



**Universidade Federal de Sergipe**  
**Centro de Ciências Exatas e Tecnologia**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado em Matemática**

**O método da Média e alguns resultados sobre órbitas  
periódicas**

**MARILIA OLIVEIRA GALINDO**

SÃO CRISTÓVÃO – SE  
SETEMBRO DE 2024

**Universidade Federal de Sergipe**  
**Centro de Ciências Exatas e Tecnologia**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado em Matemática**

**O método da Média e alguns resultados sobre órbitas  
periódicas**

por

**MARILIA OLIVEIRA GALINDO**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Angelo Alberti**

São Cristóvão – SE  
setembro de 2024

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

G158m Galindo, Marília Oliveira  
O método da média e alguns resultados sobre órbitas periódicas / Marília Oliveira Galindo ; orientador Angelo Alberti. – São Cristóvão, 2024.  
110 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Sistemas hamiltonianos. 3. Método da média (Equações diferenciais). 4. Perturbação (Matemática). 5. Problema de dois corpos. I. Alberti, Angelo Vinicius Santos orient. II. Título.

CDU 517.91



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## **O método da Média e alguns resultados sobre órbitas Periódicas**

*por*

*Marilia Oliveira Galindo*

Aprovada pela banca examinadora:

---

Prof. Dr. Angelo Alberti - UFS  
Orientador

---

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo - UFS  
Primeiro Examinador

---

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho - UFMA  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Outubro de 2024



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que fizeram parte desta jornada, em especial aos meus pais e a cada professor e professora do departamento de matemática da Universidade Federal de Sergipe, por proporcionarem este ambiente estimulante e acolhedor, bem como aos meus colegas de curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

Nesta dissertação, investigamos o método da média, que se destaca como uma das principais ferramentas na Teoria de Perturbações aplicada a equações diferenciais ordinárias, com especial ênfase em sistemas Hamiltonianos. O método da média baseia-se na consideração de uma equação diferencial de primeira ordem não autônoma e periódica no tempo, assim como na elaboração de uma mudança de coordenadas que possibilita o estudo da equação original por meio de uma equação diferencial autônoma, denominada equação média. Este processo proporciona uma aproximação satisfatória para a equação original em um intervalo de tempo limitado. Ademais, o método da média é utilizado para identificar soluções periódicas em sistemas perturbados, que consistem em uma parte não perturbada, a qual apresenta soluções periódicas, e uma parte perturbada, dependente de um pequeno parâmetro. Demonstraremos que a abordagem para encontrar soluções periódicas nesses sistemas refere-se à busca por equilíbrios não degenerados de uma função específica. Em particular, apresentamos os resultados obtidos com o método da média em relação à existência de soluções periódicas para sistemas Hamiltonianos perturbados com dois graus de liberdade. Como aplicação desses resultados, analisamos a presença de soluções periódicas em dois problemas que representam perturbações no plano do problema de Kepler: o problema do átomo de hidrogênio sob a influência de forças externas e o problema de Kepler anisotrópico do tipo Manev.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Ordinárias; Sistemas Hamiltonianos; Método da Média para Equações Diferenciais Ordinárias; Método da Média; Soluções Periódicas; Sistemas Perturbados; Sistemas com Perturbação; Problema de Kepler; Problema de Kepler anisotrópico tipo Manev.

# Abstract

In this dissertation, we study the averaging method, which stands out as one of the main tools in the theory of perturbations applied to ordinary differential equations, with special emphasis on Hamiltonian systems. The averaging method is based on the consideration of a non-autonomous first-order differential equation that is periodic in time, as well as on the development of a change of coordinates that makes it possible to study the original equation by means of an autonomous differential equation, known as the averaging equation. This procedure provides a satisfactory approximation to the original equation over a limited time interval. In addition, the averaging method is used to identify periodic solutions in perturbed systems, which consist of an unperturbed part, which presents periodic solutions, and a perturbed part, which depends on a small parameter. We will show that the approach to finding periodic solutions in these systems refers to the search for non-degenerate equilibria of a given function. In particular, we present the results obtained with the averaging method regarding the existence of periodic solutions for perturbed Hamiltonian systems with two degrees of freedom. As an application of these results, we analyze the existence of periodic solutions in two problems that represent perturbations in the plane of the Kepler problem: the hydrogen atom problem under the influence of external forces and the anisotropic Kepler problem of the Manev type.

**Keywords:** Ordinary Differential Equations; Hamiltonian Systems; Average Method for Ordinary Differential Equations; Average Method; Periodic Solutions; Disturbed Systems; Kepler problem; Manev-type anisotropic Kepler problem.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Sistemas Hamiltonianos . . . . .	6
1.1.1 Sistemas Hamiltonianos Autônomos . . . . .	12
1.1.2 Sistemas Hamiltonianos Lineares . . . . .	14
1.2 Transformações Simpléticas . . . . .	20
1.2.1 Matrizes Simpléticas . . . . .	21
1.2.2 Espectro de uma matriz simplética . . . . .	26
1.2.3 Transformações simpléticas . . . . .	27
1.2.4 Sistemas Diferenciais Lineares Periódicos . . . . .	30
1.2.5 Teorema de Floquet para Sistemas Hamiltonianos . . . . .	34
1.2.6 O Colchete de Poisson . . . . .	35
1.2.7 O Teorema do Fluxo Tubular . . . . .	39
1.2.8 Funções Geradoras . . . . .	42
1.3 Órbitas Periódicas e Aplicação de Poincaré . . . . .	46

<b>2</b>	<b>O problema de Kepler planar e as Coordenadas de Delaunay</b>	<b>50</b>
2.1	O problema de 2-corpos e o problema de Kepler . . . . .	51
2.1.1	Anomalia excêntrica e Anomalia verdadeira . . . . .	57
2.2	O Problema de Kepler planar em coordenadas de Delaunay e Poincaré . . . .	60
<b>3</b>	<b>O método da Média e o estudo de órbitas periódicas</b>	<b>69</b>
3.1	Método da Média de Lagrange para Equações Diferenciais Ordinárias . . . .	70
3.1.1	Método da Média para o caso periódico . . . . .	73
<b>4</b>	<b>O método da Média e órbitas periódicas para Sistemas Hamiltonianos</b>	<b>87</b>
4.1	O Teorema de Reeb . . . . .	90
4.1.1	Perturbações planares do Problema de Kepler . . . . .	93
4.2	Aplicação: Átomo de Hidrogênio sob ação de forças externas . . . . .	96
4.3	O problema anisotrópico Manev planar-PMA . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>106</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>108</b>

# Introdução

Neste trabalho de dissertação introduzimos o método da média como ferramenta de estudo dos sistemas hamiltonianos perturbados, e exploramos também a sua forma mais moderna, que aparece nomeada por Teorema de Reeb.

Para isto, começamos comentando o contexto histórico sobre o qual se desenvolveu a base teórica para estes problemas. Iniciaremos estudando os sistemas hamiltonianos e alguns teoremas clássicos, para então desenvolver a teoria necessária para que se chegue a discussão sobre órbitas periódicas e método da média para sistemas não-lineares perturbados, assim como algumas aplicações.

Resumidamente, o método da média de primeira ordem, consiste em considerar um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x} = f(t, x, \epsilon) \tag{0.0.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$  é um parâmetro considerado pequeno e  $f$  é uma função  $T$ -periódica na variável  $t$  e  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  função de classe  $C^r$ . Então considera-se o seguinte sistema autônomo associado a (0.0.1), chamado de sistema médio, cujas equações são

$$\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y), \tag{0.0.2}$$

onde

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y, 0) ds,$$

é chamada de função média. O sistema (0.0.2) tem a propriedade de aproximar as curvas soluções de (0.0.1), numa região específica do espaço de fases, na escala de tempo  $1/\epsilon$ . Desta maneira o comportamento assintótico do sistema (0.0.1) pode ser aproximado pelo sistema autônomo (0.0.2).

Nesta dissertação estamos interessados em obter resultados para o estudo de soluções periódicas para sistemas Hamiltonianos autônomos como consequência do método da média descrito acima. Começamos com um resultado clássico para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que consiste no método da média de primeira ordem para soluções periódicas. Este resultado pode ser encontrado em [27]. Como consequência deste resultado, os autores em [10] obtiveram um resultado para o estudo de soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos perturbados usando o método da média. Neste resultado exige-se uma condição especial sobre a parte não perturbada e faz-se um escalonamento no tempo a fim de estar em condições de aplicar o método da média de primeira ordem para equações diferenciais [27]. O resultado mais moderno, do método da média consiste no Teorema de Reeb originalmente obtido em [23] e numa reformulação ainda mais moderna pelos autores em [28].

Nesse sentido, seguindo a linha cronológica dos resultados citados no parágrafo anterior, iremos descrever os principais resultados relacionados a órbitas periódicas para obter o resultado mais moderno na teoria de perturbação em sistemas Hamiltonianos, que consiste no Teorema de Reeb na versão apresentada por [28].

O Teorema de Reeb poder ser aplicado a certos sistemas Hamiltonianos perturbados em que a parte não perturbada depende de uma única ação e satisfazendo uma certa propriedade de diferenciabilidade. Então toma-se a função média em relação à variável angular, a qual é a conjugada da variável ação mencionada acima. Reduz-se então o sistema Hamiltoniano em um grau de liberdade e procura-se por pontos críticos isolados e não degenerados do sistema médio no espaço reduzido. A estes pontos críticos estão associadas órbitas periódicas do sistema não perturbado que dão origem a soluções periódicas do sistema completo. A eficácia deste método está na escolha de boas coordenadas para estudar estes pontos críticos. Desta maneira é necessário conhecer as soluções periódicas do sistema não perturbado e considerar boas coordenadas para descrever estas órbitas periódicas (soluções do sistema não perturbado).

Para entender este método, iremos considerar sistemas Hamiltonianos no plano que são perturbações analíticas do problema de Kepler. Mais particularmente, vamos usar coordenadas de Delaunay (planar), que são coordenadas ação-ângulo que estão bem definidas em uma vizinhança de uma órbita elíptica do problema de Kepler. Por fim, faremos um estudo da existência de soluções periódicas próximas a elipses em dois problemas que são perturbações do problema de Kepler: O problema do Átomo de Hidrogênio sob ação de

forças externas [2], e problema anisotrópico de dois corpos com potencial do tipo Manev, cujo estudo de órbitas periódicas foi realizado pelos autores em [11].

Os resultados que obtemos nesta dissertação a respeito da existência de soluções periódicas obtidos para os dois problemas citados no último parágrafo tem uma pequena contribuição em relação aos resultados publicados em [2] e [11]. Como veremos na seção 4.1, algumas características (período, condição inicial) das órbitas periódicas obtidas neste trabalho diferem dos resultados obtidos pelos autores em [2] e [11].

A fim de alcançar nossos objetivos, dividimos a dissertação da seguinte forma. No capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos importantes que serão utilizados durante este trabalho. Começamos com uma introdução aos sistemas Hamiltonianos e suas propriedades e estudamos alguns casos particulares: sistemas lineares e os sistemas mecânicos. Em seguida, apresentamos a teoria das transformações simpléticas, com alguns resultados e exemplos. Por fim, abordamos o estudo das funções geradoras e forneceremos alguns exemplos envolvendo essas funções.

No capítulo 2, formulamos o problema de  $N$ -corpos e, a partir dele, formularemos o problema de Kepler. Apresentamos algumas definições, as três leis de Kepler e o estudo das anomalias do problema de Kepler. Em seguida, introduziremos as coordenadas de Delaunay e Poincaré- Delaunay, fazendo uso das funções geradoras nesse processo. Por fim, trataremos o problema de Kepler nessas coordenadas e caracterizaremos as soluções desse problema nessas coordenadas.

No capítulo 3, descrevemos sobre o método da média para obtenção de órbitas periódicas, que é uma técnica utilizada para simplificar sistemas de equações ordinárias não-lineares que estão sujeitos a pequenas perturbações. Começamos falando sobre o método de Lagrange, e então seguindo para o método da média para o caso em que temos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem dependendo de um pequeno parâmetro  $\epsilon$  e periódico no tempo. Apresentamos um Teorema clássico, chamado método da média de primeira ordem, que estabelece condições suficientes para a existência de soluções periódicas do sistema perturbado e também alguns resultados sobre a estabilidade destas soluções.

No capítulo 4 apresentamos o método da média mais moderno no estudo de órbitas periódicas para sistemas Hamiltonianos, conhecido pelo Teorema de Reeb. Neste trabalho, consideramos a versão apresentada por [28]. Como caso particular, vamos considerar

sistemas Hamiltonianos perturbados no plano, cuja parte não perturbada é o problema de Kepler. Então, usando coordenadas de Delaunay, obtemos um resultado geral que garante a existência de soluções periódicas próximas a soluções elípticas do problema de Kepler. Como aplicação deste último resultado, consideramos dois problemas: O primeiro consiste no problema atômico do átomo de Hidrogênio sob ação de forças externas. As forças externas são devido à existência de um campo elétrico e um campo magnético. O problema pode ser posto como uma perturbação do problema de Kepler escolhendo um escalonamento adequando nos parâmetros. Desta maneira, usando os resultados obtidos nesta seção, provamos a existência de famílias de órbitas periódicas que persistem no problema perturbado para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. O segundo problema consiste no estudo de soluções periódicas no problema de Kepler anisotrópico planar com potencial do tipo Manev. Escalonando o parâmetro associado ao efeito de anisotropia de forma conveniente, pode-se pôr o problema como uma perturbação do problema de Kepler e novamente, usando os resultados desta seção, fazemos um estudo a respeito da existência de soluções periódicas do problema próximas a elipses.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados sobre equações diferenciais e sistemas Hamiltonianos que serão usados ao longo dessa dissertação os *Sistemas Hamiltonianos*, constituem uma importante classe de sistemas dinâmicos que surgem naturalmente na física e na matemática. Esse tipo de sistema foi inicialmente formulado pelo matemático, físico, e astrônomo irlandês, *William R. Hamilton*, no século XIX; elas representam uma reformulação, elegante e poderosa, das leis do movimento, descritas ao final do século XVII, pelo matemático, e pai da física, *Isaac Newton*.

Newton propôs suas conhecidas leis do movimento, tornando possível, assim, a descrição precisa do movimento de corpos, e a análise de uma ampla variedade de problemas físicos. A esse estudo, que descreve o movimento de corpos físicos, se deu o nome de *Mecânica Clássica*.

Cerca de um século depois, no século XVIII, Joseph-Louis Lagrange reformulou a mecânica clássica, usando o princípio da ação mínima, dando origem a *Mecânica Lagrangiana*, e introduzindo o conceito de *Lagrangiana* ( $L$ ), que é uma função que descreve a diferença entre a energia cinética ( $T$ ) e a energia potencial ( $V$ ) de um sistema. A mecânica lagrangiana facilitou a análise de sistemas com restrições e em coordenadas generalizadas (que nada mais são do que sistemas onde o movimento das partículas é limitado por certas condições, e em um tipo de coordenada que, além de descrever completamente a configuração do sistema, também irá simplificar a descrição das restrições e movimento do sistema, respectivamente).

Foi só no século XIX, que o William R. Hamilton fez uma outra reformulação da mecânica

clássica, introduzindo desta vez, a *Mecânica Hamiltoniana*. Ele publicou sua teoria em um artigo intitulado "On a General Method in Dynamics", e mostrou que as equações do movimento poderiam ser derivadas a partir de uma função chamada Hamiltoniana ( $H$ ), que representa, geralmente, a energia total do sistema, que é a soma da energia cinética com a energia potencial.

Tal abordagem trouxe vantagens significativas, pois alguns tipos de problemas se tornam mais simples quando escritos na formulação hamiltoniana, além de que, a mecânica hamiltoniana foi base para a formulação da *Mecânica Estatística*, e assim foi possível a formulação da tão conhecida *Mecânica Quântica* (área de estudo da física que descreve o comportamento das partículas físicas em escalas subatômicas, onde as leis clássicas da física não se aplicam). É a mecânica hamiltoniana quem fornece a base matemática estrutural, e conceitual, para a mecânica quântica, e, além disso, o desenvolvimento da mecânica quântica a partir da mecânica hamiltoniana permitiu a formulação de teorias fundamentais que descrevem a natureza em escala subatômica, e isso acabou por trazer implicações profundas nas áreas da física, química e tecnologia moderna. O formalismo Hamiltoniano também é o responsável por fornecer uma linguagem comum para a física quântica e para a física clássica, e estes são só um dos pontos que fazem o formalismo hamiltoniano ser tão importante. Do ponto de vista matemático, o formalismo hamiltoniano também é fascinante do ponto de vista puramente teórico, fornecendo uma estrutura geométrica rica, podendo ser utilizado para o estudo de dinâmicas regulares e caóticas.

## 1.1 Sistemas Hamiltonianos

Como vimos anteriormente, os Sistemas Hamiltonianos surgiram de uma reformulação das leis do movimento de Newton, o que permitiu um formalismo mais geral e elegante.

Os Sistemas Hamiltonianos se dividem em dois principais grupos: os *Sistemas Hamiltonianos Autônomos* e os *Sistemas Hamiltonianos não-Autônomos* (ou apenas Sistemas Hamiltonianos). E o que define esta diferença é a dependência ou independência explícita do tempo na função Hamiltoniana, o que leva a implicações significativas nas propriedades e comportamento dos sistemas que elas modelam.

Uma propriedade relevante com relação aos Sistemas Hamiltonianos Autônomos é que nele há *conservação da energia*, isto é, a energia total do sistema (que é definida como

sendo a soma da energia cinética com a energia potencial), representada pela Hamiltoniana  $H$ , é constante ao longo do tempo; demonstraremos este fato ao longo deste capítulo. Dentre alguns exemplos que se modelam com sistemas hamiltonianos autônomos, estão: o Oscilador Harmônico Simples (pêndulo simples ou sistema massa-mola), o Problema dos Dois Corpos (movimento de planetas ao redor do Sol), e problema de Kepler.

Nos Sistemas Hamiltonianos Não-Autônomos, a energia total do sistema pode variar ao longo do tempo, e portanto, não há garantia de conservação de energia. Além de que, já que há uma dependência do tempo, as propriedades dinâmicas daquele sistema também podem mudar ao longo do tempo, o que não acontece no caso autônomo.

**Definição 1.1.1.** *Um Sistema Hamiltoniano é um sistema com  $2n$  equações diferenciais ordinárias da forma:*

$$\begin{aligned}\dot{q} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_q\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

com  $H = H(q, p, t)$  uma função diferenciável de valores reais, definida para  $(q, p, t) \in W$ , tal que  $W = U \times I$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , e  $I \subset \mathbb{R}$ , ambos conjuntos abertos. Tal função  $H$  é chamada de função hamiltoniana, e o sistema de equações de primeira ordem (1.1.1) é chamado de campo hamiltoniano associado à  $H$ . As coordenadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$  e  $p = (p_1, \dots, p_n)$  são vetores do  $\mathbb{R}^n$ , e  $t$  é um número real, de forma que:

- $q$  representa as coordenadas generalizadas, que são um conjunto de variáveis que descrevem completamente a configuração de um sistema (posições),
- $p$  representa os momentos conjugados (momentos),

Com certa frequência será, também, conveniente trabalhar com as equações de Hamilton em termos de cada coordenada  $i$ , sendo descritas, então, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

com  $\dot{q}_i$  e  $\dot{p}_i$  representando as derivadas temporais das coordenadas e dos momentos, respectivamente. Estas equações descrevem como  $q$  e  $p$  evoluem ao longo do tempo.

**Exemplo 1.1.1.** Um dos exemplos mais simples de Sistema Hamiltoniano é do Oscilador Harmônico, onde a função Hamiltoniana é dada por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2; \quad (1.1.3)$$

onde  $p \in \mathbb{R}$  é a posição,  $q \in \mathbb{R}$  o momento,  $m$ , que denota a massa do corpo que oscila em uma mola, e  $k$  é a constante da mola, ambas  $k$  e  $m$  são constantes positivas.

Por definição, a energia total de um sistema conservativo, é a soma de sua energia cinética  $T$  com a sua energia potencial  $V$ . Ou seja,  $E = T + V$ , com  $E$  sendo a energia total do sistema.

Por outro lado, a energia cinética, que denominamos por  $T$ , é dada pela fórmula:

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Se fizermos  $v = \dot{q}$ , então poderemos reescrever  $T$  na forma:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2;$$

e desde que o momento é descrito como  $p = m\dot{q}$ , teremos, finalmente, que:

$$T = \frac{1}{2m}p^2. \quad (1.1.4)$$

Da mesma forma, temos que a energia potencial é definida como sendo a constante elástica  $k$  vezes a posição ao quadrado (que aqui chamamos de  $q$ ) dividido por 2. De maneira sucinta:

$$V = \frac{1}{2}kq^2. \quad (1.1.5)$$

De (1.1.4) e (1.1.5), nota-se que o hamiltoniano  $H$  realmente descreve a energia total do sistema associado ao oscilador harmônico. Temos, claramente, que:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = T + V = E.$$

Além disso, por (1.1.1), se segue que o sistema hamiltoniano associado é:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \right) = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \right) = -kq. \end{aligned}$$

Uma definição que será também bastante utilizada no estudo dos sistemas dinâmicos, e em particular nos sistemas hamiltonianos, é o chamado *espaço de fase de um sistema*.

O espaço de fase é um espaço matemático multidimensional onde cada ponto representa um estado possível do sistema. Em sistemas hamiltonianos, o espaço de fase fornece uma representação completa do estado de um sistema físico em termos de suas coordenadas generalizadas e momentos conjugados.

**Definição 1.1.2.** Para um sistema hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade, isto é, com  $n$  coordenadas generalizadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , o espaço de fase tem dimensão  $2n$ . Ele é definido como sendo o conjunto de todas as posições  $(q_1, \dots, q_n)$ , e os seus respectivos momentos conjugados  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Mais precisamente, o espaço de fase é formado por todos os possíveis pares  $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ; isto é:

$$\Sigma_H = \{(q, p) | q \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.1.6)$$

A evolução temporal de um sistema hamiltoniano, é descrita por trajetórias no espaço de fase, e são as equações de Hamilton que determinam como  $q$  e  $p$  mudam ao longo do tempo.

**Exemplo 1.1.2.** Note que, para o oscilador harmônico, cuja função hamiltoniana é dada por (1.1.3) o espaço de fase será bidimensional, com o eixo horizontal representando a posição e o eixo vertical representando o momento. Para traçar este gráfico, primeiro note que, desde que  $H$  não depende de  $t$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \right) = 0;$$

de onde segue que:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = E, \quad (1.1.7)$$

com  $E$  representando a energia total do sistema. Multiplicando ambos os lados da equação (1.1.7), por  $\frac{1}{E}$ , e reescrevendo  $k = \frac{1}{\frac{1}{k}}$ , nota-se que:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} = 1$$

descreve uma elipse centrada na origem e lados  $\sqrt{2mE}$  e  $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ , como representada abaixo:

Vale notar que variando a quantidade  $E$ , você terá o retrato de fase completo. A figura acima retrata como é o comportamento de uma fase para um  $E$  fixado.

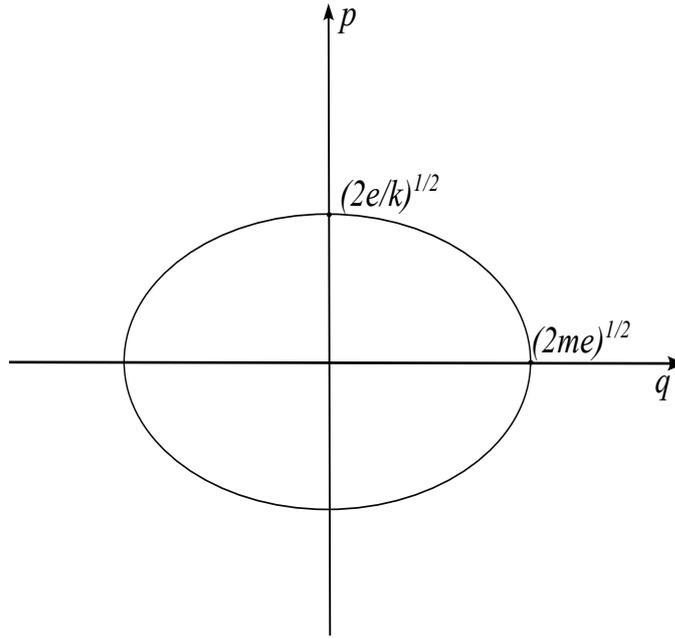


Figura 1.1: Trajetória do Oscilador Harmônico

Agora, introduziremos a definição de um termo que também é bastante utilizado nos estudos das equações diferenciais ordinárias e, em particular, citado nesta dissertação. Me refiro a introdução do conceito do que seria uma *integral primeira*  $F(x, t)$  de um sistema de EDO da forma  $\dot{x} = f(x, t)$ .

**Definição 1.1.3.** *Seja  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , tal que*

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (1.1.8)$$

*Uma função  $F(x, t)$  é dita uma integral primeira se:*

$$\frac{dF}{dt}(x, t) = \nabla F \cdot \dot{x} = \nabla F \cdot f(x, t) = \frac{d}{dt}F(f(t), t) = 0. \quad (1.1.9)$$

*E isto significa que  $F$  é constante ao longo das soluções de um sistema dinâmico, que neste caso, é dado por (1.1.8).*

No contexto dos sistemas hamiltonianos, uma integral primeira é uma quantidade conservada, como energia ou momento, que não muda com o tempo enquanto o sistema evolui.

Ou seja, para um sistema hamiltoniano, como o descrito em (1.1.1), uma integral primeira  $F(q_i, p_i, t)$  é uma função das coordenadas  $q_i$  e dos momentos  $p_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ ,

que satisfaz:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0$$

Substituindo as equações de Hamilton, temos que

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (1.1.10)$$

A equação (1.1.10) também pode ser escrita como

$$\{F, H\} = 0$$

onde  $\{., .\}$  é o colchete de Poisson, o qual é definido por

$$\{F, H\} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Assim, também podemos dizer que  $F$  é uma integral primeira de um sistema hamiltoniano, definido pela função hamiltoniana  $H$ , se o colchete de Poisson  $\{F, H\}$  for zero.

**Exemplo 1.1.3.** *Considere um oscilador harmônico simples, com a hamiltoniana definida por (1.1.3) e as equações de hamilton definidas por (1.1.1). Então, podemos verificar que a própria função Hamiltoniana  $H(q, p)$  é uma integral primeira.*

*De fato, utilizando das equações (1.1.3), (1.1.1) e (1.1.1), citadas acima, vem que:*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = (kq) \left( \frac{p}{m} \right) + \left( \frac{p}{m} \right) (-kq) = 0.$$

*E, portanto,  $H$  é constante ao longo das trajetórias do sistema (1.1.1).*

**Definição 1.1.4.** *Dizemos que uma coordenada generalizada  $q_i$ , de uma função hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$ , com  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma variável cíclica, quando esta não aparece explicitamente na função hamiltoniana  $H$ , o que significa que  $H$  independente de  $q_i$ . Mais precisamente:*

*Se*

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, t) = 0,$$

*então  $q_i$  é chamada de variável cíclica.*

**Proposição 1.1.1.** *Seja  $q_1$  uma variável cíclica de  $H = H(q, p, t)$ . Então  $p_1$  é uma integral primeira. Isto é*

$$\{p_1, H\} = 0$$

*Neste caso, a variação das coordenadas restantes no tempo é a mesma que um sistema com  $n - 1$  coordenadas independentes  $q_2, \dots, q_n$  com função Hamiltoniana*

$$\hat{H}(q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, t, c) = H(q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, t, c)$$

*dependente do parâmetro  $c = (p_1, q_1)$ .*

*Demonstração.* Se calcularmos  $\{p_1, H\}$ , teremos que:

$$\{p_1, H\} = \sum_i \left( \frac{\partial p_1}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial p_1}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Note que para todo  $p_i$  com  $i = 2, \dots, n$ , e para todo  $q_i$  com  $i = 1, \dots, n$ , qualquer  $\frac{dp_1}{dp_i}, \frac{dp_1}{dq_i}$  será igual a zero. Restando apenas

$$\{p_1, H\} = \frac{dp_1}{dp_1} \frac{dH}{dq_1}.$$

Uma vez que  $q_1$  é variável cíclica então  $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$ , o que implica que

$$\{p_1, H\} = 0,$$

e, portanto,  $p_1$  é integral primeira.

Daí, desde que  $p_1 = r$  e  $q_1 = k$  são constantes, fazendo  $c = (r, k)$  se segue que

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \hat{H}(q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, t, c)$$

como queríamos demonstrar. ■

### 1.1.1 Sistemas Hamiltonianos Autônomos

Nesta seção apresentaremos resultados a respeito de sistemas hamiltonianos autônomos.

