

Universidade Federal de Sergipe
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação

Robótica e Cálculo de Volumes no Ensino Médio

por

José Rhamar dos Santos Nunes

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão - SE

Agosto de 2024

Universidade Federal de Sergipe
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Matemática

Robótica e Cálculo de Volumes no Ensino Médio

*Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em
Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do
título de Mestre em Matemática.*

José Rhamar dos Santos Nunes

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão - SE, 28 de Agosto de 2024.



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



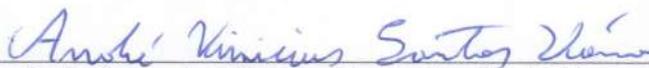
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Robótica e Cálculo de Volumes no Ensino Médio

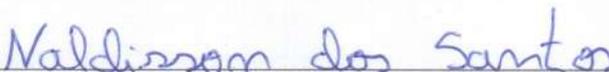
por

JOSE RHAMAR DOS SANTOS NUNES

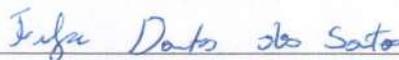
Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Andre Vinicius Santos Doria - UFS
Orientador



Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Agosto de 2024.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Nunes, José Rhamar dos Santos
N972r Robótica e cálculo de volumes no ensino médio / José Rhamar dos Santos Nunes; orientador André Vinicius Santos Dória. – São Cristóvão, SE, 2024.
71 f.; il.

Dissertação (mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Robótica na educação. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Geometria espacial. I. Dória, André Vinicius Santos, orient. II. Título.

CDU 51:37

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, cuja orientação e força foram fundamentais ao longo de toda a jornada deste trabalho. Sem Sua sabedoria e apoio constante, este projeto não teria sido possível.

Agradeço também a minha esposa Samara Melo e meus filhos, pelo amor incondicional, compreensão e incentivo. Seu apoio constante foi um pilar essencial durante todo o processo de pesquisa e escrita.

Ao meu orientador, André, sou imensamente grato pela orientação experiente, sugestões valiosas e paciência ao longo deste trabalho. Sua orientação foi crucial para a conclusão deste projeto.

Aos colegas remanescentes da turma 2022, Mário, Agna e Jhon e, colegas de outras turmas como Rômulo; com os grupos de estudos longos e duros, mas que sempre ajudaram a enfrentar as disciplinas.

Aos meus amigos e colegas, pelo suporte emocional, discussões enriquecedoras e por estarem sempre disponíveis para ouvir e oferecer conselhos.

À equipe do Centro de Excelência Santos Dumont, agradeço pela colaboração e pelo fornecimento dos recursos necessários para a realização desta pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

E, finalmente, a todos que, de alguma forma, contribuíram para o sucesso deste trabalho, meu sincero agradecimento. Cada contribuição foi significativa e contribuiu para a realização deste projeto.

Resumo

O presente trabalho aborda a robótica educacional, geometria tridimensional e cálculo de volumes no Ensino Médio. Utilizando tecnologias como GeoGebra, impressão 3D e Arduino, a pesquisa propõe o uso de um braço robótico para tornar o ensino de matemática mais dinâmico e prático. As aulas incluem introduções teóricas seguidas de atividades práticas, onde os alunos montam e programam o braço robótico para explorar conceitos matemáticos. O método visa desenvolver habilidades técnicas e promover a colaboração. A visualização tridimensional através do GeoGebra e a manipulação de modelos físicos, impressos em uma impressora 3D, auxiliam na compreensão de volumes. A abordagem prática melhora a compreensão e desperta interesse em carreiras STEM, transformando a experiência de aprendizado em algo mais significativo e estimulante, proporcionando aos alunos uma vivência clara e prática da matemática em funcionamento.

Palavras-chave: Robótica Educacional, Ensino de Matemática, Volume, Sólidos

Abstract

This work addresses educational robotics, three-dimensional geometry, and volume calculation in high school. Using technologies like GeoGebra, 3D printing, and Arduino, the research proposes the use of a robotic arm to make the teaching of mathematics more dynamic and practical. The lessons include theoretical introductions followed by practical activities, where students assemble and program the robotic arm to explore mathematical concepts. The method aims to develop technical skills and promote collaboration. Three-dimensional visualization through GeoGebra and the manipulation of physical models, printed on a 3D printer, assist in understanding volumes. The practical approach improves comprehension and sparks interest in STEM careers, transforming the learning experience into something more meaningful and stimulating, providing students with a clear and practical understanding of mathematics in action.

Keywords: Educational Robotics, Mathematics Teaching, Volume, Solids

Sumário

1	Tecnologias	3
1.1	Educação Digital	4
1.2	Ensino de Matemática	4
1.2.1	GeoGebra	5
1.2.2	Impressão 3D	6
1.2.3	Arduino	8
2	Braço Robótico	11
2.1	Histórico	12
2.2	Braço robótico planar com 3 links	14
2.2.1	Cinemática direta	15
2.2.2	Convenção de Denavit-Hartenberg (DH)	16
2.3	Cinemática Direta e a Última Coluna da Matriz de Transformação	20
2.4	Na escola	20
2.4.1	Planejamento de Aulas: Aplicação da Trigonometria	22
2.5	Exemplo	26
3	Cálculo de Volumes	31
3.1	Importância na educação	32
3.2	O ensino de sólidos e volumes no brasil	34
3.2.1	Ensino Fundamental (Anos Finais)	34
3.2.2	Ensino Médio	34
3.2.3	Metodologias de Ensino	35
3.3	GeoGebra	35
3.4	Impressora 3D	38

4 Na prática	42
4.1 Trigonometria com braço robótico	43
4.1.1 Descrição das Atividades	44
4.2 Sólidos com GeoGebra e impressora 3D	49
4.3 Relatos de Alunos e Professores	58
4.3.1 Relato do Professor Emanuel Dantas de Oliveira Júnior	58
4.3.2 Relato das Alunas Maria Clara e Marina Bilhalva	59
4.3.3 Relato da Aluna Laura Alcântara	59
4.4 Conclusão	60
Bibliografia	64

Introdução

O ensino de matemática tem evoluído significativamente com o avanço das tecnologias, proporcionando novas formas de engajar os estudantes e facilitar a compreensão de conceitos abstratos. Duas dessas tecnologias emergentes são a robótica educacional que ajudam na aplicação de conceitos de trigonometria, sólidos e volumes. Este trabalho propõe um planejamento de aulas voltado para o Ensino Médio, onde os alunos podem explorar os princípios da trigonometria, da geometria tridimensional.

O GeoGebra, a impressão 3D e o Arduino têm demonstrado um impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem. Esses recursos permitem que os alunos visualizem conceitos matemáticos complexos de maneira prática e interativa, promovendo um aprendizado mais profundo e significativo.

O braço robótico, uma tecnologia inicialmente desenvolvida para aplicações industriais, oferece uma plataforma dinâmica para explorar conceitos matemáticos em um contexto real. Ao programar e controlar um braço robótico, os alunos podem aplicar diretamente os conhecimentos de trigonometria e com uma impressora 3D, podem aprender geometria espacial, entendendo melhor como esses conceitos são utilizados na resolução de problemas reais. Esta abordagem não apenas torna o aprendizado mais interessante, mas também prepara os alunos para futuras carreiras em áreas tecnológicas e científicas.

O principal do uso de um braço robótico nas aulas é a forte relação com a trigonometria e geometria tridimensional. Estes conceitos se aplicam na movimentação de um braço robótico; e são a base para desenvolver as habilidades práticas em programação e robótica, utilizando Arduino para controlar o braço robótico; estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas, e o trabalho em equipe.

O cálculo de volumes é uma parte fundamental da educação matemática no ensino médio, combinando conceitos abstratos de geometria com aplicações práticas. Este capítulo explora como o domínio desse conhecimento desenvolve habilidades críticas de

visualização e modelagem. Abordaremos o uso de tecnologias, como impressão 3D e GeoGebra, para facilitar a compreensão desses conceitos, oferecendo uma abordagem mais interativa e prática. O objetivo é apresentar metodologias eficazes de ensino e estratégias que aumentem o engajamento dos estudantes, abordando as lacunas e desafios do ensino de sólidos e volumes no Brasil, e propondo soluções inovadoras para aprimorar o aprendizado e estimular o interesse dos alunos nas áreas de STEM.

Para alcançar esses objetivos, serão utilizadas metodologias ativas de ensino, onde os alunos são colocados no centro do processo de aprendizagem. Algumas das metodologias a serem aplicadas incluem a Aprendizagem Baseada em Projetos, a Aprendizagem Colaborativa, o Ensino Híbrido; e a Avaliação Formativa, (acompanhamento contínuo do progresso dos alunos através de feedbacks e ajustes nas atividades conforme necessário). Com esta abordagem, espera-se que os estudantes não apenas compreendam melhor a trigonometria e a geometria tridimensional, mas também ganhem confiança e interesse em seguir carreiras nas áreas de ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM).

Por fim, este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, são exploradas as tecnologias aplicadas à educação matemática, destacando ferramentas como GeoGebra, impressão 3D e Arduino, que viabilizam uma abordagem mais interativa no ensino de conceitos geométricos e de cálculo de volumes. O Capítulo 2 foca no desenvolvimento de um braço robótico, abordando desde o histórico dos braços robóticos até a implementação prática em salas de aula, enfatizando a aplicação da trigonometria utilizando GeoGebra e a programação com Arduino. No Capítulo 3, são discutidos os aspectos teóricos e práticos do cálculo de volumes, incluindo a importância desse conhecimento na educação e as metodologias inovadoras que empregam impressoras 3D e GeoGebra para facilitar a compreensão de sólidos geométricos. Finalmente, o Capítulo 4 apresenta a aplicação prática dos conceitos discutidos anteriormente, incluindo atividades que combinam o uso do braço robótico com o ensino de trigonometria, além da utilização de ferramentas como GeoGebra e impressoras 3D para explorar a geometria de sólidos, culminando com a conclusão sobre os resultados e contribuições desta pesquisa.

Capítulo 1

Tecnologias

A palavra tecnologia tem origem no grego “tekhne” que significa técnica, arte, ofício, juntamente com o sufixo “logia”, que significa estudo. Assim, a tecnologia pode ser vista como o conjunto de conhecimentos, métodos, técnicas e processos usados na produção de bens e serviços, na resolução de situações problema e na melhoria da qualidade de vida.

Essa definição reflete o conceito geral de tecnologia como um conjunto de conhecimentos e práticas empregados para criar, desenvolver e melhorar produtos, sistemas e serviços. Ela conglobera tanto o conhecimento científico quanto as habilidades práticas e as ferramentas usadas para aplicar esse conhecimento. Tecnologia é uma parte basilar da existência moderna e está presente em uma extensa variedade de campos e atividades inclusive no meio educacional.

A tecnologia não se limita apenas aos dispositivos eletrônicos ou sistemas digitais, mas engloba um espectro amplo de conhecimentos e práticas em diversas áreas, como na agricultura, onde temos tratores autônomos guiados por GPS, na medicina, com cirurgias auxiliadas por robôs, na engenharia e entre outras. Além disso, a tecnologia desempenha um papel fundamental na resolução de problemas e na melhoria da qualidade de vida das pessoas em todo o mundo.

No contexto educacional, a tecnologia também é cada vez mais utilizada como uma ferramenta para facilitar a aprendizagem, tornando-a mais acessível e eficaz através de dispositivos digitais como computadores, celulares, TVs e tablets.

1.1 Educação Digital

A tecnologia está se tornando cada vez mais uma parte integral da educação no Brasil, com um impacto significativo em todos os níveis de ensino, desde a educação básica até o ensino superior.

A crescente disponibilidade de acesso à internet, dispositivos digitais e recursos educacionais online tem ampliado as oportunidades de aprendizado. Plataformas de ensino online, sistemas de gerenciamento de aprendizado e aplicativos educacionais são amplamente usados por instituições de ensino para administrar cursos, distribuir conteúdo e promover a interação entre professores e alunos.

A tecnologia está inserida na educação de diversas maneiras, tanto no ensino presencial quanto no ensino remoto, onde a tecnologia é essencial para a realização das aulas e das atividades. Os recursos tecnológicos permitem que os professores e alunos se comuniquem e colaborem de forma remota, mesmo que estejam em diferentes locais. Alguns exemplos de como a tecnologia está inserida na educação:

- **Computadores e tablets:** os alunos podem usar esses dispositivos para acessar informações, assistir a vídeos, realizar pesquisas, criar trabalhos, etc;
- **Softwares educacionais:** esses softwares apoiam a educação e o processo de ensino-aprendizagem. Podem apresentar diferentes formatos, como exercícios práticos, jogos educativos, simulações, entre outros;
- **Plataformas de ensino online:** essas plataformas permitem que os alunos acessem conteúdo e atividades de forma remota.

1.2 Ensino de Matemática

A tecnologia desempenha um papel fundamental no ensino da matemática, tornando esse campo do conhecimento mais acessível, envolvente e eficaz para alunos de todas as idades. Uma das principais maneiras pelas quais a tecnologia auxilia no ensino da matemática é por meio de aplicativos e softwares educacionais interativos. Essas ferramentas oferecem exercícios práticos, simulações e jogos que ajudam os alunos a visualizar conceitos matemáticos abstratos de maneira concreta e lúdica. Isso torna a matemática mais envolvente e facilita a compreensão de conceitos complexos.

A tecnologia também permite a personalização da aprendizagem. Com a ajuda de algoritmos de aprendizado de máquina, os professores podem adaptar os materiais de ensino e os exercícios com base no progresso e nas necessidades individuais de cada aluno. Isso é particularmente valioso, pois os alunos têm diferentes níveis de proficiência em matemática, e a tecnologia pode ajudar a preencher lacunas de conhecimento.

Outro benefício da tecnologia no ensino da matemática é a capacidade de acesso remoto a recursos educacionais. Isso é especialmente importante em situações de ensino a distância, como as que ocorreram durante a pandemia de COVID-19. Alunos podem acessar videoaulas, tutoriais, bancos de exercícios e materiais de referência a partir de casa, o que mantém o aprendizado contínuo.

Além disso, a tecnologia permite a realização de cálculos complexos de forma rápida e precisa. Calculadoras, softwares de matemática simbólica e planilhas eletrônicas são ferramentas que auxiliam os alunos a resolver problemas matemáticos e a realizar análises estatísticas com maior facilidade, economizando tempo e minimizando erros.

Em resumo, a tecnologia ajuda no ensino da matemática, tornando-o mais interativo, adaptável, acessível e eficiente. Ela capacita os alunos a explorar conceitos matemáticos de maneira prática e envolvente, bem como a receber suporte personalizado para maximizar seu potencial na área da matemática. Essa combinação de recursos tecnológicos e instrução tradicional pode melhorar significativamente o aprendizado e a compreensão da matemática.

Neste trabalho serão abordados as seguintes tecnológicas: GeoGebra, impressão 3D e plataforma de prototipagem Arduino.

