpha+1}}$. Portanto,

$$-\frac{|\nabla\sigma|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\sigma)}{\sigma^{\alpha+1}} \leq \frac{\overline{C}}{R^{\alpha+2}}$$

onde $\overline{C} = (2q)^{\alpha+1}\Lambda C$.

■

Enfim provamos que o primeiro autovalor é limitado.

Teorema 3.2. *Seja R o maior raio tal que $B_R \subset \Omega$. Então existe C que depende de a, Λ, N e α tal que*

$$\overline{\lambda} \leq \frac{C}{R^{\alpha+2}}$$

Prova: Sem perda de generalidade assuma que $B_R(0) \subset \Omega$, considere

$$\tau = \sup_{x\in B_R(0)} \frac{-|\nabla\sigma|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\sigma)}{\sigma^{\alpha+1}}.$$

Vamos mostrar que $\overline{\lambda} \leq \tau$. Suponha por contradição que $\overline{\lambda} > \tau$ e seja

$$u = \begin{cases} \sigma & , \quad \text{quando} \quad |x| \leq R, \\ 0 & , \quad \text{quando} \quad |x| > R. \end{cases}$$

Afirmação: $|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + \tau|u|^\alpha u \geq 0$ em Ω. De fato, iremos separar em casos e no primeiro caso considere $|x| < R$, então como $\tau < \overline{\lambda}$ e $u = \sigma$ temos

$$\tau \geq \frac{-|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u)}{u^{\alpha+1}}$$

então,

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + \tau u^{\alpha+1} \geq 0 \quad \text{em} \quad |x| \leq R.$$

No segundo caso $|x| > 0$ temos que $u = 0$, então o resultado segue da definição de solução no sentido da viscosidade.

No caso em que $|x| = R$ observe que toda função que toca u por cima tem o gradiente nulo. De fato, seja φ uma função teste tal que $\varphi \geq u$ e $\varphi(x_1) = u(x_1)$, então x_1 é ponto de minimo de $\varphi - u$ e consequentemente

$$\nabla(\varphi - u)(x_1) = 0$$

o que implica que $\nabla\varphi(x_1) = \nabla u(x_1)$. Sabemos que quando $|x| = R$ as derivadas laterais de u existem e são iguais a zero, então

$$0 + \tau|u(x_1)|^{\alpha}u(x_1) \geq 0 \quad \text{pois} \quad u \geq 0.$$

Logo

$$\begin{cases} |\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + \tau|u|^{\alpha}u & \geq 0 \quad \text{em} \quad B_R(0), \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Segue então do Teorema 3.1 que

$$u \leq 0 \quad \text{em} \quad B_R(0),$$

o que é uma contradição pois $\sigma \geq 0$ em $B_R(0)$. Portanto $\overline{\lambda} \leq \tau$ e do Lema 3.2 segue que $\overline{\lambda} \leq \dfrac{C}{R^{\alpha+2}}$.

■

3.4 Teorema do tipo Liouville para operadores degenerados

Nesta seção entregaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.3. *(Princípio de Liouville) Seja $p^* = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta}{\beta-2}$. Se $u \geq 0$ é uma solução de*

$$|\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{3.6}$$

onde $1 + \alpha < p < p^*$, então $u = 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Prova: Primeiramente vamos mostrar que se $u \geq 0$ é solução de (3.6) e $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^N$, então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. De fato, suponha que exista x_0 em $B_R(x_0)$ tal que $u(x_0) = 0$, como

$$|\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \leq 0$$

então

$$|\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + \leq -u^p = 0,$$

o que implica

$$\begin{cases} |\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) & \leq 0 \quad \text{em} \quad B_R(x_0), \\ u & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

Segue do Lema 3.1 que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) & \leq 0 \quad \text{em} \quad B_R(x_0), \\ u & \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

e consequentemente do Teorema 2.4 (Princípio do Máximo Forte) obtemos

$$u(x) = 0 \quad \text{em} \quad B_R(x_0),$$

fazendo $R \longrightarrow +\infty$

$$u \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Podemos então supor que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$, nesse caso considere a solução fundamental

$$\varphi(x) = |x|^{2-\beta}$$

e observe que

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^{2-\beta}|x|^{2-\beta} = \lambda^{2-\beta}\varphi(x) \quad \text{quando} \quad \lambda \geq 0.$$

Considerando $\zeta = \dfrac{\alpha+2}{p-\alpha-1}$ e a função *scalling*

$$u_\lambda(x) = \lambda^\zeta u(\lambda x),$$

note que

$$\nabla u_\lambda(x) = \lambda^{\zeta+1}\nabla u(\lambda x) \quad \text{e} \quad D^2u_\lambda(x) = \lambda^{\zeta+2}D^2u(\lambda x),$$

dessa maneira

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\lambda(x)) = \lambda^{(\zeta+1)\alpha+\zeta+2}|\nabla u(\lambda x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u(\lambda x)).$$

Somando $(u_\lambda(x))^p$ segue que

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p = \lambda^{(\zeta+1)\alpha+\zeta+2}|\nabla u(\lambda x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u(\lambda x)) + \lambda^{\zeta p}\,(u(\lambda x))^p\,,$$

e como

$$\begin{aligned}(\zeta+1)\alpha+\zeta+2 &= \left(\frac{\alpha+2}{p-\alpha-1}+1\right)\alpha + \frac{\alpha+2}{p-\alpha-1}+2 \\ &= \left(\frac{1+p}{p-\alpha-1}\right)\alpha + \frac{2p-\alpha}{p-\alpha-1} \\ &= \frac{(\alpha+2)p}{p-\alpha-1} \\ &= \zeta p,\end{aligned}$$

então

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p = \lambda^{\zeta p}\left(|\nabla u(\lambda x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u(\lambda x)) + (u(\lambda x))^p\right),$$

e portanto

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Observe que $\zeta > \beta - 2$, pois

$$\frac{\alpha+2}{p-\alpha-1} > \beta - 2,$$

e

$$\alpha + 2 > (\beta-2)(p-\alpha-1)$$

e por conseguinte

$$\alpha + 2 > p(\beta-2) - \beta\alpha - \beta + 2\alpha + 2,$$

o que implica

$$\alpha(\beta-1) + \beta > p(\beta-2),$$

desde que

$$p < \frac{\alpha(\beta-1)+\beta}{\beta-2} = p^*.$$

Assumindo que $u > 0$ em $B_R(0) \setminus B_1(0)$ e como

$$|\nabla u(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(x)) \leq -u^p < 0 \quad \text{em} \quad B_R(0) \setminus B_1(0),$$

então segue do Lema 3.1 que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) < 0.$$

