Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

ALLEFY MAX CARDOSO MENESES

Desigualdade de Sobolev com peso no semi espaço superior e aplicações com condição de Neumann

São Cristóvão
2025

ALLEFY MAX CARDOSO MENESES

Desigualdade de Sobolev com peso no semi espaço superior e aplicações com condição de Neumann

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do Mestrado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho

São Cristóvão
2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Meneses, Allefy Max Cardoso
M543d Desigualdade de Sobolev com peso no semi espaço superior e aplicações com condição de Newmann / Allefy Max Cardoso Meneses; orientador Jônison Lucas dos Santos Carvalho . – São Cristóvão, SE, 2025.
72 f.; il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Sobolev, Espaço de. 2. Equações diferenciais. I. Carvalho, Jônison Lucas dos Santos Carvalho orient. II. Título.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Desigualdade de Sobolev com peso no semi espaço superior e aplicações com condição de Neumann

por

Allefy Max Cardoso Meneses

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
JONISON LUCAS DOS SANTOS CARVALHO
Data: 28/02/2025 10:57:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho - UFS
Orientador

Edcarlos Domingos da Silva

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG
Primeiro Examinador

Arlucio da Cruz Viana

Prof. Dr. Arlucio da Cruz Viana - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 27 de Fevereiro de 2025

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marcelo Déda Chagas, s/n - Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887 CEP: 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Chegar até aqui não foi fácil. Minha gratidão à CAPES apoio financeiro CAPES, que foi essencial para manter a qualidade desse trabalho.

Gostaria de agradecer e ser grato a todos os meus professores da pós-graduação da UFS (Prof. Zaqueu Ramos - estruturas algébricas, Prof^{a} Débora Lopes - análise no $\mathbb{R}^n$, Prof. Disson Soares - equações diferenciais parciais, Prof^{a} Maria de Andrade - geometria diferencial e o Prof. Arlúcio Viana - medidas e integração) que, atentos as dificuldades de cada aluno, entendiam particularmente minha situação e me ajudaram superar essas dificuldades e prosseguir com o curso, além de terem feito o máximo para poder dar o melhor deles para transmitir o necessário conteúdo com a devida qualidade.

Por fim, meus sinceros agradecimentos e gratidão ao Prof. Jônison Carvalho, que além de ter sido meu professor em uma das disciplinas do curso (tópicos de análise), foi meu orientador. Ciente de minhas dificuldades e lacunas, ele soube dar o melhor de sí e desenvolvendo a melhor estratégia para que chegássemos até aqui. Escolheu um artigo ao qual me agregaria muitos conhecimentos matemáticos e, mesmo sem eu ter cursado topologia e análise funcional, conseguimos correr atrás para que eu aprendesse aquilo que eu precisava para desenvolver essa dissertação em plenitude. Agradeço de coração ao empenho do meu orientador que conseguiu me fazer chegar aqui e me propiciou, com muita luta e dedicação de ambas as partes, o título de Mestre em Matemática, nesta dissertação que tanto me orgulhou e aprendi.

Tanto me admira o vasto conhecimento que o Prof. Jonison tem, a sua didática impecável e seu olhar crítico para saber traçar um melhor caminho para se demonstrar proposições, de forma a se deixar tudo mais entendível, didático e objetivo. Espero um dia ser tão bom quanto ele.

Matematicamente, este trabalho significou para mim a primeira EDP que busquei estabelecer a sua solubilidade, adquirindo uma vasta bagagem matemática para prosseguir com os estudos. Então isso para mim é motivo de muita felicidade e orgulho.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001."

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo de uma desigualdade de Sobolev com peso e suas aplicações a uma equação elíptica, seguindo o trabalho desenvolvido por Souza, Felix e Medeiros em [42]. O principal objetivo é investigar a existência e não-existência de soluções não-triviais para uma equação semilinear elíptica com condição de fronteira de Neumann, envolvendo o semiplano superior e funções peso. Neste processo de estudo de soluções, serão estabelecidas imersões de Sobolev com peso, para que seja possível uma abordagem variacional adequada. De forma mais específica, será introduzido um funcional de tal maneira que pontos críticos do mesmo são soluções do problema em questão.

Por fim, vale destacar que os métodos aplicados se baseiam em técnicas de minimização e o famoso Teorema do Passo da Montanha.

Palavras-chave: Problema elíptico semilinear, Condição de fronteira de Neumann, Semi-espaço superior, Métodos variacionais, Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

This work is dedicated to the study of a weighted Sobolev inequality and its applications to an elliptic equation, following the work developed by Souza, Felix and Medeiros in [42]. The main objective is to investigate the existence and non-existence of non-trivial solutions to an elliptic semilinear equation with Neumann boundary condition, involving the upper half-plane and weight functions. In this process of studying solutions, weighted Sobolev embedding will be established, so that an adequate variational approach is possible. More specifically, a functional will be introduced in such a way that its critical points are solutions to the problem in question.

Finally, it is worth highlighting that the applied methods are based on minimization techniques and the famous Mountain Pass Theorem.

Keywords: Semilinear elliptic problem, Neumann boundary condition, Upper half-space, Variational methods, Mountain Pass Theorem.

Conteúdo

Introdução

As Equações Diferenciais Parciais (EDPs) com condições de fronteira desempenham um papel fundamental na modelagem matemática de sistemas físicos, biológicos e econômicos. Elas são utilizadas para descrever fenômenos que envolvem mudanças contínuas no espaço e no tempo, como transferência de calor, fluxo de fluidos, propagação de ondas, elasticidade de materiais, entre outros. A condição de fronteira, é relevante por exemplo para determinar a distribuição de temperatura em um material a partir da condução de calor. Além disso, serve para estudar o comportamento de fluidos confinados em um recipiente ou escoando em um canal.

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções do seguinte problema semilinear elíptico com condição de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad \text{em } \Omega \\ \mathcal{B}u &= 0, \qquad\quad\ \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e $\mathcal{B}$ é um operador que pode assumir as seguintes expressões:

(i) $\mathcal{B}u = u$ (condição de Dirichlet);

(ii) $\mathcal{B}u = \partial u/\partial\nu$ (condição de Neumann), com ν representando o vetor normal unitário sobre $\partial\Omega$;

(iii) $\mathcal{B}u = \partial u/\partial\nu + h(x)u$ (condição de Robin), em que $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função não-nula.

A classe de problemas do tipo (0.0.1) se faz presente em vários contextos da Geometria Diferencial, como problemas de curvatura escalar e o problema de Yamabe, como em [22], elasticidade não-linear [16], mecânica dos fluidos não-Newtoniana [20], biologia matemática [5], dentre outros. Dessa forma, problema de fronteira como (0.0.1) tem impulsionado considerável atenção e vem sendo amplamente abordado em diversos resultados sobre a existência e não-existência de soluções. Nesta direção, podemos citar [2, 3, 17, 18, 11, 14, 15, 26, 28, 37, 38, 39, 34, 33] e as referências neles contidas.

Ressaltemos também resultados clássicos sobre alguns problemas elípticos com sinal indefinido. Entre eles, citamos os artigos [1, 2], onde os autores estudaram o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + a(x)|u|^{p-2}u - b(x)|u|^{q-2}u, & \text{em } \Omega \\ \mathcal{B}u &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $2 < p < q < 2^* := 2n/(n-2)$, $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções pesos não-negativas e integráveis em Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{B}u = 0$ ou $\mathcal{B}u = \partial u/\partial \nu$. Sobre algumas condições do parâmetro λ, os autores obtém existência, não-existência e multiplicidade de soluções de acordo com o comportamento dos termos concorrentes $a(x)|u|^{p-2}u$ e $b(x)|u|^{q-2}u$, determinado pelas propriedades de integrabilidade da razão $a^q(x)/b^p(x)$. Resultados semelhantes aparecem em problemas envolvendo não-linearidades concavas e convexas, veja [3].

Motivado pelos problemas mencionados, os autores Radulescu e Repovs em [39] provaram a existência de soluções positivas para o seguinte problema semilinear elíptico com condição de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda a(x)|u|^{p-2}u - b(x)|u|^{q-2}u, & \text{em } \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 < p < 2 < q < 2^*$ e algumas condições sobre as funções $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$. Através de métodos variacionais, foi provado a existência, a não-existência e multiplicidade de soluções com respeito a diferentes valores do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Há uma vasta literatura a respeito do problema (0.0.1) com a condição de fronteira de Robin, isto é, $h \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, como [4, 11, 13, 17, 18, 26, 35, 37, 38, 40, 45] e referências neles contidas. Vale ressaltar que modelos biológicos utilizam dessa condição de fronteira, como se vê em [21].

Nos artigos [26, 35, 37, 38], os autores estudam o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda a(x)|u|^{p-2}u - b(x)|u|^{q-2}u, & \text{em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nu + h(x)|u|^{p-2}u &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de tal forma que $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ é um conjunto limitado e os demais termos satisfazem condições apropriadas. Uma ferramenta bastante útil para os problemas mencionados acima é a desigualdade (veja [37, Lemma 1])

$$\int_\Omega \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p}\,\mathrm{d}x \leq C_0 \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\nu \cdot x}{(1+|x|)^p}\,\mathrm{d}S \right),$$

para $1 < p < n$ e alguma constante $C_0 = C_0(\Omega, p, n) > 0$. Tal desigualdade, é fundamental no estudo do problema de fronteira com condição de Robin.

Este trabalho está baseado principalmente no artigo de Souza, Felix e Medeiros em [42]. Motivados pelos trabalhos mencionados acima e, em especial, pelos trabalhos [2, 8, 26, 30, 35, 39, 17, 18], os autores em [42], tiveram como principal objetivo investigar a existência e não-existência de soluções não-triviais para equação semilinear elíptica com condição de fronteira de Neumann, a saber

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda a(x)|u|^{p-2}u - b(x)|u|^{q-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$, as funções peso $a, b : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ são mensuráveis e não-negativas, as potências $1 < p, q < \infty$ serão especificadas, $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ é o semi-espaço superior, com $n \geq 3$, $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ e $\nu = (0, 0, \ldots, -1)$ denota o vetor normal exterior a $\partial\mathbb{R}^n_+$. O problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ tem sido muito estudado com a condição de Dirichlet, como exemplos, tem-se [6, 8] e as referências neles citadas. Desempenhando um papel fundamental, em [42] os autores provam a seguinte desigualdade de Sobolev com peso,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{0.0.4}$$

onde $n \geq 3$, $\alpha > 1$ e $2_* \leq p \leq 2^*$, com $2_* := 2(n-1)/(n-2)$ e $2^* := 2n/(n-2)$. A partir desta, foram demonstradas imersões de espaços de Sobolev em espaços de Lebesgue com peso. Tais imersões, por sua vez, são cruciais para obter os resultados do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$, através de métodos variacionais.

Desenvolvimentos recentes sobre desigualdades de Sobolev com peso no semi-espaço foram feitos em [12, 24, 25, 31, 43], no contexto de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Em [12], foi provada a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{x_n^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*(\alpha)}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+),$$

onde $2^*(\alpha) = 2(n-\alpha)/(n-2)$, para todo $0 < \alpha \leq 2$.

Para obtenção dos resultados do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ por métodos variacionais, assim como feito em trabalhos mencionados acima, se fará necessário dividir o estudo nos casos $q > p$ e $q < p$, e estabelecer condições a respeito das funções peso a e b. Mais precisamente, quando $q > p$, assumiremos as seguintes hipóteses:

(H_1) $a : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável não-trivial e não-negativa, e existem constantes $\alpha > 1$ e $C_1 > 0$ tais que

$$0 \leq a(x) \leq \frac{C_1}{(1+x_n)^\alpha}$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$;

(H_2) $b : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ é uma função positiva contínua satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

A fim de exemplificação, a função $a(x) = 1/(1+x_n)^\alpha$, com $\alpha > 1$, claramente satisfaz (H_1). Agora, considere

$$b(x) = \frac{(1+|x|)^\theta}{(1+x_n)^{\frac{\alpha q}{p}}},$$

com $\theta > n(q-p)/p$. Claramente b satisfaz a hipótese (H_2), pois

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\left(\frac{1}{(1+x_n)^\alpha}\right)^{\frac{q}{q-p}}}{\left(\frac{(1+|x|)^\theta}{(1+x_n)^{\frac{\alpha q}{p}}}\right)^{\frac{p}{q-p}}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{\theta p}{q-p}}}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Por outro lado, caso $q < p$, ao invés de (H_1) e (H_2), assumiremos as seguintes hipóteses:

$(\widetilde{H}_1)$ $a : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável não-trivial e não-negativa, e existem constantes $\alpha > 1$ e $C_2 > 0$ tais que

$$0 \le a(x) \le \frac{C_2}{(1+|x|)^\alpha}$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$.

$(\widetilde{H}_2)$ $b : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ é uma função não-negativa mensurável.

Assim, dividindo os nossos estudos em dois casos ($q > p$ com (H_1) e (H_2), e $q < p$ com $(\widetilde{H}_1)$ e $(\widetilde{H}_2)$), os principais resultados de existência e não-existência de soluções a respeito do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$, são descritos a seguir.

Teorema 0.0.1. *Sejam $2_* \le p < 2^*$, $q > p$ e assuma as hipóteses (H_1) e (H_2). Então:*

(i) *existe um $\lambda_0 > 0$ tal que o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ possui apenas a solução trivial, se $\lambda < \lambda_0$;*

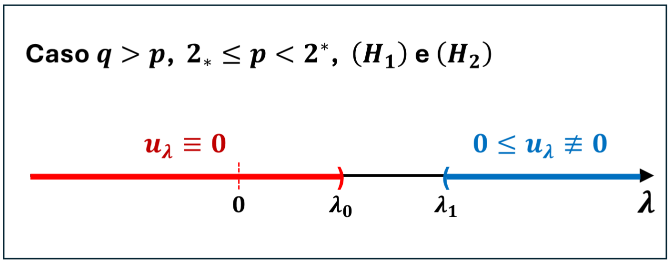
(ii) *existe um $\lambda_1 > 0$ tal que o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ possui pelo menos uma solução não-trivial e não-negativa, se $\lambda > \lambda_1$.*

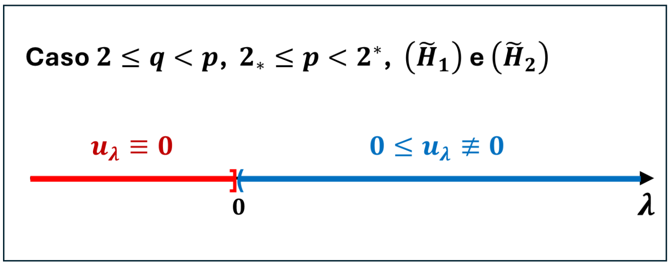
Teorema 0.0.2. *Sejam $2_* \leq p < 2^*$ e $2 \leq q < p$, e assuma as hipóteses $(\widetilde{H}_1)$ e $(\widetilde{H}_2)$. Então:*

(i) *o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ possui apenas a solução trivial, se $\lambda \leq 0$;*

(ii) *o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ possui pelo menos uma solução não-trivial e não-negativa, se $\lambda > 0$.*

Em resumo, para ilustrar de forma mais simples as informações dos teoremas acima, segue a figura abaixo.





A seguir, apresentamos brevemente o que discutiremos em cada capítulo deste trabalho.

No **Capítulo 1**, traremos algumas definições, notações e resultados importantes que serão utilizados ao longo desse trabalho.

No **Capítulo 2**, será estabelecido inicialmente uma desigualdade de Sobolev com peso, cuja relevância se estende ao longo do trabalho, uma vez que é o principal ingrediente para estabelecer resultados de imersão em espaços de Lebesgue com peso. Ainda nesse capítulo, será introduzido um funcional apropriado, para se buscar soluções do problema estudado. Sendo assim, será abordado os cálculos que permitam concluir regularidade adequada para este funcional.

Finalmente, no **Capítulo 3**, será feita a demonstração dos teoremas principais 0.0.1 e 0.0.2, que tratam do estudo de soluções de $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, serão apresentados definições e resultados preliminares essenciais para fundamentar o desenvolvimento e a compreensão dos temas abordados ao longo do estudo deste trabalho.

1.1 Alguns conceitos e resultados clássicos de Análise Funcional

Definição 1.1.1 (Espaço vetorial normado). *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $\|\cdot\|_X : X \to [0, \infty)$ é dita ser uma norma sobre X se:*

(a) $\|u\|_X = 0 \iff u = 0$;

(b) $\|\lambda u\|_X = |\lambda| \|u\|_X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in X$;

(c) $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X$, $\forall u, v \in X$.

*Um espaço vetorial X munido com uma norma $\|\cdot\|_X$ é chamado de **espaço vetorial normado**, e denotado por $(X, \|\cdot\|_X)$.*

Definição 1.1.2 (Convergência forte). *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $\{u_k\}_k \subset X$ converge fortemente para $u \in X$, e escrevemos $u_k \to u$, se*

$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u\|_X = 0.$$

Definição 1.1.3 (Sequência de Cauchy). *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência $\{u_k\}_k \subset X$ é dita sequência de Cauchy, se dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|u_k - u_l\|_X < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq k_0.$$

Diante das definições acima, podemos definir espaço completo (ou de Banach).