1.2.1 GeoGebra

O GeoGebra é um software educacional dinâmico que combina geometria, álgebra, planilha, gráficos, cálculo e estatística em um único ambiente integrado. Ele é utilizado principalmente para o ensino e aprendizado de matemática, permitindo que os usuários explorem conceitos matemáticos de forma interativa e visual. Aqui estão alguns aspectos do GeoGebra:

- **Interface Dinâmica:** possui uma interface interativa que permite aos usuários criar, modificar e explorar objetos matemáticos em tempo real. Isso facilita a compreensão de conceitos abstratos por meio de representações visuais.

- **Múltiplas Representações:** suporta diferentes formas de representação matemática, incluindo gráficos, tabelas, geometria e álgebra. Isso permite que os estudantes vejam como conceitos matemáticos estão relacionados em diferentes formas.
- **Facilidade de Uso:** projetado para ser intuitivo e fácil de usar, tornando-o acessível a estudantes e professores em vários níveis de ensino.
- **Material de Aprendizado:** o GeoGebra oferece materiais de aprendizado, tutoriais e recursos online que auxiliam professores e alunos no processo de ensino e aprendizado.
- **Aplicações Diversas:** utilizado em uma variedade de áreas educacionais, desde o ensino fundamental até o ensino superior. Ele pode ser empregado para explorar geometria, álgebra, cálculo, estatística e outras disciplinas relacionadas à matemática.
- **Gratuito e de Código Aberto:** o GeoGebra é um software de código aberto, o que significa que os usuários têm acesso ao código-fonte e podem contribuir para o seu desenvolvimento. Além disso, existe uma versão gratuita disponível para uso.

O GeoGebra é uma ferramenta valiosa para tornar o ensino e a aprendizagem da matemática mais dinâmicos, interativos e compreensíveis. Se você estiver envolvido com o ensino ou aprendizado de matemática, pode ser útil explorar e integrar o GeoGebra em suas práticas educacionais. Sem contar que o site oficial do GeoGebra oferece tutoriais, documentação, fóruns e uma variedade de recursos que podem ser úteis para aprender sobre o software.

1.2.2 Impressão 3D

A impressão 3D é uma tecnologia que cria objetos tridimensionais camada por camada a partir de modelos digitais. Também conhecida como fabricação aditiva, essa abordagem adiciona material para construir objetos, diferentemente dos métodos tradicionais que subtraem material. Existem várias tecnologias de impressão 3D, como Fused Deposition Modeling (FDM), Stereolithography (SLA) e Selective Laser Sintering (SLS), cada uma utilizando métodos distintos para a construção de objetos tridimensionais.

Os materiais usados na impressão 3D são diversos, incluindo plásticos, metais, cerâmicas e até materiais biológicos, dependendo da aplicação específica. A impressão 3D

encontra aplicações em diversas indústrias, como manufatura, saúde, arquitetura, automotiva e aeroespacial. É utilizada para prototipagem rápida, fabricação personalizada, produção de peças complexas e até mesmo na medicina, para imprimir órgãos e tecidos.

Para criar objetos em 3D, é necessário um modelo digital, que pode ser desenvolvido por meio de software de modelagem 3D, permitindo a criação e modificação de modelos tridimensionais.

Apesar dos avanços, a impressão 3D enfrenta desafios, como a velocidade de impressão, a qualidade dos materiais e as limitações de tamanho. O custo das impressoras 3D varia, desde modelos acessíveis para uso doméstico até impressoras industriais mais caras, e os materiais também apresentam variações de custo. Do ponto de vista ético e legal, a impressão 3D levanta questões, especialmente relacionadas à impressão de objetos protegidos por direitos autorais, armas de fogo e itens que podem representar riscos à segurança. A tecnologia continua a evoluir, com novas aplicações e melhorias constantes.

A integração da impressão 3D na matemática oferece oportunidades inovadoras para engajar os alunos e aprimorar a compreensão de conceitos matemáticos abstratos. Aqui estão algumas maneiras pelas quais a impressão 3D pode ser aplicada no contexto da matemática:

- **Visualização de Conceitos Abstratos:** permite que os alunos visualizem conceitos matemáticos abstratos de maneira tangível. Modelos tridimensionais podem representar geometria, funções matemáticas e formas complexas, tornando esses conceitos mais concretos e compreensíveis.
- **Prototipagem e Experimentação:** os alunos podem criar e imprimir modelos de suas próprias criações matemáticas. Isso encoraja a experimentação e a exploração criativa de padrões, formas e relações matemáticas.
- **Resolução de Problemas:** pode ser utilizada para resolver problemas práticos que envolvem conceitos matemáticos. Os alunos podem projetar e imprimir objetos que exigem cálculos matemáticos, promovendo a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.
- **Aprendizado Interdisciplinar:** facilita a integração de disciplinas, permitindo que os alunos explorem conexões entre matemática e outras áreas, como ciência,

tecnologia, engenharia e arte. Isso promove uma compreensão mais holística e contextualizada dos conceitos matemáticos.

- **Modelagem de Problemas do Mundo Real:** pode ser usada para criar modelos físicos de situações do mundo real que envolvem conceitos matemáticos, como topografia, estatísticas, ou até mesmo representações tridimensionais de gráficos e funções.
- **Estímulo à Criatividade:** ao permitir que os alunos projetem e imprimam seus próprios modelos, esta ferramenta estimula a criatividade e a resolução de problemas de maneira prática e tangível.
- **Acesso a Recursos Visuais:** proporciona aos educadores uma ferramenta valiosa para criar recursos visuais personalizados que atendam às necessidades específicas de seus alunos, tornando os conceitos matemáticos mais acessíveis.

Integrar a impressão 3D na educação matemática não apenas torna os conceitos mais concretos, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios do mundo real, promovendo habilidades essenciais, como pensamento crítico, resolução de problemas e colaboração. Diante dos aspectos mencionados, a impressão 3D se mostra bem útil na matemática.

1.2.3 Arduino

A plataforma de prototipagem Arduino refere-se a uma plataforma de hardware e software de código aberto usada para criar protótipos de projetos eletrônicos. O coração da plataforma é uma placa de circuito impresso chamada Arduino, que é equipada com um microcontrolador e uma série de pinos de entrada/saída que permitem conectar sensores, atuadores e outros componentes eletrônicos. A plataforma Arduino inclui também um ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) que permite escrever, compilar e fazer upload de código para a placa Arduino. O Arduino IDE é fácil de usar, mesmo para iniciantes, e suporta a linguagem de programação baseada em C/C++.

Principais características da plataforma Arduino:

- **Placas Arduino:** existem vários modelos, cada uma com particularidades específicas. Alguns exemplos incluem o Arduino Uno, Arduino Mega, Arduino Nano,

entre outros.

- **Microcontrolador:** cada placa Arduino é equipada com um microcontrolador, geralmente da família Atmel AVR. O microcontrolador é o cérebro do sistema e executa o código que você escreve.
- **Pinos de E/S (Entrada/Saída):** as placas Arduino possuem pinos de entrada e saída que permitem conectar sensores, atuadores e outros dispositivos eletrônicos. Alguns desses pinos têm funções específicas, como saídas PWM (Modulação por Largura de Pulso) e entradas analógicas.
- **Arduino IDE:** o ambiente de desenvolvimento integrado Arduino IDE é usado para escrever e carregar código para a placa Arduino. Ele inclui um editor de código, compilador e ferramentas para carregar o código na placa.
- **Linguagem de Programação:** a programação é feita utilizando uma linguagem de programação baseada em C e C++. No entanto, o Arduino IDE simplifica muitos detalhes complexos, tornando o código mais acessível para iniciantes.
- **Bibliotecas:** o Arduino IDE suporta bibliotecas que contêm funções pré-programadas para realizar tarefas específicas. Isso facilita o desenvolvimento, pois você pode reutilizar código existente em seus projetos.

A plataforma Arduino é amplamente utilizada em projetos de hobby, educação e prototipagem rápida devido à sua acessibilidade e versatilidade. Ela oferece uma maneira fácil para iniciantes aprenderem sobre eletrônica e programação, ao mesmo tempo em que é poderosa o suficiente para projetos mais avançados.

O mundo passa constantemente por revoluções tecnológicas nas áreas de programação e eletrônica, sendo assim é imprescindível que os alunos tenham algum contato, nem que seja superficial, é justamente neste quesito que o Arduino vem para auxiliar.

A plataforma de prototipagem Arduino tem se mostrado uma ferramenta valiosa na matemática, proporcionando uma abordagem prática e interativa para o ensino e aprendizado de conceitos matemáticos. O Arduino pode ser integrado a matemática de algumas formas mostradas a seguir:

- **Ensino de Programação e Lógica Matemática:** a programação é uma habilidade importante na resolução de problemas matemáticos. Utilizar o Arduino no

ensino de programação introduz conceitos de lógica matemática, estruturas de controle, loops e condicionais. Alunos podem criar programas para realizar cálculos matemáticos, resolver equações e implementar algoritmos, proporcionando uma aplicação prática dos conceitos aprendidos em sala de aula.

- **Sensoriamento e Coleta de Dados:** o Arduino pode ser conectado a sensores que medem grandezas físicas como temperatura, luz, distância, entre outras. Os dados coletados podem ser usados para análises matemáticas. Alunos podem projetar experimentos, coletar dados em tempo real e, em seguida, analisar esses dados para extrair informações e padrões, promovendo uma compreensão prática de estatística e probabilidade.
- **Geometria e Trigonometria:** a criação de projetos físicos com o Arduino permite aos alunos explorar conceitos de geometria e trigonometria de maneira tangível. Por exemplo, eles podem construir um dispositivo que mede ângulos usando sensores ou criar um robô que se movimenta de acordo com coordenadas cartesianas. A visualização prática desses conceitos ajuda os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda e concreta das relações geométricas e trigonométricas.
- **Matemática Aplicada:** projetos Arduino podem ser concebidos para resolver problemas do mundo real que requerem habilidades matemáticas. Isso envolve a formulação de problemas, a modelagem matemática e a implementação prática. Exemplos incluem a criação de dispositivos de controle de temperatura, sistemas de automação residencial ou até mesmo simulações matemáticas que mostram a evolução de variáveis ao longo do tempo.
- **Desenvolvimento de Jogos Educativos:** alunos podem criar jogos educativos que envolvem conceitos matemáticos. Isso não apenas torna o aprendizado divertido, mas também incentiva a resolução de problemas e o pensamento crítico. Os jogos podem abranger desde questões de aritmética básica até problemas mais avançados, dependendo do nível de ensino.

Integrar o Arduino na matemática não só torna o aprendizado mais envolvente, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios do mundo real, onde as habilidades matemáticas são frequentemente aplicadas em um contexto prático e interdisciplinar.

Capítulo 2

Braço Robótico

Podemos descrever um braço manipulador robótico como um dispositivo mecânico com articulações interconectadas, semelhante ao braço humano, projetado para realizar tarefas específicas de manipulação ou movimentação de objetos. Esses dispositivos são amplamente utilizados em diversas aplicações industriais, científicas e comerciais, devido à sua capacidade de automatizar processos repetitivos, lidar com objetos pesados ou perigosos, e realizar tarefas precisas e complexas.

Listamos algumas das características e aspectos relacionados aos braços manipuladores robóticos:

- **Graus de Liberdade:** geralmente possuem articulações que proporcionam diferentes graus de liberdade, permitindo movimentos em várias direções. O número de graus de liberdade depende do design específico do braço robótico.
- **Sensores:** muitos estão equipados com sensores para perceber o ambiente ao seu redor. Isso pode incluir câmeras, sensores de proximidade, sensores de força/torque, entre outros, para melhorar a capacidade do robô de interagir com seu ambiente.
- **Programação:** a programação pode ser feita de várias maneiras. Alguns sistemas utilizam programação offline, onde o movimento do robô é simulado e otimizado em um ambiente virtual antes de ser transferido para o robô real. Outros usam programação em tempo real ou aprendizado de máquina para adaptar o comportamento do robô conforme necessário.
- **Design Modular:** Alguns sistemas são modulares, o que significa que os usuários

podem adaptar e personalizar a configuração do braço de acordo com suas necessidades específicas.

- **Controle:** O controle pode ser realizado por meio de diversos métodos, incluindo controle remoto, programação por meio de linguagens específicas para robótica, ou até mesmo por meio de interfaces de usuário gráficas.

Os braços manipuladores robóticos desempenham um papel fundamental na automação de tarefas industriais (montagem, soldagem, embalagem, etc) e em diversas outras áreas, proporcionando eficiência, precisão e segurança em uma variedade de aplicações. Além das aplicações industriais, os braços robóticos encontraram uso em setores como a medicina (cirurgia robótica), exploração espacial, agricultura, logística, automação residencial e entre muitas outras áreas.

2.1 Histórico

A história do braço robótico remonta às últimas décadas do século XX, com o desenvolvimento inicial focado principalmente em aplicações industriais. Aqui estão alguns marcos importantes na evolução dos braços robóticos que pode ser dividida em três períodos principais:

- **Período inicial (1920-1950)**

Os primeiros braços robóticos foram desenvolvidos no início do século XX, mas eram muito simples e limitados em suas capacidades. Em 1921, o engenheiro americano John Parsons desenvolveu um braço robótico para a fabricação de armas. Este braço era controlado por um sistema de fios e podia realizar tarefas simples, como a colocação de peças em uma máquina.

Em 1954, o engenheiro americano George Devol patenteou o primeiro robô automático. Este robô era composto de um conjunto de articulações interligadas que eram acionadas por motores elétricos. O robô podia realizar tarefas simples, como a transferência de objetos de um ponto a outro.

- **Período de desenvolvimento (1950-1980)**

No período de desenvolvimento, os braços robóticos se tornaram mais sofisticados e capazes de realizar tarefas mais complexas. Em 1956, o engenheiro americano Joseph

Engelberger fundou a Unimation, a primeira empresa a produzir robôs industriais. Os robôs da Unimation foram usados em uma variedade de aplicações industriais, incluindo a soldagem, a pintura e a montagem.

Em 1969, o estudante de engenharia mecânica Victor Scheinman desenvolveu o Stanford Arm, o primeiro braço robótico de pesquisa. O Stanford Arm era um braço de seis eixos que era controlado por um computador. Este braço foi usado para realizar uma variedade de tarefas, incluindo a manipulação de objetos e a realização de experimentos.

Murray (2017) destaca três fatos em seu livro, marcantes na história dos braços robóticos. Em 1978, a Unimation introduziu um robô chamado Programmable Universal Machine for Assembly (PUMA), com base em estudo da General Motors. Bejczy, do Laboratório de Propulsão a Jato, iniciou um programa de tele operação para manipuladores baseados no espaço em meados dos anos setenta. Em 1979, o SCARA (Robô Articulado Compatível com Seletiva para Montagem) foi introduzido no Japão e depois nos Estados Unidos.

- **Período de expansão (1980-presente)**

No período de expansão, os braços robóticos se tornaram ainda mais sofisticados e capazes de realizar tarefas mais complexas. Em 1981, o engenheiro japonês Takeo Kanade desenvolveu o primeiro braço robótico com motores instalados nas juntas do dispositivo. Este braço era mais rápido e preciso do que os braços robóticos anteriores.

