PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA VOLUNTÁRIA - PICVOL

Propriedade Exata do Produto Tensorial

Relatório Final

Período da Bolsa: de Março de 2023 à Julho de 2024

Itabaiana-SE

2024

Emilly Bezerra de Oliveira

Propriedade Exata do Produto Tensorial

Universidade Federal de Sergipe

Departamento de Matemática

Orientador: Prof. Me. Samuel Brito Silva

Itabaiana-SE

2024

Sumário

1 Introdução

A Álgebra Comutativa é a subárea da álgebra que estuda, entre outras coisas, anéis comutativos, seus ideais e módulos sobre esses anéis. O conceito de módulo, que é muito importante nesta área, pode ser visto como uma espécie de generalização do conceito de Espaço Vetorial, visto em Álgebra Linear. Bastando para isso considerar o conjunto de escalares como sendo um anel (ao invés de um corpo). Entretanto, com essa substituição alguns resultados antes válidos em álgebra linear, deixam de ser verdadeiros, por exemplo: todo subconjunto linearmente independente de um módulo livre possa ser ampliado a uma base.

O objetivo principal deste trabalho foi estudar uma importante construção da teoria de módulos: *o produto tensorial*. Essa construção é amplamente utilizada em outras subáreas como *topologia algébrica e álgebra homológica*. Ademais, no contexto dessas subáreas, abordamos outros conceitos relevantes, tais como Sequências Exatas, e o famoso Lema da Serpente, que é uma ferramenta essencial na construção de sequências longas exatas.

Por fim, mostraremos o resultado que integra todos os conceitos discutidos anteriormente, que denominamos de Propriedade Exata do Produto Tensorial. Esta propriedade analisa a tensorização de sequências exatas e a preservação de sua exatidão.

2 Atividades Realizadas

De março à julho de 2023 fora realizado a revisão da literatura. Nesse período destacamos o estudo de A-módulos, que foi a primeira etapa da pesquisa.

De agosto à outubro de 2023 iniciou-se a segunda etapa do projeto, o estudo do Produto Tensorial.

De novembro de 2023 à julho de 2024 voltamos aos estudos sobre Produto Tensorial, estendendo-o a Sequências Exatas, Lema da serpente, Propriedade Exata do Produto Tensorial, e por fim a escrita de todo o material.

3 Outras Atividades

Foi feito um estudo sobre o software Latex, levando ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das habilidades no manuseio de tal programa.

Fora cursado, de 15 de janeiro à 30 de fevereiro de 2024 a disciplina a nível de mestrado Álgebra Linear, na modalidade de curso de verão. O curso foi ofertado pela XIII Escola de Verão em Matemática.

Além disso, foram realizados dois seminários voltados ao tema do trabalho.

4 Metodologia

A metodologia adotada para a execução desse projeto de pesquisa consistiu em encontros semanais, com as seguintes atividades realizadas: estudo direcionado, apresentações de seminários, seleção e leitura de referências bibliográficas, além de discussões sobre a manipulação do software Latex.

5 A-Módulos e A-Submódulos

Neste capítulo, serão explorados conceitos e resultados fundamentais sobre A-módulos, os quais desempenharão um papel importante no desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição 1 *Seja A um anel. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado da multiplicação escalar:*

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \to & M \\ (a, m) & \mapsto & am \end{array}$$

é dito um A-módulo se $\forall a_1, a_2 \in A$ e $\forall m_1, m_2 \in M$:

1. $1m_1 = m_1$
2. $(a_1a_2)m_1 = a_1(a_2m_1)$
3. $(a_1 + a_2)m_1 = a_1m_1 + a_2m_1$
4. $a_1(m_1 + m_2) = a_1m_1 + a_1m_2$

Exemplo 1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Na definição de A-Módulo, podemos substituir o anel A pelo corpo $\mathbb{K}$, e o grupo M por V. Dessa forma, temos que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é um A-Módulo.*

Exemplo 2 *Seja A um grupo aditivo e $t \in \mathbb{Z}_+^*$, o conjunto $A^t = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : a_i \in A\}$ com a soma definida:*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) + (a_1', a_2', \ldots, a_t') = (a_1 + a_1', a_2 + a_2', \ldots, a_t + a_t')$$

e a multiplicação por escalar:

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_t) = (aa_1, aa_2, \ldots, aa_t)$$

é um A-Módulo.