Definição 1.1.4 (Espaço de Banach). *Um espaço vetorial normado X é dito completo ou de Banach se cada sequência de Cauchy em X converge fortemente para um elemento em X.*

A seguir, abordaremos o conceito de convergência fraca, que será primordial nos próximos capítulos desta dissertação.

Definição 1.1.5 (Convergência Fraca). *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $\{u_k\}_k \subset X$ converge fracamente para $u \in X$, e escrevemos $u_k \rightharpoonup u$, se*

$$f(u_k) \to f(u), \quad \forall f \in X' := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é linear e limitado}\}.$$

Neste caso, f ser limitado significa que existe $C_f > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C_f \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Além disso, X' é dito espaço dual de X.

A seguir, um resultado que estabelece relações entre convergência forte, fraca e limitação.

Proposição 1.1.1. *Seja X um espaço vetorial normado e $\{u_k\}_k \subset X$ uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) *se $u_k \to u$, então $u_k \rightharpoonup u$;*

(b) *se $u_k \rightharpoonup u$, então $\{u_k\}_k$ é limitada;*

(c) *se $u_k \rightharpoonup u$, então $\|u\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_X$.*

Neste caso,

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_X := \sup_{k\geq 1} \left\{ \inf_{m\geq k} \|u_m\|_X \right\}.$$

Demonstração. (Ver [10], pg. 58, Proposição 3.5.) □

Finalizamos esta seção com os conceitos de espaço reflexivo e uniformemente convexo.

Definição 1.1.6 (Espaço reflexivo). *Um espaço de Banach X é dito ser reflexivo, quando $X'' = (X')' = X$.*

É importante destacar que a igualdade $X'' = X$ possui um sutil abuso de notação. Porém, como estamos interessados em utilizar de forma direta o próximo resultado, não nos aprofundamos nesta definição. Para maiores detalhes, consultar [10].

Teorema 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\{u_k\}_k \subset X$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_j$ que converge fracamente para algum $u \in X$.*

Demonstração. (Ver [10], pg. 69, Teorema 3.18.) □

Definição 1.1.7 (Espaço uniformemente convexo). *Um espaço de Banach X é dito ser uniformemente convexo, se dado $\varepsilon > 0$, pode-se determinar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de tal maneira que*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta,$$

sempre que $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$.

Teorema 1.1.2 (Milman-Pettis). *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração. (Ver [10], pg. 77, Teorema 3.31.) □

Um outro tópico bastante utilizado neste trabalho, são as imersões contínuas e compactas, que serão definidas a seguir de forma genérica.

Definição 1.1.8 (Imersão Contínua e Compacta). *Dados dois espaços vetoriais normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, com $X \subseteq Y$, dizemos que X está imerso continuamente em Y, e denotaremos por $X \hookrightarrow Y$, se existir $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Além disso, tal imersão é compacta, se qualquer sequência limitada $\{u_k\}_k \subseteq X$ com respeito a norma $\|\cdot\|_X$ admite subsequência $\{u_{k_j}\}_j$ tal que $\|u_{k_j} - u\|_Y \to 0$, quando $j \to \infty$.

Teorema 1.1.3 (Composição de imersões). *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow Z$ imersões contínuas. As seguintes afirmações são válidas:*

(i) *$X \hookrightarrow Z$ é uma imersão contínua;*

(ii) *se $X \hookrightarrow Y$ é uma imersão compacta, então $X \hookrightarrow Z$ também é compacta;*

(iii) *se $Y \hookrightarrow Z$ é uma imersão compacta, então $X \hookrightarrow Z$ também é compacta.*

Demonstração. (Os itens (i) e (ii) seguem diretamente das definições. Para o item (iii), veja [10], pg. 159, Proposição 6.3) □

1.2 Resultados de Medida e Integração

Nesta seção, vamos considerar $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

Definição 1.2.1 (Convergência em "quase toda parte"). *Seja $\{u_k\}_k$ uma sequência de funções mensuráveis sobre X e $u : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que esta sequência converge em quase toda parte para u, em relação a μ, se existe um subconjunto $N \in \mathcal{M}$ com $\mu(N) = 0$ tal que*

$$u_k(x) \to u(x), \quad \textit{para cada } x \notin N.$$

Denota-se por $u_k(x) \to u(x)$, μ–q.t.p. em X, ou simplesmente, $u_k(x) \to u(x)$, q.t.p. em X.

Observação 1.2.1. *O conceito de "quase toda parte" se aplica a outras propriedades, como por exemplo, desigualdades. De forma mais específica, dizemos que $g(x) \leq h(x)$, q.t.p. em X, se existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ satisfazendo $g(x) \leq h(x)$, para $x \notin N$.*

A partir de agora, definiremos o espaço de Lebesgue e alguns de seus principais resultados.

Definição 1.2.2 (Espaço de Lebesgue). *Para cada $1 \leq p < \infty$, dizemos que $L^p(X)$ é o espaço de todas as funções f mensuráveis sobre X tais que*

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Ademais, $L^p(X)$ é um espaço vetorial equipado da seguinte norma:

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.2.1. *$L^p(X)$ é um espaço de Banach, quando $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. (Ver [10], pág. 93, Teorema 4.8). □

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$, com $1/p_1 + 1/p_2 = 1$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$ab \leq \frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2}.$$

Demonstração. (Ver [23], pg. 70). □

Teorema 1.2.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $1 < p_1, p_2 < \infty$, *com* $1/p_1 + 1/p_2 = 1$. *Se* $u \in L^{p_1}(X)$ *e* $v \in L^{p_2}(X)$, *então*

$$\|uv\|_{L^1(X)} \leq \|u\|_{L^{p_1}(X)} \|v\|_{L^{p_2}(X)},$$

isto é,

$$\int_X |uv| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_X |u|^{p_1} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_X |v|^{p_2} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Demonstração. (Ver [27], pg. 182). □

Finalmente, enunciaremos o famoso Teorema da Convergência Dominada.

Teorema 1.2.3 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja* $\{g_k\}_k$ *uma sequência em* $L^1(X)$. *Suponhamos que*

(a) $g_k(x) \to g(x)$, *q.t.p. em* X;

(b) *existe* $h \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|g_k(x)| \leq h(x)$, *q.t.p. em* X, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Então, $g \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. (Ver [27], pg. 54, Teorema 2.24). □

Agora, encerramos esta seção com a “recíproca” do Teorema da Convergência Dominada.

Teorema 1.2.4 (Teorema de Vainberg). *Seja* $\{f_k\}_k$ *uma sequência em* $L^p(X)$ *e* $f \in L^p(X)$ *tais que* $f_k \to f$ *em* $L^p(X)$, *com* $1 \leq p < \infty$. *Então existe uma subsequência* $\{f_{k_j}\}_j$ *e uma função* $h \in L^p(X)$ *tais que*

(a) $f_{k_j}(x) \to f(x)$, *q.t.p. em* X;

(b) $|f_{k_j}(x)| \leq h(x)$, *q.t.p. em* X, *para cada* $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (Ver [10], pg. 94, Teorema 4.9). □

1.3 Espaços de Sobolev

Antes de adentrarmos no conceito de derivação fraca, que é essencial para a abordagem de espaços de Sobolev, relembremos alguns conceitos.

Definição 1.3.1 (Funções de classe C^k). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Dizemos que f é de classe C^k em U e escrevemos $f \in C^k(U)$ ($1 \leq k < \infty$), se em cada ponto de U, f possui todas as derivadas parciais de ordem k e estas são contínuas em U. Além disso, dizemos que f é de classe C^∞ em U e escrevemos $f \in C^\infty(U)$, se $f \in C^k(U)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Diante do conceito de função de classe C^1, enunciemos a fórmula de integração por partes presente em [23, pg. 628].

Teorema 1.3.1 (Integração por partes). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se*

$$\int_U u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_U u v_{x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} u v \nu_i \,\mathrm{d}S,$$

em que $\nu = (\nu_1, \dots \nu_n)$ é o vetor normal unitária exterior a ∂U e u_{x_i} representa a $i$ésima derivada parcial de u.

A seguir, vamos definir uma classe de funções bem relevantes para este trabalho, que são as funções de suporte compacto.

Definição 1.3.2 (Função de suporte compacto). *Dizemos que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem suporte compacto em U, se o conjunto*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$$

for limitado em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.3.1 (Função contínua de suporte compacto é limitada). *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua de suporte compacto, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Daí, $\operatorname{supp}(f)$ é limitado. Em particular, $\operatorname{supp}(f)$ é compacto. Como f é contínua, existem $x_1, x_2 \in \operatorname{supp}(f)$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in \operatorname{supp}(f).$$

Em particular, f restrita a $\operatorname{supp}(f)$ é limitada. Em outras palavras,

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in \operatorname{supp}(f), \tag{1.3.1}$$

para algum $C > 0$. Por outro lado, desde que

$$\{x \in U : f(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp}(f),$$

fazendo uso da contrapositiva, se $x \notin \operatorname{supp}(f)$*, então* $f(x) = 0$*, e assim*

$$|f(x)| = 0 \leq C, \quad \forall x \notin \operatorname{supp}(f).$$

Portanto, isso combinado com (1.3.1)*, implica que*

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in U,$$

mostrando que f *é limitada*

Definição 1.3.3 (Funções de classe $C_0^\infty(U)$). *Quando uma função* f *é de classe* C^∞ *em* U *e possui suporte compacto, escrevemos* $f \in C_0^\infty(U)$*.*

Diante das definições acima, podemos enunciar as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e do Traço.

Teorema 1.3.2 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev no $\mathbb{R}_+^n$). *Seja* $n \geq 3$*. Então existe uma constante* $C = C(n) > 0$ *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |u|^{2^*} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

em que $2^* = 2n/(n-2)$*.*

Demonstração. (Ver [44], pg. 47, Lema 2.10.) □

Teorema 1.3.3 (Desigualdade do Traço). *Seja* $n \geq 3$*. Então existe uma constante* $C = C(n) > 0$ *tal que:*

$$\left(\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} |u|^{2_*} \, \mathrm{d}S \right)^{\frac{1}{2_*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

em que $2_* := 2(n-1)/(n-2)$*.*

Demonstração. (Ver [22], pg. 687, Teorema 1.) □

Antes de mencionar o espaço de Sobolev e alguns resultados essenciais, vamos definir derivada no sentido fraco.

Definição 1.3.4 (Derivada fraca). *Dado um aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *e uma função* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$*, dizemos que* $v_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ *é a* i*-ésima derivada parcial fraca de* u*, com* $i \in \{1, \dots, n\}$*, se*

$$\int_U u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = - \int_U v_i \varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U),$$

em que

$$L^1_{\text{loc}}(U) := \left\{ f : U \to \mathbb{R} : f \in L^1(B_R),\ \ \forall B_R \subset U \right\}, \quad B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}.$$

Neste caso, denota-se

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

A próxima definição contempla o conceito de espaço de Sobolev.

Definição 1.3.5 (Espaço de Sobolev). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$. Definimos o espaço de Sobolev $H^1(U)$ como sendo*

$$H^1(U) := \left\{ u \in L^2(U) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U),\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Este espaço é completo, quando equipado com a norma

$$\|u\|_{H^1(U)} := \left(\int_U \left[|\nabla u|^2 + u^2 \right] \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

em que

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n,$$

para $x \in U$.

Capítulo 2

Estrutura Variacional

Nesta seção, apresentaremos a prova da desigualdade de Sobolev com peso, que será uma ferramenta crucial para em seguida estabelecer resultados de imersão em espaços apropriados. Também, introduziremos o funcional energia associado ao problema $(\mathcal{P}_\lambda)$, o qual será utilizado como meio para buscar soluções, uma vez que ponto crítico deste funcional será solução do problema. Em relação ao funcional, estabeleceremos propriedades de regularidade, como por exemplo garantir que o mesmo é de classe C^1 sobre o espaço que será mencionado posteriormente, utilizando derivada de Gateaux.

2.1 Desigualdade de Sobolev com peso

Nesta subseção, abordaremos a desigualdade de Sobolev com peso presente em [42, Lema 2.1].

Teorema 2.1.1. *Sejam $n \geq 3$, $\alpha > 1$ e $2_* \leq p \leq 2^*$. Então existe $C = C(n, \alpha, p) > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1 + x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

com $2_* := 2(n-1)/(n-2)$ e $2^* := 2n/(n-2)$.

Demonstração. A demonstração será dividida em três partes.

Parte 1: Caso $p = 2_*$.

Considere $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e seja $\sigma \in \mathbb{R}$ com $\sigma \neq -1$. Com auxílio da integração por partes (veja Teorema 1.3.1), temos

$$
\begin{aligned}
(\sigma+1)\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|v|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n_+}(\sigma+1)(1+x_n)^\sigma|v|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+}((1+x_n)^{\sigma+1})_{x_n}|v|\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^{\sigma+1}(|v|)_{x_n}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^{\sigma+1}|v|\nu_n\,\mathrm{d}S,
\end{aligned}
$$

em que ν_n representa a n-ésima coordenada do vetor normal exterior $\nu = (0,0,\dots,-1)$ a $\partial\mathbb{R}^n_+$. Como $x_n = 0$ sobre $\partial\mathbb{R}^n_+$, temos que

$$
(\sigma+1)\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|v|\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^{\sigma+1}(|v|)_{x_n}\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|v|\,\mathrm{d}S.
$$

Aplicando o módulo e suas propriedades, temos que

$$
\begin{aligned}
|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|v|\,\mathrm{d}x &= |\sigma+1|\left|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|v|\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^{\sigma+1}|(|v|)_{x_n}|\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|v|\,\mathrm{d}S.
\end{aligned}
$$

Agora, considere que v seja da forma $v = |u|^\tau$, com $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\tau > 1$. Escolhendo $\sigma < -1$, é válido que $(1+x_n)^{\sigma+1} \leq 1$. Esse fato combinado com a última desigualdade implica que

$$
|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^\tau\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n_+}|(|u|^\tau)_{x_n}|\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^\tau\,\mathrm{d}S.
$$

Por outro lado, notando que o semi espaço $\mathbb{R}^n_+$ pode ser escrito como a união disjunta dos subconjuntos $A^+ := \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u(x) \geq 0\big\}$ e $A^- := \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u(x) < 0\big\}$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+}|(|u|^\tau)_{x_n}|\,\mathrm{d}x &= \int_{A^+}|(u^\tau)_{x_n}|\,\mathrm{d}x + \int_{A^-}|((-u)^\tau)_{x_n}|\,\mathrm{d}x \\
&= \tau\int_{A^+}|u|^{\tau-1}|u_{x_n}|\,\mathrm{d}x + \tau\int_{A^-}|u|^{\tau-1}|u_{x_n}|\,\mathrm{d}x = \tau\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\tau-1}|u_{x_n}|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Aplicando essa igualdade na última estimativa e usando que $|u_{x_n}| \leq |\nabla u|$ em $\mathbb{R}^n_+$, obtemos

$$
|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^\tau\,\mathrm{d}x \leq \tau\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\tau-1}|\nabla u|\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^\tau\,\mathrm{d}S.
$$

Agora, adotando $\tau = 2_*$ nesta estimativa, infere-se que

$$
|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^{2_*}\,\mathrm{d}x \leq 2_*\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{2_*-1}|\nabla u|\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{2_*}\,\mathrm{d}S.
$$

Notemos que

$$2_* - 1 = \frac{2(n-1)}{n-2} - 1 = \frac{2n-2-n+2}{n-2} = \frac{n}{n-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{n-2} = \frac{2^*}{2}.$$

Dessa forma, podemos reescrever a última desigualdade da seguinte maneira

$$|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^{2_*}\,\mathrm{d}x \le 2_*\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\frac{2^*}{2}}|\nabla u|\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{2_*}\,\mathrm{d}S.$$

Pela Desigualdade do Traço (ver Teorema 1.3.3), existe uma constante $C_1 = C_1(n) > 0$ tal que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{2_*}\,\mathrm{d}S \le C_1\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_*}{2}}.$$

Combinando as duas últimas estimativas, podemos concluir que

$$|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^{2_*}\,\mathrm{d}x \le 2_*\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\frac{2^*}{2}}|\nabla u|\,\mathrm{d}x + C_1\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_*}{2}}. \qquad (2.1.1)$$

Por outro lado, desde que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos concluir que as funções u e $|\nabla u|$ são contínuas e possuem suporte compacto. Sendo assim, aplicando Observação 1.3.1, segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$|u(x)| \le C_2 \quad e \quad |\nabla u(x)| \le C_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Como consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(|u|^{\frac{2^*}{2}}\right)^2\mathrm{d}x = \int_{B_R}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \le C_2^{2^*}|B_R| < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \le C_2^{2^*}|B_R| < \infty,$$

em que $|B_R|$ representa a medida da bola $n-$dimensional de centro 0 e raio R, cujo valor é $\omega_n R^n$, em que ω_n representa o valor da medida da esfera unitária $n-$dimensional. Portanto, $|u|^{\frac{2^*}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ e $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, o que permite aplicar a Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2), tomando $p_1 = p_2 = 2$, para obter que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\frac{2^*}{2}}|\nabla u|\,\mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, aplicando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (ver Teorema 1.3.2), obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\frac{2^*}{2}}\,|\nabla u|\,\mathrm{d}x \le C_3\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = C_3\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*+2}{4}}$$

Notando que

$$\frac{2^*+2}{4}=\frac{\frac{2n}{n-2}+2}{4}=\frac{\frac{4n-4}{n-2}}{4}=\frac{n-1}{n-2}=\frac{2(n-1)}{n-2}\frac{1}{2}=\frac{2_*}{2},$$

a última desigualdade pode ser escrita da seguinte maneira

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{\frac{2^*}{2}}|\nabla u|\,\mathrm{d}x\le C_3\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_*}{2}}.$$

Aplicando isso a (2.1.1), obtemos

$$\begin{aligned}|\sigma+1|\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^{2_*}\,\mathrm{d}x&\le 2_*C_3\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_*}{2}}+C_1\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_*}{2}}\\&=(2_*C_3+C_1)\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_*}{2}}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}(1+x_n)^\sigma|u|^{2_*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2_*}}\le C_4\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, considerando $\alpha=-\sigma>1$, tem-se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u|^{2_*}}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2_*}}\le C_4\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.2}$$

A parte 1 está finalizada.