Nos anos 1990, os braços robóticos começaram a ser usados em uma variedade de aplicações não industriais, incluindo a saúde, a logística e a pesquisa. Em 1995, o primeiro braço robótico foi usado em uma cirurgia cardíaca. Nos anos 2000, os braços robóticos continuaram a se desenvolver e se tornar mais sofisticados. Em 2004, o primeiro braço robótico foi usado para realizar uma cirurgia robótica laparoscópica.

Uma tendência mais recente é o desenvolvimento de braços robóticos colaborativos (Cobots), projetados para trabalhar em proximidade com humanos. Esses robôs são equipados com sensores de segurança e sistemas de controle que permitem interações seguras entre humanos e máquinas.

A história do braço robótico é marcada por avanços significativos em termos

de tecnologia, funcionalidades e aplicações. À medida que a robótica continua a se desenvolver, é provável que novas inovações impulsionem ainda mais a versatilidade e a eficácia desses dispositivos. Na atualidade, os braços robóticos são usados em uma variedade de aplicações, incluindo:

- **Indústria:** realizar tarefas repetitivas e perigosas, como soldagem, pintura e montagem. Eles também podem ser usados para manipular materiais pesados ou perigosos.
- **Logística:** carregar e descarregar mercadorias de caminhões e navios. Eles também podem ser usados para organizar mercadorias em armazéns.
- **Saúde:** realizar cirurgias, fornecer cuidados aos pacientes e realizar tarefas de laboratório.
- **Pesquisa:** estudar o comportamento de materiais e sistemas. Eles também podem ser usados para realizar experimentos perigosos ou difíceis de realizar manualmente.

Os braços robóticos são uma tecnologia importante que está sendo usada em uma variedade de aplicações. Eles são cada vez mais usados à medida que a tecnologia da robótica continua a se desenvolver.

2.2 Braço robótico planar com 3 links

Conforme Murray (1994, p. 81):

A maioria dos manipuladores modernos consiste em um conjunto de elos rígidos conectados entre si por um conjunto de juntas. Os motores são fixados nas juntas para que o movimento geral do mecanismo pode ser controlado para executar uma determinada tarefa. Uma ferramenta, normalmente algum tipo de pinça, é fixada na extremidade do robô para interagir com o ambiente.

Para entender a descrição matemática de um manipulador, é importante familiarizar-se com o conceito de cinemática direta e a convenção Denavit-Hartenberg (DH), que serão detalhados a seguir.

2.2.1 Cinemática direta

A cinemática direta em braços manipuladores robóticos refere-se ao problema de determinar a posição e a orientação do atuador final (a extremidade do braço robótico) a partir dos valores conhecidos das juntas do robô (ângulos ou deslocamentos). Em outras palavras, dado um conjunto de ângulos das juntas ou posições lineares dos atuadores, a cinemática direta calcula a posição (x, y, z) e a orientação (ângulos de rotação) final do **atuador** (atuador refere-se à função que o braço irá desempenhar, podendo ser uma garra, um ímã, uma manqueira, dentre várias opções de aplicações e uso) no espaço cartesiano.

Juntas e Ligações

Os braços robóticos são compostos por uma série de ligações conectadas por juntas. As juntas podem ser rotativas (revolucionárias) ou lineares (prismáticas). A posição de cada junta é descrita por um parâmetro, como o ângulo para juntas rotativas ou o deslocamento linear para juntas prismáticas.

Cada junção do robô pode ser associada a um sistema de coordenadas. A posição e a orientação de cada sistema de coordenadas são descritas em relação ao sistema de coordenadas da junção anterior.

Matriz de Transformação Homogênea

As transformações de uma junta para outra e, finalmente, para o atuador final são expressas usando matrizes de transformação homogênea. Cada matriz de transformação descreve a rotação e a translação de uma junta para a próxima.

Fórmulas Matemáticas

A cinemática direta envolve a multiplicação de uma série de matrizes de transformação que representam a configuração atual das juntas do robô. O produto dessas matrizes resulta na matriz de transformação homogênea final, que descreve a posição e a orientação final do atuador em relação à base do robô.

Aplicação da Cinemática Direta

Destaca-se principalmente na fabricação e montagem, para determinar a posição exata do atuador final para operações como soldagem, montagem e pick-and-place (pegar

e colocar). Na medicina também, com precisão em cirurgias robóticas onde o posicionamento do atuador final é crucial. Mesmo com décadas de existência a pesquisa e desenvolvimento é crucial para análise e desenvolvimento de novos robôs e melhorias em designs existentes.

A cinemática direta é geralmente mais fácil de resolver do que a cinemática inversa (determinar as posições das juntas para alcançar uma posição desejada do atuador final).

Neste trabalho será desenvolvido um braço com três articulações, tendo assim uma complexidade maior para o cálculo da cinemática direta, diante disso, para facilitar o entendimento, em Ben-Ari (2018, p. 268), é exemplificado a cinemática direta de um braço robótico com duas articulações, onde foi utilizado somente trigonometria para calcular a posição final do braço.

A precisão da cinemática direta é crucial para o controle eficaz de robôs. Compreender este conceito é essencial para o design, programação e operação de robôs manipuladores, garantindo tarefas realizadas com alta precisão e eficiência.

2.2.2 Convenção de Denavit-Hartenberg (DH)

Considere um braço robótico com três links (junção entre cada braço), sem movimentos prismáticos (sem alteração no tamanho do braço), podemos derivar as equações da cinemática direta usando a convenção de Denavit-Hartenberg (DH) e, simplificar o cálculo da posição final do braço. Primeiramente faremos uma representação gráfica do braço que pode ser observada na Figura 2.1.

Depois iremos assinalar os parâmetros $DH(l_i, \theta_i, d_i, \alpha_i)$:

- θ_i o ângulo da junta, é o ângulo dos elos (ângulos entre um par de links quaisquer, por exemplo o ângulo do primeiro link com a base).
- d_i , o deslocamento do link, é a distância entre links $i - 1$ e i interceptam o eixo da junta i ,
- l_i , o comprimento do link, é o comprimento do link i
- α_i , a torção do elo, é o ângulo entre os eixos das juntas i e $i + 1$ medido sobre o link i (rotações realizadas no próprio eixo do braço em algum ponto por exemplo).

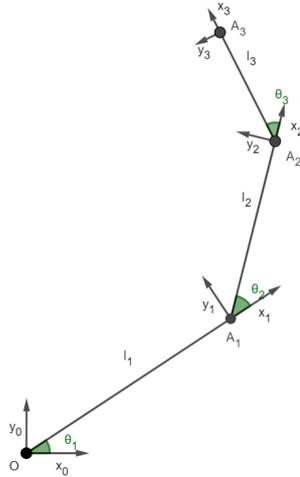


Figura 2.1: representação gráfica do braço robótico

Como o braço possui 3 links, $i \in \{1, 2, 3\}$,

Link	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	α_1	d_1	θ_1
2	l_2	α_2	d_2	θ_2
3	l_3	α_3	d_3	θ_3

Podemos organizar esses parâmetros em uma matriz:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\text{sen}(\theta_i) & 0 & l_i \cos(\theta_i) \\ \text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & l_i \text{sen}(\theta_i) \\ 0 & \text{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando ao braço robótico de 3 links

Com os parâmetros determinados, vamos adequar ao nosso tipo de braço robótico dando valores a alguns parâmetros, já que nosso braço não realizará deslocamentos (d_i) e também não realizará torções (α_i), podemos assinalar a tabela da seguinte forma:

Link	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

Sabendo que $\text{sen}(0) = 0$, $\text{cos}(0) = 1$ e $d_i = 0$, podemos reescrever a matriz A_i :

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\text{sen}(\theta_i) & 0 & l_i \cos(\theta_i) \\ \text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & l_i \text{sen}(\theta_i) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usaremos a matriz A para escrever as matrizes de transformação T . Para determinar a posição da ponta de um link em relação ao outro, usaremos a notação ${}^{i-1}T^i$, por exemplo: ${}^0T^1$ significa a posição final da ponta do link 1 em relação à origem, ${}^1T^2$ representa a posição final da ponta do link 2 em relação à ponta do link 1, e assim sucessivamente.

As matrizes de transformação T , podem ser representadas assim:

$${}^0T^1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1T^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 & l_2 \cos(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2T^3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) & 0 & l_3 \cos(\theta_3) \\ \text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para descobrirmos a posição final do braço, basta multiplicar as matrizes de transformação T .

$${}^0T^3 = {}^0T^1 * {}^1T^2 * {}^2T^3$$

Para simplificar o entendimento, iremos primeiramente realizar ${}^0T^1 * {}^1T^2$:

$${}^0T^1 * {}^1T^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 & l_2 \cos(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_1) (-\cos(\theta_2)) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) & 0 & -l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) & \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simplificando as equações trigonométricas temos,

$${}^0T^1 * {}^1T^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dando continuidade,

$${}^0T^1 * {}^1T^2 * {}^2T^3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) & 0 & a_3 \cos(\theta_3) \\ \text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & a_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando a multiplicação matricial e a simplificação trigonométrica obtemos a matriz de transformação:

$${}^0T^3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A cinemática direta é fornecida na última coluna de ${}^0T^3$:

$$x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.1)$$

$$y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2)$$

2.3 Cinemática Direta e a Última Coluna da Matriz de Transformação

A cinemática direta de um manipulador determina a posição e a orientação final do atuador em relação ao referencial base. Essa informação é extraída da matriz de transformação homogênea ${}^0T^3$, que tem a seguinte estrutura geral:

$${}^0T^3 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & P_x \\ R_{21} & R_{22} & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde: - $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ representam a rotação do sistema final em relação ao referencial base, - P_x e P_y correspondem às coordenadas final do atuador no espaço cartesiano, - A última linha $[0 \ 0 \ 1]$ mantém a consistência matemática da transformação homogênea.

A posição final do atuador é fornecida pelos elementos P_x e P_y , que aparecem na última coluna da matriz. Assim, ao resolver a cinemática direta, a posição do final do atuador pode ser diretamente extraída dessa coluna, enquanto a orientação é descrita pela submatriz de rotação R . Isso justifica o motivo pelo qual a última coluna de ${}^0T^3$ contém a informação desejada para a cinemática direta.

2.4 Na escola

Integrar um braço robótico no ensino de matemática pode ser uma abordagem inovadora e envolvente para ensinar conceitos matemáticos de maneira prática. Podemos enumerar algumas maneiras de utilizar um braço robótico:

- **Programação e Algoritmos:**

- Ensinar os alunos a programar o braço robótico para realizar movimentos específicos usando linguagens de programação simples.
- Introduzir algoritmos básicos, explicando como as instruções são sequenciadas para atingir um objetivo.
- Explorar conceitos matemáticos como coordenadas, ângulos e distâncias ao programar o braço para se mover em determinados caminhos.

- **Geometria:**

- Demonstrar conceitos geométricos, como pontos, linhas, polígonos e círculos, usando o braço robótico para desenhos precisos.
- Explorar transformações geométricas, como rotação, translação e reflexão, através da programação do braço para realizar essas operações.

- **Trigonometria:**

- Utilizar o braço robótico para ilustrar conceitos trigonométricos, como seno, cosseno e tangente, ao posicionar o braço em diferentes ângulos.
- Relacionar a programação do braço com funções trigonométricas para movimentos precisos.

- **Álgebra:**

- Explorar equações lineares e sistemas de equações ao definir parâmetros para o braço robótico.
- Introduzir variáveis e constantes ao criar expressões matemáticas que orientem o movimento do braço.

- **Resolução de Problemas:**

- Propor desafios matemáticos que exijam a aplicação de conceitos como otimização, análise de dados e resolução de problemas.
- Desenvolver atividades que incentivem os alunos a usar o braço robótico como uma ferramenta para encontrar soluções eficientes.

- **Projeto Interdisciplinar:**

- Encorajar projetos que envolvam não apenas conceitos matemáticos, mas também outras disciplinas, como física, ciência da computação e engenharia.
- Incentivar os alunos a desenvolverem soluções criativas para problemas do mundo real usando o braço robótico.

- **Colaboração e Compartilhamento:**

- Promover a colaboração entre os alunos, permitindo que trabalhem em equipe para programar o braço robótico.
- Facilitar o compartilhamento de conhecimentos, incentivando os alunos a apresentarem seus projetos para a classe.

Ao incorporar um braço robótico no ensino de matemática, é importante adaptar as atividades de acordo com o nível de escolaridade dos alunos e garantir que os conceitos matemáticos sejam apresentados de maneira acessível e relevante. Isso pode criar uma experiência de aprendizado prática e motivadora.

2.4.1 Planejamento de Aulas: Aplicação da Trigonometria

A seguir, está descrito um planejamento com duração de 4 aulas para o ensino médio que poderá servir como guia.

Aula 1: Introdução e Conceitos Básicos

- **Introdução:**

- Apresentar aos alunos o conceito de braços robóticos e sua importância em diversas indústrias.
- Explicar a relação entre robótica e matemática, destacando a trigonometria.

- **Objetivos:**

- Familiarizar os alunos com o braço robótico e sua programação básica.
- Introduzir conceitos básicos de trigonometria e sua aplicação em movimentos robóticos.

- **Materiais Necessários:**

- Braço robótico educativo, que será montado pelos próprios alunos.
- Computadores com software de programação (Arduino IDE, Scratch, Blockly ou Python).
- Quadro branco e marcadores.
- Projetor e slides de apresentação.

- **Etapas da Atividade:**

1. Apresentação teórica sobre braços robóticos e trigonometria.
2. Demonstração do funcionamento do braço robótico.
3. Introdução às funções seno, cosseno e tangente.
4. Atividade prática simples: programar o braço para mover-se em uma linha reta e depois girar em um ângulo específico.

- **Metodologias de Ensino:**

- Aula expositiva com slides e vídeos.
- Demonstração prática com o braço robótico.
- Atividade prática individual ou em grupos pequenos.

- **Avaliação:**

- Participação e envolvimento na aula.
- Observação da execução correta da atividade prática.

Aula 2: Movimentos Lineares e Ângulos

- **Introdução:**

- Revisão da aula anterior e introdução a movimentos lineares e cálculos de ângulos com trigonometria.

- **Objetivos:**

- Ensinar os alunos a calcular e programar movimentos lineares e rotações do braço robótico.
- Aplicar funções trigonométricas para calcular deslocamentos.

- **Materiais Necessários:**

- Braço robótico educativo.
- Computadores com software de programação.
- Fichas de exercício com problemas práticos.
- Calculadoras científicas.

- **Etapas da Atividade:**

1. Revisão rápida dos conceitos de seno, cosseno e tangente.
2. Demonstração de como programar o braço para realizar movimentos lineares e rotações.