Sabemos que

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 \varphi) = 0,$$

o que implica

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 \varphi) > \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u).$$

Além disso, $\varphi \equiv 1$ em $\partial B_1(0)$ e como $u > 0$ em $\partial B_1(0)$ que é compacto, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$u \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial B_1(0),$$

desde que $\varphi \longrightarrow 0$ quando $|x| \longrightarrow +\infty$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $\varepsilon > \varphi$ sempre que $|x| \geq R$. Logo

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial B_R(0),$$

o que implica

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial(B_R(0) \setminus B_1(0))$$

obtemos assim

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) & > \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u)) = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u+\varepsilon)) \quad \text{em} \quad B_R(0) \setminus B_1(0), \\ u + \varepsilon & \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \partial(B_R(0) \setminus B_1(0)). \end{cases}$$

Segue então do Corolário 2.1 (Princípio da Comparação) que

$$u + \varepsilon \geq c\varphi \quad \text{em} \quad B_R(0) \setminus B_1(0),$$

fazendo $R \to +\infty$ podemos tomar $\varepsilon \to 0$ e assim

$$u \geq c\varphi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_1(0),$$

logo

$$u \geq c|x|^{2-\beta} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_1(0),$$

em particular

$$u \geq c|x|^{2-\beta} \quad \text{em} \quad B_{2\lambda} \setminus B_\lambda(0) \quad \text{com} \quad \lambda \geq 1.$$

Então usando o *scalling* em $B_2(0) \setminus B_1(0)$ obtemos

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) &= \lambda^\zeta u(\lambda x) \\ &\geq \lambda^{\zeta+2-\beta}|x|^{2-\beta} c \\ &\geq \lambda^{\zeta+2-\beta} 2^{2-\beta} c \\ &\geq \lambda^{\zeta+2-\beta} c_2, \end{aligned}$$

o que implica

$$-(u_\lambda(x))^{(p-1-\alpha)} \leq -\lambda^{(\zeta+2-\beta)(p-1-\alpha)} c_2.$$

Sabemos que

$$|\nabla u_\lambda|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) \leq -(u_\lambda(x))^p,$$

então

$$\begin{cases} |\nabla u_\lambda|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) & \leq -c_2 \lambda^{(\zeta+2-\beta)(p-1-\alpha)} (u_\lambda(x))^{1+\alpha} \quad \text{em} \quad B_2(0) \setminus B_1(0), \\ u_\lambda(x) & > 0 \quad \text{em} \quad \partial(B_2(0) \setminus B_1(0)). \end{cases}$$

Consequentemente

$$c_2 \lambda^{(\zeta+2-\beta)(p-1-\alpha)} \in \{\lambda \in \mathbb{R}; \exists v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, |\nabla v|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \lambda v^{\alpha+1} \leq 0\}$$

por conseguinte

$$c_2 \lambda^{(\zeta+2-\beta)(p-1)} \leq \overline{\lambda},$$

porém como $(\zeta + 2 - \beta)(p - 1 - \alpha) > 0$, podemos fazer $c_2 \lambda^{(\zeta+2-\beta)(p-1-\alpha)} \to +\infty$, o que é um contradição com a finitude de $\overline{\lambda}$. Portanto $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$.

■

3.5 Operadores Uniformemente Elípticos

Dizemos que $F : \mathcal{S}^N \to \mathbb{R}$ é um operador uniformemente (a, Λ)-elíptico se

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(M - N) \leq F(M) - F(N) \leq \mathcal{M}^+_{a,\Lambda}(M - N).$$

Um exemplo famoso de operador uniformemente elíptico é o operador de Isaacs,

$$F(M) = \inf_i \sup_j tr(A_{ij}M)$$

onde $aI \leq A_{ij} \leq \Lambda I$.

Se $F(0) = 0$, como consequência do teorema de Liouville deste capitulo, obtemos

Teorema 3.4. *(Princípio de Liouville) Seja* $p^* = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta}{\beta-2}$*. Se* $u \geq 0$ *é uma solução de*

$$|\nabla u|^\alpha F(D^2 u) + u^p \leq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N$$

onde $1 + \alpha < p < p^*$*, então* $u = 0$ *em* $\mathbb{R}^N$.

Prova: Desde que $\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) \leq F(D^2u)$ temos que

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) + u^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e portanto $u = 0$.

■

4

Teorema do tipo Liouville no semiespaço

Neste capítulo iremos mostrar que soluções não-negativas de

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p \le 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+$$

são $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N_+$ sempre $\alpha \ge 0$, $1 + \alpha < p < \dfrac{\frac{\Lambda}{a}N(\alpha+1)+1}{\frac{\Lambda}{a}N - 1}$.

4.1 Solução fundamental no semiespaço

Iniciaremos essa seção encontrando uma solução para o operador de Pucci no semiespaço, isto é, encontraremos uma solução radial φ de

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+$$

de tal forma que se anula em $\partial(\mathbb{R}^N_+ \setminus \{0\})$. Para tal faremos uso do seguinte resultado algébrico, cujo a prova é obtida através do cálculo direto, ver (LEONI, 2012) Lema 2.1.