**Definição 1.1.5.** *Dizemos que a função  $H = H(q, p, t)$  define sistema hamiltoniano autônomo se este independe de  $t$ , isto é:*

$$H(q, p, t) = H(q, p) \tag{1.1.11}$$

Observe que, ao supor que a função hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$  não depende de  $t$ , se segue que:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = H_q \dot{H}_p - H_p \dot{H}_q = 0, \quad (1.1.12)$$

qualquer que seja o  $t \in \mathbb{R}$ . Ou seja,  $H$  é uma *quantidade conservada*. Neste caso, o sistema hamiltoniano diz-se *conservativo*, e  $H$  representa a *energia do sistema*. Daí, considerando o conjunto  $U$  como na definição (1.1.1), teremos que o conjunto definido por:

$$\Sigma_h = \{(q, p) \in U \mid H(q, p) = h\}, \quad h \in \mathbb{R},$$

denota a superfície de energia. Note que  $\Sigma_h$  será representada pelas superfícies de nível de  $H(q, p)$ .

O fato de que  $\dot{H} = 0$  implica que as soluções estarão contidas em alguma superfície de energia. Ou seja, se  $(q(t), p(t))$  denota uma solução do sistema hamiltoniano dado por (1.1.12), então  $H(q(t), p(t)) = h$ , para algum  $h \in \mathbb{R}$ .

Partindo agora do ponto de vista matricial, sejam  $z$ ,  $J$ , e  $\nabla H$ , da seguinte forma:

$$z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad (1.1.13)$$

com  $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $I$  sendo a matriz identidade de ordem  $n$ , e  $H$  a função hamiltoniana definida em (1.1.11).

Então, poderemos reescrever o sistema (1.1.12) como

$$\dot{z} = J \nabla H(z) \quad (1.1.14)$$

A matriz  $J$ , mencionada em (1.1.13) tem a propriedade de que:

$$J^{-1} = J^T = -J$$

pois

$$J \cdot (-J) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

e

$$(-J) \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

e, portanto,  $J^{-1} = -J$ ; que  $-J = J^T$  é fácil ver.

Temos também, de forma praticamente direta, que  $\det J = 1$ . Estas propriedades, que foram agora citadas, serão mencionadas de forma direta nos textos subsequentes, por serem muito simples e de fácil verificação.

## 1.1.2 Sistemas Hamiltonianos Lineares

É conveniente estudar, também, os sistemas hamiltonianos na forma matricial, tanto do ponto de vista prático, quanto teórico. Para tal, considere a partir de agora, a matriz  $J$  como descrita em (1.1.13), com campo hamiltoniano como descrito em (1.1.1), e o vetor  $z$ , definido por:

$$z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

A função Hamiltoniana  $H$ , associada ao sistema hamiltoniano descrito em (1.1.1), fica na seguinte forma:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(q, p)\check{A} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z^T \check{A}z, \quad (1.1.15)$$

uma função quadrática com variáveis  $q$  e  $p$ , associadas ao campo hamiltoniano (1.1.1).

Para a função hamiltoniana dada em (1.1.13), as equações de Hamilton para o sistema (1.1.1) associado, é dado por

$$\dot{z} = J\nabla H(z) = J\check{A}(t)z = A(t)z \quad (1.1.16)$$

onde  $\nabla H(z) = \check{A}z$ , e  $A(t) = J\check{A}(t)z$ .

A representação matricial é bastante utilizada para análise espectral do sistema.

Associado ao estudo de sistemas hamiltonianos na forma matricial, surge o conceito do que seria uma *Matriz Hamiltoniana*.

Uma Matriz Hamiltoniana  $A$ , é uma matriz quadrada que surge na representação de sistemas hamiltonianos na forma matricial. Ela está associada a um sistema hamiltoniano linear e satisfaz certas propriedades relacionadas com a estrutura simplética do espaço de fase.

**Definição 1.1.6.** Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{2n}(\mathbb{R})$  é dita hamiltoniana, se a matriz  $JA$  é simétrica. Mais precisamente,

$$(JA)^T = JA.$$

Os autovalores de uma matriz hamiltoniana  $A$  têm uma estrutura especial. Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , então também o serão:  $\bar{\lambda}$ ,  $-\lambda$  e  $-\bar{\lambda}$ , onde  $\bar{\lambda}$  representa o conjugado complexo de  $\lambda$ . E isto, implica que, os autovalores de uma matriz hamiltoniana ocorrem em pares  $(\lambda, -\lambda)$  e, se complexos, em quadras  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$ .

De fato, pois considere que  $\lambda$  é um autovalor de  $H$ . Então, existe um vetor  $v$  bem definido no nosso espaço vetorial associado a função hamiltoniana  $H$  atuante, tal que

$$Av = \lambda v \tag{1.1.17}$$

Se tomarmos a conjugação da equação, então

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v},$$

e, desde que,  $H$  tem entradas reais, então

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}.$$

Isso mostra que  $\bar{\lambda}$  é um autovalor de  $A$ , com autovetor  $\bar{v}$ .

Para mostrar que  $-\lambda$  também o é, multiplicaremos a equação (1.1.17) por  $J$ , de modo a obter que,

$$JAv = J\lambda v = \lambda Jv,$$

uma vez que  $\lambda$  é apenas um número.

Temos, também, que como  $A$  é hamiltoniana, então  $JA$  é simétrica, de modo que, tomando a transposta na equação (1.1.17), teremos

$$\begin{aligned} (JAv)^T &= (\lambda Jv)^T \\ v^T(JA)^T &= \lambda v^T J^T \\ v^T JA &= -\lambda v^T J, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $J^T = -J$ . Tomando novamente a transposta, e utilizando novamente a simetria de  $JA$ , segue que,

$$JAv = -\lambda J^T v$$

multiplicando a equação acima por  $-J$ , vem, finalmente, que

$$Av = -\lambda v,$$

o que demonstra que  $-\lambda$  é também um autovalor de  $A$ , com autovetor  $v$  associado.

Para mostrar que  $-\bar{\lambda}$  é, também, um autovalor, basta utilizar os itens anteriores, pois, já que  $\bar{\lambda}$  é um autovalor, então  $-\bar{\lambda}$  também o é, com autovetor associado  $\bar{v}$ .

O teorema a seguir nós dá a caracterização das matrizes hamiltonianas:

**Teorema 1.1.1.** *Sejam  $A, R \in \mathbb{M}_{2n \times 2n}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A matriz  $A$  é hamiltoniana;*
- (ii)  *$A = JA^T J$ ;*
- (iii)  *$A = JR$  onde  $R$  é simétrica;*
- (iv)  *$JA$  é simétrica.*

*Demonstração.* Primeiro provaremos que (i) implica (ii).

Seja  $A$  hamiltoniana. Então:

$$(JA)^T = A^T J^T = JA$$

Multiplicando  $J^{-1}$  pelo lado esquerdo da igualdade acima, e utilizando o fato de que  $J^{-1} = J^T = -J$ , se segue que:

$$J^{-1}AJ^T = JAJ = A,$$

como queríamos demonstrar.

Agora, iremos demonstrar que (ii) implica em (iii).

Seja  $R = A^T J$ , com  $A = JA^T J$ . Então:

$$R^T = J^T A = J^T (JA^T J) = (J^T J)A^T J = A^T J = R,$$

e isto implica que  $R$  é uma matriz simétrica, e daí  $A = JR$ .

Supondo agora o item (iii).

Uma vez que  $A = JR$ , então:

$$JA = J^2 R = -IR = -R$$

Daí,

$$(JA)^T = (-R)^T = -R = JA,$$

o que conclui a simetria da matriz  $JA$ .

Considerando agora, a veracidade do item (iv), iremos demonstrar, que se  $JA$  é simétrica, então  $A$  é matriz hamiltoniana.

Seja  $JA$  simétrica, então:

$$JA = A^T J^T = -A^T J.$$

Daí, multiplicando ambos os lados da equação acima por  $J$ , teremos que:

$$J^2 A = -JA^T J,$$

o que implica que:

$$A = JA^T J,$$

matriz hamiltoniana. ■

Como consequência deste teorema, e da definição de sistemas hamiltonianos lineares, a matriz dos coeficientes de um sistema hamiltoniano linear deve ser uma matriz Hamiltoniana, já que está é simétrica.

**Proposição 1.1.2.** *O polinômio característico de uma matriz hamiltoniana é uma função par.*

*Demonstração.* Para isto, considere que  $\lambda$  é um autovalor da matriz hamiltoniana  $A$ . Então:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{1.1.18}$$

é o polinômio característico.

Desde que  $A$  é uma matriz hamiltoniana, então,  $A = JS$ , com  $S$  sendo uma matriz simétrica. Por outro lado, como  $J$  é uma matriz antissimétrica, então  $J^T = -J$ . Daí:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(JS - \lambda I) = \det(JS - \lambda I)^T \\ &= \det(S^T J^T - \lambda I) = \det(-SJ - \lambda I). \end{aligned}$$

Além disso, é fácil ver que  $J^2 = -I$ , basta fazer:

$$J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -I,$$

e, portanto,

$$\det J^2 = \det(-I) = -1. \quad (1.1.19)$$

Temos também que:

$$\det J = \det((-I)(-J)) = \det(-I) \cdot \det(-J) = -1 \cdot \det(J^2) = 1. \quad (1.1.20)$$

De (1.1.2), (1.1.19) e (1.1.20), vem que

$$\begin{aligned} \det(-SJ - \lambda I) &= \det[(-1) \cdot (SJ + \lambda I)] \\ &= (-1) \cdot \det(SJ + \lambda I) \\ &= (\det J^2) \cdot (\det(SJ + \lambda I)) \\ &= \det[J^2 \cdot (SJ + \lambda I)] \\ &= \det[J \cdot (JSJ + \lambda JI)] \\ &= (\det J) \cdot (\det(JSJ + \lambda JI)) \\ &= (\det J) \cdot (\det[(JS + \lambda I) \cdot J]) \\ &= (\det J) \cdot (\det(JSJ + \lambda JI) \cdot \det J) \\ &= (\det J) \cdot (\det(JS + \lambda I) \cdot \det J) \\ &= 1 \cdot \det(JS + \lambda I) \cdot 1 \\ &= \det(JS + \lambda I) \\ &= p(-\lambda). \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

A proposição acima, também é útil para demonstrar que se  $\lambda$  é um autovetor, então  $-\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  e  $-\bar{\lambda}$  também o são, já que isto é também, uma consequência da pariedade do polinômio característico associado a  $\lambda$ .

**Teorema 1.1.2.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes Hamiltonianas de igual ordem. Então*

(i)  $A^T$ ;

(ii)  $\alpha A$ ,  $\alpha$  constante;

(iii)  $A \pm B$  e

são, também, Hamiltonianas.

*Demonstração.* Iremos demonstrar o item (i). Para isto, note que:

$$(JA^T)^T = JA^T \iff -AJ - JA^T = 0.$$

Portanto, para demonstrar o item (i), iremos mostrar que  $-AJ - JA^T = 0$ . Para isto, seja  $A$  hamiltoniana; então:

$$\begin{aligned}
-AJ - JA^T &= -AJ - (AJ^T)^T \\
&= -AJ + (AJ)^T \\
&= -AJ + AJ, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos.

A veracidade do item (ii) é direta, já que:

$$(\alpha JA)^T = \alpha (JA)^T = \alpha (JA).$$

Para o item (iii) a demonstração também é direta, basta fazer:

$$\begin{aligned}
(J(A \pm B))^T &= (A \pm B)^T J^T \\
&= A^T J^T \pm B^T J^T \\
&= JA \pm JB \\
&= J(A \pm B),
\end{aligned}$$

pois  $A$  e  $B$  são hamiltonianas. ■

Vejamos agora as condições, sobre os coeficientes de uma matriz  $A$ , para que esta seja Hamiltoniana.

No caso  $2 \times 2$ , considere

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Então:

$$(JA)^T - JA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \delta \\ -\alpha - \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, para que  $A$  seja Hamiltoniana:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha + \delta \\ -\alpha - \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é:

$$\alpha + \delta = 0 = -\alpha - \delta \iff \alpha = \delta = 0.$$

As observações acima, nos levam ao seguinte resultado:

**Proposição 1.1.3.** Uma matriz  $A_{2 \times 2}$  é Hamiltoniana se, e somente se, seu traço é nulo.

*Demonstração.* Segue, diretamente, das observações acima. ■

Estendendo esta ideia para uma matriz  $A_{2n \times 2n}$ , podemos escrevê-la em forma de blocos, como:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.1.21)$$

onde  $a, b, c, d$ , são matrizes  $n \times n$ .

**Proposição 1.1.4.** A matriz  $A$ , como descrita em (1.1.21) é Hamiltoniana se, e somente se,  $a^T + d = 0$  e  $c$  e  $d$  são matrizes simétricas.

*Demonstração.* Dada a matriz  $A$ , como em (1.1.21), então

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix},$$

de onde segue que

$$(JA)^T = \begin{pmatrix} c^T & -a^T \\ d^T & -b^T \end{pmatrix}$$

Logo, para que  $A$  seja hamiltoniana  $JA$  deve ser igual a  $(JA)^T$ . Ou seja,

$$c = c^T, \quad b = b^T$$

e

$$-a = d^T, \quad d = -a^T \iff a^T + d = 0$$

■

## 1.2 Transformações Simpléticas

As transformações simpléticas possibilitam a mudança de coordenadas, preservando a estrutura hamiltoniana. Esse tipo de transformação surge, muitas vezes, da necessidade de transformar um problema complexo em um mais conveniente, mantendo a estrutura hamiltoniana inicial.

## 1.2.1 Matrizes Simpléticas

E, para iniciar o estudo das transformações simpléticas, comecemos primeiro pela seguinte definição:

**Definição 1.2.1.** Uma matriz  $T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  é denominada  $\mu$ -simplética, ou simplética com multiplicador  $\mu$ , se:

$$T^T J T = \mu J,$$

com  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Se  $\mu = 1$ ,  $T$  é dita simplética.

Como resultado desta definição, segue-se o seguinte Teorema:

**Teorema 1.2.1.** Se  $T$  é simplética com multiplicador  $\mu$ , então  $T$  é não singular; ou seja, tem inversa e seu determinante é diferente de zero. Além disso,  $T^{-1} = -\mu^{-1} J T^T J$ .

*Demonstração.* De fato. Se  $T$  é simplética, por definição:

$$T^T J T = \mu J,$$

que calculando o determinante, nos retorna que:

$$\det(T^T J T) = \det(\mu J).$$

Por propriedades do determinante, temos que:

$$\det(T^T J T) = \det(T^T) \det(J) \det(T) = \mu \det(J). \quad (1.2.1)$$

Daí, usando o fato que  $\det T^T = \det T$ ,  $\det J = 1$ , e  $\mu \neq 0$ , vem que:

$$\det(T^T J T) = \det T \det T = \mu \neq 0,$$

de, portanto,  $\det T \neq 0$ .

Além disso, usando o fato de que  $T$  é uma matriz simplética, e que  $J^{-1} = -J$ , temos:

$$T = -J(T^T)^{-1} \mu J$$

Daí

$$\begin{aligned}
(T)(-\mu^{-1}JT^T J) &= (-J(T^T)^{-1}\mu J)((-\mu^{-1}JT^T J)) \\
&= J(T^T)^{-1}J^2T^T J \\
&= J(T^T)^{-1}(-1)IT^T J \\
&= (-1)JIJ \\
&= (-1)J^2 \\
&= (-1)(-1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

E portanto,  $T^{-1} = -\mu^{-1}JT^T J$ . ■

**Teorema 1.2.2.** *Seja  $T$  uma matriz  $\mu$ -simplética e  $R$  uma matriz  $\nu$ -simplética. Então são também simpléticas:*

- a. O produto  $TR$ , que é uma matriz  $\mu\nu$ -simplética;
- b. A transposta  $T^T$ , matriz  $\mu$ -simplética, e
- c. A inversa  $T^{-1}$  que é uma matriz  $\mu^{-1}$ -simplética.

*Demonstração.* Desde que  $T$  e  $R$  são simpléticas, então  $T = J^{-1}(T^T)^{-1}\mu J$  e  $R = J^{-1}(R^T)^{-1}\nu J$ , de onde vem que:

$$\begin{aligned}
TR &= (J^{-1}(T^T)^{-1}\mu J)(J^{-1}(R^T)^{-1}\nu J) \\
&= J^{-1}(T^T)^{-1}\mu(R^T)^{-1}\mu\nu J \\
&= J^{-1}(R^T T^T)^{-1}\mu\nu J \\
&= J^{-1}((TR)^T)^{-1}\mu\nu J.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $(TR)^T J$ , segue-se que:

$$TR = (TR)^T J (TR) = \mu\nu J.$$
■

É interessante, também, se perguntar acerca das propriedades envolvendo os blocos desse tipo de matriz. Para isso, que olhemos, primeiro, para o caso  $2 \times 2$ :

**Exemplo 1.2.1.** *Seja  $T$  a matriz*

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

então

$$T^T J T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ -\alpha\delta + \beta\gamma & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

Para que (1.2.2) seja igual a  $J$ , então  $\alpha\delta - \beta\gamma = \det(T) = 1$ .

No caso  $2n \times 2n$ , escrevendo a matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.2.3)$$

com  $a, b, c$  e  $d$  matrizes  $n \times n$ , teremos que

$$T^T J T = \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

**Proposição 1.2.1.** *Considere  $T$  como em (1.2.3).  $T$  é simplética com multiplicador  $\mu$  se, e somente se,  $a^T d - c^T b = \mu I$  com  $a^T c$  e  $b^T d$  simétricas.*

*Demonstração.* Considerando a equação (1.2.4),  $T$  ser simplética com multiplicador  $\mu$  implica que  $T^T J T = J$ , isto é:

$$\begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu I \\ -\mu I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.5)$$

O que acontece se, e somente se:

$$\begin{cases} a^T - c^T a = 0 \\ b^T c - d^T a = 0 \\ a^T d - c^T b = \mu I \\ b^T c - d^T a = -\mu I \end{cases} \iff \begin{cases} a^T c = c^T a = (a^T c)^T \\ b^T d = d^T b = (b^T d)^T \\ a^T d - c^T b = \mu I \\ (-1)(b^T c - d^T a) = a^T d - c^T b = \mu I \end{cases} \iff \begin{cases} a^T c = (c^T a)^T \\ b^T d = (d^T b)^T \\ a^T d - c^T b = \mu I \end{cases}$$

E isto conclui a demonstração. ■

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $T$ , uma matriz da forma (1.2.3), simplética. Então:*

$$T^{-1} = \mu^{-1} \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ -c^T & a^T \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

*Demonstração.* Demonstraremos para o caso  $\mu = 1$ , pois o caso  $\mu \neq 1$  é análogo.

De fato, pois, se  $T$  é simplética, então :

$$T^T J T = J \iff T^T J = J T^{-1}. \quad (1.2.7)$$

Se for verdade que a  $T^{-1}$  como dada em (1.2.6), é a inversa da  $T$ , como dada em (1.2.3), então a  $T^{-1}$  deve satisfazer a equação (1.2.7), o que iremos conferir a seguir. Para isto note que,

$$T^T J = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^T & a^T \\ -d^T & b^T \end{pmatrix}, \quad (1.2.8)$$

e

$$JT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ -c^T & a^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^T & a^T \\ -d^T & b^T \end{pmatrix}. \quad (1.2.9)$$

Note que para demonstrar que  $T^{-1}$ , como dada acima, é simplética, basta multiplicar  $(T^T)^{-1}$  à esquerda na equação (1.2.7).

Desde que  $T^{-1}$  satisfaz a equação (1.2.7), a demonstração está concluída. ■

Agora, considere o Hamiltoniano linear dado por (1.1.15), com  $A(t)$  a matriz Hamiltoniana. Iremos demonstrar a seguir que uma transformação linear induzida por uma matriz  $\mu$ -simplética leva sistemas Hamiltonianos lineares em sistemas hamiltonianos lineares.

Considere uma mudança de coordenadas induzida por  $T$ , matriz  $\mu$ -simplética, de forma que  $\zeta = Tz$ , então:

$$\dot{\zeta} = TAT^{-1}\zeta.$$

Afirmamos que a matriz dada por  $B = TAT^{-1}$  é também hamiltoniana. De fato, pelo item (ii) do Teorema (1.1.1), se  $B$  for hamiltoniana, então:

$$B = JB^T J \iff J^{-1}B = B^T J \iff B^T J + JB = 0,$$

onde  $J^{-1} = -J$ .

Mas

$$\begin{aligned} B^T J + JB &= (TAT^{-1})^T J + JTAT^{-1} \\ &= (T^T)^{-1} A^T T^T J + JTAT^{-1} \\ &= -\mu(JT^T J)^T A^T T^T J - \mu JTAJT^T J \\ &= -\mu JTJA^T T^T J - \mu JTAJT^T J \\ &= -\mu JT(JA^T + AJ)T^T J \\ &= 0, \end{aligned}$$

e isto implica que  $B$  é hamiltoniana, conforme foi anteriormente afirmado.

Por outro lado, sabemos que a função hamiltoniana associada ao sistema linear  $A(t)$  é dada por:

$$H(z, t) = \frac{1}{2} z^T S(t) z,$$

tal que:

$$A(t) = JS(T) \iff S(t) = -JA(t).$$

Logo, a função hamiltoniana associada ao sistema linear definido por  $\zeta$  é dada por:

$$H(\zeta, t) = \frac{1}{2}\zeta^T S(t)\zeta, \quad B(t) = JS(t) \Leftrightarrow S(t) = -JB(t) = -JTA(t)T^{-1} = \frac{1}{\mu}JTA(t)JT^T J.$$

Agora veremos um resultado que caracterizará a matriz fundamental de um sistema hamiltoniano linear:

**Teorema 1.2.3.** *A matriz solução fundamental  $Z(t, t_0)$  do sistema hamiltoniano linear dada pela equação (1.1.15), é simplética para todo  $t, t_0 \in I$ . Reciprocamente, se  $Z(t, t_0)$  é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então  $Z(t, t_0)$  é a matriz solução fundamental de um sistema hamiltoniano linear.*

*Demonstração.* Para demonstrar que a solução fundamental de um sistema hamiltoniano linear preserva estrutura simplética, considere que:

$$\dot{z} = A(t)z,$$

como a descrita em (1.1.15), com  $A(t)$  a matriz hamiltoniana.

Queremos demonstrar que para  $Z(t, t_0)$  matriz solução fundamental de (1.1.15), que é o sistema hamiltoniano linear descrito acima, deve satisfazer a propriedade:

$$Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0) = J.$$

Condicioneamos a solução inicial  $Z(t, t_0) = I$ . Daí, seja  $U(t) = Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0)$ . Desde que,  $Z(t, t_0) = I$ , se segue que:

$$U(0) = Z(t, 0)^T J Z(t, 0) = I^T J I = J.$$

Além disso, se calcularmos a derivada de  $U(t)$  com relação a  $t$ , teremos que:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= (AZ(t, t_0))^T J Z(t, t_0) + Z(t, t_0)^T J (AZ(t, t_0)) \\ &= Z(t, t_0)^T A^T J Z + Z(t, t_0)^T J A Z(t, t_0) \\ &= Z(t, t_0)^T A^T J Z(t, t_0) + Z(t, t_0)^T A^T J^T Z \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $A = A(t)$  é hamiltoniana e  $J^T = -J$ . Daí, uma vez que  $\dot{U}(t) = 0$ , então  $U(t)$  é uma função constante. Utilizando da condição inicial, teremos que:

$$U(0) = Z(t, 0)^T J Z(t, 0) = I^T J I = J,$$

e, portanto,  $Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0) = J$ , para todo  $t$  no intervalo aberto  $I$ , dado, e isto demonstra que a matriz solução fundamental de um sistema hamiltoniano linear preserva estrutura simplética.

Agora, suponha  $Z(t, t_0)$  simplética, isto é :

$$Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0) = J, \quad (1.2.10)$$

para todo  $t$  em  $I$ . Daí, derivando a expressão (1.2.10) acima, teremos que:

$$\dot{Z}(t, t_0) J Z(t, t_0) + Z(t, t_0)^T J \dot{Z}(t, t_0) = 0. \quad (1.2.11)$$

Multiplicando a direita por  $Z(t, t_0)^{-1}$  e a esquerda por  $(Z(t, t_0)^T)^{-1}$ , na equação (1.2.11), teremos:

$$((\dot{Z}(t, t_0) Z(t, t_0)^{-1})^T J + J (\dot{Z}(t, t_0) Z(t, t_0)^{-1})) = 0,$$

de onde segue que a matriz  $A(t) = \dot{Z}(t, t_0) Z(t, t_0)^{-1}$  é hamiltoniana, e:

$$\dot{Z}(t, t_0) = A(t) Z(t, t_0).$$

■

## 1.2.2 Espectro de uma matriz simplética

O espectro de uma matriz simplética refere-se ao conjunto de seus autovalores. Em outras palavras, é o conjunto de valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  para os quais existe um vetor não-nulo  $v$  tal que:

$$T v = \lambda v,$$

com  $T \in M_{2n \times 2n}$  sendo a matriz simplética,  $v \in \mathbb{R}^{2n}$ .

**Proposição 1.2.3.** *Seja  $T$  uma matriz simplética. Se  $\lambda$  é um autovalor, então também é autovalor  $\lambda^{-1}$ .*

*Demonstração.* Desde que  $T$  é simplética, temos que  $T^T = -J T^{-1} J$ , e se  $\lambda$  é autovalor de  $T$ , então:

$$\begin{aligned} p(\lambda) \quad \det(T - \lambda I) &= \det(T^T - \lambda I) = \det(-J T^{-1} J + \lambda J J) = \det J (T^{-1} + \lambda I) J \\ &= \det J \det(-T^{-1} + \lambda I) \det J = \det \left[ \lambda T^{-1} (T - \frac{1}{\lambda} I) \right] = \lambda^{2n} \det T^{-1} \det(T - \frac{1}{\lambda} I) \\ &= \pm \lambda^{2n} p(\frac{1}{\lambda}) \end{aligned}$$

■

Da proposição acima, note que se conhecermos um autovalor  $\lambda$  de uma matriz simplética qualquer, então também teremos  $\lambda^{-1}$ ,  $-\lambda$  e  $-\lambda^{-1}$ . Em particular, se 1 é autovalor então  $-1$  também é um autovalor, com multiplicidade par. Além disso, se  $\lambda$  é autovalor,  $\lambda^{-1}$  é autovalor com a mesma multiplicidade, de onde segue que:

**Proposição 1.2.4.** *O determinante de uma matriz simplética é 1.*

*Demonstração.* Utilizaremos a definição de matriz simplética e algumas propriedades do determinante para mostrar que o determinante de uma matriz simplética é igual a mais ou menos um.

Seja  $T$  uma matriz simplética. Então  $T^T J T = J$ . De onde se segue que

$$\det T^T J T = \det T^T \det J \det T = \det J$$

Desde que  $\det J = 1$ ,  $\det T^T = \det T$  e  $\det T^{-1} = \frac{1}{\det T}$ , se segue que

$$\det T \cdot 1 \cdot \det T = \det(T^2) = 1.$$

E isto implica que  $\det T = \pm 1$ .

O argumento que é utilizado para que  $\det T$  seja positivo, é que a matriz simplética deve preservar a orientação do espaço de fase, e por preservar orientação, o determinante deverá ser positivo. ■

### 1.2.3 Transformações simpléticas

Uma transformação simplética é uma transformação linear que preserva a estrutura simplética de um espaço vetorial.

Diremos que uma transformação de coordenadas  $E : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , com  $U \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $I \in \mathbb{R}$  abertos, é uma transformação canônica, ou simplética, se dado  $t \in I$  fixo, temos um difeomorfismo que satisfaz:

$$[D_z E(z, t)]^T J D_z E(z, t) = J. \tag{1.2.12}$$

Essa condição implica que a matriz jacobiana da transformação  $E(z, t)$  é simplética em todos os pontos  $z \in U$ , garantindo que a estrutura simplética do sistema original seja preservada.

Para simplificar a notação, definimos  $\zeta = E(z, t)$ , onde  $\zeta$  representa as novas coordenadas após a transformação simplética. A inversa de  $E$  será denotada por  $z = Z(\zeta, t)$ , de modo que:

$$z = Z(E(z, t), t) = Z(\zeta, t). \quad (1.2.13)$$

Usaremos também a notação simplificada  $(Q, P) = E(z, t)$ , onde  $Q$  e  $P$  são as novas coordenadas e momentos após a transformação, isto é,  $(Q, P)$  são as coordenadas simpléticas associadas a  $(q, p)$ , as coordenadas originais do sistema.

Como discutido no início desta seção, as transformações simpléticas desempenham um papel essencial na mudança de coordenadas dentro de sistemas hamiltonianos, preservando a estrutura geométrica do sistema. Ao aplicar uma transformação simplétrica, a função Hamiltoniana é transformada de acordo com as novas coordenadas  $(Q, P)$ . Se a Hamiltoniana original é dada por  $H(q, p, t)$ , sua versão transformada será:

$$H(\zeta, t) = H((Q, P), t) := H(Z(\zeta, t), t). \quad (1.2.14)$$

Ou seja, a função Hamiltoniana é reescrita em termos das novas variáveis  $\zeta = (Q, P)$ .

