Fabiano Lisboa Santos

Um breve estudo da Sequência de Fibonacci usando recorrências e geometria: uma aplicação no ensino básico.

Itabaiana

20 Agosto de 2021

Fabiano Lisboa Santos

Um breve estudo da Sequência de Fibonacci usando recorrências e geometria: uma aplicação no ensino básico.

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Sergipe

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque

Itabaiana

20 Agosto de 2021

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237b Santos, Fabiano Lisboa
Um breve estudo da Sequência de Fibonacci usando recorrências e geometria: uma aplicação no ensino básico / Fabiano Lisboa Santos; orientação: Alejandro Caicedo Roque. – Itabaiana, 2021.
78 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2021.

1. Matemática. 2. Fibonacci, Números de 3. Sequências (Matemática). 4. Segmento áureo. I. Roque, Alejandro Caicedo (org.). II. Título.

CDU 517.52

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Um breve estudo da Sequência de Fibonacci usando recorrências e geometria: uma aplicação no ensino básico

por

FABIANO LISBOA SANTOS

Aprovada pela banca examinadora:

Alejandro Caicedo Roque

Prof. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE - UFS
Orientador

Prof. ADRIANO THIAGO LOPES BERNARDINO - UFRN
Primeiro Examinador

Mateus Alegri

Prof. Dr. Dr. MATEUS ALEGRI - UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 20 de Agosto de 2021

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887 CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: profmat@academico.ufs.br

Dedico este trabalho a minha avó Alice Faustina dos Santos in memoriam por ter sido uma pessoa de importância insubstituível na minha vida com seus ensinamento bem como dedico a minha filha Maria Alice Souza Lisboa para que ela possa utilizar quando necessário.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu pai Janeto dos Santos e a minha mãe Margarida Sandes de Lisboa, por todos os esforços a mim prestados desde o meu nascimento, bem como todos os familiares que participaram direta ou indiretamente. Agradeço de maneira imensurável minha esposa Jessyka Araujo Souza, por toda a compreensão nos momentos de estresse depois de trabalho, pesquisas e problemas diversos pois sempre me motivou a seguir firme na realização desta etapa/sonho de nossas vidas e a minha Filha Maria Alice Souza Lisboa, pelos momentos de descontração e por ter aprendido algumas operações matemáticas no alto de seus 3 anos. Gostaria de agradecer aos professores do departamento de matemática da UFS campus de Itabaiana que lecionaram as disciplina deste curso, em especial ao professor doutor Alejandro Caicedo Roque por ter aceitado me orientar diante das dificuldades de uma pandemia (falta de internet, sem computador, doenças, etc) mas sempre esteve disposto a me ajudar contribuindo muito com as pesquisas e escritas desse projeto.

Meus agradecimentos vão também para Universidade Federal de Sergipe campus Itabaiana, pelo espaço propício aos estudos, tornando assim possível meu crescimento e evolução.

Tenho um lista grande de amigos que sempre acreditaram em mim aos quais eu agradeço.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará a seu tamanho original"

Albert Ainstein

Resumo

Nesta dissertação estudamos, recorrências lineares de primeira ordem bem como recorrências lineares de segunda ordem e algumas de suas propriedades. Introduzimos a Sequencia de Fibonacci seus termos, os quais chamaremos de os Números de Fibonacci, também estudamos algumas propriedades importantes, a saber uma delas cujo nome é Fórmula de Binet. Verificamos que o limite da razão entre o $(n+1)$-ésimo e o n-ésimo Número de Fibonacci é igual ao Número de Ouro. Depois estudamos uma importante relação da Sequência de Fibonacci na geometria no que diz respeito ao Número de Ouro, o qual é a solução para um problema proposto por Euclides nos Elementos. Tratamos de mediar o ensino da Sequência de Fibonacci no ensino básico, por meio de uma atividade guiada.

Palavras-chaves: Sequências, Recorrências, Números de Fibonacci, Número de Ouro.

Abstract

In this dissertation we study, recurrences first order linear as well as recurrences second order linear lines and some of their properties. We introduce the Sequence of Fibonacci its terms, which we will call the Fibonacci Numbers, we also study some important properties, namely one of them whose name is Binet Formula. We verify that the limit of the ratio between the $(n+1)$-th and the n-th Fibonacci Number is equal to the Gold Number. Then we study an important relationship of the Sequence of Fibonacci in geometry with respect to the Golden Number, the what is the solution to a problem posed by Euclid in Elements. We try to mediate the teaching of the Sequence of Fibonacci in elementary school, through an activity guided tour.

Keywords: Sequences, Recurrences, Fibonacci Numbers, Golden Ratio.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
BNCC	Base Nacional Curricular Comum

Sumário

1 Introdução

No século XI, um importante matemático apareceu na Europa quando ainda estava na escuridão da Idade Média, o italiano chamado Fibonacci (1170-1250). Seu nome original é Leonardo Pisano ou também conhecido como Leonardo de Pisa. Diz-se que Leonardo no seu tempo teve a oportunidade de aprender muito com as obras-primas de matemáticos como: Diofantino, Khwarizmi da Grécia e dos árabes. Fibonacci significa "filho de Bonacci", seu pai. Este nome Fibonacci foi dado por um historiador italiano da matemática em 1828. No seu livro *Liber Abaci* o que teve mais transcendência ao longo do tempo foi a "questão dos coelhos" a qual enuncia o seguinte: assumindo que cada casal de coelhos adultos pode dar à luz a um par de coelhos (um macho e uma fêmea) todo mês e os coelhos jovens podem procriar depois de dois meses. Então, começando com um par de coelhos jovens, quantos coelhos existem após um ano? Acredita-se que nunca passou pela mente de Fibonacci que depois de mais de 800 anos a questão dos coelhos atrairia a matemáticos de uma geração a outra em todo o mundo. Cabe ressaltar que essa sequência aparece de muitas maneiras inesperadas na natureza. Na biologia das plantas, enriqueceu o estudo da Filotaxia[1], abrindo a questionamentos como, por que as plantas crescem assim? Por outro lado, existem muitas propriedades interessantes relacionadas a Sequência de Fibonacci, incluindo conclusões sobre divisão e congruência. O matemático Abraham de Moivre (1667-1754), em 1718 descobriu a fórmula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\},$$

a qual foi provada anos mais tarde pelo matemático suíço Nícolas Bernoulli (1687-1759). Daí, segue

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

O limite é chamado razão áurea e é igual a 1,618... Kepler também apontou sobre esta mesma conclusão. As maneiras em que aparecem os números de Fibonacci são tão numerosas quanto os coelhos de Leonardo (CAI, 2016, p. 66). Por exemplo, os números de Lucas[2], (definidos pela mesma regra, mas com um início diferente) estão relacionados aos Números de Fibonacci de várias maneiras. Lucas, mostrou que pode-se ler os números de Fibonacci desde o Triangulo de Pascal, (CONWAY e GUY, 1998, p. 113). Por outro

---

1 A Filotaxia representa como as folhas estão inseridas e distribuídas ao longo de um caule ou ramo, ou seja, o padrão de distribuição das folhas, como o número de folhas presentes em um nó e o ângulo estabelecido entre as folhas de nós adjacentes ao longo do ramo. Disponível em: <https://www.esalq.usp.br/biblioteca/pdf/morfologia_folha.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2021.

2 François Édouard Anatole Lucas foi um matemático francês que contribuiu bastante em teoria dos números [].

lado, Raine[3] (1948 apud WELLS,1986 ,p. 64), engenhosamente conectou os números de Fihonacci aos triângulos pitagóricos . Os Números de Fibonacci têm demostrado outros usos em matemática mais avançada, por exemplo (MATAIJASZEVICH, 1970) usou eles em sua resolução do 10º problema proposto por Hilbert.

Nesta dissertação trataremos a Sequência de Fibonacci desde sua contextualização histórica a partir do problema dos coelhos, seguindo com o desenvolvimento de algumas propriedades e tentamos atender a necessidade do ensino de matemática, propondo um Guia do Professor que tem por objetivo central o ensino de Sequência de Fibonacci. Vale chamar atenção que, este guia pode ser aplicado tanto no ensino presencial na sala de aula por meio do Aplicativo GeoGebra ou com régua e compasso, como no ensino remoto, pois no guia trazemos todas as construções geométricas e demostrações necessárias com o passo a passo para abordar nas aulas online. Nesta abordagem veremos a relação entre Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro no ensino aprendizagem de maneira significativa. Esta abordagem se justifica no fato de que os guias/livros de matemática do ensino básico atuais não tratam do tema desta dissertação, onde procuramos escrever todas as ideias de maneira mais clara possível. O trabalho esta dividido em oito partes da seguinte maneira: o presente capítulo tem por objetivo, motivar, introduzir e esclarecer o desenvolvimento de forma geral do trabalho. No Capítulo 2 estudamos sequências, recorrências de primeira e segunda ordem, no final tratamos suas soluções. No Capítulo 3 introduzimos os números de Fibonacci, a Sequência de Fibonacci, algumas de suas propriedades a saber uma delas cujo nome é Fórmula de Binet. Estabelecemos uma relação entre os números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal no Capítulo 3. Chegando ao Capítulo 4, definimos o Número de Ouro e destacamos o teorema que estabelece a relação entre termos da Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, concluindo assim que a taxa de crescimento da Sequência de Fibonacci para n suficientemente grande é igual ao Número de Ouro. No **GUIA DO PROFESSOR** apresentado no Capítulo 5, trataremos de formas de mediar o ensino de Sequência de Fibonacci para alunos do ensino básico, estimulando e facilitando o aprendizado do mesmo. O Apêndice A serve de suporte ao Guia do Professor, onde se encontram os passos para a construção de uma reta perpendicular a um segmento AB passando por um de seus extremos.

[3] RAIANE, C. W. **Pythagorean Triangles from the Fibonacci Series 1, 1, 2, 3, 5, 8,** . Scripta Mathematica, Nova York, V.14, p. 164, 1948.

2 Sequências e Recorrências

Neste capítulo introduzimos a definição de sequência e em seguida trataremos de sequências definidas por recorrências, estudando algumas de suas propriedades. As definições bem como as propriedades podem ser aprofundadas no livro[1] de Lima (1999, p. 23) . Não apresentaremos as demostrações uma vez que o objetivo central deste capítulo é apresentar as sequências definidas por recorrências.

2.1 Sequências

Definição 2.1. *(LIMA, 1999) Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número natural* n *um número real* x_n*. Cada* x_n *é chamado de n-ésimo termo da sequência.*

É comum indicar-se uma sequência da seguinte forma $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bem como $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Geralmente estamos interessados em determinar uma fórmula que nos dê o valor de cada termo da sequência, por uma mera substituição de sua posição ocupada, ou seja, $x_n = x(n)$, para cada n natural.

Exemplo 2.1. *Observemos o seguinte conjunto com seus elementos em ordem decrescente, onde o primeiro elemento é igual a* $\frac{1}{2}$ *e os demais são obtidos dividindo o seu antecessor imediato por dois*

$$D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}.$$

Neste caso podemos observar que:

– *Quando* $n = 1$ *temos* $x_1 = x(1) = \frac{1}{2^1}$;

– *Quando* $n = 2$ *temos* $x_2 = x(2) = \frac{1}{2^2}$;

– *Quando* $n = 3$ *temos* $x_3 = x(3) = \frac{1}{2^3}$;

– *Quando* $n = 4$ *temos* $x_4 = x(4) = \frac{1}{2^4}$;

– *Assim, para* n *tem-se* $x_n = x(n) = \frac{1}{2^n}$;

De acordo com a definição de sequência de números reais, devemos ter $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é uma função do conjunto dos números naturais sobre o conjunto dos números reais, neste caso, podemos definir uma função* $x : \mathbb{N} \to D$ *tal que* $x(n) = \frac{1}{2^n}$.

[1] Curso de Análise volume 1.

Para verificarmos que $x : \mathbb{N} \to D$ define de fato uma função e assim uma sequência, faremos uso de um dos Princípios de Indução Matemática, os quais poderão ser consultado no apêndice B. Devemos portanto, verificar que $x(n) = \dfrac{1}{2^n}$ vale para todo n natural.

Vejamos para $n = 1$ o resultado é verdadeiro de acordo com as observações acima.

Suponhamos que a sentença seja verdadeira para um certo n natural, ou seja, que vale $x_n = x(n) = \dfrac{1}{2^n}$. Devemos então, verificar que a sentença é verdadeira para $n + 1$.

De fato, pois $x_{n+1} = \dfrac{x(n)}{2}$ mas por hipótese de indução temos que $x_n = x(n) = \dfrac{1}{2^n}$, daí $x_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Logo $x : \mathbb{N} \to D$ é tal que $x(n) = \dfrac{1}{2^n}$ é uma função.

E portanto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots\right)$ é uma sequência de números reais.

Quando estudamos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, saber se ela é limitada, ou seja, a existência de números reis a e b tais que $a \leq x_n \leq b$.

Um outro ponto que analisamos é saber se a sequência x_n tem um limite L, isto é, se dado um número real $\epsilon > 0$, for possível obter um numero natural n_0 tal que $|x_n - L| < \epsilon$, para todo $n > n_0$. O qual denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ e diremos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L.

Observação 2.1. *O limite da sequencia é único, ou seja, se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = h$, então $f = h$.*

2.2 Recorrências

Definição 2.2. *(LIMA et al., 2004) Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida recursivamente (ou definida por recorrência) quando se pode calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).*

Quando é possível determinar qualquer termo em função dos seus antecessores imediatos, chamaremos está relação entre os termos de relação de recorrência.

Vejamos três exemplos de sequências definidas recursivamente:

Exemplo 2.2. *(LIMA et al., 2004) A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por somar 2 ao termo antecessor sendo $x_1 = 2$,*

$$x_{n+1} = x_n + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$ dos números pares.

Exemplo 2.3. *(LIMA et al., 2004) A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida pela recorrência $x_{n+1} = x_n + r$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $x_1 = a$ e r números reais, é chamada de Progressão Aritmética (P.A) de razão r e primeiro termo a.*

Exemplo 2.4. *(LIMA et al., 2004) A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida pela recorrência $x_{n+1} = q{\cdot}x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $x_1 = a$ e q números reais, é chamada de Progressão Geométrica (P.G) de razão q e primeiro termo a.*

Quando definimos sequências como as anteriores, temos que definir o (os) primeiro(os) termo(os) de cada sequência para que ela fique bem definida. De acordo com esta observação, a relação de recorrência dada por $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ não define uma única sequência uma vez que, se $F_1 = F_2 = 0$ temos a sequência $(0, 0, 0, 0, \cdots)$, por outro lado, se $F_1 = -1$ e $F_2 = 2$ temos a sequência $(-1, 2, 1, 3, 4, 7, \cdots)$, assim existem diversas sequências definidas por esta recorrência.