Parte 2: Caso $p=2^*$.

Desde que $\alpha>1>0$, então $(1+x_n)^\alpha\ge 1$. Utilizando novamente o Teorema 1.3.2, temos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u|^{2^*}}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}}\le\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}}\le C_5\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.3}$$

Essa estimativa completa a parte 2.

Parte 3: Caso $2_*<p<2^*$.

Seja $2_*<p<2^*$. Dessa maneira, existe $0<\theta<1$ tal que $p=(1-\theta)\cdot 2_*+\theta\cdot 2^*$. Além disso, sejam $1<q_1,q_2<\infty$ com $1/q_1+1/q_2=1$, a serem escolhidos posteriormente. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u|^{(1-\theta)\cdot 2_*+\theta\cdot 2^*}}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{q_1}+\frac{\alpha}{q_2}}}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{|u|^{(1-\theta)\cdot 2_*}}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{q_1}}}\right)\left(\frac{|u|^{\theta\cdot 2^*}}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{q_2}}}\right)\mathrm{d}x.$$

Agora, podemos aplicar a Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2) para obter

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^{q_1\cdot(1-\theta)\cdot 2_*}}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^{q_2\cdot\theta\cdot 2^*}}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Podemos escolher $q_1 = 1/(1-\theta) > 1$ e $q_2 = 1/\theta > 1$, pois $1/q_1 + 1/q_2 = (1-\theta)+\theta = 1$. Com isso, obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^{2_*}}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^{2^*}}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\theta}.$$

E pelos resultados obtidos para os casos $p = 2_*$ e $p = 2^*$ (veja (2.1.2) e (2.1.3)), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x &\le C_6 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-\theta)2_*}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\theta\, 2^*}{2}} \\ &= C_6 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\theta\,(1-\theta)2_*+2^*}{2}}.\end{aligned}$$

Desde que $p = (1-\theta)\cdot 2_* + \theta\cdot 2^*$, adquirimos a seguinte estimativa

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x \le C_6 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}.$$

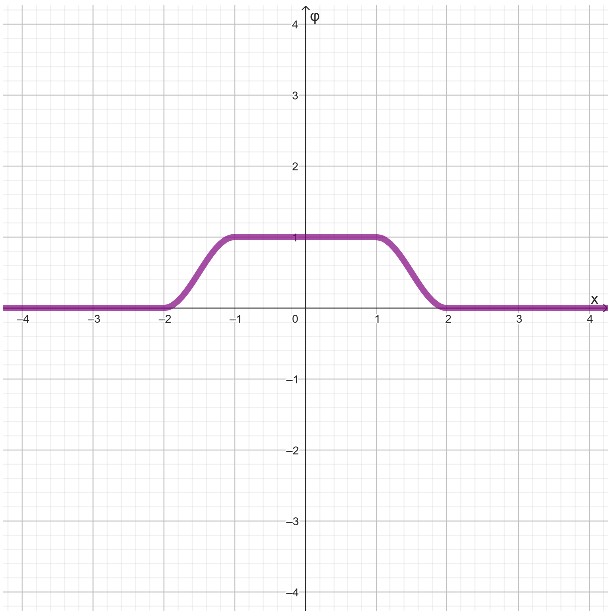
Portanto, a demonstração do resultado está encerrada. □

Na observação a seguir, vamos verificar que a desigualdade do Teorema 2.1.1 é falsa, quando $0 < p < 2_*$.

Observação 2.1.1. *Nas condições do Teorema 2.1.1, a condição $p \ge 2_*$ é necessária. Para verificar isso, primeiro considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se} \quad |x| \le 1, \\ 0, & \textit{se} \quad |x| \ge 2. \end{cases}$$

Um gráfico representativo desta função segue logo abaixo.



Em seguida, para um $t > 0$ qualquer, definamos $\varphi_t(x) := \varphi(x/t)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, temos que

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq t, \\ 0, & se \quad |x| \geq 2t. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Usando a regra da cadeia, obtém-se

$$\nabla \varphi_t(x) = \nabla \left(\varphi \left(\frac{x}{t} \right) \right) = \frac{1}{t} \nabla \varphi \left(\frac{x}{t} \right).$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \varphi_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \nabla \varphi \left(\frac{x}{t} \right) \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Fazendo uso da mudança de variável $y = x/t$, temos $t^n \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Sendo assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \varphi_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x = t^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \varphi(y)|^2 \, \mathrm{d}y = C_1 t^{n-2}, \tag{2.1.5}$$

em que C_1 é uma constante que depende da função φ fixada. Por outro lado, definamos

$$\mathcal{A} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \, ; \, |x'| \leq \frac{t}{\sqrt{2}} \ \ e \ \ 0 < x_n < \frac{t}{\sqrt{2}} \right\},$$

em que $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Dessa maneira,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\varphi_t(x)|^p}{(1 + x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x \geq \int_{\mathcal{A}} \frac{|\varphi_t(x)|^p}{(1 + x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x.$$

Note que, se $x \in \mathcal{A}$, temos

$$|x| = \sqrt{|x'|^2 + x_n^2} \leq \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{t^2} = t.$$

Dessa forma, por (2.1.4)*, podemos concluir que $\varphi_t(x) = 1$, para qualquer $x \in \mathcal{A}$. Portanto, a penúltima estimativa infere que*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\varphi_t(x)|^p}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x \geq \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \int_{|x'| \leq \frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x_n.$$

Prosseguindo com o cálculo,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\varphi_t(x)|^p}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x \geq \left(\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x_n \right) \left(\int_{|x'| \leq \frac{t}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x' \right) = C_2 t^{n-1} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x_n.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x_n = \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} (1+x_n)^{-\alpha} \, \mathrm{d}x_n &= \frac{(1+x_n)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \Big|_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^{1-\alpha} - 1 \right). \end{aligned}$$

Aplicando essa igualdade na última estimativa, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\varphi_t(x)|^p}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x \geq \frac{C_2 t^{n-1}}{\alpha - 1} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^{1-\alpha} \right).$$

Agora, suponha por contradição que o Teorema 2.1.1 seja válido para $p < 2_*$. Ou seja, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\varphi_t|^p}{(1+x_n)^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \varphi_t|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Combinando as duas últimas desigualdades com (2.1.5)*, conclui-se que*

$$\frac{C_2 t^{n-1}}{\alpha - 1} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^{1-\alpha} \right) \leq C_3 \left(C_1 t^{n-2} \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Com isso,

$$1 - \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^{1-\alpha} \leq \frac{C_3(\alpha - 1)}{C_2} t^{\frac{p(n-2)}{2} - (n-1)}. \tag{2.1.6}$$

Observe que

$$\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{1-\alpha}=\left(\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}}\right)^{1-\alpha}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+t}\right)^{\alpha-1}\to 0,$$

quando $t\to\infty$*, pois* $\alpha>1$*. Além disso,*

$$p<2_*\Rightarrow p<\frac{2(n-1)}{n-2}\Rightarrow p(n-2)-2(n-1)<0\Rightarrow \frac{p(n-2)}{2}-(n-1)<0.$$

Aplicando esta desigualdade e a convergência acima em (2.1.6)*, infere-se que* $1\leq 0$*, que é um absurdo. Portanto, a condição* $p\geq 2_*$ *é necessária.*

2.2 Imersões de Sobolev com peso

Nesta subseção, será introduzido o espaço para se buscar soluções para o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$. Além disso, será abordada algumas imersões deste espaço em espaços de Lebesgue com peso.

Inicialmente, definamos o espaço E como sendo o completamento das funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, com respeito a norma

$$\|u\|_*:=\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}+\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n_+)}\right)^{1/2}.$$

Esta definição já garante que E é Banach, com $E:=\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_*}$. Para mais detalhes, consultar [29, Teorema 1.6-2]. Além disso, para garantir que E é reflexivo, basta notar que E é uniformemente convexo e aplicar o Teorema 1.1.2. A demonstração de ser uniformemente convexo é análogo ao feito para os espaços de Lebesgue (confira [10, Teorema 4.10]) e assim será suprimida. Portando, daqui em diante o espaço E já será admitido Banach e reflexivo.

O corolário a seguir estende a desigualdade do Teorema 2.1.1 para as funções em E.

Corolário 2.2.1. *Sejam* $n\geq 3$*,* $\alpha>1$ *e* $2_*\leq p\leq 2^*$*. Então existe* $C=C(n,\alpha,p)>0$ *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall u\in E.$$

Demonstração. Seja $u\in E$. Usando a definição do espaço E, existe uma sequência $\{u_k\}_k\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u_k-u\|_*\to 0$, quando $k\to\infty$. Pelo Teorema 2.1.1,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u_k-u_m|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla(u_k-u_m)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}\|(1+x_n)^{-\alpha/p}(u_k-u_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\left|\frac{u_k-u_m}{(1+x_n)^{\alpha/p}}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\|\nabla(u_k-u_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|u_k-u_m\|_*.\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Dessa forma, a sequência $\left\{(1+x_n)^{-\alpha/p}u_k\right\}_k$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Como $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ é de Banach (veja Teorema 1.2.1), em particular é completo. Com isso, a menos de subsequência, podemos inferir que $(1+x_n)^{-\alpha/p}u_k \to v$ em $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Em particular, pelo Teorema 1.2.4, temos que $u_k \to (1+x_n)^{\alpha/p}v$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$.

Por outro lado, $\|u_k-u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|u_k-u\|_* \to 0$, quando $k\to\infty$, ou seja $u_k \to u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^n_+)$. Isso acarreta que $u_k \to u$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$, e por unicidade de limite, $u = (1+x_n)^{\alpha/p}v$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$.

Assim, por meio de (2.2.1), pode-se concluir que

$$\|(1+x_n)^{-\alpha/p}u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Fazendo o limite $k\to\infty$, tem-se

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Portanto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|v|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

encerrando a demonstração. $\square$

Em vista do Corolário 2.2.1, daqui por diante vamos considerar o espaço $\widetilde{E} := (E, \|\cdot\|_E)$, em que

$$\|u\|_E := \left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Em outras palavras, $\widetilde{E}$ é o próprio E, porém munido com a norma acima. Com o intuito de não carregar o trabalho de notação, por simplicidade, denotaremos este espaço por E.

Para abordar resultados de imersão envolvendo o espaço E, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.2.1 (Espaço de Lebesgue com peso). *Para cada $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue com peso da seguinte forma*

$$L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right) := \left\{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+) : \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p\,\mathrm{d}x < \infty\right\},$$

com respeito a norma

$$\|u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+,a\right)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vale mencionar que esta definição serve para as demais funções peso que aparecem ao longo do trabalho.

O corolário a seguir é o primeiro resultado de imersão.

Corolário 2.2.2. *Sejam $n \geq 3$ e $\alpha > 1$. Então $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, (1+x_n)^{-\alpha}\right)$ é uma imersão contínua, para qualquer $2_* \leq p \leq 2^*$.*

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 2.2.1. □

No próximo lema, obtemos mais resultados de imersão, considerando as hipóteses (H_1) ou $(\widetilde{H}_1)$.

Lema 2.2.1 (Imersões de E em $L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$). *Seja $n \geq 3$. Então os seguintes itens são válidos:*

(i) *a imersão $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é contínua, se $2_* \leq p \leq 2^*$, desde que (H_1) (ou $(\widetilde{H}_1)$) seja válida;*

(ii) *a imersão $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é compacta, se $2_* \leq p < 2^*$, desde que $(\widetilde{H}_1)$ seja válida;*

(iii) *a imersão $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é contínua, se $2 \leq p \leq 2^*$, desde que $(\widetilde{H}_1)$ seja válida com $\alpha > 2$;*

(iv) *a imersão $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é compacta, se $2 \leq p < 2^*$, desde que $(\widetilde{H}_1)$ seja válida com $\alpha > 2$.*

Demonstração. item (i):

Pela hipótese (H_1), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$0 \leq a(x) \leq \frac{C_1}{(1+x_n)^{\alpha}},$$

q.t.p. para $x \in \mathbb{R}^n_+$. Esta estimativa combinada com o Corolário 2.2.1 implica que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^{\alpha}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, ao se assumir a hipótese $(\widetilde{H}_1)$, tem-se que existe $C_3 > 0$ tal que

$$0 \leq a(x) \leq \frac{C_3}{(1+|x|)^\alpha}$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$. Desde que $1/(1+|x|)^\alpha \leq 1/(1+x_n)^\alpha$, tem-se que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_3^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+|x|)^\alpha} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{(1+x_n)^\alpha} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

e a prova do item (i) está completa.

item (ii):

Para provar o item (ii), primeiramente considere $\{u_k\}_k \subset E$ uma sequência limitada com respeito a norma $\|\cdot\|_E$. Desde que E é reflexivo, a menos de subsequência, tem-se que $u_k \rightharpoonup u$ em E (veja Teorema 1.1.1). Agora, tomando $R > 0$ a ser determinado, temos a seguinte expressão

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x = \int_{B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x, \tag{2.2.2}$$

em que $B_R^+ := \mathbb{R}^n_+ \cap B_R$. Primeiramente, vamos estimar a integral em B_R^+. Com esse intuito, vamos verificar que $E \hookrightarrow H^1(B_R^+)$. Para isso, considere $1 < q_1, q_2 < \infty$, com $1/q_1 + 1/q_2 = 1$, a serem escolhidos de forma conveniente. Aplicando a Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2), obtemos que

$$\int_{B_R^+} u^2 \,\mathrm{d}x = \int_{B_R^+} 1 \cdot u^2 \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{B_R^+} 1^{q_1} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_{B_R^+} |u|^{2q_2} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_2}} = C_5 \left(\int_{B_R^+} |u|^{2q_2} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Escolhendo $q_2 = 2^*/2 > 1$ e usando o Teorema 1.3.2, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{B_R^+} u^2 \,\mathrm{d}x &\leq C_5 \left(\int_{B_R^+} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C_6 \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= C_6 \|u\|_E^2.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{B_R^+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \|u\|_E^2.$$

As duas últimas desigualdades implicam que $\|u\|_{H^1(B_R^+)} \leq C_7\|u\|_E$, e portanto a imersão $E \hookrightarrow H^1(B_R^+)$ é contínua. Usando o mesmo argumento presente em [42] (na demonstração do Lema 2.3), obtêm-se a imersão compacta

$$E \hookrightarrow L^p(B_R^+), \tag{2.2.3}$$

para todo $1 \leq p < 2^*$, e consequentemente $u_k \to u$ em $L^p(B_R^+)$. Isto combinado com $(\widetilde{H}_1)$ assegura que

$$\int_{B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq C_8 \int_{B_R^+} \frac{|u_k - u|^p}{(1+|x|)^\alpha} \,\mathrm{d}x \leq C_8 \int_{B_R^+} |u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \to 0, \tag{2.2.4}$$

quando $k \to \infty$.