Lema 4.1. *Sejam $v, w \in \mathbb{R}^N$ vetores unitários e, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, considere a matriz simétrica*

$$A = av \otimes v + bw \otimes w + c(v \otimes w + w \otimes v) + dI_N,$$

onde $v \otimes w$ denota a matriz $N \times N$ cuja as entradas-i, j são $v_i w_j$. Então os autovalores de A são:

- *d, com multiplicidade (ao menos) $N - 2$ e autoespaço dado por $\langle v, w\rangle^\perp$;*
- *$d + \frac{a+b+2cv\cdot w \pm \sqrt{(a+b+2cv\cdot w)^2 + 4(1-(v\cdot w)^2)(c^2-ab)}}{2}$, que são simples (se diferentes de d).*

Em particular, se ou $c^2 = ab$ ou $(v \cdot w)^2 = 1$, então os autovalores são d que tem multiplicidade $N - 1$, e $d + a + b + 2cv \cdot w$, que é simples.

Observação: *Vamos explicitar que o radical que aparece na expressão dos autovalores acima é não-negativa, desde que*

$$
\begin{aligned}
(a+b+2cv\cdot w)^2+4(1-(v\cdot w)^2)(c^2-ab) &= (a-b)^2+4cv\cdot w(a+b)+4c^2+4(v\cdot w)^2ab \\
&\geq (v\cdot w(a-b))^2+4cv\cdot w(a+b)+4c^2+4(v\cdot w)^2ab \\
&= (v\cdot w(a+b)+2c)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Teorema 4.1. *Para quaisquer $\Lambda \geq a > 0$ fixos, a função*

$$\varphi(x) = \frac{x_N^{\frac{\Lambda}{a}}}{|x|^{\frac{\Lambda}{a}(N+1)-1}}$$

satisfaz, em um sentido clássico,

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) \geq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N_+.$$

Prova: Seja $\rho = |x|$ e $\varphi = \dfrac{x_n^\alpha}{\rho^\beta}$ para $\alpha, \beta > 0$ observe que

$$\varphi_{x_i} = \begin{cases} -\beta\rho^{-\beta-2}x_N^{\alpha+1} + \alpha\rho^{-\beta}x_N^{\alpha-1} & \text{, se} \quad i = N \\ -\beta\rho^{-\beta-2}x_i x_N^\alpha & \text{, se} \quad i \neq N \end{cases}$$

e

$$\varphi_{x_i x_j} = \begin{cases} \dfrac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left[\beta(\beta+2)\rho^{-2}x_N^2 + \alpha(\alpha-1)\rho^2 x_N^{-2} - 2\alpha\beta - \beta\right] & \text{, se} \quad j = N \\ \dfrac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left[-\beta + \beta(\beta+2)\rho^{-2}x_i x_j\right] & \text{, se} \quad j \neq N \end{cases}$$

consequentemente

$$D^2\varphi(x) = \frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left[\beta(\beta+2)\frac{x}{\rho}\otimes\frac{x}{\rho} + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 e_N\otimes e_N - 2\alpha\beta - \beta I_N\right].$$

Portanto

$$D^2\varphi(x) = \frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left[\beta(\beta+2)\frac{x}{\rho}\otimes\frac{x}{\rho} + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 e_N\otimes e_N - 2\frac{\alpha\beta\rho}{x_N}\left(\frac{x}{\rho}\otimes e_N + e_N\otimes\frac{x}{\rho}\right) - \beta I_N\right],$$

onde $e_N = (0,1) \in \mathbb{R}^N_+$ e de acordo com o Lema 4.1 os autovalores $\mu_1, \ldots \mu_N$ de $D^2\varphi(x)$ são

$$\mu_1 = \frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left(\frac{\beta(\beta-2\alpha) + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 + \sqrt{\mathcal{D}}}{2}\right),$$

$$\mu_2 = \frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left(\frac{\beta(\beta-2\alpha) + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - \sqrt{\mathcal{D}}}{2}\right)$$

e

$$\mu_i = -\beta \frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}} \quad \text{com} \quad 3 \leq i \leq N,$$

onde

$$\mathcal{D} = \left[\beta(\beta - 2\alpha + 2) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]^2 + 4\left[1 - \left(\frac{x_N}{\rho}\right)^2\right]\left[\left(-\alpha\beta\frac{\rho}{X_N}\right)^2 - \beta(\beta+2)\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]$$

isto é,

$$\mathcal{D} = \left[\beta(\beta - 2\alpha + 2) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]^2 + 4\alpha\beta(\beta - 2\alpha + 2)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\left[1 - \left(\frac{x_N}{\rho}\right)^2\right].$$

Foi observado que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \left[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 + 2\beta\right]^2 + 4\alpha\beta(\beta - 2\alpha + 2)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - 4\alpha\beta(\beta - 2\alpha + 2)\\
&= \left[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)\right]^2 + 4\beta\left[\beta(\beta - 2\alpha) + 2(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right] + 4\beta^2\\
&+ 4\alpha\beta(\beta - 2\alpha + 2)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - 4\alpha\beta(\beta - 2\alpha + 2)\\
&= \left[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)\right]^2 + 4\beta[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\\
&+ \beta + \alpha(\beta - 2\alpha + 2)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - \alpha(\beta - 2\alpha + 2)]\\
&= \left[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)\right]^2 + 4\beta\left[\beta(\beta - 2) + \beta - \alpha(\beta - 2\alpha + 2) + \alpha\left(\frac{\rho}{x_N}\right)(\beta - \alpha + 1)\right]\\
&= \left[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)\right]^2 + 4\beta(\beta - 2\alpha + 1)\left[\beta - 2\alpha + \alpha\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{D} = \left[\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha(\alpha - 1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)\right]^2 + 4\beta(\beta - \alpha + 1)\left[\beta - 2\alpha + \alpha\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]. \tag{4.1}$$