Exemplo 3 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Dado um polinômio $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ da forma $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, indicamos por $p(T)$ o operador linear $p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n$, onde I é o operador identidade em V e $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k-vezes}$. Então V é um $\mathbb{K}[X]$-módulo em relação a adição usual de V e a multiplicação por escalar dada por $p(X) \cdot v := p(T)(v)$.*

Exemplo 4 *Todo grupo abeliano G pode ser considerado como um módulo sobre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. De fato, basta considerar, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $a \in G$, a seguinte multiplicação por escalar:*

$$n \cdot a = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{n-vezes} & se \quad n > 0 \\ 0 & se \quad n = 0 \\ \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{-n-vezes} & se \quad n < 0 \end{cases}$$

Definição 2 *Seja A um anel e M um A-Módulo. Um subgrupo N de M é um A-Submódulo de M se a propriedade abaixo é satisfeita.*

$$an \in N, \forall\ a \in A \ \ e\ n \in N$$

Exemplo 5 *Seja M um A-módulo. $N = \{0\}$ e $N = M$ são A-submódulos, chamados submódulos triviais de M.*

Definição 3 *Seja M um A-módulo. Dizemos que $\{x_i\}_{i\in I}$, com $x_i \in M$, gera M se todo elemento $x \in M$ pode ser escrito na forma*

$$x = \sum_i a_i x_i$$

com $a_i \in A$.

Exemplo 6 *Seja $G = M$ um A-módulo gerado por $m_1, \ldots, m_t$ e $I \subset A$ ideal.*

$$IM = \{\sum_{i=1}^{t} a_i m_i : a_i \in I\}$$

é subgrupo de M. De fato, sejam $m, m' \in IM$

$$\begin{aligned} m + m' &= \sum_{i=1}^{t} a_i m_i + \sum_{i=1}^{t} a_i' m_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} (a_i + a_i') m_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} b_i m_i \end{aligned}$$

com $b_i \in I$

E, para qualquer $m \in IM$,

$$m^{-1} = \sum_{i=1}^{t} (-a_i) m_i \in IM$$

pois $-a_i \in I$ para todo $1 \leq i \leq t$.

IM é um a-submódulo de M.

De fato, IM é subgrupo de M e sejam $a \in A$ e $m \in IM$ temos que

$$\begin{aligned} am &= a\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} a a_i m_i \end{aligned}$$

como I é ideal de A, $aa_i \in I$, logo $am \in IM$.

5.1 Operações com Submódulos

Proposição 1 *(Soma de submódulos) Sejam M um A-módulo e $M_1, M_2, \ldots, M_t$ A-submódulos de M. O conjunto*

$$\sum_{i=1}^{t} M_i = \{\sum_{i=1}^{t} m_i : m_i \in M_i\}$$

é um A-submódulo de M.

Demonstração. Temos que $\sum_{i=1}^{t} M_i$ é subgrupo de M. Sejam $m = m_1 + \ldots + m_t \in \sum_{i=1}^{t} M_i$ e $a \in A$. Daí,

$$\begin{aligned} am &= a(m_1 + \ldots + m_t) \\ &= (am_1 + \ldots + am_t) \end{aligned}$$

como M_i é A-submódulo, $am \in M_i$ $\forall i = 1, \ldots, t$. Logo, $am \in \sum_{i=1}^{t} M_i$. Portanto, $\sum_{i=1}^{t} M_i$ é A-submódulo de M.