2.3 Recorrência linear de ordem k

Faremos a seguir a definição de recorrência linear de ordem k.

Definição 2.3. *(GERSTING, 2001) Uma relação de recorrência para a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **linear** se os valores anteriores a x_n que aparecem na relação de recorrência ocorrem apenas à primeira potência. Em geral, uma relação de recorrência linear se exprime*

$$x_n = f_1(n)x_{n-1} + f_2(n)x_{n-2} + \cdots + f_k(n)x_{n-k} + g(n)$$

*onde os $f_i(n)'s$ e $g(n)$ são funções definida em $\mathbb{N}$, e o número k é dito **ordem** da relação de recorrência.*

Observação 2.2. *De acordo com a Definição 2.3, uma relação de recorrência linear é de primeira ordem, quando o $n-$ésimo termo depende unicamente do termo de ordem $n-1$. Assim uma relação de recorrência de primeira ordem tem a seguinte forma:*

$$x_n = f_1(n)x_{n-1} + g(n).$$

Note que, para uma recorrência definir uma única sequência é necessário saber o valor de x_1.

Exemplo 2.5. *As seguintes recorrências*

$$x_{n+1} = 3x_n + n, \quad x_{n+1} = n \cdot x_n \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n^2,$$

são de primeira ordem, uma vez que x_{n+1} apenas depende de antecessor x_n, porém

$$x_{n+1} = 3x_n + n \quad \text{e} \quad x_{n+1} = n \cdot x_n$$

são lineares, visto que a potência dos antecessores de x_{n+1} são iguais a um, já em se tratando de $x_{n+1} = x_n^2$, não é linear pois a potência do antecessor de x_{n+1} é igual a dois.

Um exemplo de uma recorrência que não é de primeira ordem é

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{com} \quad x_1 = x_2 = 3,$$

pois segundo a Observação 2.2, x_{n+2} está associado com seus dois antecessores x_{n+1} e x_n.

Definição 2.4. *A recorrência da Definição 2.3 é dita recorrência linear com coeficientes constantes se os $f_i(n)'s$ são todos contantes. Além disso é chamada de **homogênea** quando $g(n) = 0$.*

Observe que, a recorrência $x_n = f_1(n)x_{n-1} + g(n)$ mencionada na Observação 2.2 pode ser escrita da forma $x_n = p \cdot x_{n-1} + g(n)$, onde $p = f_1(n)$ é uma constante real.

Exemplo 2.6. *A recorrência $x_n = 3x_{n-1} + n$ é linear de primeira ordem com coeficiente constante e neste caso, de acordo com a Observação 2.2 temos que $f_1(n) = 3$, no entanto não é homogênea já que $g(n) = n$. Porém se considerarmos $x_n = 3x_{n-1}$ teremos assim uma recorrência linear homogênea de primeira ordem com coeficientes contantes.*

2.4 Soluções de recorrências

Nesta seção nos dedicaremos a determinar a solução da recorrência do tipo

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n),$$

tendo como base uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, bem como uma solução para a recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

considerando sua equação característica $r^2 + pr + q = 0$.

Definição 2.5. *(GERSTING, 2001) Quando existir uma expressão que forneça cada termo x_n da sequência em função apenas de n na equação de recorrência, diremos que tal expressão é chamada solução da recorrência.*

Exemplo 2.7. *Consideremos a seguinte recorrência*

$$x_1 = 1 \quad e \quad x_n = 2 \cdot x_{n-1} \quad com \quad n > 1.$$

Note que, a expressão $x_n = 2^n$ é uma solução para essa recorrência pois, quando substituímos $x_{n-1} = 2^{n-1}$ na recorrência encontramos

$$x_n = 2 \cdot x_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Vejamos nos seguintes exemplos como encontrar uma solução para as recorrências propostas de maneira mais elementar possível (no sentido de que iremos fazer uso de propriedades elementares de somatórios e ou produtórios).

Exemplo 2.8. *Dada a recorrência* $f_{n+1} = n \cdot f_n$ *com* $f_1 = 1$*, temos que:*

$$\begin{aligned} f_2 &= 1f_1, \\ f_3 &= 2f_2, \\ f_4 &= 3f_3, \\ &\vdots \\ f_n &= (n-1)f_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, se multiplicarmos membro a membro as equações anteriores obteremos

$$f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot \dots \cdot f_{n-1} \cdot f_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_{n-1}$$

Simplificando esta equação obtemos $f_n = (n-1)! \cdot f_1$*. Como* $f_1 = 1$ *temos que a solução será dada por* $f_n = (n-1)!$*.*

Exemplo 2.9. *Se a recorrência for dada por* $f_{n+1} = f_n + 2^n$ *com* $f_1 = 1$*.*

Note que,

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + 2^1, \\ f_3 &= f_2 + 2^2, \\ f_4 &= f_3 + 2^3, \\ &\vdots \\ f_n &= f_{n-1} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, somando membro a membro cada uma dessas equações obtemos

$$f_2 + f_3 + f_4 . \dots + f_{n-1} + f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-1} + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}).$$

Simplificando, resulta em

$$f_n = f_1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}),$$

a qual é uma Progressão Geométrica com primeiro termo igual a 1 *e razão* 2*. Portanto a solução é dada por*

$$f_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Exemplo 2.10. *Dada a recorrência* $f_{n+1} = 5f_n$ *podemos observar a seguintes equações:*

$$\begin{aligned} f_2 &= 5f_1 \\ f_3 &= 5f_2 \\ f_4 &= 5f_3 \\ &\vdots \\ f_{n-1} &= 5f_{n-2} \\ f_n &= 5f_{n-1}. \end{aligned}$$

Neste caso, se multiplicamos membro a membro cada uma das equações acima, encontramos

$$f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot \dots \cdot f_{n-1} \cdot f_n = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_{n-1}.$$

Agora simplificando e notando que temos $(n-1)$ *parcelas iguais a* 5 *temos* $f_n = f_1 \cdot 5^{n-1}$.

Como foi observado anteriormente temos uma quantidade infinita de soluções do tipo $f_n = F \cdot 5^{n-1}$, onde $F = f_1$ é uma constante qualquer. Para esse exemplo se $f_1 = 1$ teremos $f_n = 5^{n-1}$.

A dificuldade em resolver recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem, do tipo $f_{n+1} = f_n + h(n)$, consiste em determinar o somatório

$$\sum_{k=1}^{n-1} h(k).$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + h(1), \\ f_3 &= f_2 + h(2), \\ f_4 &= f_3 + h(3), \\ &\vdots \\ f_n &= f_{n-1} + h(n-1). \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações acima obtemos:

$$f_2 + f_3 + f_4 + \cdots f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_{n-1} + (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots h_{n-1})$$

o que implica em

$$f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k).$$

Também podemos perceber no Exemplo 2.10 que a dificuldade que encontramos em resolver uma recorrência $x_{n+1} = f_1(n)x_n$ é determinar o valor de $\prod_{k=1}^{n-1} f_1(k)$, uma vez em mãos esse valor temos que a solução é dada por:

$$x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} f_1(k)$$

Teorema 2.1. *(MORGADO; CARVALHO, 2015)(Solução de Recorrências Lineares de Primeira Ordem) Se* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma solução não-nula da recorrência* $x_{n+1} = g(n)x_n$, *então a substituição* $x_n = f_n y_n$ *transforma a recorrência* $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ *em* $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)f_n]^{-1}$.

Demonstração. Substituindo $x_n = f_n y_n$ em $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ encontramos

$$f_{n+1}y_{n+1} = g(n)f_n y_n + h(n).$$

Como f_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$ temos que $f_{n+1} = g(n)f_n$, daí a equação resulta em

$$g(n)f_n y_{n+1} = g(n)f_n y_n + h(n).$$

Logo se tem $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)f_n]^{-1}$. □

Exemplo 2.11. *Para encontrarmos uma solução da recorrência*

$$x_{n+1} = 5x_n + 1 \qquad \textit{com} \qquad x_1 = 1,$$

vamos aplicar o Teorema 2.1. Primeiramente, $f_n = 5^{n-1}$ *é uma solução não nula de* $x_{n+1} = 5x_n$ *como foi visto no Exemplo 2.10. Agora fazendo a substituição* $x_n = 5^{n-1}y_n$ *sugerida no Teorema 2.1 em* $x_{n+1} = 5x_n + 1$ *obtemos*

$$\begin{aligned} 5^{[(n+1)-1]}y_{n+1} &= 5 \cdot 5^{n-1}y_n + 1 \\ 5^n y_{n+1} &= 5^n y_n + 1 \\ y_{n+1} &= y_n + 5^{-n} \end{aligned}$$

$y_1 = 5^{-0} = 1$ *uma vez que* $x_1 = 5^{1-1}y_1$ *e* $x_1 = 1$*, fazendo a expansão dos termos em* $y_{n+1} = y_n + 5^{-n}$ *teremos as seguintes equações:*

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 5^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 5^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 5^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 5^{-(n-1)} \end{aligned}$$

Portanto, somando membro a membro cada uma das equações acima, encontramos

$$y_2 + y_3 + y_4 \cdots + y_{n-1} + y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \left(5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3} + \cdots + 5^{-(n-1)}\right).$$

Simplificando obtemos

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \left(5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3} + \cdots + 5^{-(n-1)}\right) \\ &= \left(1 + 5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3} + \cdots + 5^{-(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$y_n = 1 + \left(5^{-1}\right) \cdot \frac{\left(5^{-1}\right)^{n-1} - 1}{5^{-1} - 1}$$

$$= 1 + \left(5^{-1} \cdot \frac{-5}{4}\right)\left(\left(5^{-1}\right)^{n-1} - 1\right)$$
$$= 1 + \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot \left(\left(5^{-1}\right)^{n-1} - 1\right).$$

E assim,

$$x_n = 5^{n-1}\left[1 + \frac{-1}{4}\left(\left(5^{-1}\right)^{n-1} - 1\right)\right]$$
$$= 5^{n-1} - \frac{1}{4} \cdot 5^{(n-1)} \cdot 5^{-(n-1)} + \frac{1}{4} \cdot 5^{(n-1)}.$$

Logo a solução que procuramos é

$$x_n = \frac{1}{4}(5^n - 1).$$

Pensemos agora uma situação bastante conhecida chamada *A Torre de Hanói.*

Exemplo 2.12. *(MORGADO; CARVALHO, 2015) O problema consiste em transferir n discos todos com raios diferentes de uma das três hastes para outra, de modo que, a cada movimento seja transportado um único disco e este não deve ser colocado em uma das hastes onde o raio do disco que irá ficar abaixo dele, seja maior do que seu próprio raio.*

Figura 1 – Torre de Hanói

Fonte: Autor, 2021

A figura acima mostra um esquema do jogo com as três hastes e com 5 discos de raios diferentes.

Uma pergunta aqui é: há um número mínimo de movimentos que se deve fazer para executar tal transferência? A resposta a essa pergunta é sim, vejamos como:

- Se o número de disco for igual a 1, então basta um movimento para resolver tal problema.
- Suponhamos que, se o número de disco for igual a n, então podemos resolver o problemas usando apenas x_n passos.

- Se acrescentarmos um disco ao caso anterior. Podemos verificar o número de passos executados para resolver o problema da seguinte forma: mover os n discos para uma haste vazio e para isso, mover os n discos x_n vezes. Daí, movemos o último disco para a única haste que está vazia. O que pode ser feito com 1 só passo. Agora para finalizar, movemos novamente os n discos para cima do que movemos no passo anterior, e novamente para isso devemos executar x_n passos, sendo assim, o número mínimo de passos que se deve executar para mover os $n+1$ é dado por:

  $$x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1.$$

  Portanto o Problema da Torre de Hanói é modelado por uma recorrência linear de primeira ordem.

Agora, temos uma solução que relaciona o número de passos para resolver a situação e o número de discos envolvidos.

Para encontrarmos uma solução da recorrência

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 \quad \text{com} \quad x_1 = 1,$$

aplicamos o Teorema 2.1. Primeiramente temos que $f_n = 2^{n-1}$ é uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$ de maneira análoga ao que foi visto no Exemplo 2.10. Agora fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$, sugerida no Teorema 2.1, em $x_{n+1} = 2x_n + 1$ obtemos

$$\begin{aligned} 2^{n+1-1}y_{n+1} &= 2 \cdot 2^{n-1}y_n + 1 \\ 2^n y_{n+1} &= 2^n y_n + 1 \\ y_{n+1} &= y_n + 2^{-n} \end{aligned}$$

onde $y_1 = 1$, uma vez que, $x_1 = 2^{1-1}y_1$ e $x_1 = 1$. Daí $y_n = y_1 - 2^{(1-n)} + 1 = 2 - 2^{(1-n)}$ e portanto $x_n = 2^n - 1$.

Definição 2.6. *Uma relação de recorrência linear é de segunda ordem, quando o termo x_n depende de seus dois antecessores imediatos na sequência e tem a seguinte forma:*

$$x_n = f_1(n)x_{n-1} + f_2(n)x_{n-2} + g(n). \tag{2.1}$$

Para que este tipo de recorrência defina uma única sequência é necessário saber o valor de seus dois primeiros termos. Também consideramos $f_2(n) \neq 0$ na Equação 2.1, pois do contrário teríamos uma recorrência linear de primeira ordem.

Exemplo 2.13. *A recorrência dada por*

$$x_n = 5x_{n-1} + 2x_{n-2} + 10.$$

é uma recorrência linear de segunda ordem, pois associa ao termo x_n seus dois antecessores imediatos na sequência.

Além disso a relação que associa x_n a x_{n-1} e x_{n-2} satisfaz a Equação 2.1 onde $f_1(n) = 5$ e $f_2(n) = 2$, porém ela não é homogênea, uma vez que $g(n) \neq 0$.