Agora, para estimar a integral sobre $\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+$, considere $1 < \beta < \alpha$. Notando que

$$\frac{(1+x_n)^\beta}{(1+|x|)^\alpha} \leq \frac{(1+|x|)^\beta}{(1+|x|)^\alpha} = \frac{1}{(1+|x|)^{\alpha-\beta}} \to 0,$$

quando $|x| \to \infty$, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos escolher um $R > 0$ suficientemente grande de forma que, para $|x| > R$, tem-se

$$\frac{(1+x_n)^\beta}{(1+|x|)^\alpha} \leq \varepsilon.$$

Por $(\widetilde{H}_1)$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq C_9 \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \frac{|u_k - u|^p}{(1+|x|)^\alpha} \,\mathrm{d}x &= C_9 \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \frac{|u_k - u|^p}{(1+x_n)^\beta} \frac{(1+x_n)^\beta}{(1+|x|)^\alpha} \,\mathrm{d}x \\ &\leq C_9 \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \frac{|u_k - u|^p}{(1+x_n)^\beta} \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para concluir, vamos usar o Corolário 2.2.2 (substituindo $\alpha > 1$ por $\beta > 1$), para obter que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \frac{|u_k - u|^p}{(1+x_n)^\beta} \,\mathrm{d}x \leq C_9 \|u_k - u\|_E^p.$$

Desde que $\{u_k\}_k \subseteq E$ é uma sequência limitada com respeito a norma $\|\cdot\|_E$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq C_{10}\varepsilon.$$

Finalmente esta desigualdade combinada com (2.2.4) e (2.2.2) finaliza a prova do item (ii).

item (iii):

Primeiramente provaremos a continuidade da imersão, quando $p = 2$. Para fazer isso, note que por $(\widetilde{H}_1)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)u^2 \,\mathrm{d}x \leq C_{11} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u^2}{(1+|x|)^\alpha} \,\mathrm{d}x.$$

Pela Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)u^2 \,\mathrm{d}x \leq C_{11} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{2q_1} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(1+|x|)^{\alpha q_2}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_2}},$$

com $1/q_1 + 1/q_2 = 1$. Escolhendo $q_1 = 2^*/2 > 1$, obtemos que

$$\frac{2}{2^*} + \frac{1}{q_2} = 1 \iff \frac{1}{q_2} = 1 - \frac{2}{2^*} = 1 - \frac{2(n-2)}{2n} = 1 - \frac{n-2}{n} = \frac{n-n+2}{n} = \frac{2}{n},$$

ou seja, $q_2 = n/2$. Como consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)u^2 \,\mathrm{d}x \leq C_{11} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{n}}. \tag{2.2.5}$$

Agora, vamos estimar a segunda integral do lado direito dessa última desigualdade. Note que para $R > 0$, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x = \int_{B_R} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x.$$

Desde que $1/(1+|x|)^{n\alpha/2} \leq 1$ e $1/(1+|x|)^{n\alpha/2} \leq 1/|x|^{n\alpha/2}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x \leq \int_{B_R} \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{1}{|x|^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x = |B_R| + \omega_n \int_R^\infty \frac{1}{s^{\frac{n\alpha}{2}}} s^{n-1} \,\mathrm{d}s,$$

onde ω_n representa a medida da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Notando $n - 1 - n\alpha/2 + 1 = n - n\alpha/2 < 0$, pois $\alpha > 2$, podemos concluir que

$$\int_R^\infty \frac{1}{s^{\frac{n\alpha}{2}}} s^{n-1} \, ds = \int_R^\infty s^{n-1-\frac{n\alpha}{2}} \, ds = \frac{R^{n-\frac{n\alpha}{2}}}{-\left(n - \frac{n\alpha}{2}\right)} < \infty.$$

Aplicando esse fato na última desigualdade, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n\alpha}{2}}} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Isso juntamente com (2.2.5) e o Teorema 1.3.2 implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)u^2 \,\mathrm{d}x \leq C_{12} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = C_{12} \|u\|_E^2.$$

Dessa forma, a imersão $E \hookrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é contínua, quando $\alpha > 2$. O caso $p = 2^*$ é análogo e por isso omitiremos.

Similarmente ao que foi feito no Teorema 2.1.1 (**Parte 3**), através de interpolação tem-se que a imersão $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é contínua, para $2 \leq p \leq 2^*$, quando $\alpha > 2$, e isso finaliza a prova do item (iii).

item (iv):

A compacidade do item (iv) é análoga a demonstração do item (ii), e portanto omitiremos os detalhes. Sendo assim, a demonstração desse lema está finalizada. □

Finalmente, definiremos o espaço em que buscaremos soluções para o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$. Considere o seguinte subespaço de E

$$E^q := \left\{ u \in E \ : \ \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$

com respeito a norma

$$\|u\|_{E^q} := \left(\|u\|_E^2 + \|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n_+, b)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.6}$$

Por argumento análogo ao que foi feito para o espaço E, temos que E^q é um espaço de Banach reflexivo.

O próximo resultado estabelece imersão do espaço E^q no espaço de Lebesgue com peso $L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$.

Lema 2.2.2 (Imersão de E^q em $L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$). *Seja $n \geq 3$. Então os seguintes itens são válidos:*

- (i) *a imersão $E^q \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é contínua, se $2_* \leq p \leq 2^*$, desde que (H_1) (ou $(\widetilde{H}_1)$) seja válida;*
- (ii) *a imersão $E^q \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é compacta, se $2_* \leq p < 2^*$ e $q > p$, desde que (H_1) e (H_2) sejam válidas.*

Demonstração. item (i):

O item (i) do Lema 2.2.1 garante a imersão contínua $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$, ou seja, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)} \leq C_1 \|u\|_E, \quad \forall u \in E^q \subset E. \tag{2.2.7}$$

Agora note que, pela definição da norma em (2.2.6), para $u \in E^q$, tem-se

$$\|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \leq \|u\|^2_{E^q}.$$

Ou seja, $E^q \hookrightarrow E$, naturalmente. Juntando isso com (2.2.7), obtemos portanto que

$$\|u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)} \leq C_1 \|u\|_{E^q},$$

e assim a imersão $E^q \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ é contínua. A prova do item (i) está completa.

<u>item (ii):</u>

Para provar a compacidade, considere $\{u_k\}_k \subseteq E^q$ uma sequência limitada com respeito a norma $\|\cdot\|_{E^q}$. Desde que E^q é reflexivo, a menos de subsequência, tem-se que $u_k \rightharpoonup u$ em E^q (veja Teorema 1.1.1). Para um $R > 0$, a ser escolhido posteriormente, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x = \int_{B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x, \tag{2.2.8}$$

em que $B_R^+ := \mathbb{R}^n_+ \cap B_R$. De forma análoga ao que foi feito em (2.2.4), desde que $E^q \hookrightarrow E$, pode-se deduzir que

$$\int_{B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \to 0, \quad \text{se } \ k \to \infty. \tag{2.2.9}$$

Para estimar a segunda integral do lado direito em (2.2.8), considere $q_1 \in \mathbb{R}$ a ser determinado e escreva

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \frac{a(x)}{b^{q_1}(x)} b^{q_1}(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x.$$

Considerando também $1 < q_2, q_3 < \infty$ com $1/q_2 + 1/q_3 = 1$, ambos a serem escolhidos posteriormente. Aplicando a Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2) na igualdade acima, conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \left(\frac{a(x)}{b^{q_1}(x)} \right)^{q_2} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \left(b^{q_1}(x)|u_k - u|^p \right)^{q_3} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_3}}.$$

Para usar a hipótese (H_2), tomaremos

$$q_2 = \frac{q}{q-p} \quad \text{e} \quad q_1 q_2 = \frac{p}{q-p} \qquad \Longrightarrow \qquad q_1 = \frac{p}{q}.$$

Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq D(R) \left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \left(b^{q_1}(x)|u_k - u|^p \right)^{q_3} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_3}},$$

em que

$$D(R) := \left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} \frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Agora, note que

$$\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1 \implies q_3 = \frac{q_2}{q_2 - 1} \implies q_3 = \frac{\frac{q}{q-p}}{\frac{q}{q-p} - 1} \implies q_3 = \frac{q}{p} > 1.$$

Como consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq D(R) \left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} b(x)|u_k - u|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{q}} \leq D(R)\|u_k - u\|_{E^q}^p.$$

Usando os fatos que $\{u_k\} \subseteq E^q$ é uma sequência limitada com respeito a norma $\|\cdot\|_{E^q}$ e $D(R) \to 0$, quando $R \to \infty$, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B_R^+} a(x)|u_k - u|^p \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon,$$

para algum $R > 0$ suficientemente grande. Esta estimativa combinada com (2.2.8) e (2.2.9) finaliza a prova do resultado. $\square$

2.3 Funcional associado ao problema $(\mathcal{P}_\lambda)$

Nesta subseção, vamos introduzir o funcional associado ao problema $(\mathcal{P}_\lambda)$, garantindo que o mesmo é de classe C^1 sobre o espaço E^q. Ressaltamos que tal funcional é associado ao problema em questão, pois seus pontos críticos são soluções fracas de $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Inicialmente, vamos motivar a definição de **solução fraca** para o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$. Suponha que u é solução do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ no sentido clássico, ou seja, é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ em que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= \lambda a(x)|u(x)|^{p-2}u(x) - b(x)|u(x)|^{q-2}u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall x \in \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Vale ressaltar que

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu = -\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = -u_{x_n},$$

em que usamos que $\nu = (0, 0, \ldots, -1)$. Em seguida, considere uma função arbitrária $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Multiplicando os termos da primeira equação do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ por φ e integrando em $\mathbb{R}^n_+$, obtém-se

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} \Delta u \varphi \,\mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^{p-2}u\varphi \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{2.3.1}$$

Pelo Teorema 1.3.1, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} u_{x_i x_i} \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+} (u_{x_i})_{x_i} \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+} u_{x_i} \varphi_{x_i} \, \mathrm{d}x - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u_{x_i} \varphi \nu_i \, \mathrm{d}S.$$

Fazendo o somatório, tem-se

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} u_{x_i x_i} \varphi \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} u_{x_i} \varphi_{x_i} \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} (u_{x_i} \nu_i) \varphi \, \mathrm{d}S,$$

donde

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n_+} \Delta u \varphi \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} (\nabla u \cdot \nu) \varphi \, \mathrm{d}S \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi \, \mathrm{d}S = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - 0 = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Esta igualdade e (2.3.1) implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x) |u|^{p-2} u \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u|^{q-2} u \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Diante destes cálculos, vamos definir solução fraca.

Definição 2.3.1 (Solução fraca). *Dizemos que $u \in E^q$ é solução fraca do problema ($\mathcal{P}_\lambda$), se dado qualquer $\varphi \in E^q$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x) |u|^{p-2} u \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u|^{q-2} u \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2.3.2}$$

A partir de agora, nosso intuito é definir uma aplicação $I : E^q \to \mathbb{R}$ que possua derivada relacionada com a expressão (2.3.2). Para isso, vamos introduzir o conceito de derivada de funcionais sobre espaços de Banach.

Definição 2.3.2. (Derivada de Gateaux) *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ se existe $T_u \in X'$ tal que*

$$T_u v = \lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t}, \quad \forall v \in X.$$

Vale lembrar que $T_u \in X'$, significa que $T_u : X \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear tal que

$$|T_u v| \leq C \|v\|_X, \quad \forall v \in X,$$

para algum $C > 0$ que depende de T_u. A derivada de Gateaux quando existe, é única, e será denotada por $T_u = I'(u)$.

Definição 2.3.3 (Funcional de classe C^1 em espaço de Banach). *Sejam um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que I é de classe C^1 em X, e denota-se por $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, se:*

(i) a derivada de Gateaux $I'(u)$ existe para todo $u \in X$;

(ii) a derivada de Gateaux I' é contínua em X, ou seja, dada $\{u_k\}_k \subset X$ tal que $\|u_k - u\|_X \to 0$, quando $k \to \infty$, então $\|I'(u_k) - I'(u)\|_{X'} \to 0$, se $k \to \infty$. Neste caso,

$$\|I'(u)\|_{X'} := \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{|I'(u)v|}{\|v\|_X}.$$

Diante destes conceitos, verificaremos que o funcional $I_\lambda : E^q \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \, \mathrm{d}x, \tag{2.3.3}$$

está associado ao problema $(\mathcal{P}_\lambda)$. Antes, precisaremos do lema auxiliar a seguir.

Lema 2.3.1. *Sejam $y, z \in \mathbb{R}$ e $q \geq 2$. Então existe uma constante $C = C(q) > 0$ tal que*

$$\left| |z|^{q-2}z - |y|^{q-2}y \right| \leq C|z - y|(|z| + |y|)^{q-2}.$$

Demonstração. O caso $y = 0$ ou $z = 0$ é imediato. Sendo assim, considere $y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixados.

Se $q = 2$, a desigualdade torna-se

$$|z - y| \leq C|z - y|,$$

e então basta tomar $C = 1$.

Se $q > 2$, considere a função $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = |y + t(z - y)|^{q-2} \, (y + t(z - y)).$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) \, \mathrm{d}t,$$

que implica na seguinte estimativa

$$|g(1) - g(0)| = \left| \int_0^1 g'(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 |g'(t)| \mathrm{d}t. \tag{2.3.4}$$

Por cálculo direto, tem-se

$$g(0) = |y|^{q-2}y \quad \text{e} \quad g(1) = |z|^{q-2}z. \tag{2.3.5}$$

Caso $y + t(z - y) \geq 0$, então $g(t) = (y + t(z - y))^{q-1}$ e, nesse caso, derivando a função g com respeito a t, segue que

$$g'(t) = (q-1)\left(y + t(z-y)\right)^{q-2}(z-y) = (q-1)(z-y)\left|y + t(z-y)\right|^{q-2}.$$

Caso $y + t(z - y) < 0$, então $g(t) = -\left(-(y + t(z - y))\right)^{q-1}$, e daí

$$g'(t) = -(q-1)\left(-(y + t(z-y))\right)^{q-2}(-(z-y)) = (q-1)(z-y)\left|y + t(z-y)\right|^{q-2}.$$

Em ambos os casos,

$$g'(t) = (q-1)(z-y)\left|y + t(z-y)\right|^{q-2},$$

e com isso

$$|g'(t)| = (q-1)|z-y|\left|y + t(z-y)\right|^{q-2}. \tag{2.3.6}$$

Por outro lado, para $t \in [0, 1]$, note que

$$|y + t(z-y)| \leq |y| + t|z-y| \leq |y| + |z-y| \leq |y| + |z| + |y| \leq 2(|z| + |y|).$$

Aplicando essa última estimativa a (2.3.6), tem-se

$$|g'(t)| \leq 2^{q-2}(q-1)|z-y|(|z| + |y|)^{q-2}. \tag{2.3.7}$$

Substituindo (2.3.7) e (2.3.5) em (2.3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \left||z|^{q-2}z - |y|^{q-2}y\right| &\leq \int_0^1 2^{q-2}(q-1)|z-y|(|z| + |y|)^{q-2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2^{q-2}(q-1)|z-y|(|z| + |y|)^{q-2}. \end{aligned}$$

Tomando $C = 2^{q-2}(q-1)$, o resultado segue. $\square$

Agora estamos aptos a mostrar que o funcional $I_\lambda(u)$ é de classe C^1.

Lema 2.3.2. *Seja $2_* \leq p \leq 2^*$ e assuma a hipótese (H_1) (ou $(\widetilde{H}_1)$). O funcional I_λ definido em (2.3.3) satisfaz as seguintes condições:*

(i) $|I_\lambda(u)| < \infty$, para todo $u \in E^q$, ou seja, o funcional está bem definido;

(ii) $I_\lambda \in C^1(E^q, \mathbb{R})$, com

$$I'_\lambda(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^{p-2}u\varphi \,\mathrm{d}x, \tag{2.3.8}$$

para quaisquer $u, \varphi \in E^q$.

Demonstração. Para provar o item (i), note que

$$
\begin{aligned}
|I_\lambda(u)| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right| + \frac{1}{q}\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x\right| + \frac{\lambda}{p}\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
|I_\lambda(u)| &\leq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} + \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|u\|_{E^q}^2 + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} + \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} < \infty,
\end{aligned}
$$

em que usamos a imersão contínua $E^q \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n_+, a)$ (veja Lema 2.2.2, item (i)).

Para provar o item (ii), consideremos os funcionais $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3 : E^q \to \mathbb{R}$ dados por

$$
\mathcal{I}_1(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{I}_2(u) := \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{I}_3(u) := \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x.
$$

A seguir, dividiremos a demonstração em três partes.

Parte (1): Mostrar que $\mathcal{I}_1 \in C^1(E^q, \mathbb{R})$.

Para $u, \varphi \in E^q$, podemos calcular

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{I}_1(u+t\varphi) - \mathcal{I}_1(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla(u+t\varphi)|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(t\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\right) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Agora pela Desigualdade de Hölder (conferir Teorema 1.2.2), temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \varphi|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_E \|\varphi\|_E \\
&\leq \|u\|_{E^q}\|\varphi\|_{E^q} = C_1\|\varphi\|_{E^q}.
\end{aligned}
$$

Sendo assim $\mathcal{I}_1'(u) \in (E^q)'$ existe e

$$
\mathcal{I}_1'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x.
$$

Neste caso, não verificamos a linearidade, por ser direta.

Em seguida, considere $\|u_k - u\|_{E^q} \to 0$, quando $k \to \infty$. Para cada $\varphi \in E^q$, com auxílio do Desigualdade de Hölder, presente no Teorema 1.2.2, temos que

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_1'(u_k)\varphi - \mathcal{I}_1'(u)\varphi| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u_k \nabla\varphi \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\right| \le \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla(u_k - u)||\nabla\varphi| \,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla(u_k - u)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= \|u_k - u\|_E \|\varphi\|_E \le \|u_k - u\|_{E^q}\|\varphi\|_{E^q}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{I}_1'(u_k) - \mathcal{I}_1'(u)\|_{(E^q)'} = \sup_{\varphi \in E^q \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{I}_1'(u_k)\varphi - \mathcal{I}_1'(u)\varphi|}{\|\varphi\|_{E^q}} \le \|u_k - u\|_{E^q} \to 0,$$

se $k \to \infty$. Logo, $\mathcal{I}_1'(u_k) \to \mathcal{I}_1'(u)$ em $(E^q)'$ quando $u_k \to u$ em E^q e, portanto, $\mathcal{I}_1'$ é contínuo, completando a Parte (1).