Proposição 2 *(Interseção de submódulo) Sejam M um A-módulo e $M_1, ..., M_t$ sendo A-submódulos de M. Então $M_1 \cap \ldots \cap M_t$ é um A-submódulos de M.*

Demonstração. Sabemos que a interseção de subgrupos é um subgrupo. Nos resta mostrar que, dado $m \in M_1 \cap \ldots \cap M_t$ e $a \in A$, temos $am \in M_1 \cap \ldots \cap M_t$. Note que $am \in M_i$, para todo $i = 1, \ldots, t$, pois os $M_i^{'}s$ são A-submódulo de M. Logo, $am \in M_1 \cap \ldots \cap M_t$, concluindo que $M_1 \cap \ldots \cap M_t$ é A-submódulo de M.

Definição 4 *Sejam M um A-módulo, N e P quaisquer A-submódulos de M. Definimos $(N : P)$ como sendo o conjunto de todos os $a \in A$ tais que $aP \subseteq N$. Em particular, $(0 : M)$ é o conjunto de todos os $a \in A$ tal que $aM = 0$. Este conjunto é chamado de* ***anulador*** *de M e é denotado por $Ann(M)$.*

Proposição 3 *Seja M um A-módulo e considere os A-submódulos N e P de M. Então $(N : P)$ é um ideal de A. Em particular $Ann(M)$ é um ideal de A.*

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $b, b^{'} \in (N : P)$.

- Temos que $(ab)P = a(bP)$, como $bP \subseteq N$, então $abp \in N$ para todo $p \in P$. Como $a(bP) \in N$, temos que $ab \in (N : P)$.

- Seja $p \in P$, e note que

  $$(b - b^{'})p = bp - b^{'}p \in N$$

  assim, $b - b^{'} \in (N : P)$.

Portanto, $(N : P)$ é ideal de A.

Em particular, se $b, b^{'} \in Ann(M)$ temos $(ab)M = a(bM) = a.0 = 0$. E, $(b - b^{'})m = bm - b^{'}m = b.0 - b^{'}.0 = 0$, $\forall\ m \in M$, ou seja, $Ann(M)$ é um ideal de A.

5.2 (A/I)-Módulo

Seja $I \subseteq A$ ideal, podemos considerar M um (A/I)-módulo com o seguinte produto por escalar:

$$\begin{array}{ccc} (A/I) \times M & \to & M \\ (\bar{x}, m) & \mapsto & \bar{x}m \end{array}$$

Essa função está bem definida. De fato, sejam $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in A/I$ e $m_1, m_2 \in M$ tais que $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ e $m_1 = m_2$. Logo, $\overline{x_1 - x_2} = \overline{0}$, assim,

$$\begin{array}{rcl} \overline{(x_1 - x_2)}m_1 & = & (\overline{x_1} - \overline{x_2})m_1 \\ & = & \overline{x_1}m_1 - \overline{x_2}m_1 \\ & = & \overline{x_1}m_1 - \overline{x_2}m_2 \end{array}$$

como $(\overline{x_1 - x_2})m_1 = \overline{0}m_1 = 0$, então $\overline{x_1}m_1 = \overline{x_2}m_2$.

Definição 5 *Um A-módulo é fiel se $Ann(M) = 0$. Note que se $Ann(M) = I$ então, M é fiel como um (A/I)-módulo.*

5.3 A-Módulo Quociente

Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. Como $(M, +)$ é grupo abeliano $(N, +)$ é subgrupo normal, logo faz sentido considerar o grupo quociente $(M/N, +)$, isto é, o conjunto $M/N = \{m + N : m \in M\} = \{\overline{m} : m \in M\}$, das classes laterais de N em M munido da adição

$$\begin{array}{cccc} + : & (M/N) \times (M/N) & \to & M/N \\ & (\overline{m_1}, \overline{m_2}) & \mapsto & \overline{m_1 + m_2} \end{array}$$

$(M/N, +)$ com a multiplicação escalar :

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & A \times (M/N) & \rightarrow & M/N \\ & (a, \overline{m}) & \mapsto & a\overline{m} = \overline{am} \end{array}$$

é um A-módulo, chamado A**-módulo quociente**.