3. Exercícios práticos: Calcular e programar movimentos que envolvem deslocamentos horizontais e verticais.

4. Discussão e resolução de problemas práticos em grupo.

- **Metodologias de Ensino:**

- Demonstração prática com o braço robótico.
- Trabalho em grupo para resolução de problemas.
- Discussão guiada para reforçar conceitos.

- **Avaliação:**

- Correção dos exercícios práticos.
- Observação da colaboração em grupo e resolução de problemas.

Aula 3: Desenho de Formas Geométricas

- **Introdução:**

- Explicar como a trigonometria pode ser usada para desenhar formas geométricas com precisão.

- **Objetivos:**

- Ensinar os alunos a programar o braço robótico para desenhar formas geométricas.
- Aplicar funções trigonométricas para calcular pontos em uma circunferência e outras formas.

- **Materiais Necessários:**

- Braço robótico educativo. - Computadores com software de programação. - Papel milimetrado para planejamento dos desenhos. - Fichas de exercício.

- **Etapas da Atividade:**

1. Explicação teórica sobre o cálculo de pontos em formas geométricas usando trigonometria.
2. Demonstração prática de desenho de formas simples (triângulos, quadrados, círculos) com o braço robótico.
3. Atividade prática: Os alunos devem programar o braço para desenhar uma forma geométrica especificada.

4. Apresentação dos resultados e discussão.

- **Metodologias de Ensino:**

- Demonstração prática e explicações teóricas. - Atividade prática individual ou em grupos. - Apresentação e discussão dos resultados.

- **Avaliação:**

- Avaliação dos desenhos geométricos programados e executados corretamente. - Observação da compreensão dos conceitos teóricos.

Aula 3: Projeto Final e Avaliação

- **Introdução:**

- Recapitulação dos conceitos aprendidos nas aulas anteriores. - Introdução ao projeto final integrando todos os conceitos.

- **Objetivos:**

- Consolidar o conhecimento dos alunos através de um projeto final. - Avaliar a capacidade dos alunos de aplicar trigonometria na programação do braço robótico.

- **Materiais Necessários:**

- Braço robótico educativo. - Computadores com software de programação. - Fichas de projeto com especificações.

- **Etapas da Atividade:**

1. Apresentação do projeto final: Programar o braço robótico para realizar uma sequência de movimentos complexos que integram todos os conceitos aprendidos.
2. Planejamento e execução do projeto em grupos.
3. Apresentação dos projetos realizados pelos alunos.
4. Feedback e discussão sobre os desafios enfrentados e as soluções encontradas.

- **Metodologias de Ensino:**

- Trabalho em grupo para planejamento e execução do projeto.

- Orientação e suporte durante a realização do projeto.
- Apresentação e discussão dos projetos.

- **Avaliação:**

- Avaliação do projeto final quanto à precisão e complexidade dos movimentos programados.
- Participação e colaboração durante o trabalho em grupo.
- Apresentação clara e coerente dos resultados.

Por fim, seria interessante também Uma discussão sobre outras possíveis aplicações da trigonometria e da robótica em diferentes campos. E, Por último, obter um feedback geral sobre a experiência das aulas e sugestões para futuras atividades. Implementar este planejamento proporcionará uma abordagem prática e interativa para o ensino de trigonometria, engajando os alunos e demonstrando a aplicação real dos conceitos matemáticos.

2.5 Exemplo

Considere o braço manipulador, representado pela Figura 2.2, feito no GeoGebra com as seguintes características:

- Cada segmento do braço tem comprimento 1 unidade de medida (*u.m.*), $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ u.m.}$
- O ângulo entre o **eixo x** e o **braço 1** é de 45° .
- O ângulo entre o **braço 1** e o **braço 2** é de 345° .
- O ângulo entre o **braço 2** e o **braço 3** é de 330° .

A partir das informações dadas, qual a coordenada do **ponto C**?

Para a resolução, serão utilizados métodos comuns aos alunos da educação básica. Primeiramente vamos traçar os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{AA''}$ perpendiculares aos eixos *x* e *y* respectivamente (Figura 2.3).

O triângulo $OA'A$ é isósceles de base OA que tem comprimento 1 *u.m.*.

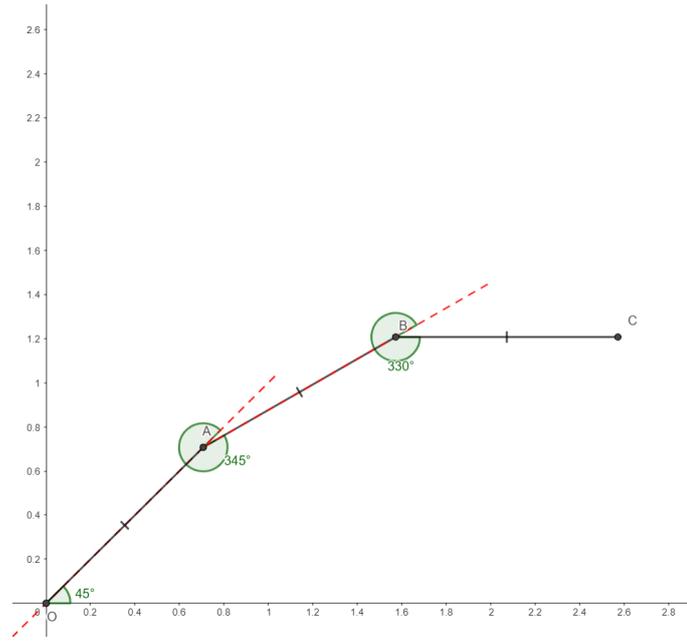


Figura 2.2: Representação gráfica do braço robótico

A partir daí é possível utilizar o teorema de Pitágoras e obter os valores de $OA' = AA' = x_1$:

$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= \overline{OA'}^2 + \overline{AA'}^2 \\ 1^2 &= 2 \cdot \overline{OA'}^2 \\ \overline{OA'}^2 &= \frac{1}{2} \\ \overline{OA'} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \overline{OA'} &= \overline{AA'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Temos agora o valor de $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, facilmente notamos o quadrado $OA'AA''$, assim $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que nos dá a coordenada do ponto $A \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Para obter a coordenada do ponto B, assim como no ponto A, vamos traçar as retas perpendiculares a partir do ponto B em cada eixo, como pode ser observado na Figura 2.4. O ângulo entre o primeiro braço e o segundo é 345° , ao baixar a perpendicular de B, tocando no eixo x em B' , sabendo que o eixo $y \perp AA''$ temos então que $AA' \perp BB'$. Com $AA'' \cap BB'' = G$, obtemos o triângulo ABG , retângulo em G.

A partir daí podemos explorar os conceitos de ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e suplementares, para determinar os ângulos internos deste triângulo. Neste caso temos: $\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 60^\circ$ com a hipotenusa $AB = 1$, facilmente obtemos os valores do catetos: $\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (referente ao eixo x) e $\overline{BG} = \frac{1}{2}$ (referente ao eixo

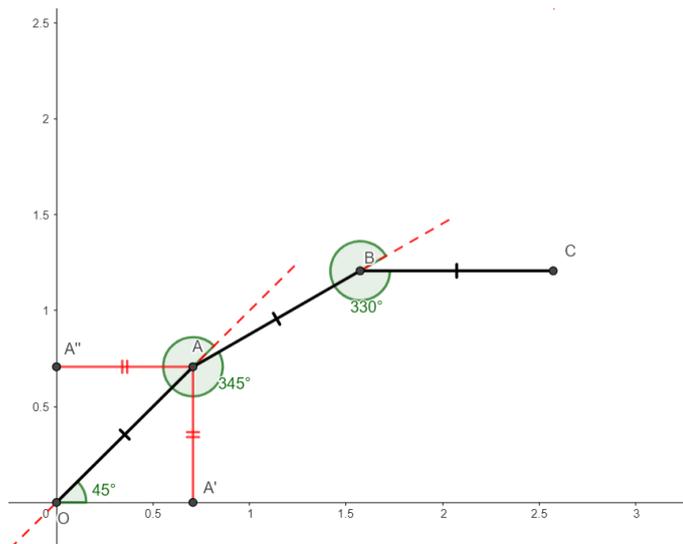


Figura 2.3: Destaque do triângulo $OA'A$

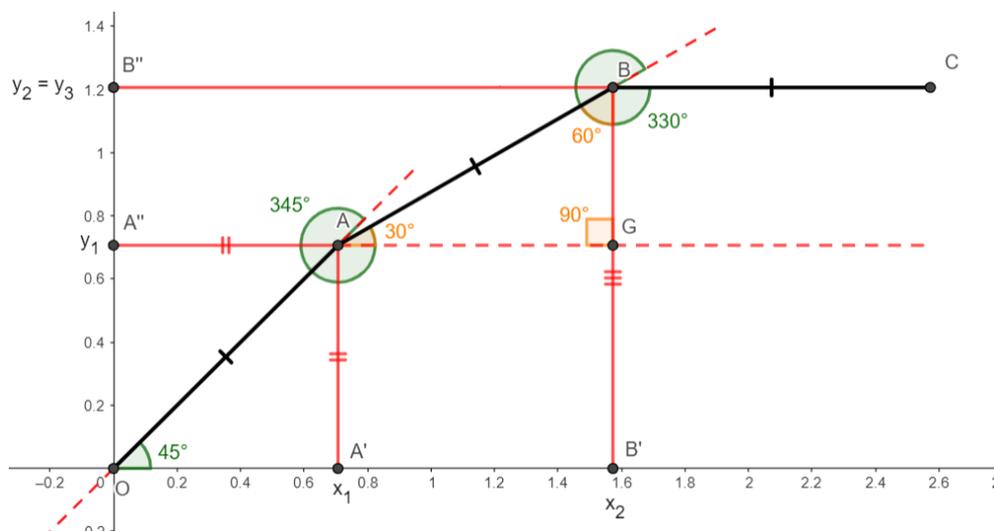


Figura 2.4: Destaque do triângulo ABG

y). Para obter a coordenada do ponto $B(x_2, y_2)$, basta somar às coordenadas do ponto A , ficando assim:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 + \overline{AG} \\
 x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 x_2 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \approx 1.57313 \\
 y_2 &= x_2 + \overline{BG} \\
 y_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\
 y_2 &= \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \approx 1.20711
 \end{aligned}$$

Com isso temos $B\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2} + 1}{2}\right)$.

Para a coordenada do ponto $C(x_3, y_3)$, analisaremos o polígono $BB'C'C$, a partir da Figura 2.5, analisando os ângulos no ponto B , aplicando o ângulo oposto pelo vértice, obtemos que $B'\hat{B}C = 90^\circ$. Este fato aliado às informações anteriores, podemos afirmar que $BB'C'C$ é um retângulo e, com isso a reta BC é paralela ao eixo x , assim $y_3 = y_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \approx 1.20711$. Para o valor de x_3 basta adicionar o valor de $\overline{BC} = 1$ à x_2 , dando $x_3 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{2} \approx 2.57313$. Temos agora os valores do ponto $C\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ utilizando as ferramentas trigonométricas usuais a nível escolar.

Por outro lado, ao usar as Equações 2.1 e 2.2 temos:

$$\begin{aligned}x &= l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\x &= 1 \cdot \cos(45^\circ) + 1 \cdot \cos(45^\circ + 345^\circ) + 1 \cdot \cos(45^\circ + 345^\circ + 330^\circ) \\x &= \cos(45^\circ) + \cos(390^\circ) + \cos(720^\circ) \\x &= \cos(45^\circ) + \cos(30^\circ) + \cos(0^\circ) \\x &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\x &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2) \approx 2.57313\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\y &= 1 \cdot \sin(45^\circ) + 1 \cdot \sin(45^\circ + 345^\circ) + 1 \cdot \sin(45^\circ + 345^\circ + 330^\circ) \\y &= \sin(45^\circ) + \sin(390^\circ) + \sin(720^\circ) \\y &= \sin(45^\circ) + \sin(30^\circ) + \sin(0^\circ) \\y &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + 0 \\y &= \frac{(\sqrt{2}+1)}{2} \approx 1.20711\end{aligned}$$

Obtemos assim a posição final do braço manipulador robótico representado pelo ponto $C(2.57, 1.21)$, que pode ser conferido pelos alunos ao utilizarem o GeoGebra, marcando o ponto C e configurando para mostrar o nome e valor. O procedimento utilizando as Equações 2.1 e 2.2 é mais simplificado e com menos chances de erro, porém se não for abordado como estas equações são desenvolvidas, acaba virando uma caixa preta, sem sentido prático. Além dos métodos de resolução apresentados, a depender dos ângulos escolhidos é possível trabalhar os conteúdos de semelhança de triângulos e Teorema de Tales.

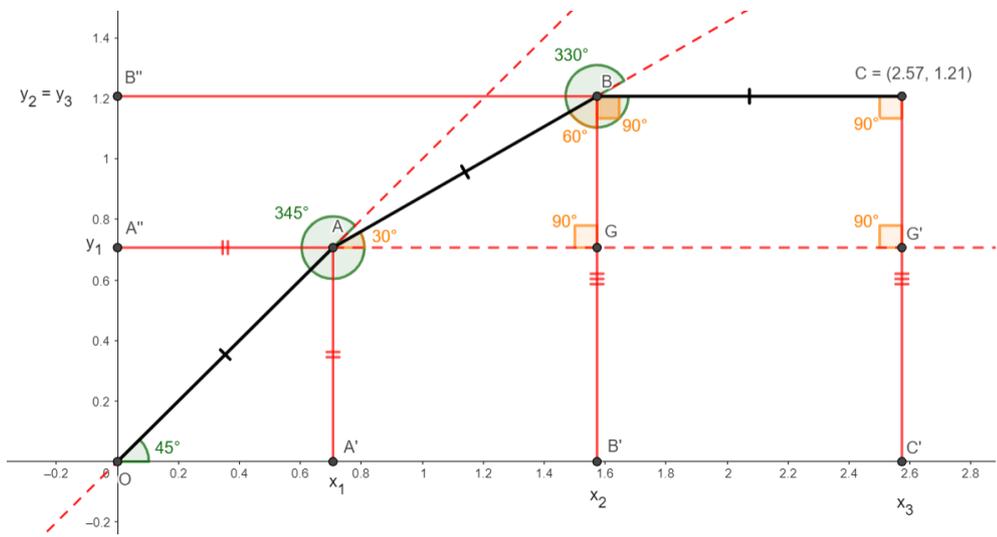


Figura 2.5: Posição final do braço

Capítulo 3

Cálculo de Volumes

O estudo dos sólidos geométricos é de extrema importância por várias razões, em primeiro lugar, fornece uma base sólida para o desenvolvimento das habilidades de pensamento espacial e visualização, essenciais em muitas disciplinas e profissões, como engenharia, arquitetura, design e ciências naturais. Além disso, compreender os sólidos geométricos permite aos alunos aplicar conceitos matemáticos abstratos a situações práticas do mundo real, como calcular volumes de recipientes, determinar a quantidade de materiais necessários para a construção de estruturas e analisar formas em problemas de física e química.