Parte (2): Mostrar que $\mathcal{I}_2 \in C^1(E^q, \mathbb{R})$.

Dado $u \in E^q$, vamos verificar que, para qualquer $\varphi \in E^q$, tem-se

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{I}_2(u + t\varphi) - \mathcal{I}_2(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Neste caso, será mais conveniente usar a caracterização de limites, isto é, qualquer sequência $\{t_k\}_k \subset \mathbb{R}$ tal que $t_k \to 0$, se $k \to \infty$ implica que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathcal{I}_2(u + t_k\varphi) - \mathcal{I}_2(u)}{t_k} = \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Note que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathcal{I}_2(u + t_k\varphi) - \mathcal{I}_2(u)}{t_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{t_k}\left(\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)\left(|u + t_k\varphi|^q - |u|^q\right) \,\mathrm{d}x\right). \tag{2.3.9}$$

A partir daqui, nosso intuito é usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 1.2.3) para passar o limite "para dentro" da integral. Seja $\{t_k\}_k \subset \mathbb{R}$ tal que $t_k \to 0$, se $k \to \infty$. A menos de subsequência, para cada $0 < |t_k| < 1$ fixado, considere a função $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(s) = \frac{1}{q}b(x)|u(x) + st_k\varphi(x)|^q.$$

Perceba que

$$f_k(0) = \frac{1}{q}b(x)|u(x)|^q \quad \text{e} \quad f_k(1) = \frac{1}{q}b(x)|u(x) + t_k\varphi(x)|^q.$$

Derivando a função f_k com respeito a s, caso $u(x) + st_k\varphi(x) \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} f_k'(s) &= b(x)(u(x) + st_k\varphi(x))^{q-1}(t_k\varphi(x)) \\ &= b(x)(u(x) + st_k\varphi(x))^{q-2}(u(x) + st_k\varphi(x))(t_k\varphi(x)) \\ &= b(x)|u(x) + st_k\varphi(x)|^{q-2}(u(x) + st_k\varphi(x))t_k\varphi(x). \end{aligned}$$

Se $u(x) + st_k\varphi < 0$, então $f_k(s) = \frac{1}{q}b(x)(-(u(x) + st_k\varphi(x)))^q$, e daí

$$\begin{aligned} f_k'(s) &= b(x)(-(u(x) + st_k\varphi(x)))^{q-1}(-t_k\varphi(x)) \\ &= b(x)(-(u(x) + st_k\varphi(x)))^{q-2}(-(u(x) + st_k\varphi(x)))(-t_k\varphi(x)) \\ &= b(x)|u(x) + st_k\varphi(x)|^{q-2}(u(x) + st_k\varphi(x))t_k\varphi(x). \end{aligned}$$

Em ambos os casos,

$$f_k'(s) = b(x)|u(x) + st_k\varphi(x)|^{q-2}(u(x) + st_k\varphi(x))t_k\varphi(x).$$

Desde que f_k é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, para obter $c_k \in (0, 1)$ tal que

$$f_k(1) - f_k(0) = f_k'(c_k)(1 - 0).$$

Donde,

$$\frac{1}{q}b(x)|u(x) + t_k\varphi(x)|^q - \frac{1}{q}b(x)|u(x)|^q = b(x)|u(x) + c_kt_k\varphi(x)|^{q-2}(u(x) + c_kt_k\varphi(x))t_k\varphi(x).$$

Dividindo todos os termos por t_k, podemos concluir a seguinte relação

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}b(x)\left(\frac{|u(x) + t_k\varphi(x)|^q - |u(x)|^q}{t_k}\right) &= b(x)|u(x) + c_kt_k\varphi(x)|^{q-2} \\ &\quad \cdot (u(x) + c_kt_k\varphi(x))\varphi(x). \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Agora vamos verificar o item (a) do Teorema 1.2.3, com

$$g_k(x) = b(x)|u(x) + c_kt_k\varphi(x)|^{q-2}(u(x) + c_kt_k\varphi(x))\varphi(x) \tag{2.3.11}$$

e

$$g(x) = b(x)|u(x)|^{q-2}u(x)\varphi(x), \tag{2.3.12}$$

Fixando $x \in \mathbb{R}^n_+$, desde que $t_k \to 0$, se $k \to \infty$, de forma direta obtém-se $g_k(x) \to g(x)$. Em particular converge q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$.

Para verificar o item (b) do Teorema 1.2.3, usando que $|t_k|, c_k < 1$, obtemos

$$|g_k(x)| \leq b(x)(|u(x)| + c_k|t_k||\varphi(x)|)^{q-1}|\varphi(x)| \leq b(x)(|u(x)| + |\varphi(x)|)^{q-1}|\varphi(x)|.$$

Pela desigualdade,

$$(|u(x)|+|\varphi(x)|)^{q-1} \leq (2\max\{|u(x)|,|\varphi(x)|\})^{q-1} \leq 2^{q-1}(|u(x)|^{q-1}+|\varphi(x)|^{q-1}),$$

podemos assegurar que

$$|g_k(x)| \leq 2^{q-1}b(x)|u(x)|^{q-1}|\varphi(x)| + 2^{q-1}b(x)|\varphi(x)|^q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Considerando $h(x) := 2^{q-1}b(x)|u(x)|^{q-1}|\varphi(x)| + 2^{q-1}b(x)|\varphi(x)|^q$, mostraremos que $h \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. Por um lado, em relação a sua segunda parcela, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} 2^{q-1}b(x)|\varphi|^q \, \mathrm{d}x = 2^{q-1}\|\varphi\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} < \infty,$$

e assim $2^{q-1}b(x)|\varphi(x)|^q \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. Por outro lado, em relação a sua primeira parcela note que podemos fazer uso da Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.2.2) com expoentes $\{q/(q-1), q\}$, para obter

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} 2^{q-1}b(x)|u|^{q-1}|\varphi| \, \mathrm{d}x &= 2^{q-1}\int_{\mathbb{R}^n_+} \left[b^{\frac{q-1}{q}}(x)|u|^{q-1}\right]\left[b^{\frac{1}{q}}(x)|\varphi|\right] \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{q-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|\varphi|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2^{q-1}\|u\|^{q-1}_{E^q}\|\varphi\|_{E^q} < \infty,\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

e assim $2^{q-1}b(x)|u(x)|^{q-1}|\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. Portanto, $h \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. Sendo assim, uma vez que $|g_k(x)| \leq h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$ (em particular q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$), acabamos de mostrar que as hipóteses do (a) do Teorema 1.2.3 são satisfeitas. Logo,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n_+} g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde por (2.3.10), (2.3.11) e (2.3.12),

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_k}\left(\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)\left(|u+t_k\varphi|^q - |u|^q\right)\,\mathrm{d}x\right) = \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Esta igualdade juntamente com (2.3.9), assegura que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathcal{I}_2(u+t_k\varphi)-\mathcal{I}_2(u)}{t_k} = \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Além disso, por (2.3.13)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\right| \leq C_2\|\varphi\|_{E^q},$$

e daí $\mathcal{I}_2'(u) \in (E^q)'$ existe, com

$$\mathcal{I}_2'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Pela linearidade ser imediata, omitimos a verificação.

Para concluir que $\mathcal{I}_2 \in C^1(E^q, \mathbb{R})$, basta verificar o item (ii) da Definição 2.3.3. Para fazer isto, considere $\|u_k - u\|_{E^q} \to 0$, quando $k \to \infty$. Para cada $\varphi \in E^q$, com uso da desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2'(u_k)\varphi - \mathcal{I}_2'(u)\varphi| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)(|u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u)\varphi \, \mathrm{d}x \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) \left| |u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u \right| |\varphi| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a Desigualdade de Hölder com expoentes $\{q/(q-1), q\}$ (confira Teorema 1.2.2), tem-se

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2'(u_k)\varphi - \mathcal{I}_2'(u)\varphi| &\le \int_{\mathbb{R}^n_+} \left[b^{\frac{q-1}{q}}(x) \left| |u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u \right| \right] \left[b^{\frac{1}{q}}(x)|\varphi| \right] \, \mathrm{d}x \\ &\le A(k) \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|\varphi|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \le A(k)\|\varphi\|_{E^q}, \end{aligned}$$

com

$$A(k) := \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) \left| |u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u \right|^{\frac{q}{q-1}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{q}}. \tag{2.3.14}$$

Sendo assim,

$$\|\mathcal{I}_2'(u_k) - \mathcal{I}_2'(u)\|_{(E^q)'} = \sup_{\varphi \in E^q \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{I}_2'(u_k)\varphi - \mathcal{I}_2'(u)\varphi|}{\|\varphi\|_{E^q}} \le A(k). \tag{2.3.15}$$

Afirmamos que $A(k) \to 0$, quando $k \to \infty$. Com efeito, aplicando o Lema 2.3.1, note que

$$\left| |u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u \right| \le C_3|u_k - u|(|u_k| + |u|)^{q-2}.$$

Esta desigualdade juntamente com (2.3.14), assegura que

$$\begin{aligned} A(k) &\le C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) \left(|u_k - u|(|u_k| + |u|)^{q-2} \right)^{\frac{q}{q-1}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &= C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k - u|^{\frac{q}{q-1}} (|u_k| + |u|)^{\frac{q(q-2)}{q-1}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando essa desigualdade e a Desigualdade de Hölder (confira Teorema 1.2.2), com expoentes $\{q-1, (q-1)/(q-2)\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} A(k) &= C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(b^{\frac{1}{q-1}}(x) |u_k - u|^{\frac{q}{q-1}} \right) \left(b^{\frac{q-2}{q-1}}(x) (|u_k| + |u|)^{\frac{q(q-2)}{q-1}} \right) \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u_k - u|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) (|u_k| + |u|)^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-2}{q}}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade

$$(|u_k| + |u|)^q \leq (2 \max\{|u_k|, |u|\})^q \leq 2^q \left(|u_k|^q + |u|^q \right),$$

podemos inferir que

$$\begin{aligned} A(k) &\leq C_5 \|u_k - u\|_{L^q(\mathbb{R}^n_+, b)} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u_k|^q \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-2}{q}} \\ &\leq C_5 \|u_k - u\|_{E^q} \left(\|u_k\|^q_{E^q} + \|u\|^q_{E^q} \right)^{\frac{q-2}{q}}. \end{aligned}$$

Desde que (u_k) é limitada na norma E^q, pois $u_k \to u$ converge em E^q, desta última desigualdade $A(k) \to 0$, se $k \to \infty$, provando a afirmação.

A convergência $\lim\limits_{k \to \infty} A(k) = 0$ combinada com (2.3.15), garante que $\mathcal{I}'_2(u_k) \to \mathcal{I}'_2(u)$ em $(E^q)'$ quando $u_k \to u$ em E^q, completando a parte 2.

Parte (3): Mostrar que $\mathcal{I}_3 \in C^1(E^q, \mathbb{R})$.

Esta parte é análoga a parte 2 e por isso será omitida. Mas vale destacar que

$$\mathcal{I}'_3(u)\varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x) |u(x)|^{p-2} u(x) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Diante das partes 1, 2 e 3, temos que $I_\lambda \in C^1(E^q, \mathbb{R})$, com

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u)\varphi &= \mathcal{I}'_1(u)\varphi + \mathcal{I}'_2(u)\varphi - \mathcal{I}'_3(u)\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u|^{q-2} u \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x) |u|^{p-2} u \varphi \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

A demonstração está finalizada. □

Observação 2.3.1. *Através do item (ii) do Lema 2.3.2 note que, se $u \in E^q$ é um ponto crítico de I_λ (isto é, $I'_\lambda(u)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in E^q$), então*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x) |u|^{p-2} u \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x) |u|^{q-2} u \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Em outras palavras $u \in E^q$ ser um ponto crítico de I_λ implica u ser uma solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$ (veja (2.3.2)). Sendo assim, daqui por diante, para se obter solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$, nosso foco será buscar ponto crítico de I_λ.

Capítulo 3

Existência de soluções

3.1 Caso $q > p$: Demonstração do Teorema 0.0.1

Neste seção, apresentaremos a demonstração do Teorema 0.0.1, que envolve o caso $q > p$. Dividiremos em duas subseções, sendo a primeira referente ao item (i) e a segunda subseção corresponde ao item (ii) do Teorema 0.0.1.

3.1.1 Item (i): resultado de não-existência de solução

Lema 3.1.1. *Sejam $q > p$, $2_* \leq p \leq 2^*$ e assuma as hipóteses (H_1) e (H_2). Se $u_\lambda \in E^q \setminus \{0\}$ é uma solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$, então $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, para um determinado $\lambda_0 > 0$.*

Demonstração. A demonstração será dividida em três partes.

Parte 1: Estimar $\|u_\lambda\|_E^2$ inferiormente.

Suponha que $u_\lambda \in E^q$ é uma solução fraca não trivial de $(\mathcal{P}_\lambda)$. Substituindo φ por u_λ em (2.3.2), segue que

$$\|u_\lambda\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\lambda|^2 \,\mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_\lambda|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_\lambda|^q \,\mathrm{d}x, \tag{3.1.1}$$

donde

$$\|u_\lambda\|_E^2 \leq \lambda \|u_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)}.$$

Pela a imersão contínua $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$, vista no Lema 2.2.1 (item (i)), garante-se a existência de uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} \leq C_1 \|u_\lambda\|_E$, ou seja,

$$\|u_\lambda\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} \leq C_1^2 \|u_\lambda\|_E^2. \tag{3.1.2}$$

Combinando as duas últimas desigualdades, tem-se

$$\|u_\lambda\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} \leq C_1^2 \lambda \|u_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} \implies C_1^{-2}\lambda^{-1} \leq \|u_\lambda\|^{p-2}_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)}.$$

Elevando a $2/(p-2)$, segue que

$$C_1^{-\frac{4}{p-2}}\lambda^{-\frac{2}{p-2}} \leq \|u_\lambda\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)}.$$

Juntando esta desigualdade com (3.1.2), infere-se que

$$C_1^{-\frac{4}{p-2}}\lambda^{-\frac{2}{p-2}} \leq C_1^2\|u_\lambda\|^2_E,$$

e assim

$$\lambda^{-\frac{2}{p-2}} C_1^{-\frac{2p}{p-2}} \leq \|u_\lambda\|^2_E. \tag{3.1.3}$$

Logo, a primeira parte está encerrada.

Parte 2: Estimar $\|u_\lambda\|^2_E$ superiormente.

Note que podemos escrever

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_\lambda|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{\lambda a(x)}{b^{q_1}(x)}\right)\left(b^{q_1}(x)|u_\lambda|^p\right)\,\mathrm{d}x, \tag{3.1.4}$$

com $q_1 \in \mathbb{R}$ a ser escolhido. Aplicando a desigualdade de Young (veja Proposição 1.2.1) ao integrando no segundo membro, obtemos

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_\lambda|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \left[\frac{1}{p_1}\left(\frac{\lambda a(x)}{b^{q_1}(x)}\right)^{p_1} + \frac{1}{p_2}\left(b^{q_1}(x)|u_\lambda|^p\right)^{p_2}\right]\mathrm{d}x,$$

em que $p_1, p_2 > 1$ e $1/p_1 + 1/p_2 = 1$. Fazendo $pp_2 = q$, tem-se $p_2 = q/p > 1$. Como consequência,

$$\frac{1}{p_1} = 1 - \frac{1}{p_2} \iff \frac{1}{p_1} = 1 - \frac{p}{q} \iff \frac{1}{p_1} = \frac{q-p}{q} \iff p_1 = \frac{q}{q-p}.$$

Portanto, da última estimativa, conclui-se que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_\lambda|^p \,\mathrm{d}x \leq \frac{q-p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{\lambda a(x)}{b^{q_1}(x)}\right)^{\frac{q}{q-p}}\mathrm{d}x + \frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b^{\frac{q_1 q}{p}}(x)|u_\lambda|^q\,\mathrm{d}x.$$

Escolhendo $q_1 \in \mathbb{R}$ de tal forma que $q_1 q/p = 1$, tem-se $q_1 = p/q$ e assim $q_1 q/(q-p) = p/(q-p)$. Dessa forma, obtemos

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_\lambda|^p \,\mathrm{d}x \leq \frac{q-p}{q}\lambda^{\frac{q}{q-p}}\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_\lambda|^q\,\mathrm{d}x.$$

Utilizando esta estimativa e a hipótese (H_2) em (3.1.1), temos

$$\|u_\lambda\|_E^2 \leq \frac{q-p}{q}\lambda^{\frac{q}{q-p}}C_2 + \left(-1+\frac{p}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_\lambda|^q \,\mathrm{d}x,$$

em que

$$C_2 := \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Por sua vez, como $(-1+p/q)<0$, pois $q>p$, e além disso b é uma função não negativa, tem-se

$$\|u_\lambda\|_E^2 \leq \frac{q-p}{q}\lambda^{\frac{q}{q-p}}C_2. \tag{3.1.5}$$

A parte 2 está finalizada.

Parte 3: Determinar $\lambda_0 > 0$.