No entanto, se considerarmos

$$x_n = 5x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

teremos uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

Exemplo 2.14. *A recorrência $x_{n+2} = x_n^3 + x_{n+1}$ é de segunda ordem pois está associa cada termo, a partir do terceiro, com seus dois antecessores imediatos na sequência, também é homogênea já que não tem termo independente. Porém não é linear, uma vez que a potência de x_n na relação é três contrariando assim a definição 2.3.*

No que segue, vamos nos ater a resolver recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes da seguinte forma:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0. \tag{2.2}$$

Definição 2.7. *(MORGADO; CARVALHO, 2015) A equação do segundo grau $r^2+pr+q = 0$ é chamada equação característica da recorrência (2.2).*

Notemos que, $r = 0$ não é raiz dessa equação característica $r^2 + pr + q = 0$, uma vez que estamos supondo $q \neq 0$.

Teorema 2.2. *(MORGADO; CARVALHO, 2015) Se as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $f_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração. Substituindo $f_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$ obtemos

$$C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2} + p\left(C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}\right) + q\left(C_1r_1^n + C_2r_2^n\right).$$

Colocando em evidência os termos $C_1r_1^n$ e $C_2r_2^n$ encontramos

$$C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q),$$

ou seja, $C_1r_1^n \cdot 0 + C_2r_2^n \cdot 0 = 0$ uma vez que r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$ e, portanto, $f_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é uma solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. □

Em geral, se tivermos f_n e h_n soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, então $z_n = C_1f_n + C_2h_n$ também seria solução.

Teorema 2.3. *(MORGADO; CARVALHO, 2015) Se as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$ então a solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ é da forma $f_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração. Seja f_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos as constantes C_1 e C_2 que sejam solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1\ r_1 + C_2 r_2 & = f_1, \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 & = f_2. \end{cases}$$

Isto é,

$$C_1 = \frac{f_1 r_2^2 - f_2 r_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{f_2 r_2 - f_1 r_2^2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)},$$

o que é possível, uma vez que, $r_1 \neq r_2$ e ambos também são diferentes de zero.

Provemos que, $f_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural. De fato, seja $z_n = f_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Devemos mostrar que $z_n = 0$ para todo n. Quando substituímos z_n em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$ obtemos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (f_{n+2} + pf_{n+1} + qf_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque f_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, e os outros dois parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, daí temos que $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Note que, $z_1 = z_2 = 0$, uma vez que

$$C_1 r_1 + C_2 r_2 = f_1 \quad \text{e} \quad C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = f_2,$$

ou seja, tem-se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$. Portanto, $z_n = 0$ para todo n natural como queríamos. □

Exemplo 2.15. *Determinemos a solução da recorrência $f_{n+2} + 3f_{n+1} - 4f_n = 0$. Neste caso, a equação característica desta recorrência é dada por $r^2 + 3r - 4 = 0$ e tem como raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = 4$. Portanto as soluções da recorrência são sequências do tipo $f_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n = C_1 + C_2(-4)^n$ onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.*

No exemplo anterior, se $f_1 = 0$ e $f_2 = 1$, então $C_1 = \frac{1}{5}$ e $C_2 = -\frac{1}{5}$, sendo assim a sequência que resolve a recorrência $f_{n+2} + 3f_{n+1} - 4f_n = 0$ seria $f_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(-4)^n$.

3 A Sequência de Fibonacci

Neste capítulo apresentaremos a Sequência de Fibonacci por meio de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem. Em seguida vamos resolver tal recorrência determinando uma fórmula para calcular o valor do termo da Sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que dependa apenas de n. No final estudaremos algumas das suas propriedades.

3.1 Sequência de Fibonacci e propriedades

Definição 3.1. *(LIMA et al.,2004) A recorrência linear homogênea de segunda ordem dada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ onde $F_1 = F_2 = 1$ define uma sequência$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a qual se chama de Sequência de Fibonacci, a saber*

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...) .$$

A seguir, apresentamos alguns exemplos interessantes de onde aparece a Sequência de Fibonacci.

3.2 Sequência de Fibonacci na natureza

Um exemplo associado à Sequência de Fibonacci na natureza é observar o número de pétalas de uma flor completa, ou seja, se contarmos cuidadosamente o número de pétalas de uma flor que não perdeu nenhuma de suas pétalas, veremos que na maioria dos casos teremos esse número correspondente a um termo da Sequência de Fibonacci. De acordo com Sinha (2017) podemos listar agora algumas flores no qual se constata isso, vejamos:

Figura 2 – 1 Pétala: Lírio Branco

Fonte: Codinghero

Figura 3 – 3 Pétalas: Lírio, Íris

Fonte: Codinghero

Figura 4 – 5 Pétalas: Botão de Ouro, Rosa Selvagem, Espora, Columbine (Aquilegia)

Fonte: Codinghero

Figura 5 – 8 Pétalas: Delfínios

Fonte: Codinghero

Figura 6 – 13 Pétalas: Tasneira, Calêndula de Milho, Cinerária

Fonte: Codinghero

Figura 7 – 21 Pétalas: Áster, Susana de Olhos Pretos, Chicória

Fonte: Codinghero

Figura 8 – 34 Pétalas: Tanchagem, Piretro

Fonte: Codinghero

Figura 9 – 55, 89 Pétalas: Margaridas Michaelmas, Família Asteraceae

Fonte: Codinghero

As figuras[1] apresentadas nesta seção podem ser acessadas no site *CODING HERO*[2]

3.3 Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

Outra aplicação interessante está relacionada ao Triângulo de Pascal, o qual é um assunto da matemática estudado no ensino médio com diversas aplicações. Veremos a seguir tal propriedade relacionada a Sequência de Fibonacci:

Definição 3.2. *(LABORÃO, 2016) O Triângulo de Pascal é um triângulo numérico infinito formado por números binomiais* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-K)!}$, *onde* n *representa o número da linha e* k *representa o número da coluna, com* $n \geq k$, *iniciando a contagem a partir do zero. Ver Figura 10*[3]

[1] The Fibonacci Series and its Amazing Applications: Disponível em: <https://codinghero.ai/the-fibonacci-series-and-its-amazing-applications/>. Acesso em: 28 de jul. de 2021.
[2] CODING HERO. Disponível em: <https://codinghero.ai>. Acesso em: 28 de jul. de 2021.
[3] **Triângulo de Pascal**: definição e construção. Matemática básica. Disponível em: <https://matematicabasica.net/triangulo-de-pascal/>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

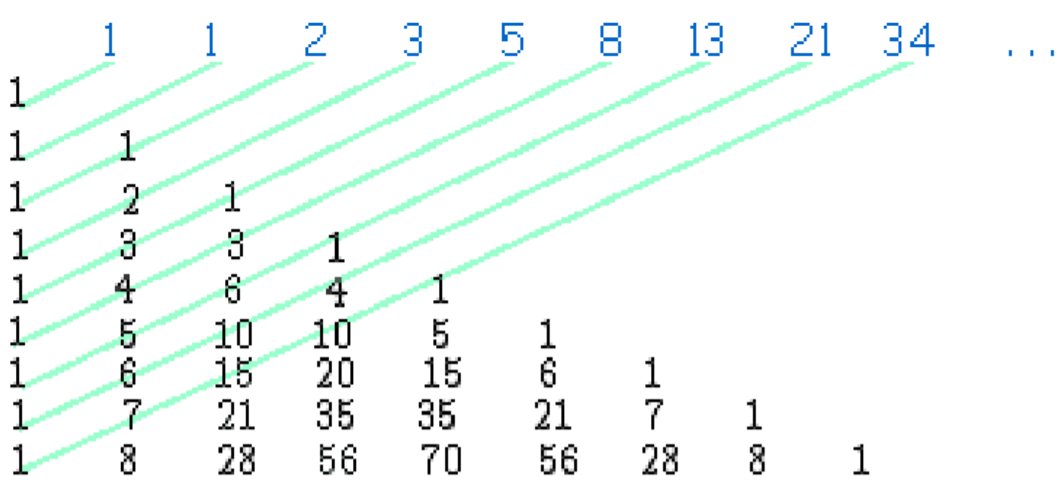
Figura 10 – Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\cdots & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots \binom{n}{n} \\
\cdots & & & & & \\
\cdots & & & & &
\end{array}
$$

Fonte: Site Matemática Básica

Desenvolvendo os binômios no Triângulo de Pascal notamos que a soma dos números em diagonal tem como resultado termos da Sequência de Fibonacci. Ver figura 11[4]:

Figura 11 – Triângulo de Pascal com a Sequência de Fibonacci



Fonte: Repositório UFMG.

Esta propriedade nos diz que:

4 LABORÃO, G. G. **TRIÂNGULO DE PASCAL**. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-ACAJ4G/1/monografia_guilhermeguimaraes.pdf>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j},$$

onde j é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$.

A demostração deste resultado e outras observações podem ser encontradas em Laborão (2016).

3.4 Propriedades da Sequência de Fibonacci

Trataremos aqui algumas das principais propriedades da Sequência de Fibonacci segundo Vorobiov (1974).

Proposição 3.1. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $F_{n+2} - 1$.*

Prova. De acordo com a recorrência de Fibonacci temos que:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 = F_3 - 1 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ F_3 &= F_5 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, somando as equações acima obtemos

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_3 - 1 + F_4 - F_3 + F_5 - F_4 + \cdots + F_{n+1} - F_n + F_{n+2} - F_{n+1}$$

$$= -1 + (F_3 - F_3) + (F_4 - F_4) + (F_5 - F_5) + \cdots + (F_n - F_n) + (F_{n+1} - F_{n+1}) + F_{n+2}$$

De onde obtemos o resultado

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

□

Proposição 3.2. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices ímpares é igual a F_{2n}.*

Demonstração. De acordo com a recorrência de Fibonacci temos que:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ F_5 &= F_6 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Daí, somando membro a membro cada uma das equações

$$F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-3}+F_{2n-1} = F_2+F_4-F_2+F_6-F_4+\cdots+F_{2n-2}-F_{2n-4}+F_{2n}-F_{2n-2}$$

$$= (F_2 - F_2) + (F_4 - F_4) + (F_6 - F_6) + \cdots + (F_{2n-4} - F_{2n-4}) + (F_{2n-2} - F_{2n-2}) + F_{2n}.$$

De onde obtemos o resultado

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$$

□

Proposição 3.3. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares é igual a $F_{2n+1} - 1$.*

Demonstração. Da recorrência de Fibonacci segue-se que

$$\begin{aligned} F_2 &= F_3 - F_1 = F_3 - 1 \\ F_4 &= F_5 - F_3 \\ F_6 &= F_7 - F_5 \\ &\vdots \\ F_{2n-2} &= F_{2n-1} - F_{2n-3} \\ F_{2n} &= F_{2n+1} - F_{2n-1}. \end{aligned}$$

Análogo ao resultado anterior somarmos membro a membro para obtermos

$$F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n-2}+F_{2n} = F_3-1+F_5-F_3+F_7-F_5+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n-3}+F_{2n+1}-F_{2n-1}$$

$$= -1 + (F_3 - F_3) + (F_5 - F_5) + (F_7 - F_7) + \cdots + (F_{2n-3} - F_{2n-3}) + (F_{2n-1} - F_{2n-1}) + F_{2n+1}.$$

Daí, temos o resultado

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

□

Proposição 3.4. *A soma alternada dos números da Sequência de Fibonacci satisfaz a seguinte identidade*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot F_k = (-1)^{n+1} \cdot F_{n-1} + 1.$$

Demonstração. Combinando as Proposições 3.2 e 3.3 e usando $F_{2n+1} = F_{2n-1} + F_{2n}$ obtemos, a seguinte equação

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + F_7 - \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = F_{2n} - F_{2n+1} + 1 = -F_{2n-1} + 1.$$

Somando F_{2n+1} à equação acima encontramos

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + F_7 - \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+1} - F_{2n-1} + 1 = F_{2n} + 1.$$

Portanto, desta duas equações podemos concluir que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot F_k = (-1)^{n+1} \cdot F_{n-1} + 1.$$

□

Para a prova da seguinte proposição usaremos um resultado muito conhecido, o Lema de Euclides para o caso $n = 1$, o qual nos diz que: Dados números inteiros a, b e n, se existir $mdc(a, b - na)$ então $mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$. A notação $mdc(a, b)$ refere-se ao máximo divisor comum entre dois números a e b

Proposição 3.5. *Quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração. Fazendo indução sobre n. Queremos provar que, $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$ para todo número inteiro n maior que 1. Para $n = 1$ temos que $mdc(F_1, F_2) = mdc(1, 1) = 1$.

Suponhamos agora que vale para n inteiro maior do que 1, ou seja, $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$. Devemos verificar que a propriedade vale para $n+1$, ou seja, que vale $mdc(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$.

Note que, $mdc(F_{n+1}, F_{n+2}) = mdc(F_{n+1}, F_n + F_{n+1})$. Aplicando o Lema de Euclides $mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$ para o caso $n - 1$ vem que

$$\begin{aligned} mdc(F_{n+1}, F_{n+2}) &= mdc(F_{n+1}, F_n + F_{n+1}) \\ &= mdc(F_{n+1}, F_n + F_{n+1} - F_{n+1}) \\ &= mdc(F_n, F_{n+1}). \end{aligned}$$

Daí, pela hipótese de indução, temos

$$mdc(F_{n+1}, F_{n+2}) = mdc(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

□

Proposição 3.6. *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da Sequência de Fibonacci é igual a* F_nF_{n+1}.

Demonstração. Observe que, $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$. Daí vem, $F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}$. Portanto, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_1^2 + \sum_{k=2}^{n} F_k^2 = F_1F_{2+} \sum_{k=2}^{n}(F_kF_{k+1} - F_{k-1}F_k),$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_1F_2 + (F_2F_3 - F_1F_2) + (F_3F_4 - F_2F_3) + \cdots + (F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_{n-1}) + (F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n)$$

$$= F_nF_{n+1}.$$

□

Proposição 3.7. *Para todo* $n \geq 1$ *e para todo* $m > 1$ *a seguinte relação é verdadeira* $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m$.