Portando, para $\beta \geq \alpha > 0$ obtemos $\mu_1 \geq 0$ e $\mu_i \leq 0$ para $2 \leq i \leq N$. De fato, observe que $\rho \geq 0$ e $x_N \in (0, +\infty)$ então

$$\mu_i = -\beta \frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}} \leq 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq N.$$

Como $\beta \geq \alpha$ obtemos $4\beta(\beta - \alpha + 1) \geq 0$ e do fato que $\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \geq 1$ podemos notar que

$$\beta - 2\alpha + \alpha\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \geq \beta - \alpha \geq 0,$$

dessa maneira

$$\begin{aligned}
\beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2-\sqrt{\mathcal{D}} &\le \beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&\quad-\beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&\quad-\sqrt{4\beta(\beta-\alpha+1)\left[\beta-2\alpha+\alpha\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]} \\
&=-\sqrt{4\beta(\beta-\alpha+1)\left[\beta-2\alpha+\alpha\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]} \\
&\le 0,
\end{aligned}$$

consequentemente

$$\mu_2=\frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left(\frac{\beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2-\sqrt{\mathcal{D}}}{2}\right)\le 0.$$

Agora observe que de (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &\ge \left[\beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]^2 \\
&=\beta^2(\beta-2\alpha)^2+2\beta\alpha(\beta-2\alpha)(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2+\alpha^2(\alpha-1)^2\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^4 \\
&\ge \beta^2(\beta-2\alpha)^2+2\beta\alpha(\beta-2\alpha)(\alpha-1)+\alpha^2(\alpha-1)^2 \\
&\ge \alpha^2(\alpha-2\alpha)^2+2\alpha^2(\alpha-2\alpha)(\alpha-1)+\alpha^2(\alpha-1)^2 \\
&=\alpha^2\left(\alpha^2-2\alpha(\alpha-1)+(\alpha-1)^2\right) \\
&=\alpha^2,
\end{aligned}$$

o que implica em $\sqrt{\mathcal{D}}\ge\alpha$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2+\sqrt{\mathcal{D}} &\ge \beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)+\sqrt{\mathcal{D}} \\
&\ge \alpha(\alpha-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)+\sqrt{\mathcal{D}} \\
&\ge -\alpha+\sqrt{\mathcal{D}} \\
&\ge 0,
\end{aligned}$$

dessa maneira

$$\mu_1=\frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\left(\frac{\beta(\beta-2\alpha)+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2+\sqrt{\mathcal{D}}}{2}\right)\ge 0,$$

por conseguinte, $\mu_1 \geq 0$ e $\mu_i \leq 0$ para $2 \leq i \leq N$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) &= a\mu_1 + \Lambda\sum_{i=2}^{N}\mu_i \\
&= a\left(\frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+2}}\right)\left[\frac{\beta^2 + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{\mathcal{D}}}{2}\right] \\
&+ \Lambda\left(\frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+1}}\right)\left[\frac{\beta^2 + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - 2\alpha\beta - \sqrt{\mathcal{D}}}{2}\right] - \Lambda\beta\frac{x_N^2}{\rho^{\beta+2}}(N-2),
\end{aligned}$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2\varphi) =&a\left(\frac{x_N^\alpha}{\rho^{\beta+1}}\right)\Big[\beta\left(\frac{1}{2}(\beta-2\alpha)\left(\frac{\Lambda}{a}+1\right) - \frac{\Lambda}{a}(N-2)\right) \\
&+ \alpha\frac{(\alpha-1)}{2}\left(\frac{\Lambda}{a}+1\right)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda}{a}-1\right)\sqrt{\mathcal{D}}\Big].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nós podemos estimar que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathcal{D}} &\leq \left[\beta(\beta-2\alpha+2) + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]^2 + 4\alpha\beta(\beta-2\alpha+2)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&= \beta^2(\beta-2\alpha+2)^2 + \alpha^2(\alpha-1)^2\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^4 + 2\beta\alpha(\beta-2\alpha+2)(\alpha-1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&+ 4\alpha\beta(\beta-2\alpha+2)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&= \beta^2(\beta-2\alpha+2)^2 + \alpha^2(\alpha-1)^2(\frac{\rho}{x_N})^4 + 2\alpha\beta(\beta-2\alpha+2)(\alpha+1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&\leq \beta^2(\beta-2\alpha+2)^2 + \alpha^2(\alpha+1)^2(\frac{\rho}{x_N})^4 + 2\alpha\beta(\beta-2\alpha+2)(\alpha+1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
&= \left[\beta(\beta-2\alpha+2) + \alpha(\alpha+1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sqrt{\mathcal{D}} \leq \left[\beta(\beta-2\alpha+2) + \alpha(\alpha+1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right]^2.$$

Portanto substituindo a desigualdade acima em (4.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi) \geq \beta\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda}{a}+1\right)(\beta-2\alpha)-\frac{\Lambda}{a}(N-2)\right]+\frac{\alpha}{2}(\alpha-1)\left(\frac{\Lambda}{a}+1\right)(\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
+\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda}{a}-1\right)\left[-\beta(\beta-2\alpha+2)-\alpha(\alpha+1)\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2\right] \\
=\beta\left[\frac{1}{2}(\beta-2\alpha)\left(\frac{\Lambda}{a}+1-\frac{\Lambda}{a}+1\right)-\frac{\Lambda}{a}N+2\frac{\Lambda}{a}-\frac{\Lambda}{a}+1\right] \\
+\alpha\left[\frac{\Lambda}{2a}(\alpha-1-\alpha-1)+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right]\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2 \\
=\beta\left[\beta-2\alpha-\frac{\Lambda}{a}(N-1)\right]+\alpha\left[\alpha-\frac{\Lambda}{a}\right]\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2,
\end{aligned}$$

o que significa

$$\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi) \geq \beta\left[\beta-2\alpha-\frac{\Lambda}{a}(N-1)\right]+\alpha\left[\alpha-\frac{\Lambda}{a}\right]\left(\frac{\rho}{x_N}\right)^2.$$

Escolhendo $\alpha = \frac{\Lambda}{a} \geq 1$ e $\beta = \frac{\Lambda}{a}(N-1)+2\alpha-1 = \frac{\Lambda}{a}(N+1)-1 \geq \alpha$, concluímos que

$$\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi) \geq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+.$$

■

No lema a seguir iremos mostrar que soluções de $\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) \leq 0$, estão por cima da solução fundamental.