Combinando (3.1.3) e (3.1.5), tem-se

$$\begin{aligned}\lambda^{-\frac{2}{p-2}}C_1^{-\frac{2p}{p-2}} \leq \frac{q-p}{q}\lambda^{\frac{q}{q-p}}C_2 &\iff \frac{qC_2}{q-p}C_1^{-\frac{2p}{p-2}} \leq \lambda^{\frac{q}{q-p}+\frac{2}{p-2}} = \lambda^{\frac{p(q-2)}{(q-p)(p-2)}} \\ &\iff \left(\frac{qC_2}{q-p}C_1^{-\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{(q-p)(p-2)}{p(q-2)}} \leq \lambda.\end{aligned}.$$

Escolhendo

$$\lambda_0 = \left(\frac{qC_2}{q-p}C_1^{-\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{(q-p)(p-2)}{p(q-2)}}, \tag{3.1.6}$$

encerramos o resultado. □

Finalizando a demonstração do item (i) ***do Teorema 0.0.1***. Suponha que $u_\lambda \in E^q$ é uma solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$. A demonstração será dividida em dois casos.

Caso 1: $\lambda \leq 0$.

Substituindo φ por u_λ em (2.3.2) e usando que $a(x), b(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$, obtém-se

$$0 \leq \|u_\lambda\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\lambda|^2\,\mathrm{d}x = \lambda\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_\lambda|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_\lambda|^q\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Isto implica que $u_\lambda = 0$, o que encerra o caso 1.

Caso 2: $0 < \lambda < \lambda_0$, em que λ_0 é obtido no Lema 3.1.1.

Suponha por contradição que u_λ é uma solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$, com $u_\lambda \not\equiv 0$. Pelo Lema 3.1.1, segue que $\lambda \geq \lambda_0$, o que é uma contradição. Isto finaliza a demonstração □

3.1.2 Item (ii): resultado de existência de solução via minimização

Iniciaremos esta subseção com um resultado essencial para obter solução via minimização.

Teorema 3.1.1. *Sejam X um Espaço de Banach reflexivo e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional que satisfaz:*

(a) *I é coercivo, isto é, $I(u) \to \infty$, quando $\|u\|_X \to \infty$;*

(b) *I é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é, dada qualquer sequência arbitrária $\{u_k\}_k \subset X$ que cumpra $u_k \rightharpoonup u \in X$, então*

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k),$$

em que

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) := \sup_{k\geq 1} \left\{ \inf_{m\geq k} I(u_m) \right\}.$$

Então, I é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$I(u_0) = \inf_{v\in X} I(v).$$

Demonstração. (Ver [19], pg. 8, Teorema 1.2.) □

A seguir, precisaremos de dois lemas auxiliares para obter solução do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Lema 3.1.2. *Sejam $0 \leq \beta < \gamma$ e $k, l > 0$. Então existe uma constante $C = C(\beta, \gamma) > 0$ tal que*

$$k|s|^\beta - l|s|^\gamma \leq Ck\left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Se $\beta = 0$, a desigualdade torna-se

$$-l|s|^\gamma \leq k(C-1),$$

e então basta tomar $C = 1$, pois $-l|s|^\gamma \leq 0$.

Se $\beta > 0$, considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = kt^\beta - lt^\gamma.$$

Derivando esta função, obtém-se

$$f'(t) = k\beta t^{\beta-1} - l\gamma t^{\gamma-1}.$$

Fazendo $f'(t) = 0$, segue que

$$k\beta t^{\beta-1} = l\gamma t^{\gamma-1} \iff t^{\gamma-\beta} = \frac{k\beta}{l\gamma} \iff t = \left(\frac{k\beta}{l\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-\beta}}.$$

Em outras palavras, $t_0 = (k\beta/l\gamma)^{\frac{1}{\gamma-\beta}}$ é o único ponto crítico de f. A seguir, note que

$$f'(t) > 0 \iff k\beta t^{\beta-1} - l\gamma t^{\gamma-1} > 0 \iff k\beta t^{\beta-1} > l\gamma t^{\gamma-1} \iff \frac{k\beta}{l\gamma} > t^{\gamma-\beta} \iff t_0 > t,$$

isto é, f é crescente em $(0, t_0)$. Analogamente, f é decrescente em (t_0, ∞), e assim t_0 é ponto de máximo da função f. Calculando o valor máximo de f, tem-se

$$\begin{aligned} f(t_0) &= k\left(\frac{k\beta}{l\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}} - l\left(\frac{k\beta}{l\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}} = \left(\frac{k\beta}{l\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}\left(k - l\left(\frac{k\beta}{l\gamma}\right)\right) \\ &= \left(\frac{k\beta}{l\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}\left(k - \frac{k\beta}{\gamma}\right) = k\left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$kt^\beta - lt^\gamma = f(t) \le f(t_0) = Ck\left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}},$$

em que

$$C := \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right).$$

Substituindo t por $|s|$, com $s \in \mathbb{R}$, completamos a demonstração. $\square$

O próximo lema trata de um resultado de convergência.

Lema 3.1.3. *Sejam $2_* \le p < 2^*$, $q > p$ e assuma as hipóteses (H_1) e (H_2). Considere também $\lambda > 0$ fixado e $\{u_k\}_k \subset E^q$ uma sequência tal que $u_k \rightharpoonup u_0 \in E^q$. Então,*

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} F(x, u_k(x))\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n_+} F(x, u_0(x))\,\mathrm{d}x,$$

em que

$$F(x,s) := \frac{\lambda}{p}a(x)|s|^p - \frac{1}{q}b(x)|s|^q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \ \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.1.7}$$

Demonstração. A demonstração será dividida em três partes.

Parte 1: Estimar $\int_{\mathbb{R}^n_+} [F(x, u_k(x)) - F(x, u_0(x))]\,\mathrm{d}x$ de forma adequada.

Seja $x \in \mathbb{R}^n_+$ arbitrário e considere o caso em que $u_0(x) \leq u_k(x)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F(x, u_k(x)) - F(x, u_0(x)) = \int_{u_0(x)}^{u_k(x)} F_s(x, s)\, \mathrm{d}s. \tag{3.1.8}$$

Note que cada $s \in [u_0(x), u_k(x)]$ pode ser escrito da forma

$$s = (1-t)u_0(x) + tu_k(x) = u_0(x) + t(u_k(x) - u_0(x)), \quad \text{com } t \in [0,1].$$

Logo, $\mathrm{d}s = (u_k(x) - u_0(x))\mathrm{d}t$. Consequentemente,

$$F(x, u_k(x)) - F(x, u_0(x)) = \int_0^1 F_s\Big(x, u_0(x) + t(u_k(x) - u_0(x))\Big)(u_k(x) - u_0(x))\, \mathrm{d}t. \tag{3.1.9}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo na função F_s, segue que

$$F_s\Big(x, u_0(x) + t(u_k(x) - u_0(x))\Big) = g(x,t) + F_s(x, u_0(x)), \tag{3.1.10}$$

com

$$g(x,t) = \int_{u_0(x)}^{u_0(x)+t(u_k(x)-u_0(x))} F_{ss}(x,s)\, \mathrm{d}s. \tag{3.1.11}$$

Combinando (3.1.9) e (3.1.10), concluímos que

$$F(x, u_k(x)) - F(x, u_0(x)) = \int_0^1 \left[g(x,t) + F_s(x, u_0(x))\right](u_k(x) - u_0(x))\, \mathrm{d}t,$$

e assim

$$F(x, u_k(x)) - F(x, u_0(x)) = (u_k(x) - u_0(x)) \left[\int_0^1 g(x,t)\, \mathrm{d}t + F_s(x, u_0(x))\right]. \tag{3.1.12}$$

A seguir, vamos reescrever a expressão $g(x,t)$ em (3.1.11) de forma conveniente. Inicialmente, note que sendo $s \in [u_0(x), u_0(x) + t\,(u_k(x) - u_0(x))]$, tem-se que

$$\begin{aligned} s &= (1-\theta)u_0(x) + \theta\Big(u_0(x) + t(u_k(x) - u_0(x))\Big) = u_0(x) + \theta t(u_k(x) - u_0(x)) \\ &= (1-\theta t)\, u_0(x) + \theta t u_k(x), \end{aligned}$$

com $\theta \in [0,1]$. Considerando $\widetilde{s} := \theta t$, temos que

$$0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta t \leq t,$$

e assim $\widetilde{s} \in [0,t]$. Logo,

$$s = (1-\widetilde{s})\, u_0(x) + \widetilde{s} u_k(x) = u_0(x) + \widetilde{s}\,(u_k(x) - u_0(x)),$$

com $\mathrm{d}s = (u_k(x) - u_0(x))\mathrm{d}\widetilde{s}$. Dessa maneira, podemos reescrever (3.1.11) como

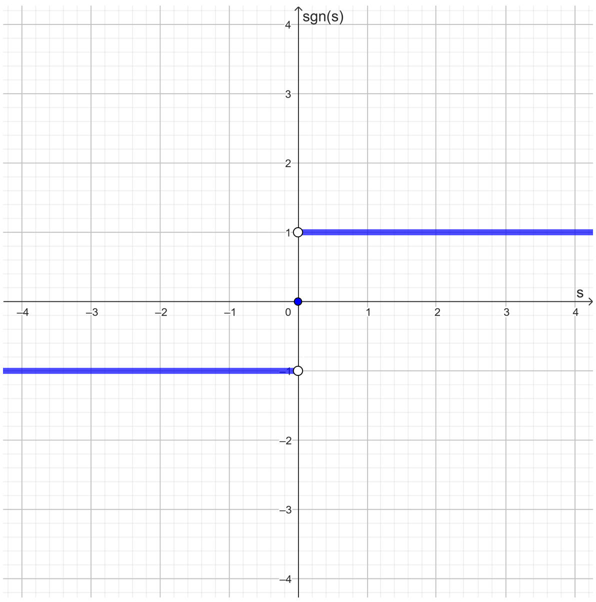
$$g(x,t) = (u_k(x) - u_0(x)) \int_0^t F_{ss}\Big(x, u_0(x) + \widetilde{s}(u_k(x) - u_0(x))\Big)\, \mathrm{d}\widetilde{s}. \tag{3.1.13}$$

Agora, vamos estimar F_{ss}. Derivando a função F (veja definição em (3.1.7)) com respeito a variável s, segue que

$$F_s(x,s) = \lambda a(x)|s|^{p-1}\left(\mathrm{sgn}(s)\right) - b(x)|s|^{q-1}\left(\mathrm{sgn}(s)\right). \tag{3.1.14}$$

Vale ressaltar que aqui foi usado o fato que

$$\frac{\partial}{\partial s}|s| = \mathrm{sgn}(s) := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad s > 0 \\ 0 & \text{se} \quad s = 0 \\ -1 & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$



Derivando F_s em (3.1.14) com respeito a variável s, obtém-se

$$\begin{aligned} F_{ss}(x,s) &= \lambda a(x)\big((p-1)|s|^{p-2}\mathrm{sgn}(s)\cdot\mathrm{sgn}(s) + |s|^{p-1}\cdot 0\big) \\ &\quad - b(x)\big((q-1)|s|^{q-2}\mathrm{sgn}(s)\cdot\mathrm{sgn}(s) + |s|^{q-1}\cdot 0\big) \\ &= \lambda a(x)(p-1)|s|^{p-2}\left(\mathrm{sgn}(s)\right)^2 - b(x)(q-1)|s|^{q-2}\left(\mathrm{sgn}(s)\right)^2. \end{aligned}$$

Usando que $|s|^{p-2}\left(\mathrm{sgn}(s)\right)^2 = |s|^{p-2}$, podemos escrever

$$F_{ss}(x,s) = \lambda(p-1)a(x)|s|^{p-2} - (q-1)b(x)|s|^{q-2}.$$

Com isso, aplicando o Lema 3.1.2 (com $\beta = p-2$ e $\gamma = q-2$) a $F_{ss}(x,s)$, obtemos um $C_1 := C_1(p,q) > 0$ tal que

$$F_{ss}(x,s) \leq C_1\lambda(p-1)a(x)\left(\frac{\lambda(p-1)a(x)}{(q-1)b(x)}\right)^{\frac{p-2}{q-2-(p-2)}} = C_1\lambda(p-1)a(x)\left(\frac{\lambda(p-1)a(x)}{(q-1)b(x)}\right)^{\frac{p-2}{q-p}}.$$

Como consequência,

$$F_{ss}(x,s) \leq C_2\frac{(a(x))^{1+\frac{p-2}{q-p}}}{(b(x))^{\frac{p-2}{q-p}}} = C_2\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)}. \tag{3.1.15}$$

Aplicando isto a (3.1.13), obtemos

$$g(x,t) \leq (u_k(x)-u_0(x))\int_0^t C_2\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}\widetilde{s} = C_2(u_k(x)-u_0(x))\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)}t.$$

Combinando esta estimativa com (3.1.12), pode-se inferir que

$$\begin{aligned} F(x,u_k(x)) - F(x,u_0(x)) &\leq (u_k(x)-u_0(x))\left[\int_0^1 C_2(u_k(x)-u_0(x))\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)}t\,\mathrm{d}t\right] \\ &\quad + F_s(x,u_0(x))(u_k(x)-u_0(x)) \\ &= \frac{C_2}{2}(u_k(x)-u_0(x))^2\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} + F_s(x,u_0(x))(u_k(x)-u_0(x)). \end{aligned}$$

Aplicando o módulo do lado direito juntamente com a desigualdade triangular, conclui-se que

$$F(x,u_k(x)) - F(x,u_0(x)) \leq \frac{C_2}{2}(u_k(x)-u_0(x))^2\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} + |F_s(x,u_0(x))(u_k(x)-u_0(x))|.$$

Vale lembrar que esta desigualdade foi obtida de (3.1.8) considerando $u_0(x) \leq u_k(x)$.

Caso $u_k(x) \leq u_0(x)$, usamos um cálculo análogo (ao que foi feito acima) partindo que $-u_0(x) \leq -u_k(x)$ para obter que

$$\begin{aligned} F(x,-u_k(x)) - F(x,-u_0(x)) &\leq C_3(-u_k(x)+u_0(x))^2\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} \\ &\quad + |F_s(x,-u_0(x))(-u_k(x)+u_0(x))|. \end{aligned}$$

Agora, usando que $F(x,s) = F(x,-s)$ e $F_s(x,-s) = -F_s(x,s)$, podemos inferir a seguinte desigualdade

$$F(x,u_k(x)) - F(x,u_0(x)) \leq C_3(u_k(x)-u_0(x))^2\frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} + |F_s(x,u_0(x))(u_k(x)-u_0(x))|.$$

Ou seja, esta estimativa é válida em ambos os casos. Com isso, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} [F(x, u_k(x)) - F(x, u_0(x))] \, \mathrm{d}x \leq C_6 \mathcal{L}_k^1 + \mathcal{L}_k^2, \tag{3.1.16}$$

em que

$$\mathcal{L}_k^1 := \int_{\mathbb{R}^n_+} (u_k(x) - u_0(x))^2 \frac{a^{\frac{q-2}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_k^2 := \int_{\mathbb{R}^n_+} |F_s(x, u_0(x))(u_k(x) - u_0(x))| \, \mathrm{d}x.$$

Encerramos aqui a parte 1.

Parte 2: Mostrar que $\lim\limits_{k \to \infty} \mathcal{L}_k^1 = 0$.

Considere $r_1 \in \mathbb{R}$ e $1 < r_2, r_3 < \infty$ com $1/r_2 + 1/r_3 = 1$, todos a serem determinados. Pela Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k^1 &= \int_{\mathbb{R}^n_+} a^{r_1}(x)(u_k(x) - u_0(x))^2 \frac{a^{\frac{q-2}{q-p} - r_1}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} \, \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(a^{r_1}(x)(u_k(x) - u_0(x))^2 \right)^{r_2} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{a^{\frac{q-2}{q-p} - r_1}(x)}{b^{\frac{p-2}{q-p}}(x)} \right)^{r_3} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r_3}}. \end{aligned}$$

Para usar a hipótese (H_2), tomaremos

$$\frac{p-2}{q-p} r_3 = \frac{p}{q-p} \iff r_3 = \frac{p}{p-2} > 1.$$

Além disso, precisamos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{q-2}{q-p} - r_1 \right) r_3 = \frac{q}{q-p} &\iff \left(\frac{q-2}{q-p} - r_1 \right) \frac{p}{p-2} = \frac{q}{q-p} \\ &\iff \frac{q-2}{q-p} - r_1 = \frac{q(p-2)}{p(q-p)} \\ &\iff r_1 = \frac{p(q-2) - q(p-2)}{p(q-p)} = \frac{2(q-p)}{p(q-p)} = \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Como consequência,

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1 \iff \frac{1}{r_2} = 1 - \frac{p-2}{p} \iff \frac{1}{r_2} = \frac{2}{p} \iff r_2 = \frac{p}{2}.$$

Como $r_1 r_2 = 1$ e $2r_2 = p$, substituindo esses valores de r_1, r_2 e r_3 na desigualdade acima, obtemos

$$\mathcal{L}_k^1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_k(x) - u_0(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Pela imersão compacta $E^q \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n_+, a)$ (veja Lema 2.2.2, item (ii)), juntamente com (H_2), concluímos que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^1_k = 0$, completando a parte 2.

