Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação

As Conjecturas como Instrumentos de Ensino de Matemática

por

David Barreto Alves

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão-SE

Maio de 2021

Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

As Conjecturas como Instrumentos de Ensino de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.

David Barreto Alves

Orientador: André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão-SE, 31 de maio de 2021.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Alves, David Barreto

A474c As Conjecturas como Instrumentos de Ensino de Matemática / David Barreto Alves ; orientador André Vinicius Santos Dória. – São Cristóvão, 2021.
55 f.; il

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2021.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Previsão (Lógica). 3. Goldbach, conjectura de. I. Dória, André Vinicius Santos orient. II. Título.

CDU 5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA – PROMAT/PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

As Conjecturas como Instrumentos de Ensino de Matemática

por

David Barreto Alves

Aprovada pela banca examinadora:

André Vinicius Santos Doria

Prof. Dr. André Vinicius Santos Doria - UFS
Orientador

Zaqueu Al Ramos

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Filipe Dantas dos Santos

Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de maio de 2021

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço à Fonte de toda a existência, Pai de todos, por me proporcionar mais esta oportunidade na minha carreira profissional e acadêmica. Por me conceder vida, saúde, e condições para que este sonho se realizasse, e forças nos momentos difíceis.

Gratidão também à minha maravilhosa esposa, que sempre me apoiou e incentivou a realizar todos os meus objetivos, sempre estando ao meu lado nos momentos alegres e também difíceis.

Agradeço aos meus queridos pais, Ronaldo e Bernadete, por me ajudarem a ser quem sou hoje, por ter me educado, e me apoiado em tudo. E por toda luta que travaram pra permitir que eu pudesse estudar e ter aquilo que eu necessitasse.

Também sou grato aos meus queridos sogros, Luiz Carlos e Nilzete, que sempre me trataram como um filho, me apoiando e incentivando em todos os meus objetivos.

Agradeço ao meu querido irmão, Ronald, que sempre se alegrou com minhas conquistas. Seu apoio e incentivo foram muito importantes pra mim.

E também agradeço ao apoio e incentivo de minha cunhada Sara, que sempre valorizou meu potencial.

Agradeço aos meus professores do PROFMAT: Zaqueu, Evilson, André, Anderson, Lucas, Débora e Gerson, por terem contribuído bastante na minha formação profissional e acadêmica.

De modo especial também devo citar meus agradecimentos à minha amiga e Cristiane, por ter me apoiado bastante, inclusive durante a produção desta dissertação, me dando palavras de ânimo e fé. Também ao meu amigo Erivaldo, que muito me apoiou também durante o curso e à minha amiga Cínthia, que me deu muito apoio nas tarefas da escola, me permitindo ter mais tempo para me dedicar a elaboração deste trabalho.

Também não poderia deixar de agradecer aos meus outros queridos colegas do curso: Anderson, César, Marianny, Mario, Paulo, Ricardo e Robson, que caminharam comigo nesta trajetória, me incentivando e ajudando sempre que precisei. Foram inesquecíveis os momentos que estivemos juntos. Cada um foi de importância única em minha vida.

E agradeço também, de modo especial, ao professor André Vinícius, meu orientador, que me apoiou no momento que muito precisava, e muito me ajudou a chegar até este momento. E também agradeço aos membros da Banca, os professores Zaqueu e Filipe, cujas sugestões foram muito pertinentes para o aperfeiçoamento da minha dissertação.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro, permitindo-me seguir adiante na realização do meu curso.

Por fim, agradeço a todos(as) que de algum modo, direta ou indiretamente, contribuíram para esta importante realização da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

As conjecturas são fundamentais no desenvolvimento da Matemática. Cada resultado que conhecemos, inicialmente surgiu de suposições formuladas através da dedução de situações problemas, e após muita análise, eram construídas suas demonstrações. No entanto, há várias afirmações que até hoje os matemáticos ainda não conseguiram prová-las e nem refutá-las, algumas das quais com vários séculos de existência. Neste trabalho apresentamos algumas dessas conjecturas, a saber: a Conjectura de Beal, a Conjectura de Collatz, a Conjectura de Goldbach e a Conjectura de Toeplitz que, apesar de terem se mostrados extremamente complexas para demonstrá-las ou refutá-las, apresentam enunciados de simples compreensão e possuem propriedades que permitem explorar um pouco alguns conceitos que podem ser usados nas aulas de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Conjectura de Beal, Conjectura de Collatz, Conjectura de Goldbach, Conjectura de Toeplitz.

Abstract

Conjectures are fundamental in the development of Mathematics. Each result that we know, it arose initially from assumptions formulated by deducting of problem situations, and after much analysis, their statements were constructed then. However, there are several claims that mathematicians have still not been able to prove or to refute them, some of them are several centuries old. In this work we present some of these conjectures, namely: Beal's Conjecture, Collatz's Conjecture, Goldbach's Conjecture and Toeplitz's Conjecture in which, although they have proved to be extremely complex to demonstrate or to refute them, they present simple comprehension statements and have properties that allow us to explore a few concepts that can be used in Elementary and High school Mathematics classes.

Keywords: Mathematics teaching; Beal's conjecture, Collatz's conjecture, Goldbach's conjecture, Toeplitz's Conjecture.

Sumário

Introdução

Nas últimas décadas, muito se tem falado sobre novas metodologias para o ensino de Matemática. Antes, o famoso "siga conforme o modelo" era considerado o método ideal para se aprender conteúdos matemáticos. Porém, no decorrer dos anos, à medida que os novos desafios do cotidiano interferiam na sociedade, notou-se que os antigos métodos de ensino acabavam se tornando ineficazes diante de uma nova geração de alunos, dos quais é comum ouvir perguntas como: "para que serve esse assunto?", "eu vou usar isso na minha vida?". Tem sido cada vez mais difícil despertar o interesse do estudante para o que se é ensinado em aula.

A História nos mostra que, desde o início, a matemática foi se desenvolvendo a partir de situações concretas do cotidiano das pessoas, seja para determinar a quantidade de animais do rebanho ou seja para definir o tamanho de um terreno. Por exemplo, a utilização de pedras na contagem do rebanho, onde cada pedra era associada a uma cabeça do rebanho; podemos citar também o surgimento do comércio, onde introduz-se as medidas de massa, comprimento, etc. Com o tempo, à medida que natureza dos problemas aumentavam, a matemática foi ganhando uma linguagem mais sofisticada, e passou a não depender apenas de situações concretas do cotidiano, mas também passou a lidar com situações puramente abstratas, onde as conjecturas passaram a ter um papel importante no desenvolvimento da Matemática, pois a sua característica desafiadora despertava o interesse de muitos matemáticos durante séculos. Destas, podemos destacar a Conjectura de Beal, a Conjectura de Collatz, a Conjectura de Goldbach e a Conjectura de Toeplitz. As conjecturas são afirmações ainda não provadas, estabelecidas a partir de padrões, no entanto, algumas delas continuam sendo conhecidas como conjecturas apesar de já terem sido provadas.

Assim, esse trabalho tem por objetivo apresentar as conjecturas como ferramenta de ensino de matemática, pois através delas pode-se instigar a curiosidade do estudante para desenvolver o questionamento e argumentação matemática. Em seguida apresentamos algumas aplicações para o ensino básico, que servem como sugestões de atividades. O Capítulo 1 tem o objetivo de apresentar as conjecturas, suas propriedades, um breve histórico e sua importância no desenvolvimento da Matemática. No Capítulo 2 apresentamos algumas atividades que têm por objetivo aplicar no ensino básico cada conjectura abordada no Capítulo 1, de modo que o aluno possa desenvolver a habilidade de, através da observação de padrões, elaborar conjecturas e desenvolver a argumentação matemática. A metodologia utilizada é de Resolução de Problemas, onde propomos sequências didáticas que permita ao aluno chegar ao enunciado da conjectura.

Capítulo 1

Conjecturas

Apresentaremos algumas Conjecturas, os respectivos históricos e alguns resultados que servem de base para demonstração total ou parcial de alguma delas. Contudo antes exploraremos o fato de como as conjecturas ajudam no desenvolvimento da matemática e do ensino.

1.1 A importância na matemática e no ensino

Desde a antiguidade, os seres humanos têm buscado significar a realidade, as suas experiências do cotidiano, seja relatar o sucesso de caça, da plantação, da colheita e do comércio. Com isso desenvolveram a linguagem criando símbolos para expressar o que desejavam transmitir, e daí surgiu a escrita. Assim também a Matemática foi se desenvolvendo, com sua linguagem peculiar, ajudando a explicar fenômenos naturais, como também na contagem de objetos, produtos, tamanho de terras, etc. Inicialmente, com a contagem de dedos ou pedras, riscos desenhados em cavernas; até chegar em símbolos que permitiam representar grandes valores e quantidades. Cada sociedade desenvolvia sua forma de representar os números, até que poucos séculos atrás, a escrita matemática foi padronizada, permitindo assim seu rápido desenvolvimento.

A Matemática, a princípio, era focada mais em lidar com situações concretas. No entanto, com o desenvolvimento da filosofia, ela passou a ganhar outras dimensões, passando a ser usada também para explicar conceitos abstratos. Nesse processo, muitos matemáticos passaram a tratar a Matemática como algo além de uma simples linguagem limitada a resolver problemas do dia-a-dia.

Assim, várias questões surgiram, que desafiavam bastante a inteligência de muitos famosos matemáticos da história e também da atualidade. Durante séculos, tais questões têm sido objetos de muito esforço na busca de soluções definitivas, mas várias destas permanecem sem prova ou algum argumento que as refute. Mesmo assim, sua natureza peculiar tem exercido um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática, pois a medida que matemáticos buscavam demonstrá-las, surgiam resultados muito importantes. Suas propriedades permitiam que novas conjecturas fossem elaboradas e várias delas demonstradas, criando assim muitos teoremas. Com isso, mesmo não havendo sucesso na demonstração de certas conjecturas, a busca por compreendê-las e demonstrá-las tem permitido descobrir novos resultados.

No ensino de Matemática, podemos observar que, nas últimas décadas, as mudanças na sociedade trouxeram novos desafios e interesses por parte das pessoas. Na década de 1970, por exemplo, um bom profissional era aquele que reproduzia fielmente aquilo que aprendeu, independente de compreender profundamente o que memorizou. Por isso muito se trabalhava as habilidades relacionadas a memorização, como podemos ver, em muitas obras didáticas, atividades onde era apresentado um exemplo e em seguida eles deveriam resolver as questões seguindo aquele modelo. Não era comum encontrar metodologias que trabalhassem mais a reflexão, o pensamento crítico, a criatividade e a argumentação.

Diante das mudanças sociais, culturais e econômicas, e do fácil acesso à informação, as novas gerações de alunos têm perdido o interesse por um ensino onde eles não veem significado para sua realidade. Assim, muitos pesquisadores vêm buscando novas estratégias que não somente despertem o interesse dos alunos, mas que também sejam eficazes no processo de aprendizagem. Entre essas estratégias podemos citar o uso de jogos, oficinas, resolução de problemas, etc. As conjecturas entram como ferramentas de bastante utilidade no ensino, pois sua natureza desafiadora permite que o aluno desperte sua curiosidade e criatividade na busca por solucioná-las. Também contribui para o desenvolvimento da habilidade de questionar, testar, argumentar e até mesmo conjecturar. O uso das conjecturas no processo de ensino permite que o aluno possa ressignificar os conhecimentos obtidos na aula, abrindo novos horizontes em sua visão de mundo.

1.2 Conjectura de Beal

A conjectura de Beal diz que,

Se $a^x + b^y = c^z$, onde a, b, c, x, y e z são inteiros positivos e $x, y, z \geq 3$, então a, b e c têm um fator primo comum, ou seja, a, b e c são divisíveis por um mesmo número primo. Em outras palavras, a equação $a^x + b^y = c^z$ não tem solução para inteiros positivos com $x, y, z \geq 3$ quando $mdc(a, b, c) = 1$.