Lema 4.2. *Se $u > 0$ é solução de $\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) \leq 0$ em $\mathbb{R}^N_+ \setminus B_{r_0}(0)$, então existe $c > 0$ tal que $u \geq c\varphi$ em $\mathbb{R}^N_+ \setminus B_{r_0}(0)$, onde φ é a solução fundamental.*

Prova: Seja

$$\rho^+(r_0) = \inf_{E(r_0)} \frac{u}{\varphi},$$

onde $E(r_0) = \mathbb{R}^N_+ \cap \left(B_{2r_0}(0) \setminus B_{r_0}(0)\right)$, definindo

$$v := \rho^+(r_0)\varphi$$

podemos notar que

$$\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2v) = \rho^+(r_0)\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2\varphi) \geq 0.$$

Como $\varphi = 0$ em $\{x_N = 0; |x| \neq 0\}$, obtemos $v = 0$ em $\{x_N = 0; |x| \neq 0\}$, além disso sabemos que $\varphi \to 0$ quando $|x| \to \infty$, por conseguinte $v \to 0$ sempre que $|x| \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe um $R > 0$ grande o suficiente tal que

$$\varepsilon > v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap B^c_R(0).$$

Então
$$u + \varepsilon > v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap \partial B_R(0)$$
e
$$u + \varepsilon > v \quad \text{em} \quad \{x_N = 0; |x| \neq 0\},$$
além disso
$$u = \frac{u}{\varphi}\varphi$$
o que implica
$$u \geq \rho^+(r_0)\varphi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap (B_{2r_0}(0) \setminus B_{r_0}(0)),$$
dessa maneira
$$u \geq \rho^+(r_0)\varphi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap \partial B_{r_0}(0),$$
consequentemente
$$u + \varepsilon \geq v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap \partial B_{r_0}(0).$$
Logo,
$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2(u+\varepsilon)) = \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u) \leq \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap (B_R(0) \setminus B_{r_0}(0)), \\ u + \varepsilon \geq v & \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap (\partial B_R(0) \cup \partial B_{r_0}(0) \cup \{x_N = 0; |x| \neq 0\}), \end{cases}$$
segue do Corolário 2.1 (Princípio da Comparação) que
$$u + \varepsilon \geq v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \cap (B_R(0) \setminus B_{r_0}(0)),$$
fazendo $R \longrightarrow \infty$ podemos tomar $\varepsilon \longrightarrow 0$ e dessa maneira
$$u \geq v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \setminus B_{r_0}(0),$$
segue do Lema 2.3 (Lema de Hopf) que existe uma constante $c > 0$ tal que $\rho^+(r_0) \geq c$. Portanto $u \geq c\varphi$ em $\mathbb{R}^N_+ \setminus B_{r_0}(0)$.

■

4.2 Teorema do tipo Liouville para operadores degenerados no semiespaço

Nesta seção entregaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.2. *(Princípio de Liouville) Seja* $p^* = \dfrac{\frac{\Lambda}{a}N(\alpha+1)+1}{\frac{\Lambda}{a}N - 1}$. *Se* $u \geq 0$ *é uma solução de*
$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2) + u^p \leq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N_+ \tag{4.3}$$
onde $1 + \alpha < p < p^*$, *então* $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N_+$.

Prova: Sabemos da demonstração do teorema 3.3 que se $u \geq 0$ e $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^N$, então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$, em particular conseguimos o mesmo resultado para o caso do $\mathbb{R}^N_+$. Podemos supor então que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N_+$, e nesse caso considere a solução fundamental

$$\varphi(x) = \frac{x_N^\gamma}{|x|^\zeta}$$

onde $\gamma = \frac{\Lambda}{a}$, $\zeta = \frac{\Lambda}{a}(N+1) - 1$, observe que para $\lambda \geq 0$

$$\varphi(x) = \frac{\lambda^\gamma x_N^\gamma}{\lambda^\zeta |x|^\zeta} = \frac{\lambda^{\gamma-\zeta} x_N^\gamma}{|x|^\zeta} = \lambda^{\gamma-\zeta}\varphi(x).$$

Considere o *scalling*

$$u_\lambda(x) = \lambda^\theta u(\lambda x),$$

onde $\theta = \dfrac{\alpha+2}{p-\alpha-1}$, então

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha = \lambda^{(\theta+1)\alpha}|\nabla u(\lambda x)|^\alpha$$

e

$$\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) = \lambda^{\theta+2}\mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x))$$

dessa maneira

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) = \lambda^{(\theta+1)\alpha+\theta+2}|\nabla u(\lambda x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x)).$$