Demonstração. Faremos essa prova usando Indução Completa encontrado no apêndice B sobre n. Para $n = 1$ temos

$$F_{m+1} = F_{m-1} + F_m = F_{m-1}F_1 + F_2F_m,$$

portanto o resultado vale para este caso. Suponhamos que ela é verdadeira para n tal que $1 \leq n \leq k$, daí vale, $F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k-1} + F_kF_m$ e $F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_{k+1}F_m$. Queremos mostrar que esta propriedade vale para $n = k + 1$. De fato, devemos verificar que:

$$F_{m+(k+1)} = F_{m-1}F_{k+1} + F_{k+2}F_m.$$

Mas,

$$F_{m+(k+1)} = F_{m+k} + F_{m+k-1}.$$

Usando a hipótese de indução no termo F_{m+k} e $F_{m+(k-1)}$ temos que

$$F_{m+k+1} = F_{m-1}F_k + F_{k+1}F_m + F_{m-1}F_{k-1} + F_kF_m.$$

Colocando em evidência F_{m-1} e F_m obteremos

$$F_{m+k+1} = F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k) = F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}.$$

□

Proposição 3.8. *Se* $n > 1$ *e* F_{n-1}, F_{n+1} *são números da Sequência de Fibonacci, então vale a relação* $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$.

Demonstração. Da Proposição 3.7 com $m = n$ temos que $F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n$, colocando F_n em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n \\ &= F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \end{aligned}$$

uma vez que $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$. □

3.5 Fómula de Binet

O objetivo central dessa seção é encontrar uma solução explicita (uma fórmula) para a recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ onde $F_1 = F_2 = 1$.

Teorema 3.1. *(MORGADO; CARVALHO, 2015) Para todo $n \geq 1$ tem-se que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, onde $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a Sequência de Fibonacci.*

Demonstração. A Recorrência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, é equivalente a $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, assim sua equação característica é dada por $r^2 - r - 1 = 0$ com soluções $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Aplicando o Teorema 2.2 encontramos

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Como $F_1 = F_2 = 1$, podemos determinar os valores de C_1 e C_2 por meio do seguinte sistema

$$\begin{cases} C1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ C1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Daí, resolvendo este sistema encontramos como solução $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto tem-se

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

Esta fórmula para a Sequência de Fibonacci é chamada de **Fórmula de Binet** em homenagem ao matemático Jacques Binet, quem a descobriu.

Podemos reescrever a Fórmula de Binet da seguinte forma:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

O teorema seguinte nos dá uma boa aproximação de F_n em termos de α o qual pode ser encontrado em Vorobiov (1974, p.26).

Consideremos $a_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ como sendo o n-ésimo termo da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ e cuja razão é α.

Teorema 3.2. *O Número de Fibonacci F_n é um número inteiro próximo do número $a_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, podemos ainda afirmar que a distância de F_n a a_n satisfaz $|F_n - a_n| < \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Demonstraremos que o valor absoluto da diferença entre F_n e a_n é sempre menor que $\frac{1}{2}$. De fato,

$$|F_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}}.$$

Como $|\beta| < 1$ temos que $|\beta^n| < 1$, daí $|\beta^n| < 1$ o que nos diz que $\frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, uma vez que $\sqrt{5} > 2$. Portanto segue que $|F_n - a_n| < \frac{1}{2}$. □

Observação 3.1. *No teorema 3.2 observamos que $|F_n - a_n| = \frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ o que implica $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n - a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} = 0$, pois $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.*

Mais a frente, o Teorema 3.2 será de suma importância e permitirá revelar uma incrível relação entre os trabalhos de Fibonacci e Euclides, especificamente entre Sequência de Fibonacci e Número de Ouro.

4 Sequência de Fibonacci e sua relação com a Geometria

Neste capítulo veremos uma importante relação da Sequência de Fibonacci na geometria, no que diz respeito ao Número de Ouro. Segundo Falbo (2005), a proporção áurea (Número de Ouro) é a solução para um problema proposto por Euclides[1] em seus Elementos, Livro VI. Adotaremos em nosso contexto AB é um segmento de extremos em A e B, já $\overline{AC}$ representará o cumprimento do segmento AB.

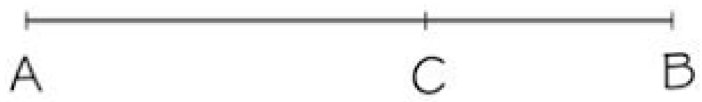
4.1 O Número de Ouro

Segundo Eves (2004, p.125) dizemos que um ponto C divide um segmento de reta AB em ***Secção Áurea***, se o segmento de maior cumprimento é média geométrica entre o cumprimento do menor segmento e o cumprimento do segmento todo. A razão do cumprimento do segmento maior pelo cumprimento do segmento menor chama-se ***Razão Áurea***.

Em outras palavras, considere um ponto C pertencente a um segmento AB e que $\overline{AC} = a$, $\overline{CB} = b$ e $\overline{AB} = a + b$. Diremos que o ponto C divide o segmento AB em secção áurea quando

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Figura 12 – Segmento Áureo



Fonte: Autor, GeoGebra

Da igualdade acima temos a seguinte equação

$$a^2 - ab - b^2 = 0. \tag{4.1}$$

[1] Euclides de Alexandria, 300 a.C., foi um matemático platónico e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".

A qual tem como solução em a os seguintes valores $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$ e $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}b$

Substituindo esses valores em $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ encontramos os seguintes valores $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ quando substituímos por a_1 e a_2, respetivamente.

O número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ encontrado é chamado de **Número Ouro**, já o número $\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é chamado de conjugado de ϕ. Vale ressaltar que, consideramos o número positivo como o Número de Ouro em virtude da razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ser dada entre números positivos.

Se na equação (4.1) considerarmos $b = 1$, então $a^2 - a - 1 = 0$ tem como raízes ϕ e $\overline{\phi}$. Daí, tiramos a relação

$$\phi^2 = \phi + 1 \tag{4.2}$$

Da relação acima temos duas observações a serem feitas, as quais apresentaremos a seguir:

- Extraindo a raiz quadrada na equação (4.2) obtemos $\phi = \sqrt{\phi + 1}$. Assim substituindo o valor de ϕ temos $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1+\phi}}$, repetindo esse processo infinitamente temos

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

- Dividindo a equação (4.2) por ϕ obtemos $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$. Assim substituindo ϕ temos $\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}$, repetindo esse processo infinitamente temos

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Esta expressão do Número de Ouro dada acima é chamada de *fração contínua*[2].

Vejamos que, a equação (4.2) nos dá uma relação entre o número de ouro e os números de Fibonacci. Para isso, basta multiplicarmos ela repetidas vezes por ϕ, obtendo as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\phi^2 &= \phi + 1, \\
\phi^3 &= 2\phi + 1, \\
\phi^4 &= 3\phi + 2, \\
\phi^5 &= 5\phi + 3, \\
\phi^6 &= 8\phi + 5.
\end{aligned}$$

[2] SILVA, M. A. dos S. **Frações contínuas**: Uma aplicação a criptografia RSA. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Itabaiana, 2019. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/12767/2/MARCIO_ALEXANDRE_SANTOS_SILVA.pdf>. Acesso em: 21 de set. 2021.

Note que, estas potências de ϕ deram origem a dois conjuntos $\{1,2,3,5,8\}$ e $\{1,1,2,3,5\}$ em ambos casos são subconjuntos dos Números de Fibonacci, o que nos permite reescrever as equações da seguinte forma: $\phi^2 = F_2\phi+F_1$; $\phi^3 = F_3\phi+F_2$; $\phi^4 = F_4\phi+F_3$; $\phi^5 = F_5\phi+F_4$; $\phi^6 = F_6\phi + F_5$.

De acordo com as observações acima podemos afirmar que

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}. \tag{4.3}$$

De fato, basta aplicarmos o Princípio de Indução Matemática sobre n. Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira pois vimos já que $\phi^2 = F_2\phi + F_1$. Agora, suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n = k$, isto é, vale a relação $\phi^k = F_k\phi + F_{k-1}$. Devemos provar que, a relação é verdadeira para $n = k+1$. Assim

$$\begin{aligned}
\phi^{k+1} = \phi^k\phi &= (F_k\phi + F_{k-1})\phi \\
&= F_k\phi^2 + F_{k-1}\phi \\
&= F_k(\phi+1) + F_{k-1}\phi, \quad \text{em virtude da equação (4.2)} \\
&= F_k\phi + F_k + F_{k-1}\phi \\
&= (F_k + F_{k-1})\phi + F_k \\
&= F_{k+1}\phi + F_k.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Principio de Indução Matemática a equação (4.3) vale para todo número natural $n \geq 2$.

O próximo teorema nos diz que a taxa de crescimento da Sequência de Fibonacci para n suficientemente grande é igual ao número de ouro, apresentaremos aqui a demostração dada em Vorobiov (1974, p. 77).

Teorema 4.1. *Seja $\phi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Se F_{n+1} e F_n são números Fibonacci consecutivos então* $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.2 podemos escrever $F_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n$ onde $|\theta_n| < \frac{1}{2}$, como $\alpha = \phi$ podemos escrever $F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \theta_n$. Daí temos que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \theta_n}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ encontramos:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\phi^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\phi^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\phi + \dfrac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\phi^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{\theta_n\sqrt{5}}{\phi^n}\right)}.$$

Como $|\theta_{n+1}\sqrt{5}| < \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ temos que $\theta_{n+1}\sqrt{5}$ é limitada e temos ainda que ϕ^n tende para o infinito quando n cresce infinitamente pois $\phi > 1$, temos assim que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\phi^n}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\phi^n}\right) = 0.$$

Daí, obtemos que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \dfrac{\phi + 0}{1 + 0} = \phi$. $\square$

5 Ensino da Sequência de Fibonacci no ensino básico

Nesta seção trataremos formas de mediar o ensino de Sequência de Fibonacci para aluno do ensino básico, com objetivo de estimular e facilitar o aprendizado do mesmo com respeito a sequência de Fibonacci. Este contexto nos leva a pensar no ensino de forma significativa nos dias atuais da educação e para isso faremos uma abordagem do assunto não somente citando as propriedades e definições, mas sim orientando os alunos a construírem o seu próprio entendimento sobre tal assunto.

GUIA DO PROFESSOR

Neste guia trataremos no primeiro momento do problema clássico, dos casais de coelhos, proposto por **Fibonacci** e no segundo momento notaremos a relação entre os termos da Sequência de Fibonacci com o Número de Ouro, visando assim o desenvolvimento das habilidades (EF07MA14),(EF06MA22), H2, H22, H24, H25 e H26 que é de suma importância, pois observamos aspectos quantitativos e qualitativos da realidade (situação problema) bem como a relação entre esses aspectos dando-lhes assim significado matemático, com isso temos como objetivo de que o aluno trona-se capaz de compreender e caracterizar o seu cotidiano de maneira interdisciplinar, utilizando para isso recursos didáticos e materiais que facilitarão essa compreensão, tendo em vista o ensino aprendizagem de maneira significativa de acordo com Ponte (1992).

Objeto de conhecimento

- Sequência recorrentes (Sequência de Fibonacci)
- Geometria (Número de Ouro)

Habilidades

As seguintes habilidades podem ser encontradas em Brasil[1,2]

(EF07MA14) - Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

[1] De acordo com: BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.[4]
[2] De acordo com: BRASIL. Ministério da Educação. Matriz de referência ENEM - INEP.[5]

(EF06MA22) - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Objetivo

Reconhecer a recorrência que relaciona os termos da Sequência de Fibonacci e a sua relação como Número de Ouro.

Recursos didáticos

Computador, celular/calculadora científica, microfone, mesa digitalizadora, aplicativos: Google Formulário, Powerpoint, Youtube.

Avaliação

A avaliação do aluno deve ser continuada, ou seja, o aluno deverá ser avaliado durante toda a aula. O professor na avaliação continuada poderá por exemplo considerar as avaliações das competências socioemocionais, a avaliação formativa, a autoavaliação, aplicação de (formulário, fluxograma, quizz de perguntas, etc). Neste Guia do Professor foi proposto a utilizado como ferramente de avaliação um fluxograma, em cada aula para ter uma ideia quantitativa da aprendizagem (o que não deve ter caráter exclusivo para o promoção do aluno), etc. Mais informações sobre estes tipos de avaliação[3].

Observação 5.1. *É de fundamental importância que o professor anote todas as informações dos alunos individualmente aula após aula para assim ter condições de justificar seu processo avaliativo.*

[3] IMAGINIE EDUCAÇÃO - EDUCAÇÃO CONTINUADA. Disponível em: https://educacao.imaginie.com.br/avaliacao-continua/. Acesso em: 27 de Jul. de 2021.

Duração

Pode variar de acordo com a necessidade de cada turma, mas em média este Guia poderá ser desenvolvido em 6 aulas.

Introdução

Para inicio de conversa, vamos a uma breve passeio sobre a história[4] de um tal Leonardo Fibonacci.

> Fibonacci, também chamado de Leonardo Pisano ou até mesmo Leonardo de Pisa, nome original Leonardo Fibonacci, matemático italiano medieval que escreveu o livro Liber Abaci (1202; "Livro do Ábaco"), o primeiro trabalho europeu em matemática indiana e árabe. Pouco se sabe sobre a vida de Fibonacci, além dos poucos fatos apresentados em seus escritos matemáticos.
>
> O Liber Abaci, amplamente copiado e imitado chamou a atenção do Sacro Imperador Romano Frederico II[5] . Na década de 1220, Fibonacci foi convidado a comparecer perante o imperador em Pisa, lá um dos membro da comitiva científica de Frederico propôs uma série de problemas, três dos quais Fibonacci apresentou em seus livros.
>
> Por vários anos, Fibonacci se correspondeu com Frederico II e seus estudiosos trocando problemas com eles. Ele dedicou seu Liber quadratorum (1225; "Livro dos Números Quadrados") para Frederico.
>
> Embora o Liber Abaci fosse mais influente e amplo, o Liber Quadratorum sozinho classifica Fibonacci como o principal contribuinte para teoria dos números entre Diofanto[6] e o matemático francês do século XVII Pierre de Fermat[7].
>
> Exceto por seu papel na difusão do uso dos numerais hindu-arábicos a contribuição de Fibonacci para a matemática foi amplamente esquecida. Seu nome é conhecido pelos matemáticos modernos principalmente por causa da Sequência de Fibonacci derivada de um problema (veja abaixo) no Liber Abaci. (GIES,2021).