Observação 1.1. *Uma solução de $a^x + b^y = c^z$, é uma sêxtupla (a, b, c, x, y, z), com $c, b, a, z, y, x, \in \mathbb{N}$ e $x, y, z \geq 3$.*

A Conjectura de Beal surgiu de uma proposta lançada por Andrew Beal, um matemático amador, que lançou um desafio para os matemáticos, para que eles encontrassem uma demonstração ou um contraexemplo. Esse enunciado generaliza o Último Teorema de Fermat. Apesar de ser lançada em 1993, só ficou conhecida em 1997, após a publicação do artigo Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem, por R. D. Mauldin, no periódico Notices of the American Mathematcal Society.

Pierre Fermat, matemático francês do século XVIII, tinha o hábito de criar problemas bastante desafiadores para as grande mentes matemáticas de sua época. Certa vez ele resolveu elaborar uma equação semelhante a do famoso Teorema de Pitágoras. A equação elaborada é $c^n = b^n + a^n$, onde $a, b, c, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$.

Ela foi ganhando espaço no decorrer do tempo, ganhou fama e ficou conhecido como seu último Teorema, já que ninguém conseguiu provar e nem refutar e, segundo ele, teria conseguido uma demonstração, que nunca foi descoberta até hoje.

Após seu filho descobrir suas várias anotações, foi publicado 48 observações no livro Arithmetica de Diofanto que no decorrer do tempo foram sendo provados por matemáticos e físicos. Porém, havia essa conjectura que ninguém conseguia provar ou refutar. E devido a esse problema ser extremamente desafiador, ficou conhecido como o Último Teorema de Fermat. Neste livro encontra-se o seguinte enunciado: "Descobri uma demonstração maravilhosa desta proposição que, no entanto, não cabe nas margens deste livro"(FERMAT. 1607 - 1665).

No século XX, o matemático Andrew Wiles, ao analisar as conjecturas de outros dois matemáticos, Yutaka Taniyama e Goro Shimura, percebeu que elas serviam de base para demonstrar o Último Teorema de Fermat. No entanto, precisava primeiro demonstrar essas conjecturas, e de fato conseguiu, para enfim utilizá-las na demonstração.

Em 1993, em uma conferência realizada em Sir Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences em Cambridge, ele apresentou sua demonstração para o Último Teorema de Fermat, mas havendo algumas falhas, voltou a trabalhar nela por um ano e apresentou, sua versão definitiva, uma demonstração de 200 páginas e extremamente complexa, sendo apreciada após alguns meses e recebendo assim o aval à sua demonstração.

Investigando generalizações do Último Teorema de Fermat, de 1993 a 1997, Andrew Beal (nascido em 29 de novembro de 1952), elaborou uma conjectura que ficou conhecida por seu nome: a Conjectura de Beal. Ele desafiou os matemáticos oferecendo um prêmio de 5 mil dólares, que com o passar do tempo foi aumentando até chegar em 1 milhão de dólares, para quem conseguisse demonstrar ou encontrar um contraexemplo. De acordo com ele, o objetivo do valor milionário é "inspirar as mentes jovens a refletir sobre a questão e torná-las mais interessadas no estudo da matemática".

Em 1995, dois matemáticos, Darmon e Granville, mostraram que os números inteiros positivos x, y e z da Conjectura de Beal obedecem a seguinte condição:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<1,$$

A seguir apresentaremos alguns resultados utilizados na demonstração da Conjectura de Beal, que se encontra na referência [7].

Teorema 1.1. *Dado duas equações Eq_1: $c^z = b^y + a^x$ e Eq_2: $c^m = c^m$ com soluções inteiras positivas onde $c, b, a, z, y, x, m \in \mathbb{N}$ e $m > z$, é possível determinar uma nova equação Eq_3 cujas soluções satisfaçam as equações Eq_1 e Eq_2 simultaneamente. Isso quer dizer que, se as soluções de Eq_3 não satisfizerem Eq_1, ela não possuirá soluções inteiras positivas.*

Exemplo 1.1. *Um exemplo prático disto é o Teorema de Pitágoras. Chamemos Eq_1: $c^2 = b^2 + a^2$ e Eq_2: $c^m = c^m$. Da Eq_1 temos:*

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 1 &= c^{-2}(b^2 + a^2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

e

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ c &= (b^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Substituindo (1.1) na equação Eq_2, e realizando as operações, temos:

$$\begin{aligned} c^m &= c^m \cdot 1 \\ &= c^m \cdot c^{-2}(b^2 + a^2) \\ &= c^{m-2}(b^2 + a^2) \\ &= b^2 c^{m-2} + a^2 c^{m-2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Tomando agora a equação (1.2) e elevando ambos os membros à m-ésima potência, obtemos

$$c^m = (b^2 + a^2)^{\frac{m}{2}}. \tag{1.4}$$

Agora, substituindo (1.2) em (1.3), encontramos

$$c^m = b^2 c^{m-2} + a^2 c^{m-2} = b^2 (b^2 + a^2)^{\frac{m-2}{2}} + a^2 (b^2 + a^2)^{\frac{m-2}{2}}, \tag{1.5}$$

e, igualando (1.4) e (1.5), encontramos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} c^m = (b^2 + a^2)^{\frac{m}{2}} &= b^2 (b^2 + a^2)^{\frac{m-2}{2}} + a^2 (b^2 + a^2)^{\frac{m-2}{2}} \\ &= \left[b (b^2 + a^2)^{\frac{m-2}{4}} \right]^2 + \left[a (b^2 + a^2)^{\frac{m-2}{4}} \right]^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Tomemos $m - 2$ múltiplo de 4, ou seja, $m - 2 = 4n$, com $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\dfrac{m}{2} = 2n + 1$ e $\dfrac{m-2}{4} = n$. Assim, substituindo em (1.6), obtemos

$$(b^2 + a^2)^{2n+1} = [b(b^2 + a^2)^n]^2 + [a(b^2 + a^2)^n]^2. \tag{1.7}$$

Note que a equação (1.7) possui as mesmas propriedades da equação pitagórica $C^2 = A^2 + B^2$. De fato,

$$(b^2 + a^2)^{2n+1} = (c^2)^{2n+1} = (c^{2n+1})^2 = C^2,$$

onde $A^2 = [b(b^2 + a^2)^n]^2$ e $B^2 = [a(b^2 + a^2)^n]^2$, ou seja, satisfaz a Eq_1.

Por outro lado, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
(b^2+a^2)^{2n+1} &= [b(b^2+a^2)^n]^2+[a(b^2+a^2)^n]^2\\
(c^2)^{2n+1} &= [b(c^2)^n]^2+[a(c^2)^n]^2\\
c^{4n+2} &= [bc^{2n}]^2+[ac^{2n}]^2\\
c^{4n+2} &= b^2c^{4n}+b^2c^{4n}\\
c^{4n+2} &= c^{4n}(b^2+a^2)\\
c^{4n+2} &= c^{4n}(c^2)\\
c^{4n+2} &= c^{4n+2}\\
c^m &= c^m
\end{aligned}$$

mostrando que Eq_3 implica na Eq_2. Portanto, podemos tomar Eq_3 como sendo a equação (1.7).

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos generalizar esse resultado. Tomando Eq_1: $c^z = b^y + a^x$ e Eq_2: $c^m = c^m$, com $m > z$, sendo $a, b, c, x, y, z, m \in \mathbb{N}$ e $c \neq 0$, chegaremos a

$$Eq_3\text{: } (b^y+a^x)^{xyk+1} = [b(b^y+a^x)^{xk}]^y + [a(b^y+a^x)^{yk}]^x, \tag{1.8}$$

sendo $m - z$ múltiplo de xyz.

Teorema 1.2. *A equação $c^m = b^n + a^n$, com $mdc(m, n) = 1$, admite soluções naturais.*

Exemplo 1.2. *Vamos dividir um quadrado em dois cubos. Seja a equação*

$$F^2 = E^3 + D^3. \tag{1.9}$$

Tomando a equação $c^2 = b^3 + a^3$ e multiplicando ambos os membros por $(b^3 + a^3)^m$, com $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$c^2(b^3+a^3)^m = (b^3+a^3)(b^3+a^3)^m \tag{1.10}$$

Substituindo c^2 por $b^3 + a^3$ na equação (1.10) e aplicando a distributividade no segundo membro, obtemos

$$(b^3+a^3)^{m+1} = b^3(b^3+a^3)^m + a^3(b^3+a^3)^m \tag{1.11}$$

O próximo passo agora é compararmos a equação (1.11) com a equação (1.9). Para tanto, iremos decompor m em potências de 3 e $m + 1$ em potências de 2. Para que isto seja *possível, m e $m+1$ precisam ser divisíveis por 3 e 2, respectivamente. Assim,*

$$Eq_1\text{:} \qquad m = 3k_1,$$
$$Eq_2\text{:} \qquad m+1 = 2k_2,$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Multiplicando Eq_1 por 2 e Eq_2 por 3, e somando -3 em ambos os membros de Eq_2,

$$Eq_3\text{:} \qquad 2m = 6k_1,$$
$$Eq_4\text{:} \qquad 3m = 6k_2 - 3.$$

Por fim, fazendo $Eq_4 - Eq_3$ obtemos $m = 6(k_2 - k_1) - 3 = 6k - 3$, com $k \in \mathbb{N}$ (de fato, $k_1 < k_2$, caso contrário $3m < 2m$, que é um absurdo, pois $m \in \mathbb{N}$). Daí, segue que

$$m = 6k - 3 \quad e \quad m + 1 = 6k - 2.$$

Substituindo os valores acima na equação (1.11), obtemos

$$(b^3 + a^3)^{6k-2} = b^3(b^3 + a^3)^{6k-3} + a^3(b^3 + a^3)^{6k-3},$$

que é equivalente a

$$[(b^3 + a^3)^{3k-1}]^2 = [b(b^3 + a^3)^{2k-1}]^3 + [a(b^3 + a^3)^{2k-1}]^3. \tag{1.12}$$

Das equações (1.9) e (1.12) obtemos:

$$F = (b^3 + a^3)^{3k-1}, \quad E = b(b^3 + a^3)^{2k-1} \quad e \quad D = a(b^3 + a^3)^{2k-1}, \quad com \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.3 Conjectura de Collatz

A Conjectura de Collatz foi primeiramente elaborada pelo matemático alemão Lothar Collatz, em 1937. Ela também é conhecida como conjectura de Ulam (pelo matemático polonês-americano Stanislaw Marcin Ulam), Problema de Kakutani (pelo matemático nipo-americano Shizuo Kakutani), Conjectura de Thwaites (pelo acadêmico britânico Bryan Thwaites), Algoritmo de Hasse (pelo matemático alemão Helmut Hasse), Problema de Siracusa e Conjectura $3n+1$. Essa conjectura diz que, se tomarmos um número natural n, se ele for par, dividimos por 2 até o resultado ser 1 ou outro número ímpar. Se for ímpar diferente de 1, multiplicamos por 3 e somamos 1, em seguida dividimos por dois, repetindo esse processo até o resultado final ser 1. Matematicamente, é equivalente a aplicarmos sucessivamente uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se n é par} \\ 3n+1, & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

Como exemplo, tomemos o número 13. Como ele é ímpar, multiplicamos por 3 e somamos 1:

$$13 \times 3 + 1 = 40.$$

Em seguida, dividimos por 2 sucessivamente até chegar a 1 ou a um número ímpar diferente de 1:

$$\begin{aligned} 40 \div 2 &= 20 \\ 20 \div 2 &= 10 \\ 10 \div 2 &= 5. \end{aligned}$$

Agora voltamos ao processo de multiplicar por 3 e adicionar 1:

$$5 \times 3 + 1 = 16.$$

Por fim, voltamos a dividir sucessivamente por 2:

$$\begin{aligned} 16 \div 2 &= 8 \\ 8 \div 2 &= 4 \\ 4 \div 2 &= 2 \\ 2 \div 2 &= 1 \end{aligned}$$

e chegamos ao resultado previsto.

O objetivo principal dessa Conjectura é mostrar que, ao aplicarmos $f(n)$ sucessivamente, sempre chegaremos ao número 1, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ (Figura 1.1).

Vários matemáticos tentaram resolver essa conjectura. Não encontrando solução para tal, chamaram-na de *infame*. Para Paul Erdős, "a matemática pode não estar pronta para tais problemas". Segundo Jeffrey Lagarias , um matemático da Universidade de Michigan e um especialista na conjectura de Collatz, "Este é um problema realmente perigoso. As pessoas ficam obcecadas com isso e realmente é impossível".