Essa compreensão não só promove o desenvolvimento acadêmico, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios e resolver problemas em diversas áreas da vida pessoal e profissional, destacando a importância fundamental do estudo dos sólidos geométricos no currículo educacional.

O cálculo de volumes desempenha um papel crucial em várias áreas da matemática, ciência, engenharia e até mesmo em muitos aspectos da vida cotidiana. Aqui estão algumas das razões pelas quais o cálculo de volumes é importante:

- **Geometria e Matemática Básica:** fundamental para a compreensão e estudo de formas geométricas básicas, como cubos, esferas, cilindros e cones, ajudando a desenvolver a intuição espacial e as habilidades de visualização.
- **Engenharia e Arquitetura:** determinar o espaço ocupado por estruturas, calcular materiais necessários e projetar espaços funcionais.
- **Ciências Naturais:** calcular a densidade de objetos, a quantidade de substâncias

em uma solução, o volume de organismos e muitos outros parâmetros importantes.

- **Tecnologia e Computação Gráfica:** renderizar objetos tridimensionais em computadores e simular o comportamento de fluidos e materiais.
- **Medicina e Saúde:** determinar o volume de órgãos, tumores e fluidos corporais, ajudando no diagnóstico e tratamento de várias condições médicas.

3.1 Importância na educação

O estudo de volumes e sólidos geométricos é uma parte crucial na educação matemática do ensino médio e superior, com implicações significativas para o desenvolvimento cognitivo e a aplicação prática em diversas áreas. A compreensão dos sólidos geométricos e a capacidade de calcular seus volumes promovem o desenvolvimento do pensamento espacial e habilidades de visualização, essenciais para entender e interagir com o mundo tridimensional ao nosso redor. Como afirmam [3], “disciplinas como engenharia, arquitetura e design dependem fortemente da capacidade de visualizar e manipular formas tridimensionais”, o que demonstra a importância desses conceitos para o sucesso em aplicações práticas.

Além disso, a habilidade de calcular volumes de sólidos geométricos permite aos alunos aplicar conceitos matemáticos abstratos a problemas práticos do dia a dia, como a determinação da quantidade de material necessária para construir uma estrutura ou calcular a capacidade de um recipiente. Esses conhecimentos promovem não só o desenvolvimento acadêmico, mas também preparam os alunos para enfrentar desafios e resolver problemas em diversas áreas da vida pessoal e profissional. [27] ressalta a utilidade desses conhecimentos práticos, afirmando que “a capacidade de resolver problemas relacionados a volumes e sólidos geométricos é essencial para muitas profissões”.

O estudo dos sólidos geométricos também serve como uma base essencial para disciplinas mais avançadas no ensino superior, como cálculo integral, física e várias engenharias. Segundo [4], no cálculo integral, “os alunos aprendem a calcular volumes de formas mais complexas através de métodos avançados, como integrais duplas e triplas”, o que é crucial para enfrentar desafios acadêmicos mais complexos e para o sucesso em cursos superiores que exigem uma forte base em matemática.

O domínio dos conceitos de volumes e sólidos geométricos também é frequentemente testado em exames padronizados e vestibulares, tornando essa área do conhecimento vital para o sucesso educacional dos alunos. A capacidade de resolver problemas relacionados a volumes e sólidos geométricos demonstra uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos e a habilidade de aplicá-los em situações variadas. Como observa [26], “a habilidade de aplicar conceitos de volumes em problemas de geometria espacial é frequentemente um indicador de sucesso em avaliações padronizadas”.

Essas aptidões são aplicáveis em várias profissões, como na engenharia civil, onde o cálculo preciso de volumes é fundamental para a estimativa de materiais e custos na construção de edifícios e infraestruturas. Arquitetos utilizam esses conhecimentos para projetar espaços habitáveis e funcionais, garantindo que suas criações sejam esteticamente agradáveis, eficientes e viáveis. [20] enfatiza que “a compreensão detalhada de volumes e sólidos é essencial para arquitetos, pois isso afeta diretamente a viabilidade e funcionalidade de seus projetos”.

Na ciência, o entendimento dos volumes é igualmente crucial. Em química, a determinação do volume é essencial para a preparação de soluções e a medição de substâncias, enquanto em física, o cálculo de volumes é frequentemente utilizado para resolver problemas relacionados à densidade e deslocamento de fluidos. Até mesmo na biologia, o volume de células e organismos pode ser um fator crítico em diversas pesquisas. Em [3] é destacado que “a precisão no cálculo de volumes é um componente fundamental em experimentos científicos e aplicações práticas em diversas disciplinas”.

Além das aplicações práticas, o estudo dos sólidos geométricos e volumes também contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas importantes, como o raciocínio lógico e a resolução de problemas. A capacidade de visualizar e manipular mentalmente formas tridimensionais é uma habilidade cognitiva avançada desenvolvida através do estudo da geometria. [27] aponta que “essas habilidades não são úteis apenas em disciplinas científicas e técnicas, mas também em uma ampla gama de atividades cotidianas e profissionais”.

Em linhas gerais, o estudo de volumes e sólidos geométricos é fundamental na educação devido à sua capacidade de desenvolver habilidades visuais e espaciais, sua aplicação prática em várias disciplinas e profissões, e sua importância como base para estudos avançados. Essas competências são essenciais para o sucesso acadêmico e pro-

fissional, preparando os alunos para enfrentar os desafios de um mundo cada vez mais dependente da ciência, tecnologia, engenharia e matemática.

3.2 O ensino de sólidos e volumes no brasil

No Brasil, o ensino de sólidos e volumes é abordado principalmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, conforme as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A seguir, uma descrição de como geralmente essa matéria é tratada nas escolas brasileiras:

3.2.1 Ensino Fundamental (Anos Finais)

Nos anos finais do Ensino Fundamental (6^o ao 9^o ano), os alunos começam a ter contato com conceitos básicos de geometria espacial. O objetivo é desenvolver habilidades de visualização espacial e compreensão das propriedades e relações entre figuras tridimensionais. Os tópicos abordados incluem:

1. **Formas Geométricas:** Introdução a sólidos geométricos como cubos, paralelepípedos, esferas, cones, cilindros e pirâmides.
2. **Propriedades dos Sólidos:** Discussão sobre faces, arestas, vértices e a relação entre essas partes.
3. **Áreas e Volumes:** Cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos básicos, utilizando fórmulas específicas.
4. **Aplicações Práticas:** Problemas do cotidiano que envolvem o cálculo de volume e área, como medir a capacidade de recipientes ou calcular o espaço ocupado por objetos.

3.2.2 Ensino Médio

No Ensino Médio, os conceitos de sólidos e volumes são aprofundados e ampliados, preparando os alunos para exames vestibulares e futuras disciplinas acadêmicas. Os tópicos incluem:

1. **Revisão e Ampliação dos Conceitos:** Reforço dos conceitos aprendidos no Ensino Fundamental, com maior ênfase em sólidos mais complexos.
2. **Fórmulas de Volumes:** Aprendizagem e aplicação de fórmulas para calcular volumes de sólidos como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.
3. **Geometria Espacial:** Estudo das relações e propriedades dos sólidos no espaço tridimensional, incluindo seções transversais e planos de simetria.
4. **Problemas Contextualizados:** Resolução de problemas contextualizados que exigem a aplicação de conceitos de volume e área em situações práticas e teóricas.
5. **Integração com Outras Disciplinas:** Aplicação dos conceitos de volume e área em outras disciplinas como física e química, onde o entendimento dos volumes é crucial para resolver problemas de densidade, pressão e capacidade.

3.2.3 Metodologias de Ensino

Os professores utilizam diversas metodologias para ensinar esses conceitos, incluindo: aulas expositivas e dialogadas, atividades práticas, tecnologia educacional, projetos interdisciplinares e, exercícios e problemas.

Apesar das metodologias variadas, existem desafios no ensino de sólidos e volumes, como: dificuldade de visualização, falta de recursos e formação de professores.

O ensino de sólidos e volumes nas escolas brasileiras segue as diretrizes da BNCC, com uma abordagem progressiva e contextualizada ao longo do Ensino Fundamental e Médio. Embora existam desafios, o uso de metodologias diversificadas e recursos tecnológicos pode melhorar a compreensão dos alunos e prepará-los para futuras aplicações acadêmicas e profissionais.

3.3 GeoGebra

O GeoGebra é uma poderosa ferramenta de software que combina geometria, álgebra e cálculo em uma interface interativa podendo ser usado para ensinar cálculo de volumes de sólidos geométricos, proporcionando uma visualização clara e uma abordagem dinâmica para o aprendizado. A seguir, apresenta-se um guia passo a passo para integrar o GeoGebra no cálculo de volumes.

Objetivos

- Compreender e aplicar fórmulas para cálculo de volumes de sólidos geométricos.
- Desenvolver habilidades de visualização espacial utilizando o GeoGebra.
- Integrar conhecimentos de matemática e tecnologia através do uso de software educacional.
- Incentivar a resolução de problemas e o pensamento crítico.

Materiais Necessários

- Computadores ou tablets com acesso à internet.
- Software GeoGebra (disponível gratuitamente em geogebra.org).
- Calculadoras.
- Projetor (para apresentação do professor).

Etapas da Atividade

1. Introdução Teórica (2 Aulas)
 - Aula 1: Revisão dos conceitos de sólidos geométricos (cubos, prismas, cilindros, cones, esferas, pirâmides) e suas fórmulas de volume.
 - Aula 2: Introdução ao GeoGebra. Apresentação das principais funcionalidades do software e como ele pode ser usado para modelar sólidos geométricos.
2. Modelagem de Sólidos no GeoGebra (3 Aulas)
 - Aula 3: Divisão da turma em grupos. Cada grupo escolhe um sólido geométrico para modelar no GeoGebra. Orientação sobre como utilizar as ferramentas do software para criar o sólido escolhido.

- Aula 4: Continuação da modelagem. Os alunos refinam seus modelos e exploram diferentes formas e suas propriedades. O professor auxilia na resolução de problemas técnicos e esclarece dúvidas.
 - Aula 5: Finalização dos modelos. Revisão das formas criadas e discussão sobre suas propriedades geométricas.
3. Cálculo de Volumes no GeoGebra (2 Aulas)
- Aula 6: Utilizando os modelos criados, cada grupo calcula o volume dos sólidos geométricos usando as fórmulas apropriadas. O GeoGebra facilita esse processo ao permitir medições precisas e cálculos automáticos.
 - Aula 7: Comparação dos volumes teóricos calculados manualmente com os valores obtidos pelo GeoGebra. Discussão sobre possíveis discrepâncias e suas causas.
4. Aplicações e Problemas Práticos (2 Aulas)
- Aula 8: Aplicação dos conceitos aprendidos em problemas práticos. Os alunos resolvem problemas que envolvem cálculo de volumes em contextos reais, como determinar a capacidade de recipientes ou o volume de materiais de construção.
 - Aula 9: Exploração de problemas complexos e interdisciplinares que envolvem integração de conhecimentos de física e química com matemática.
5. Apresentação dos Projetos (1 Aula)
- Aula 10: Cada grupo apresenta seu projeto para a turma, explicando o processo de modelagem, cálculo de volumes e as aplicações práticas. E compartilhar as dificuldades enfrentadas e soluções encontradas.

Metodologias de Ensino

- Aulas Expositivas e Dialogadas: As aulas iniciais devem ser expositivas para revisar conceitos matemáticos e introduzir o GeoGebra. O formato dialogado permite que os alunos façam perguntas e interajam com o conteúdo, promovendo uma compreensão mais profunda.
- Atividades Práticas: A modelagem de sólidos no GeoGebra e o cálculo de volumes oferecem uma abordagem prática e envolvente. Os alunos aprendem

fazendo, o que ajuda na retenção do conhecimento e no desenvolvimento de habilidades práticas.

- Uso de Tecnologia Educacional: Utilizar o GeoGebra como ferramenta educacional integra a tecnologia no ensino, ajudando os alunos a se familiarizarem com ferramentas modernas que são cada vez mais comuns no mercado de trabalho.
- Trabalho em Equipe: Dividir os alunos em grupos promove a colaboração e o trabalho em equipe, habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional.
- Projetos Interdisciplinares: Incorporar conceitos de outras disciplinas, como física (densidade e massa) e química (preparação de soluções), mostra a aplicabilidade prática do conhecimento matemático.

Avaliação

A avaliação será baseada nos seguintes critérios:

- Participação e colaboração em grupo.
- Precisão e qualidade do modelo 3D criado no GeoGebra.
- Correção dos cálculos de volume.
- Clareza e organização na apresentação final.
- Reflexão crítica sobre o processo e os resultados.

Integrar o GeoGebra no ensino de volumes e sólidos geométricos oferece uma abordagem inovadora e envolvente para os alunos do Ensino Médio. Esta proposta didática não só facilita a compreensão de conceitos matemáticos, mas também promove habilidades tecnológicas e colaborativas, preparando os alunos para futuros desafios acadêmicos e profissionais.

3.4 Impressora 3D

O uso de impressoras 3D no ensino de volumes oferece uma abordagem prática e interativa, permitindo que os alunos visualizem e manipulem sólidos geométricos de

maneira tangível. A seguir, apresenta-se um guia passo a passo para integrar a impressão 3D no cálculo de volumes para alunos do Ensino Médio.

Objetivos

- Compreender e aplicar fórmulas para cálculo de volumes de sólidos geométricos.
- Desenvolver habilidades de visualização espacial através da criação e manipulação de modelos 3D.
- Integrar conhecimentos de matemática e tecnologia através do uso de impressoras 3D.
- Incentivar a resolução de problemas e o trabalho em equipe.

Materiais Necessários

- Computadores com software de modelagem 3D (Tinkercad, Fusion 360, Blender, etc.).
- Impressoras 3D e filamentos.
- Ferramentas de medição (régua, paquímetro, balança, etc).
- Calculadoras.

Etapas da Atividade

1. Introdução Teórica (2 Aulas)

- **Aula 1:** Revisão dos conceitos de sólidos geométricos (cubos, prismas, cilindros, cones, esferas, pirâmides) e suas fórmulas de volume. Discussão sobre a importância do cálculo de volumes em diversas áreas.
- **Aula 2:** Introdução à modelagem 3D. Apresentação do software de modelagem Tinkercad e explicação básica sobre como criar formas geométricas simples.

2. Modelagem 3D (3 Aulas)

- **Aula 3:** Divisão da turma em grupos. Cada grupo escolhe um sólido geométrico para modelar, inicialmente utilizando GeoGebra. Orientação sobre como utilizar o software de modelagem Tinkercad para criar o sólido escolhido.

- **Aula 4:** Continuação da modelagem 3D. Os alunos refinam seus modelos e adicionam detalhes conforme necessário. O professor auxilia na resolução de problemas técnicos.
- **Aula 5:** Finalização dos modelos. Revisão das formas criadas e preparação para a impressão 3D.

3. Impressão 3D (2 Aulas)

- **Aula 6:** Introdução à impressora 3D e como configurá-la. Os grupos começam a imprimir seus modelos. Discussão sobre possíveis ajustes necessários nos modelos para garantir uma impressão bem-sucedida.
- **Aula 7:** Conclusão das impressões. Cada grupo verifica a precisão dos seus modelos impressos comparando com as dimensões planejadas.