A equação de movimento transformada pode ser obtida como segue. A derivada temporal de  $\zeta$  é dada por:

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t)\dot{z}.$$

Por outro lado,  $\dot{z} = J \left( \frac{\partial H}{\partial z}(z, t) \right)^T$ , que podemos substituir na equação acima, de forma que:

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t) J \left( \frac{\partial H}{\partial z}(z, t) \right)^T.$$

Utilizando a relação entre as derivadas de  $z$  e  $\zeta$  através da transformação  $E$ , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z}(z, t) J \left( \frac{\partial H}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial z}(z, t) \right)^T.$$

Simplificando, fica:

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial E}{\partial t}(z, t) + J \nabla_{\zeta} H(\zeta, t), \quad (1.2.15)$$

onde  $\nabla_{\zeta} H(\zeta, t)$  é o gradiente da função Hamiltoniana nas novas coordenadas.

Para o caso em que a transformação simpléctica  $E$  não depende do tempo  $t$ , então  $\frac{\partial E}{\partial T} = 0$ , de modo que a equação de movimento se reduz a:

$$\dot{\zeta} = J\nabla_{\zeta}H(\zeta, t), \quad (1.2.16)$$

que é a forma simplificada das equações de Hamilton nas novas coordenadas, para o caso em que  $\frac{\partial E}{\partial T} = 0$ .

O resultado que observamos acima pode ser descrito na seguinte forma:

**Teorema 1.2.4.** *Seja  $E(z, t) = E(z)$  uma transformação autônoma de coordenadas simplécticas satisfazendo (1.2.12) e (1.2.13). Então,  $E(z, t)$  transforma o sistema (1.1.1), em um novo sistema hamiltoniano, dado por (1.2.16), cuja nova função hamiltoniana  $H$  será definida por (1.2.14).*

Agora, considere o caso em que a matriz Jacobiana (1.2.12) depende de  $t$ . Nesse caso, podemos formular um teorema semelhante, assumindo uma propriedade topológica adicional:

Para cada  $t$  fixo, o conjunto:

$$U_t := \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} / (\zeta, t) \in U \times I\} \quad (1.2.17)$$

é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Sob essa condição, mostraremos que existe uma função diferenciável  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\frac{\partial E}{\partial t}(z, t)|_{z=Z(\zeta, t)} = J\nabla_{\zeta}R(\zeta, t),$$

um requisito que permite assegurar que o sistema (1.2.15) permaneça hamiltoniano.

Há uma extensão dos resultados anteriores para transformações chamadas  $\mu$ -simplécticas, que são variantes das transformações simplécticas com um fator de multiplicação  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Estas transformações são definidas como difeomorfismos e seguem a mesma notação das transformações simplécticas. Elas devem atender a uma propriedade específica:

$$[D_z E(z, t)]^T J D_z E(z, t) = \mu J,$$

ou, equivalentemente,

$$[D_\zeta Z(\zeta, t)]^T J D_\zeta Z(\zeta, t) = \mu J, \quad (1.2.18)$$

com  $\mu$  constante.

Da mesma forma que as transformações simpléticas, as transformações  $\mu$ -simpléticas também mantêm a estrutura Hamiltoniana das equações intacta. Consequentemente, os teoremas (1.2.4) e (??) permanecem aplicáveis, com a substituição da função Hamiltoniana  $H$  por um novo Hamiltoniano

$$H(\zeta, t) = \mu H(Z(\zeta, t), t).$$

É importante notar que a conservação da estrutura hamiltoniana é obtida de maneira similar ao caso anterior. De fato, para simplificar a análise, vamos supor que  $E$  não é dependente de  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(z) + \frac{\partial E}{\partial z}(z) \dot{z} \\ &= \frac{\partial E}{\partial z}(z) J \left( \frac{\partial H}{\partial z}(z) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial z}(z) J \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}(\zeta) \frac{\partial E}{\partial z}(z) \right)^T \\ &= \frac{1}{\mu} \mu J \frac{\partial H^T}{\partial \zeta}(\zeta) \\ &= J \frac{\partial H^T}{\partial \zeta}(\zeta). \end{aligned}$$

## 1.2.4 Sistemas Diferenciais Lineares Periódicos

Para avançar nos estudos sobre *sistemas dinâmicos e mecânica hamiltoniana*, vamos primeiro estudar uma classe importante de *sistemas diferenciais lineares*: aqueles que são *periódicos*!

Nos *sistemas diferenciais lineares periódicos* os coeficientes da equação diferencial, são todos funções periódicas do tempo.

**Definição 1.2.2.** *Seja  $x(t)$  um vetor do  $\mathbb{R}^n$ . Um Sistema Diferencial Periódico, é um sistema diferencial, que é descrito pela equação diferencial:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t); \quad (1.2.19)$$

com  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$  cujos os elementos são funções periódicas dependentes do tempo  $t$ , com período  $T$ . Ou seja:

$$A(t + T) = A(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.2.2.** Considere o Oscilador Harmônico quando descrito na forma:

$$\ddot{x}(t) + \omega(t)^2 x(t) = 0, \quad (1.2.20)$$

onde  $x(t)$  representa a posição do oscilador harmônico no tempo  $t$  e  $\omega(t)$  representa a frequência angular do oscilador, que neste caso consideraremos não constante, e tal que  $\omega(t + T) = \omega(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Daí, reescreveremos o sistema (1.2.20) como um sistema linear de primeira ordem, com um novo vetor de estado

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}; \quad (1.2.21)$$

que derivando com respeito ao tempo, fica:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix}. \quad (1.2.22)$$

Por outro lado, subtraindo  $-\omega(t)^2 x(t)$  de ambos os lados da equação (1.2.20), obteremos que:

$$\ddot{x}(t) = -\omega(t)^2 x(t). \quad (1.2.23)$$

E então, substituindo (1.2.23) na equação (1.2.22), teremos finalmente que:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega(t)^2 x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(t)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}; \quad (1.2.24)$$

que reescrevendo na forma matricial, se torna:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t);$$

com

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(t)^2 x(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir disto, é fácil ver que  $A(t)$  é periódica, já que

$$A(t+T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(t+T)^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(t)^2 & 0 \end{pmatrix} = A(t).$$

E com isto, fica fácil perceber o exemplo do Oscilador Harmônico na forma de um sistema diferencial periódico.

**Proposição 1.2.5.** *Considere o sistema como descrito em (1.2.19), tal que  $X(t)$  é uma matriz solução do sistema associado. Então, existe uma matriz constante  $M$ ,  $n \times n$ , tal que  $X(t)$  pode ser reescrito como o produto de uma matriz fundamental  $Z(t)$  por  $M$ , com  $M$  representando as condições iniciais do sistema. Isto é*

$$X(t) = Z(t)M, \tag{1.2.25}$$

com  $M = X(0)$ .

*Demonstração.* Como  $X(t)$  é a matriz solução do sistema (1.2.19), então

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \tag{1.2.26}$$

com  $A(t)$  contínua e  $T$ -periódica. Temos, também, que  $Z(t)$  é uma matriz fundamental, e portanto

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t), \tag{1.2.27}$$

com  $Z(0) = I$ .

Afirmamos agora que a matriz solução  $X(t)$ , pode ser reescrita como

$$X(t) = Z(t)M. \tag{1.2.28}$$

De fato, de (1.2.28) vem que  $M = Z^{-1}(t)X(t)$ , uma vez que  $Z(t)$  é invertível, por ser uma matriz solução fundamental. Daí, aplicando a derivada com relação à  $t$ , em (1.2.28), vem que

$$\dot{X}(t) = \dot{Z}(t)M.$$

Substituindo  $Z(t)$  por (1.2.27) e utilizando o fato de que  $M = Z^{-1}(t)X(t)$ , teremos que

$$\dot{X}(t) = A(t)Z(t)Z^{-1}(t)X(t) = A(t)X(t).$$

Agora, calculando (1.2.28) no ponto inicial  $t = 0$ , teremos que

$$X(0) = Z(0)M = IM = M,$$

como queríamos. ■

O lema acima formaliza a propriedade de que qualquer solução de um sistema diferencial linear periódico pode ser expressa como o produto de uma matriz fundamental e um vetor constante, destacando a estrutura fundamental das soluções de sistemas lineares periódicos.

É importante notar, também, que uma matriz solução de um sistema linear com coeficientes periódicos, não necessariamente será periódica.

Como estamos falando de *sistemas diferenciais lineares periódicos*, o estudo de um conceito também se faz de nosso interesse; e este conceito, é o que se diz respeito a o que é uma *matriz de monodromia*. A *matriz de monodromia*, é uma matriz que descreve como as soluções de um *sistema linear de equações diferenciais periódicas* se comportam após um período completo. Formalizaremos, a seguir, este conceito, com o devido rigor matemático:

**Definição 1.2.3.** *Considere o sistema diferencial linear periódico como descrito em (1.2.19), e seja  $Z(t)$  a matriz fundamental associada ao sistema. Isto é:*

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t), \quad (1.2.29)$$

com condição inicial  $Z(0) = I$ . A *Matriz de Monodromia*  $M$  é definida como a matriz fundamental,  $Z(t)$ , avaliada ao final de um período  $T$ ; ou seja:

$$M = Z(T).$$

Daí, note que, por  $Z(t + T)$  também ser uma solução da equação (1.2.29), então, pela proposição (1.2.5),  $Z(t + T)$  pode ser escrito como:

$$Z(t + T) = Z(t)H;$$

com  $H$  sendo uma matriz  $n \times n$ , com  $H = Z(0+T) = Z(T) = M$ . E isso mostra que a matriz fundamental, após um período  $T$ , pode ser expressa em termos da matriz fundamental no tempo  $t$  e da matriz de monodromia  $M$ .

A matriz de monodromia também nos fornece informações sobre a estabilidade das soluções do sistema.

**Definição 1.2.4.** *São conhecidos por multiplicadores de Floquet, os autovalores da matriz de monodromia  $M$ , associado a um sistema de equações diferenciais lineares periódicas, que são sistemas da forma (1.2.29).*

É possível demonstrar que, se todos os multiplicadores têm módulo menor ou igual a 1, o ponto de equilíbrio é considerado estável e, se algum multiplicador tem módulo maior que 1, o ponto de equilíbrio é instável. Isto ficará citado apenas como curiosidade, pois a demonstração utiliza de teoria que não foi, nem será, comentada nesta dissertação.

Na próxima seção iremos estudar o *Teorema de Floquet*, que é uma ferramenta poderosa na análise desses sistemas diferenciais lineares periódicos.

### 1.2.5 Teorema de Floquet para Sistemas Hamiltonianos

O Teorema de Floquet é importantíssimo para o estudo das Equações Diferenciais Lineares Periódicas, e pode-se dizer que foi um marco para o estudo das mesmas. De maneira sucinta, este Teorema afirma que, a solução fundamental de um sistema diferencial linear periódico pode ser expressa como o produto de uma matriz periódica por uma matriz exponencial. Esta forma de escrita nos permite separar a parte periódica da solução da parte exponencial.

Para os sistemas Hamiltonianos, este teorema fornece uma maneira de entender a dinâmica das soluções, que refere-se ao comportamento das trajetórias das soluções ao longo do tempo, e a estabilidade das soluções, que diz respeito a maneira com que a solução reage a pequenas perturbações ao longo do tempo.

Nesta seção iremos considerar o sistema:

$$\dot{z} = A(t)z; \tag{1.2.30}$$

um sistema Hamiltoniano linear T-periódico, ou seja,  $A(t)$  é uma matriz Hamiltoniana periódica, com período  $T$ , e o sistema diferencial linear corresponde a um da forma (1.1.16).

**Teorema 1.2.5.** (*Teorema de Floquet-Liapunov*) *Seja  $Z(t)$  a matriz fundamental da equação (1.2.30) (descrita acima). Então, existem matrizes  $B$  e  $Q(t)$ ,  $n \times n$ , com  $B$  Hamiltoniana constante e  $Q(t)$  simplética  $T$ -periódica, tais que,*

$$Z(t) = Q(t)e^{tB}.$$

*Demonstração.* Como já vimos anteriormente,  $Z(t + T) = Z(t)Z(T)$ , e uma vez que  $Z(t)$  é invertível para todo  $t$ , então  $Z(t + T)$  também o é, de forma que  $Z(t + T)$  é também uma matriz fundamental. Daí, usando do fato de que toda matriz invertível de ordem  $n \times n$  tem um logaritmo, podemos afirmar que existe uma matriz  $B$  tal que  $Z(T) = e^T B$ . Além disso, como  $Z(t)$  é simplética, pelo teorema (1.2.3), podemos deduzir que  $B$  é uma matriz Hamiltoniana, pelo corolário (??).

Defina

$$Q(t) = Z(t)e^{-tB}.$$

Então:

$$\begin{aligned} Q(t + T) &= Z(t + T)e^{-(t+T)B} \\ &= Z(t)Z(T)e^{-tB}e^{-TB} \\ &= Z(t)e^{TB}e^{-tB}e^{-TB} \\ &= Z(t)e^{-tB} \\ &= Q(t); \end{aligned}$$

de onde concluímos que  $Q(t)$  é periódica. Como  $Q(t)$  é um produto de duas matrizes simpléticas, segue-se que  $Q(t)$  é também simplética. ■

Como consequência importante deste teorema, temos o seguinte corolário:

**Corolário 1.2.1.** *A transformação linear e simplética  $z = Q(t)w$  transforma o sistema Hamiltoniano periódico  $\dot{z} = A(t)z$  em um sistema Hamiltoniano autônomo  $\dot{w} = Bw$ .*

## 1.2.6 O Colchete de Poisson

Neste capítulo, exploraremos o *Colchete de Poisson*. Que foi um conceito introduzido por Siméon-Denis Poisson no início do século XIX, como parte de seus estudos sobre mecânica celeste. Poisson formulou esse operador como uma maneira de expressar a evolução temporal de grandezas físicas e suas interações dentro do formalismo da mecânica clássica. Graças a isso existia uma preocupação em descrever a evolução temporal de sistemas físicos, como planetas e corpos em movimento, sob a ação de forças, assim como uma preocupação referente ao desenvolvimento de ferramentas que permitissem o desenvolvimento de teoria para equações diferenciais. Poisson, juntamente com matemáticos como Joseph-Louis Lagrange e William Rowan Hamilton, contribuíram para

a criação de uma linguagem matemática que facilitasse a análise dessas interações complexas.

O Colchete de Poisson propicia em uma descrição eficiente e elegante da dinâmica de um sistema hamiltoniano.

**Definição 1.2.5.** *Sejam  $F(z, t)$  e  $G(z, t)$  funções diferenciáveis. O colchete de Poisson entre  $F$  e  $G$  é definido como:*

$$\{F, G\}_z(z, t) = [\nabla_z F(z, t)]^T J \nabla_z G(z, t) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right], \quad (1.2.31)$$

onde  $q_j$  e  $p_j$  são as coordenadas generalizadas e seus momentos correspondentes.

O colchete de Poisson mede como duas funções  $F$  e  $G$ , definidas no espaço de fase de um sistema Hamiltoniano, estão relacionadas em termos de sua evolução dinâmica. Ele é particularmente útil porque permite reescrever as equações de Hamilton como:

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}.$$

onde  $H$  é a função hamiltoniana, que corresponde geralmente à energia total do sistema.

Uma das propriedades mais notáveis do colchete de Poisson é sua invariância sob transformações simpléticas. As transformações simpléticas são mudanças de coordenadas que tem a propriedade de preservar a estrutura geométrica do sistema no espaço de fase.

Seja  $z \rightarrow \zeta = E(z, t)$  uma transformação simplética e seja  $\zeta \rightarrow z = Z(\zeta, t)$  sua inversa. Se definirmos as funções transformadas como :

$$\bar{F}(\zeta, t) = F(Z(\zeta, t), t), \quad \bar{G}(\zeta, t) = G(Z(\zeta, t), t), \quad (1.2.32)$$

nas novas coordenadas  $\zeta$  o colchete de Poisson continua o mesmo:

$$\{\bar{F}, \bar{G}\}_\zeta(\zeta, t) = \{F, G\}_z(Z(\zeta, t), t).$$

De fato, substituindo  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  como em (1.2.31), e (1.2.32), obtemos que :

$$\{\bar{F}, \bar{G}\}_\zeta(\zeta, t) = \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)^T \nabla_z F(Z(\zeta, t), t) \right]^T J \left[ \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right]^T \nabla_z G(Z(\zeta, t), t). \quad (1.2.33)$$

Agora, utilizando (1.2.18), em  $Z(\zeta, t)$  e substituindo em (1.2.33), teremos que:

$$\{\bar{F}, \bar{G}\}_\zeta(\zeta, t) = [\nabla_Z F(Z(\zeta, t), t)]^T J \nabla_Z G(Z(\zeta, t), t) = \{F, G\}_z(Z(\zeta, t), t).$$

O que prova que o colchete de Poisson é invariante sob transformações simpléticas. Tal resultado pode ser enunciado na forma de um teorema, como se segue:

**Teorema 1.2.6.** *Uma transformação simplética de coordenadas preserva o colchete de Poisson.*

Assim, se aplicarmos uma transformação simplética  $z \rightarrow \zeta = E(z, t)$ , o colchete de Poisson nas novas coordenadas  $\zeta$  será o mesmo que o colchete de Poisson nas coordenadas  $z$  originais.

Denominemos por  $\zeta_i = E_i(z, t)$  a  $i$ -ésima componente da transformação  $E$ . Em termos de componentes, a equação diz que :

$$\{E_i, E_j\} = J_{ij}. \quad (1.2.34)$$

Usando as coordenadas clássicas  $\zeta = (Q, P)$ , onde  $Q_i = Q_i(q, p, t)$ ,  $P_i = P_i(q, p, t)$ , teremos que:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.2.35)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker.

**Teorema 1.2.7.** *A transformação simplética  $z \rightarrow \zeta = E(z, t)$  é simplética se e somente se (1.2.35) é válido.*

*Demonstração.* Suponha que  $F$  é uma integral primeira associada ao sistema hamiltoniano dado por  $H(q, p, t) = H(z(t))$ .

Isto significa que  $F$  é uma quantidade conservada ao longo das soluções do sistema. Em outras palavras, temos que:

$$0 = \frac{d}{dt} F(z(t)) = \frac{d}{dt} F(q(t), p(t)).$$

Agora, calculando a derivada total de  $F$  com respeito ao tempo  $t$ , temos:

$$\frac{d}{dt} F(q(t), p(t)) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \dot{q}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \dot{p}_i(t) \right].$$

Esse resultado é precisamente o colchete de Poisson entre  $F$  e  $H$ , de forma que:

$$\frac{d}{dt}F(q(t), p(t)) = \{F, H\}_z(q(t), p(t)) = 0.$$

Ou seja, as relações (1.2.34) são satisfeitas. ■

**Teorema 1.2.8.**  *$F$  é uma integral primeira para o sistema Hamiltoniano (1.1.1) se, e somente se,  $\{F, H\}_z = 0$  ao longo de cada solução.*

*Demonstração.* Suponha que  $F$  seja uma integral primeira para o sistema Hamiltoniano dado por  $H(z)$ , onde  $z = (q, p)$  são as coordenadas generalizadas e seus momentos conjugados. Isso significa que  $F$  é constante ao longo de cada trajetória do sistema, ou seja, a derivada total de  $F$  com respeito ao tempo ao longo da solução do sistema é zero:

$$\frac{d}{dt}F(q(t), p(t)) = 0, \text{ para cada trajetória } z(t) = (q(t), p(t)).$$

Agora, aplicamos a regra da cadeia para calcular a derivada total de  $F$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(q(t), p(t)) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \{F, H\}_z(q(t), p(t)) = 0. \end{aligned}$$

Logo, se  $F$  é uma integral primeira, então  $\{F, H\}_z = 0$ .

Por outro lado, se  $\{F, H\}_z = 0$ , então, isso significa que, ao longo de cada solução  $z(t)$ , temos:

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Por definição, o lado esquerdo desta equação é a derivada total de  $F$  ao longo do tempo. Ou seja, a condição  $\{F, H\}_z = 0$  implica que:

$$\frac{d}{dt}F(q(t), p(t)) = 0.$$

Logo,  $F$  é constante ao longo de cada trajetória do sistema hamiltoniano, e portanto, é uma integral primeira. ■

## 1.2.7 O Teorema do Fluxo Tubular

O *Teorema do Fluxo Tubular* é um resultado importante na teoria de sistemas dinâmicos e geometria diferencial. Ele afirma que, em torno de qualquer ponto onde o campo vetorial é não-nulo, existe uma vizinhança na qual o fluxo gerado por esse campo pode ser descrito como uma coordenada local. Este teorema fornece uma maneira local de "linearizar" o fluxo de um campo vetorial, permitindo uma melhor compreensão da dinâmica local de sistemas contínuos. A formalização deste teorema foi feita no século XX, e não foi atribuída a nenhum matemático, ou matemática, em específico, mas sim ao avanço de conceitos envolvendo campos vetoriais, e conforme as teorias acerca de fluxos e variedades diferenciáveis foram sendo formalizadas.

Sejam  $z = (p, q) \in U$ , aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $H$ , função de classe  $C^1$ , que faz parte do sistema hamiltoniano dado por (1.1.1). Vamos supor também, que o sistema seja autônomo.

**Teorema 1.2.9.** (*Teorema do Fluxo Tubular*): *Seja  $z^* \in U$  um ponto regular do sistema hamiltoniano da forma (1.1.1). Então, existe uma mudança de coordenadas simpléticas  $y = \phi(z)$  definida em uma vizinhança de  $z^*$ , tal que nas novas coordenadas, o hamiltoniano é dado por  $\mathcal{H} = y_{n_1}$  e as equações de movimento se tornam*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_{n+1}} \\ \dot{y}_i &= 0 \quad \text{para } i = 2, \dots, 2n. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Assuma que  $z^* = 0$  e que  $J\nabla H(0) = (1, 0, \dots, 0)$ . Ou seja, o gradiente do hamiltoniano em  $z^*$  aponta na direção da primeira coordenada.

Seja

$$q = q(t, \xi, \eta), \quad p = p(t, \xi, \eta),$$

a solução geral do sistema hamiltoniano, com as condições iniciais:

$$q = q(0, \xi, \eta) = \xi \quad \text{e} \quad p(0, \xi, \eta) = \eta,$$

que são condições de Cauchy para as soluções  $z(t) = (q(t), p(t))$ , que parte em  $(0, \xi, \eta)$

Para valores pequenos de  $t$ , pela continuidade do fluxo e da função determinante, o Teorema da função inversa nos diz que estas equações podem ser invertidas para expressar

$\xi$  e  $\eta$  em termos de  $q$  e  $p$ . Ou seja, podemos escrever:

$$\xi = \xi(t, q, p), \quad \eta = \eta(t, q, p).$$

Desde que  $J\nabla H(0) = (1, 0, \dots, 0)$  obtemos que  $q_1 = 0$  define uma seção transversal, logo podemos resolver a equação  $\xi_1(t, q, p) = 0$  para  $t$ , encontrando que  $t = t(q, p)$ , que indica o tempo que a solução demora para chegar à seção transversal. Agora, definimos as novas coordenadas  $y$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= t(q, p) \\ y_i &= \xi_i(t(q, p), q, p) \\ y_{n+1} &= H(q, p) \\ y_{n+i} &= \eta_i(t(q, p), q, p) \end{aligned}$$

para  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Como para cada  $t$  fixo o fluxo de um sistema hamiltoniano é simplético, então, por (1.2.7), as novas variáveis satisfazem as relações simpléticas:

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0, \quad \{\eta_i, \eta_j\} = 0 \quad \{\eta_i, \xi_j\} = \delta_{ij}.$$

Utilizando essas propriedades, podemos concluir que o sistema de equações nas novas variáveis  $y$  é:

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_{n+1}}, \quad \dot{y}_i = 0 \quad \text{para } i = 2, \dots, 2n.$$

Isso mostra que, nas novas coordenadas  $y$ , o sistema hamiltoniano se reduz a equações muito simples.

A seguir, vamos demonstrar que o sistema que foi descrito satisfaz as condições simpléticas. Para  $2 \leq i, j \leq n$ , ao empregar a regra da cadeia e as propriedades já estabelecidas, se terá que:

$$\begin{aligned} \{y_i, y_j\} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_j}{\partial p_k} - \frac{\partial y_i}{\partial p_k} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q_k} + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p_k} + \frac{\partial \xi_j}{\partial p_k} \right) \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p_k} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q_k} + \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} \right) \right) \right] \\ &\quad \{\xi_i, \xi_j\} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial x_i}{\partial t} \left( \frac{\partial t}{\partial q_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_k} - \frac{\partial t}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial x_j}{\partial t} \left( \frac{\partial t}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial t}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \right) \right] \\ &\quad \{\xi_i, \xi_j\} - \frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial t}} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \{\xi_1, \xi_j\} - \frac{\partial x_j}{\partial t} \{\xi, \xi_j\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

como esperado, devido às propriedades simpléticas das coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ .

De maneira semelhante se verifica que

$$\{y_i, y_j\} = 0 \quad \text{com} \quad n + 2 \leq i, j \leq 2n.$$

Por outro lado,

$$\{y_1, y_{n+1}\} = \{t, H\} = 1.$$

Como  $\xi_i$  e  $\eta_i$  são integrais e  $y_{n+1} = H$  também é integral, obtem-se que:

$$\{y_1, y_{n+1}\} = 0,$$

para  $i = 2, \dots, 2n$ .

Para  $2 \leq i \leq n$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \{y_1, y_i\} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial t}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial t}{\partial p_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial t}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial t}{\partial p_k} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q_k} + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial t}{\partial q_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial t}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \right] \\ &= \frac{\{\xi_1, \xi_i\}}{\frac{\xi_i}{\partial t}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga se demonstra que  $\{y_1, y_i\} = 0$  para  $i = n + 2, \dots, 2n$ . ■

**Definição 1.2.6.** Um conjunto de funções  $F_1, \dots, F_k$  definido em um aberto  $U$ , estão em involução se o colchete de Poisson entre qualquer par delas for nulo, ou seja, se:

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \text{para todo} \quad i, j = 1, \dots, k.$$

O conceito de involução vem da ideia de que

**Corolário 1.2.2.** *Em uma vizinhança de um ponto regular o sistema Hamiltoniano dado por*

$$\dot{z} = J\nabla H(z), \quad \text{ou,} \quad \dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q. \quad (1.2.36)$$

*possui  $2n - 1$  integrais primeiras independentes em involução.*

*Demonstração.* De acordo com as coordenadas estabelecidas no Teorema do Fluxo Tubular, as funções coordenadas  $\xi = \xi_i$  e  $\eta_i = y_{n+1}$ . Tem-se

$$\{y_1, y_i\} = 0, \quad \{y_i, y_{n+1}\} = 0$$

para  $i = 2, \dots, 2n$ .

Essas relações indicam que  $y_1$  e  $y_i$  estão em involução, bem como  $y_i$  e  $y_{n+1}$ . Assim,  $y_1$  e  $y_{n+1}$  são duas integrais de movimento, e os  $2n - 3$  integrais restantes são dados pelas funções  $y_2, y_3, \dots, y_{2n}$ . Isso confirma que existem  $2n - 1$  integrais de movimento independentes em involução no sistema hamiltoniano considerado. ■

## 1.2.8 Funções Geradoras

Considerando  $z = (q, p)$ , a forma simplética padrão é dada por:

$$\Omega = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j := dq \wedge dp.$$

Seja  $Q = Q(q, p)$  e  $P = P(q, p)$  uma transformação de variáveis. Assuma também que as funções  $Q$  e  $P$  estão definidas em uma bola  $U \in \mathbb{R}^{2n}$ . Esta transformação será simplética se, e somente se,

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP \quad \Leftrightarrow \quad d(qdp - QdP) = 0.$$

Definindo a 1-forma  $\sigma_1 = qdp - QdP$  teremos que  $\sigma_1$  é fechada se e somente se  $\sigma_2 = \sigma_1 + d(QP) = qdp + PdQ$  é fechada. Considerando que  $U$  seja uma bola em  $\mathbb{R}^{2n}$ , de acordo com o lema de Poincaré (uma forma é fechada se e somente se for exata), concluímos que a transformação de coordenadas será simplética se e somente se cada uma das seguintes  $\sigma_1$ -formas também for fechada:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= qdp - QdP \\
\phi_2 &= qdp + PdQ = \phi_1 + d(QP) \\
\phi_3 &= pdq - PdQ = \phi_2 + d(pq) \\
\phi_4 &= pdq + QdP = \phi_3 + (PQ).
\end{aligned}$$

Portanto, a transformação de coordenadas é simplética se, e somente se, uma das funções uma das funções  $S_1 = S(p, P)$ ,  $S_2 = S_2(p, Q)$ ,  $S_3 = S_3(q, Q)$ ,  $S_4 = S_4(q, P)$  existe e atende aos critérios correspondentes:

$$dS_1 = \phi_1, \quad dS_2 = \phi_2, \quad dS_3 = \phi_3, \quad dS_4 = \phi_4$$

Esses dados oferecem uma abordagem direta para a criação de coordenadas simpléticas. Por exemplo, vamos considerar a existência de uma função  $S_1(p, P)$ , cuja diferenciação resulte em  $dS_1 = \phi_1$ .