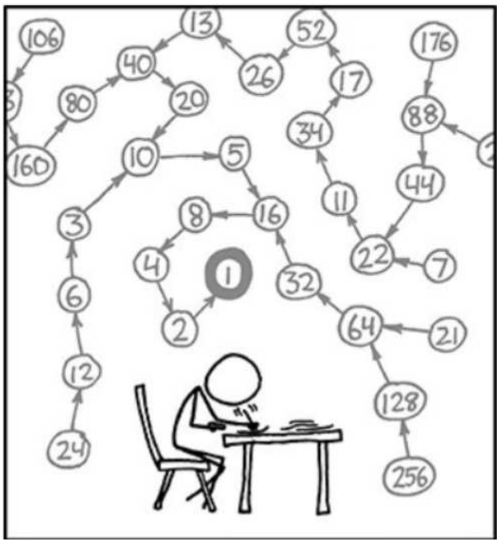


Figura 1.1: Conjectura de Collatz

Recentemente, no início de 2019, Terence Tao, um dos maiores matemáticos da atualidade, na tentativa de demonstrar a Conjectura de Collatz, ele encontrou um resultado considerado muito importante que, apesar de não provar completamente a Conjectura de Collatz, é considerada "um grande avanço em um problema que não revela seus segredos facilmente." Conforme disse Tao, "Eu não esperava resolver esse problema completamente. Mas o que fiz foi mais do que esperava." De acordo com a sua prova, a Conjectura de Collatz é "quase" verdadeira para "quase" todos os números.

Consideremos alguns números inteiros positivos, apliquemos a Conjectura de Collatz e observemos as interações geradas, começando com o número escolhido:

Números	Interações
1	1 - 4 - 2 - 1
2	2 - 1
3	3 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
4	4 - 2 - 1
5	5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
6	6 - 3 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
7	7 - 22 - 11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 - 20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
8	8 - 4 - 2 - 1
9	9 - 28 - 14 - 7 - 22 - 11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 - 20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1

Observe que, exceto o caso começando com 2, todos terminam com a sequência $4-2-1$, ou seja, sempre chegamos a uma potência de 2. Nos casos $f(n)$ com n ímpar e diferente de 1, note que o número 5 sempre antecede uma potência de 2, ou seja, encontramos a sequência $5-16-8-4-2-1$.

Quais seriam os próximos números ímpares que antecedem uma sequência formada por potências de 2? Para isto basta escrevermos a seguinte equação

$$3x+1=2^n. \tag{1.13}$$

Os valores de x na equação (1.13) serão inteiros para n par. De fato, pelo Pequeno Teorema de Fermat,

$$2^2 \equiv 1 \mod 3,$$

e, de acordo com uma propriedade da aritmética dos restos, temos que

$$(2^2)^k \equiv 1^k \mod 3,$$

ou seja,

$$2^{2k} \equiv 1 \mod 3.$$

Assim,

$$2^n \equiv 1 \mod 3,$$

onde $n=2k$, $k \in \mathbb{N}$. Daí, podemos reescrever a equação (1.13) da seguinte maneira:

$$x=\frac{4^k-1}{3}. \tag{1.14}$$

Assim, encontramos os números 1, 5, 21, 85, 341, 1365, ... como sendo números que antecedem uma potência de 2. Isso significa que, de acordo com os cálculos realizados, seja qual for o número escolhido, ao aplicarmos a Conjectura de Collatz, sempre chegaremos em algum desses números, e a partir daí chegamos a um número da forma 2^n e assim, realizando divisões sucessivas por 2, chegaremos ao resultado 1.

Chegamos, então, a conclusão de que, uma maneira de provar a validade da Conjectura Collatz, é mostrar que, qualquer que seja o número escolhido, se não for potência de 2, ao aplicarmos f sucessivamente, sempre chegaremos a um número que é solução da equação (1.14) e a partir daí, a um número da forma 2^n.

Porém, apesar de todas as tentativas de demonstração, a Conjectura de Collatz continua sem uma solução definitiva.

1.4 Conjectura de Goldbach

Dentre os problemas não resolvidos da matemática temos a conjectura de Goldbach, da Teoria dos Números, proposta pelo matemático amador prussiano Christian Goldbach. Sua primeira versão dizia que

Todo inteiro que possa ser escrito como a soma de dois primos, pode ser também escrito como a soma de quantos primos se queira, até todos os termos serem unidades.

Sua próxima afirmação dizia que

Todo inteiro maior que 2 pode ser escrito como a soma de três primos.

Euler, em resposta a carta enviada por Goldbach (Figura 1.2), onde ele apresenta várias conjecturas sobre números primos, faz menção a uma conjectura mais simples, donde teria derivado a primeira conjectura, que afirmava que

Todo inteiro par é a soma de dois primos.

Figura 1.2: Carta de Goldbach a Euler, 7 de junho de 1742.

Como na época de Goldbach o número 1 era considerado primo, observamos que em algumas situações, o número 1 era incluído na decomposição. Atualmente, o menor número primo é 2. Então, as Conjecturas de Goldbach, na convenção atual, podem ser divididas em:

- **Conjectura par de Goldbach.** Todo inteiro par maior que 2 é a soma de dois primos. Também conhecida como a Conjectura forte de Goldbach.

- **Conjectura ímpar de Goldbach.** Todo inteiro ímpar maior que 5 é a soma de três primos. Também conhecida como a Conjectura fraca de Goldbach.

O termo fraca é devido ao fato de que uma eventual demonstração da conjectura forte de Goldbach deduziria a prova da fraca.

A tabela 1.1 apresenta os 15 primeiros números pares maiores que 2 e os 15 primeiros números ímpares maiores que 5, e algumas de suas decomposições conforme a Conjectura de Goldbach.

Número Par	Decomposição	Número Ímpar	Decomposição
4	2+2	7	2+2+3
6	3+3	9	2+2+5
8	3+5	11	3+3+5
10	3+7	13	3+3+7
12	5+7	15	3+5+7
14	3+11	17	3+3+11
16	5+11	19	3+5+11
18	5+13	21	3+7+11
20	3+17	23	3+3+17
22	5+17	25	3+5+17
24	7+17	27	5+5+17
26	7+19	29	5+5+19
28	11+17	31	5+7+19
30	11+19	33	7+7+19
32	13+19	35	3+13+19

Tabela 1.1: Aplicação da Conjectura de Goldbach.

Houve várias tentativas sem sucesso de demonstrar a Conjectura de Goldbach. Inicialmente, o matemático soviético Lev Genrikhovich Shnirelman tentou prová-la usando o crivo de Brun, mas sem sucesso. Outra tentativa, apresentada por Nils Pipping em 1938, mostrou a validade da conjectura para números pares até 10^5, e posteriormente, Tomás Oliveira e Silva testou para os números pares até 4×10^{18} que, apesar de muito grande, não é suficiente para estabelecer a validade para qualquer número par maior. O resultado mais perto que se chegou foi o Teorema de Chen, do matemático Chen Jing Run.

Quanto à Conjectura fraca de Goldbach, até recentemente haviam testado sua validade somente para os números ímpares inferiores à 2×10^{1346}. Os matemáticos Godfrey Harold Hardy e John Edensor Littlewood mostraram, em 1923, que a conjectura fraca era verdadeira para números suficientemente grandes. Para isto eles utilizaram o método do círculo e assumiram como verdadeira a hipótese generalizada de Riemann (para mais detalhes, ver [3]).

Já Ivan Matvéyevich Vinogradov, em 1937, não precisou da hipótese de Riemann para chegar à mesma conclusão. Seu aluno, K. Borodzin, verificou que a conjectura fraca de Goldbach era válida para números ímpares maiores que $3^{3^{15}}$. Essa cota inferior foi reduzida para e^{3100} por Liu Ming-Chit e Wang Tian-Ze. Ela chegou a ser provada para qualquer número ímpar maior que 5 em 1997, pelos matemáticos Deshouillers, Effinger, te-Riele e Zinoviev, porém usando uma hipótese parecida com a de Riemann. Por fim, em 2013, o matemático peruano Harald Helfgott encontrou uma solução definitiva para a Conjectura Fraca de Goldbach. Em 2015 ele recebeu o Prêmio de Pesquisa Humboldt, entregue pela Fundação Alexander Van Humboldt.

1.5 Conjectura de Toeplitz

A Conjectura de Toeplitz, também conhecida como o Problema do Quadrado Inscrito, foi proposto por Otto Toeplitz em 1911, e até o momento não foi encontrada uma solução para o caso geral. A Conjectura de Toeplitz afirma:

Qualquer curva plana simples fechada contém os quatro vértices de algum quadrado.

Uma curva do plano é dita fechada simples se não possui autointerseções e se começa e termina no mesmo ponto, de maneira que, de acordo com o Teorema de Jordan, ela divide o plano em duas regiões: a externa, que é ilimitada, e a interna, que é limitada.

A seguir, apresentaremos alguns casos em que a validade da Conjectura de Toeplitz foi confirmada, ou seja, nos casos de polígonos regulares com 3, 4 e 5 lados, da circunferência e o caso da elipse.

Exemplo 1.3. *Para inscrevermos um quadrado no triângulo equilátero ABC de lado L, devemos primeiramente encontrar o ponto médio D de um dos lados, por exemplo, do lado*

BC, marcamos os pontos E e F no segmento BC de modo que

$$d(E, D) = d(F, D) = \frac{L(2\sqrt{3} - 3)}{2}$$

e traçamos perpendiculares a AB passando por E e F.

Em seguida, marcamos os pontos G e H sobre os lados AB e AC, respectivamente, onde G e H são as interseções das perpendiculares com os lados AB e AC, respectivamente (Figura 1.3). E assim, os pontos E, F, G e H são os vértices do quadrado inscrito no triângulo equilátero.

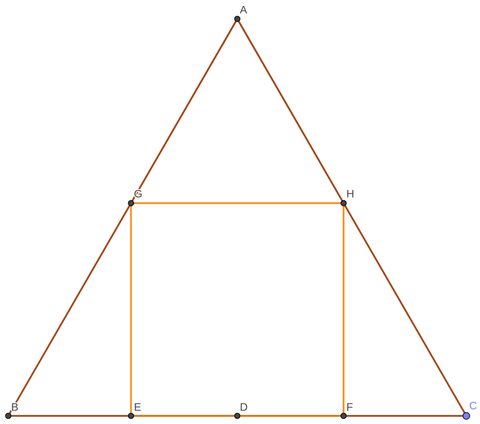


Figura 1.3: Quadrado inscrito no triângulo equilátero.

Para concluirmos que EFHG seja um quadrado, basta mostrar que $d(G, E) = d(G, H)$*. Como ABC é equilátero, temos, por semelhança de triângulos, que AGH também é equilátero (a semelhança aqui decorre do fato de que o ângulo* $\hat{A}$ *é comum aos dois triângulos e, pelo paralelismo de HG com BC, temos que* $A\hat{B}C = A\hat{G}H$*). Assim, usando a razão de semelhança, temos:*

$$\frac{d(A, D)}{d(A, D) - d(G, E)} = \frac{d(B, C)}{d(G, H)}.$$

Chamando de l *a medida do lado de AGH, para que* $d(G, E) = d(G, H) = l$*, é preciso que tenhamos*

$$\frac{L}{l} = \frac{d(A, D)}{d(A, D) - l} \tag{1.15}$$

Substituindo $d(A, D) = \frac{L\sqrt{3}}{2}$*, a altura de ABC em relação a BC, na equação (1.15), teremos:*

$$\frac{L}{l}=\frac{L\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{L\sqrt{3}}{2}-l}=\frac{L\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{L\sqrt{3}-2l}=\frac{L\sqrt{3}}{L\sqrt{3}-2l}.$$

Daí, obtemos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
L(L\sqrt{3}-2l) &= Ll\sqrt{3}\\
L^2\sqrt{3}-2Ll &= Ll\sqrt{3}\\
L^2\sqrt{3} &= 2Ll+Ll\sqrt{3}\\
l(2L+L\sqrt{3}) &= L^2\sqrt{3}\\
l(2+\sqrt{3}) &= L\sqrt{3}\\
l &= \frac{L\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\\
l &= L(2\sqrt{3}-3).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4. *Há duas possibilidades de verificarmos a conjectura em um quadrado ABCD:*

- *Considerar o próprio $ABCD$ como o quadrado procurado.*
- *Figura 1.4.*

Para a segunda opção, devemos marcar os pontos E, F, G e H (Figura 1.4) de maneira que se tenha

$$d(C,E)=d(B,F)=d(A,G)=d(D,H)=x.$$

Chamando L a medida do lado do quadrado ABCD, para encontrarmos a medida do lado do quadrado EFGH basta que, pelo Teorema de Pitágoras, calculemos

$$d(E,F)=d(F,G)=d(G,H)=d(H,E)=\sqrt{x^2+(L-x)^2},$$

obtendo assim quadrado desejado.