4. Cálculo de Volumes e Análise (2 Aulas)

- **Aula 8:** Cada grupo mede suas impressões 3D e calcula o volume dos modelos utilizando as fórmulas matemáticas aprendidas. Comparação entre os volumes teóricos e os volumes reais dos modelos impressos.
- **Aula 9:** Discussão em classe sobre as possíveis discrepâncias entre os volumes calculados e medidos. Reflexão sobre os erros de medição e de impressão, e como isso pode ser corrigido.

5. Apresentação dos Projetos (1 Aula)

- **Aula 10:** Cada grupo apresenta seu projeto para a turma, explicando o processo de modelagem, impressão e cálculo de volumes. Compartilhamento das dificuldades enfrentadas e soluções encontradas.

Metodologias de Ensino

Aulas Expositivas e Dialogadas As aulas iniciais devem ser expositivas para revisar conceitos matemáticos e introduzir a modelagem 3D. O formato dialogado permite que os alunos façam perguntas e interajam com o conteúdo, promovendo uma compreensão mais profunda.

Atividades Práticas

A modelagem 3D e a impressão dos sólidos oferecem uma abordagem prática e envolvente. Os alunos aprendem fazendo, o que ajuda na retenção do conhecimento e no desenvolvimento de habilidades práticas.

Uso de Tecnologia Educacional

Utilizar softwares de modelagem 3D e impressoras 3D permite uma integração moderna e tecnológica no ensino. Esses recursos ajudam os alunos a se familiarizarem com ferramentas que são cada vez mais comuns no mercado de trabalho.

Trabalho em Equipe

Dividir os alunos em grupos promove a colaboração e o trabalho em equipe, habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional. Projetos Interdisciplinares Incorporar conceitos de outras disciplinas, como física (densidade e massa) e química (preparação de soluções), mostra a aplicabilidade prática do conhecimento matemático.

Avaliação

A avaliação será baseada nos seguintes critérios:

- Participação e colaboração em grupo.
- Precisão e qualidade do modelo 3D criado.
- Correção dos cálculos de volume.
- Clareza e organização na apresentação final.
- Reflexão crítica sobre o processo e os resultados.

Integrar a impressão 3D no ensino de volumes e sólidos geométricos oferece uma abordagem inovadora e envolvente para os alunos do Ensino Médio. Esta proposta didática não só facilita a compreensão de conceitos matemáticos, mas também promove habilidades tecnológicas e colaborativas, preparando os alunos para futuros desafios acadêmicos e profissionais.

Capítulo 4

Na prática

As atividades foram desenvolvidas no Centro de Excelência Santos Dumont (CESD), localizado na Avenida Senador Júlio César Leite, s/n - Atalaia, Aracaju-SE. Dispondo de uma estrutura completa, contando com laboratórios de informática (Figura 4.1), robótica (Figura 4.3), matemática e física (Figura 4.2), além dos materiais e equipamentos necessários para as aulas propostas.



Figura 4.1: Laboratório de informática

A escola possui aulas de robótica integradas, sempre ofertadas como disciplinas eletivas a cada semestre, com turmas de 20 alunos dos 1º, 2º e 3º anos. Esses alunos, com mais experiência, auxiliaram os iniciantes na dinâmica apresentada.

Foi importante seguir o arranjo e os objetivos delineados no resumo e nos capítulos anteriores, a fim de tornar mais simples a integração dessa abordagem, despertando o interesse dos alunos e animando-os com a vontade de aprender, inclusive aqueles



Figura 4.2: Laboratório de Matemática e Física

que tinham aversão à disciplina matemática.

Por causa das limitações físicas e de equipamentos, os alunos se agruparam em grupos de quatro para as atividades. Uma dessas entraves é o fato de haver apenas uma impressora 3D disponível, que tem tempos de impressão altos.



Figura 4.3: Alunos exibindo projeto 3D no laboratório de Robótica

4.1 Trigonometria com braço robótico

Depois de uma clara definição dos objetivos das atividades práticas planejadas para os alunos, foi destacado como a trigonometria é uma ferramenta fundamental para a programação e operação do braço robótico, utilizando o quadro para expor um resumo rápido sobre este conteúdo.

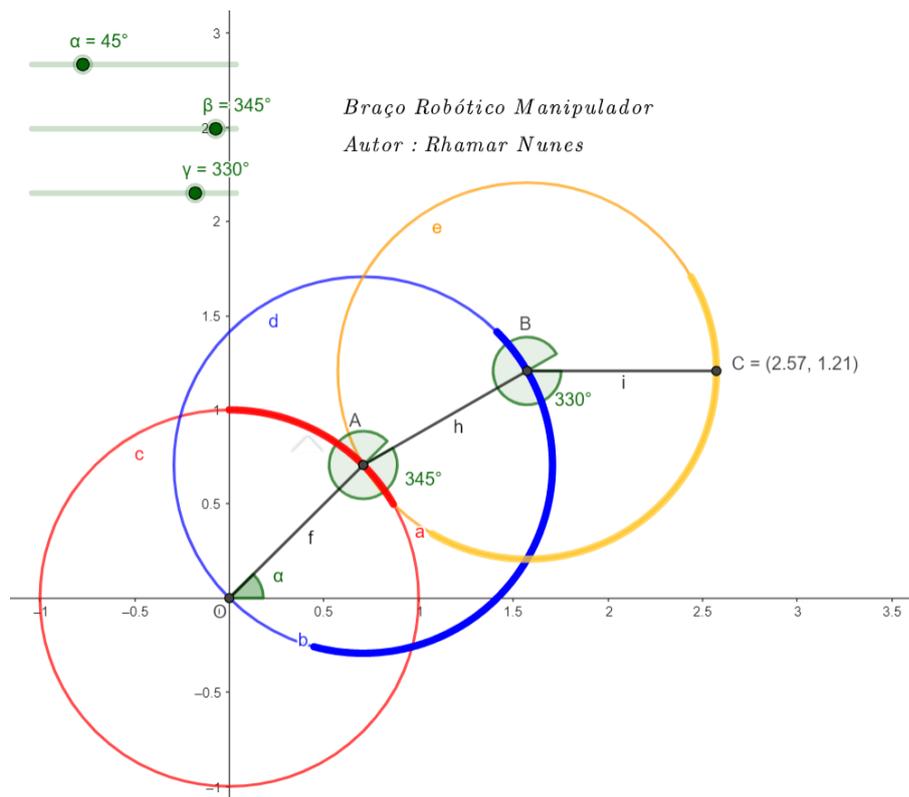


Figura 4.4: Braço robótico gráfico no GeoGebra

Inicialmente o GeoGebra foi peça chave para introduzir a ideia de aprender matemática com robótica, foi desenvolvido um modelo de braço robótico gráfico (Figura 4.4) no ambiente do software, necessitando apenas prestar atenção às simples instruções. A ferramenta vem pré-configurada com braços simétricos de 1cm e os ângulos podem ser alterados facilmente com uma barra deslizante, ajudando a replicar o exemplo de atividade do Capítulo 2 assim como outras atividades podem ser desenvolvidas.

Os alunos foram capazes de compreender como aplicar os conceitos de seno, cosseno e tangente para calcular ângulos e movimentos necessários para manipular o braço.

4.1.1 Descrição das Atividades

Introdução (1 aula)

Como ponto de partida, foi abordado o assunto de modo tradicional e resumido, com uma aplicação simples da trigonometria em um triângulo retângulo para descobrir a coordenada de um ponto, a partir do ângulo α qualquer e hipotenusa h , como pode ser visto na Figura 4.5.

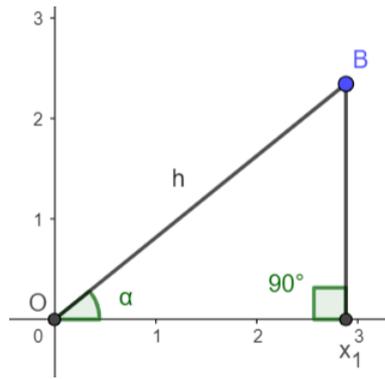


Figura 4.5: Triângulo retângulo

Em seguida, foi empregada a ferramenta do braço robótico gráfico (Figura 4.6) e replicados os procedimentos descritos no Exemplo 2.4. Após isso, foram passados alguns exercícios.



Figura 4.6: Alunos manipulando a ferramenta

Montagem do Braço Robótico(1 aula)

Os alunos começaram montando o braço robótico utilizando um kit composto por: Arduino, servo motores, fios jumper, protoboard, potenciômetros, seções de braço, servo motores (Figura 4.7). Foi enfatizado como as partes do braço (base, articulações, atuador) se relacionam com os ângulos que serão calculados.



Figura 4.7: Montagem do braço no laboratório de informática

Programação Inicial e controle do braço (2 aulas)

Foi introduzida a plataforma de programação do Arduino para enriquecer a experiência de aprendizado em robótica. Como alguns alunos já tinham iniciação prévia nesse campo, eles se tornaram mentores dos colegas com mais dificuldades na execução dos códigos para a placa, promovendo um ambiente de aprendizado colaborativo e reforçando o entendimento através do ensino mútuo.

Os estudantes receberam instruções detalhadas sobre como inserir comandos básicos para movimentar o braço robótico utilizando potenciômetros. Cada potenciômetro era responsável por controlar uma seção específica do braço, permitindo aos alunos ajustar e alterar a posição final com precisão. Essa abordagem prática possibilitou uma compreensão mais profunda de como diferentes componentes interagem para realizar movimentos mecânicos.

Além disso, discutimos a possibilidade de utilizar sensores que poderiam detectar posições e ângulos do braço robótico. No entanto, foi decidido que, para manter o projeto acessível e evitar complexidades adicionais e custos elevados, esses sensores não seriam utilizados. Esse enfoque demonstrou que é possível desenvolver um projeto funcional e educacionalmente eficaz com materiais simples e de baixo custo.

A aplicação dos conceitos trigonométricos foi claramente evidenciada através de um processo em várias etapas: primeiramente, os conceitos foram explicados teoricamente no quadro; em seguida, os alunos puderam visualizar as mesmas ideias por meio do software GeoGebra, que proporcionou uma representação gráfica e interativa dos cálculos. Finalmente, a aplicação prática foi realizada com o braço robótico real, demonstrando a importância e precisão da matemática na engenharia e robótica.

Após a demonstração teórica de como utilizar a trigonometria para calcular a posição do braço, os alunos tiveram a oportunidade de participar de atividades práticas. Nessas atividades, eles programaram o braço robótico para alcançar diferentes posições, aplicando os cálculos trigonométricos aprendidos. Esse exercício prático consolidou o entendimento dos alunos, destacando como a teoria matemática é essencial para resolver problemas do mundo real.

Resultados

Durante a aplicação prática do projeto, os resultados alcançados pelos alunos superaram as expectativas iniciais, demonstrando o potencial da integração de tecnologia e matemática no ensino. Com a montagem do braço robótico, os alunos foram introduzidos à plataforma de programação do Arduino, onde alguns com experiência prévia em robótica puderam auxiliar os colegas menos familiarizados com o processo. Essa dinâmica de apoio mútuo contribuiu para um ambiente de aprendizagem colaborativo, onde todos os alunos puderam se desenvolver conjuntamente, promovendo uma experiência de ensino positiva.

- **Programação e Cálculo Trigonométrico**

Após a fase inicial de montagem, os alunos receberam instruções sobre como inserir comandos básicos para movimentar o braço robótico usando potenciômetros. Cada potenciômetro era responsável por controlar uma seção específica do braço, alterando sua posição final. Além disso, foram discutidas as possibilidades de utilizar sensores para detectar posições e ângulos. No entanto, devido ao aumento na complexidade e nos custos de aquisição, decidiu-se não utilizá-los, mostrando que é possível desenvolver o projeto com materiais simples e acessíveis.

A aplicação de conceitos trigonométricos foi essencial nessa etapa, permitindo que os alunos calculassem os ângulos necessários para que o braço robótico alcançasse as

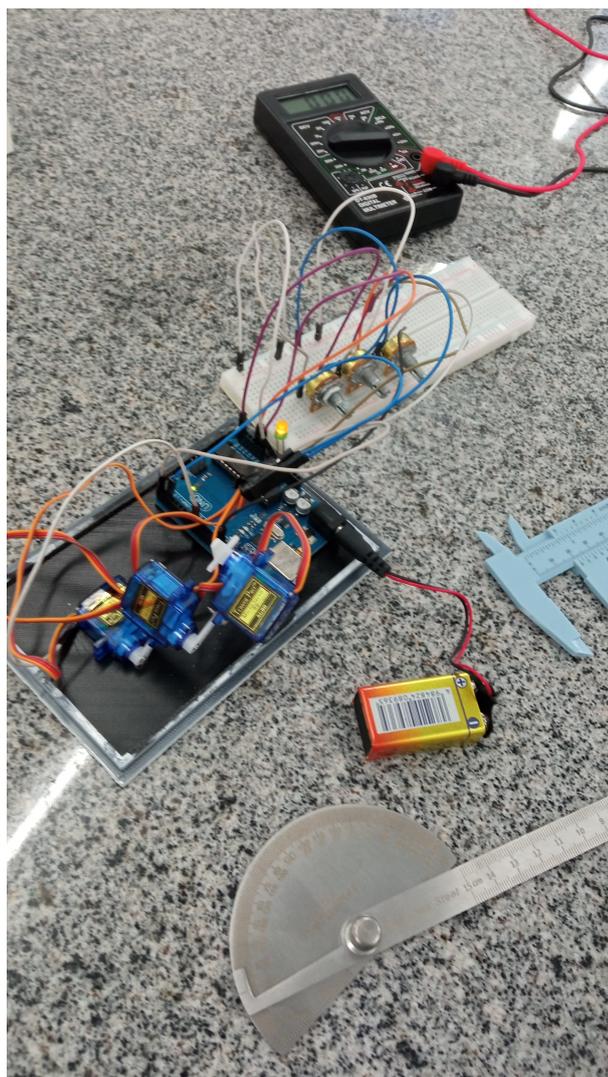


Figura 4.8: Braço montado

posições desejadas. Esse conhecimento foi reforçado com o uso do software GeoGebra, onde os alunos puderam visualizar em tempo real os cálculos trigonométricos aplicados no quadro e posteriormente no braço robótico. Essa abordagem evidenciou a importância e a precisão da matemática, destacando sua relevância na engenharia e na robótica.

- Experiência Prática e Engajamento

Durante as atividades práticas, os alunos foram desafiados a programar o braço para alcançar diferentes posições, aplicando os cálculos trigonométricos aprendidos. Esse exercício prático foi crucial para consolidar o entendimento dos alunos, demonstrando como a teoria matemática pode ser aplicada para resolver problemas do mundo real. A programação do braço robótico com Arduino permitiu que os alu-

nos compreendessem de forma tangível os ângulos e movimentos necessários para a operação do braço, enquanto o GeoGebra auxiliou na visualização das propriedades geométricas.