Somando $(u_\lambda(x))^p$ obtemos

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p = \lambda^{(\theta+1)\alpha+\theta+2}|\nabla u(\lambda x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x)) + \lambda^{\theta p}\,(u(\lambda x))^p,$$

como

$$\begin{aligned}(\theta+1)\alpha+\theta+2 &= \left(\frac{\alpha+2}{p-\alpha-1}+1\right)\alpha + \frac{\alpha+2}{p-\alpha-1}+2\\ &= \left(\frac{1+p}{p-\alpha-1}\right)\alpha + \frac{2p-\alpha}{p-\alpha-1}\\ &= \frac{(\alpha+2)p}{p-\alpha-1}\\ &= \theta p,\end{aligned}$$

obtemos que

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p = \lambda^{(\theta+1)\alpha+\theta+2}\left[|\nabla u(\lambda x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u(\lambda x)) + (u(\lambda x))^p\right],$$

e consequentemente

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) + (u_\lambda(x))^p \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+.$$

Sabemos que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N_+$, então do Lema 4.2 existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$u \geq c_0\varphi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \setminus B_1(0)$$

em particular, para todo $\lambda \geq 1$ segue que

$$u \geq c_0 \frac{x_N^\gamma}{|x|} \quad \mathbb{R}_+^N \cap (B_{2\lambda}(0) \setminus B_\lambda(0)),$$

usando o *scalling*, obtemos

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) &= \lambda^\theta u(\lambda x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}_+^N \cap (B_2(0) \setminus B_1(0)) \\ &\geq \lambda^{\theta+\gamma-\zeta} c_0 \frac{x_N^\gamma}{|x|^\zeta} \\ &\geq \lambda^{\theta+\gamma-\zeta} c_0 \frac{x_N^\gamma}{2^\zeta} \\ &\geq \lambda^{\theta+\gamma-\zeta} c_1 x_N^\gamma. \end{aligned}$$

Em particular,

$$u_\lambda(x) \geq \lambda^{\theta+\gamma-\zeta} c_1 \quad \text{em} \quad \Sigma \cap \mathbb{R}_+^N \cap (B_2(0) \setminus B_1(0))$$

onde Σ é a parte superior da calota (isto é, $x_i \geq 1 \quad \forall i \in [1, N]$), dessa maneira

$$(u_\lambda(x))^{p-1-\alpha} \geq \lambda^{(\theta+\gamma-\zeta)(p-1-\alpha)} c_2$$

o que implica que

$$-(u_\lambda(x))^{p-1-\alpha} \leq -\lambda^{(\theta+\gamma-\zeta)(p-1-\alpha)} c_2.$$

Observe que $\theta + \gamma - \zeta > 0$, de fato

$$\frac{\alpha+2}{p-\alpha-1} + \frac{\Lambda}{a} - \left[\frac{\Lambda}{a}(N+1) - 1\right] > 0,$$

então

$$\frac{\alpha+2}{p-\alpha-1} > \frac{\Lambda}{a}N - 1,$$

portanto

$$\alpha + 2 > (p - \alpha - 1)\left(\frac{\Lambda}{a} - 1\right)$$

e por conseguinte

$$\alpha + 2 + \alpha\left(\frac{\Lambda}{a} - 1\right) + \left(\frac{\Lambda}{a} - 1\right) > p\left(\frac{\Lambda}{a} - 1\right)$$

Dessa maneira

$$\alpha\frac{\Lambda}{a}N + \frac{\Lambda}{a}N + 1 > p\left(\frac{\Lambda}{a} - 1\right)$$

ou seja,

$$p^* = \frac{\frac{\Lambda}{a}N(\alpha+1) + 1}{\frac{\Lambda}{a}N - 1} > p.$$

Sabemos que

$$|\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}_{a,\Lambda}^-(D^2 u_\lambda(x)) \leq -(u_\lambda(x))^p = -(u_\lambda(x))^{p-1-\alpha}(u_\lambda(x))^{1+\alpha},$$

logo

$$\begin{cases} |\nabla u_\lambda(x)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_\lambda(x)) & \leq -(u_\lambda(x))^{1+\alpha} c_2 \lambda^{(\theta+\gamma-\zeta)(p-1-\alpha)} \quad \text{em} \quad \Sigma \cap \mathbb{R}^N_+ \cap (B_2(0) \setminus B_1(0)), \\ u_\lambda(x) & > 0 \quad \text{em} \quad \partial\left(\Sigma \cap \mathbb{R}^N_+ \cap (B_2(0) \setminus B_1(0))\right), \end{cases}$$

e consequentemente

$$c_2 \lambda^{(\theta+\gamma-\zeta)(p-1-\alpha)} \in \{\lambda \in \mathbb{R}; \exists v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, |\nabla v|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v) + \lambda v^{\alpha+1} \leq 0\}.$$

Portanto, $c_2 \lambda^{(\theta+\gamma-\zeta)(p-1-\alpha)} \leq \overline{\lambda}$ e como $(\theta + \gamma - \zeta)(p - 1 - \alpha) > 0$ podemos fazer

$$(\theta + \gamma - \zeta)(p - 1 - \alpha) \to +\infty$$

o que é uma contradição pois $\overline{\lambda} < +\infty$. Concluindo assim que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N_+$.

$\blacksquare$

5
Aplicação para os Teoremas do tipo Liouville

Neste capítulo iremos mostrar que soluções do problema

$$\begin{cases} |\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p & = 0 \quad \text{em} \quad B_1(0) \\ u & = 0 \quad \text{em} \quad \partial B_1(0) \end{cases}$$

são limitadas por uma constante C que depende apenas de p. A demonstração apresentada aqui seguem as ideias que aparecem em (GIDAS; SPRUCK, 1981).