A garantia de que EFGH é um quadrado segue do fato dos seus ângulos internos serem retos. Para tanto, basta provarmos apenas para um de seus ângulos, digamos, o ângulo $F\hat{E}H$.

Note que, ECH e FBE, representam o mesmo triângulo, assim $C\hat{H}E = B\hat{E}F$ e, consequentemente, $C\hat{E}H$ e $B\hat{E}F$ são complementares. Como

$$C\hat{E}H+F\hat{E}H+B\hat{E}F=180^\circ,$$

temos que $F\hat{E}H=90^\circ$.

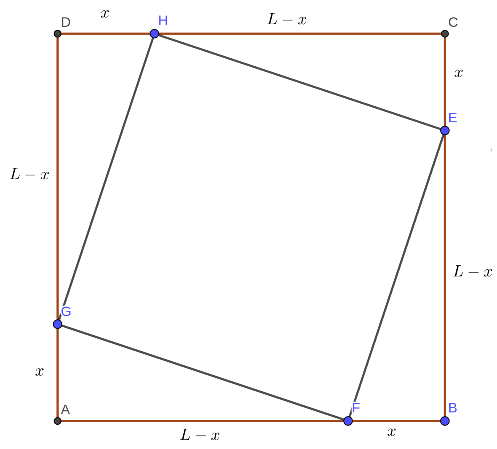


Figura 1.4: Quadrado inscrito em outro quadrado.

Exemplo 1.5. *Neste exemplo iremos inscrever um quadrado no círculo. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r. Sabemos que as diagonais de um quadrado são perpendiculares e que possuem a mesma medida. Tomando o centro O da circunferência como sendo também o centro do quadrado, podemos afirmar que, para inscrevermos um quadrado $ABCD$ na circunferência, basta tomarmos as diagonais AC e BD como sendo diâmetros de $\mathcal{C}$, onde $AC \perp BD$ (Figura 1.5).*

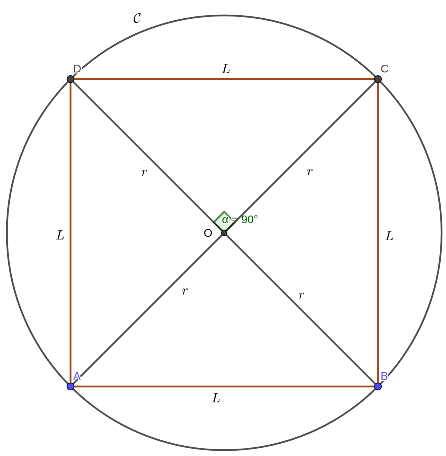


Figura 1.5: Quadrado inscrito no círculo.

Para encontrarmos a medida L do lado do quadrado, basta tomarmos um dos quatro triângulos retângulos gerados (AOB, BOC, COD e DOA), pois são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos, e em seguida calcularmos o Teorema de Pitágoras

$$L = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Observação 1.2. *Observe que qualquer ponto do círculo é vértice de algum quadrado* *inscrito nele, pois de qualquer ponto podemos traçar um diâmetro e outro que lhe seja perpendicular, obtendo assim as diagonais do quadrado inscrito procurado, e assim, teremos infinitas soluções. Da mesma forma, no caso do quadrado, também temos infinitas soluções, pois de qualquer ponto sobre o lado do quadrado, podemos traçar outros três pontos, um sobre cada um dos outros três lados, de modo que a distância desses pontos até o vértice mais próximo seja a mesma. O mesmo não se pode dizer do triângulo equilátero, pois os vértices do quadrado inscrito é determinado pelo ponto médio do lado do triângulo, e logo, só possui uma única solução.*

Exemplo 1.6. *Para construirmos um quadrado inscrito num pentágono regular $ABCDE$ de lado L, marcamos na reta t, que contém o lado AB, os pontos X e Y tal que $d(X, F) = d(Y, F) = x$, onde F é o ponto médio do lado AB e*

$$x = \frac{L}{4}\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}\right).$$

Sejam as retas r e s, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, passando por X e Y, respectivamente. Com isso, as interseções de r e s com os lados de $ABCDE$ determinarão os vértices de um retângulo inscrito no pentágono (Figura 1.6).

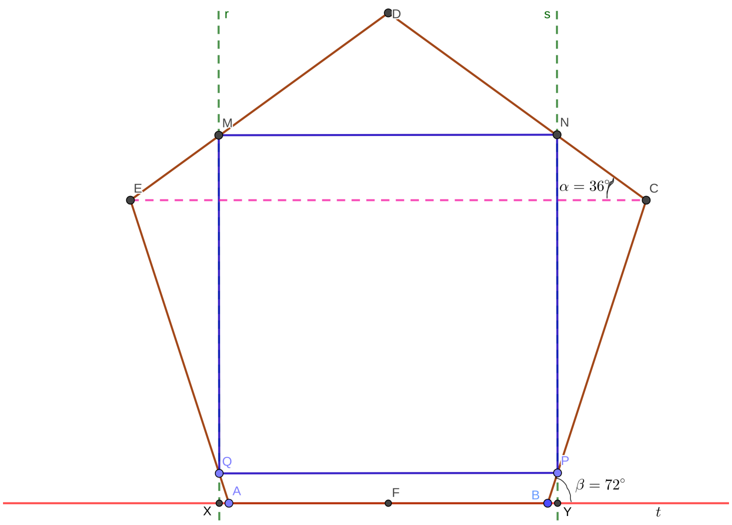


Figura 1.6: Retângulo inscrito no pentágono.

Para verificarmos que tal retângulo é um quadrado, primeiramente, localizemos o pentágono $ABCDE$ no plano cartesiano de modo que o lado AB esteja sobre o eixo OX e tenha a origem como ponto médio (Figura 1.7). Consequentemente, pela simetria do *pentágono regular, o vértice D estará sobre o eixo OY, além disso,* $A = \left(-\dfrac{L}{2}, 0\right)$ *e* $B = \left(\dfrac{L}{2}, 0\right)$.

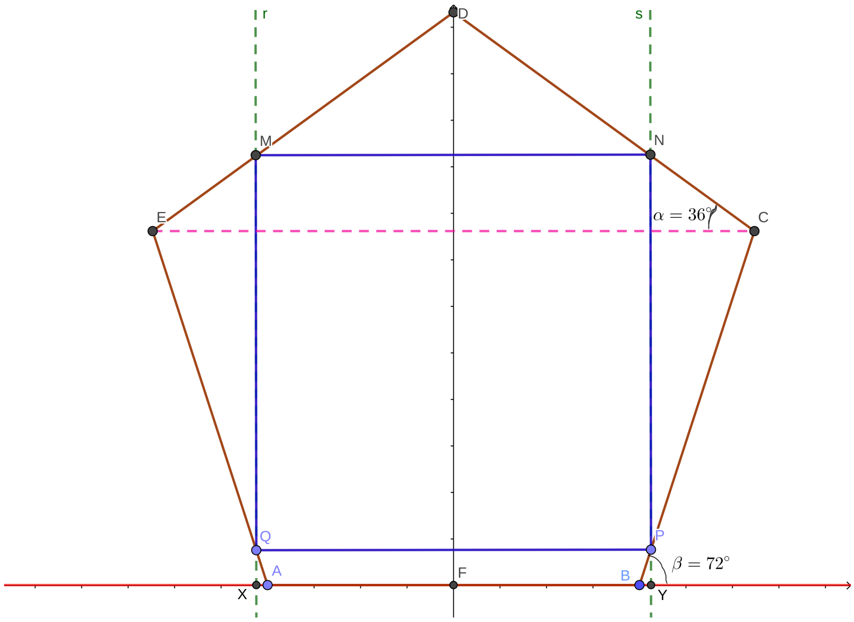


Figura 1.7: Pentágono no plano cartesiano.

Nosso próximo passo é encontrarmos as coordenadas do vértice C. Como os ângulos internos de um pentágono regular mede $108°$*, temos que seus ângulos externos medem* $72°$*. Daí, usando as razões trigonométricas, obtemos:*

$$x_c = \frac{L}{2} + L\cos 72° = \frac{L}{2}(1 + 2\cos 72°) \tag{1.16}$$

e

$$y_c = L\sin 72° \tag{1.17}$$

Substituindo $\sin 72° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ *e* $\cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ *nas equações (1.17) e (1.16), respectivamente, obteremos:*

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{L}{2}(1 + 2\cos 72°) \\ &= \frac{L}{2}\left(1 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \\ &= \frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \\ &= \frac{L(1+\sqrt{5})}{4}, \end{aligned}$$

e também,

$$y_c = \frac{L\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Assim, as coordenadas do ponto C serão:

$$C = (c_x, y_c) = \left(\frac{L(1+\sqrt{5})}{4}, \frac{L\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right).$$

Agora, tomemos f_1, f_2, f_3 e f_4 funções cujos gráficos contém, respectivamente, os segmentos BC, CD, DE e EA. Temos, pela simetria de $ABCDE$, que:

$$M = (-x, f_3(-x)),\ N = (x, f_2(x)),\ P = (x, f_1(x)) \text{ e } Q = (-x, f_4(-x)).$$

Queremos que $MNPQ$ seja um quadrado. Para que isso ocorra, é preciso encontrar um valor de x tal que

$$f_2(x) - f_1(x) = f_3(-x) - f_4(-x) = x - (-x) = 2x. \tag{1.18}$$

Desse modo, é necessário apenas encontramos $f_1(x)$ e $f_2(x)$ e calcularmos x tal que (1.18) seja satisfeita.

Uma função afim é tal que

$$f(x) = y_0 + \tan\alpha(x - x_0).$$

Daí,

$$f_1(x) = 0 + \tan 72^\circ \left(x - \frac{L}{2}\right) = \tan 72^\circ \left(x - \frac{L}{2}\right), \tag{1.19}$$

e

$$f_2(x) = \frac{L\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \tan 36^\circ \left(x - \frac{L(1+\sqrt{5})}{4}\right). \tag{1.20}$$

Sendo $\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ *e* $\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, *substituindo em (1.20) e (1.19), respectivamente, temos:*

$$f_1(x) = \left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)x - \frac{L}{2}\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right), \tag{1.21}$$

e

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{L\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)\left(x - \frac{L(1+\sqrt{5})}{4}\right)\\
&= \frac{L\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{L(1+\sqrt{5})(\sqrt{5-2\sqrt{5}})}{4} - \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)x\\
&= -\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)x + \frac{L}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{(1+\sqrt{5})^2(5-2\sqrt{5})}\right)\\
&= -\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)x + \frac{L}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{(6+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}\right)\\
&= -\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)x + \frac{L}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right). \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo (1.21) e (1.22) em (1.18), obteremos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
2x &= f_2(x) - f_(x)\\
&= \left[-\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)x + \frac{L}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\right]\\
&\quad - \left[\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)x - \frac{L}{2}\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)\right]\\
&= -\left[\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) + \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)\right]x + \frac{L}{4}\left[\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\right]\\
&\quad + \frac{L}{2}\left[\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Daí,

$$\left(2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)x = \frac{L}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$$

e, finalmente,

$$x = \frac{L}{4}\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}}\right).$$

Exemplo 1.7. *Para inscrevermos um quadrado em uma elipse, devemos inicialmente construí-la sobre o plano cartesiano de modo que seu centro esteja sobre a origem do sistema de eixos coordenados e sua equação seja*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.23)$$

Daí, os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ são os vértices da elipse que estão sobre o eixo x e os pontos $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ são os vértices sobre o eixo y (Figura 1.8).

Agora, marcamos sobre o eixo x os pontos X e Y que equidistam

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

do centro da elipse. Em seguida traçamos as retas r e s perpendiculares ao eixo x passando pelos pontos X e Y, respectivamente.