Parte 3: Mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^2_k = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} |F_s(x, u_0(x))(u_k(x) - u_0(x))| \,\mathrm{d}x = 0.$

Consideremos o funcional linear $\Phi_0 : E^q \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_0(v) = \int_{\mathbb{R}^n_+} F_s(x, u_0(x))v(x) \,\mathrm{d}x.$$

Afirmamos que Φ_0 é contínuo, ou seja, deve existir $C_4 > 0$ tal que $|\Phi_0(v)| \le C_4\|v\|_{E^q}$, para todo $v \in E^q$. Se isto for verdade, conclui-se que

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_0(u_k - u_0) = \Phi_0(0) = 0,$$

pois $u_k - u_0 \rightharpoonup 0$ (veja Definição 1.1.5). Como consequência, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^2_k = 0.$

De fato, por (3.1.14), podemos assegurar que

$$|\Phi_0(v)| \le \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_0(x)|^{p-1}|v(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_0(x)|^{q-1}|v(x)| \,\mathrm{d}x. \tag{3.1.17}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2) com expoentes $\{p/(p-1), p\}$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_0(x)|^{p-1}|v(x)| \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \left[a^{\frac{p-1}{p}}(x)|u_0(x)|^{p-1}\right] \left[a^{\frac{1}{p}}(x)|v(x)|\right] \,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_0(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|v(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Pela imersão contínua $E^q \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n_+, a)$ (veja Lema 2.2.2, item (i)), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_0(x)|^{p-1}|v(x)| \,\mathrm{d}x \le C_5\|v\|_{E^q},$$

para algum $C_5 = C_5(a, p, n, u_0) > 0$. De forma similar, pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_0(x)|^{q-1}|v(x)| \,\mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_0(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|v(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le C_6\|v\|_{E^q}.$$

Combinando (3.1.17) com estas duas últimas desigualdades, temos que $|\Phi_0(v)| \le C_7\|v\|_{E^q}$, para todo $v \in E^q$, e a parte 3 está encerrada.

Finalmente, utilizando as convergências $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^1_k = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^2_k = 0$ em (3.1.16), completa-se a demonstração deste lema. Vale ressaltar que nesta passagem usamos o fato de que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^j_k = \liminf\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}^j_k = 0$, com $j \in \{1, 2\}$. $\square$

Finalmente, apresentaremos a prova do item do Teorema 0.0.1 referente a existência de solução.

***Demonstração do item** (ii) **do Teorema 0.0.1**.* Primeiramente, mostraremos que I_λ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.1.

item (a):

Note que o funcional I_λ (veja (2.3.3)), pode ser reescrito como

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{\lambda}{p}a(x)|u|^p - \frac{1}{2q}b(x)|u|^q\right)\mathrm{d}x. \quad (3.1.18)$$

Aplicando o Lema 3.1.2, escolhendo $k = \lambda a(x)/p$, $\beta = p$, $l = b(x)/2q$ e $\gamma = q$, obtemos uma constante $C_1 := C_1(p,q) > 0$ tal que

$$\frac{\lambda}{p}a(x)|u|^p - \frac{1}{2q}b(x)|u|^q \leq C_1\left(\frac{\lambda}{p}a(x)\right)\left(\frac{\frac{\lambda}{p}a(x)}{\frac{1}{2q}b(x)}\right)^{\frac{p}{q-p}}.$$

Prosseguindo com o cálculo,

$$\frac{\lambda}{p}a(x)|u|^p - \frac{1}{2q}b(x)|u|^q \leq C_2\frac{[a(x)]^{1+p/(q-p)}}{[b(x)]^{\frac{p}{q-p}}} = C_2\frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)},$$

com $C_2 = C_2(p,q,\lambda) > 0$. Esta estimativa juntamente com (3.1.18) e a hipótese (H_2), infere que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \frac{1}{2q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} - C_2\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \frac{1}{2q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} - C_3.$$

Usando a definição de norma em E^q (veja (2.2.6)), se $\|u\|_{E^q} \to \infty$, então $\|u\|_E \to \infty$ ou $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} \to \infty$. Sendo assim, podemos concluir que $I_\lambda(u) \to \infty$, quando $\|u\|_{E^q} \to \infty$. Assim, o item (a) está provado.

item (b):

Considere $\{u_k\}_k \subset E^q$ uma sequência tal que $u_k \rightharpoonup u_0 \in E^q$. Por (2.3.3) e (3.1.7), segue que

$$I_\lambda(u_k) = \frac{1}{2}\|u_k\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{\lambda}{p}a(x)|u_k|^p - \frac{1}{q}b(x)|u_k|^q\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u_k\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n_+} F(x,u_k)\,\mathrm{d}x.$$

Desde que a norma é fracamente semicontínua inferiormente (veja item (c) do Teorema 1.1.1) e $E^q \subset E$, obtemos

$$\|u_0\|_E \leq \liminf_{k\to\infty}\|u_k\|_E.$$

Esta condição juntamente com o Lema 3.1.3, implica que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_0) &= \frac{1}{2}\|u_0\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n_+} F(x,u_0)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|u_k\|_E^2 - \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} F(x,u_k)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left[\frac{1}{2}\|u_k\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n_+} F(x,u_k)\,\mathrm{d}x\right] = \liminf_{k\to\infty} I_\lambda(u_k),
\end{aligned}
$$

finalizando o item (b).

Portanto, pelo Teorema 3.1.1, I_λ é limitado inferiormente sobre E^q e existe $u_\lambda \in E^q$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{v\in E^q} I_\lambda(v).$$

Afirmamos que

$$\inf_{u\in E^q} I_\lambda(u) < 0, \quad \forall \lambda > \lambda_1, \tag{3.1.19}$$

em que λ_1 é definido da seguinte forma

$$\lambda_1 := \inf_{u\in E^q} \left\{ \frac{p}{2}\|u\|_E^2 + \frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q\,\mathrm{d}x \;:\; \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p\,\mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Notando que

$$0 \leq \frac{p}{2}\|u\|_E^2 + \frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q\,\mathrm{d}x,$$

para qualquer $u \in E^q$ com $\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u|^p\,\mathrm{d}x = 1$, então $\lambda_1 \in [0,\infty)$. Vamos mostrar que $\lambda_1 > 0$. Do contrário, existiria uma sequência $\{u_k\}_k \subset E^q$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left[\frac{p}{2}\|u_k\|_E^2 + \frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q\,\mathrm{d}x\right] = \lambda_1 = 0, \tag{3.1.20}$$

com

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Agora, considere $r_1 \in \mathbb{R}$, e $1 < r_2, r_3 < \infty$ com $1/r_2 + 1/r_3 = 1$, todos a serem determinados. Pela Desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.2.2), temos

$$
\begin{aligned}
1 = \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{a(x)}{b^{r_1}(x)}\right)\left(b^{r_1}(x)|u_k|^p\right)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{a(x)}{b^{r_1}(x)}\right)^{r_2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(b^{r_1}(x)|u_k|^p\right)^{r_3}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_3}}.
\end{aligned}
$$

Com o objetivo de utilizar (H_2), vamos escolher $r_2 = q/(q-p)$. Dessa forma,

$$r_1 r_2 = \frac{p}{q-p} \Longleftrightarrow r_1 = \frac{p}{q}.$$

Como consequência,

$$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1 \iff \frac{1}{r_3}=1-\frac{q-p}{q} \iff \frac{1}{r_3}=\frac{p}{q} \iff r_3=\frac{q}{p}.$$

Substituindo esses valores de r_1, r_2 e r_3 na última desigualdade acima, obtemos

$$1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{a^{\frac{q}{q-p}}(x)}{b^{\frac{p}{q-p}}(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} = C_4\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}},$$

em que usamos a condição (H_2). Notando que, por (3.1.20), segue a convergência

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q\,\mathrm{d}x=0,$$

pela estimativa acima, teríamos $1 \leq 0$, que é um absurdo. Portanto, λ_1 deve ser positivo.

Agora, seja $\lambda > \lambda_1$. Pela definição de ínfimo, existe $v_\lambda \in E^q$ com $\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|v_\lambda|^p\,\mathrm{d}x = 1$, satisfazendo

$$\lambda > \frac{p}{2}\|v_\lambda\|_E^2+\frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|v_\lambda|^q\,\mathrm{d}x \geq \lambda_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_\lambda) &= \frac{1}{2}\|v_\lambda\|_E^2+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|v_\lambda|^q\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)|v_\lambda|^p\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\|v_\lambda\|_E^2+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|v_\lambda|^q\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\cdot 1<0. \end{aligned}$$

Assim, $I_\lambda(u_\lambda)=\inf\limits_{u\in E^q} I_\lambda(u) \leq I_\lambda(v_\lambda)<0$, sempre que $\lambda>\lambda_1$, e portanto, (3.1.19) é válido. Logo, $u_\lambda \neq 0$, se $\lambda > \lambda_1$, pois do contrário $0=I_\lambda(u_\lambda)<0$, que seria um absurdo.

Finalmente, vamos verificar que u_λ é um ponto crítico de I_λ, ou seja, $I'_\lambda(u_\lambda)\varphi=0$, para qualquer $\varphi \in E^q$. Desde que $I_\lambda(u_\lambda)=\inf\limits_{u\in E^q} I_\lambda(u)$, para todo $\varphi\in E^q$ e $t\in\mathbb{R}$, tem-se

$$I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(u_\lambda+t\varphi).$$

Caso $t>0$, concluímos que

$$0 \leq \frac{I_\lambda(u_\lambda+t\varphi)-I_\lambda(u_\lambda)}{t}.$$

Fazendo $t\to 0^+$,

$$0 \leq \lim_{t\to 0^+}\frac{I_\lambda(u_\lambda+t\varphi)-I_\lambda(u_\lambda)}{t}=I'(u_\lambda)\varphi.$$

O caso $t<0$ nos fornece $I'(u_\lambda)\varphi \leq 0$, e assim $I'_\lambda(u_\lambda)\varphi=0$. Pela Observação 2.3.1, $u_\lambda \neq 0$ é solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$. Por fim, como $I_\lambda(|u_\lambda|)=I_\lambda(u_\lambda)=\inf\limits_{u\in E^q} I_\lambda(u_\lambda)$, podemos assumir que $u_\lambda \geq 0$. A demonstração está encerrada. □

3.2 Caso $q < p$: Demonstração do Teorema 0.0.2

Neste seção será apresentada a demonstração do Teorema 0.0.2. Neste caso, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter uma sequência no espaço E^q com uma condição crucial para se extrair a solução do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$. Este seção esta dividida em duas subseções, sendo a primeira referente a não-existência de solução não-trivial e a segunda corresponde a obtenção de solução não trivial, sob determinadas condições.

3.2.1 Item (i): resultado de não-existência de solução

Demonstração do item (i) do Teorema 0.0.2. A prova é a mesma feita no item (i) do Teorema 0.0.1, no caso $\lambda \leq 0$, e por isso será omitida. Ressalta-se que nessa prova independe se $p > q$ ou se $p < q$. $\square$

3.2.2 Item (ii): resultado de existência de solução via Passo da Montanha

Iniciaremos esta subseção mencionando o que significa um funcional definido em um espaço de Banach satisfazer a condição de Palais-Smale (PS).

Definição 3.2.1. (Condição de Palais-Smale) *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer sequência $\{u_k\}_k \subset X$ que satisfaz*

$$|I(u_k)| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}, \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \|I'(u_k)\|_{X'} = 0, \tag{3.2.1}$$

onde $C > 0$ é uma constante, possui uma subsequência convergente.

Vale relembrar que

$$\|I'(u_k)\|_{X'} := \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{|I'(u_k)v|}{\|v\|_X}, \tag{3.2.2}$$

e $X' := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é linear e contínua}\}$ representa o espaço dual de X.

A seguir, enunciaremos um resultado bastante relevante e famoso na literatura, a saber Teorema do Passo da Montanha.

Teorema 3.2.1. (Teorema do Passo da Montanha) *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição (PS). Se $e \in X$ e $0 < r < \|e\|_X$ são tais que*

$$a := \max\{I(0), I(e)\} < \inf_{\|u\|_X = r} I(u) =: b,$$

então

$$c_{PM} := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq b$$

é um valor crítico de I, ou seja, existe $u \in X$ satisfazendo

$$I(u) = c_{PM} \quad \text{e} \quad I'(u)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in X.$$

Neste caso, $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Demonstração. (Ver [19], pg. 31, Teorema 2.1) □

Para garantir que o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ possui uma solução não-trivial e não-negativa, utilizaremos ao longo dessa subseção o funcional $J_\lambda : E^q \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^p \,\mathrm{d}x, \tag{3.2.3}$$

em que

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\} = \begin{cases} u(x), & \text{se} \quad u(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad u(x) < 0. \end{cases}$$

Cabe destacar a identidade existente entre I_λ e J_λ. Definindo

$$u^-(x) := \max\{-u(x), 0\} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u(x) \geq 0 \\ -u(x), & \text{se} \quad u(x) < 0, \end{cases}$$

de forma imediata $u = u^+ - u^-$, $|u| = u^+ + u^-$ e $|u|^p = (u^+ + u^-)^p = (u^+)^p + (u^-)^p$. Dessa forma, note que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)\left((u^+)^p + (u^-)^p\right) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^q \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^p \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^-)^p \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

e portanto,

$$I_\lambda(u) = J_\lambda(u) - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^-)^p \,\mathrm{d}x. \tag{3.2.4}$$

De forma similar ao que foi feito para garantir que $I_\lambda \in C^1(E^q, \mathbb{R})$ (veja Lema 2.3.2), podemos concluir que $J_\lambda \in C^1(E^q, \mathbb{R})$, cuja derivada de Gateaux é dada por

$$J'_\lambda(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u\varphi \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^{p-1}\varphi \,\mathrm{d}x, \tag{3.2.5}$$

para quaisquer $u, \varphi \in E^q$.

No próximo resultado, veremos que ponto crítico de J_λ necessariamente é não negativa, e além disso, é também ponto crítico de I_λ.

Lema 3.2.1. *Suponha que u seja ponto crítico de J_λ. Então $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^n_+$ e u é ponto crítico de I_λ.*

Demonstração. Seja u um ponto critico de J_λ. Dessa maneira, por (3.2.5) (trocando φ por u^-) e o fato que $u = u^+ - u^-$,

$$\begin{aligned} 0 = J'_\lambda(u)u^- &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla u^- \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}uu^- \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^{p-1}u^- \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla \left(u^+ - u^-\right) \nabla u^- \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2} \left(u^+ - u^-\right) u^- \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^{p-1}u^- \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Utilizando a linearidade do gradiente,

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u^+ \nabla u^- \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u^- \nabla u^- \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u^+u^- \, \mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u^-u^- \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^{p-1}u^- \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Desde que $\nabla u^+ \nabla u^- = 0$, $u^+u^- = 0$ e $(u^+)^{p-1}u^- = 0$, obtém-se

$$0 = -\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u^-|^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}(u^-)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Lembrando que $|u|^{q-2} = (u^+)^{q-2} + (u^-)^{q-2}$, segue que

$$0 = -\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u^-|^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)(u^-)^q \, \mathrm{d}x,$$

donde

$$0 \leq \|u^-\|_E^2 \leq \|u^-\|_E^2 + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)(u^-)^q \, \mathrm{d}x = 0.$$

Sendo assim $u^- = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$, e portanto $u = u^+ - u^- = u^+ + 0 = u^+ \geq 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$. Isto completa a primeira parte deste lema.

Pela identidade (3.2.4), $I_\lambda(u) = J_\lambda(u) - 0 = J_\lambda(u)$, pois $u^- = 0$. Logo,

$$I'_\lambda(u)\varphi = J'_\lambda(u)\varphi = 0,$$

para qualquer $\varphi \in E^q$, ou seja, u é ponto crítico de I_λ. A demonstração está completa. $\square$

Com o intuito de utilizar o Teorema do Passo da Montanha, a seguir mostraremos que J_λ satisfaz a condição (PS).

Lema 3.2.2. *Sejam $2_* \leq p < 2^*$ e $2 \leq q < p$, e assuma as hipóteses $(\widetilde{H}_1)$ e $(\widetilde{H}_2)$. Então J_λ satisfaz a condição (PS).*

Demonstração. Considere $\{u_k\}_k \subset E^q$ satisfazendo (3.2.1). A demonstração será dividida em duas etapas.

Etapa 1: Mostrar que $\{u_k\}_k$ é limitado em E^q.