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P)dp + \frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)dP = \phi_1$$

se, e somente se,

$$\frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) = q, \quad -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) = Q.$$

Assim, se  $\frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) = q$ ,  $-\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) = Q$  descreve uma mudança de coordenadas de  $(q, p)$  para  $(Q, P)$ , então ela é simplética. Supondo agora que o Hessiano de  $S_1$  não seja singular. Ao analisarmos a função  $F(q, p, P) = \frac{\partial S_1}{\partial p} - q = 0$ , podemos inferir do Teorema da Função Implícita que podemos representar  $P$  como uma função de  $q$  e  $p$ . A partir da equação  $Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)$ , conseguimos expressar  $Q$  como uma função de  $q$  e  $p$ . Dessa forma, de forma análoga, concluímos que:

**Teorema 1.2.10.** *As seguintes mudanças de coordenadas definem uma transformação local de coordenadas simplética:*

$$q = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P), \quad Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P) \quad \text{é não singular}$$

$$q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), \quad P = -\frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) \quad \text{é não singular}$$

$$p = \frac{\partial S_3}{\partial q}(p, Q), \quad P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(p, Q) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_3}{\partial p \partial Q}(p, Q) \quad \text{é não singular}$$

$$p = \frac{\partial S_4}{\partial q}(p, Q), \quad Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(p, P) \quad \text{quando} \quad \frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}(p, P) \quad \text{é não singular}$$

Cada um dos funcionais  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) é chamado de função geradora ou função geratriz.

**Teorema 1.2.11.** *Seja a transformação de coordenadas simplética em uma bola aberta de  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $E : z = (q, p) \rightarrow \zeta = (\xi = \xi(q, p, t), \eta = \eta(q, p, t))$  com dependência do parâmetro  $t$ , definida pela função geradora  $S = S_j$  com  $j = 1, 2, 3, 4$ . Então se  $H = H(q, p, t)$  representa o hamiltoniano nas coordenadas antigas, se tem que o Hamiltoniano, nas novas coordenadas  $H^* = H^*(\xi, \eta, t)$ , é dado por:*

$$H^*(\xi, \eta, t) = H(q, p, t) + R_j,$$

$j = 1, 2, 3, 4$ , onde o lado direito da equação acima foi avaliado em  $q = q(\xi, \eta, t)$  e  $p = p(\xi, \eta, t)$  e  $R_j = -\frac{\partial S_j}{\partial t}$  para  $j = 3, 4$ .

*Demonstração.* Vamos provar este teorema para o caso  $j=4$ , os outros casos são análogos. Pelo último Teorema da seção de Transformações Simpléticas, é suficiente mostrar que a função resto  $R_4 = \frac{\partial S_4}{\partial t}$ , isto é, devemos verificar que:

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{q=q(\xi, \eta, t), p=p(\xi, \eta, t)} = J \nabla_{\zeta} R_4(\zeta, t).$$

Donde, é equivalente a ter que

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial R_4}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial R_4}{\partial \xi}.$$

Fazendo  $R_4 = \frac{\partial S_4}{\partial t}$  com  $S_4$  de classe  $C^k$ , com  $k \geq 2$ , teremos que:

$$\frac{\partial R_4}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 S}{\partial \eta \partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \eta} = \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

o que demonstra o Teorema, já que existe uma única (a menos de constante) solução do problema. ■

**Exemplo 1.2.3. (Transformação de Mathieu).** *Suponhamos que existe uma transformação  $Q = f(q)$  com  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que  $\frac{\partial f}{\partial q}$  seja invertível. Esta transformação pode ser estendida a uma transformação simplética definida por  $S_4$  da seguinte forma:*

$$S_4(q, P) = f(q)^T P,$$

ou seja,

$$(q, p) \rightarrow \left( Q = f(q), P = \frac{\partial f}{\partial q}(q)^{-T} p \right).$$

**Exemplo 1.2.4. (Coordenadas polares).** Sejam  $(x, y)$  as coordenadas usuais no plano e  $(X, Y)$  seus momentos conjugados. Vamos fazer uma mudança de variáveis, vamos passar das coordenadas usuais no plano para coordenadas polares  $(r, \theta)$  e estender esta transformação à uma mudança de coordenadas simpléticas. Sejam  $(R, \Theta)$  as variáveis conjugadas de  $(r, \theta)$ . Fazendo  $q = (r, \theta)$  e  $Q = f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) := (x, y)$  temos que  $\frac{\partial f}{\partial q}$  é invertível. Assim, aplicando a transformação de Mathieu com  $p = (R, \Theta)$  e  $P = (X, Y)$ , temos que

$$S = S_4(q, P) = f(q)^T P = Xr \cos \theta + Yr \sin \theta,$$

e assim,

$$\begin{cases} x = di \frac{\partial S}{\partial X} = r \cos \theta, \\ y = di \frac{\partial S}{\partial Y} = r \sin \theta, \\ R = di \frac{\partial S}{\partial r} = X \cos \theta + Y \sin \theta = di \frac{xX + yY}{r}, \\ \Theta = di \frac{\partial S}{\partial \theta} = -Xr \sin \theta + Yr \cos \theta = xY - yX. \end{cases} \quad (1.2.37)$$

Suponhamos que uma partícula de masa  $m$  se move num plano, assim temos que  $X = m\dot{x}$  e  $Y = m\dot{y}$  são as componentes do momento linear nas direções de  $x$  e  $y$ . Dessa forma,  $R = m\dot{r}$  é o momento linear na direção de  $r$ , e  $\Theta = mx\dot{y} - my\dot{x} = mr^2\dot{\theta}$  é o momento angular. A transformação inversa é dada por

$$\begin{cases} X = m\dot{x} = m\dot{r} \cos \theta - m r \dot{\theta} \sin \theta = R \cos \theta - (di \frac{\Theta}{r}) \sin \theta, \\ Y = m\dot{y} = m\dot{r} \sin \theta + m r \dot{\theta} \cos \theta = R \sin \theta + (di \frac{\Theta}{r}) \cos \theta. \end{cases} \quad (1.2.38)$$

Um exemplo de aplicação de coordenadas polares simpléticas é o problema de Kepler no plano. Utilizando as notações acima, a função hamiltoniana associado a este problema é dado por

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - di \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = di \frac{1}{2} \left( R^2 + di \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - di \frac{\mu}{r}. \quad (1.2.39)$$

Como  $H$  é independente de  $\theta$ , esta é uma variável ignorável, logo  $\Theta$  é uma integral primeira. As equações do movimento do problema de Kepler no plano, nestas variáveis são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R, & \dot{\theta} &= di \frac{\Theta}{r^2} \\ \dot{R} &= -di \frac{\Theta^2}{r^3} + di \frac{\mu}{r^2}, & \dot{\Theta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

## 1.3 Órbitas Periódicas e Aplicação de Poincaré

**Definição 1.3.1.** Uma solução  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  da equação diferencial  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  diz-se periódica se  $f(x_0) \neq 0$  (ou seja,  $x_0$  não pode ser uma singularidade) e existe  $t_1 > 0$  tal que  $x(t_1) = x(0) = x_0$ .

**Definição 1.3.2.** Diz-se que  $x_0$  é ponto periódico do campo  $f$ . O período  $T$  da trajetória periódica  $x(t)$  é o menor de todos os possíveis valores  $t_1 > 0$  tal que  $x(t_1) = x(0)$ . Em termos do fluxo, seja  $\phi_t$  o fluxo associado ao campo  $f$  descrito acima, dizemos que  $x_0$  é periódico com período  $T > 0$  se

$$\phi_T(x_0) = x_0 \quad \text{mas} \quad \phi_t(x) \neq x \quad \forall 0 < t < T.$$

Novamente, seja  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$  definido no aberto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  com fluxo  $\phi_t : E \rightarrow E$  definido para cada  $t \in \mathbb{R}$ , com solução  $x(t)$  e equação dadas acima.

**Definição 1.3.3.** Uma seção transversal ao campo  $f$  num ponto  $x \in E$  é um hiperplano  $H$  por  $x$  (ou seja, um hiperplano afim  $H + x$  com dimensão  $n - 1$ ) tal que  $f(x) \notin H$ . Por continuidade do campo  $f$ , temos que para  $y \in E$  suficientemente próximo à  $x$ ,  $f(y)$  também não pertence ao hiperplano  $H$ .

Com base nisso, teremos a definição de uma seção local:

**Definição 1.3.4.** Uma seção transversal local, ou simplesmente seção local do campo  $f$  num ponto  $x \in E$  é um conjunto  $S = H \cap W \subseteq E$ , obtido por uma interseção de uma vizinhança  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $x \in E$  com um hiperplano de  $H$  por  $x$ , tal que, para cada  $y \in S$ , colocando a origem do vetor  $f(y)$  no ponto  $y$ , temos que  $f(y) \notin H$ .

Daí, é claro que existe um seção local por qualquer ponto não singular do campo  $f$ : Basta tomar  $H = \{v \in E; \langle v, f(x) \rangle = 0\}$ , o hiperplano ortogonal à  $f(x) \neq 0$ .

Dada agora uma órbita periódica  $\gamma$  do campo  $f$  com período mínimo  $T > 0$ , fixemos  $x \in \gamma$  e tomemos uma seção local  $S = U \cap (x + H)$  de  $f$  por  $x$ . Como a trajetória de  $x$  volta à  $S$  pelo difeomorfismo  $\phi_T$ , aplicando o Teorema do Fluxo Tubular, podemos assegurar que todos os pontos de uma vizinhança de  $x$  em  $S$  tem trajetórias que retornam à  $S$  num tempo próximo à  $T$ .

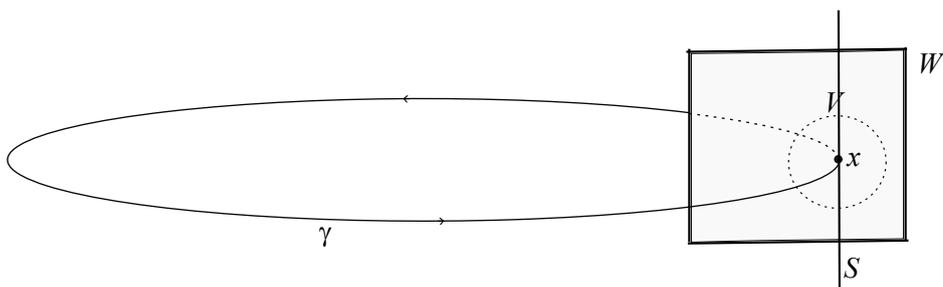


Figura 1.2: Esquema da órbita periódica  $\gamma$  e uma seção local  $S$ .

De fato, seja  $W$  vizinhança onde  $\phi_t$  é conjugado ao fluxo tubular. Por continuidade de  $\phi_T$ , como temos que  $\phi_T(x) = x$ , existe vizinhança  $V$  de  $x$ , que podemos assumir estar contida em  $W$ , tal que  $z = \phi_T(y) \in W$  para todo  $y \in V \cap S$ . Já que o fluxo tubular leva todo ponto de  $W$  a atravessar  $S$  num tempo inferior a algum  $\delta_0 > 0$ , então existe  $|t(y)| < \delta_0$  tal que  $\phi_{T+t(y)}(y) \in S \cap W$ .

A aplicação

$$P : V \cap S \rightarrow W \cap S$$

$$y \mapsto P(y) = \phi_{T+t(y)}$$

é dita transformação de primeiro retorno, ou *transformação de Poincaré* de  $f$  na seção  $S$ .

Esta é a principal ferramenta para estudar o comportamento das órbitas do campo na vizinhança de uma trajetória periódica.

**Definição 1.3.5.** A função:

$$T : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$y \mapsto T + t(y)$$

é dita a *função tempo de retorno de Poincaré*, ou simplesmente *função tempo de retorno*, a qual tem a seguinte propriedade:

**Lema 1.3.1.** Para uma dada seção local  $S$  de um campo de vetores  $f$  de classe  $C^1$  em  $E$ , e uma órbita regular  $\mathcal{O}(y)$ , o conjunto  $\gamma^+(y) = \{t \geq 0 : \phi_t(y) \in S \cap W\}$  é enumerável (pode ser finito) e discreto, ou seja, não contém pontos de acumulação em  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* De fato, usando a vizinhança tubular, basta notar que existe  $\delta > 0$  tal que se  $t \in \gamma^+(y)$  então  $(t - \delta, t) \cup (t, t + \delta)$  não intersecta  $\gamma^+(y)$ . Portanto os pontos de  $\gamma^+(y)$  são isolados e o lema está provado. ■

Notemos que como  $T > 0$  é o período mínimo de  $x$ , então realmente  $R$  é a transformação de primeiro retorno à  $S$ .

De fato,  $y \in S \iff L(y) = \langle y - x, f(x) \rangle = 0$  e  $y \in W$ ; e também  $L(\phi_T(x)) = 0$  com derivada parcial

$$\partial_t(L \circ \phi)|_{(T,x)} = \langle \partial_t \phi|_{(T,x)}, f(x) \rangle = |f(x)|^2 > 0.$$

Portanto, o Teorema da Função Implícita assegura que existe função  $T : V_0 \rightarrow (T - \epsilon, T + \epsilon)$  onde  $V_0$  é vizinhança de  $x$  (a qual podemos assumir contida em  $W$ ), tal que  $L(\phi_{T(y)}(y)) = 0$  para todo  $y \in V_0$ , ou seja,  $\phi_{T(y)}(y) \in S$ .

Então  $P(y) = \phi_{T(y)}(y)$  para  $y \in V \cap S$  e  $T$  herdará a mesma classe se diferenciabilidade que  $\phi$ . Além disso,  $T(x) = T$ .

Como  $\gamma^+(y)$  é discreto com distância entre pontos maior do que  $\delta$  e  $T(x) = T = \min \gamma^+(x)$ , então

**Lema 1.3.2.**  $T(y)$  é o tempo de primeiro retorno numa vizinhança de  $x$ , isto é,  $T(y) = \min \gamma^+(y)$ , para todo  $y \in V_0 \cap S$ .

*Demonstração.* Suponha por contradição que, se  $T(y) > \min \gamma^+(y)$  numa vizinhança (que podemos supor compacta) de  $x$ , então usando a continuidade vem que  $T(y)$  tende à  $T(x) = T$ , conforme  $y$  tende à  $x$ , mas teríamos tempos de retorno menores, o que implica que, existe  $0 < \mu(y) < T(y)$  tal que  $\phi_{T(y)-\mu(y)}(y) \in S$  e portanto  $\mu(y) > \delta$  e  $T(y) - \mu(y) > \delta$  numa vizinhança de  $x$ .

Tomando um ponto de acumulação de  $\mu_0 > 0$  de  $\mu(y)$  conforme  $y$  tende à  $x$ , obtemos que

$$\phi_{T(y)-\mu(y)}(y) \text{ tende à } x = \phi_{T-\mu_0}(x) \text{ conforme } y \text{ tende à } x.$$

O que é uma contradição, já que supomos que  $T > 0$  é o período mínimo de  $x$ , pois  $\delta \leq T - \mu_0 < T$ . ■

Estudar o comportamento de fluxos via transformação de retorno à uma seção transversal reduz problemas em um espaço de dimensão  $n$ , para problemas em um espaço de dimensão  $n - 1$ , com respeito à uma transformação diferenciável.

Note que, a transformação  $P$  de primeiro retorno é um difeomorfismo. Basta repetir a construção com o fluxo inverso, usando o campo  $-f$ , e obter a transformação inversa de  $P$ , que será também diferenciável e terá a mesma classe que o fluxo.

## Capítulo 2

# O problema de Kepler planar e as Coordenadas de Delaunay

O problema de  $N$ -corpos, aborda sistemas com três ou mais corpos celestes interagindo gravitacionalmente. Já o problema de Kepler, formulado pelo alemão Johannes Kepler no século XVII, descreve o movimento de dois corpos que interagem de forma gravitacional em um plano. As soluções deste problema são órbitas cônicas, que podem ser elípticas, parabólicas ou hiperbólicas, dependendo de algumas condições do sistema.

Nesse capítulo, iremos determinar as soluções do problema de Kepler em coordenadas especiais, que permitem obter soluções (circulares e elípticas) de maneira muito simples. Estas coordenadas são chamadas de coordenadas de Delaunay e Poincaré Delaunay.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram [17] e [26].

Consideramos o movimento de  $N$  partículas que se movem unicamente sob a ação mútua gravitacional no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Seja a  $i$ -ésima partícula cujo vetor posição é  $q_i$  e a massa é  $m_i$  positiva.

Pela segunda Lei de Newton, a soma das forças que agem sobre uma partícula é igual a massa vezes a aceleração da mesma,  $m_i \ddot{q}_i$ . A lei da gravitação universal nos diz que a força de atração gravitacional entre as partículas  $i$  e  $j$  é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, ou seja, a força é dada por  $\frac{Gm_i m_j}{\|q_i - q_j\|^2}$ , onde  $G = 6.67408 \times 10^{-11} m^3 / sec^2 kg$  é a constante gravitacional. A direção dessa força, da partícula  $i$  à partícula  $j$ , é dada pelo vetor unitário  $\frac{(q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|}$ . A

partir dessas informações formulamos as equações do movimento que são dadas por

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (2.0.1)$$

onde

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} di \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}, \quad (2.0.2)$$

é o a função potencial associada ao sistema de equações (2.0.1).

Seja  $M$  uma matriz diagonal de ordem  $3N$  dada por

$$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N),$$

e sejam  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  e  $\Omega = \{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, \text{ para } i = j\}$ . Assim, (2.1) é um sistema de equações de segunda ordem em  $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Omega$ .

Seja  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  tal que  $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ . Dessa forma,  $\mathbf{p}_i = M\dot{\mathbf{q}}_i$  é o momento da  $i$ -ésima partícula.

Logo, reescrevemos as equações (2.0.1) da foma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= i \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= di \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}; \end{aligned} \quad (2.0.3)$$

onde  $H = T - U$  é a função hamiltoniana e,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2, \quad (2.0.4)$$

é a energia cinética.

## 2.1 O problema de 2-corpos e o problema de Kepler

Nesta seção, vamos particularizar o problema de  $N$  corpos para  $N = 2$ , e a partir deste, vamos desenvolver toda a teoria do problema de Kepler, incluindo as anomalias excêntrica e verdadeira.

Para  $N = 2$ , as equações (2.0.1) são dadas por

$$m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1), m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2); \quad (2.1.1)$$

onde a função potencial associada a este sistema é dada por:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|}. \quad (2.1.2)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.1.1) por  $m_2$ , a segunda equação por  $m_1$  e subtraindo a segunda da primeira, temos

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2) &= -\frac{Gm_1 m_2 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \frac{Gm_1 m_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ &= -\frac{Gm_1 m_2 (m_1 + m_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \end{aligned}$$

Logo

$$(\ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \quad (2.1.3)$$

Fazendo  $\mathbf{z} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$  e  $\mu = G(m_1 + m_2)$ , de (2.1.3) temos que

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}} &= (\ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ &= -\frac{\mu}{\|\mathbf{z}\|^3} \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

A equação (2.1.4) é chamada de o problema de Kepler. Agora, somando a primeira equação com a segunda, obtemos

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Fazendo  $C = m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2$ , de (2.1.5) temos que  $\ddot{C} = 0$  e integrando esta equação obtemos que a função  $C$  é da forma

$$C = L_0 C + C_0, \quad (2.1.6)$$

onde  $L_0$  e  $C_0$  são as constantes de integração.

Consideremos o problema de 2 corpos, no qual o primeiro corpo tem uma massa muito grande, com sua posição fixa para a primeira aproximação e, o segundo corpo tem massa

unitária. O movimento percorrido pelo segundo corpo é descrito pelo problema (2.1.4). Se a posição deste corpo é dada pelo vetor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , as equações que descrevem seu movimento são

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q}, \quad (2.1.7)$$

onde  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . Definimos  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$  e desta maneira, a equação (2.1.5) pode ser reescrita como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -di\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

O sistema (2.1.8) é um sistema Hamiltoniano, cuja função hamiltoniana  $H$  é dada por

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (2.1.9)$$

Observemos que  $H$  é uma integral primeira do sistema. Além disso, existem outras duas integrais primeiras, as quais são

1. O *momento angular*  $A$ . Se uma partícula possui vetor posição  $\mathbf{q}$  então o momento angular  $A$  da partícula é definido por

$$A = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.1.10)$$

2. O *Vetor de Laplace*  $\mathbf{e}$ :

$$\mu \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \dot{\mathbf{q}} \times A. \quad (2.1.11)$$

Mostremos que de fato o momento angular e o vetor de Laplace são integrais primeiras. Observemos que

$$\dot{A} = \dot{\mathbf{q}} \times \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \times \left( -\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q} \right) = 0. \quad (2.1.12)$$

Isso mostra que  $A(t) = cte$  e, portanto, o vetor  $A$  é uma integral primeira. Para mostrar que  $\mathbf{e}$  é uma integral primeira, primeiro observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) &= \frac{\|\mathbf{q}\|\ddot{\mathbf{q}} - \frac{(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}{\|\mathbf{q}\|}\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{(\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{A \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{\mathbf{q} \times A}{\|\mathbf{q}\|^3} \\ &= i\frac{1}{\mu} \left( -\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q} \times A \right) = \frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{q}} \times A = i\frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \times A), \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

ou seja,

$$\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \times A). \quad (2.1.14)$$

Integrando ambos os lados da equação (2.1.14), obtemos a existência de um vetor  $\mathbf{e}$  (constante de integração) de modo que

$$\mu \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \dot{\mathbf{q}} \times A. \quad (2.1.15)$$

Isso mostra que  $\mathbf{e}$  é uma integral primeira.

Mostramos anteriormente que o momento angular  $A$  é uma integral primeira, ou seja, é constante ao longo do movimento. Assim, se  $A = 0$ , temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{A \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{0 \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = 0. \quad (2.1.16)$$

Logo  $\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|\mathbf{w}$ , para algum vetor fixo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Isso implica que a partícula se movimenta sobre a reta que tem direção do vetor  $\mathbf{w}$ , ou seja, o seu movimento é colinear. Neste caso, se tomarmos a reta de movimento coincidindo com um dos eixos do sistema de coordenadas, obtemos um problema com um grau de liberdade.

Quando  $A \neq 0$ , os vetores  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$  são ortogonais a  $A$  e o movimento é descrito no plano formado pelos vetores  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ , ou seja, no plano ortogonal a  $A$ , chamado de plano invariante. Pondo um dos eixos na direção de  $A$ , podemos escrever  $\mathbf{q}$  na forma

$$\mathbf{q}(t) = r (\cos \theta, \sin \theta, 0). \quad (2.1.17)$$

Logo,

$$\mathbf{p}(t) = \dot{\mathbf{q}} = \dot{r} (\cos \theta, \sin \theta, 0) + r \dot{\theta} (-\sin \theta, \cos \theta, 0). \quad (2.1.18)$$

Assim,

$$\begin{aligned} A = \mathbf{q} \times \mathbf{p} &= r (\cos \theta, \sin \theta, 0) \times \left( \dot{r} (\cos \theta, \sin \theta, 0) + r \dot{\theta} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \right) \\ &= \left( 0, 0, r^2 \dot{\theta} ((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \right) \\ &= (0, 0, r^2 \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Isso implica que

$$c = \|A\| = r^2 \dot{\theta}. \quad (2.1.20)$$

Como a taxa de variação da área varrida pelo corpo é dada por  $\frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$ , então a área  $A_{\mathbf{q}}(t)$  varrida por  $\mathbf{q}(t)$ , começando em  $t_0$  é dada por

$$A_{\mathbf{q}}(t) - A_{\mathbf{q}}(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} dt = \int_{t_0}^t \frac{c}{2} dt = \frac{c}{2} (t - t_0). \quad (2.1.21)$$

A equação (2.1.20) ou (2.1.21) é a equação da segunda lei de Kepler, que nos diz que as áreas descritas pelo raio-vetor são sempre iguais nos mesmos intervalos de tempo.

Consideremos a equação (2.1.15). Observe que podemos reescrever esta equação como

$$\mathbf{e} = i \frac{\mathbf{p} \times A}{\mu} - \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (2.1.22)$$

Fazendo o produto interno dessa equação com  $A$ , temos

$$\langle \mathbf{e}, A \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p} \times A}{\mu}, A \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}, A \right\rangle = 0. \quad (2.1.23)$$

Quando  $A = 0$ , de (2.1.22) temos que  $\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ , logo  $\|\mathbf{e}\| = 1$  e  $\mathbf{e}$  está na reta que o corpo se movimenta, pois já mostramos que o movimento é colinear. Quando  $A \neq 0$ , o vetor  $\mathbf{e}$  está no plano invariante. Vamos considerar o caso em que  $A \neq 0$ .

Observemos que

$$\left\langle \mu \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right), \mathbf{q} \right\rangle = \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|} \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mu (\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \|\mathbf{q}\|)$$

e

$$\langle \dot{\mathbf{q}} \times A, \mathbf{q} \rangle = \langle \dot{\mathbf{q}} \times (\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \rangle = \|\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}\|^2 = \|A\|^2.$$

Assim, fazendo o produto interno de (2.1.15) com  $\mathbf{q}$ , obtemos

$$\mu (\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \|\mathbf{q}\|) = \|A\|^2,$$

ou ainda

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle + \|\mathbf{q}\| = \frac{c^2}{\mu}, \quad (2.1.24)$$

onde  $c = \|A\|$ .

Quando  $\mathbf{e} = 0$ , temos que  $\|\mathbf{q}\| = \frac{c^2}{\mu}$  é constante. Como  $\mathbf{q} = r (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , então  $\|\mathbf{q}\| = r$ .

Assim, pela equação (2.1.20) temos que

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2} = \frac{\mu^2}{c^3}.$$

Isso implica que o corpo se movimenta em um círculo com velocidade angular constante quando  $\mathbf{e} = 0$ .

Vamos supor que  $\mathbf{e} \neq 0$  e vamos por  $\epsilon = \|\mathbf{e}\|$ . Seja  $r, \theta$  as coordenadas polares do corpo com o ângulo  $\theta$  medindo a partir do eixo positivo. Se  $g$  é o ângulo entre o eixo positivo e o vetor  $\mathbf{e}$ , então o ângulo entre os vetores  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{q}$  é dado por  $f = \theta - g$ .

Sabemos que  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle = \cos f \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{q}\| = \epsilon r \cos f$ . Substituindo  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle$  por  $\epsilon r \cos f$  na equação (2.1.24) e arrumando-a convenientemente obtemos

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos f} \quad (2.1.25)$$

Esta equação, na forma polar, representa a primeira lei de Kepler. Observe que podemos reescrever a equação (2.1.25) da forma

$$r = \epsilon \left( \frac{c^2}{\mu \epsilon} - r \cos f \right). \quad (2.1.26)$$

A equação (2.1.26) é a equação da primeira Lei de Kepler, na forma generalizada, onde a partícula se move em uma cônica de excentricidade  $\epsilon$ , com foco na origem, e tendo a reta  $d$  ortogonal ao vetor  $e$  como reta diretriz localizada à uma distância de  $\frac{c^2}{\mu \epsilon}$  da origem. Observe que podemos determinar se a órbita é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola através do valor de  $\epsilon$ , para isso temos as seguintes condições:

1. Se  $\epsilon = 0$ , a órbita é uma circunferência;
2. Se  $0 < \epsilon < 1$ , a órbita é uma elipse;
3. Se  $\epsilon = 1$ , a órbita é uma parábola;
4. Se  $\epsilon > 1$ , a órbita é uma hipébole.

Agora vamos considerar o caso em que a órbita é elíptica. Seja  $a$  o semi-eixo maior da elipse e  $b$  o semi-eixo menor. Observe que de (2.1.25) para  $f = 0$  e para  $f = \pi$  obtemos

$$r_0 = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos 0} = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon} \quad e \quad r_\pi = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos \pi} = \frac{c^2/\mu}{1 - \epsilon}.$$

Assim, temos que

$$2a = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon} + \frac{c^2/\mu}{1 - \epsilon},$$

e a reescrevemos como

$$a(1 - \epsilon^2) = \frac{c^2}{\mu}. \quad (2.1.27)$$

Seja  $P$  o período de uma órbita elíptica. A área descrita pelo raio-vetor de 0 a  $P$ , de acordo com (2.1.21) é dada pela equação

$$A(P) = \frac{c}{2}P. \quad (2.1.28)$$

Seja  $c$  a distância do centro da elipse ao foco. Definimos a *excentricidade*  $e$  da elipse como  $e = \frac{c}{a}$ . Como  $a^2 = b^2 + c^2$ , substituindo  $c = ae$  nesta equação, obtemos  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . A área da elipse pode ser calculada pela equação

$$A_q = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.1.29)$$

Assim, das equações (2.1.28) e (2.1.29) temos

$$\frac{c}{2}P = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

ou ainda,

$$\frac{c^2}{4\pi^2 a(1 - e^2)} = i \frac{a^3}{P^2}. \quad (2.1.30)$$

Utilizando a equação (2.1.27), reescrevemos (2.1.30) como

$$\frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2}. \quad (2.1.31)$$

A equação (2.1.31) é a terceira lei de Kepler, onde o período orbital da partícula é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita da elipse.