Após essa etapa, marcamos os pontos M, N, P e Q que são as interseções das retas r e s com a elipse. Esses pontos serão os vértices do quadrado inscrito na elipse.

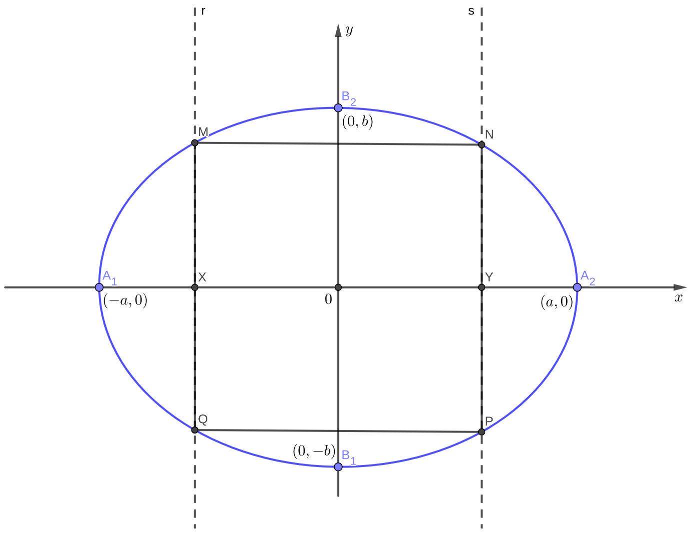


Figura 1.8: Quadrado inscrito na elipse.

Para verificação de que o quadrilátero MNPQ é um retângulo, note que, da equação (1.23), temos:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Daí, podemos definir duas funções f_1 e f_2 cujos gráficos descrevem os arcos superior e inferior da elipse, respectivamente, ou seja,

$$f_1(x) = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \quad e \quad f_2(x) = -\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}. \tag{1.24}$$

Escrevendo $X = (-x, 0)$ e $Y = (x, 0)$, temos que

$$d(M, N) = d(P, Q) = d(X, Y) = x - (-x) = 2x.$$

Como $d(M, Q) = d(N, P) = f_1(x) - f_2(x)$, para mostrarmos que o retângulo MNPQ é um quadrado, devemos apenas encontrar o valor de x tal que

$$f_1(x) - f_2(x) = 2x. \tag{1.25}$$

Substituindo (1.24) em (1.25), obtemos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}[f_1(x) - f_2(x)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} - \left(-\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\right] \\ &= \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$x^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Isolando x^2, temos:

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 = b^2.$$

Daí, obtemos

$$x^2 = \frac{b^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}},$$

que é equivalente a

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \tag{1.26}$$

Como estamos tratando da medida do lado de um quadrado, então tomaremos o valor positivo de x na equação (1.26), e obteremos:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

como queríamos mostrar.

Observação 1.3. *Observe que poderíamos utilizar o Teorema do Valor Intermediário para resolver o problema acima. Para isso, por simetria, basta mostrar que um dos quatro retângulos menores é um quadrado.*

Tomemos, portanto, o retângulo menor que está no primeiro quadrante. A medida de seu comprimento, que chamaremos de x, está no intervalo $[0, a]$. A medida de sua altura, que é $f(x) = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$, está no intervalo $[0, b]$.

Como f é contínua em $[0, a]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, poderemos encontrar um valor $c \in [0, a]$ tal que $f(c) = c$. Assim, teremos

$$\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}c^2} = c,$$

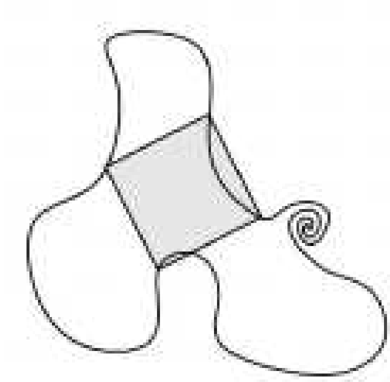
donde encontramos

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

que é o comprimento do quadrado menor.

Por fim, a forma generalizada da Conjectura de Toeplitz diz:

Conjectura 1.1 (Toeplitz)**.** *Cada curva fechada simples contínua no plano* $\gamma : \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *contém quatro pontos que são os vértices de um quadrado.*



Capítulo 2

Aplicação ao Ensino

Neste Capítulo apresentaremos algumas sequências didáticas a título de sugestões para atividades em sala de aula.

2.1 Atividade I

Muitos pesquisadores têm apresentados vários métodos de ensino de Matemática que objetivam incentivar os alunos a aprender de forma prazerosa e eficiente. Um exemplo disso são as brincadeiras de adivinhação, onde o professor apresenta uma "mágica" onde ele advinha algum resultado encontrado pelo aluno mentalmente, e o aluno, por sua vez, busca entender o porquê que essa mágica funciona.

Assim, de acordo com Richard Feynman, vencedor do Prêmio Nobel de Física (1965), é importante que o processo de ensino e aprendizagem seja cativador ao aluno, de modo que ele sinta desejo de pesquisar e refletir sobre as questões abordadas em aula, que tem por objetivo, além da memorização, a compreensão dos conteúdos estudados.

A proposta desta atividade é que ela seja executada preferencialmente em turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, sendo necessário no máximo duas aulas.

2.1.1 Descrição da atividade

A atividade é definida da seguinte forma: o professor solicita que o aluno escreva secretamente em uma folha de papel um número natural de três algarismos. Em seguida, ele deve digitar em uma calculadora um número de seis algarismos formado a partir da repetição do número que ele escolheu. Por exemplo, suponhamos que ele tenha escolhido o número 123. Assim, ele digitará na calculadora 123123.

O professor alegará "ler a mente" do aluno, indicando as operações e por fim um voluntário chegará ao número escrito no papel.

O professor solicita que passe a calculadora para um voluntário e que este divida o número de seis algarismos por 13. Depois ele deve passar a calculadora para um outro voluntário e este deverá dividir o resultado por 11, e por fim, outro dividirá por 7. Assim, o resultado final obtido é o mesmo que foi escrito no papel.

Se alguém não se convencer do processo, o professor pode fazer outro exemplo solicitando que um aluno escreva secretamente em um papel um número natural de quatro algarismos. Em seguida, o aluno deverá digitar na calculadora um número de oito algarismos formado a partir da repetição do número escolhido. Por exemplo, se o número escolhido for 2341, então deverá digitar 23412341 na calculadora.

A partir daí um voluntário dividirá o número de oito algarismos por 137, depois outro aluno dividirá por 73 e assim chegará ao número escrito no papel.

Em seguida, o professor solicitará que os alunos se reúnam em grupos de três para discutirem a atividade e buscar uma justificativa matemática para o funcionamento dos processos utilizados na execução da atividade.

Por fim, propõe-se aos alunos que discutam em grupo as possibilidades de realizar esses procedimentos ao serem escolhido números de 1, 2, 5 e, por fim, n algarismos, com $n > 5$.

2.1.2 Conclusão e análise da Atividade

A ideia desse truque consiste em multiplicar e dividir o número escolhido pelo aluno pelo mesmo valor não nulo.

Tomando o exemplo citado, supondo que o aluno escreveu no papel 123, ao ele digitar 123123 na calculadora, percebe-se que este número é o produto de 123 por 1001, ou seja,

$$\begin{aligned} 123123 &= 123000 + 123 \\ &= 123 \times 1000 + 123 \\ &= 123(1000 + 1) \\ &= 123 \times 1001. \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Como $1001 = 13 \times 11 \times 7$, ao solicitarmos a divisão do número de seis algarismos sucessivamente por 13, 11 e 7, é equivalente dividir por 1001, e assim, o resultado será 123, conforme mostrado em (2.1).

O mesmo procedimento também é válido para números de quatro algarismos. Se o número escolhido for 2341, ao digitar na calculadora o novo número formado pela repetição do primeiro, obtemos 23412341. Daí,

$$\begin{aligned} 23.412.341 &= 23.410.000 + 2.341 \\ &= 2.341 \times 10.000 + 2.341 \\ &= 2.341(10.000 + 1) \\ &= 2.341 \times 10.001. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, de acordo com (2.2), dividir 23 412 341 por 10 001 dá 2 341. Note que $10.001 = 137 \times 73$, isto é, a divisão sucessiva do número de oito algarismos por 137 e 73 é equivalente a dividi-lo uma única vez por 10 001, onde o resultado é o descrito no papel.

Em relação ao número formado por um único algarismo, teremos apenas o primo 11 multiplicado pelo número escolhido. Por exemplo, escolhamos 8. Temos que

$$\begin{aligned} 88 &= 80 + 8 \\ &= 8 \times 10 + 8 \\ &= 8(10 + 1) \\ &= 8 \times 11. \end{aligned}$$

Para um número formado por dois algarismos, teremos sempre o primo 101 multiplicado com número escolhido. Por exemplo, escolhamos 24. Temos que

$$\begin{aligned} 2424 &= 2400 + 24 \\ &= 24 \times 100 + 24 \\ &= 24(100 + 1) \\ &= 24 \times 101. \end{aligned}$$

Assim, nos casos de números formados por um ou dois algarismos, encontraremos sempre o número escolhido multiplicado por um único primo.

Para um número formado por cinco algarismos, por exemplo, escolhamos 12345. Temos que

$$\begin{aligned}
1.234.512.345 &= 1.234.500.000 + 12.345 \\
&= 12.345 \times 100.000 + 24 \\
&= 12.345(100.000 + 1) \\
&= 12.345 \times 100.001 \\
&= 12.345 \times (11 \times 9.091).
\end{aligned}$$

Neste caso, o procedimento seria começar dividindo por 11 e depois por 9.091.

Por fim, generalizando, vamos considerar o caso de números formados por n algarismos, com $n > 5$. Seja $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ esse número. Usando os procedimentos anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0 &= a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0 \times 10^n + a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0 \\
&= a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0(10^n + 1)
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que, se $10^n + 1$ for primo, teremos apenas o número escolhido multiplicado por $10^n + 1$. Se não for primo, será como nos casos que verificamos de números formados por três, quatro ou cinco algarismos.

2.2 Atividade II

A proposta dessa atividade é fazer o aluno chegar ao enunciado da Conjectura de Beal. Esta atividade deverá ser aplicada em turmas a partir do 8º ano do Ensino Fundamental. Sugere-se que sejam utilizadas 2 aulas.

2.2.1 Descrição da Atividade

Recomenda-se que o professor divida a turma em grupos 6 alunos. Cada grupo ficará responsável por resolver três questões. Em seguida, se subdividirão em 3 duplas, onde cada uma ficará responsável por analisar e discutir uma dessas três questões. Por exemplo:

- **Questão para a dupla I**: Encontre valores de c e z nas equações, para $z \geq 3$ e calcule o mdc de a, b e c:

  (a) $3^4 + 4^3 = c^z$

  (b) $5^3 + 7^3 = c^z$

- **Questão para a dupla II**: Encontre valores de c e z nas equações, para $z \geq 3$ e calcule o mdc de a, b e c:

  (a) $3^3 + 6^3 = c^z$

  (b) $7^3 + 7^4 = c^z$

- **Questão para a dupla III**: Encontre valores de c e z nas equações, para $z \geq 3$ e calcule o mdc de a, b e c:

  (a) $1^4 + 2^3 = c^z$

  (b) $3^5 + 11^4 = c^z$

Na 1ª etapa, cada dupla discutirá sua questão e a resolverá. Em seguida, as três duplas se reunirão novamente para analisar as respostas obtidas e discutir em grupo o que observaram das três situações.

2.2.2 Conclusão e análise da Atividade

Na questão proposta para a dupla I, temos que $mdc(3,4) = 1$ e $mdc(5,7) = 1$. Resolvendo o item (a), temos:

$$\begin{aligned} 3^4 + 4^3 &= c^z \\ 81 + 64 &= c^z \\ 145 &= c^z \end{aligned}$$

Nota-se daí que só há a solução trivial $c = 145$ e $z = 1$. Porém, a condição $z \geq 3$. Temos também que $mdc(3,4,145) = 1$. Resolvendo o item (b), temos:

$$\begin{aligned} 5^3 + 7^3 &= c^z \\ 125 + 343 &= c^z \\ 468 &= c^z \end{aligned}$$

Percebe-se também que a equação acima possui somente a solução trivial $c = 468$ e $z = 1$, que não serve pois é necessário que se tenha $z \geq 3$. Temos também que $mdc(5,7,468) = 1$.