O problema

Um certo homem colocou um par de coelhos em um local cercado por todos os lados por uma parede. Quantos pares de coelhos podem ser produzidos a partir desse par em um ano, se for suposto que a cada mês cada par gera um novo par e que a partir do segundo mês se torna produtivo?

[4] Encyclopedia Britannica. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Fibonacci.> Acesso em: 27 de Jul. de 2021.

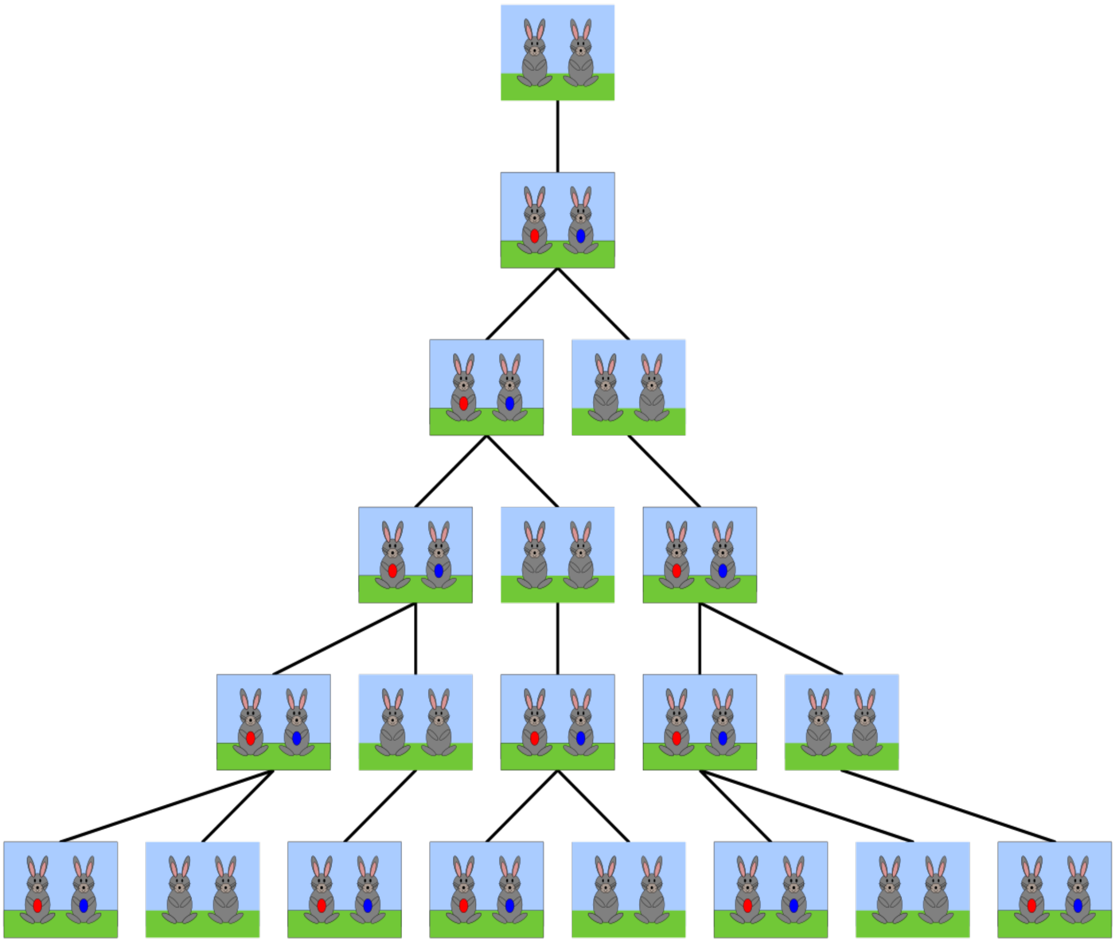
[5] Frederico II Coroado imperador do Sacro Império Romano-Germânico em 1220, ele ficaria na história como um dos monarcas mais esclarecidos.[13]

[6] Diofanto de Alexandria era um matemático grego, famoso por seu trabalho em álgebra.[31]

[7] Pierre de Fermat, matemático francês que muitas vezes é chamado de o fundador da teoria moderna dos números. [3]

Observação 5.2. *Caso alguns alunos não consigam entender o problema dos coelhos, o professor poderá orientar o entendimento utilizando por exemplo diagrama de árvore*[8] *como mostra a Figura 13, onde o casal que torna-se produtivo recebe medalha azul e vermelha. Neste diagrama o número de casais em cada linha é um termo da Sequência de Fibonacci, ou seja, no primeiro mês temos um casal não produtivo, no segundo mês temos um casal produtivo e por esse motivo receberam as medalhas, no terceiro mês temos dois casais visto que o do segundo mês produziu um novo o qual não deve receber a medalha, no quarto mês teremos três casais sendo dois produtivos (um que já era produtivo desde o segundo mês e o que nasceu no terceiro mês que tornou-se produtivo) e um novo filho do que já era produtivo e assim sucessivamente:*

Figura 13 – Diagrama da Sequência de Fibonacci



Fonte: PNGWING

A fonte PNGWING[9].

[8] **Diagrama da Sequência de Fibonacci**. Disponível em: <https://www.pngwing.com/pt/free-png-yqbee>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

[9] **PNGWING**. Disponível em: <https://www.pngwing.com/>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

Neste momento o professor deve propor aos alunos que formem grupos com três alunos e terminem de preencher a tabela a seguir de acordo com a abordagem do problema dos casais de coelhos:

Tabela 1 – Determinando a Sequência de Fibonacci

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Casais	1	1										

Fonte: Autor 2021

Quando terminar o preenchimento da tabela, reunir os grupos em um grande circulo na sala para exposição das ideias adotadas por eles para a solução do problema, a solução esperada é:

Tabela 2 – Solução esperada na Tabela 1

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Fonte: Autor 2021

Neste instante o professor deverá estimular os alunos com os seguintes questionamentos:

1. Suponha que o processo de reprodução se estenda infinitamente. Existe relação entre os termos da sequência (caso o aluno tenha dúvidas sobre a definição de sequência numéricas acesse <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=79#> para uma retomada de conhecimento) (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, $\cdots$)?

   Resposta esperada: A partir do segundo termo podemos notar que o termo seguinte é soma dos dois antecessores imediatos na sequência.

2. A respeito das discussões da questão anterior, considere os termos F_n, F_{n+1} e F_{n+2} para n maior do que 1. Qual a relação entre esses três termos?

   Resposta esperada: A relação de recorrência entre eles é $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ onde n é um número natural maior do que 1.

3. Determinem agora os dois próximos termos dessa sequência, ou seja, determinar F_{13} e F_{14}, bem como determinar F_{20}.

   Resposta esperada: Como vale a relação $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ tem-se que :

   $F_{13} = F_{12} + F_{11} = 89 + 144 = 233$

   $F_{14} = F_{13} + F_{12} = 144 + 233 = 377$

Deve-se listar os termos da Sequência de Fibonacci até o F_{19} para assim calcular o F_{20}, ou seja, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181) daí $F_{20} = F_{19} + F_{18} = 2584 + 4181 = 6765$

Observação 5.3. *O objetivo central dos itens 1. e 2. acima é que os alunos entendam a Sequência de Fibonacci como uma recorrência, já o item 3. acima, serve para estimular o aluno a pensar se é possível, diante do problema de listar até o termo F_{19}, como determinar o termo F_{20}, encontrando uma fórmula para o termo F_n só em função do tempo/mês que se espera para determinar o número de casais.*

Caso os alunos não consigam determinar tal expressão, o professor deverá intervir com o seguinte contexto:

Proposta de intervenção

Existe uma Fórmula para a Sequência de Fibonacci chamada de **Fórmula de Binet**[10] em homenagem ao matemático francês Jacques Binet (1786-1856), que a descobriu em 1843 e dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Neste instante deve-se orientar os alunos a pegar a caculadora científica para fazer o cálculo de F_{20} substituindo o valor de n por 20 na fórmula de Binet e o resultado deve ser comparado com o encontrado anteriormente no item 3.

Para dar sequência, o professor deverá projetar para os alunos o seguinte vídeo *"Donald no País da Matemágica"*[11], para incentivar os mesmos a querer entender a relação entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

O próximo passo ficará a cargo do professor, que será fazer uma breve introdução ao número de ouro.

O tal Número de Ouro

Encontrada de diferentes formas na obra de artistas como Salvador Dalí, de arquitetos como Le Corbusier, a razão áurea é um dos números mais famosos da matemática. Os gregos antigos nas construções de seus edifícios.(OBMEP, 2020)[12]

[10] Binet foi um matemático, fez contribuições significativas para a teoria dos números e os fundamentos matemáticos da álgebra matricial.[18]

[11] **"Donald no País da Matemágica"**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk&t=279s>. Acesso em: 12 de jul. de 2021.

[12] **Clubes de matemática da OBMEP**: desseminando o estudo da matemática. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/>. Acesso em: 15 de jun. de 2021.

A razão áurea é um número irracional, tal qual o famoso número π, e é também denotado por uma letra grega, o "phi" (pronunciamos fi) ϕ. Uma das equações que modela o problema proposto por Euclides (c. 300 AC) em seus elementos, livro VI é $X^2 - X - 1 = 0$ de onde se considera a raiz positiva como sendo o **Número de Ouro**, a saber $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803... \approx 1,618$

Definição 5.1. *(AZEVEDO,2013) Denominamos retângulo áureo um retângulo cuja razão do comprimento para a largura é igual a* ϕ.

Os seguintes exemplos são aplicações na arte de Retângulos Áureos

Exemplo 5.1. *A Monna Lisa*[13]*, segundo informações do site do Museu Louvre*[14]*:*

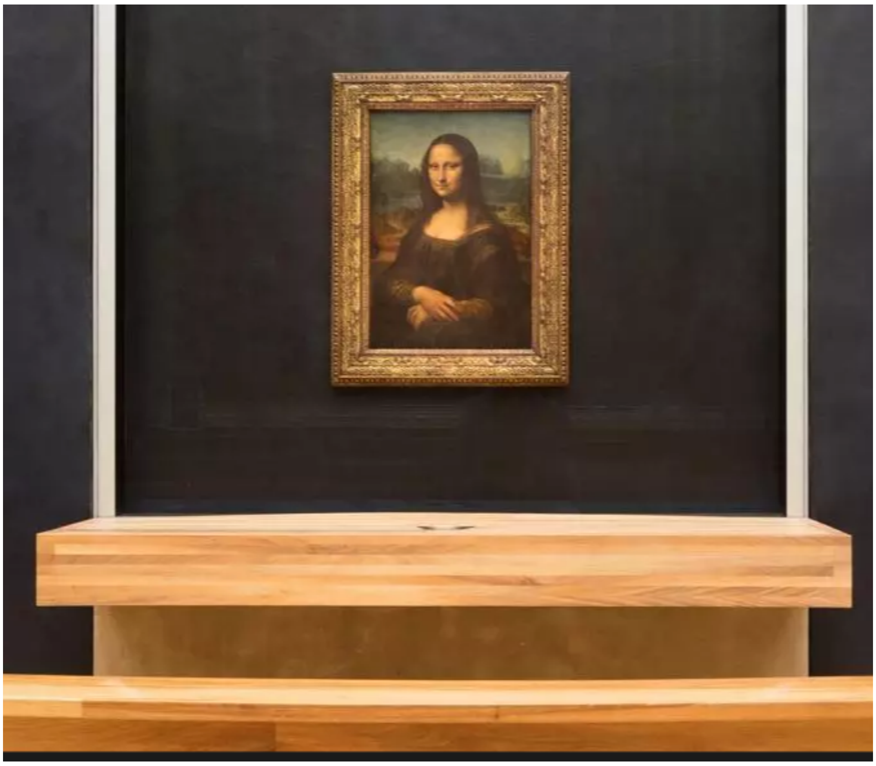
> *Este é o retrato mais famoso do mundo. Mostra Lisa Gherardini, esposa do comerciante de seda florentino Francesco del Giocondo - daí seu nome italiano La Gioconda e seu nome francês La Joconde . Pintada contra uma paisagem distante, ela nos encara com seu famoso sorriso enigmático ... mas outro aspecto da pintura que a torna tão especial é a técnica de sfumato de Leonardo da Vinci, baseada no uso de esmaltes para criar um efeito 'esfumaçado' com contornos e contrastes sutis. Leonardo capturou o modelo voltando-se para o observador em um movimento natural que dá vida à pintura.(MUSEU LOUVRE, 2021).*

As dimensões do retrato são 53 cm de largura por 77 de altura, o que nos permite verificar que a razão entre essas dimensões $\frac{77}{53} = 1,4528301886792452830188679245283$ *é muito próxima do número de ouro, ou seja, sua forma retangular se aproxima de uma retângulo áureo.*

[13] **Monna Lisa**. Disponível em: <https://www.louvre.fr/en/explore/the-palace/from-the-mona-lisa-to-the-wedding-feast-at-cana>. Acesso em: 05 de jan. de 2021.

[14] **Museu Louvre**. Disponnível em: <https://www.louvre.fr.> Acesso em 05 de jun. de 2021.