### 2.1.1 Anomalia excêntrica e Anomalia verdadeira

O vetor-posição  $\mathbf{q}$  da partícula na órbita, no referencial canônico, é descrito por

$$\mathbf{q} = r(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \text{ com } \theta = f + g, \quad (2.1.32)$$

onde o ângulo  $f$  é chamado de anomalia verdadeira.

Vamos introduzir outro ângulo  $E$ , chamado de anomalia excêntrica com o objetivo de determinar os valores do ângulo  $\theta$  e do raio-vetor  $r$ . A anomalia excêntrica  $E$  é ângulo entre o perigeu e a projeção da posição  $\mathbf{q}$  da partícula no círculo com raio igual ao semi-eixo maior da elipse. Este ângulo é medido no centro da elipse ou no centro do círculo.

Apresentaremos a seguir, um resultado que fornece relações para obter os valores de  $r$  e  $\theta$ , incluindo uma relação que associa o ângulo  $\theta$  com o ângulo  $E$ .

**Teorema 2.1.1.** *seja  $\mathbf{q}=r(t)$  uma solução do problema de Kepler com energia negativa, semi-eixo maior  $a$  e excentricidade  $e$ . Então  $r$  e  $\theta$  são dados por*

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ \operatorname{tg} \left( \frac{f}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \left( \frac{E}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Consideremos um sistema de coordenadas com a origem no centro da elipse e com eixos paralelos aos eixos da elipse. Representaremos as coordenadas do ponto  $P$  na elipse por  $\xi$  e  $\eta$ , e na circunferência por  $x$  e  $y$ . Dessa forma, segue que

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2}\right) + \left(\frac{\eta^2}{b^2}\right) = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = a^2. \quad (2.1.34)$$

Como  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  e as abscissas  $\xi$  e  $x$  são iguais, segue que  $\eta = \sqrt{1 - e^2}y$ . Assim, veja Fig, temos as equações

$$\begin{aligned} ae + r \cos f &= a \cos E, \\ +r \sin f &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r \cos f = a(\cos E - e) \quad (2.1.35)$$

e

$$r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (2.1.36)$$

Quadrando as equações (2.1.35) e (2.1.36) e somando os resultados, obtemos

$$r^2 = a^2((1 - e^2) \sin^2 E + \cos^2 E - 2e \cos E + e^2) = a^2(1 - e \cos E)^2, \quad (2.1.37)$$

e extraíndo a raiz quadrada, obtemos

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.1.38)$$

Agora, juntando as equações (2.1.36) e (2.1.38) temos

$$r(1 + \cos f) = a(1 - e)(1 + \cos E). \quad (2.1.39)$$

Como valem as identidades trigonométricas  $1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$  e  $\sin u = 2 \sin(\frac{u}{2}) \cos(\frac{u}{2})$ , o quociente de (2.1.35) por (2.1.39) obtemos

$$\frac{\sin f/2}{\cos f/2} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E/2}{(1 - e) \cos E/2}. \quad (2.1.40)$$

Logo,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right). \quad (2.1.41)$$

Através deste Teorema, ao conhecer o valor de  $E$ , podemos determinar os valores de  $f$  e  $r$ . Apresentaremos a seguir um resultado que determina o valor de  $E$ .

**Teorema 2.1.2.** *A anomalia excêntrica  $E$  é determinada pela equação de Kepler*

$$E - e \operatorname{sen} E = n(t - T), \quad (2.1.42)$$

onde  $n = \frac{2\pi}{P}$  é o movimento médio.

Consideremos que o centro da elipse é representado por  $O$ ,  $F$  é o foco atrator,  $P_0$  é o pericentro,  $P$  é o ponto sobre a elipse,  $P'$  é o ponto correspondente na circunferência que define a anomalia excêntrica  $E$ ,  $H$  é a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo que passa pelo pericentro e  $f$  é a anomalia verdadeira.

A área do setor circular  $OP_0P'$  menos a área do triângulo  $OHP'$  é dada pela integral desde a abscissa de  $H$  até a do ponto  $P_0$  da função  $y(s)$ , ordenada do ponto  $P'(s)$ . Dessa forma, temos uma relação entre a ordenada  $\eta(s)$  de  $P(s)$  e  $y(s)$  dada por

$$\eta(s) = \sqrt{1 - e^2}y(s).$$

Assim, obtemos a equação:

$$\int_x^a y(s)ds = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} di \int_x^a \eta(s)ds. \quad (2.1.43)$$

A integral do lado direito da equação anterior é igual a área do setor da elipse  $FP_0P$  menos a área do triângulo  $FHP$ , ou seja,

$$di \int_x^a \eta(s)ds = \frac{c}{2}(t - T) - \frac{1}{2}r \cos fr \operatorname{sen} f. \quad (2.1.44)$$

Já a integral do lado esquerdo, sabemos que é igual a área do setor circular  $OP_0P'$  menos a área do triângulo  $OHP'$ , ou seja,

$$di \int_x^a y(s)ds = \frac{1}{2}a^2 E - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen} E \cos E. \quad (2.1.45)$$

Portanto, temos que

$$\frac{1}{2}a^2 E - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen} E \cos E = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{c}{2}(t - T) - \frac{1}{2}r \cos fr \operatorname{sen} f. \quad (2.1.46)$$

Utilizando as expressões (2.1.35) e (2.1.36) obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} r \cos fr \operatorname{sen} f = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen} E \cos E - \frac{1}{2}a^2 e \operatorname{sen} E. \quad (2.1.47)$$

Por outro lado, usando a igualdade (2.1.27) e a terceira lei de Kepler, obtemos a equação

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{c}{2} = \frac{1}{2} a^2 \frac{2\pi}{P} = \frac{1}{2} a^2 n. \quad (2.1.48)$$

Portanto, substituindo as equações (2.1.47) e (2.1.48) em (2.1.46), obtemos

$$E - e \operatorname{sen} E = n(t - T).$$

## 2.2 O Problema de Kepler planar em coordenadas de Delaunay e Poincaré

Nesta seção, primeiramente, vamos construir e definir as coordenadas de Delaunay e de Poincaré-Delaunay utilizando as funções geradoras. Feito isso, abordaremos o problema de Kepler nestas coordenadas, apresentaremos as soluções deste sistema, e faremos também alguns exemplos do mesmo.

Para definir as coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay, vamos passar das coordenadas cartesianas  $(x, y, X, Y)$  para as coordenadas polares  $(r, \theta, R, \Theta)$  depois, definiremos as coordenadas de Delaunay e a partir destas últimas, as coordenadas de Poincaré-Delaunay.

O primeiro passo consiste na mudança de coordenadas Cartesianas para coordenadas Polares:

$$(x, y, X, Y) \rightarrow (r, \theta, R, \Theta)$$

Consideremos as posições  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \operatorname{sen} \theta$  e utilizaremos uma função geradora para obter os momentos conjugados. Vamos chamar as variáveis antigas de  $q = (x, y)$ ,  $p = (X, Y)$  e as variáveis novas de  $Q = (r, \theta)$ ,  $P = (R, \Theta)$ . Consideremos uma função  $f$  de modo que  $q = f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) := (x, y)$ , logo  $\frac{\partial f}{\partial Q}$  é invertível. Aplicando (1.2.3) obtemos a transformação simplética definida por:

$$S = S_4(Q, p) = f(Q)^T p = X r \cos \theta + Y r \operatorname{sen} \theta,$$

e

$$q = f(Q),$$

$$P = \left( \frac{\partial q}{\partial Q} \right)^T \cdot p \Rightarrow p = \left( \frac{\partial q}{\partial Q} \right)^{-T} \cdot P = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

Isso implica que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ r \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$X = R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \text{sen } \theta,$$

$$Y = R \text{sen } \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta.$$

Outra forma de encontrarmos momentos conjugados é utilizando uma função geradora do teorema (1.2.10):

$$q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(q, Q).$$

Observemos que

$$x = \frac{\partial S_2}{\partial X}(X, r) = r \cos \theta,$$

$$y = \frac{\partial S_2}{\partial Y}(Y, \theta) = r \text{sen } \theta;$$

o que implica que  $S_2 = S_4 = rX \cos \theta + rY \text{sen } \theta$ . Logo

$$R = \frac{\partial S_2}{\partial r}(x, r) = X \cos \theta + Y \text{sen } \theta,$$

$$\Theta = \frac{\partial S_2}{\partial \theta}(y, \theta) = -rX \text{sen } \theta + rY \cos \theta.$$

De maneira semelhante ao que foi feito no Exemplo 1.2.4 de funções geradoras se obtém  $X$  e  $Y$  como antes.

A função Hamiltoniana do problema de Kepler (com  $\mu = 1$ ) em coordenadas polares é dada por

$$H_{Pol} = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \tag{2.2.1}$$

Agora, vamos passar de coordenadas Polares à coordenadas de Delaunay:

$$(r, \theta, R, \Theta) \rightarrow (\ell, g, L, G)$$

Agora, chamaremos as variáveis antigas de  $q = (r, \theta)$ ,  $p = (R, \Theta)$  e as variáveis novas de  $Q = (\ell, g)$ ,  $P = (L, G)$ . Vamos utilizar a função Hamiltoniana (2.2.1) para obter uma transformação a partir da função em derivadas parciais. Para isso, vamos substituir na função hamiltoniana, os momentos conjugados pelas derivadas parciais da função geradora com respeito às variáveis. Igualaremos a energia  $H = h_0 = -\frac{1}{2L^2}$  à equação (2.2.1). Assim, temos

$$\frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2},$$

Agora, trocando os momentos conjugados pelas derivadas da função geradora  $S = S(r, \theta) = S_1(r) + S_2(\theta)$  com respeito as variáveis, obtemos:

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2},$$

que pode ser reescrita como:

$$\left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 = 2r - \frac{r^2}{a} - r^2 \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 := G^2,$$

onde  $G$  tem que ser constante pois  $\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \theta}$  só depende da variável  $r$ . Dessa forma, dá última equação, concluímos que:

$$S_2(\theta) = G\theta \quad e \quad \frac{\partial S_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \sqrt{2r - \frac{r^2}{L^2} - G^2}.$$

Assim, podemos reescrever  $S$  na forma:

$$S = G\theta + \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}}.$$

Posteriormente, definiremos o limite inferior de integração. Agora temos:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{r} = R &= \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}} \\ \Theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = G. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Chamaremos os novos momentos de  $L = \sqrt{a}$  e  $G = \sqrt{a}\sqrt{1-e^2}$ . Se considerarmos  $n = \sqrt{1/a^3}$ ,  $dr = \dot{r} dt$  e fizermos o limite interior de integração ser o perigeu da órbita, ou seja,  $t_0 = T$ , a nova coordenada  $\ell$  é dada por

$$\ell = \frac{\partial S}{\partial L} = \int_{r_0}^r \frac{2L^{-3}}{2\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}}} dr = \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{1}{a^3}} \frac{1}{\dot{r}} dr = \int_{t_0}^t n dt = n(t - T).$$

Agora, fazendo  $df = Gdt/r^2$ , escolhendo novamente os limites inferiores de integração como sendo o perigeu da órbita, isto é,  $r_0 = r_p$ ,  $f_0 = 0$  e considerando a relação  $\theta = g + f$ , a nova coordenada  $g$  é dada por

$$g = \frac{\partial S}{\partial G} = \theta - \int_{r_0}^r \frac{2G}{2r^2 \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2} - \frac{G^2}{r^2}}} dr = \theta - \int_{r_0}^r \frac{G}{r^2 \dot{r}} dr = \theta - \int_{f_0}^f df = \theta - f.$$

Definimos um domínio elíptico como sendo um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^4$  onde estão as soluções elípticas do problema de Kepler. Com essas informações, definimos o conjunto de coordenadas de Delaunay  $(\ell, g, L, G)$  que estão em um domínio elíptico do problema de Kepler. As coordenadas são:

- $\ell = n(t - T)$  é a anomalia média medida a partir do perigeu;
- $g = \theta - f$  é o argumento do perigeu, é medido do nodo ascendente até o perigeu;
- $L = \sqrt{a}$  é o semi-eixo maior da elipse;
- $G = \sqrt{a} \sqrt{1 - e^2}$  é o momento angular.

(2.2.3)

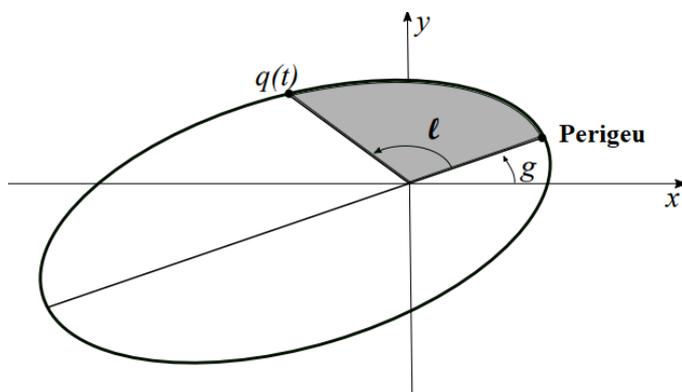


Figura 2.1: Representação das coordenadas angulares de Delaunay. O ângulo  $g$  é o argumento do perigeu e o ângulo  $\ell$  é a anomalia média, é medido por  $\ell = 2\pi S/A$ .

As coordenadas  $L, G$  são variáveis radiais definidas em  $\mathbb{R}$  tal que  $0 < G < L$ . As coordenadas  $\ell, g$  são variáveis angulares módulo  $2\pi$  e estão definidas no intervalo  $[0, 2\pi[$ . Há uma maneira de medir a anomalia média  $\ell$ . Como  $\dot{\ell} = \frac{1}{L^3} = cte$ , pois  $L(t) = cte$ ,  $\dot{\ell}$  mede a área varrida pelo raio-vetor na segunda lei de Kepler. Seja  $S$  a área varrida pelo raio raio-vetor (que liga um corpo ao outro) do perigeu até a posição do corpo, e seja  $A$  a

área da elipse. Assim, definimos  $\ell$  como sendo igual a  $2\pi$  multiplicado pela razão da área  $S$  para a área  $A$ , ou seja,

$$\ell = 2\pi \frac{S}{A}. \quad (2.2.4)$$

Em coordenadas de Delaunay, a função Hamiltoniana (2.2.1) é dada por

$$H_D = -\frac{1}{2L^2}. \quad (2.2.5)$$

O sistema Hamiltoniano associado com a função Hamiltoniana (2.2.5) é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{L^3}, & \dot{L} &= 0 \\ \dot{g} &= 0, & \dot{G} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Determinaremos uma solução desse sistema para o valor inicial  $y_0 = (\ell_0, g_0, L_0, G_0)$ . Observemos que

$$\dot{\ell} = \frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{L^3} \Rightarrow d\ell = \frac{1}{L^3} dt \Rightarrow \int_0^t d\ell = \int_0^t \frac{1}{L^3} dt = dt \frac{1}{L^3} t.$$

Assim  $\ell(t) - \ell(0) = \frac{1}{L^3} t$ , ou seja,

$$\ell(t) = \frac{1}{L^3} t + \ell_0. \quad (2.2.7)$$

Portanto, a solução do sistema Hamiltoniano (2.2.6) com condição inicial  $y_0$  é dada por

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \frac{1}{L_0^3} t + \ell_0, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= g_0, & G(t) &= G_0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Vamos determinar a excentricidade e o período da solução. Observemos que

$$G = L\sqrt{1 - e^2} \Rightarrow \frac{G^2}{L^2} = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L}.$$

Assim, a excentricidade  $e$  da solução (2.2.8) é dada por

$$e = \frac{\sqrt{L_0^2 - G_0^2}}{L_0}. \quad (2.2.9)$$

Seja  $T$  o período da solução. Utilizando a equação (2.2.7) temos que

$$\ell_0 + 2\pi = \ell(T) = \frac{1}{L_0^3} T + \ell_0.$$

Isso implica que  $\frac{1}{L_0^3} T = 2\pi$ , logo o período da solução (2.2.8) é dado por

$$T = 2\pi L_0^3. \quad (2.2.10)$$

Agora, faremos dois exemplos de soluções elípticas em coordenadas de Delaunay.

**Exemplo 2.2.1.** Determinaremos a solução do sistema (2.2.6) com valor inicial  $y_0 = (\pi, \frac{\pi}{2}, L_0, G_0)$ . Como  $\ell_0 = \pi$  e  $g_0 = \frac{\pi}{2}$ , segue de (2.2.8) que a solução desse sistema com valor inicial  $y_0$  é dada por

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \frac{1}{L_0^3}t + \pi, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= \frac{\pi}{2}, & G(t) &= G_0.\end{aligned}$$

Essa é uma solução elíptica com semi-eixo maior  $a = L_0^2$ , com período  $T$  dado por (2.2.10) e excentricidade  $e$  dada por (2.2.9). Além disso, temos que o ângulo  $g = \frac{\pi}{2}$  é argumento do perigeo medido a partir do eixo  $x$ , e o ângulo  $\ell_0 = \pi$  é anomalia média medida do perigeo até a posição inicial do corpo. Assim, representamos essa solução no plano cartesiano na figura 2.2

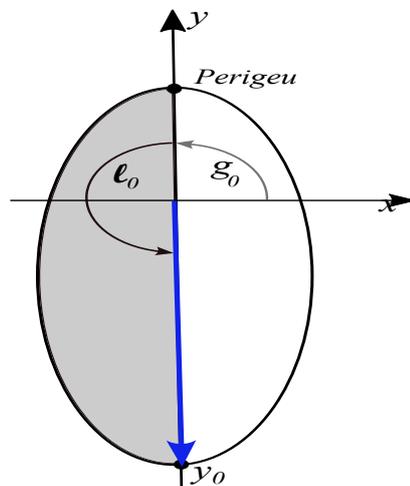


Figura 2.2: Solução elíptica do exemplo (2.2.1)

**Exemplo 2.2.2.** Vamos determinar a solução do sistema (2.2.6) com valor inicial  $y_0 = (\pi, \pi, L_0, G_0)$ . Desde que  $\ell_0 = \pi$  e  $g_0 = \pi$ , segue de (2.2.8) que a solução desse sistema com valor inicial  $y_0$  é dada por

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \frac{1}{L_0^3}t + \pi, & L(t) &= L_0; \\ g(t) &= \pi, & G(t) &= G_0.\end{aligned}$$

Assim como no exemplo anterior, essa é uma solução elíptica com semi-eixo maior  $a = L_0^2$ , com período  $T$  dado por (2.2.10) e excentricidade  $e$  dada por (2.2.9). Além disso, temos que o ângulo  $g = \pi$  é argumento do perigeo medido a partir do eixo  $x$ , e o ângulo  $\ell_0 = \pi$  é anomalia média medida do perigeo até a posição inicial do corpo. Assim, representamos essa solução no plano cartesiano na figura 2.3

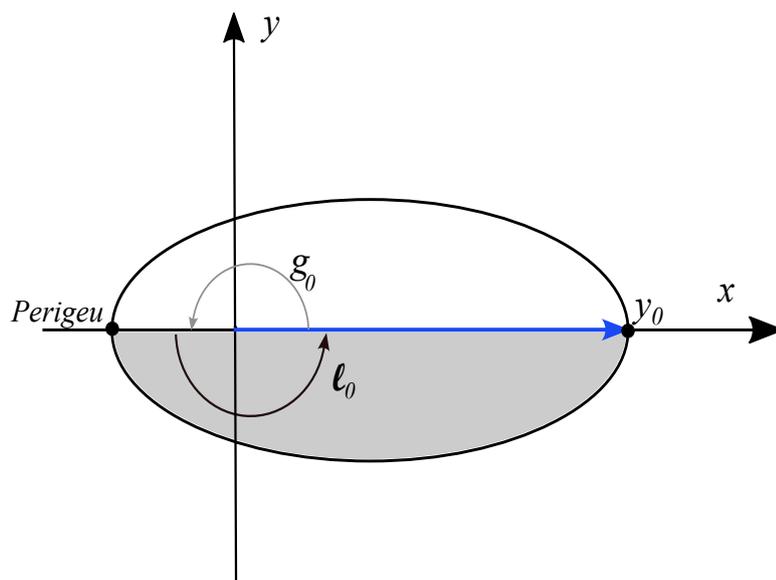


Figura 2.3: Solução elíptica do exemplo (2.2.2)

Observemos que se uma solução do problema de Kepler é uma órbita circular (isso ocorre quando  $e = 0$ , ou seja, quando  $L = G$ ), então as coordenadas de Delaunay não são válidas pois o perigeu não está definido no círculo, logo elas não podem ser utilizadas para continuar soluções circulares. Para contornar esse problema, Poincaré introduziu novas coordenadas que ficaram conhecidas como as coordenadas de Poincaré-Delaunay. Finalmente, passaremos das coordenadas de Delaunay para as coordenadas de Poincaré-Delaunay

$$(l, g, L, G) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$$

Definimos as coordenadas de Poincaré-Delaunay em  $\mathbb{R}^4$  por

$$\begin{aligned} \bullet Q_1 &= l + g, \\ \bullet Q_2 &= -\sqrt{2(L - G)} \operatorname{sen} g, \\ \bullet P_1 &= L, \\ \bullet P_2 &= \sqrt{2(L - G)} \cos g. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Elas estão bem definidas para  $l, g$  no intervalo  $[0, 2\pi[$  e para  $0 < G \leq L$ . Além disso, são diferenciáveis para  $l, g$  no intervalo  $[0, 2\pi[$  e para  $0 < G < L$ . As coordenadas  $Q_2, P_1, P_2$  são variáveis radiais e a coordenada  $Q_1$  é uma variável angular módulo  $2\pi$ .

Consideremos a transformação

$$E : (l, g, L, G) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (l + g, -\sqrt{2(L - G)} \operatorname{sen} g, L, \sqrt{2(L - G)} \cos g).$$

Seja  $\zeta = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ . Vamos mostrar que essa transformação é simplética. De fato, temos que

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2(L-G)} \cos(g) & -di \frac{\text{sen}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & di \frac{\text{sen}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2(L-G)} \text{sen}(g) & di \frac{\text{cos}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & -di \frac{\text{cos}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \end{pmatrix},$$

assim

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right)^T J \left( \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2(L-G)} \text{sen}(g) & 1 & -\sqrt{2(L-G)} \text{cos}(g) \\ -1 & -i \frac{\text{cos}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & 0 & -i \frac{\text{sen}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \\ 0 & \frac{\text{cos}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} & 0 & di \frac{\text{sen}(g)}{\sqrt{2(L-G)}} \end{pmatrix} \left( di \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= J. \end{aligned}$$

A função Hamiltoniana do problema de Kepler nas coordenadas de Poincaré-Delaunay é dada por

$$H_{DP} = -\frac{1}{2P_1^2}. \quad (2.2.12)$$

O sistema Hamiltoniano associado com a função Hamiltoniana (2.2.12) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3}, & \dot{P}_1 &= 0; \\ \dot{Q}_2 &= 0, & \dot{P}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Vamos determinar uma solução desse sistema Hamiltoniano para o valor inicial  $Y_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0)$ . Observemos que

$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{P_1^3} \Rightarrow \int_0^t dQ_1 = \int_0^t \frac{1}{P_1^3} dt = \frac{1}{P_1^3} t.$$

Dessa forma, temos que  $Q_1(t) - Q_1(0) = \frac{1}{P_1^3} t$ , ou seja,

$$Q_1(t) = \frac{1}{P_1^3} t + Q_1^0. \quad (2.2.14)$$

Portanto, a solução do sistema (2.2.13) com condição inicial  $Y_0$  é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{(P_1^0)^3}t + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0; \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

As coordenadas de Poincaré-Delaunay estão definidas em vizinhanças de órbitas elípticas e em vizinhanças de órbitas circulares. Como as Soluções circulares acontecem quando  $L = G$ , então, em coordenadas de Poincaré-Delaunay ocorrem quando  $Q_2 = P_2 = 0$ .

Agora, iremos determinar o período e a excentricidade da solução (2.2.15). Seja  $T$  o período da solução (2.2.15), pela equação (2.2.14) temos

$$Q_1(T) = \frac{1}{(P_1^0)^3}T + Q_1^0.$$

Por outro lado, como  $Q_1$  é uma variável angular módulo  $2\pi$ , ou seja,  $Q_1(T) - Q_1^0 = 2\pi$ , temos

$$di \frac{1}{(P_1^0)^3}T = 2\pi.$$

Potanto, o período da solução é dado por

$$T = 2\pi(P_1^0)^3. \quad (2.2.16)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} Q_2^2 + P_2^2 &= 2(L - G)(\text{sen } g)^2 + 2(L - G)(\text{cos } g)^2 \\ &= 2(L - G)((\text{sen } g)^2 + (\text{cos } g)^2) \\ &= 2(L - G). \end{aligned}$$

Terminaremos essa seção com um exemplo de uma solução do problema de Kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay.

**Exemplo 2.2.3.** *Encontraremos uma solução específica do sistema (2.2.13) com valor inicial  $Y_0 = (\pi, 0, p_1, 0)$ . Segue de (2.2.15) que a solução desse sistema com valor inicial  $Y_0$  é dada por*

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{p_1^3}t + \pi, & P_1(t) &= p_1; \\ Q_2(t) &= 0, & P_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $Q_2 = P_2$  e  $P_1 = L$ , essa é uma solução periódica circular com raio  $a = p_1^2$ , e período  $T$  dado por (2.2.16).

## Capítulo 3

# O método da Média e o estudo de órbitas periódicas

O *Método da Média* é uma técnica matemática poderosa utilizada para simplificar a análise de sistemas dinâmicos, especialmente quando esses sistemas estão sujeitos a pequenas perturbações. A ideia central do método é substituir o sistema original por um sistema médio ou "aproximado", cujas soluções representam o comportamento médio ou aproximado do sistema original em um intervalo de tempo longo, permitindo uma compreensão mais clara da sua evolução.

Esse método é amplamente utilizado em várias áreas da física e da matemática, incluindo a mecânica celeste, onde foi aplicado pela primeira vez por Lagrange para estudar o problema dos três corpos. Ao invés de resolver diretamente as equações de movimento, que podem ser muito complicadas devido às interações entre as forças envolvidas, o Método da Média permite que se capture a evolução essencial do sistema, eliminando ou suavizando as variações de curto prazo.

Além disso, o método é eficaz na análise de sistemas não lineares, ajudando a compreender a estabilidade das soluções e o comportamento a longo prazo. Ele também é uma ferramenta central na teoria das perturbações, onde permite a descrição precisa de sistemas que são ligeiramente desviados de um estado simples ou ideal.

Dessa forma, o Método da Média proporciona uma forma eficiente de obter informações qualitativas e quantitativas sobre sistemas dinâmicos, especialmente em contextos onde a resolução exata das equações é impraticável ou desnecessária para entender o comporta-

mento geral do sistema.

O método da média é aplicável a sistemas de equações diferenciais na forma:

$$\dot{x} = \epsilon f(x, t, \epsilon), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (3.0.1)$$

com  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^k$ , com  $k \geq 1$  limitada, e com período  $T > 0$  em  $t$ , e  $U$  um conjunto aberto. O sistema autônomo associado é o sistema médio definido por:

$$\dot{y} = \frac{\epsilon}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt. \quad (3.0.2)$$

O método da média aproxima o sistema original em  $x$  (3.0.1) pelo sistema médio em  $y$  (3.0.2), que é presumidamente mais simples de se estudar. O sistema médio aproxima a curva solução do sistema inicial  $\dot{x}$  dentro de uma região compacta e conexa do espaço de fase sobre a escala de tempo  $1/\epsilon$ . O comportamento assintótico do sistema original é “capturado” pela dinâmica da equação  $y$ . Este método garante que, para valores pequenos de  $\epsilon$ , as soluções da equação média e da equação original permanecem próximas ao longo de grandes intervalos de tempo.

### 3.1 Método da Média de Lagrange para Equações Diferenciais Ordinárias

O método da média é uma ferramenta poderosa para a análise de certos tipos de equações diferenciais ordinárias não-lineares, especialmente em casos em que métodos analíticos diretos não são viáveis.

Para isso fazemos uma expansão da função não linear  $g(x, \epsilon)$  em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ .

Considere o sistema perturbado:

$$\dot{x} = g(x, \epsilon),$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  finito.

Agora o nosso objetivo será trabalhar com o sistema na forma não perturbado, isto é, com  $\epsilon = 0$  e com base neste novo sistema, encontrar as soluções aproximadas para o sistema perturbado.

Quando  $\epsilon = 0$ , escreva  $g(x, 0) = g_0(x)$ , então, considerando a  $g$  uma função analítica, vem que:

$$g(x, \epsilon) = g_0(x) + \epsilon g_1(x) + O(\epsilon^2).$$

Assim, conhecendo as soluções de  $\dot{x} = g_0(x)$  queremos encontrar as soluções de  $\dot{x} = g(x, \epsilon)$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Desde que  $g$  é analítica em  $x$  e  $\epsilon$ , em alguma vizinhança  $(x, \epsilon) = (x_*, 0)$ , podemos expandir a função  $g$  em séries de Taylor, de forma que:

$$g(x, \epsilon) = g(x, 0) + \epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(x, 0) + O(\epsilon^2) := g_0(x) + \epsilon g_1(x) + O(\epsilon^2).$$

Portanto,

$$\dot{x} = g_0(x) + \epsilon g_1(x) + O(\epsilon^2).$$

Quando  $\epsilon = 0$ , seja  $x_0(t, x)$  uma solução de  $\dot{x} = g_0(x)$ .