Na questão proposta para a dupla II, temos que $mdc(3,6) = 3$ e $mdc(7,7) = 7$. Resolvendo o item (a), temos:

$$\begin{aligned} 3^3 + 6^3 &= c^z \\ 27 + 216 &= c^z \\ 243 &= c^z \\ 3^5 &= c^z \end{aligned}$$

Nota-se daí que $c = 3$, $z = 5$ e $mdc(3,6,3) = 3$. Resolvendo o item (b), temos:

$$\begin{aligned} 7^3 + 7^4 &= c^z \\ 7^3(1+7) &= c^z \\ 7^3(8) &= c^z \\ 7^3 \cdot 2^3 &= c^z \\ (7 \cdot 2)^3 &= c^z \\ 14^3 &= c^z \end{aligned}$$

Percebe-se que na equação acima $c = 14$, $z = 3$ e $mdc(7,7,14) = 7$.

Na questão proposta para a dupla III, temos que $mdc(1,2) = 1$ e $mdc(3,11) = 1$. Resolvendo o item (a), temos:

$$\begin{aligned} 1^4 + 2^3 &= c^z \\ 1 + 8 &= c^z \\ 9 &= c^z \\ 3^2 &= c^z \end{aligned}$$

Nota-se daí que, além da solução trivial, temos $c = 3$ e $z = 2$. Porém, a condição exige $z \geq 3$. Temos também que $mdc(1,2,3) = 1$. Resolvendo o item (b), temos:

$$\begin{aligned} 3^5 + 11^4 &= c^z \\ 243 + 14.641 &= c^z \\ 14.884 &= c^z \\ 122^2 &= c^z \end{aligned}$$

Percebe-se que, na equação acima, além da solução trivial, temos $c = 122$ e $z = 2$. No entanto, a condição exige $z \geq 3$. Temos também que $mdc(3,11,122) = 1$.

Espera-se que os alunos percebam que só foi possível encontrar solução para as questões propostas nos casos em que as bases das potências possuem um divisor primo comum. E nos casos em que não houve solução para as questões, as bases das potências eram primas entre si.

Assim, a atividade é concluída com o enunciado da Conjectura de Beal, apresentada na Seção 1.2.

2.3 Atividade III

Conforme foi dito na Seção 2.1, essa atividade também vem com o objetivo de despertar no aluno a curiosidade e como argumentar matematicamente sobre o conteúdos abordados em sala de aula.

Como observamos na Seção 1.3, a Conjectura de Collatz traz um algoritmo cujo objetivo é chegar sempre ao resultado 1, independente do número escolhido. Partindo disso, a atividade a seguir mostra um algoritmo onde o aluno encontrará sempre o resultado desejado pelo professor.

A proposta é que esta atividade seja aplicada em turmas a partir do 8º ano do Ensino Fundamental. Sugere-se que sejam utilizadas 2 aulas.

2.3.1 Descrição da Atividade

Solicita-se que o aluno pense em um número e anote em um papel onde apenas ele sabe qual é. Suponhamos que o número seja 13. Em seguida, ele deverá escrever no mesmo papel, secretamente, o dobro do número escolhido.

$$13 \times 2 = 26.$$

O próximo passo é pedir ao aluno que ele tome o resultado obtido e adicione 10:

$$26 + 10 = 36.$$

Em seguida, que divida o novo resultado por 2:

$$36 \div 2 = 18,$$

e por fim que subtraia o último resultado obtido pelo número que ele pensou no início:

$$18 - 13 = 5.$$

O resultado é 5, independentemente do número que ele escolheu.

Novamente, pede-se ao aluno escolher outro número e que siga o mesmo processo, e no final ele verá que o resultado será 5 também. Suponhamos que ele escolha 47. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} 47 \times 2 &= 94 \\ 94 + 10 &= 104 \\ 104 \div 2 &= 52 \\ 52 - 47 &= 5 \end{aligned}$$

2.3.2 Conclusão e análise da Atividade

Para mostrarmos a validade desse resultado, iremos utilizar os conhecimentos básicos sobre operações com polinômios. Nosso objetivo é provar que o resultado final independe do número escolhido pelo aluno.

Seja n o número escolhido. Multiplicando por 2 encontraremos $2n$. Em seguida, somando 10, obtemos $2n + 10$. O próximo passo é dividirmos por 2, e então, teremos $n + 5$. Por fim, subtraímos o número escolhido, ou seja, $n + 5 - n$, e o resultado será 5.

O principal questionamento que se espera do aluno é: qual requisito determina que o resultado seja sempre 5?

Note que, nas operações acima, 5 é a metade do valor adicionado na segunda etapa, isto é, 10. Generalizando, tomando novamente n como sendo o número escolhido, e realizando as operações:

$$\begin{aligned} n \cdot 2 &= 2n \\ 2n + k &= 2 \cdot \left(n + \frac{k}{2}\right) \\ 2 \cdot \left(n + \frac{k}{2}\right) \div 2 &= n + \frac{k}{2} \\ n + \frac{k}{2} - n &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Daí fica evidente que o resultado independe de n e sempre será a metade de k, o valor que é adicionado na segunda etapa dos cálculos.

Observação 2.1. *O fato do resultado ser sempre a metade do valor adicionado k, permite-nos concluir que é necessário escolher sempre valores pares para k, facilitando assim os* *cálculos. Contudo, é importante frisar que a argumentação acima mostra que esse algoritmo funciona para quaisquer* $n, k \in \mathbb{R}$.

2.4 Atividade IV

O objetivo desta atividade é fazer o aluno chegar ao enunciado da Conjectura de Goldbach. A proposta é que seja aplicada preferencialmente em turmas do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, utilizando 2 aulas.

2.4.1 Descrição da Atividade

Esta atividade será dividida em duas etapas.

1ª etapa: Sugere-se que a classe seja dividida em duplas e o professor entrega uma tabela onde a 1ª linha e a 1ª coluna são formadas pelos 15 primeiros números primos, conforme mostra a Figura 2.1.

Em seguida, eles deverão preencher cada quadrado vazio da tabela somando o valores correspondentes à linha e à coluna em que o respectivo quadrado está.

Após essa etapa, as duplas observarão os resultados e escreverão no caderno, sem repetir, os valores pares em ordem crescente.

Em seguida, cada dupla discutirá entre si o que eles percebem na lista de resultados encontrados, qual a principal característica desses valores listados.

Novamente o professor solicita que as duplas escrevam no caderno, em ordem crescente, os resultados ímpares encontrados. Cada dupla verificará se neste caso há alguma característica principal semelhante ao caso anterior.

2ª etapa: Nesta etapa, com a classe ainda dividida em duplas, o professor entrega outra tabela onde a 1ª linha e a 1ª coluna são formadas pelos 15 primeiros números pares encontrados na 1ª etapa e os 15 primeiros números primos ímpares, respectivamente, conforme mostra a Figura 2.2.

Em seguida, devem preencher cada quadrado vazio da tabela somando os valores correspondentes à linha e à coluna em que o respectivo quadrado está.

Após essa etapa, solicita-se às duplas que observem os resultados e escrevam no caderno, sem repetir, os valores em ordem crescente.

+	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2															
3															
5															
7															
11															
13															
17															
19															
23															
29															
31															
37															
41															
43															
47															

Figura 2.1: Soma de dois números primos.

+	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
4															
6															
8															
10															
12															
14															
16															
18															
20															
22															
24															
26															
28															
30															
32															

Figura 2.2: Soma de um número par com um primo ímpar.

Em seguida, cada dupla discutirá entre si o que eles percebem na lista de resultados encontrados, qual a principal característica desses valores listados.

2.4.2 Conclusão e análise da Atividade

Analisando a 1ª etapa, obtemos os valores representados na Figura 2.3.

Observando os valores pares encontrados e escrevendo-os em ordem crescente, temos:

$4-6-8-10-12-14-16-18-20-22-24-26-28-30-32-34-36-38-40-42-44-46-48-50-52-54-56-58-60-62-64-66-68-70-72-74-76-78-80-82-84-86-88-90-94$.

Note que o número 92 poderia ser obtido somando os primos 31 e 61.

Assim, espera-se que os alunos percebam que se tratam de **todos** os números naturais pares maiores que 2 e inferiores a 96.

Ao listarmos os números ímpares obtidos e escrevendo-os em ordem crescente, temos:

$5-7-9-13-15-19-21-25-31-33-39-43-45-49$.

Espera-se, desta análise, que os alunos notem que não foi possível obter todos os ímpares de 5 a 49.

Por fim, os alunos, após as observações dos resultados obtidos, devem se questionar se qualquer número par superior a 94 também pode ser escrito como a soma de dois números primos, chegando assim à Conjectura forte de Goldbach.

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	4	5	7	9	13	15	19	21	25	31	33	39	43	45	49
3	5	6	8	10	14	16	20	22	26	32	34	40	44	46	50
5	7	8	10	12	16	18	22	24	28	34	36	42	46	48	52
7	9	10	12	14	18	20	24	26	30	36	38	44	48	50	54
11	13	14	16	18	22	24	28	30	34	40	42	48	52	54	58
13	15	16	18	20	24	26	30	32	36	42	44	50	54	56	60
17	19	20	22	24	28	30	34	36	40	46	48	54	58	60	64
19	21	22	24	26	30	32	36	38	42	48	50	56	60	62	66
23	25	26	28	30	34	36	40	42	46	52	54	60	64	66	70
29	31	32	34	36	40	42	46	48	52	58	60	66	70	72	76
31	33	34	36	38	42	44	48	50	54	60	62	68	72	74	78
37	39	40	42	44	48	50	54	56	60	66	68	74	78	80	84
41	43	44	46	48	52	54	58	60	64	70	72	78	82	84	88
43	45	46	48	50	54	56	60	62	66	72	74	80	84	86	90
47	49	50	52	54	58	60	64	66	70	76	78	84	88	90	94

Figura 2.3: Soma de dois primos.

	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
4	7	9	11	15	17	21	23	27	33	35	41	45	47	51	57
6	9	11	13	17	19	23	25	29	35	37	43	47	49	53	59
8	11	13	15	19	21	25	27	31	37	39	45	49	51	55	61
10	13	15	17	21	23	27	29	33	39	41	47	51	53	57	63
12	15	17	19	23	25	29	31	35	41	43	49	53	55	59	65
14	17	19	21	25	27	31	33	37	43	45	51	55	57	61	67
16	19	21	23	27	29	33	35	39	45	47	53	57	59	63	69
18	21	23	25	29	31	35	37	41	47	49	55	59	61	65	71
20	23	25	27	31	33	37	39	43	49	51	57	61	63	67	73
22	25	27	29	33	35	39	41	45	51	53	59	63	65	69	75
24	27	29	31	35	37	41	43	47	53	55	61	65	67	71	77
26	29	31	33	37	39	43	45	49	55	57	63	67	69	73	79
28	31	33	35	39	41	45	47	51	57	59	65	69	71	75	81
30	33	35	37	41	43	47	49	53	59	61	67	71	73	77	83
32	35	37	39	43	45	49	51	55	61	63	69	73	75	79	85

Figura 2.4: Soma de um número par com um primo ímpar

Analisando agora a 2ª etapa, obtemos os valores representados na Figura 2.4.

Ao listarmos os números ímpares obtidos e escrevendo-os em ordem crescente, temos:

$7-9-11-13-15-17-19-21-23-25-27-29-31-33-35-37-39-41-43-45-47-49-51-53-55-57-59-61-63-65-67-69-71-73-75-77-79-81-83-85$.

Com esses resultados, espera-se que os alunos percebam que se tratam de **todos** os números naturais ímpares maiores que 5 e inferiores a 87. Devem observar também que estes resultados foram obtidos após somar três números primos: dois na primeira etapa e mais outro na segunda.

Por fim, os alunos devem se questionar se isso ocorre com todos os ímpares a partir do número 87, chegando assim, a Conjectura fraca de Goldbach.

2.5 Atividade V

O objetivo dessa atividade é levar o aluno a conjecturar em geometria plana, utilizando alguns conhecimentos prévios de maneira que ele consiga inscrever um quadrado em algumas curvas simples (polígonos, círculo e elipse), a fim de que ele chegue à Conjectura de Toeplitz.