Teorema 5.1. *Seja $u > 0$ uma solução no sentido da viscosidade de*

$$\begin{cases} |\nabla u|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{a,\Lambda}(D^2u) + u^p & = 0 \quad em \quad B_1(0), \\ u & = 0 \quad em \quad \partial B_1(0), \end{cases}$$

com $1 + \alpha < p < p^*$, onde $p^* = \min\left\{\frac{\frac{\Lambda}{a}N(\alpha+1)+1}{\frac{\Lambda}{a}N-1}, \frac{\alpha(\beta-1)+\beta}{\beta-2}\right\}$, então existe uma constante C que depende somente de p tal que

$$u(x) \leq C.$$

Prova: Sejam (u_k) uma sequência de soluções e (p_k) uma sequência de pontos em $B_1(0)$ tais que

$$M_k := \sup_{B_1(0)} u_k(x) = u_k(p_k) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

Sabemos que $p_k \longrightarrow p \in \overline{B_1(0)}$ sempre que $k \longrightarrow +\infty$, e a partir de agora faremos a prova em dois casos distintos.
1°caso: Assuma que $p \in B_1(0)$. Seja $2d = dist(p, \partial B_1(0))$, considere (λ_k) uma sequência de números positiva a ser definida e $y = \dfrac{x - p_k}{\lambda_k}$. Defina a função *scaled* ("*blow up*") como sendo

$$v_k(y) = \lambda_k^{\theta} u_k(x)$$

onde $\theta = \frac{\alpha+2}{p-\alpha-1}$. Escolhendo λ_k tal que $\lambda_k^\theta = \dfrac{1}{M_k}$, como $M_k \to +\infty$, obtemos $\lambda_k \to 0$ quando $k \to +\infty$.

Temos que u está definida em B_1, então para k grande o suficiente $v_k(y)$ está bem definida em $B_{d/\lambda_k}(0)$. De fato, como $y = \frac{x-p_k}{\lambda_k}$ segue que $x - p_k = \lambda_k y$ e se $y \in B_{d/\lambda_k}(0)$ então

$$|x - p_k| \leq \lambda_k \frac{d}{\lambda_k}$$

ou seja,

$$|x - p_k| \leq d.$$

Observe também que para k grande o suficiente $|p_k - p| < \dfrac{d}{2}$, dessa maneira

$$|x - p| \leq |x - p_k| + |p_k - p| < d + \frac{d}{2}$$

isto é, se $y \in B_{d/\lambda_k}(0)$, então $x \in B_{3d/2}(0) \subset B_1(0)$, o que significa v_k está bem definida.

Agora note que

$$v_k(0) = \lambda_k^\theta u_k(p_k) = \lambda_k^\theta M_k = 1,$$

e como $M_k = \sup\limits_{B_1(0)} u_k(x)$ obtemos $\sup\limits_{B_{d/\lambda_k}(0)} v_k = v_k(0) = 1$.

Observe também que podemos escrever $x = \lambda_k y + p_k$ e assim

$$\nabla v_k(y) = \lambda_k^{\theta+1} \nabla u_k(x) \quad \text{e} \quad D^2 v_k(y) = \lambda_k^{\theta+2} D^2 u_k(x),$$

e dessa maneira

$$|\nabla v_k(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_k(y)) + v_k^p(y) = \lambda_k^{(\theta+1)\alpha+\theta+2} |\nabla u_k|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_k) + \lambda_k^{\theta p} u_k^p.$$

Como

$$\begin{aligned}
(\theta+1)\alpha + \theta + 2 &= \left(\frac{\alpha+2}{p-\alpha-1} + 1\right)\alpha + \frac{\alpha+2}{p-\alpha-1} + 2 \\
&= \left(\frac{1+p}{p-\alpha-1}\right)\alpha + \frac{2p-\alpha}{p-\alpha-1} \\
&= \frac{(\alpha+2)p}{p-\alpha-1} \\
&= \theta p,
\end{aligned}$$

temos que

$$|\nabla v_k(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_k(y)) + v_k^p(y) = \lambda_k^{\theta p} \left(|\nabla u_k|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 u_k) + u_k^p\right),$$

portanto

$$\begin{cases} |\nabla v_k(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_k(y)) + v_k^p(y) &= 0 \quad \text{em} \quad B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0), \\ \qquad v_k(0) = 1. \end{cases}$$

Observe que

$$|v_k(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_k(y)) = -v_k^p(y)$$

com $|v_k| \leq 1$, então pela teoria de regularidade, ver Teorema 1.1 em (BIRINDELLI; DEMENGEL, 2015),

$$v_k \in C^{1,\alpha}(B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0))$$

e assim

$$\|v_k\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\left(\|v_k\|_\infty + \|v_k^p\|_\infty\right) \leq 2C.$$

Dessa forma v_k é equicontínua e uniformemente limitada, então pelo Teorema de Arzela-Ascoli v_k converge uniformemente localmente para v_0. Dessa maneira podemos repetir o processo e conseguir esse resultado para uma bola tão grande quanto se queira, por conseguinte podemos fazer $k \to +\infty$ e assim $\lambda_k \to 0$ e, por estabilidade, ver Corolário 2.1 em (BIRINDELLI; DEMENGEL, 2015), consequentemente obter

$$\begin{cases} |\nabla v_0(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_0(y)) + v_0^p(y) & = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ v_0(0) = 1. \end{cases}$$

Porém pelo Teorema 3.3 segue que $v_0 \equiv 0$ o que é uma contradição pois $v_0(0) = 1$.

2°caso: Assuma que $p \in \partial B_1(0)$. Definimos $v_k(y) = \lambda_k^\theta u_k(x)$ e a sequência (λ_k) tal que $\lambda_k^\theta M_k = 1$. Para k grande o suficiente v_k está bem definida em $(B_{\delta/\lambda_k}(p) \cap \mathbb{R}^N_+) \cap \overline{B_1}(0)$ para algum $\delta > 0$. De fato, se $y \in (B_{\delta/\lambda_k}(p) \cap \mathbb{R}^N_+) \cap \overline{B_1}(0)$, como $x - p_k = \lambda_k y$ então

$$|x - p_k| = |\lambda_k y| \leq \lambda_k \frac{\delta}{\lambda_k},$$

dessa maneira

$$|x - p| \leq |x - p_k| + |p_k - p|$$

e como $p_k \to p$ podemos tomar k grande o suficiente tal que $|p_k - p| < \delta/2$, então