Queremos uma solução de  $\dot{x} = g_0(x) + \epsilon g_1(x) + O(\epsilon^2)$  da seguinte forma:

$$x(t, x_*, \epsilon) = x_0(t, x_*) + \epsilon x_1(t, x_*) + O(\epsilon^2). \quad (3.1.1)$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, x_*, \epsilon) &= \dot{x}_0(t, x_*) + \epsilon \dot{x}_1(t, x_*) + O(\epsilon) \\ &= g_0(x_0(t, x_*)) + \epsilon \dot{x}_1(t, x_*) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Desde que conhecemos  $g_0$  e a ordem de  $\epsilon$ , nos resta saber quem será  $\dot{x}_1$ .

Para isto, substituindo a expressão (3.1.1), referente à  $x$ , na equação  $\dot{x} = g_0(x) + \epsilon g_1(x) + O(\epsilon)$  teremos que:

$$\dot{x}(t, x_*, \epsilon) = g_0(x_0(t, x_*) + \epsilon x_1(t, x_*) + O(\epsilon^2)) + \epsilon g_1(x_0(t, x_*) + \epsilon x_1(t, x_*) + O(\epsilon^2)) + O(\epsilon).$$

Que desenvolvendo em séries de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ , fica:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t, x_*, \epsilon) &= g_0(x_0(t, x_*) + \epsilon x_1(t, x_*) + O(\epsilon^2)) \\ &+ \epsilon [g_1(x_0(t, x_*) + \epsilon x_1(t, x_*) + O(\epsilon^2)) Dg_1(x_0(t, x_*) + \epsilon x_1(t, x_*) + O(\epsilon^2)) (x_1(t, x_*))] \\ &+ O(\epsilon).\end{aligned}$$

Avaliando a expressão em torno de  $\epsilon = 0$ , vem que

$$\dot{x}(t, x_*, \epsilon) = g_0(x_0(t, x_*)) + \epsilon [g_1(x_0(t, x_*)) + Dg_1(x_0(t, x_*)) (x_1(t, x_*))] + O(\epsilon).$$

Daí, comparando as expressões

$$\begin{aligned}\dot{x}(t, x_*, \epsilon) &= g_0(x_0(t, x_*)) + \epsilon \dot{x}_1(t, x_*) + O(\epsilon^2), \quad \text{e} \\ \dot{x}(t, x_*, \epsilon) &= g_0(x_0(t, x_*)) + \epsilon [g_1(x_0(t, x_*)) + Dg_1(x_0(t, x_*)) (x_1(t, x_*))] + O(\epsilon),\end{aligned}$$

segue-se que  $x_1(t, x_*)$  deve satisfazer à EDO

$$\dot{x}_1(x) = Dg_1(x)x_1(x) + g_1(x) \quad (3.1.2)$$

Portanto, resta encontrar as soluções da EDO acima, para enfim conhecermos as soluções da nossa EDO inicial.

Para isto, note que a EDO referente à  $\dot{x}_1(x)$  é da forma:

$$\dot{x} = Ax + g(x).$$

Então, ao multiplicar ambos os lados da equação acima por  $e^{-At}$  vem que:

$$\dot{x}e^{-At} = Axe^{-At} + g(t)e^{-At};$$

subtraindo ambos os lados da equação acima por  $-xAe^{-At}$ , segue-se que

$$\dot{x}e^{-At} - xAe^{-At} = g(t)e^{-At},$$

e, portanto,

$$d(xe^{-At})/dt = g(t)e^{-At}. \quad (3.1.3)$$

Integrando de ambos os lados da equação (3.1.3) e multiplicando por  $e^{At}$  teremos que:

$$x(t) = e^{At} \int g(t)e^{-At} dt.$$

Substituindo  $A = Dg_1(x)$  e  $g(x) = g_1(x)$ , obtemos, finalmente, que:

$$x(t) = e^{Dg_1(x)t} \int g_1(t)e^{-Dg_1(x)t} dt,$$

solução referente à (3.1.2)

### 3.1.1 Método da Média para o caso periódico

Considere o problema de valor inicial

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) + \epsilon^2 g(t, x, \epsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (3.1.4)$$

Iremos assumir que  $f(t, x)$  é  $T$ -periódica em  $t$  e usaremos o valor médio para integrais para introduzir a função

$$f_0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \quad (3.1.5)$$

com  $y$  sendo mantido constante.

Considere, também, o problema de valor inicial

$$\dot{y} = \epsilon f_0(y), \quad y(0) = x_0. \quad (3.1.6)$$

Afirmamos que a função  $y(t)$  representa uma aproximação para  $x(t)$  da seguinte forma

**Teorema 3.1.1.** *Considere os problemas de valor inicial (3.1.4) e (3.1.6) com  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$ .*

*Suponha que:*

- a. as funções  $f, g$  e  $\partial f/\partial x$  são bem definidas, contínuas e limitadas por uma constante  $M$  (que independe do  $\epsilon$ ) em  $[0, \infty) \times D$ ;*
- b.  $g$  é Lipschitziana em  $x$  para todo  $x \in D$ ;*
- c.  $f(t, x)$  é  $T$ -periódica em  $t$  com média  $f_0(x)$ ;  $T$  é uma constante que independe do  $\epsilon$ ;*
- d.  $y(t)$  está contida em um subconjunto de  $D$ .*

*Então, temos que  $x(t) - y(t) = O(\epsilon)$  na escala de tempo de  $1/\epsilon$ .*

*Demonstração.* As hipóteses de a, b e c garantem a existência e unicidades das soluções de (3.1.4) e (3.1.6), o fato de  $\partial f/\partial x$  ser limitada na segunda variável implica em  $f$  ser Lipschitziana.

Defina

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t f(s, y) - f_0(y) ds. \quad (3.1.7)$$

Como  $f$  é periódica, sem perda de generalidade, vamos analisar o caso  $t_0 < t < t_0 + T$ .

para  $t > t_0$  qualquer e para qualquer  $y \in D$ .

$$\begin{aligned}
\|u(t, y)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y) - f_0(y) ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y) - f_0(y)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y)\| + \|f_0(y)\| ds \\
&\leq 2M \int_{t_0}^t ds \text{ (por b.)} \\
&= 2M(t - t_0) \\
&\leq 2MT,
\end{aligned}$$

Introduziremos agora a *transformação próxima à identidade*.

$$z(t) = y(t) + \epsilon u(t, y(t))$$

Dado que  $y(t) \in D$ , por hipótese, teremos que para cada  $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &= \|x(t) - z(t) + z(t) - y(t)\| \\
&\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\
&\leq \|x(t) - z(t)\| + \epsilon \|u(t, y(t))\| \\
&\leq \|x(t) - z(t)\| + \epsilon 2MT
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \frac{dx}{ds} - \frac{dz}{ds} ds,$$

e calculando:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{ds} - \frac{dz(t)}{ds} &= \dot{x}(t) - (\dot{y}(t) + \epsilon \nabla u(t, y(t))) \\
&= \epsilon f(t, x(t)) + \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \dot{y}(t) - \epsilon \nabla u(t, y(t)) \\
&= \epsilon f(t, x(t)) + \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \dot{y}(t) - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} u(t, y(t)) - \epsilon \frac{\partial}{\partial y} u(t, y(t)) \dot{y}(t) \\
&= \epsilon f(t, x(t)) + \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \epsilon f_0(y(t)) - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} u(t, y(t)) - \epsilon \frac{\partial}{\partial y} u(t, y(t)) \dot{y}(t) \\
&= \epsilon f(t, x(t)) + \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \epsilon f_0(y(t)) - \epsilon [f(t, y(t)) - f_0(y)] - \epsilon \frac{\partial}{\partial y} u(t, y(t)) \dot{y}(t) \\
&= \epsilon (f(t, x(t)) - f(t, y(t))) + R
\end{aligned}$$

com  $R = \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \epsilon \frac{\partial}{\partial y} u(t, y(t)) \dot{y}(t)$ .

Por hipótese, temos que  $\|f_0(y(t))\|, \|f(t, y(t))\| \leq M$ , de onde segue que

Como  $f$  é Lipschitziana,

$$\begin{aligned}
\|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| &\leq L \|z(t) - y(t)\| \\
&= \epsilon L \|u(t, y(t))\| \\
&\leq 2\epsilon LMT
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t, y(t))\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial}{\partial y} f(s, y(t)) - \frac{\partial}{\partial y} f_0(y(t)) \right\| ds \\ &\leq 2MT \end{aligned}$$

Desde que  $f(x), g(x), u(t, y(t))$  são funções limitadas, segue que

$$\begin{aligned} \|R\| &= \|\epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \epsilon \frac{\partial}{\partial y} u(t, y(t)) \dot{y}(t)\| \\ &\leq \|\epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon)\| + \|\epsilon \frac{\partial}{\partial y} u(t, y(t)) \epsilon f_0(y(t))\| \\ &\leq \epsilon^2 M + \epsilon^2 2MT \frac{M}{T} \\ &= \epsilon^2 (M + 2M^2 T) \\ &= \epsilon^2 K \end{aligned}$$

Com  $K = M + 2M^2 T$ .

Daí,

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &= \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{ds} - \frac{dz}{ds} \right\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} x(s) - \frac{\partial}{\partial z} z(s) \right\| ds \\ &\leq \epsilon \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, z(s)) + \epsilon^2 K] ds \quad (3.1.8) \\ &\leq \epsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + \epsilon^2 K \int_{t_0}^t ds \\ &= \epsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + \epsilon^2 K(t - t_0). \end{aligned}$$

Onde usamos as desigualdades anteriores e o fato de  $f$  ser de Lipschitz.

Para seguir com a demonstração deste teorema, precisaremos introduzir o seguinte Lema:

**Lema 3.1.1.** *Desigualdade de Gronwall: Assuma que para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ , com  $a$  sendo uma constante positiva, nós temos a seguinte estimativa*

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds + \delta_3 \quad (3.1.9)$$

no qual, para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ,  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$  são funções contínuas,  $\phi(t), \psi(t) \geq 0$ ;  $\delta_1$  e  $\delta_3$  são constantes positivas. Então, nós temos que para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$

$$\phi(t) \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds}.$$

*Demonstração:* Da estimativa de (3.1.9) vem que:

$$\frac{\phi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds + \delta_3} \leq 1.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\delta_1\psi(t)$  e integrando:

$$\int_{t_0}^t \frac{\delta_1\psi(s)\phi(s)ds}{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + \delta_3} \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds,$$

o que implica que:

$$\ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \right) - \ln \delta_3 \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds.$$

Logo:

$$\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds}.$$

O que conclui a demonstração do Lema.

Por conveniência, iremos utilizar a seguinte versão modificada deste teorema, a qual é a seguinte:

**Lema 3.1.2.** *Desigualdade de Gronwall:* Assuma que para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ , com  $a$  sendo uma constante positiva, nós temos a seguinte estimativa

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s)ds + \delta_2(t - t_0) + \delta_3 \quad (3.1.10)$$

no qual, para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ,  $\phi(t)$  é uma função contínua,  $\phi(t) \geq 0$ ;  $\delta_1, \delta_2$  e  $\delta_3$  são constantes, com  $\delta_1, \delta_2 > 0$ ,  $\delta_3 \geq 0$ . Então, nós temos que para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$

$$\phi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

*Demonstração:* Ponha  $\phi(t) = \psi(t) - \frac{\delta_2}{\delta_1}$ , então a estima (3.1.10) se torna

$$\psi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3.$$

Aplicando o Lema (3.1.1), vem que:

$$\psi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)}.$$

Substituindo  $\psi(t)$  por  $\phi(t) + \delta_2/\delta_1$ , teremos o resultado desejado.

Vamos usar o Lema (3.1.2) na desigualdade (3.1.8).

Seja  $\phi(t) = \|x(t) - z(t)\|$ ,  $\delta_1 = \epsilon L$ ,  $\delta_2 = \epsilon^2 K(t - t_0)$  e  $\delta_3 = 0$  então

$$\phi(t) \leq \epsilon L \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \epsilon^2 K(t - t_0) + 0$$

De onde se segue que:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \phi(t) \leq \left( \frac{\epsilon^2 K}{\epsilon L} + 0 \right) e^{\epsilon L(t-t_0)} - \frac{\epsilon^2 K}{L} \\ &= \epsilon \left( \frac{K}{L} e^{\epsilon L(t-t_0)} - \frac{K}{L} \right) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$  na escala de tempo  $1/\epsilon$ .

Portanto, se existe  $K > 0$  tal que  $\|x(t) - y(t)\| \leq K\epsilon$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ , com  $t_0 \leq \epsilon t = \tau \leq L$ , para toda constante  $L$  que independe de  $\epsilon$ .

Note que se reescalamos o tempo  $\tau = \epsilon t$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{1}{\epsilon} \\ \implies \frac{dy}{d\tau} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \epsilon f_0(y) \frac{1}{\epsilon} = f_0(y) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Logo (3.1.6) se reescreve como

$$y' = f_0(y)$$

com  $y' = \frac{dy}{d\tau}$ .

E, portanto, se existe uma solução de (3.1.12)  $y(\tau)$  em  $[a, b]$  então  $y(\epsilon t)$  é solução de (3.1.6) definida em  $\frac{a}{\epsilon} < t < \frac{b}{\epsilon}$ .

Observe que se  $\epsilon L(t - t_0)$  fosse limitado por uma constante independente de  $\epsilon$  então pela desigualdade (3.1.11) teríamos

$$x(t) - y(t) = O(\epsilon) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0;$$

Mas  $\epsilon L(t - t_0)$  é limitado se  $t = \frac{1}{\epsilon}$ . E, finalmente, concluímos a demonstração do Teorema. ■

Considere novamente a equação (3.1.4), e assuma que  $f(t, x)$  e  $g(t, x, \epsilon)$  são ambas  $T$ -periódicas em  $t$ . Considere também a equação média (3.1.6).

O seguinte Teorema nos diz que, sobre certas condições as soluções de equilíbrio da equação média (3.1.6) corresponderão as soluções  $T$ -periódicas da equação (3.1.4).

**Teorema 3.1.2.** *Considere o problema de valor inicial (3.1.4) e suponha que:*

a. *As funções  $f$ ,  $g$ ,  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial^2 f/\partial x^2$ , e  $\partial g/\partial x$  são definidas, contínuas e limitadas por uma constante  $M$  que independe de  $\epsilon$  em  $[0, \infty) \times D$ ,  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ ;*

b. *As funções  $f$  e  $g$  são  $T$ -periódicas em  $t$ , com  $T$  independente de  $\epsilon$ ;*

*Então, temos as seguintes afirmações:*

(i) *Se  $p$  é um ponto crítico da equação média (3.1.6) e*

$$|\partial f_0(y)/\partial y|_{y=p} \neq 0, \quad (3.1.13)$$

*então para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução  $T$ -periódica  $x(t, \epsilon)$  da equação (3.1.4) tal que  $x(0, \epsilon) \rightarrow p$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

(ii) *Se o ponto singular  $y = p$  do sistema médio (3.1.6) possui todos os autovalores com a parte real negativa, para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeno, a solução periódica correspondente  $x(t, \epsilon)$  do sistema (3.1.4) é assintoticamente estável, e se um dos autovalores tem parte real positiva,  $x(t, \epsilon)$  é instável.*

*Demonstração.* Iremos primeiro demonstrar o item (i), utilizando o Teorema da Função Implícita. Mas, antes disso, iremos impor condições sobre a periodicidade da solução.

Aplicamos a seguinte mudança de variáveis:

$$x(t) = z(t) + \epsilon u(t, z(t)). \quad (3.1.14)$$

Daí, derivando com relação à  $t$

$$\dot{x} = \dot{z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} u(t, z(t)) + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)) \dot{z}(t) \quad (3.1.15)$$

Utilizando a definição de  $u(t, x)$  em (3.1.7), teremos que

$$\dot{x} = \dot{z} + \epsilon [f(t, z(t)) - f_0(z(t))] + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)) \dot{z}(t).$$

Isolando  $\dot{z}(t)$  na equação acima e usando a definição de  $\dot{x}$  em (3.1.4), teremos

$$\epsilon f(t, x(t)) + \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) = \dot{z} [I + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t))] + \epsilon f(t, z(t)) - \epsilon f_0(z(t)).$$

Isolando termos, substituindo  $x(t)$  por (3.1.14) e fazendo  $R(t, z(t), \epsilon) = \epsilon f(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t))) + \epsilon^2 g(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t)), \epsilon) - \epsilon f(t, z(t))$ , vem que

$$\dot{z} [I + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t))] = \epsilon f_0(z(t)) + R(t, z(t), \epsilon) \quad (3.1.16)$$

Expandindo  $[I + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t))]^{-1}$  em séries de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ , uma vez que  $\partial u / \partial z$  é uniformemente limitada e  $u$  é uniformemente limitada, teremos:

$$[I + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t))]^{-1} = I - \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)) + O(\epsilon^2) \quad (3.1.17)$$

Agora, multiplicando ambos os lados da equação (3.1.16) por (3.1.17), teremos

$$\dot{z} = [\epsilon f_0(z(t)) + R(t, z(t), \epsilon)] [I - \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t))] \quad (3.1.18)$$

com

$$R(t, z(t), \epsilon) = \epsilon f(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t))) - \epsilon f(t, z(t)) + \epsilon^2 g(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t)), \epsilon) \quad (3.1.19)$$

Desenvolvendo a equação (3.1.18), teremos que

$$\dot{z} = \epsilon f_0(z(t)) + R - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)) f_0(z(t)) - \epsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)). \quad (3.1.20)$$

Provaremos, agora que  $R(t, z(t), \epsilon)$  tem ordem  $\epsilon^2$ , isto é, que  $\|R(t, z(t), \epsilon)\| \leq \epsilon^2 C$ , com  $C$  constante.

Isolando o  $\epsilon$  em (3.1.19) e aplicando a norma, teremos

$$\|R(t, z(t), \epsilon)\| = \epsilon \|f(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t))) - f(t, z(t)) + \epsilon g(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t)), \epsilon)\| \quad (3.1.21)$$

Desde que  $f(t, x)$  é Lipschitziana em  $x$ ,

$$\begin{aligned} \|f(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t))) - f(t, z)\| &= L \|z(t) + \epsilon u(t, z(t)) - z(t)\| \\ &= L \|\epsilon u(t, z(t))\| \\ &= \epsilon L \|u(t, z(t))\|, \end{aligned}$$

e, portanto, temos que:

$$\|f(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t))) - f(t, z)\| \leq \epsilon L \|u(t, z(t))\|. \quad (3.1.22)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|u(t, z)\| &= \left\| \int_0^T f(t, z(t)) - f_0(z(t)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \|f(t, z(t)) - f_0(z(t))\| ds \\ &\leq \int_0^T M + M ds \\ &= 2M \int_0^T ds \\ &= 2MT, \end{aligned}$$

de onde temos que

$$\|u(t, z)\| \leq 2MT. \quad (3.1.23)$$

De (3.1.22) e (3.1.23) temos, finalmente que

$$\|f(t, z(t) + \epsilon u(t, z(t))) - f(t, z)\| \leq \epsilon 2LMT. \quad (3.1.24)$$

E finalmente, utilizando a equação (3.1.21) e a limitação da  $g$ , teremos que

$$\|R(t, z(t), \epsilon)\| \leq \epsilon(\epsilon 2LMT + \epsilon M) = \epsilon^2 C, \quad (3.1.25)$$

onde  $C = M(2LT + 1)$ .

E então, podemos escrever  $\dot{z}$  como

$$\dot{z} = \epsilon f_0(z(t)) + R(t, z(t), \epsilon) - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)) f_0(z(t)) + O(\epsilon^3), \quad z(0) = x(0) \quad (3.1.26)$$

Introduzindo uma mudança de variável no tempo  $\tau = \epsilon t$ , obteremos que

$$\frac{d\tau}{dt} = \epsilon \implies \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt}$$

De forma que, se

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \text{então} \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{\tau}{\epsilon}, x\right) \quad (3.1.27)$$

Daí, seja  $y(\tau) = z(\epsilon t)$ , teremos que:

$$\frac{dz}{d\tau}(\epsilon t) = \frac{dz}{d\tau}(\epsilon t) \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon} f_0(z(\epsilon t)) \epsilon = f_0(y(\tau)). \quad (3.1.28)$$

E, portanto:

$$\frac{dy}{d\tau} = f_0(y), \quad y(0) = z(0). \quad (3.1.29)$$

O que introduz uma aproximação da solução de (3.1.26) com erro de ordem  $O(\epsilon)$ , uma vez que  $R = O(\epsilon^2)$ , na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$  em  $t$ .

Daí, seja  $x(t)$  como definido em (3.1.14) e  $y(\tau) = z(\epsilon t)$ , então, claramente

$$x(t) - y(t) = O(\epsilon),$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ .

Retornando às condições de periodicidade, iremos impor mais uma para enfim acabar a demonstração da parte (i). Seja  $\dot{z}$  descrito em (3.1.26), como  $R(t, z(t), \epsilon) = O(\epsilon^2)$ , então, reescreva:

$$\dot{z} = \epsilon f_0(z(t)) + \epsilon^2 S(t, z(t), \epsilon), \quad (3.1.30)$$

com  $S(t, z(t), \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} R(t, z(t), \epsilon) - \frac{\partial}{\partial z} u(t, z(t)) f_0(z(t)) + O(\epsilon)$

Associado ao sistema (3.1.30), temos a solução integral:

$$z(t) = z(0) + \epsilon \int_0^t f_0(z(s)) ds + \epsilon^2 \int_0^t S(s, z(s), \epsilon) ds. \quad (3.1.31)$$

Basta derivar com respeito à  $t$  e utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para se chegar à equação (3.1.30).

Se supusermos que a solução (3.1.31) for periódica, então  $z(t+T) = z(t) \forall t \geq 0$ , em particular,  $z(T) = z(0)$ , de onde segue que

$$0 = z(T) - z(0) = \epsilon \left[ \int_0^T f_0(z(s)) ds + \int_0^T S(s, z(s), \epsilon) ds \right].$$

Desde que  $\epsilon \neq 0$  então segue que  $\int_0^T f_0(z(s)) ds + \int_0^T S(s, z(s), \epsilon) ds = 0$ .

Chamamos a equação acima de equação de periodicidade. Definimos:

$$h(z(0), \epsilon) = \int_0^T f_0(z(s)) ds + \int_0^T S(s, z(s), \epsilon) ds. \quad (3.1.32)$$

Daí, suponha que  $y = p$  é um ponto crítico do sistema médio  $\dot{y} = \epsilon f_0(y)$  e

$$\det \frac{\partial f_0(y)}{\partial y} \Big|_{y=p} \neq 0. \quad (3.1.33)$$

Então, teremos que:

1.  $h(z(0) = p, 0) = 0$
2.  $\frac{\partial}{\partial z} h(z(0) = p, \epsilon) \Big|_{z(0)=p, \epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^T f_0(z(s)) + \epsilon S(s, z(s), \epsilon) ds \right] \Big|_{z(0)=p, \epsilon=0}$   
 $= \int_0^T \frac{\partial}{\partial z} f_0(z(s)) ds \Big|_{z(0)=p} = \frac{\partial}{\partial z} f_0(p) T.$

Assim:

$$\det \frac{\partial}{\partial z} h(z(0), 0) = T \det \frac{\partial}{\partial z} f_0(p) \neq 0.$$

E, portanto, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função  $z = z(\epsilon)$  tal que

$$h(z(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon \approx 0$$

e

$$z(0) = p = z(T).$$

Daí:

$$x(t+T) = z(t+T) + \epsilon u(t+T, z(t+T)) = z(t) + \epsilon(t, z(t)) = x(t), \quad \forall t.$$

Para a demonstração da parte (ii), precisaremos primeiro, de alguns resultados preliminares, de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias.

Consideremos o sistema diferencial linear :

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.1.34}$$

com  $A$  sendo uma matriz constante  $n \times n$ , e  $x$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$ . Os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  do sistema (3.1.34) são os zeros do polinômio característico  $\det(A - \lambda Id)$ .

Se os autovalores  $\lambda_k$  são todos distintos, com autovetores  $e_k$ , para  $k = 1, \dots, n$ , então:

$$e_k e^{\lambda_k t}, \quad \text{para } k = 1, \dots, n,$$

são as  $n$  soluções independentes do sistema (3.1.34).

Assuma agora que nem todos os autovalores são distintos, além disso, suponha que o autovalor  $\lambda$  tem multiplicidade  $m > 1$ . Então  $\lambda$  gera  $m$  soluções independentes do sistema (3.1.34) na forma

$$P_0 e^{\lambda t}, P_1(t) e^{\lambda t}, \dots, P_{m-1}(t) e^{\lambda t},$$

com  $P_i(t)$  para  $i = 0, \dots, m-1$  são polinômios de grau no máximo  $i$ .

Com  $n$  soluções independentes  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  do sistema (3.1.34) contruímos a matriz

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

a qual chamamos de matriz fundamental do sistema (3.1.34). Cada solução  $x(t)$  deste sistema pode ser escrita como  $x(t) = \Phi(t)c$ , com  $c$  sendo um vetor constante. Além disso, a solução  $x(t)$  tal que  $x(t_0) = x_0$  é dada por:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0. \tag{3.1.35}$$

Usualmente escolhemos a matriz fundamental  $\Phi(t)$  de tal forma que  $\Phi(t_0) = Id$ . De (3.1.35) e da forma explícita das soluções independentes do sistema (3.1.34), temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.1.** *Consideremos o sistema diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A$  é a matriz constante  $n \times n$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Então, as seguintes afirmações são válidas:*

(a) *Se  $Re\lambda_k < 0$  para  $k = 1, \dots, n$ , então para cada solução  $x(t)$  tal que  $x(t_0) = x_0$  existe duas constantes positivas  $C$  e  $\mu$  satisfazendo*

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\mu t} \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

(b) *Se  $Re\lambda_k \leq 0$  para  $k = 1, \dots, n$  e os autovalores com  $Re\lambda_k = 0$  são diferentes, então a solução  $x(t)$  é limitada para  $t \geq t_0$ . Mais precisamente*

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\| \quad \text{com } C > 0.$$

(c) *Se existe um autovalor  $\lambda_k$  com  $Re\lambda_k > 0$ , então em cada vizinhança de  $x = 0$  existe solução  $x(t)$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty.$$

Sobre as premissas da afirmação (a) da proposição acima, a solução  $x = 0$  é chamada é chamada *assintoticamente estável*. Sobre as premissas da afirmação (b) da proposição acima, a solução  $x = 0$  é chamada de *Liapunov estável*. E, finalmente, sobre as premissas da afirmação (c) da proposição acima, a solução  $x = 0$  é chamada *instável*.

O seguinte resultado é conhecido como Teorema de Poincaré-Liapunov:

**Teorema 3.1.3.** *Considere o sistema diferencial*

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1.36)$$

com  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A$  é uma matriz constante  $n \times n$  possuindo todos os autovalores com parte real negativa,  $B(t)$  é uma matriz contínua  $n \times n$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t) = 0\|$ . A função  $f(t, x)$  é contínua em  $t$  e  $x$ , e Lipschitziana em  $x$  em uma vizinhança de  $x = 0$ . Se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{\|x\|} = 0 \quad \text{uniformemente em } t,$$

então existe uma constante positiva  $C$ ,  $t_0$ ,  $\delta$  e  $\mu$  tal que  $\|x_0\| \leq \delta$  implica que

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)} \quad \text{para } t \geq t_0.$$

A solução  $x = 0$  é assintoticamente estável e a atração é exponencial em uma  $\delta$ -vizinhança de  $x = 0$ .

*Demonstração.* Pela proposição (3.1.1), temos uma estimativa para a matriz fundamental do sistema diferencial

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = Id.$$

Desde que todos os autovalores da matriz  $A$  tem parte real negativa, então existem constantes positivas  $C$  e  $\mu_0$  tal que

$$\|\Phi(t)\| \leq Ce^{-\mu_0(t-t_0)}, \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Das premissas sobre a  $f$  e  $B$  para  $\delta_0 > 0$  suficientemente pequeno, existe uma constante  $b(\delta_0)$  tal que se  $\|x\| \leq \delta_0$  então

$$\|f(t, x)\| \leq b(\delta_0)\|x\| \quad \text{para } t \geq t_0;$$

e se  $t_0$  é suficientemente grande

$$\|B(t)\| \leq b(\delta_0), \quad \text{para } t \geq t_0.$$

O Teorema da Existência e Unicidade afirma que em uma vizinhança de  $x = 0$  a solução do problema de valor inicial (3.1.36), existe para  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Essa solução é definida para todo  $t \geq t_0$ .