Vamos mostrar que as operações acima estão bem definidas, ou seja, independe da escolha do representante da classe. De fato, como $(M/N, +)$ é grupo a operação de soma já está bem definida. Por outro lado, sejam $(a, \overline{m})$, $(a', \overline{m'}) \in A \times M$ tais que $a = a'$ e $\overline{m} = \overline{m'}$. Logo, $m - m' \in N$. Dessa forma

$$a(m - m') \in N$$

e

$$am - am' \in N$$

Logo,

$\overline{am - am'} = \overline{0} \Rightarrow \overline{am} = \overline{am'} = a\overline{m'} = a'\overline{m'} = \overline{a'm'} \Rightarrow a\overline{m} = a'\overline{m'}$.

5.4 Homomorfismos de A-Módulos

Definição 6 *Sejam M e $M^{'}$ dois A-módulos, uma aplicação $f : M \rightarrow M^{'}$ é um **homomorfismo de A-módulo** se*

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$; $\forall m_1, m_2 \in M$.

2. $f(am) = af(m)$; $\forall m \in M$ *e* $\forall a \in A$.

Por simplicidade podemos chamar f de **A-linear** ou **operador linear**. Se f for A-linear bijetivo então f é **isomorfismo** de A-módulos. Neste caso, diremos que M e $M^{'}$ são **isomorfos** e usaremos a notação $M \simeq M^{'}$.

Exemplo 7 *Sejam A-módulos M e N.*

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & N \\ & m & \mapsto & 0 \end{array}$$

é homomorfismo de A-módulos.

Exemplo 8 *Seja M um A-módulo*

$$\begin{array}{rccc} g: & M & \to & M \\ & m & \mapsto & m \end{array}$$

é homomorfismo de A-módulos.

Exemplo 9 *Sejam M um A-módulo e A anel. Se $A^t = \{(a_1, \ldots, a_t) : a_i \in A\}$, então*

$$\begin{array}{rccc} h: & A^t & \to & M \\ & (a_1, \ldots, a_t) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

é um homomorfismo. De fato, sejam $(a_1, \ldots, a_t)$, $(a'_1, \ldots, a'_t) \in A^t$ e $a \in A$.

$$\begin{array}{rcl} i. \quad h((a_1, \ldots, a_t) + (a'_1, \ldots, a'_t) & = & h(a_1 + a'_1, \ldots, a_t + a'_t) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} (a_i + a'_i) m_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i m_i + a'_i m_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i m_i + \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i \\ & = & h(a_1, \ldots, a_t) + h(a'_1, \ldots, a'_t). \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
ii. \quad h(a(a_1,\ldots,a_t)) &= h(aa_1,\ldots,aa_t) \\
&= \sum_{i=1}^{t} aa_i m_i \\
&= a\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \\
&= ah(a_1,\ldots,a_t).
\end{aligned}
$$

Definição 7 *Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de A-módulo o* ***núcleo*** *e a* ***imagem*** *de f são, respectivamente, os conjuntos $Ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ e $Im(f) = \{f(m) : m \in M\}$.*

Exemplo 10 *Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. A projeção canônica $\pi : M \to M/N$ definida por $\pi(m) = \overline{m}$ é A-linear, sobrejetora com núcleo igual a N.*

De fato, π é A-linear pois, sejam $m_1, m_2 \in M$ e $a \in A$.

$$\pi(m_1 + m_2) = \overline{(m_1 + m_2)} = \overline{m_1} + \overline{m_2} = \pi(m_1) + \pi(m_2)$$

e

$$\pi(am_1) = \overline{am_1} = a\overline{m_1} = a\pi(m_1).$$

Além disso, π é sobrejetiva pois, para todo $\overline{m} \in M/N$ existe $m \in M$ tal que $\pi(m) = \overline{m}$.

Agora observe que

$$ker(\pi) = \{m \in M : \pi(m) = \overline{0}\} = \{m \in M \mid \overline{m} = \overline{0}\}$$

e

$$\overline{0} = \overline{m} \Leftrightarrow m \in N.$$

Assim, $m \in Ker(\pi) \Leftrightarrow m \in N$*, ou seja,* $Ker(\pi) = N$.