- Avaliação dos Resultados

Os resultados das atividades práticas indicaram um aumento significativo na compreensão dos alunos sobre a relação entre os cálculos trigonométricos e a movimentação real do robô. Os alunos foram capazes de calcular e programar o braço robótico para alcançar pontos específicos, utilizando os ângulos determinados para descobrir a posição final do braço. A precisão e o sucesso desses cálculos demonstraram que a abordagem prática, combinada com o uso de tecnologia educacional, pode efetivamente melhorar o aprendizado e a retenção de conceitos matemáticos complexos.

- Feedbacks dos Alunos e Professores

Os feedbacks coletados dos alunos e professores reforçaram a eficácia dessa metodologia de ensino. Os alunos relataram um aumento no interesse e engajamento com as atividades, destacando a relevância das aplicações práticas da matemática na resolução de problemas reais. Os professores, por sua vez, observaram uma melhoria na participação e colaboração dos alunos durante as aulas, bem como um aumento na autoconfiança dos estudantes ao enfrentarem desafios técnicos e matemáticos.

Em resumo, a integração de tecnologia e matemática na sala de aula proporcionou uma experiência educacional enriquecedora, tornando o aprendizado mais significativo e relevante para os alunos. Essa abordagem inovadora não apenas facilitou a compreensão dos conceitos teóricos, mas também estimulou o interesse dos alunos em explorar novas áreas de conhecimento e aplicação prática da matemática.

4.2 Sólidos com GeoGebra e impressora 3D

A proposta de utilizar tecnologias trouxe uma experiência educativa enriquecedora e interativa para os alunos. Através dessa iniciativa, não apenas aprofundaram seus conhecimentos em geometria espacial, mas também desenvolveram habilidades práticas

na modelagem e impressão 3D, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e aplicada.

A atividade foi desenvolvida durante 4 aulas descritas a seguir:

- **Aula 1: Introdução ao GeoGebra e à Impressão 3D**

Na primeira etapa do projeto, os alunos foram introduzidos ao software GeoGebra e à tecnologia de impressão 3D. A introdução incluiu uma explicação das funcionalidades básicas do GeoGebra, com ênfase na criação e manipulação de objetos tridimensionais. Os alunos puderam explorar a interface do software, criando formas geométricas simples e visualizando como esses objetos se comportam no espaço 3D. Além disso, houve uma apresentação sobre a impressora 3D, que destacou seu funcionamento, a escolha de materiais e as etapas do processo de impressão.

Além das ferramentas práticas, os alunos receberam uma introdução sobre as equações dos sólidos geométricos mais comuns, incluindo o cone, cubo, esfera, pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrada e paralelepípedo. As equações estudadas foram:

- **Cone:** com altura h , raio da base r e geratriz s :

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad \text{Área da superfície} = \pi r^2 + \pi r s$$

- **Cubo:** com lado a , as equações são:

$$\text{Volume} = a^3, \quad \text{Área da superfície} = 6a^2$$

- **Esfera:** com raio r , as equações são:

$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{Área da superfície} = 4\pi r^2$$

- **Pirâmide de base triangular:** com base de área A_b e altura h , a equação é:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}A_b h$$

- **Pirâmide de base quadrada:** com base de lado a e altura h , as equações são:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}a^2h, \quad \text{Área da superfície} = a^2 + 2a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

– **Paralelepípedo:** com dimensões a , b e c , as equações são:

$$\text{Volume} = a \cdot b \cdot c, \quad \text{Área da superfície} = 2(ab + ac + bc)$$

Os alunos mostraram grande interesse em explorar as capacidades do GeoGebra, criando rapidamente modelos tridimensionais simples, como cubos e esferas. Durante a atividade, fizeram perguntas sobre como modificar e aprimorar seus modelos, demonstrando um envolvimento ativo com a ferramenta. A curiosidade sobre a impressão 3D também foi notável, com os alunos interessados em entender como suas criações digitais poderiam ser transformadas em objetos físicos.



Figura 4.9: Alunos trabalhando com a ferramenta no GeoGebra

Essa abordagem trouxe vários benefícios. O engajamento ativo dos alunos foi evidente, pois a combinação de tecnologia e aprendizado prático aumentou seu interesse pela geometria, tornando as aulas mais dinâmicas e participativas. Além disso, a possibilidade de visualizar e manipular objetos em três dimensões ajudou os alunos a compreender melhor os conceitos geométricos, facilitando a aprendizagem.

Neste texto, as equações são simplificadas para facilitar a compreensão dos alunos do ensino médio. Foram incluídas as fórmulas para o volume e, quando relevante, a área da superfície dos sólidos geométricos básicos.

- **Aula 2: Modelagem de Sólidos Complexos**

Na segunda aula, os alunos avançaram para a modelagem de sólidos geométricos mais complexos. Antes de iniciar a modelagem, uma ferramenta específica (Figura 4.10) criada no GeoGebra foi utilizada para auxiliar os alunos a visualizar em 2D e 3D (Figura 4.11) e compreender melhor a estrutura dos sólidos geométricos.

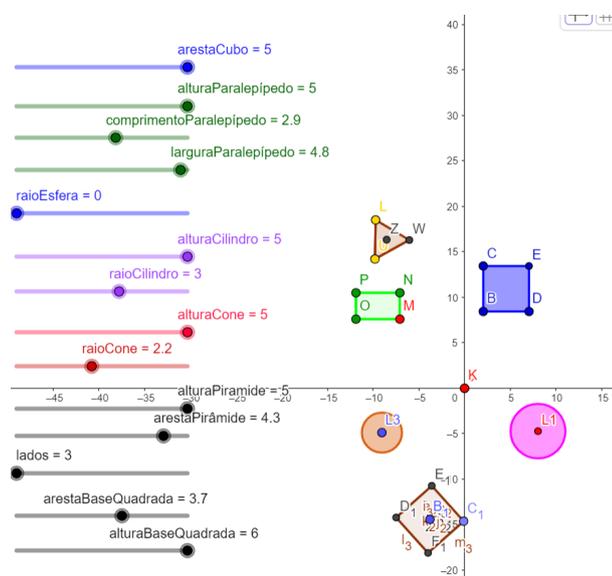


Figura 4.10: Ferramenta desenvolvida no Geogebra: Parâmetros e vista 2D

Esta ferramenta permitiu a exploração das diferentes faces, vértices e arestas dos sólidos, bem como suas inter-relações.

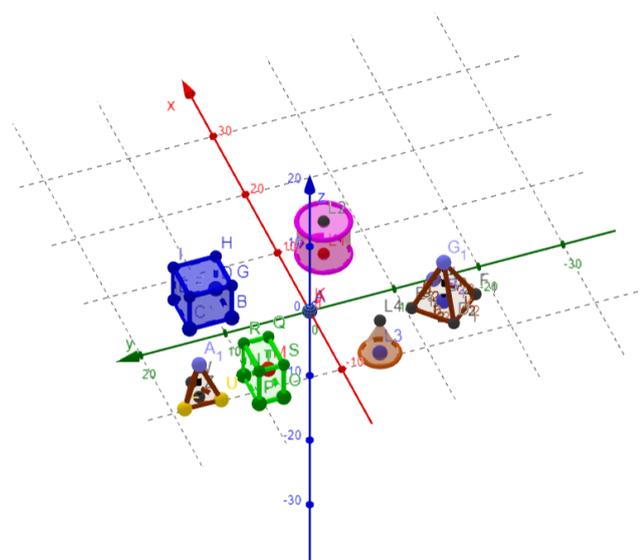


Figura 4.11: Ferramenta desenvolvida no Geogebra: vista dos sólidos em 3D

Com base nos conhecimentos adquiridos na primeira aula e no uso da ferramenta, os

alunos aprenderam a combinar formas para criar modelos avançados, como pirâmides, prismas e sólidos compostos. Além disso, foram desafiados a aplicar conceitos matemáticos para calcular o volume e a área de superfície de seus modelos.



Figura 4.12: Aluno modelando em 3D os sólidos escolhidos para impressão

Os alunos trabalharam em pequenos grupos para desenvolver seus modelos complexos, discutindo e colaborando na escolha das formas e nas estratégias de construção. O uso da ferramenta do GeoGebra facilitou a compreensão das características dos sólidos, permitindo que os alunos visualisassem como as diferentes partes do sólido se encaixavam. A tarefa de calcular o volume e a área de superfície dos modelos também foi realizada em grupo, promovendo o trabalho em equipe e a troca de conhecimentos.

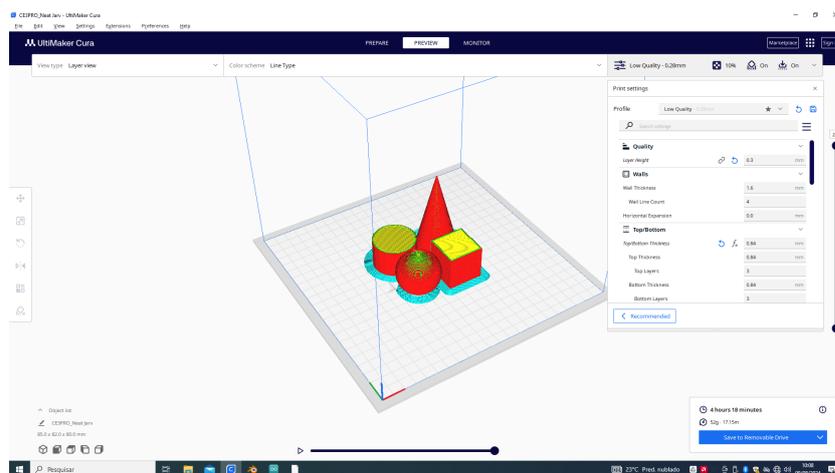


Figura 4.13: Etapa de verificação e configuração no software Ultimaker Cura

Depois de modelar os sólidos no Thinkercad (Figura 4.12), iniciaram as etapas de preparação dos modelos 3D. Primeiro os arquivos foram retrabalhados no software

da impressora 3D como pode ser observado na Figura 4.13, nesta etapa é possível detectar falhas e explorar como será a estrutura interna, evidenciado na Figura 4.14 onde está detalhada a camada 49 de 263 camadas ao total.

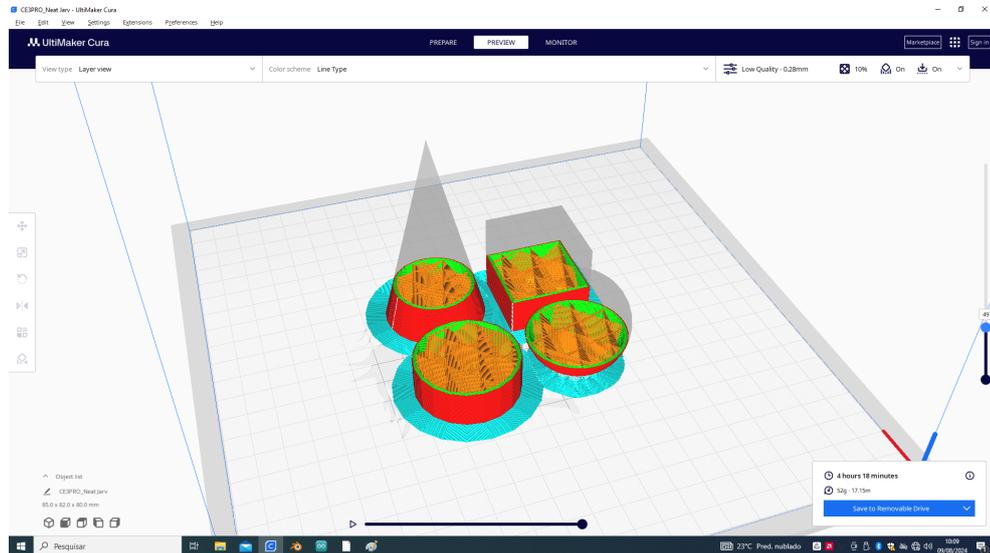


Figura 4.14: Detalhe da camada 49

Nestas duas ultimas figuras é possível ver o tempo previsto de impressão, que foi 4 horas e 18 minutos, com massa de 92 gramas. Na Figura 4.15 temos o tempo decorrido de 4 horas e minutos, mostrando uma ótima precisão de impressão auxiliando no planejamento de atividades.

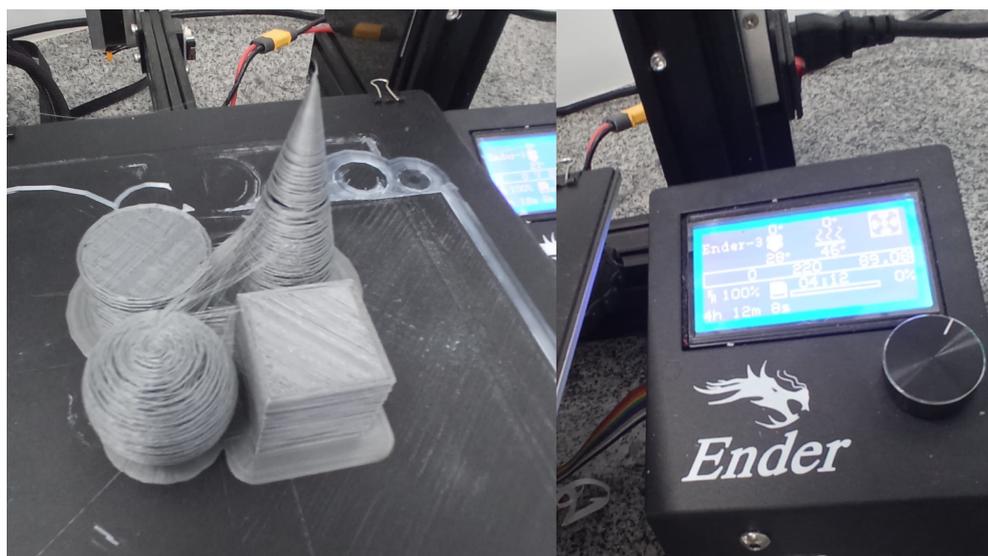


Figura 4.15: Tempo de impressão real

Essa abordagem trouxe vários benefícios. O trabalho em grupo incentivou os alunos

a comunicarem suas ideias e a colaborarem para alcançar objetivos comuns. A necessidade de aplicar fórmulas matemáticas para resolver problemas reais fortaleceu a compreensão dos conceitos teóricos aprendidos em sala de aula. Além disso, a ferramenta criada no GeoGebra ajudou os alunos a entenderem melhor a estrutura dos sólidos geométricos, facilitando a modelagem e a análise.

• Aula 3: Impressão e Análise dos Sólidos

Na terceira aula, os alunos tiveram um exercício desafiador: escolher dois sólidos diferentes e encontrar os parâmetros necessários para que esses dois sólidos tivessem o mesmo volume. Esse exercício levou os alunos a refletirem sobre a possibilidade de diferentes formas geométricas compartilharem o mesmo volume, estimulando a aplicação prática dos conceitos matemáticos aprendidos e promovendo uma compreensão mais profunda das relações entre diferentes sólidos geométricos.