Afirmamos que o problema de valor inicial (3.1.36) é equivalente à equação integral

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-s+t_0)[B(s)x(s) + f(s, x(s))]ds. \quad (3.1.37)$$

De fato, a matriz fundamental  $\Phi(t)$  do sistema diferencial  $\dot{x} = Ax$  pode ser escrito como  $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ . Daí, substituindo  $x = \Phi(t)z$  no sistema diferencial (3.1.36), obteremos

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}z + \Phi(t)\dot{z} = A\Phi(t)z + B(t)\Phi(t)z + f(t, \Phi(t)z).$$

Desde que  $d\Phi(t)/dt = A\Phi(t)$  nós temos que

$$\dot{z} = \Phi(t)^{-1}B(t)\Phi(t)z + \Phi(t)^{-1}f(t, \Phi(t)z).$$

Integrando esta expressão de  $t_0$  à  $t$  e multiplicando por  $\Phi(t)$ , teremos (3.1.37), o que queríamos.

Usando as estimativas para  $\Phi$ ,  $B$  e  $f$ , temos

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t [\|\Phi(t-s+t_0)\| \|B(s)\| \|x(s)\| + \|f(s, x(s))\|] ds \\ &\leq C e^{-\mu_0(t-t_0)} \|x_0\| + \int_{t_0}^t C e^{-\mu_0(t-s)} 2b \|x(s)\| ds \end{aligned}$$

para  $t_0 \leq t \leq t_2 \leq t_1$ . Portanto

$$e^{\mu_0(t-t_0)} \|x(t)\| \leq C \|x_0\| + \int_{t_0}^t C e^{-\mu(s-t_0)} 2b \|x(s)\| ds,$$

para  $t_0 \leq t \leq t_2$  com  $t_2$  sendo determinado pela condição  $\|x\| \leq \delta_0$ . Usando agora, a Desigualdade de Gronwall, proposição (3.1.1), com  $\psi(t) = e^{\mu_0(t-t_0)} \|x(t)\|$ ,  $\delta_1 = C2b$ ,  $\delta_2 = C^2 2b \|x_0\|$  e  $\delta_3 = 0$ , vem que

$$e^{\mu_0(t-t_0)} \|x(t)\| \leq C \|x_0\| e^{C2b(t-t_0)} \quad (3.1.38)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão (3.1.38) acima, por  $e^{\mu_0(t-t_0)}$ , vem que

$$\|x(t)\| \leq C \|x_0\| e^{(C2b-\mu_0)(t-t_0)}$$

Se  $\delta_1$  e conseqüentemente  $b$ , forem suficientemente pequenos, nós teremos que  $\mu = \mu_0 - C2b$  é positivo, e a desigualdade da afirmação do teorema se segue para  $t \in [t_0, t_2]$ .

Finalmente, escolhendo  $\|x_0\|$  de tal forma que  $\|x_0\| \leq \delta_0$ , então  $\|x(t)\|$  decresce, e, conseqüentemente, a solução  $x = 0$  é assintoticamente estável e a atração é exponencial em uma  $\delta$ -vizinhança de  $x = 0$ .

Retornando ao teorema (3.1.2), agora que estabelecemos os resultados preliminares para sistemas lineares, vamos aplicar isso ao problema original.

Se  $p$  é um ponto singular do sistema médio  $\dot{y} = f_0(y)$  e todos os autovalores do sistema associado em  $y = p$  possuem parte real negativa, podemos concluir que o ponto  $p$  é assintoticamente estável. Ou seja, a solução  $y(t)$  do sistema médio tende a  $p$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

A partir da mudança de variáveis  $z(t) = y(\epsilon t)$  na equação  $\dot{z} = \epsilon f_0(z) + O(\epsilon^2)$ , como  $\epsilon \rightarrow 0$ , o comportamento do sistema médio predomina. Portanto, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, a solução periódica  $x(t, \epsilon)$  do sistema perturbado original (3.1.4) também será assintoticamente estável devido à estabilidade de  $p$  no sistema médio (3.1.6).

Por outro lado, se um dos autovalores do sistema linearizado em  $p$  possui parte real positiva, o ponto  $p$  será instável. Isso implica que pequenas perturbações levarão as soluções

a se afastarem de  $p$ , e, conseqüentemente, a solução periódica  $x(t, \epsilon)$  do sistema original também será instável para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Assim, a estabilidade da solução periódica  $x(t, \epsilon)$  do sistema original está diretamente ligada à estabilidade do ponto crítico  $p$  do sistema médio, completando a demonstração do item (ii).



Como Aplicação do Teorema (3.1.2) , no próximo capítulo vamos obter um resultado para o estudo de órbitas periódicas em certos sistemas hamiltonianos perturbados.

Existem uma série de problemas clássicos em equações diferenciais ordinárias em que pode-se usar o Teorema (3.1.2) para o estudo de órbitas periódicas. Por exemplo, a equação de Von der Pol, modelos de osciladores lineares forçados. Recomendamos ao leitor, que deseja se aprofundar no método da média para órbitas periódicas consultar as referências [27], [24], [9] e [22].

Nesta dissertação, nosso objetivo é obter versões do método da média para sistemas hamiltonianos, por esse motivo não nos estendemos na discussão e aplicações do Teorema (3.1.2) para EDOs.

## Capítulo 4

# O método da Média e órbitas periódicas para Sistemas Hamiltonianos

O Método da Média é uma ferramenta matemática poderosa, utilizada para simplificar equações diferenciáveis em sistemas dinâmicos, especialmente quando lidamos com sistemas periódicos ou quase periódicos. Em sistemas hamiltonianos, ele é bastante útil para estudar o comportamento de longo prazo em sistemas perturbados.

Começamos com um resultado, que consiste numa aplicação do Teorema 3.1.2 no caso de sistemas hamiltonianos. Este resultado pode ser encontrado em [16].

Consideraremos a seguinte classe de sistemas hamiltonianos nas variáveis ação-ângulo:

$$H(I_1, J_2, \dots, J_n, \theta_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) = H_0(I_1) + \epsilon H_1(I_1, J_2, \dots, J_n, \theta_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n), \quad (4.0.1)$$

onde  $I = (I_1, J_2, \dots, J_n)$  e  $\theta = (\theta_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  são vetores de  $\mathbb{R}^n$ , e  $H = H_0 + \epsilon H_1$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $2\pi$ -periódica em  $\theta$ .

Diremos que o termo  $H_0(I_1)$  é o Hamiltoniano não perturbado, e que  $H_1(I, \theta)$  é o termo de perturbação, com  $\epsilon$  sendo o parâmetro pequeno que controla a magnitude da perturbação.

Utilizando de (1.1.1), concluímos que o sistema hamiltoniano associado é:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\epsilon \frac{\partial H}{\partial \theta_1}; \\ \dot{J}_i &= -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_i}, \quad i = 2, \dots, n; \\ \dot{\theta}_1 &= H'_0(I_1) + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_1}; \\ \dot{\Phi}_i &= \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_i}, \quad i = 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

com  $H'_0$  sendo a derivada de  $H_0$  com respeito à  $I_1$ . Podemos observar que os termos de perturbação  $H_1$  aparecem em todas as equações, modificando o comportamento do sistema a medida que  $\epsilon$  se torna pequeno; também nota-se que  $H'_0$  influencia apenas a dinâmica de  $\theta_1$ .

Os próximos resultados nos dão condições suficientes para que encontremos órbitas periódicas do sistema hamiltoniano associado ao hamiltoniano (4.0.1).

A próxima etapa consiste em “eliminar” a dependência explícita do  $\theta_1$ , para focar na evolução de longo prazo das variáveis  $I$ .

Para isso, defina, análogo à (3.1.5), a média do Hamiltoniano perturbado  $H_1$ , ao longo de um período de movimento em  $\theta$ :

$$\bar{H}_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(I, \theta) d\theta_1 \quad (4.0.3)$$

Essa média simplifica a dependência de  $\theta_1$ , resultando então em um sistema diferencial mais fácil de se analisar. Tal sistema resultante (associado à função média (4.0.3)) é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial \theta_1} &= -\frac{\epsilon}{H'_0(H_0^{-1}(h_0))} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \Phi_i} = -\frac{\epsilon}{H'_0(H_0^{-1}(h_0))} f_{i-1}(J, \theta), \quad i = 2, \dots, n; \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_1} &= \frac{\epsilon}{H'_0(H_0^{-1}(h_0))} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial J_i} = \frac{\epsilon}{H'_0(H_0^{-1}(h_0))} f_{i+n-2}(J, \theta), \quad i = 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

onde consideramos que  $(J, \theta) = (J_2, \dots, J_n, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ . Este sistema descreve a evolução das variáveis  $J$  e  $\Phi$  e está restrito ao nível de energia  $H = h_0$ . Isto é:

$$h_0 = H_0(I_1) + \epsilon H_1(I, \theta), \quad (4.0.5)$$

onde  $H_0(I_1)$  é o hamiltoniano não perturbado e  $H_1(I, \theta)$  é o termo de perturbação.

Note ainda que  $H_0$  é uma função real definida em um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , isto é,

$$H_0 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R};$$

Desta forma,  $H'_0(H_0^{-1}(h_0))$  está bem definida.

De fato, o sistema (4.0.4) está no nível de energia  $H(I, \theta) = h_0 \in \mathbb{R}$ , de maneira que  $H_0^{-1}$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $h_0$ . Pelo Teorema da Função Inversa:

$$H = h_0 = H_0(I_1) \implies H_0^{-1}(h_0) = I_1.$$

O próximo Teorema irá garantir a existência de uma família  $2\pi$ -periódica de soluções.

**Teorema 4.0.1.** *Considere a função hamiltoniana (4.0.1) com  $H'_0(I_1) \neq 0$ . Se  $\epsilon \neq 0$  é suficientemente pequeno e  $p_0 = (J_2^0, \dots, J_n^0, \Phi_2^0, \dots, \Phi_n^0) = (J_0, \Phi_0)$  é um ponto crítico não-degenerado do sistema (4.0.4), isto é,*

$$\det \left( \frac{\partial f_1, \dots, f_{2n-2}}{\partial (J, \Phi)} \right) \Bigg|_{(J, \Phi) = (J_0, \Phi_0)} \neq 0.$$

Então, existe uma família  $2\pi$ -periódica (na variável  $\theta$ ) de soluções, do sistema hamiltoniano associado a função hamiltoniana (4.0.1), dada por:

$$\gamma_\epsilon(\theta) = (I(\theta, \epsilon), J_2(\theta, \epsilon), \dots, J_n(\theta, \epsilon), \Phi_2(\theta, \epsilon), \dots, \Phi_n(\theta, \epsilon)), \quad (4.0.6)$$

onde

$$\gamma_\epsilon(\theta) \rightarrow (H_0^{-1}(h_0), J_2^0, \dots, J_n^0, \Phi_2^0, \dots, \Phi_n^0)$$

a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* O sistema hamiltoniano associado a função (4.0.1) é escrito como (4.0.2). Agora tomamos  $\theta_1$  como uma variável independente e fixamos o nível de energia

$$H = h_0.$$

Usando o Teorema da Função Implícita na equação (4.0.5), obtemos uma expressão para  $I_1$  em termos de  $h_0$  e  $\epsilon$ , da seguinte forma:

$$I_1 = H_0^{-1}(h_0) + O(\epsilon).$$

Convém notar que  $H_0^{-1}(h_0)$  tende a  $I_1$ , a medida que  $\epsilon$  tende a zero, que é a solução correspondente ao sistema não perturbado (isto é, sem o termo referente a  $H_1$ .) Agora, substituímos essa expressão de  $I_1$  no sistema médio associado ao Hamiltoniano perturbado, que foi dado pela equação (4.0.4). Note que o sistema 4.0.4, está na forma do Teorema 3.1.2.

Desta forma, dado um ponto crítico não-degenerado  $(J_0, \Phi_0)$  do sistema médio, ou seja:

$$\det \left( \frac{\partial (f_1, \dots, f_{2n-2})}{\partial (J, \Phi)} \right) \Bigg|_{(J_0, \Phi_0)} \neq 0,$$

então existe uma família de órbitas periódicas próximas ao ponto  $(J_0, \Phi_0)$  para  $\epsilon$  pequeno. Assim, existe uma solução periódica  $\gamma_\epsilon(\theta)$  tal que:

$$\gamma_\epsilon(\theta) = (I(\theta, \epsilon), J_2(\theta, \epsilon), \dots, J_n(\theta, \epsilon), \Phi_2(\theta, \epsilon), \dots, \Phi_n(\theta, \epsilon)), \quad (4.0.7)$$

com a condição de que, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\gamma_\epsilon(\theta) \rightarrow (H_0^{-1}(h_0), J_2^0, \dots, J_n^0, \Phi_2^0, \dots, \Phi_n^0).$$

Ou seja, as soluções periódicas do sistema perturbado tendem às soluções do sistema não perturbado conforme o parâmetro de perturbação  $\epsilon$  se aproxima de zero, e assim concluímos que existe uma família de soluções periódicas para o sistema hamiltoniano perturbado. ■

## 4.1 O Teorema de Reeb

Nesta seção enunciamos e demonstramos o Teorema de Reeb, resultado originalmente encontrado em [23] e sua versão mais moderna para sistemas Hamiltonianos pode ser encontrado em [28]. O Teorema de Reeb é uma versão mais simplificada do Teorema da média para órbitas periódicas em sistemas Hamiltonianos, pois não exige um escalonamento prévio no tempo, ao construir o sistema de equações associados a função média. Nesta seção vamos enunciar e provar este Teorema e apresentar duas aplicações em sistemas Hamiltonianos perturbados com dois graus de liberdade. Escolhemos dois problemas que são perturbações do problema de Kepler no plano. O primeiro, consiste em uma perturbação de um problema clássico do átomo de hidrogênio onde são consideradas forças externas devido a presença de um campo elétrico e um campo magnético.

A aplicação do Teorema de Reeb está sustentada na existência de uma função Hamiltoniana perturbada em que existe uma coordenada cíclica  $\theta$  e sua conjugada  $I$ , de maneira que a parte não perturbada dependa unicamente da variável  $I$  (e possua órbitas periódicas). Mais explicitamente, considere o sistema Hamiltoniano autônomo com  $n$  graus de liberdade cuja função Hamiltoniana é dada por

$$H(I, \theta, y, \epsilon) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.1.1)$$

onde  $H_0, H_1 : W \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções analíticas em  $(I, \theta, y)$  e  $\epsilon$ , a variável  $\theta$  é uma variável angular módulo  $2\pi$ . Mais precisamente,  $(I, \theta) \in TS^1$ ,  $y \in O \subset \mathbb{R}^{2n-2}$  são coordenadas simpléticas. Além disso, assumimos que  $\omega(I) = -\frac{\partial H_0}{\partial I} \neq 0$ .

Denotamos por  $\varphi_0(t)$  a solução do problema não perturbado associado a função Hamiltoniana (4.1.1), isto é, a solução do sistema associado a (4.1.1) com  $\epsilon = 0$ . É fácil ver que se  $(I, \theta, y)$  é uma condição inicial, então qualquer solução com tal condição inicial é periódica e dada por

$$\varphi_0(t) = (I, \omega t + \theta, y), \quad (4.1.2)$$

cujo período é  $T = T(I) = \frac{2\pi}{\omega}$ .

A essência do método que descreveremos detalhadamente a seguir, consiste em considerar a função Hamiltoniana dividida em uma parte não perturbada e uma parte perturbada, onde as soluções da parte não perturbada são periódicas. Então o sistema Hamiltoniano associado a parte perturbada pode ser reduzido em duas dimensões, reduzindo um grau de liberdade do sistema original. Os pontos críticos não degenerados do sistema reduzido estão associados a família de órbitas periódicas do sistema completo.

O sistema Hamiltoniano associado à função Hamiltoniana (4.1.1) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{\theta} &= \omega + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{y} &= \epsilon \mathbb{J} \nabla_y H_1(I, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

where  $\mathbb{J}$  é a matriz  $(2n - 2) \times (2n - 2)$  anti-simplética  $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ . O sistema

$$\dot{y} = \epsilon \mathbb{J} \nabla_y H_1(I, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

em  $\mathbb{R}^{2n-2}$  é chamado de *sistema reduzido*, o qual claramente é um sistema Hamiltoniano.

Antes de enunciar o Teorema de Reeb, consideramos algumas notações e definições.

1. Denotamos por  $\mathbf{Y}_0 = \mathbb{J} \nabla H_0(I)$  o campo de vetores associado ao sistema Hamiltoniano não perturbado com função Hamiltoniana  $H_0$  cujo fluxo é  $\varphi_0(t)$ ;
2. Seja  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  um intervalo de maneira que cada  $h \in \mathbb{I}$  é um valor regular de  $H_0$  e  $\mathcal{N}_0(h) = H_0^{-1}(h)$  é um feixe de círculos conexos e compactos sobre o espaço das órbitas  $B(h) \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  (que chamaremos de *espaço reduzido*) com projeção  $\pi : \mathcal{N}_0(h) \rightarrow B(h)$ .
3. Assuma que todas as soluções de  $\mathbf{Y}_0 = \mathbb{J} \nabla H_0(I)$  em  $\mathcal{N}_0(h)$  são periódicas.
4. Seja  $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbb{J} \nabla H(I, \theta, y, \epsilon)$  o campo de vetores associado à função Hamiltoniana (4.1.1) cujo fluxo será denotado por  $\varphi(t, \epsilon) = (I(t, \epsilon), \theta(t, \epsilon), y(t, \epsilon))$ ;

5.  $\mathcal{N}_\epsilon = H^{-1}(h)$  uma perturbação do nível de energia;

Denotamos por  $\bar{\mathcal{H}}$  a função média associada a  $H_1$ , a qual é dada por:

$$\bar{\mathcal{H}}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T H_1(\varphi_0(t)) dt. \quad (4.1.4)$$

Desta forma estamos pronto para enunciar o Teorema de Reeb.

**Teorema 4.1.1** (Teorema de Reeb). *Se  $\bar{\mathcal{H}}$  possui um ponto crítico não degenerado  $y_0 \in \mathcal{B}(h)$  com  $p = \pi^{-1}(y_0) \in \mathcal{N}_0(h)$  então existem funções diferenciáveis  $p(\epsilon)$  e  $T(\epsilon)$  definidas para  $\epsilon$  suficientemente pequeno com  $p(0) = p$ ,  $T(0) = T$ , e  $p(\epsilon) = \pi^{-1}(y(\epsilon)) \in \mathcal{N}_\epsilon$ , e a solução de  $Y_\epsilon$  com condição inicial  $p(\epsilon)$  é  $T(\epsilon)$ -periódica.*

*Demonstração.* Considere o sistema (4.1.3). Para  $h$  e  $\theta_0$  fixados, consideramos a seção transversal  $\Sigma : \theta = \theta_0$  e a seção transversal no nível de energia  $h$  como  $\sigma = \Sigma \cap \mathcal{N}_\epsilon(h)$ . O tempo de retorno  $T_\epsilon$  para  $\theta$  variar de  $\theta = \theta_0$  até  $\theta = \theta_0 + 2\pi$  necessita ser calculado usando a equação em  $\dot{\theta}$  e integrando entre  $t = 0$  e  $t = T_\epsilon$ . Desta maneira,

$$\int_0^{T_\epsilon} \dot{\theta} dt = \int_0^{T_\epsilon} \omega dt - \epsilon \int_0^{T_\epsilon} \frac{\partial H_1}{\partial I} dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \rightarrow \quad \theta(T_\epsilon) - \theta(0) = \omega T_\epsilon - \epsilon T_\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.1.5)$$

Da equação (4.1.5), obtemos que

$$2\pi = \left( \omega - \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \right) T_\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.1.6)$$

ou equivalente,

$$T_\epsilon = \frac{2\pi}{\omega - \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.1.7)$$

Desenvolvendo a última equação em série de Taylor centrada em  $\epsilon = 0$ , obtemos que

$$T_\epsilon = \frac{2\pi}{\omega} + \epsilon \frac{2\pi}{\omega^2} \frac{\partial H_1}{\partial I} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.1.8)$$

Considere  $y \in \sigma$  com  $\theta = \theta_0$  e fixe o nível de energia  $\mathcal{K}_\epsilon = h$ . Segue que

$$h = \mathcal{K}_\epsilon = H_0(I) + \epsilon H_1(I, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Usando o fato que  $\frac{\partial H_0(I)}{\partial I} \neq 0$  e usando o Teorema da Função Implícita, obtemos que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, podemos escrever

$$I = I(\theta_0, y, \epsilon) = H_0^{-1}(h) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.1.9)$$

De fato, considerando a função

$$f(I, \epsilon) = -h + H_0(I) + \epsilon H_1(I, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

verifica-se facilmente que  $f(I, 0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial I}(I, 0) = \frac{\partial H_0}{\partial I} \neq 0$ . Aplicando o Teorema da Função Implícita segue a afirmação.

Agora, consideramos a aplicação de Poincaré em  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} P_\epsilon : \sigma &\rightarrow \sigma \\ y &\mapsto P(y, \epsilon) = y + \epsilon \mathbb{J} \nabla H_1(I, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Se existe  $\xi \in \sigma$  tal que  $\xi$  é um ponto fixo de  $P_\epsilon$ , ou seja,  $P_\epsilon(\xi) = \xi$ , então  $\xi$  dá origem a uma solução periódica do sistema completo (4.1.3). De fato, se  $P_\epsilon(\xi) = \xi$ , a condição inicial que dá origem a uma solução periódica do sistema (4.1.3) é  $z = (I, \theta_0, \xi)$  no conjunto  $K_\epsilon = h$ . A componente  $I$  é calculada usando (4.1.9). Além disso  $\theta(t+T_\epsilon) = \theta(t) + 2\pi$ , onde  $T_\epsilon$  (dado em (4.1.8)) é o tempo do primeiro retorno a seção transversal  $\sigma$ . A periodicidade de  $I(t)$  segue usando a relação de energia e usando a periodicidade da função Hamiltoniana  $H$  na variável  $\theta$  ( $H$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$ ). Para concluir a demonstração da existência de condições iniciais que geram as soluções periódicas, definimos a função

$$F(y, \epsilon) = P_\epsilon(y, \epsilon) - y = T \nabla_y \mathcal{H}(y) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Agora aplicamos o Teorema da função Implícita. Usando as hipóteses obtemos que  $F(y_0, 0) = 0$  e por outro lado,

$$D_y F(y, \epsilon)|_{y=y_0, \epsilon=0} = D_y^2 \mathcal{H}_1(y_0) \neq 0.$$

Então usando o Teorema da Função Implícita, obtemos a existência de única curva diferenciável  $y = y(\epsilon)$  tal que  $y(0) = 0$  e  $F(y(\epsilon), \epsilon) = 0$ , ou equivalente  $P_\epsilon(y(\epsilon), \epsilon) = y(\epsilon)$ . Assim, concluímos a demonstração do Teorema. ■

### 4.1.1 Perturbações planares do Problema de Kepler

Nesta seção vamos considerar o problema que consiste em perturbações planares do problema de Kepler. Com o uso de coordenadas apropriadas, vamos obter um resultado (consequência do Teorema de Reeb) para obter soluções periódicas do problema perturbado como continuação de soluções do problema de Kepler.

Considere o problema associado a função Hamiltoniana analítica, que tem a forma

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^\alpha H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^{\alpha+1} H_R(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon), \quad (4.1.11)$$

cujo sistema Hamiltoniano é dado por

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad (4.1.12)$$

com  $\mathbf{q} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Quando  $\epsilon = 0$ , a função Hamiltoniana (4.1.11) se reduz a

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}$$

a qual corresponde ao problema de Kepler bidimensional. As funções perturbadas  $H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $H_R(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)$  são ambas analíticas.

Muitos problemas em sistemas Hamiltonianos foram estudados sob sistemas perturbados da forma dada por (4.1.11). Para referências em aplicações veja [2, 11] e as referências citadas neles. Veremos dois destes problemas nas próximas seções. O primeiro deles, consiste no problema do Átomo de Hidrogênio sob ação de forças externas. Este problema encontra-se formulado em [2], onde os autores estudaram a existência de órbitas periódicas simétricas usando o método de continuação analítica de Poincaré. Nesta dissertação vamos mostrar que as mesmas soluções do problema de Kepler que foram continuadas a soluções periódicas no problema perturbado em [2], geram soluções periódicas usando a técnica da média. A segunda aplicação, consiste no problema anisotrópico de dois corpos com potencial do tipo Manev, cujo estudo de órbitas periódicas foi realizado pelos autores em [11].

Para estudar soluções periódicas próximas a soluções elípticas do problema de Kepler vamos usar as coordenadas de Delaunay.

A função Hamiltoniana  $H$ , em coordenadas mistas, polares e elementos de Delaunay, é uma função que depende explicitamente das variáveis polares  $r$  e  $\theta$ , onde  $\theta = f + g$  e das variáveis  $L$  e  $G$ . Recordamos que a relação explícita entre coordenadas polares e cartesianas é obtida através da seguinte transformação

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ p_x &= R \cos \theta - \frac{G}{r} \sin \theta, \\ p_y &= R \sin \theta + \frac{G}{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

A função (4.1.11), em coordenadas polares assume a forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{R^2}{2} + \frac{G^2}{2r^2} - \frac{1}{r} + \epsilon^\alpha H_1(r, \theta, L, G) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+1}), \quad (4.1.14)$$

onde  $\theta = f + g$  e  $f$  é a anomalia verdadeira. A função perturbada (problema de Kepler) em coordenadas de Delaunay assume a forma

$$H_0 = \frac{R^2}{2} + \frac{G^2}{2r^2} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2}. \quad (4.1.15)$$

A fim de calcular a função média, primeiro, eliminamos a dependência de  $H_1$  em (4.1.14) das variáveis  $r$  e  $f$ , utilizando as relações auxiliares entre as anomalias e as variáveis polares.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad \cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad e = \sqrt{1 - G^2/L^2}, \quad (4.1.16)$$

sendo  $E$  a anomalia excêntrica. Veja mais detalhes em [2]. Usando as relações acima, a função Hamiltoniana (4.1.14) assume a forma

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2L^2} + \epsilon \mathcal{H}_1(E, g, L, G) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.1.17)$$

Usando a equação de Kepler

$$\ell = E - e \sin E,$$

segue que  $d\ell = (1 - e \cos E)dE$ . Então podemos calcular a função média, a partir da variável angular  $\ell$ , donde com a mudança de variáveis na integração acima, obtemos

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(\ell, g, L, G) d\ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(E, g, L, G) (1 - e \cos E) dE. \quad (4.1.18)$$

Desta maneira, nas coordenadas de Delaunay  $(\ell, g, L, G)$  o sistema reduzido, associado a função Hamiltoniana (4.1.18), assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial G}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial g}. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Obtemos então o Hamiltoniano normalizado, após a eliminação da anomalia média  $\ell$ , cuja expressão é

$$\mathcal{H}(g, L, G) = \mathcal{H}_0(I) + \epsilon^\alpha \bar{\mathcal{H}}_1(g, L, G) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+1}). \quad (4.1.20)$$

Temos então o seguinte resultado como consequência do Teorema de Reeb para sistemas Hamiltonianos (veja maiores detalhes nas referências [17] e [23]).

**Teorema 4.1.2.** *Considere o sistema diferencial médio (4.1.19) nas variáveis de Delaunay, restrito ao nível de energia  $\mathcal{H} = h$  ( $h < 0$ ).*

*Se  $\bar{p} = (g_0, G_0) = (g_0^*, G_0^*)$  é um ponto crítico isolado não degenerado da função média (4.1.18), então existem funções analíticas  $p(\epsilon) = (\ell(\epsilon), g(\epsilon), L(\epsilon), G(\epsilon))$  e  $T(\epsilon)$  definidas para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, tais que  $p(0) = (\ell_0, g_0^*, 1/\sqrt{-2h^*}, G_0^*)$  e  $T(0) = T = 2\pi L_0^3$ , de modo que a solução de (4.1.12) através de  $p(\epsilon)$  é  $T(\epsilon)$ -periódica.*

*Demonstração.* No que se segue, denotamos por

$$p(t, \epsilon) = (\ell(t, \epsilon), g(t, \epsilon), L(t, \epsilon), G(t, \epsilon)),$$

uma solução do sistema (4.1.12) em coordenadas de Delaunay, ou seja, uma solução do problema associado a função Hamiltoniana (4.1.20). Ainda, denotamos por  $\varphi(t)$  a solução periódica Kepleriana associada ao ponto crítico  $\bar{p}$ . Se  $p(t, \epsilon)$  é uma solução periódica do sistema perturbado (4.1.12) nas coordenadas  $(\ell, g, L, G)$  tal que  $p(t, 0) = \varphi(t) = (\ell_0 + t/L_0^3, g_0^*, 1/\sqrt{-2h^*}, G_0^*)$ , as equações de movimento associadas são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{L_0^3} + \epsilon^\alpha \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1}{\partial L} + O(\epsilon^{\alpha+1}), & \dot{L} &= O(\epsilon^\alpha), \\ \dot{g} &= \epsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1}{\partial G} + O(\epsilon^\alpha), & \dot{G} &= -\epsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1}{\partial g} + O(\epsilon^\alpha). \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Resolvendo o sistema (4.1.21) obtemos a aproximação da solução periódica dada por

$$\begin{aligned} \ell(t, \epsilon) &= \ell_0 + t/L_0^3 + O(\epsilon^\alpha), & L(t, \epsilon) &= L_0 + O(\epsilon^\alpha), \\ g(t, \epsilon) &= g_0^* + O(\epsilon^\alpha), & G(t, \epsilon) &= G_0^* + O(\epsilon^\alpha). \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

O restante do resultado segue do Teorema de Reeb 4.1.1. ■

**Observação 4.1.1.** *As coordenadas de Delaunay, não estão definidas numa vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler ( $L = |G|$ ).*

## 4.2 Aplicação: Átomo de Hidrogênio sob ação de forças externas

Consideramos um sistema atômico simples, nomeadamente o átomo de hidrogênio, que interage com campos externos independentes do tempo, que incluem campos elétricos e

magnéticos. Nesta formulação, o campo magnético é geralmente aplicado perpendicularmente ao plano  $xy$ , enquanto o campo elétrico estático é aplicado ao longo do eixo  $x$ . Indicamos ao leitor as referências [2], [8] ou [12] para mais detalhes sobre a formulação deste problema. O problema, em coordenadas cartesianas, é formulado matematicamente pela função Hamiltoniana:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\tilde{B}}{2}(yp_x - xp_y) + \frac{B^2}{8}(x^2 + y^2) - Fx, \quad (4.2.1)$$

a qual chamaremos de *função Hamiltoniana AHM*. Esta função Hamiltoniana depende de dois parâmetros  $\tilde{B}$  e  $F$ . O termo  $Fx$  é o potencial eletrostático que descreve o efeito Stark, enquanto os outros termos com o parâmetro  $\tilde{B}$  se referem ao efeito Zeeman linear e quadrático (ver [8] para mais detalhes sobre a definição das constantes físicas). Consideraremos o problema do átomo de hidrogênio onde as forças devidas aos campos magnético e elétrico são muito pequenas. Ou seja, vamos considerar os parâmetros  $\tilde{B}$  e  $F$  da seguinte forma

$$: \tilde{B} = 2B\epsilon, \quad F = \gamma\epsilon,$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro pequeno. Considerando este escalonamento, a função Hamiltoniana (4.2.1) assume a forma:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \epsilon [B(yp_x - xp_y) - \gamma x] + \epsilon^2 \frac{B}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.2.2)$$

Para mostrar a existência de soluções periódicas, vamos aplicar o Teorema de Reeb 4.1.2.