Figura 14 – Monna Lisa



Fonte: MUSEU LOUVRE, 2021

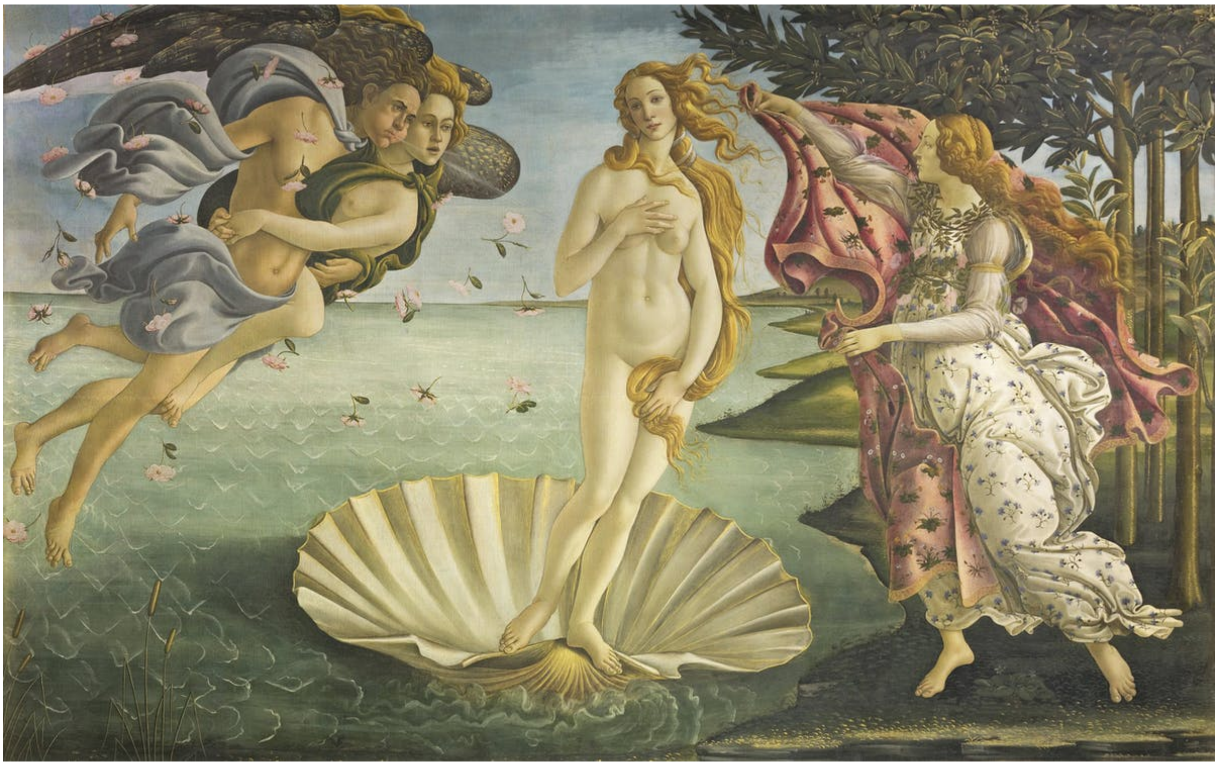
Exemplo 5.2. *Segundo informações encontradas no site LE GALLERIE DEGLI UFFIZI*[15]*, conhecida como "Birt hof venus"*[16]*, retrato de Sandro Botticelli:*

> *A composição mostra na verdade a deusa do amor e da beleza chegando em terra, na ilha de Chipre, nascida da espuma do mar e soprada alí pelos ventos, Zéfiro e, talvez, Aura. A deusa está de pé sobre uma gigantesca concha de vieira, pura e perfeita como uma pérola. Ela é recebida por uma jovem, que às vezes é identificada como uma das Graças ou como a Hora da primavera, e que segura um manto coberto de flores. Até as rosas, sopradas pelo vento, são uma lembrança da primavera. O tema da pintura, que celebra Vênus como símbolo do amor e da beleza, talvez tenha sido sugerido pelo poeta Agnolo Poliziano. (LE GALLERIE DEGLI UFFIZI, 2021)*

[15] **LE GALLERIE DEGLI UFFIZI**. Disponível em: <https://www.uffizi.it>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

[16] **"Birt hof venus"**. Disponível em: <https://www.uffizi.it/en/artworks/birth-of-venus>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

Figura 15 – Birt of Venus (Nascimento de Vênus)



Fonte: LE GALLERIE DEGLI UFFIZI, 2021

As dimensões desse retrato são 278,5 cm de largura por 172,5 de altura, o que nos permite verificar que a razão entre essas dimensões $\frac{278{,}5}{172{,}5} = 1,6144927536231884057971014492754$ é muito próxima do Número de Ouro, ou seja, sua forma retangular se aproxima de uma retângulo áureo.

Neste momento o professor convida os alunos a utilizar o Aplicativo GeoGebra para fazer a construção do retângulo de ouro a partir de um segmento dado, orientando-os com as propostas dos quatro itens que seguem abaixo. Caso não seja possível a utilização do Aplicativo o professor poderá fazer a construção utilizando régua e compasso. A construção de uma perpendicular passando por um dos extremos do segmento está disponível no Apêndice A.

Exemplo 5.3 (**Construção do Retângulo Áureo**). *Dado um segmento AB determine um retângulo áureo.*

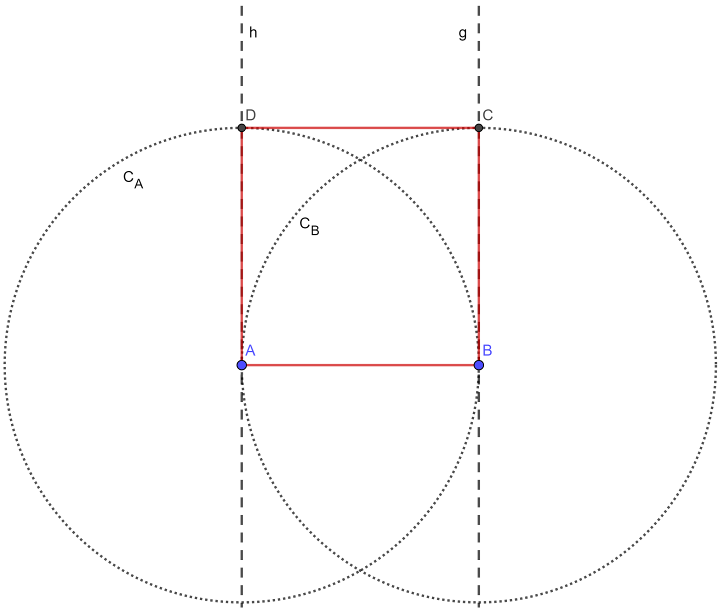
Segui os passos em Wagner (2007, p.3) para determinarmos tal construção geométrica.

1. A partir do segmento dado AB, devemos construir um quadrado $\square ABCD$.

Como fazer usando régua e compasso

- Traçamos as retas h e g perpendiculares a AB passando por A e B, respectivamente;
- Traçamos o círculo C_A de centro em A e raio igual ao comprimento de AB, escolhamos um dos pontos de interseções do círculo C_A com a reta h e chame de D;
- Agora traçamos o círculo C_B de centro em B e raio igual ao comprimento de AB, escolha um dos pontos das interseções do círculo com a reta g e chame de C; de tal modo que C fique no mesmo semiplano do ponto D em relação a reta que contém AB.
- Os pontos A, B, C e D determinados anteriormente determinam um quadrado.

Figura 16 – Construção do quadrado a partir de um segmento



Fonte: Autor, GeoGebra

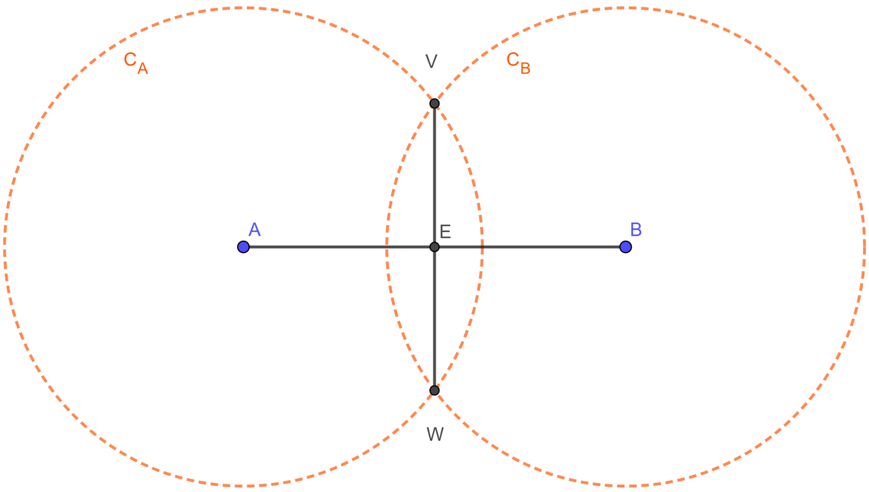
2. Construir o ponto médio E do segmento AB.

Como fazer usando régua e compasso

- Com centro em A devemos traçar um círculo C_A cujo raio a seja maior que a metade do comprimento de AB;
- Com centro em B devemos traçar um círculo C_B de raio a igual ao do item anterior.
- Consideremos agora os pontos V e W das interseções entre os círculos.

- O ponto E da interseção entre os segmentos AB e VW é o ponto médio de AB.

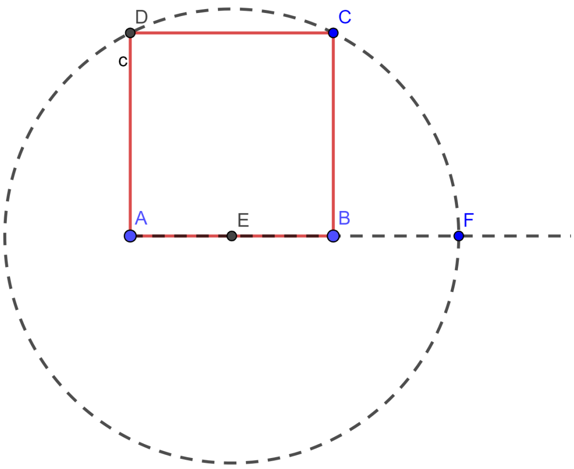
Figura 17 – Ponto Médio



Fonte: Autor, GeoGebra

3. Com a ponta seca do compasso em E e abertura EC determinar o ponto de interseção F sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, ou seja, devemos ter que $\overline{EC} = \overline{EF}$.

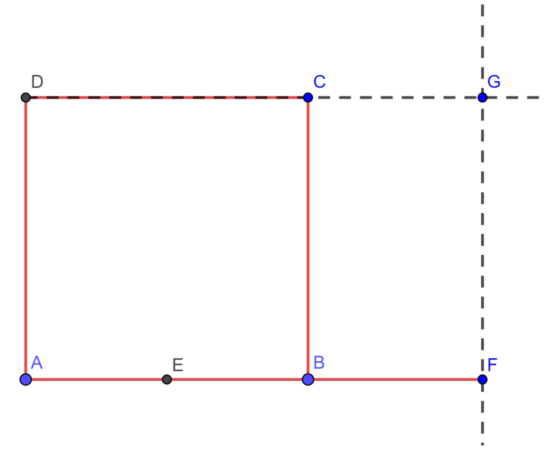
Figura 18 – Determinando o Ponto F



Fonte: Autor, GeoGebra

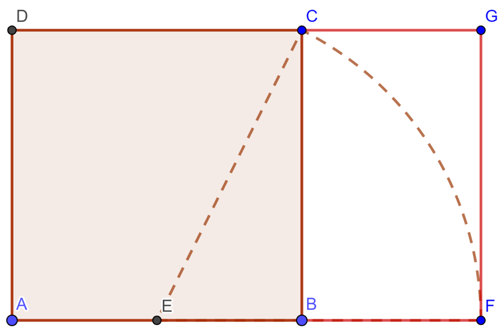
4. Agora, consideremos o ponto G como sendo a interseção da reta perpendicular a AF em F e semirreta $\overrightarrow{DC}$, como na figura 19:

Figura 19 – Determinando o Ponto G



Fonte: Autor, GeoGebra

Figura 20 – Retângulo Áureo



Fonte: Autor, GeoGebra

Os pontos A, F, G e D que encontramos nos passos descritos acima, determinam o **retângulo áureo** que queríamos determinar, veja como fica na da figura 20:

Justificativa da construção anterior para o professor

De fato, se consideremos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DC} = \overline{AD} = a$ então $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{a}{2}$. Como o triângulo ΔEBC é retângulo em B, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras

$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4},$$

de onde encontramos $\overline{EC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Mas, temos ainda que

$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EC} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

Logo, a razão entre o comprimento $\overline{AF}$ e a largura $\overline{AD}$ é igual a

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi,$$

como queríamos.

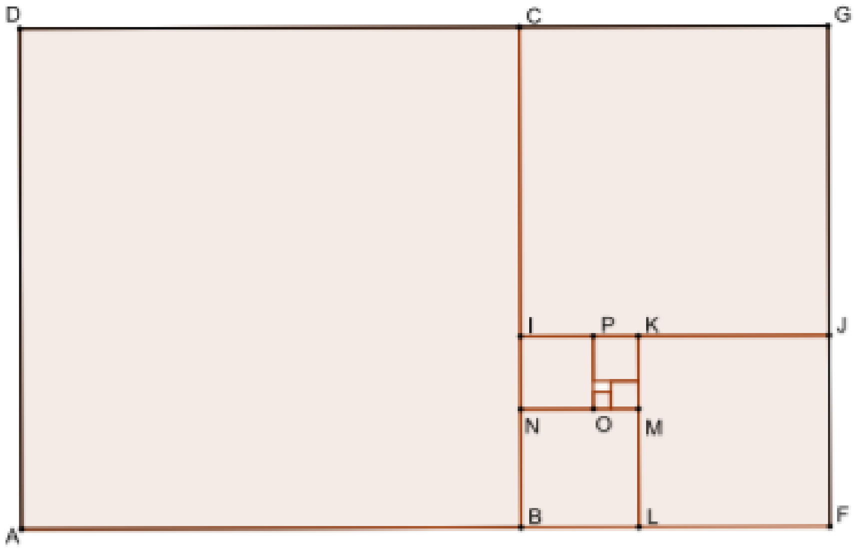
Observação 5.4. *O retângulo $BFGC$ também é um retângulo áureo, pois:*

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BF}} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5})}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Portanto sempre que retiramos um quadrado de lado igual a largura de um retângulo áureo o retângulo que sobra ainda é um retângulo áureo.

Neste momento o professor chamará a atenção dos alunos para o seguinte fato. Sempre que retiramos um quadrado de lado igual a largura de um retângulo áureo o retângulo que sobra ainda é um retângulo áureo. Repetindo assim o processo descrito anteriormente obtemos a seguinte figura

Figura 21 – Retângulo Áureo Justapostos



Fonte: Autor, GeoGebra

Este processo pode ser repetido infinitas vezes tanto para obtermos retângulos áureos com dimensões cada vez menores ou para obtermos retângulos áureos com dimensões cada vez maiores.

Agora, vamos obter retângulos a partir de quadrados cujo os lados são números de Fibonacci fazendo o uso do App GeoGebra, neste caso, se não for possível utilizar o App as construções com régua e compasso também se aplicam nas construções dos quadrados e consequentemente dos retângulos. A seguir descrevemos os passos.