$$|x - p| < \frac{3\delta}{2}$$

isto é, se $y \in (B_{\delta/\lambda_k}(p) \cap \mathbb{R}^N_+) \cap \overline{B_1}(0)$ então $x \in (B_{3\delta/2}(p) \cap \mathbb{R}^N_+) \cap \overline{B_1}(0) \subset \mathbb{R}^N_+ \cap \overline{B_1}$, o que significa que v_k está bem definida. Agora note que

$$v_k(0) = \lambda_k^\theta u_k(p_k) = \lambda_k^\theta M_k = 1,$$

como $M_k = \sup\limits_{B_1(0)} u_k(x)$ obtemos $\sup\limits_{B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)} v_k = v_k(0) = 1$, além disso de maneira similar ao caso 1°, sabemos que v_k satisfaz

$$\begin{cases} |\nabla v_k(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_k(y)) + v_k^p(y) & = 0 \quad \text{em} \quad (B_{\frac{\delta}{\lambda_k}}(p) \cap \mathbb{R}^N_+) \cap \overline{B_1}(0), \\ v_k(0) = 1. \end{cases}$$

Pela teoria de regularidade, ver Teorema 1.1 em (BIRINDELLI; DEMENGEL, 2015), temos

$$v_k \in C^{1,\alpha}((B_{\frac{\delta}{\lambda_k}}(p) \cap \mathbb{R}^N_+) \cap \overline{B_1}(0))$$

e

$$\|v_k\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\left(\|v_k\|_{L^\infty} + \|v_k^p\|_{L^\infty}\right) \leq 2C,$$

dessa forma v_k é equicontinua e uniformemente limitada. Logo, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, v_k converge uniformemente localmente para v_0. Dessa maneira podemos repetir o processo e conseguir esse resultado para uma bola tão grande quanto se queira, por conseguinte podemos fazer $k \longrightarrow +\infty$ e assim $\lambda_k \longrightarrow 0$ e consequentemente

$$\begin{cases} |\nabla v_0(y)|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,\Lambda}(D^2 v_0(y)) + v_0^p(y) \quad = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+, \\ \qquad\qquad v_0(0) = 1. \end{cases}$$

Porém pelo Teorema 4.2 segue que $v_0 \equiv 0$ o que é uma contradição pois $v_0(0) = 1$.

■

Referências

ARMSTRONG, S. N. Principal eigenvalues and an anti-maximum principle for homogeneous fully nonlinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, v. 246, n. 7, p. 2958–2987, 2009. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.10.026>. Citado 3 vezes nas páginas 9, 35 e 39.

ARMSTRONG, S. N.; SIRAKOV, B. Nonexistence of positive supersolutions of elliptic equations via the maximum principle. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 36, n. 11, p. 2011–2047, 2011. ISSN 0360-5302. Citado 4 vezes nas páginas 8, 10, 23 e 47.

BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, v. 13, n. 2, p. 261–287, 2004. ISSN 0240-2963. Citado na página 47.

BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. First eigenvalue and maximum principle for fully nonlinear singular operators. *Adv. Differential Equations*, v. 11, n. 1, p. 91–119, 2006. ISSN 1079-9389. Citado na página 8.

BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. Hölder regularity of the gradient for solutions of fully nonlinear equations with sub linear first order term. Springer, Cham, v. 13, p. 257–268, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. [S.l.]: SBM, 2012. Citado na página 41.

BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, New York, 2011. xiv+599 p. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0. Citado na página 20.

CABRé, X.; CAFFARELLI, L. Fully nonlinear elliptic equations. In: *American Mathematical Society, Colloquium Publication*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 43. Citado 3 vezes nas páginas 19, 27 e 34.

CUTRí, A.; LEONI, F. On the Liouville property for fully nonlinear equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 17, n. 2, p. 219–245, 2000. ISSN 0294-1449. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0294-1449(00)00109-8>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 27 e 29.

GIDAS, B.; SPRUCK, J. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 6, n. 8, p. 883–901, 1981. ISSN 0360-5302. Citado 4 vezes nas páginas 8, 10, 23 e 72.

IMBERT, C. Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations. *J. Differential Equations*, v. 250, n. 3, p. 1553–1574, 2011. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.07.005>. Citado na página 8.

IMBERT, C.; SILVESTRE, L. $C^{1,\alpha}$ regularity of solutions of some degenerate fully non-linear elliptic equations. *Adv. Math.*, v. 233, p. 196–206, 2013. ISSN 0001-8708. Citado 3 vezes nas páginas 10, 47 e 50.

KOIKE, S. *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*. [S.l.]: Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. v. 13. viii+123 p. (MSJ Memoirs, v. 13). ISBN 4-931469-28-0. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 46.

LEONI, F. Explicit subsolutions and a Liouville theorem for fully nonlinear uniformly elliptic inequalities in halfspaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, v. 98, n. 5, p. 574–590, 2012. ISSN 0021-7824. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2012.05.003>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 62.

LIMA, E. L. *Espaços métricos*. [S.l.]: IMPA, 1993. 308 p. ISBN 978-65-990528-7-3. Citado na página 42.

PRAZERES, D. dos; TEXEIRA, E. V. Cavity problems in discontinuous media. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v. 55, 2016. Citado na página 8.

SIRAKOV, B. S. *Modern theory of nonlinear elliptic PDE*. [S.l.]: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015. iv+93 p. (Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]). 30*o* Colóquio Brasileiro de Matemática. [30th Brazilian Mathematics Colloquium]. ISBN 978-85-244-0409-2. Citado na página 26.

WINTER, N. $W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-estimates at the boundary for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations. *Z. Anal. Anwend.*, v. 28, n. 2, p. 129–164, 2009. ISSN 0232-2064. Disponível em: <https://doi.org/10.4171/ZAA/1377>. Citado na página 41.