A função Hamiltoniana (4.2.2), nas variáveis de Delaunay e em termos da anomalia Excêntrica assume a forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2L^2} + \epsilon \mathcal{H}_1(E, g, L, G) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.2.3)$$

onde, a função Hamiltoniana  $\mathcal{H}_1$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(E, g, L, G) &= -BG - r\gamma \cos(f + g), \\ &= -BG + L^2\gamma \left( \sqrt{1 - e^2} \sin E \sin(g) + \cos(g)(e - \cos E) \right), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Calculando as integrais que envolvem a função média acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{H}_1(E, g, L, G)(1 - e \cos E) dE &= - \int_0^{2\pi} BG(1 - e \cos E) dE \\ &+ \int_0^{2\pi} L^2\gamma \left( \sqrt{1 - e^2} \sin E \sin(g) + \cos(g)(e - \cos E) \right) (1 - e \cos E) dE \\ &= -2\pi BG + L^2(3\pi\gamma\sqrt{1 - G^2/L^2} \cos g). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Desta maneira, obtemos que a função média é dada por:

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}(g, G) = -2\pi BG + L^2(3\pi\gamma\sqrt{1 - G^2/L^2} \cos g) \quad (4.2.6)$$

Temos o seguinte resultado, sobre a existência de soluções periódicas do sistema Hamiltoniano associado à função Hamiltoniana (4.2.2).

**Teorema 4.2.1.** *Considere o problema associado a função Hamiltoniana AHM dado por (4.2.1). Então valem as seguintes afirmações:*

(a) *Se  $\gamma < 0$  então existem duas famílias de soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler (dadas em coordenadas de Delaunay)*

$$\varphi_1(t) = \left( \frac{1}{L_0^3}t, 0, L_0, \frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2L_0^2}} \right), \quad \varphi_2(t) = \left( \frac{1}{L_0^3}t, \pi, L_0, -\frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2L_0^2}} \right).$$

(b) *Se  $\gamma > 0$  então existem duas famílias de soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler (dadas em coordenadas de Delaunay)*

$$\varphi_3(t) = \left( \frac{1}{L_0^3}t, 0, L_0, -\frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2L_0^2}} \right), \quad \varphi_4(t) = \left( \frac{1}{L_0^3}t, \pi, L_0, \frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2L_0^2}} \right).$$

*Demonstração.* Para provar este resultado, vamos usar o Teorema 4.1.2. Ou seja, necessitamos mostrar a existência de pontos críticos não degenerados para a função (4.2.6). Calculando as derivadas parciais de  $\bar{\mathcal{H}}$  em (4.2.6), obtemos as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial G} &= -B - \frac{3\gamma GL \cos(g)}{2\sqrt{L^2 - G^2}}, \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial g} &= \frac{3}{2}\gamma L \sin(g)\sqrt{L^2 - G^2}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

É fácil verificar que  $\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial g} = 0$  implica que  $g_0 = 0$  ou  $g_0 = \pi$ .

Primeiro, analisamos o caso quando  $g_0 = 0$ . Substituindo na primeira expressão da equação (4.2.7) e igualando a zero, necessitamos resolver na variável  $G$  a seguinte equação

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial G} = -B - \frac{3\gamma GL}{2\sqrt{L^2 - G^2}} = 0. \quad (4.2.8)$$

As soluções desta última equação são

$$G_0 = \frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2L_0^2}} \quad \text{se } \gamma < 0, \quad G_0 = -\frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2L_0^2}} \quad \text{se } \gamma > 0. \quad (4.2.9)$$

Observe que as soluções  $G_0$  em (4.2.9) estão bem definidas em relação ao conjunto de definição das variáveis de Delaunay, pois satisfazem a condição  $|G_0| < L_0$ . Desta maneira obtemos dois pontos críticos

$$p_1 = (g_0, G_0) = \left( 0, \frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2 L_0^2}} \right), \quad p_3 = (g_0, G_0) = \left( 0, -\frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2 L_0^2}} \right) \quad (4.2.10)$$

Para concluir este primeiro caso, verificamos que os pontos críticos  $p_i$  ( $i = 1, 3$ ) em (4.2.10) são não degenerados. Obtemos que

$$\mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(g, G) = \begin{pmatrix} -\frac{3\gamma GL \sin(g)}{2\sqrt{L^2 - G^2}} & \frac{3}{2}\gamma L \cos(g)\sqrt{L^2 - G^2} \\ \frac{3\gamma L^3 \cos(g)}{2(L^2 - G^2)^{3/2}} & -\frac{3\gamma GL \sin(g)}{2\sqrt{L^2 - G^2}} \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Desta maneira, avaliando a matriz acima em  $g = g_0 = 0$ , obtemos

$$\mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(g = 0, G) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2}\gamma L\sqrt{L^2 - G^2} \\ \frac{3\gamma L^3}{2(L^2 - G^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.12)$$

de maneira que  $\det \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(g = 0, G) = \frac{9\gamma^2 L^4}{4(L^2 - G^2)} > 0$ . Ou seja, os pontos críticos  $p_1$  e  $p_3$  dados em (4.2.10) são não degenerados e determinam soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_3(t)$ , respectivamente, como no enunciado do teorema.

Agora, analisamos o caso quando  $g_0 = \pi$  em (4.2.7). Neste caso, necessitamos resolver na variável  $G$  a seguinte equação

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial G} = -B + \frac{3\gamma GL}{2\sqrt{L^2 - G^2}} = 0. \quad (4.2.13)$$

As soluções desta última equação são

$$G_0 = -\frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2 L_0^2}} \quad \text{se } \gamma < 0, \quad G_0 = \frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2 L_0^2}} \quad \text{se } \gamma > 0. \quad (4.2.14)$$

Desta maneira, temos dois pontos críticos

$$p_2 = (g_0, G_0) = \left( 0, \frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2 L_0^2}} \right), \quad p_4 = (g_0, G_0) = \left( 0, -\frac{2BL_0}{\sqrt{4B^2 + 9\gamma^2 L_0^2}} \right), \quad (4.2.15)$$

da função média  $\bar{\mathcal{H}}$  dada em (4.2.6). Avaliando a matriz (4.3.14) em  $g = g_0 = \pi$ , obtemos

$$\mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(g = \pi, G) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2}\gamma L\sqrt{L^2 - G^2} \\ -\frac{3\gamma L^3}{2(L^2 - G^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.16)$$

de maneira que  $\det \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(g = \pi, G) = \frac{9\gamma^2 L^4}{4(L^2 - G^2)} > 0$ . Os pontos críticos  $p_2$  e  $p_4$  dados em (4.3.11) são não degenerados e determinam soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler  $\varphi_2(t)$  e  $\varphi_4(t)$ , respectivamente. Então concluímos a demonstração. ■

**Observação 4.2.1.** *As soluções elípticas  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  no enunciado do Teorema 4.2.1, foram continuadas para obter soluções periódicas do problema AHEM dado por (4.2.1) em [2]. Porém neste trabalho os autores obtiveram soluções periódicas simétricas usando outra técnica (continuação analítica de Poincaré). Se compararmos a natureza das soluções periódicas obtidas em [2] e àquelas dadas pelo Teorema 4.2.1 para o problema AHEM (4.2.1) podemos destacar as seguintes diferenças:*

1. *As soluções periódicas obtidas em [2] são simétricas (referente a reflexão em torno do eixo  $x$ ) enquanto as obtidas no Teorema 4.2.1 podem não ter essa propriedade.*
2. *O período das soluções periódicas obtidas em [2] têm período sempre igual a solução Kepleriana associada, enquanto as soluções obtidas em nosso Teorema 4.2.1 têm período dependendo do parâmetro  $\epsilon$ .*
3. *As condições iniciais (dependendo em  $\epsilon$ ) que dão origem as soluções periódicas no problema perturbado são distintas. Enquanto as condições iniciais do resultado dado em [2] então restrita ao eixo  $x$ , as condições iniciais dada pelo Teorema 4.2.1, então sobre uma curva (parametrizada por  $\epsilon$ ) não necessariamente um segmento sobre o eixo  $x$ .*

*Podemos perceber que existem diferenças significativas entre as órbitas periódicas obtidas nesta seção e aquelas obtidas em [2]. A principal diferença está nas condições iniciais e no período.*

### 4.3 O problema anisotrópico Manev planar-PMA

Nesta seção, faremos uma investigação sobre a existência de órbitas periódicas próximas a soluções elípticas do Problema de dois corpos Manev Anisotrópico. Este problema é formulado através do seguinte Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) - \frac{1}{\sqrt{\mu Q_1^2 + Q_2^2}} - \frac{b}{\mu Q_1^2 + Q_2^2} \quad (4.3.1)$$

onde  $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  e  $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$ . O problema depende de dois parâmetros distintos  $\mu$  e  $b$ . A seguir, faremos a seguinte hipótese sobre os parâmetros acima. O parâmetro  $\mu$  está próximo de 1,  $b \neq 0$  e  $\epsilon$  é pequeno. Em outras palavras vamos usar o seguinte escalonamento dos parâmetros

$$b = b\epsilon \quad \mu = 1 - \epsilon.$$

Temos então de (4.3.1) o seguinte problema perturbado

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) - \frac{1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} - \epsilon \mathcal{H}_1(Q_1, Q_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.3.2)$$

onde a primeira perturbação é dada por

$$\mathcal{H}_1(Q_1, Q_2) = \left( \frac{Q_1^2}{2(Q_1^2 + Q_2^2)^{3/2}} + \frac{b}{Q_1^2 + Q_2^2} \right). \quad (4.3.3)$$

O Hamiltoniano (4.3.1) para  $b = 0$  e  $\mu = 1$  fornece a formulação do problema clássico de Kepler. Se  $b = 0$  e  $\mu \neq 1$ , temos o problema de Kepler anisotrópico, estudado, por exemplo, em [1]. Por outro lado, se  $\mu = 1$ , então temos o chamado Problema de Manev, que explica os avanços do periélio de Mercúrio com a mesma precisão que na relatividade, veja [?] e as referências nele contidas.

Para  $\mu \neq 1$  e  $b \neq 0$ , o problema é chamado de Problema de Manev Anisotrópico (que denotamos simplesmente por *Problema PMA*). Este problema foi introduzido em [?] no início da década de 1990. O trabalho sobre o PMA foi inspirado pelo Problema de Kepler Anisotrópico. Uma das principais razões para considerar o PMA é analisar mais a fundo as semelhanças entre a mecânica clássica e a teoria quântica.

Em [11], entre outros resultados, são obtidas condições para a existência de órbitas periódicas próximas a soluções circulares e próximas a soluções elípticas do problema de Kepler usando a teoria da média para sistemas Hamiltonianos. Os resultados obtidos em [11] usam uma versão do Teorema da média para sistemas Hamiltonianos diferente daquela do Teorema de Reeb. Nesta dissertação, vamos usar o Teorema 4.1.2 e mostrar que se pode continuar as mesmas órbitas elípticas do problema de Kepler continuadas em [11] para o problema (4.3.2).

### Órbitas periódicas próximas a elipses

Procedemos como na Seção 4.2, começando a introduzir as coordenadas de Delaunay. Consideremos a função Hamiltoniana nas variáveis polares e logo eliminamos a dependência de  $\mathcal{H}_1$  dado em (4.3.3) das variáveis  $r$  e  $f$ , utilizando as relações auxiliares (4.1.16).

A função Hamiltoniana (4.3.3) assume a forma

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2L^2} + \epsilon \mathcal{H}_1(E, g, L, G) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.3.4)$$

onde, a função Hamiltoniana  $\mathcal{H}_1$ , é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(E, g, L, G) &= -\frac{b}{r^2} - \frac{\cos(2(f+g))}{4r} - \frac{1}{4r} \\ &= \frac{1}{4L^4(e \cos E - 1)^3} \left( 4b + L^2 \cos^2 E (e^2 + \cos(2g)) + L^2 \right. \\ &\quad \left. + L^2 (\cos(2g) ((e^2 - 1) \sin^2 E) + e^2) + 4e\sqrt{1 - e^2} \sin(E) \sin(g) \cos(g) \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos E (e(2b + L^2) + L^2 (\sqrt{1 - e^2} \sin E \sin(2g) + e \cos(2g))) \right), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

onde  $e = \sqrt{1 - (G^2/L^2)}$ .

Obtemos então a função média  $\bar{\mathcal{H}}$  dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}(g, G) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(\ell, g, L, G) d\ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(E, g, L, G) (1 - e \cos E) dE \\ &= \frac{1}{G^2 L^3} \left( -4b|G| + LG^2 + \frac{L \cos(2g)(G^4 + G^2 L^2 - 2|G|^3 L)}{G^2 - L^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Temos o seguinte resultado, que garante a existência de soluções periódicas do sistema Hamiltoniano associado à função Hamiltoniana (4.3.1).

**Teorema 4.3.1.** *Considere o problema associado a função Hamiltoniana PAM dado por (4.3.1). Então valem as seguintes afirmações:*

(a) *Se  $b < 0$  e  $L_0 > \sqrt{-2b}$  então existem duas famílias de soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler (dadas em coordenadas de Delaunay)*

$$\phi_1(t) = \left( \frac{1}{L_0^3} t, 0, L_0, \frac{-2bL_0 + \sqrt{-2b}L_0^2}{2b + L_0^2} \right), \quad \varphi_2(t) = \left( \frac{1}{L_0^3} t, \pi, L_0, \frac{-2bL_0 + \sqrt{-2b}L_0^2}{2b + L_0^2} \right).$$

(b) *Se  $b > 0$  e  $L_0 > \sqrt{2b}$  então existem duas famílias de soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler (dadas em coordenadas de Delaunay)*

$$\varphi_3(t) = \left( \frac{1}{L_0^3} t, \frac{\pi}{2}, L_0, \frac{-2bL_0 - \sqrt{2b}L_0^2}{2b - L_0^2} \right), \quad \varphi_4(t) = \left( \frac{1}{L_0^3} t, \frac{3\pi}{2}, L_0, \frac{-2bL_0 - \sqrt{2b}L_0^2}{2b - L_0^2} \right).$$

*Demonstração.* Para provar este resultado, vamos usar o Teorema 4.1.2. Ou seja, necessitamos mostrar a existência de pontos críticos não degenerados para a função (4.3.6).

Observe que  $\bar{\mathcal{H}}$  não é diferenciável em  $G = 0$ . Neste caso precisamos separar nossa análise separadamente nos dois conjuntos:  $\Omega_1 = \{(L, G) \in \mathbb{R}^2; 0 < G < L\}$  e  $\Omega_2 = \{(L, G) \in \mathbb{R}^2; -L < G < 0\}$ . Vamos considerar somente o caso de soluções prógradas, ou seja, buscando soluções no domínio  $\Omega_1$ . O estudo de soluções retrogradadas segue de maneira similar. A função média em  $\Omega_1$  assume a forma

$$\bar{\mathcal{H}}(g, G) = \frac{GL \cos(2g)(G - L) - (G + L)(4b + GL)}{4GL^3(G + L)}. \quad (4.3.7)$$

Calculando as derivadas parciais de  $\bar{\mathcal{H}}$  em (4.3.7), obtemos as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial G} &= \frac{2b(G+L)^2 + G^2 L^2 \cos(2g)}{2G^2 L^3 (G+L)^2}, \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial g} &= \frac{\sin(g) \cos(g)(G-L)}{L^2 (G+L)}. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Desde que estamos supondo  $0 < G < L$ , é fácil verificar que  $\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial g} = 0$  implica que  $g_{0,n} = n\frac{\pi}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Substituindo na primeira expressão da equação (4.2.7) e igualando a zero, necessitamos resolver na variável  $G$  a seguinte equação

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial G} = \frac{2b(G + L)^2 + G^2 L^2 \cos(\pi n)}{2G^2 L^3 (G + L)^2} = 0. \quad (4.3.9)$$

Ou equivalente, necessitamos encontrar as soluções na variável  $G$ , da seguinte equação

$$(2b + L^2(-1)^n)G^2 + 4bLG + 2bL^2 = 0 \quad (4.3.10)$$

Se  $n = 0, 2$ , então as soluções de (4.3.10) são

$$G_0^{(1)} = \frac{-2bL + \sqrt{-2bL^2}}{2b + L^2}, \quad G_0^{(2)} = \frac{-2bL - \sqrt{-2bL^2}}{2b + L^2},$$

Enquanto que se  $n = 1, 3$ , então as soluções de (4.3.10) são

$$G_0^{(3)} = \frac{-2bL + \sqrt{2bL^2}}{2b - L^2}, \quad G_0^{(4)} = \frac{-2bL - \sqrt{2bL^2}}{2b - L^2}.$$

Observe que as soluções  $G_{0,n}$  devem satisfazer  $0 < G_{0,n} < L$ . Verificando esta condições verificamos que as únicas soluções válidas são

- $G_0^{(1)} = \frac{-2bL + \sqrt{-2bL^2}}{2b + L^2}$ , definida para  $b < 0$  e  $L > \sqrt{-2b}$ ;
- $G_0^{(4)} = \frac{-2bL - \sqrt{2bL^2}}{2b - L^2}$ , definida para  $b > 0$  e  $L > 2\sqrt{2b}$ .

Desta maneira obtemos quatro pontos críticos para a função  $\bar{\mathcal{H}}(g, G)$ , dados por

$$\begin{aligned} p_1 &= (g_0, G_0) = \left(0, \frac{-2bL + \sqrt{-2bL^2}}{2b + L^2}\right), & p_2 &= (g_0, G_0) = \left(\pi, \frac{-2bL + \sqrt{-2bL^2}}{2b + L^2}\right), \\ p_3 &= (g_0, G_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{-2bL - \sqrt{2bL^2}}{2b - L^2}\right), & p_4 &= (g_0, G_0) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{-2bL - \sqrt{2bL^2}}{2b - L^2}\right). \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Para concluir este primeiro caso, verificamos que os pontos críticos  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) em (4.3.11) são não degenerados. Obtemos que

$$\mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}\left(g = n\frac{\pi}{2}, G\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\pi n)}{L(G+L)^2} & -\frac{2b}{G^3L^3} - \frac{\cos(\pi n)}{L(G+L)^3} \\ \frac{(G-L)\cos(\pi n)}{L^2(G+L)} & \frac{\sin(\pi n)}{L(G+L)^2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.12)$$

Desta maneira, avaliando a matriz acima em  $g = g_0 = 0$  ou  $g = g_0 = \pi$ , obtemos

$$\mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2b}{G^3L^3} - \frac{1}{L(G+L)^3} \\ \frac{G-L}{L^2(G+L)} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.13)$$

de maneira que

$$\det \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(p_i) = \frac{(G-L)(2b(G+L)^3 + G^3L^2)}{G^3L^5(G+L)^4}, \quad i = 1, 2$$

Observe que  $G_0 = G_0^{(1)}$  é solução (4.3.10), se e somente se  $b = -\frac{G^2L^2}{2(G+L)^2} < 0$ . Desta forma

$$\det \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(p_i) = \frac{L-G}{GL^2(G+L)^4} > 0, \quad i = 1, 2$$

Ou seja, os pontos críticos  $p_1$  e  $p_2$  dados em (4.3.11) são não degenerados e determinam soluções periódicas próximas as soluções elíticas do problema de Kepler  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$ , respectivamente, como no enunciado do teorema.

Agora, analisamos a não degenerescência dos pontos críticos  $p_3$  e  $p_4$ . Avaliando a matriz acima em  $g = g_0 = \frac{\pi}{2}$  ou  $g = g_0 = \frac{3\pi}{2}$ , obtemos

$$\mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L(G+L)^3} - \frac{2b}{G^3L^3} \\ -\frac{G-L}{L^2(G+L)} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.14)$$

de maneira que

$$\det \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(p_i) = \frac{(G-L)(G^3L^2 - 2b(G+L)^3)}{G^3L^5(G+L)^4}, \quad i = 3, 4$$

Observe que  $G_0 = G_0^{(4)}$  é solução (4.3.10), se e somente se  $b = \frac{G^2 L^2}{2(G+L)^2} > 0$ . Desta forma

$$\det \mathbb{J}D^2 \bar{\mathcal{H}}(p_i) = \frac{L - G}{GL^2(G + L)^4} > 0, \quad i = 3, 4$$

Ou seja, os pontos críticos  $p_3$  e  $p_4$  dados em (4.3.11) são não degenerados e determinam soluções periódicas próximas as soluções elípticas do problema de Kepler  $\varphi_3(t)$  e  $\varphi_4(t)$ , respectivamente, como no enunciado do teorema.

■

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesta dissertação, destacamos a relevância do método da média de primeira ordem na investigação de órbitas periódicas de sistemas Hamiltonianos perturbados, particularmente no contexto de problemas que são perturbações do problema de Kepler. Nosso principal objetivo foi descrever o resultado mais moderno do método da média para o estudo de soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos perturbados, o Teorema de Reeb. A aplicação do Teorema de Reeb permitiu-nos demonstrar a existência de soluções periódicas para sistemas perturbados, revelando-se essencial tanto no âmbito teórico quanto em possíveis aplicações práticas.

Iniciamos com um estudo do desenvolvimento histórico e teórico do método da média, abordando suas origens nos trabalhos clássicos relacionados a equações diferenciais ordinárias. Avançamos com os resultados clássicos sobre a existência de soluções periódicas em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem e depois para soluções periódicas em sistemas Hamiltonianos, culminando na formulação atual do Teorema de Reeb.

Como aplicações do Teorema de Reeb em sistemas Hamiltonianos, consideramos problemas que são perturbações de um problema integrável: o problema de Kepler. A aplicação do método da média para sistemas Hamiltonianos depende fortemente da escolha de boas coordenadas, tanto para descrever as soluções do problema não perturbado quanto para provar a não degenerescência dos pontos de equilíbrio do sistema médio associado ao problema. Desta maneira, para estudar a existência de soluções periódicas próximas a soluções elípticas do problema de Kepler em problemas aplicados, usamos coordenadas de Delaunay e focamos em dois problemas específicos: o problema do átomo de hidrogênio

sob a influência de campos externos e o problema anisotrópico de dois corpos com potencial do tipo Manev. Em ambos os cenários, comprovamos a existência de famílias de órbitas periódicas sob pequenas perturbações, oferecendo novos entendimentos sobre a dinâmica na proximidade das soluções elípticas do problema de Kepler.

Esta dissertação reforça a importância da utilização das coordenadas de Delaunay para simplificar sistemas complexos e aplicar, de forma eficaz, o método da média.

Esperamos que os resultados obtidos contribuam significativamente para um entendimento mais aprofundado dos sistemas dinâmicos, tanto em aspectos teóricos quanto práticos. As diferenças observadas em relação a estudos anteriores, como os apresentados em [2] e [11], expandem as possibilidades de investigação futura, potencializando o escopo da teoria aqui exposta.

# Bibliografia

- [1] Alberti, A., Vidal, C., First Kind symmetric periodic solutions and their stability for the Kepler problem as anisotropic Kepler problem plus generalized anisotropic perturbations, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **58**, 103238 (2021).
- [2] Alberti, A., Vidal, C., Second-kind symmetric periodic orbits for planar perturbed Kepler problems and applications, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. DOI:10.1017/prm.2023.46.
- [3] Boccaletti, D., Pucacco, G., *Theory of Orbits*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (2004).
- [4] Buckingham, R.A., The classical equation of state of gaseous helium, neon, and argon, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences* **168**, 264-283 (1938).
- [5] Diacu, F., Mioc, V., Stoica, C., Phase-space structure and regularization of Manev type problems, *Nonlinear Analysis* **41**, 1029-1055 (2000).
- [6] Diacu, F., Near-collision dynamics for particle systems with quasihomogeneous potentials, *J. Diff. Eqn.* **128** (1996), 58-77.
- [7] Frenkel, D., Smit, B., *Understanding Molecular Simulation*, 2nd edn. (Academic Press, San Diego, California, USA, 2002).
- [8] Ganesan, K., Gębarowski, R., Chaos in the hydrogen atom interacting with external fields, *Pramana* **48**(2) (1997), 379–410.
- [9] Guckenheimer, J. e Holmes, P., *Nonlinear Oscillations Dynamical Sustersms, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences Vol. 42, Springe- Verlag (1983).

- [10] Guirao J.L.G., Llibre J., Vera J.A. Periodic orbits of Hamiltonian systems: applications to perturbed Kepler problems *Chaos, Solitons and Fractals*, **57** (2013), pp. 105–111.
- [11] Guirao J.J.G, Roca, J.L, Lopez, J.A.V.: On the Periodic Structure of the Anisotropic Manev Problem. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* (2019) **18**: 987–999
- [12] Gusev, A.A., Samoilov, V.N., Rostovtsev, V.A., Vinitzky, S.I., Algebraic perturbation theory for a hydrogen atom in weak electric fields, *Program. Comput. Software* **27**(1) (2001), 18–21.
- [13] Gutzwiller, M., Bernoulli sequences and trajectories in the anisotropic Kepler problem, *J. Math. Phys.* **18**, 806-823 (1977).
- [14] Gutzwiller, M., The anisotropic Kepler problem in two dimensions, *J. Math. Phys.* **14**, 139-152.
- [15] Jensen, F., *Introduction to Computational Chemistry*, 2nd edn. (Wiley, Hoboken, 2007).
- [16] Llibre, J., Moeckel, R., Simó, C., *Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems*, Springer (2015).
- [17] Meyer, K.R., Hall, G.R., Offin, D., *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem*, 3rd ed., *Applied Mathematical Sciences*, vol. 90, Springer, New York (2017).
- [18] McKinley, D., Pasca, D., Stoica, C., Notes on relative equilibria of isosceles molecules in classical approximation, *J. Math. Phys.* **60**, 012901-012925 (2019).
- [19] Pasca, D., Santoprete, M., Stoica, C., Escape dynamics in a collinear atomic-like three mass point systems, *Phys. D* **239**(16), 1516-1526 (2010).
- [20] Pasca, D., Valls, C., Qualitative analysis of the anisotropic two-body problem with generalized Lennard-Jones potential, *J. Math. Chem.* **50**(10), 2671-2688 (2012).
- [21] Price, S.L., Anisotropic atom-atom potentials, *Philosoph. Magaz. B* **73**(1), 95-106 (1996).
- [22] Rabelo, P., *O Método da Média e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFPE (2002).

- [23] Reeb, G., Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Acad. Roy. Sci. Lett. et Beaux-Arts de Belgique. Cl. des Sci. Mém. in 8°, Ser. 2, 27, No. 9 (1952).
- [24] Sanders, J.A., Verhulst, F., Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Springer-Verlag (1985).
- [25] Szebehely, V., Theory of Orbits, New York, Academic Press (1967).
- [26] Tenorio, M., Continuação de órbitas periódicas em perturbações simétricas do problema de Kepler no plano, Dissertação de Mestrado, UFS (2023).
- [27] Verhulst, F., Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag (1985).
- [28] Yanguas, P., Palacián, J.F., Meyer, K.R. and Dumas, H.S., Periodic solutions in Hamiltonian systems, averaging, and the Lunar problem, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7, 311–340 (2008).