1. Primeiro, justapomos dois quadrados de lados iguais a 1 para obtermos um retângulo 1×2.

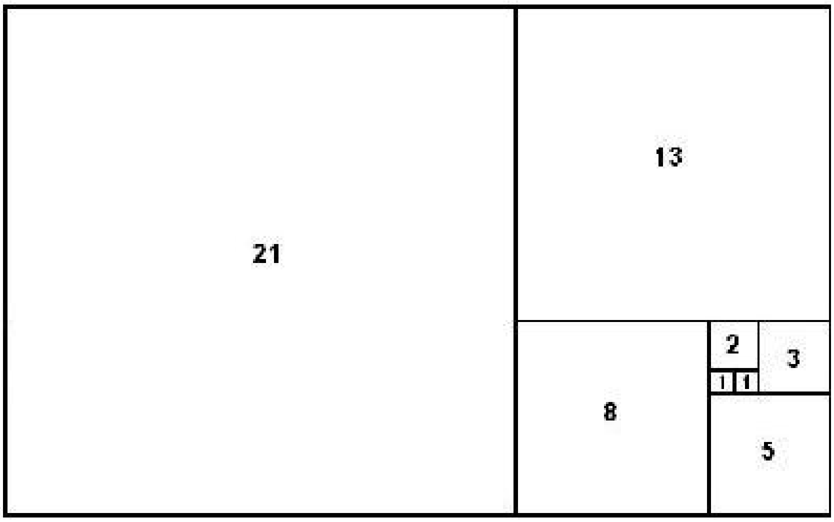
2. Agora, justapomos um quadrado de lado 2 ao retângulo no item anterior de modo que, o lado de comprimento igual a 2 do retângulo coincida com o lado do quadrado, obtendo assim um retângulo 2×3.

3. Justaporemos um quadrado de lado 3 ao retângulo no item anterior de modo que, o lado de comprimento igual a 3 do retângulo coincida com o lado do quadrado, obtendo assim um retângulo 3×5.

Observe como fica o processo anterior na figura 22. Esses retângulos obtidos assim são chamados de **Retângulos de Fibonacci**. Vale ressaltar que, existem infinitos retângulos de Fibonacci, uma vez que tal processo pode ser repetido infinitas vezes.

Este procedimento nos da uma boa aproximação de retângulos áureos por retângulos com comprimento F_{n+1} e largura F_n, onde F_{n+1} e F_n são termos consecutivos da Sequência de Fibonacci, pois temos que $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) \longrightarrow \phi$ como visto no Teorema 4.1.

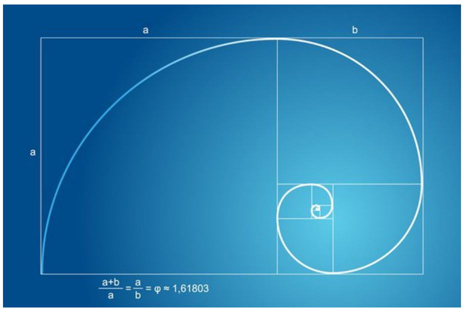
Figura 22 – Retângulo de Fibonacci



Fonte: Autor, GeoGebra

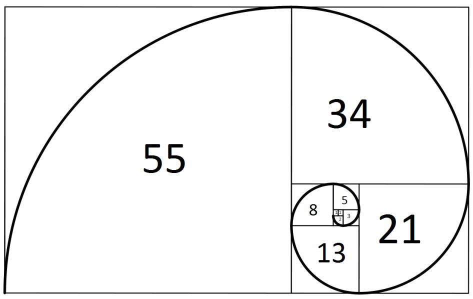
Neste momento o professor pode apresentar o Espiral de Ouro[17] mostrando a figura 23 cuja fonte é o *site Mega Curioso*[18] bem como o Espiral de Fibonacci[19] este por sua vez pode ser visualizado na figura 24 cuja fonte é o *Site Atitude Reflexiva*[20] e ver assim a semelhança entre elas, o qual é justificado pelo Teorema 4.1.

Figura 23 – Espiral de Ouro



Fonte: Site Mega Curioso

Figura 24 – Espiral de Fibonacci



Fonte: Site Atitude Reflexiva

[17] **Espiral de Ouro**. Disponível em: <https://www.megacurioso.com.br/matematica-e-estatistica/74174-voce-sabe-o-que-e-a-proporcao-aurea.htm>. Acessado em: 06 de jul. de 2021.

[18] **Mega Curioso**. Disponível em: <https://www.megacurioso.com.br>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

[19] **Espiral de Fibonacci**. Disponível em: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/07/a-sequencia-de-fibonacci/>. Acessado em: 06 de jul. de 2021.

[20] **Site Atitude Reflexiva**: Reflexões sobre desenvolvimento de software, o cotidiano profissional e conhecimentos gerais. Disponível em: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

Nesta ocasião os alunos devem ter notado a semelhanças entre os retângulos e consequentemente entre os espirais, daí como proposta de investigação do fato, os alunos deverão preencher a tabela a seguir com aproximações de até três casas decimais:

Sequência de Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$												

A resposta esperada

Sequência	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	1	0,5	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	1,618	1,617	...

Dispondo os alunos em um grande círculo perguntar: perceberam alguma relação entre os valores das razões pedidas e o número de ouro?

Resposta esperada

A medida que o tempo passa as razões encontradas se aproximam cada vez mais do Número de Ouro o que justifica o fato da semelhanças observadas nas construções acima.

Segundo informações encontrada no site Viva Decora[21], estes espirais e retângulos estão presentes em diversos lugares como por exemplo na natureza, na arte, na arquitetura, no seres humanos, etc.

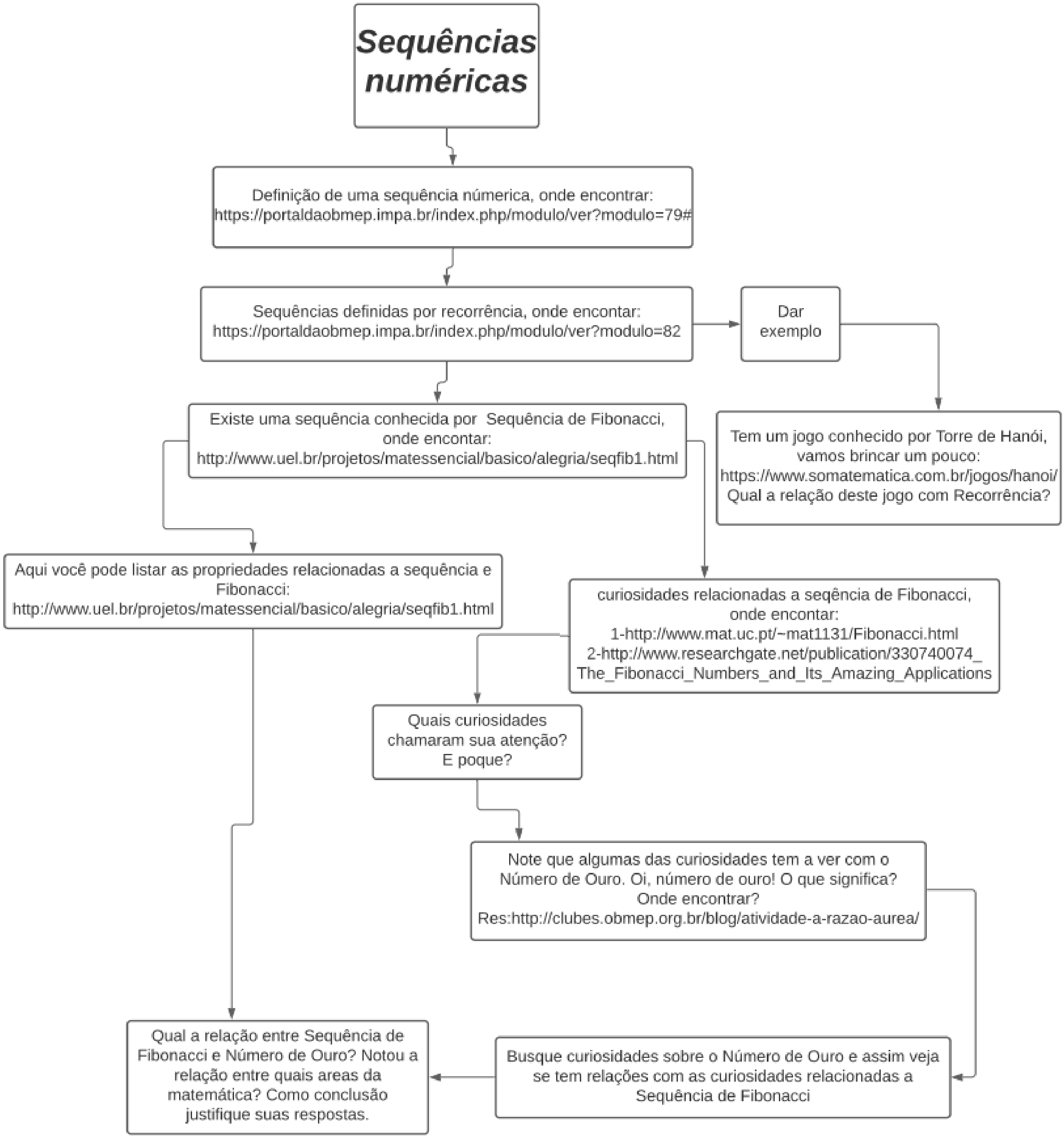
Podemos concluir esta abordagem sobre a Sequência de Fibonacci por meio de um fluxograma proposto pelo professor, por exemplo o da figura 25, pois de acordo com Biasotto, Leandro Caumo e col. (2020) "Aprender significativamente é organizar informações e integrá-las aos conceitos já assimilados, preexistentes na estrutura cognitiva. Existe, portanto, uma informação que seja mais geral e abrangente e que a ela ligam-se as demais, de modo a incrementar mais significados".

Neste caso o fluxograma pode trazer questionamentos e direcionamentos, tais que o ensino aprendizagem ocorra de maneira significativa, concordando assim com a teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel (1963 apud BIASOTTO; FIM; KRIPKA, 2020).

Uma sugestão de fluxograma para a Sequência de Fibonacci é dado na figura 25.

[21] Site Viva Decora. Disponível em: <https://www.vivadecora.com.br/pro/curiosidades/proporcao-aurea/>. Acesso em: 12, maio de 2021.

Figura 25 – Sequência de Fibonacci (fluxograma)



Fonte: lucidchart

Este fluxograma foi feito usando a página de internet Lucidchart[22] e pode ser acessado em: <https://lucid.app/lucidchart/e247546e-9abe-4fa3-9d02-0544cab1f4d7/view?page=0_0#> serve como uma ferramenta de avaliação onde o alunos poderá descrever o seu aprendizado partindo de um ponto geral, neste caso sequências numéricas. A cada etapa é proposto um site onde o aluno fará (caso necessário) uma pesquisa para aprofundamento do assunto abordado. Com o preenchimento deste fluxograma podemos fazer a relação

[22] **Lucidchart**. Disponível em: <https://www.lucidchart.com>. Acesso em: 10 de maio de 2021

entre os dados anotados no decorrer da aula e compreender melhor o conceito/nota a ser atribuído/atribuída ao aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, N. de C. de. **O número de ouro e construções geométricas**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Goiânia, 2013. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2948/5/Natalia.pdf>. Acesso em: 16 de fev. 2021.

BIASOTTO, L. C.; FIM, C. F.; KRIPKA, R. M. L. **A teoria da aprendizagem significativa de David Paul Ausubel**: uma alternativa didática para a educação matemática. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v.6, n.10, p. 83187-83201, out. 2020.

BOYER, C. B. **Pierre de Fermat French mathematician**. Britannica, 2021. Disponível em: <https://www.britan
nica.com/biography/Pierre-de-Fermat>. Acesso em: 12 de jun. de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de referência exame nacional do ensino médio**. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

CAI, T. **The book of numbers**. S.l.: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2016.

CONWAY, J. H.; GUY, R. **The book of numbers**. Nova York: Springer Science & Business Media, S.I 1998.

DIAGRAMA da Sequência de Fibonacci. PNGWING. Disponível em: <https://www.pngwing.com/pt/free-png-ntunu>. Acesso em: 27 de Jul. de 2021.

DOBHAL, R. **The Fibonacci Series and its Amazing Applications**. Codinghero, 2021. Disponível em: <https://codinghero.ai/the-fibonacci-series-and-its-amazing-applications/>. Acesso em: 28 de jul. de 2021.

ENTENDA o que é proporção áurea e porque ela mudou a história da arquitetura. Viva Decora, 2019. Disponível em: <https://www.vivadecora.com.br/pro/curiosidades/p
roporcao-aurea/>. Acesso em: 12 de maio de 2021.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. tradução HYGINO H. D. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FALBO, C. **The Golden Ratio**: A Contrary Viewpoint. The College Mathematics Journal, Washington, v.36, n.2, p.123-134, mar. 2005. disponível em: <https://www.jstor.org/stable/30044835>. Acesso em: 06 de fev. de 2021.

GERSCH, Claus-Dieter. **1194: Nasce Frederico II, "Stupor Mundi"**. DW Brasil, 2021. Disponível em: <https://p.dw.com/p/1VGr>. Acesso em: 10 de jun. de 2021.

GERSTING, L. J. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 3. ed. S.l: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1995. Disponível em: <https://www.cin.ufpe.br/ dmd/in
Acesso em: 19 de fev. de 2021.

GIES, F. C. **Fibonacci**. Britannica, 22 Jan. 2021, Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Fibonacci.> Acesso 27 de Jul. de 2021.

HEFEZ, A. **Indução matemática**. Portal da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática), 2009. disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/7uly1ostl484c.pdf>. Acesso em: 04 de Setembro de 2021.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

JACQUES Philippe Marie Binet. Britannica. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet>. Acessado em: 06 de jul. de 2021.

LABORÃO, G. G. **Triângulo de Pascal**. Dissertação (Especialização) – Universidade Federal de Minas Gerais, Especialização em Matemática, Belo Horizonte, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-ACAJ4G/1/monografia_guilhermeguimaraes.pdf>. Acesso em: 01 de mar. de 2021.

LIMA, E. L. **Curso de Análise volume 1**. Projeto Euclides. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio volume 2**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

MATIJASZEVICH, J. V. **Solution of the tenth problem of hilbert**. Mat. Lapok, v. 21, p.83 – 87, 1970.