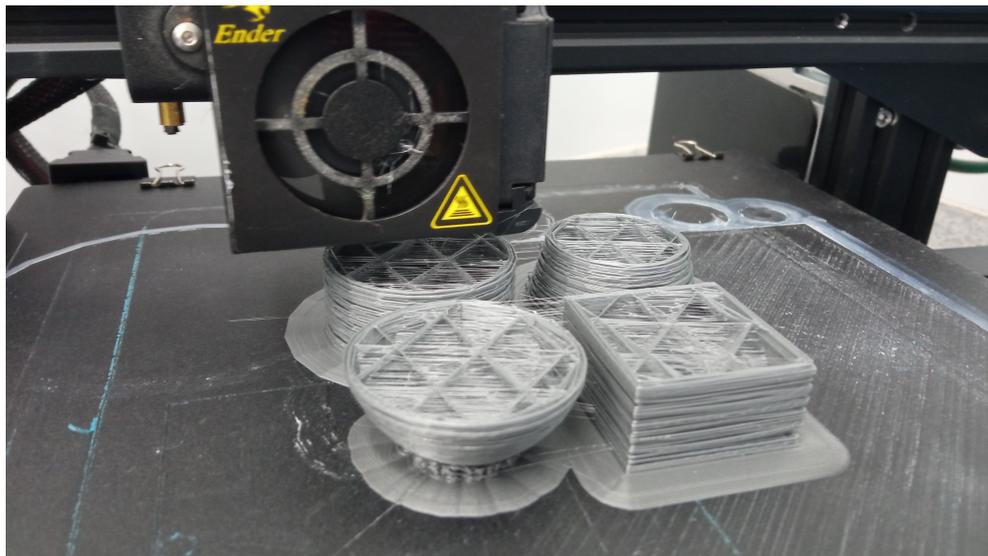


Figura 4.16: Impressora em funcionamento

Após a conclusão do exercício, os alunos tiveram a oportunidade de ver seus modelos impressos em 3D, mesmo com uma impressão demorada, aguardaram paciente a finalização, foram chamados no laboratório de matemática para ver o estado da impressora com aproximadamente 2 horas de trabalho (Figura 4.16). Eles acompanharam todo o processo de impressão, desde a preparação dos arquivos até a finalização, observando como suas criações digitais ganhavam forma física.



Figura 4.17: Cilindro e esfera com massa de 5g

Após a impressão, os alunos analisaram os modelos, comparando-os com suas expectativas e discutindo as variações encontradas, foi comparado um cone com cubo (Fig: 4.18), ambos com massa 6 gramas e, uma esfera com um cilindro (Fig: 4.17), ambos pesando 5 gramas.

Durante o processo de impressão, os alunos mantiveram um alto nível de interesse, anotando detalhes sobre o processo e discutindo possíveis melhorias para projetos futuros. A análise dos modelos impressos proporcionou um momento de reflexão, no qual os alunos puderam identificar e discutir as imperfeições e os desafios técnicos que enfrentaram.

Como parte da atividade final, uma das criações dos alunos foi escolhida para ser testada e impressa novamente. Após a impressão, o peso do modelo foi medido em uma balança pelos alunos, e os resultados foram comparados para verificar se o peso medido correspondia às expectativas. Essa verificação foi feita com base na premissa de que, dado o mesmo material e volume, o peso dos modelos deve ser semelhante. A atividade ajudou os alunos a entender a relação entre o volume, o material utilizado e o peso dos objetos impressos.

Essa experiência trouxe diversos benefícios para os alunos. A vivência de ver um modelo digital ser transformado em um objeto físico aprofundou sua compreensão sobre as relações espaciais e a geometria. Além disso, os alunos desenvolveram



Figura 4.18: Cone e cubo com massa de 6g

habilidades práticas em tecnologias de modelagem e impressão, preparando-os para futuros desafios tecnológicos.

- **Aula 4: Reflexão e Aplicações Práticas**

Na última aula, os alunos refletiram sobre o projeto e suas aprendizagens. Foram realizadas apresentações em que cada grupo compartilhou suas experiências, destacando as dificuldades enfrentadas e as soluções encontradas. A discussão se estendeu para as possíveis aplicações práticas das habilidades aprendidas, incentivando os alunos a pensar em como poderiam aplicar a modelagem e a impressão 3D em outros contextos.

As apresentações dos alunos foram ricas em detalhes, com relatos sinceros sobre os processos de criação e impressão. Na Figura 4.19, um aluno está apresentando os sólidos e apontando para o sólido que ele considerava ter mais massa ou ser "maior" em tamanho. No entanto, ele esclareceu aos colegas que, após os cálculos e a utilização das ferramentas, tratava-se apenas de uma falsa impressão causada pela dificuldade de comparar objetos com formas tão distintas. A discussão sobre as aplicações práticas foi animada, com os alunos propondo diversas ideias para usar as tecnologias em áreas como engenharia, arquitetura e design.

Essa experiência trouxe vários benefícios. A reflexão sobre o processo e as aplicações



Figura 4.19: Aluno apresentando os sólidos desenvolvidos

práticas promoveu o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo entre os alunos. Além disso, o projeto incentivou os alunos a serem autônomos e a tomarem iniciativa na resolução de problemas, habilidades valiosas para seu desenvolvimento acadêmico e profissional.

4.3 Relatos de Alunos e Professores

Neste seção, apresentamos os relatos de alunos e professores que participaram das atividades de integração entre robótica e matemática, conforme proposto nesta dissertação. Os depoimentos fornecem uma visão abrangente sobre como essas atividades impactaram o ensino e a aprendizagem.

4.3.1 Relato do Professor Emanuel Dantas de Oliveira Júnior

Desde 2013, o professor Emanuel atua na rede estadual de ensino, e desde 2017, ele trabalha com robótica na escola. Emanuel compartilhou as dificuldades que enfrentou no início e como esse trabalho proporcionou uma solução eficaz para superá-las:

Sempre tive dificuldade de encontrar materiais atuais que conectem a robótica com a matemática de uma forma mais simples e prática. Então, quando me deparei com as propostas apresentadas, foi um alívio! Decidi testar os métodos sugeridos e notei uma diferença bem legal na maneira como os alunos estão participando das aulas de matemática. Começamos a usar um braço robótico como parte das aulas, e isso deixou as coisas muito mais interessantes. Os

alunos ficaram super curiosos e engajados, querendo entender como as coisas funcionam na prática e não só no papel.

O professor também mencionou o uso de ferramentas tecnológicas que enriqueceram o ambiente de aprendizagem:

Também usamos ferramentas como o GeoGebra e a impressão 3D, o que deixou as aulas mais dinâmicas e divertidas. Com isso, a turma começou a se ajudar mais e a pensar de forma mais criativa. A matemática, que antes era vista como um bicho de sete cabeças por muitos, agora é encarada com mais entusiasmo e até diversão. E o melhor de tudo, isso tem refletido no desempenho deles, que melhorou bastante. Pretendo incorporar ainda mais estes conceitos nas minhas aulas. É muito bom ver a galera animada e interessada em aprender, e eu quero manter essa energia positiva fluindo!

4.3.2 Relato das Alunas Maria Clara e Marina Bilhalva

As alunas Maria Clara e Marina Bilhalva falaram sobre o impacto do uso de tecnologias como o GeoGebra em seu aprendizado:

Aprender matemática através da tecnologia GeoGebra tornou o estudo mais divertido e prático para nós. Antes, não tínhamos muito interesse em matemática, mas com essa nova tecnologia, nós temos mais interesse em aprender com essa praticidade. Achemos muito interessante as representações dos modelos em 3D, porque antes nós tínhamos uma percepção errada sobre os modelos geométricos. Achávamos que todas as formas tinham volumes diferentes não podiam ter o mesmo peso; com a prática da impressão 3D, ao pesar as formas, vimos que têm o mesmo volume. Depois dessas aulas, comecei a notar que a matemática está presente em tudo no nosso cotidiano.

Esse relato evidencia a transformação da percepção das alunas sobre a matemática e sua presença no dia a dia.

4.3.3 Relato da Aluna Laura Alcântara

A aluna Laura destacou a importância das aulas de robótica para a compreensão da geometria:

As aulas de matemática com robótica foram fundamentais para um melhor entendimento da geometria e suas variações. Os sólidos geométricos serviram para nós alunos entendermos sobre o volume e dimensões, foi muito interessante aprender desta forma e melhorou a maneira como eu compreendo esse ramo matemático. O braço robótico é um ótimo aliado nos estudos geométricos. Me sinto lisonjeada em participar dessas aulas, são incríveis. As aulas são cativantes para nós estudantes, são interativas, têm parte teórica e prática, a gente aprende e se diverte usando cálculos, lógica e criatividade!

Laura ressalta a combinação de teoria e prática como um fator motivador e esclarecedor em seu aprendizado.

Os relatos apresentados demonstram a eficácia das práticas descritas no presente documento em promover um ensino de matemática mais engajador e efetivo. A integração de tecnologias e robótica não apenas facilita a compreensão de conceitos matemáticos, mas também desperta o interesse e a curiosidade dos alunos, refletindo positivamente em seu desempenho acadêmico.

4.4 Conclusão

A aplicação prática dos conceitos de geometria espacial e programação em sala de aula mostrou-se uma estratégia eficaz para o ensino de matemática, especialmente no que tange à compreensão de sólidos geométricos e ao cálculo de volumes. O uso de tecnologias como o braço robótico, o GeoGebra e a impressão 3D proporcionou uma abordagem multidisciplinar e interativa, permitindo que os alunos visualizassem e manipulassem formas tridimensionais de maneira mais tangível. Esta abordagem não apenas facilitou a compreensão dos conceitos teóricos, mas também estimulou o interesse e o engajamento dos alunos nas atividades.

A implementação das atividades práticas que combinam a programação do braço robótico com conceitos de trigonometria e geometria tridimensional revelou-se uma ferramenta poderosa para ilustrar a aplicação de conceitos matemáticos em contextos reais. A programação com Arduino permitiu que os alunos compreendessem de forma prática os ângulos e movimentos necessários para a operação do braço robótico, enquanto o GeoGebra auxiliou na visualização das propriedades geométricas dos sólidos e na veri-

ficação dos cálculos de volume.

Os resultados obtidos demonstram que a integração de tecnologia e matemática em sala de aula pode ampliar as possibilidades de ensino e aprendizagem, tornando a experiência educacional mais significativa e relevante para os alunos motivando-os a ir mais fundo nos conteúdos, gerando mais curiosidade. As atividades propostas não apenas reforçaram os conteúdos de matemática, mas também desenvolveram habilidades importantes como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade.

Por fim, esta pesquisa contribuiu para evidenciar a importância de novas metodologias de ensino que incorporam tecnologias educacionais inovadoras. A utilização do braço robótico, do GeoGebra e da impressão 3D no ensino de matemática mostrou-se uma abordagem promissora para o futuro da educação, abrindo caminho para novas pesquisas e práticas pedagógicas que possam enriquecer ainda mais a experiência de ensino e aprendizagem dos alunos.

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, M. S., & Rodrigues, M. V. *Geometria Espacial: Conceitos e Aplicações*. Editora XYZ, 2015.
- [2] Alves, M. A. "A tecnologia no ensino da matemática: desafios e possibilidades." *Revista Educação em Debate*, vol. 41, no. 1, 2017, pp. 124-137.
- [3] Anton, H., Bivens, I. C., & Davis, S. (2013). *Calculus: Early Transcendentals* (10th ed.). Wiley.
- [4] Apostol, T. M. *Calculus, Volume 2*. John Wiley & Sons, 1969.
- [5] Atmatzidou, S., & Demetriadis, S. "Arduino and Scratch in education: The effect on problem solving skills." In *European Conference on Technology Enhanced Learning*, Springer, 2016, pp. 22-35.
- [6] Ben-Ari, Mordechai; Mondada, Francesco. *Elements of Robotics*. Springer, 2018, pp. 268-270.
- [7] Borges, R. C., & Silva, J. B. "A tecnologia no ensino de matemática: contribuições para a aprendizagem significativa." *Revista Práxis Educacional*, vol. 18, no. 2, 2022, pp. 1-18.
- [8] Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>
- [9] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular: Matemática*. Brasília: MEC, 2018.
- [10] Campos, F., Estévez, A., Jiménez, M., & Rangel, L. "Educational Robotics Platforms and Mathematical Learning." In *Advances in Human Factors and Ergonomics*, CRC Press, 2016, pp. 521-533.

- [11] Carvalho, P. R., & Oliveira, S. T. *Matemática: Contextos e Aplicações*. Editora DEF, 2019.
- [12] Castro, P. A. A., & Almeida, M. J. P. "A utilização da tecnologia no ensino da matemática: um estudo de caso." *Revista de Educação Matemática*, vol. 19, no. 2, 2018, pp. 1-21.
- [13] Craig, John J. *Robotics: A Modern Approach*. 2011.
- [14] Fernandes, E. V. "O uso da tecnologia no ensino da matemática: desafios e possibilidades." *Revista Formação Docente*, vol. 13, no. 2, 2021, pp. 1-11.
- [15] Freitas, M. C., & Silva, D. L. "A tecnologia no ensino da matemática: possibilidades e desafios." *Revista Educação*, vol. 45, no. 3, 2020, pp. 1-12.
- [16] Gomes, C. A., & Silva, E. A. S. "A utilização da tecnologia no ensino da matemática: desafios e possibilidades." *Revista de Educação Matemática*, vol. 18, no. 1, 2017, pp. 1-18.
- [17] Grimholt, T. K., & Grønmo, L. S. "Arduino as an entry to engineering and STEM in secondary schools." In *Proceedings of the 43rd SEFI Conference*, Orléans, France, 2015.
- [18] Herreño, Juan Pablo, and Lucas K. Akins. "Arduino as an educational tool for understanding the concept of mathematical functions." In *Proceedings of the 43rd ACM technical symposium on Computer Science Education*, 2012, pp. 719-724.
- [19] Kelly, Kevin. "A Brief History of Robotics." 2016.
- [20] Lehmann, C. H. *Geometria Analítica*. Pearson, 1983.
- [21] Murray, Richard M. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 2017.
- [22] Paul, Richard. *Introduction to Robotics*. 2011.
- [23] Ribeiro, A., & Morgado, E. "Arduino in the Classroom: A Review on the Trends of Educational Robotics in Primary and Secondary Education." In *Proceedings of the 12th International Conference on Computer Supported Education (CSEDU 2020) - Volume 1*, 2018, pp. 95-104.

- [24] Silva, J. R., & Pereira, L. M. *Ensino de Geometria no Ensino Médio*. Editora ABC, 2017.
- [25] Spong, Mark W., Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006. First Edition.
- [26] Stewart, J. *Cálculo*. Cengage Learning, 2015.
- [27] Swokowski, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. Thomson Learning, 2001.