Sugere-se que esta atividade seja aplicada em turmas de 3ª Série do Ensino Médio, disponibilizando no máximo 8 aulas para execução das tarefas propostas.

2.5.1 Descrição da Atividade

No primeiro momento, o professor organiza a turma em 5 grupos. Cada grupo ficará responsável por resolver um problema. Os problemas serão distribuídos por sorteio a cada grupo. Digamos, por exemplo, que a configuração da sala ficou conforme ilustrado na Tabela 2.1.

Grupos	Problema para resolver
A	Inscrever um quadrado em um triângulo equilátero.
B	Inscrever um quadrado em outro quadrado.
C	Inscrever um quadrado em um pentágono regular.
D	Inscrever um quadrado em um círculo.
E	Inscrever um quadrado em uma elipse.

Tabela 2.1: Ilustração de organização dos grupos para a atividade proposta.

No primeiro momento da atividade, cada grupo discutirá sobre as propriedades do quadrado e também as da figura que lhe foram proposta no problema. Por exemplo, o Grupo D analisará as propriedades do círculo e do quadrado, de modo que encontrem um caminho para a resolução do problema.

Em seguida, deverão começar a construção do quadrado inscrito, conforme solicitado. O professor distribuirá algumas folhas quadriculadas e milimetradas para auxiliá-los na tarefa.

Depois cada grupo registrará numa folha todos os passos utilizados na realização da tarefa, argumentando cada passo realizado.

Por fim, o professor discutirá com os grupos o que eles perceberam durante a realização da atividade. Sugere-se que esta primeira etapa seja executada em até três aulas.

2.5.2 Conclusão e análise da Atividade

Cada grupo deverá socializar com os demais sua resolução do problema (as análises de cada questão proposta na Tabela 2.1 estão descritas na Seção 1.5).

Na segunda etapa, o professor fará os seguintes questionamentos a cada grupo:

- É possível inscrever um quadrado em um triângulo qualquer?

- É possível inscrever um quadrado em um paralelogramo qualquer?
- É possível inscrever um quadrado em um hexágono regular?

Os grupos discutirão cada problema acima e proporão uma maneira de resolver cada situação. Tudo deverá ser registrado em uma folha e apresentado ao professor e aos demais grupos. Sugere-se que esta etapa seja executada em até três aulas.

Quanto à questão sobre a construção do quadrado inscrito no triângulo qualquer, vamos dividir a resolução em duas partes:

- (a) Quadrado inscrito no triângulo isósceles;
- (b) Quadrado inscrito no triângulo escaleno.

Respondendo o item (a), considere o quadrado inscrito no triângulo isósceles ABD de base AB (Figura 2.5).

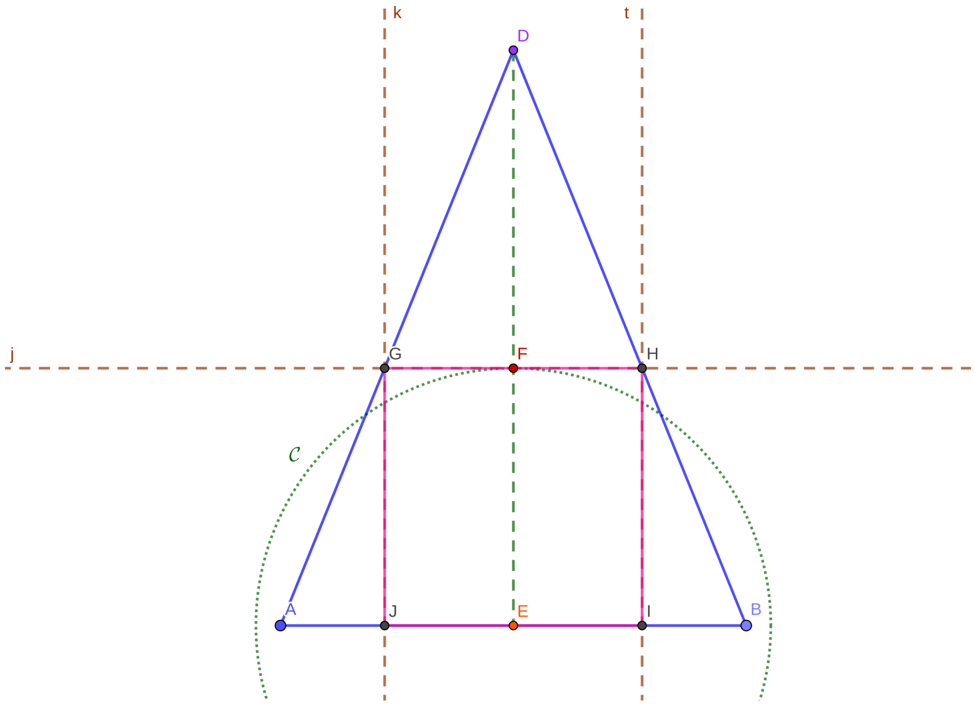


Figura 2.5: Quadrado inscrito no triângulo isósceles.

A construção é obtida seguindo os seguintes passos:

1. Construímos o triângulo isósceles ABD, com $d(A,D) = d(B,D) = L$ e $d(A,B) = l$.
2. Marcamos o ponto médio E do segmento AB e traçamos a altura DE.

3. Construímos o círculo $\mathcal{C}$ centrado em E com raio medindo $\dfrac{l\sqrt{4L^2 - l^2}}{2l + \sqrt{4L^2 - l^2}}$ e marcamos o ponto F na interseção de $\mathcal{C}$ com DE.

4. Traçamos a reta j paralela a AB passando por F e marcamos os pontos G e H nas interseções de j com AD e BD, respectivamente.

5. Traçamos as retas k e t, perpendiculares a AB, passando respectivamente por G e H, e marcamos os pontos J e I nas interseções de k e t com AB, respectivamente.

6. Afirmação: os pontos G, H, I e J são vértices de um quadrado.

De fato, por construção, temos que $GHIJ$ é um retângulo. Assim, para que seja um quadrado, basta mostrar que GH e HI são congruentes.

Sabemos que os triângulos ABD e GHD são semelhantes (caso AA de semelhança de triângulos). Assim, vale a seguinte proporção:

$$\frac{d(D,E)}{d(D,E) - d(H,I)} = \frac{d(A,B)}{d(G,H)}.$$

Por outro lado, temos que $d(B,D) = L$ e $d(A,B) = l$. Daí, $d(B,E) = \dfrac{l}{2}$ e segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$d(D,E) = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{2}.$$

Assim, para que $GHIJ$ seja um quadrado, devemos ter $d(G,H) = d(H,I) = x$. Logo, é necessário apenas encontrar o valor de x tal que

$$\frac{\frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{2}}{\frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{2} - x} = \frac{l}{x}.$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$x = \frac{l\sqrt{4L^2 - l^2}}{2l + \sqrt{4L^2 - l^2}}.$$

Na resolução do item (b), o procedimento é semelhante ao do item (a). Considere o quadrado $GIJH$ inscrito no triângulo escaleno ABD, onde $d(A,B) < d(B,D) < d(A,D)$ conforme ilustrado na Figura 2.6.

Na Figura 2.6 temos:

$$d(A,B) = c, \quad d(B,D) = a, \quad d(A,D) = b, \; d(A,E) = m \quad \text{e} \quad d(D,E) = n.$$

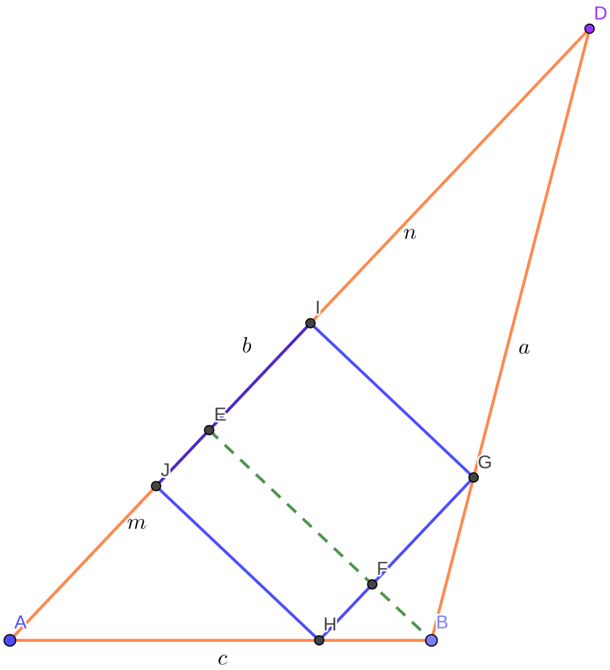


Figura 2.6: Quadrado inscrito no triângulo escaleno.

Seguindo os mesmos passos do item (a), o retângulo $GIJH$ será um quadrado cujo lado mede:

$$l = \frac{b \cdot d(B,E)}{b + d(B,E)} = \frac{b\sqrt{a^2 + c^2 - m^2 - n^2}}{b\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + c^2 - m^2 - n^2}}.$$

Assim, para que o valor de l seja obtido, é necessário encontrar os valores de m e n. Porém, nestas circunstâncias é necessário ter mais informações, por exemplo, um dos ângulos $\hat{A}$ ou $\hat{D}$. Por este motivo, sugere-se que os alunos executem um caso particular, com números fáceis, por exemplo:

$$d(A,B) = 4, \quad d(B,D) = 6 \quad \text{e} \quad d(A,D) = 8.$$

Em seguida, deverão traçar a altura BE, conforme ilustrado na figura 2.6, e daí, com o auxílio de uma régua, medir comprimento de BE e substituir em

$$l = \frac{b \cdot d(B,E)}{b + d(B,E)},$$

ou medir os comprimentos m e n de AE e DE, respectivamente, e substituir em

$$l = \frac{b\sqrt{a^2 + c^2 - m^2 - n^2}}{b\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + c^2 - m^2 - n^2}}.$$

O objetivo dessa estratégia é permitir ao aluno se apropriar dos conceitos e propriedades trabalhados.

Para o caso do paralelogramo, um caminho que os alunos podem seguir para traçar sua resolução é fazer uso de perpendiculares e do círculo, conforme ilustrado na Figura 2.7.

Para tanto, seja $ABCD$ um paralelogramo (Figura 2.7). Em seguida, tracemos a reta l perpendicular ao segmento AB e marcamos o ponto E na interseção de l com AB.

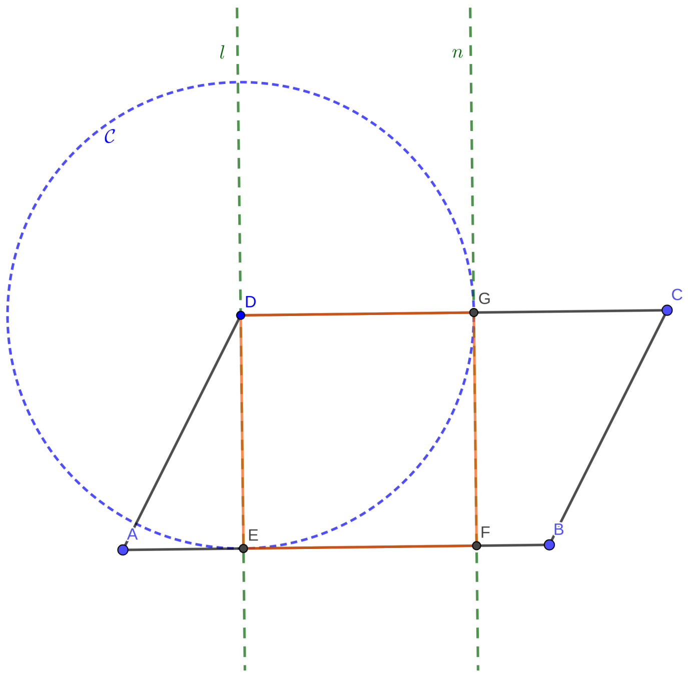
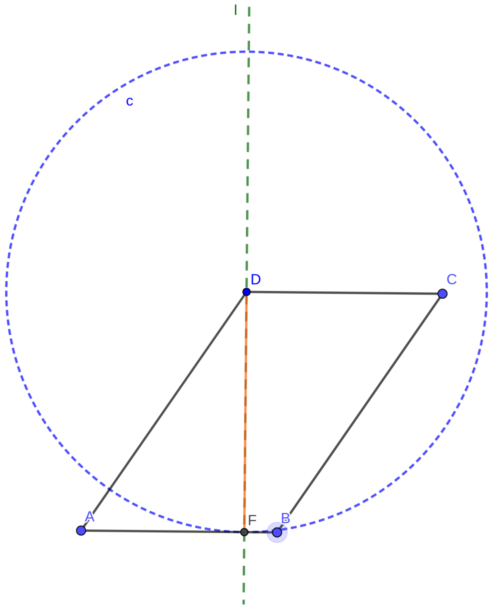


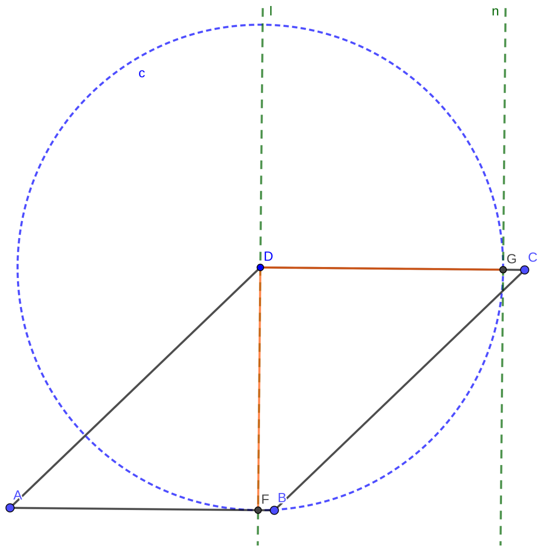
Figura 2.7: Quadrado inscrito no paralelogramo.