A Monna Lisa. MUSEU LOUVRE. Disponível em:<https://www.louvre.fr/en/explore/the-palace/from-the-mona-lisa-to-the-wedding-feast-at-cana>. Acesso em: 27 de Jul. de 2021.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

NOVAES, J. C. **Triângulo de Pascal**: Definição e construção. Matemática básica, 2015. Disponível em: <https://matematicabasica.net/triangulo-de-pascal/>. Acesso em: 06 de jul. de 2021.

PARENTI, D. Birth of Venus. LE GALLERIE DEGLI UFFIZI. Disponível em: <https://www.uffizi.it/en/art
of-venus>. Acesso em : 06 de jul. de 2021.

PONTE, J. P. **Problemas de Matemática e Situações da Vida Real**. Revista de Educação, Lisboa, v.2, n.2, p.95-108, 1992.

PONTES, F. L. G.; GOBBI, C. R.; SOUSA, E. K. V. **As contribuições de Édouard Lucas para a teoria dos números**, Fortaleza, v.05, n.14, p. 243-252, 2018.

SILVA, M. A. dos S. **Frações contínuas: Uma aplicação a criptografia RSA.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Itabaiana, 2019. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/12767/2/MARCIO_ALEXANDRE_SANTOS_SILVA.pdf>. Acesso em: 21 de set. 2021.

SILVA, R. L. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro**: contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2015. Disponível em: <http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_REGINALDO_LEONCIO_SILVA.pdf>. Acesso em: 01 de fev. de 2021.

SINHA,S. **The Fibonacci Numbers and Its Amazing Applications**. International Journal of Engineering Science Invention, Burdwan, volume 6, 9. ed. p. 2319- 6726, 13 de set. de 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/330740074_The_Fibonacci_Numbers_and_Its_Amazing_Applications>. Acesso em: 20 de fev. de 2021.

SASIANO, J. **Diophantus**. Britannica, 2019. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Diophantus>. Acesso em: 06 de jun. de 2021.

VOROBIOV, N.N. **Números de Fibonacci**, Tradução para o Espanhol. Moscow: Editora Mir, 1974.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, (Coleção do professor de matemática), 2007.

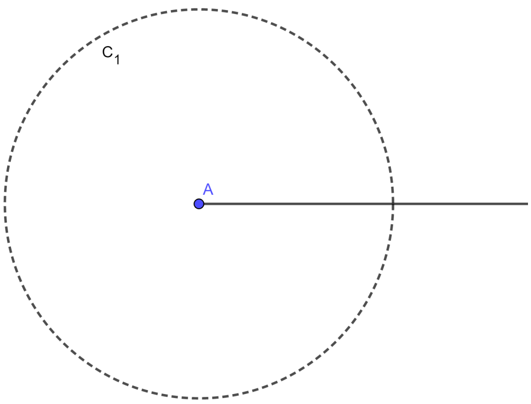
WELLS, D. **The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers**. Londres, Reino Unido: PENGUIN BOOKS, 1986.

APÊNDICE A – Construção de uma perpendicular em um dos extremos do segmento

Nesta solução vamos traçar uma reta perpendicular ao segmento AB passando por A. Para construirmos uma reta perpendicular passando pela extremidade do segmento de reta AB, devemos escolher uma de suas extremidades. Seguiremos os seguintes passos:

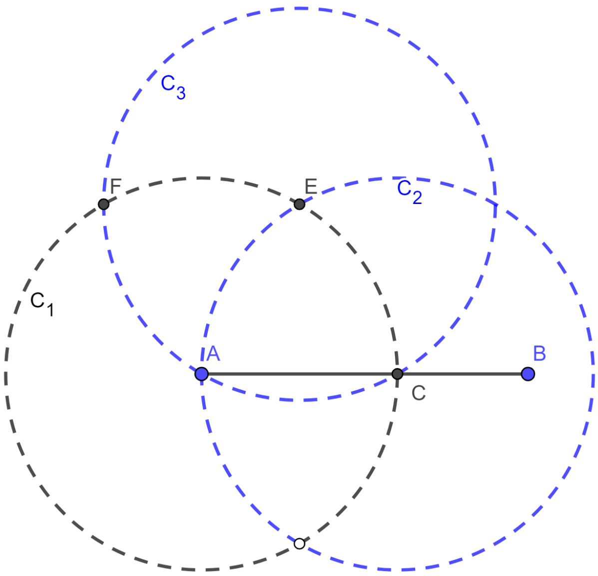
1. Com a ponta seca do compasso em A, traçar um círculo C_1 de raio r_1 menor que o comprimento de AB.

Figura 26 – Círculo no extremo A



Fonte: autor, GeoGebra

Figura 27 – Três círculos

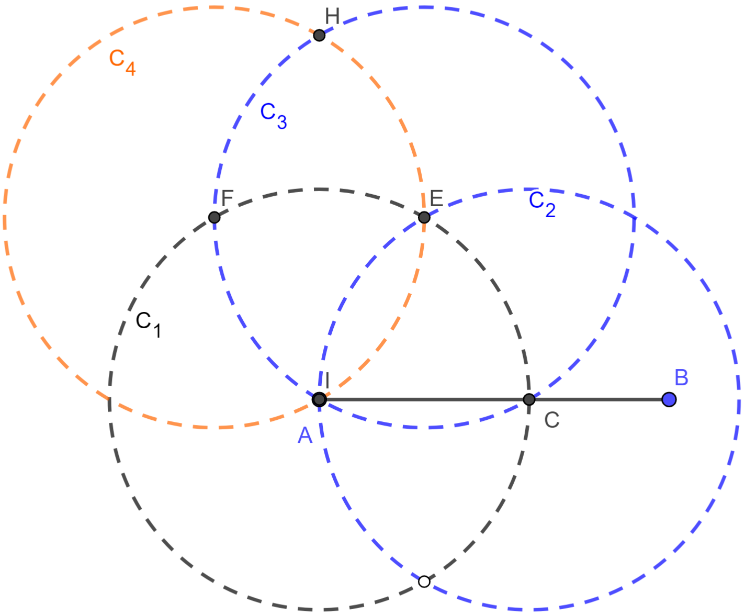


Fonte: autor, GeoGebra

2. Consideremos agora o ponto C de interseção entre C_1 e o segmento AB e tracemos dois outros círculos C_2 e C_3, de raio igual ao raio de C_1 com centros nos pontos C e E respectivamente, onde E é um dos pontos de interseção entre C_1 e C_2. Consideremos ainda o ponto F, como sendo o ponto de interseção de C_2 e C_3, que está no mesmo semiplano de E com relação a reta que contém AB.

3. Façamos agora outro círculo C_4, de centro em F e raio igual ao raio de C_1, e consideremos o ponto H diferente de A como sendo o ponto de interseção entre C_3 e C_4.

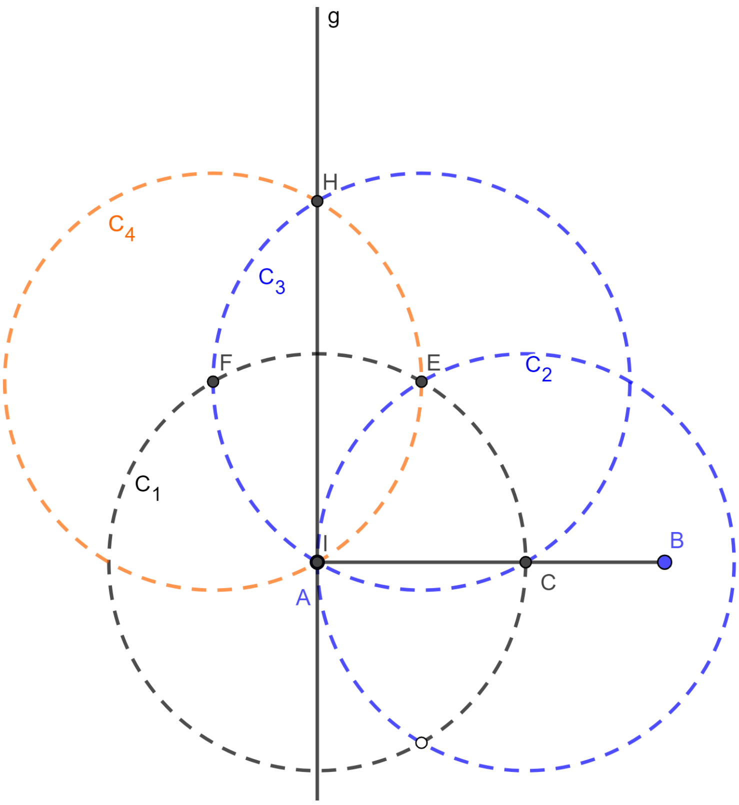
Figura 28 – Quatro Círculos



Fonte: autor, GeoGebra

4. A reta g que passa por A e por H é a reta que procuramos.

Figura 29 – Reta perpendicular ao Segmento AB



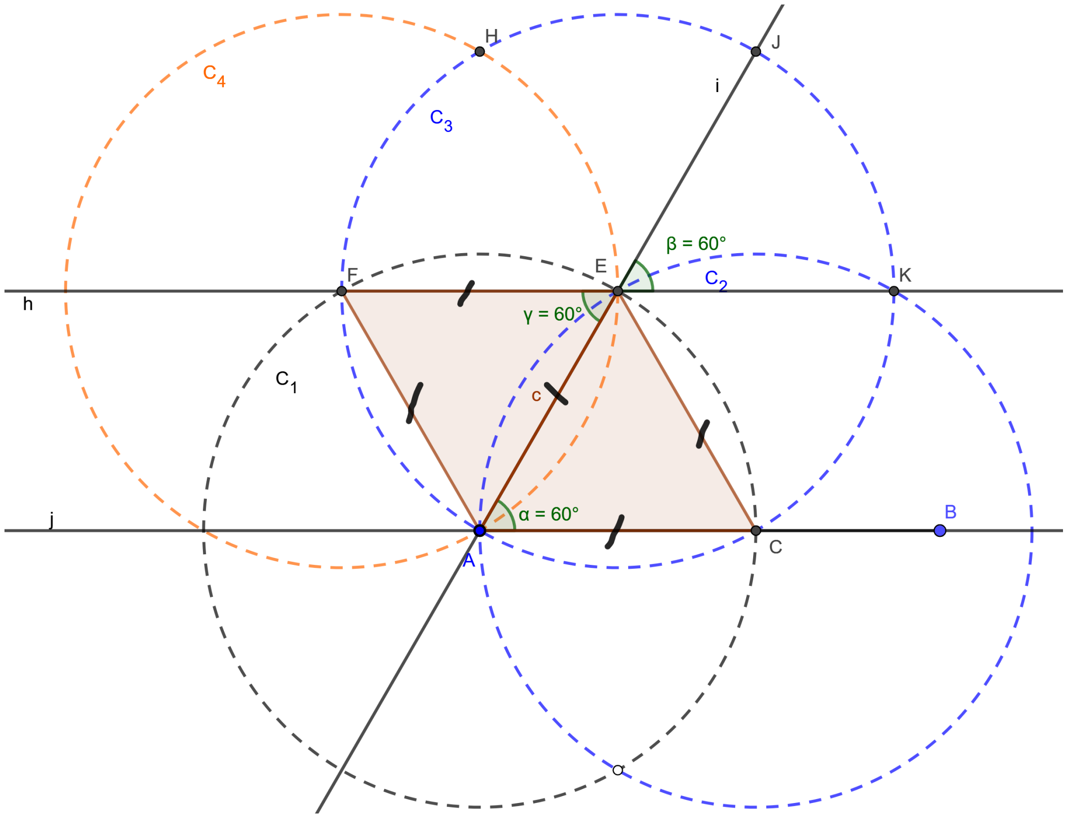
Fonte: autor, GeoGebra

Justificativa

A Reta h que contém segmento EF da construção é paralela a reta j que contém o segmento AB já que os triângulos $\triangle EAF$ e $\triangle CAE$ são equiláteros pois seus lados são raios dos de círculos de mesmo raio. De fato, pois se considerando a reta i que contém AE temos que o ângulo $\angle EAC = \alpha = 60°$ e $\angle AEF = 60°$ são iguais uma vez que são ângulos de triângulos equiláteros, isso nos garante que h e paralela a j pelo teorema dos ângulos alternos internos.

Agora, como a reta g que contém HA que é a diagonal do losango $AEHF$ é perpendicular a EF por ser a outra diagonal, assim sendo g é perpendicular a h o que implica g perpendicular a j passando A já que j é paralela a h. Logo se tem g perpendicular a AB passando por A. Vejamos como fica na figura :

Figura 30 – Justificativa que AB é paralelo a EF



Fonte: autor, GeoGebra

APÊNDICE B – Princípios de Indução Matemática

As demostrações e enunciados dos fatos deste apêndice são feitos segundo (HEFEZ,2009).

B.1 O conjunto dos números naturais

Para inicio de conversa, consideremos um subconjunto S dos números reais e além disso que S satisfaz as propriedades a seguir:

1. O número 1 pertence a S.
2. Toda vez que S contém um número n, ele necessariamente contém o número $n+$.
3. Não existe subconjunto próprio de S satisfazendo as condições 1 e 2.

Observação B.1. *O conjunto S mencionado acima é único.*

De fato, se considerarmos S_1 e S_2 dois subconjuntos dos números reais que satisfazem as propriedades 1, 2 e 3 então $S_1 \cap S_2$ possui as propriedades 1 e 2, logo pela propriedade 3 segue que

$$S_1 = S_1 \cap S_2 = S_2.$$

Axioma 1. *Existe um subconjunto dos números reais que satisfazem as propriedades 1, 2 e 3 .*

Esse **único** subconjunto será chamado de conjunto dos números naturais e denotado por $\mathbb{N}$.

B.2 Indução Matemática

Consideremos dada uma sentença matemática $P(n)$ com $n \in \mathbb{N}$, a qual torna-se verdadeira ou falsa quando é substituído o valor de n, estas sentenças são ditas sentenças abertas definidas sobre $\mathbb{N}$.

Teorema B.1 (Princípio de Indução Matemática). *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que*

1. *$P(1)$ é verdadeira; e*

2. *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.*

   Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema B.2 (Indução Completa). *Seja a um número natural e $P(n)$ uma sentença aberta. Suponha que:*

- *$P(a)$ é verdadeira, e que;*

- *qualquer que seja $n \leq a$, se $P(i)$ é verdadeira para todo $a \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.*

  Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \leq a$.