Note que usando (3.2.5) (substituindo φ por u_k),

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_k) - \frac{1}{p}J'_\lambda(u_k)u_k &= \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_k|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u_k^+)^p \,\mathrm{d}x\right) \\ &\quad - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_k|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u_k^+)^{p-1}u_k \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_k|^2 \,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^q \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$J_\lambda(u_k) - \frac{1}{p}J'_\lambda(u_k)u_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_k\|_E^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)}. \tag{3.2.6}$$

Por (3.2.1) e (3.2.2) (substituindo v por u_k), existem $C_1, C_2 > 0$ que satisfazem

$$|J_\lambda(u_k)| \leq C_1 \quad \text{e} \quad |J'_\lambda(u_k)u_k| \leq C_2\|u_k\|_{E^q}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Estas estimativas aplicadas em (3.2.6), inferem que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_k\|_E^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} \leq C_1 + \frac{C_2}{p}\|u_k\|_{E^q}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esta última desigualdade, por um lado, implica que

$$\|u_k\|_E^2 \leq C_3 + C_4\|u_k\|_{E^q}.$$

Por outro lado,

$$\|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} \leq C_5 + C_6\|u_k\|_{E^q},$$

isto é,

$$\|u_k\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} \leq \left(C_5 + C_6\|u_k\|_{E^q}\right)^{\frac{2}{q}}.$$

Dessa maneira,

$$\|u_k\|^2_{E^q} = \|u_k\|_E^2 + \|u_k\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} \leq C_3 + C_4\|u_k\|_{E^q} + \left(C_5 + C_6\|u_k\|_{E^q}\right)^{\frac{2}{q}}.$$

Suponha por contradição que $\{u_k\}_k$ não é limitada em E^q. Sendo assim, $\|u_k\|_{E^q} \to \infty$, se $k \to \infty$. Pela última desigualdade,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{C_3}{\|u_k\|^2_{E^q}} + \frac{C_4\|u_k\|_{E^q}}{\|u_k\|^2_{E^q}} + \frac{\left(C_5 + C_6\|u_k\|_{E^q}\right)^{\frac{2}{q}}}{\|u_k\|^2_{E^q}} = \frac{C_3}{\|u_k\|^2_{E^q}} + \frac{C_4}{\|u_k\|_{E^q}} + \left(\frac{C_5 + C_6\|u_k\|_{E^q}}{\|u_k\|^q_{E^q}}\right)^{\frac{2}{q}} \\ &= \frac{C_3}{\|u_k\|^2_{E^q}} + \frac{C_4}{\|u_k\|_{E^q}} + \left(\frac{C_5}{\|u_k\|^q_{E^q}} + \frac{C_6}{\|u_k\|^{q-1}_{E^q}}\right)^{\frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$ na desigualdade acima, segue que $1 \leq 0$, o que é um absurdo. Portanto $\{u_k\}_k$ é uma sequência limitada em E^q. A etapa 1 está finalizada.

Etapa 2: Mostrar que $\|u_k - u\|_{E^q} \to 0$, se $k \to \infty$, a menos de subsequência.

Desde que E^q é reflexivo, a menos de subsequência, tem-se que $u_k \rightharpoonup u$ em E^q (veja Teorema 1.1.1). Além disso, como $J'_\lambda(u) \in (E^q)'$, então $J'_\lambda(u)(u_k - u) = o_k(1)$, em que $o_k(1) \to 0$, quando $k \to \infty$. Por outro lado, por (3.2.2),

$$J'_\lambda(u_k)(u_k - u) \leq |J'_\lambda(u_k)(u_k - u)| \leq \|J'_\lambda(u_k)\|_{(E^q)'}\|u_k - u\|_{E^q} \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Assim, através de (3.2.5),

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_k)(u_k - u) = &\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u_k \nabla(u_k - u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k|^{q-2}u_k(u_k - u)\,\mathrm{d}x \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u_k^+)^{p-1}(u_k - u)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)(u_k - u) = &\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla(u_k - u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u|^{q-2}u(u_k - u)\,\mathrm{d}x \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)(u^+)^{p-1}(u_k - u)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

Prosseguindo com o cálculo,

$$\begin{aligned} o_k(1) &= J'_\lambda(u_k)(u_k - u) - J'_\lambda(u)(u_k - u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_k - \nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)(|u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u)(u_k - u)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)((u_k^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1})(u_k - u)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Por [41, Desigualdade 2.2], tem-se que para todo $y, z \in \mathbb{R}$ e $q \geq 2$, existe uma constante $C_7 := C_7(q) > 0$ tal que

$$(|z|^{q-2}z - |y|^{q-2}y)(z - y) \geq C_7|z - y|^q.$$

Dessa forma,

$$o_k(1) + \lambda A_k \geq \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla(u_k - u)|^2\,\mathrm{d}x + C_7 \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|u_k - u|^q\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.7}$$

em que

$$A_k = \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)((u_k^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1})(u_k - u)\,\mathrm{d}x.$$

Observe que pela Desigualdade de Hölder (veja 1.2.2), pode-se estimar

$$\begin{aligned}|A_k| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_k^+|^{p-1}|u_k - u|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u^+|^{p-1}|u_k - u|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|u_k^+\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)}\|u_k - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} + \|u^+\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)}\|u_k - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)}.\end{aligned}$$

Desde que a imersão $E^q \hookrightarrow E$ é contínua e a imersão $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n_+, a)$ é compacta (veja Lema 2.2.1, item (ii)), também temos que a imersão $E^q \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n_+, a)$ é compacta (veja Teorema 1.1.3). Sendo assim, $A_k = o_k(1)$. Esta convergência combinada com (3.2.7) infere que $\|u_k - u\|_{E^q} = o_k(1)$, o que encerra a demonstração. $\square$

Finalmente, mostraremos o resultado de existência de solução não-negativa.

Demonstração do item (ii) ***do Teorema 0.0.2***. Vamos verificar que J_λ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.1. Para isso, dividiremos a demonstração em duas partes.

<u>Parte 1:</u> Existem $r, \beta = \beta(r) > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq \beta > 0$, se $\|u\|_{E^q} = r$.

Desde que $E^q \hookrightarrow E$, pelo Lema 2.2.1 (item (i)) a imersão $E^q \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n_+, a)$ é contínua. Dessa maneira, existe $C_1 > 0$ tal que $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+,a)} \leq C_1\|u\|_{E^q}$, $\forall u \in E^q$. Por (3.2.3),

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} - \frac{\lambda}{p}C_1^p\|u\|^p_{E^q}.$$

Agora, considere $\|u\|_{E^q} \leq 1$. Assim, $\|u\|_E^2 \geq \|u\|_E^q$, pois $q \geq 2$ e $\|u\|_E \leq \|u\|_{E^q} \leq 1$. Dessa forma,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_E^q + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} - \frac{\lambda}{p}C_1^p\|u\|^p_{E^q} \geq \frac{1}{q}\|u\|_E^q + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)} - \frac{\lambda}{p}C_1^p\|u\|^p_{E^q}. \quad (3.2.8)$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{E^q} &= \left(\|u\|_E^2 + \|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)}\right)^{\frac{q}{2}} \leq \left(2\max\{\|u\|_E^2, \|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)}\}\right)^{\frac{q}{2}} \\ &= 2^{\frac{q}{2}}\left(\max\{\|u\|_E^2, \|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)}\}\right)^{\frac{q}{2}} = 2^{\frac{q}{2}}\left(\max\{\|u\|_E^q, \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)}\}\right) \\ &\leq 2^{\frac{q}{2}}\left(\|u\|_E^q + \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+,b)}\right).\end{aligned}$$

Aplicando esta última estimativa em (3.2.8), obtém-se

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2^{\frac{q}{2}}q}\|u\|^q_{E^q} - \frac{\lambda}{p}C_1^p\|u\|^p_{E^q} = \|u\|^q_{E^q}\left(\frac{1}{2^{\frac{q}{2}}q} - \frac{\lambda}{p}C_1^p\|u\|^{p-q}_{E^q}\right), \quad \text{se } \|u\|_{E^q} \leq 1.$$

Seja $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2^{\frac{q}{2}}q} - \frac{\lambda}{p}C_1^p r_0^{p-q} > 0 \iff \frac{1}{2^{\frac{q}{2}}q} > \frac{\lambda}{p}C_1^p r_0^{p-q} \iff \left(\frac{p}{\lambda C_1^p 2^{\frac{q}{2}}q}\right)^{\frac{1}{p-q}} > r_0.$$

Dessa forma, escolhendo $r = \min\{1, r_0\} > 0$, se $\|u\|_{E^q} = r$, segue que

$$J_\lambda(u) \geq \beta := r^q \left(\frac{1}{2^{\frac{q}{2}} q} - \frac{\lambda}{p} C_1^p r^{p-q} \right) > 0.$$

<u>Parte 2:</u> Existe $e \in E^q \setminus \{0\}$ tal que $\|e\|_{E^q} > r$ e $J_\lambda(e) < 0$.

Seja $v \in E^q \setminus \{0\}$ fixado. Para $t > 0$ arbitrário, tem-se que $tv \in E^q$ e

$$\begin{aligned} J_\lambda(tv) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla(tv)|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n_+} b(x)|tv|^q \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^n_+} a(x)((tv)^+)^p \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2} \|v\|_E^2 + \frac{t^q}{q} \|v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+, b)} - \frac{t^p \lambda}{p} \|v^+\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+, a)}. \end{aligned}$$

Uma vez que $2 \leq q < p$, obtém-se

$$\lim_{t \to \infty} J_\lambda(tu) = -\infty.$$

Dessa forma, é possível obter um $t_0 > 0$ suficientemente grande, tal que $\|t_0 v\|_{E^q} > \rho$ e $J_\lambda(t_0 v) < 0$. Tomando $e := t_0 v$, completamos a parte 2.

Note que a parte 1 garante que $b := \inf\limits_{\|u\|_{E^q} = r} J_\lambda(u) \geq \beta > 0$. Diante da parte 2, temos que

$$a := \max\{J_\lambda(0), J_\lambda(e)\} = 0 < b.$$

Desde que J_λ satisfaz a condição (PS) (veja em Lema 3.2.2), através do Teorema 3.2.1, podemos inferir que existe $u_\lambda \in E^q$ tal que

$$J_\lambda(u_\lambda) = c_{PM} \geq b > 0 \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_\lambda)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in E^q.$$

Neste caso u_λ é ponto crítico de J_λ e pelo Lema 3.2.1, $u_\lambda \geq 0$ em $\mathbb{R}^n_+$ e u_λ é ponto crítico de I_λ. Em particular u_λ é solução do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ (veja Observação 2.3.1).

Por fim, $u_\lambda \neq 0$, pois do contrário

$$0 < c_{PM} = J_\lambda(0) = 0,$$

que seria um absurdo. A demonstração encerra aqui. □

Observação 3.2.1. *Vale ressaltar que se $\alpha > 2$ em $(\widetilde{H}_1)$, então o Teorema 0.0.2 também é verdadeiro para quaisquer $2 \leq q < p < 2^*$. Isso é importante pois representa, para cada $\lambda > 0$, uma ampliação das possibilidades de valores para p e q, em relação a hipótese anteriormente adotada. Neste caso, sem qualquer prejuízo as contas que foram feitas ao longo desta seção, bastaria substituir as hipóteses $2_* \leq p < 2^*$ e $2 \leq q < p$ pela hipótese $2 \leq q < p < 2^*$, e utilizar a imersão compacta $E^q \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ advinda da composição (veja Teorema 1.1.3) da imersão contínua $E^q \hookrightarrow E$ com a imersão compacta $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^n_+, a\right)$ do item (iv) do Lema 2.2.1.*

Bibliografia

[1] Alama, S. *Semilinear elliptic equations with sublinear indefinite nonlinearities, Adv. Differential Equations* **4** (1999) 813–842.

[2] Alama, S.; Tarantello, G. *Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign*, J. Funct. Anal. **141** (1996) 159–215.

[3] Ambrosetti, A.; Brezis, H.; Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994) 519–543.

[4] Amster, P. *Multiple solutions for an elliptic system with indefinite Robin boundary conditions*, Adv. Nonlinear Anal.**8** (2019) 603–614.

[5] Aronson, D. G.; Weinberger, H. F. *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. **30** (1978) 33–76.

[6] Bandle, C.; Essen, M. *On positive solutions of Emden equations in cone-like domains*, Arch. Ration. Mech. Anal. **112** (1990) 319–338.

[7] Bartle, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, 1995.

[8] Berestycki, H.; Capuzzo-Dolcetta, I.; Nirenberg, L. *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **2** (1995) 553–572.

[9] Byeon, J.; Wang, Z. *On the Hénon equation with a Neumann boundary condition: Asymptotic profile of ground states*, J. Funct. Anal. **274** (2018) 3325–3376.

[10] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[11] Chabrowski, J. *Elliptic variational problems with indefinite nonlinearities*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **9** (1997) 221–231.

[12] Chen, S.; Li, S. *Hardy-Sobolev inequalities in half-space and some semilinear elliptic equations with singular coefficients*, Nonlinear Anal. **66** (2007) 324–348.

[13] Chen, C.; Liu, S.; Yao, H. *Existence of solutions for quasilinear elliptic exterior problem with the concave-convex nonlinearities and the nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **383** (2011) 111–119.

[14] Chipot, M.; Chlebík, M.; Fila, M.; Shafrir, I. *Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^n_+$ with a nonlinear boundary condition*, J. Math. Anal. Appl. **223** (1998) 429–471.

[15] Chipot, M.; Shafrir, I.; Fila, M. *On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions*, Adv. Differential Equations **1** (1996) 91–100.

[16] Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity. VI. Three-Dimensional Elasticity, North-Holland*, Amsterdam, 1988.

[17] Cîrstea, F.; Radulescu, V. *Existence and non-existence results for a quasilinear problem with nonlinear boundary condition*, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000) 169–183.

[18] Cîrstea, F.; Radulescu, V. *On a class of quasilinear eigenvalue problems on unbounded domains*, Arch. Math. **77** (2001) 337–346.

[19] Costa, D. G. *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*. Birkhäuser Boston. (2007)

[20] Diaz, J. I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries, in: Elliptic Equations*, Pitman Adv. Publ. Boston etc, 1986.

[21] Dillon, A.; Maini, P. K.; Othmer, H. G. *Pattern formation in generalized turing systems, I. Steady-state patterns in systems with mixed boundary conditions*, J. Math. Biol. **32** (1994) 345–393.

[22] Escobar, J. *Sharp constant in a Sobolev trace inequality*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988) 687–698.

[23] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Rhode Island: American Mathematical Society, v. **19**, 1990.

[24] Filippas, S.; Moschini, L.; Tertikas, A. *On a class of weighted anisotropic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **255** (2008) 90–119.

[25] Filippas, S.; Moschini, L.; Tertikas, A. *Sharp trace Hardy-Sobolev-Maz'ya inequalities and the fractional Laplacian*, Arch. Ration. Mech. Anal. **208** (2013) 109–161.

[26] Filippucci, R.; Pucci, P.; Radulescu, V. *Existence and non-existence results for quasilinear elliptic exterior problems with nonlinear boundary conditions,* Comm. Partial Differential Equations **33** (2008) 706–717.

[27] Folland, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

[28] Hess, P.; Kato, T. *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980) 999–1030.

[29] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition, 1989.

[30] Lyberopoulos, A.N. *Existence and Liouville-type theorems for some indefinite quasilinear elliptic problems with potentials vanishing at infinity*, J. Funct. Anal. **14** (2009) 3593–3616.

[31] Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces*, Springer, Berlin, 1985.

[32] Papageorgiou, N.S.; Radulescu, V.D.; Repovˇs, D.D. *Nonlinear Analysis - Theory and Methods*, in: Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature, Cham, 2019.

[33] Papageorgiou, N.S.; Radulescu, V. D.; Repovs, D. D. *Positive solutions for a class of singular Dirichlet problems*, J. Differential Equations **267** (2019) 6539–6554.

[34] Papageorgiou, N.S.; Radulescu, V. D.; Repovˇs, D. D. *Positive solutions for nonlinear parametric singular Dirichlet problems*, Bull. Math. Sci. **9** (2019) 1950011, 21 pp.

[35] Perera, K. *Multiple positive solutions for a class of quasilinear elliptic boundary-value problems*, Electron. J. Differential Equations **07** (2003) 1–5.

[36] Perera, K.; Pucci, P.; Varga, C. *An existence result for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems in unbounded domains*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **21** (2014) 441–451.

[37] Pflüger, K. *Existence and multiplicity of solutions to a p-Laplacian equation with nonlinear boundary condition*, Electron. J. Differential Equations **10** (1998) 1–13.

[38] Pucci, P.; Radulescu, V. D. *Combined eff ects in quasilinear elliptic problems with lack of compactness*, Rend. Lincei Mat. Appl. **22** (2011) 189–205.

[39] Radulescu, V. D.; Repovs, D. D. *Combined effects in nonlinear problems arising in the study of anisotropic continuous media*, Nonlinear Anal. **75** (2012) 1524–1530.

[40] Shi, S. J.; Li, S. J. *Existence of solutions for a class of semilinear elliptic equations with the robin boundary value condition*, Nonlinear Anal. **71** (2009) 3292–3298.

[41] Simon, J. *Regularité de la Solution D'Une Equation Non Lineaire Dans* $\mathbb{R}^N$, in: Lecture Notes in Math, vol. 665, Springer, Heidelberg, 1978.

[42] Souza, M. X. de; Felix, D. D.; Medeiros, E. S. de. *Nonlinear Analysis*, **197** (2020) 111840.

[43] Tidblom, J. *A Hardy inequality in the half-space*, J. Funct. Anal. **221** (2005) 482–495.

[44] Tintarev, K.; Fieseler, K.-H. *Concentration Compactness: Functional-Analytic Grounds and Applications*, Imperial College Press (2007).

[45] Zhang, J.; Li, S.; Xue, X. *Multiple solutions for a class of semilinear elliptic problems with robin boundary condition*, J.Math. Anal. Appl. **388** (2012) 435–442.