Agora, traçamos o círculo $\mathcal{C}$ centrado em D e raio DE e marcamos o ponto G na interseção de $\mathcal{C}$ com o segmento CD. Por fim, traçamos a reta n que passa por G e é perpendicular ao segmento AB e marcamos o ponto F na interseção de n com AB. A construção garante que o quadrilátero $DEFG$ gerado é um quadrado.

Observação 2.2. *É importante estabelecer o fato de que a construção acima é um caso particular, que já é suficiente para responder a questão, pois a Conjectura de Toeplitz sugere apenas a existência do quadrado inscrito, independentemente de quantos possam existir em uma dada figura.*

Observação 2.3. *Durante a construção do quadrado inscrito no paralelogramo, espera-se que os alunos percebam que as perpendiculares devem intersectar o par de lados maior do paralelogramo. Caso contrário, dependendo dos ângulos internos, ao traçar a perpendicular ao par de lados menor, a construção poderá não ser possível, conforme ilustrado nas figuras a seguir.*





Para a construção do quadrado inscrito no hexágono, vamos seguir os seguintes passos:

1. Construímos um hexágono regular $ABCDEF$ de lado L.

2. Marcamos o ponto médio M de AB.

3. Traçamos a reta t que contém o segmento AB.

4. Sobre a reta t marcamos os pontos K e L que equidistam $\dfrac{L(3-\sqrt{3})}{2}$ do ponto M.

5. Traçamos as retas r e s perpendiculares a t nos pontos K e L, respectivamente.

6. Marcamos G e J nas interseções de r com AF e EF, respectivamente, e também H e I nas interseções de s com BC e CD, respectivamente.

7. Afirmação: os pontos G, H, I e J são vértices de um quadrado.

De fato, no caso do hexágono regular, localizamos seus vértices (A, B, C, D, E e F) no plano cartesiano de maneira que o segmento AB esteja sobre o eixo OX e a origem corresponda ao seu ponto médio (Figura 2.8).

Analogamente ao caso do pentágono regular, chamemos de L a medida do lado do hexágono $ABCDEF$. Daí, temos que

$$A = \left(-\frac{L}{2}, 0\right) \qquad \text{e} \qquad B = \left(\frac{L}{2}, 0\right).$$

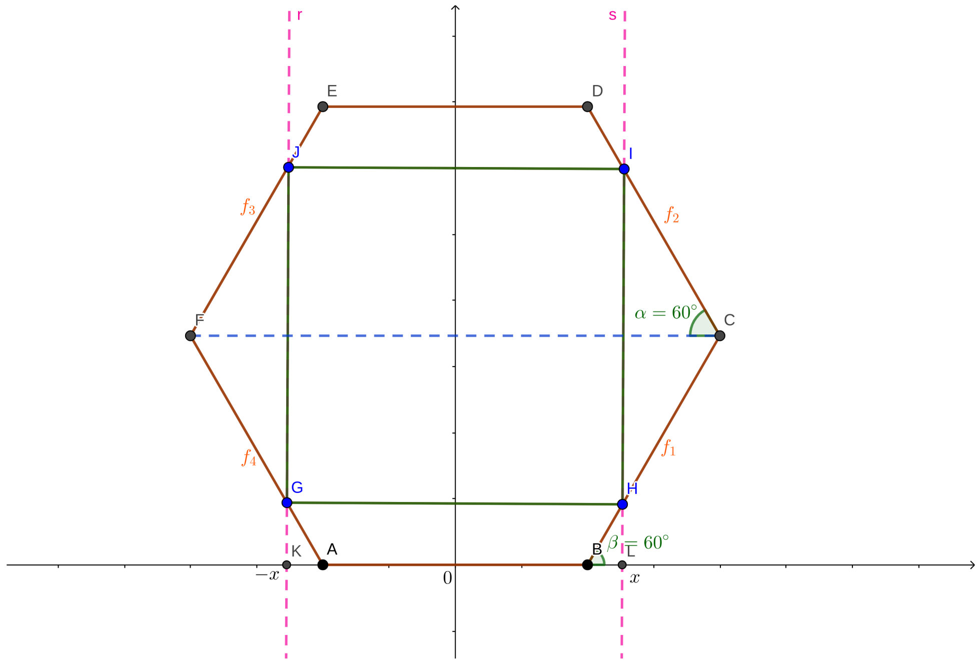


Figura 2.8: Quadrado inscrito no hexágono regular.

Os ângulos internos de um hexágono regular medem 120°, assim, seus ângulos externos medem 60°. Consequentemente, as coordenadas do vértice C serão:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{L}{2} + L\cos 60° = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L \\ e & \\ y_c &= L\sin 60° = \frac{L}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Tomemos agora as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 cujos gráficos contém, respectivamente, os segmentos BC, CD, EF e FA. Queremos que o quadrilátero $GHIJ$ seja um quadrado. Por construção, as retas r e s, que passam respectivamente pelos segmentos GJ e HI, são perpendiculares ao eixo OX. Assim, $r \parallel s$, e

$$d(I,J) = d(G,H) = x - (-x) = 2x,$$

e o quadrilátero $GHIJ$ é um retângulo.

Portanto, a fim de que $GHIJ$ seja um quadrado, é preciso apenas mostrar que

$$d(H,I) = d(G,J) = d(G,H) = 2x.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 + \tan 60^\circ \left(x - \frac{L}{2} \right) = (\sqrt{3})x - \frac{L}{2}\sqrt{3} \\ e & \\ f_2(x) &= \frac{L}{2}\sqrt{3} - \tan 60^\circ (x - L) = -(\sqrt{3})x + \frac{3L}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Temos também que

$$H = (x, f_1(x)) \qquad \text{e} \qquad I = (x, f_2(x)).$$

Assim, o problema se resume a encontrar um valor de x tal que

$$2x = d(H, I) = f_2(x) - f_1(x).$$

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} 2x &= f_2(x) - f_1(x) \\ &= \left(-(\sqrt{3})x + \frac{3L}{2}\sqrt{3} \right) - \left((\sqrt{3})x - \frac{L}{2}\sqrt{3} \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$2x = L(3 - \sqrt{3}),$$

e finalmente,

$$x = \frac{L(3 - \sqrt{3})}{2}.$$

Na última etapa, onde sugere-se que sejam utilizadas no máximo duas aulas, o professor indagará à turma qual característica cada figura proposta tem em comum. Espera-se daí que os alunos notem que se tratam de curvas fechadas simples especiais e que em cada uma delas foi possível encontrar os vértices de um quadrado. E a partir disso, propor a seguinte questão:

É possível encontrar sobre uma curva fechada simples qualquer pontos que sejam vértices de um quadrado?

Através desse questionamento, os alunos terão contanto com um problema que ainda está em aberto: a Conjectura de Toeplitz.

Capítulo 3

Conclusão

Conforme visto anteriormente, o uso das Conjecturas no ensino de Matemática permite ao aluno despertar sua curiosidade, devido a sua natureza desafiadora, como também contribui no desenvolvimento de habilidades tais como: questionar, testar a validade da conjectura, argumentar e formular novas conjecturas.

As mudanças que vêm acontecendo na sociedade nos últimos anos, com seus novos desafios, tornaram imprescindível grandes mudanças no processo educacional, pois a nova geração de alunos tem buscado algum sentido em cada conteúdo abordado na escola, obrigando a criação ou elaboração de um novo modelo de ensino, que valorize seus saberes individuais e coletivos.

Por isso é importante que sejam elaboradas atividades que despertem no aluno a curiosidade e a motivação, de maneira que ele se sinta desafiado a encontrar a solução para os problemas propostos. Desse modo, ele desenvolverá a habilidade de buscar soluções para os mais diversos problemas do seu cotidiano.

Foi com esse objetivo que apresentamos cinco sequências didáticas, como sugestões de atividades, para serem aplicadas no Ensino Básico, onde o aluno pensaria no problema proposto, testaria sua validade para valores pequenos, e em seguida questionaria se tais propriedades continuariam válidas para outros valores, se para todos ou somente para alguns, e com isso ter contato com algumas Conjecturas apresentadas neste trabalho.

Devido aos problemas causados pela pandemia da Covid-19, as aulas presenciais nas escolas públicas de Sergipe foram suspensas, envolvendo todo o período de construção desta dissertação. Assim, impossibilitou-se a execução das sequências didáticas propostas neste trabalho, pois sua natureza requer um acompanhamento presencial do professor.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Maria de Fátima Lis Barbosa de Paiva. Aprendiz de Feiticeiro. Revista do Professor de Matemática, nº 81, pp.12-15.

[2] CASADO, Raquel Rius. The Square Peg Problem. Treball final de grau. Universitat de Barcelona. 2019. Link de acesso: http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/151918/2/151918.pdf.

[3] FRITSCHE, Willian Cleyson, e Alexandre Shuji Suguimoto. A Hipótese de Riemann. Link de acesso: https://www.unicesumar.edu.br/mostra-2016/wp-content/uploads/sites/154/2017/07/willian_cleyson_fritsche.pdf

[4] HARTNETT, Kevin. Mathematician Proves Huge Result on 'Dangerous' Problem. Revista Quanta Magazine. Link de acesso: https://www.quantamagazine.org/mathematician-terence-tao-and-the-collatz-conjecture-20191211/.

[5] JOSHI, Sparsh. The Collatz Conjecture. Link de acesso: https://medium.com/cantors-paradise/the-collatz-conjecture-some-shocking-results-from-180-000-iterations-7fea130d0377.

[6] Mathematical mysteries: the Goldbach conjecture. Link de acesso: https://plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-goldbach-conjecture.

[7] NASCIMENTO, Sebastião Vieira do. A Conjectura de Beal - Casos Particulares. O Baricentro da Mente. Link de acesso: https://www.obaricentrodamente.com/2014/11/a-conjectura-de-beal-casos-particulares.html

[8] OTHECHAR, Pedro Flávio Silva. A Conjectura de Toeplitz no Ensino Básico. Revista do Professor de Matemática, nº 93, pp. 36-41.

[9] PEREIRA, Kauê Orlando. Monografia - Conjectura de Goldbach. Outubro de 2018. Link de acesso: https://www.ime.unicamp.br/ ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Kaue_TN18.pdf.

[10] SOUSA, Francisco Rafael Macena de. Demonstração da Conjectura De Beal. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 11, Vol. 05, pp. 132-173. Novembro de 2019. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/conjectura-de-beal.

[11] SOUZA, Jucélio de Barros. Conjecturas em Teoria dos Números e suas Histórias. Dissertação do Profmat. Universidade Federal da Paraíba. Maio de 2019.