Proposição 4 *Seja* $f : M \to N$ *um homomorfismo de* A*-módulos. Então* $Ker(f)$ *e* $Im(f)$ *são* A*-submódulos de* M *e* N*, respectivamente. E, se* W *é um* A*-submódulo de* N*, então* $f^{-1}(W) = \{m \in M : f(m) \in W\}$ *é* A*-submódulo de* M*.*

Demonstração. Segue que $Ker(f)$ e $f^{-1}(W)$ são subgrupos de M e $Im(f)$ é subgrupo de N.

$Ker(f)$: Sejam $a \in A$ e $m \in Ker(f)$.

$$f(am) = af(m) = a \cdot 0 = 0.$$

isto é, $am \in Ker(f)$. Logo, $Ker(f)$ é A-submódulo de M.

$Im(f)$: Sejam $a \in A$ e $n \in Im(f)$, logo existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Daí,

$$an = af(m) = f(am) = f(m')$$

com $m' \in M$. Logo $an \in Im(f)$, concluindo que $Im(f)$ é A-submódulo de N.

$f^{-1}(W)$: Sejam $a \in A$ e $m \in f^{-1}(W)$, logo $f(m) \in W$. Dessa forma, como W é A-módulo $af(m) \in W$ e $af(m) = f(am), f(am) \in W$. Assim, $am \in f^{-1}(W)$ induzindo que $f^{-1}(W)$ é A-submódulo de M.

Observação 1 *Seja* $f : M \to N$ *um homomorfismo de* A*-módulos. Uma vez que* $Im(f)$ *é* A*-submódulo de* N *faz sentido considerar* $N/Im(f)$*, tal* A*-módulo é chamado co-núcleo de* f *e será denotado por* $Coker(f)$*.*

O conjunto de todos os homomorfismos de A-módulos de M em N, é também um A-módulo, munido com a soma e produto por escalar, respectivamente

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$a(f(x)) = f(ax)$$

$\forall x \in M$ e $a \in A$. Onde $f, g : M \to N$ são homomorfismos. Denotaremos este A-módulo por $Hom_A(M, N)$.

Sejam $u : M' \to M$ e $v : N \to N'$ dois homomorfismo de A-módulos, então eles determinam as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \overline{u}: & Hom_A(M,N) & \to & Hom_A(M',N) \\ & f & \mapsto & \overline{u}(f) = f \circ u \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \overline{v}: & Hom_A(M,N) & \to & Hom_A(M,N') \\ & f & \mapsto & \overline{v}(f) = v \circ f \end{array}$$

que são homomorfismos de A-módulos por ser composição de homomorfismos.

Lema 1 *Sejam* $f \in Hom_A(M, M')$*. e* $N \subseteq Ker(f)$*. Então existe um único homomorfismo de* A*-módulos* $\overline{f} : M/N \longleftarrow M'$ *tal que* $f = \overline{f} \circ \pi$ *definido por* $\overline{f}(\overline{m}) = f(m)$*.*

Demonstração. Seja $f : M \to M'$ A-linear tal que $N \subseteq Ker(f)$. Defina a função

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & M/N & \to & M' \\ & \overline{m} & \mapsto & \overline{f}(\overline{m}) = f(m) \end{array}$$

Mostraremos que f está bem definida, é homomorfismo e que $f = \overline{f} \circ \pi$. Sejam m_1 e $m_2 \in M/N$ tais que $m_1 = m_2$. Dessa forma

$$\overline{m_1} - \overline{m_2} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{m_1 - m_2} = \overline{0} \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in N$$

como $N \subseteq Ker(f)$ segue que $m_1 - m_2 \in Ker(f)$. Logo, $f(m_1 - m_2) = 0$, e como f é A-Linear

$$0 = f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) \Rightarrow f(m_1) = f(m_2).$$

Isto é, dados $\overline{m_1}$ e $\overline{m_2} \in M/N$ com $\overline{m_1} = \overline{m_2}$ mostramos que $\overline{f}(\overline{m_1}) = \overline{f}(\overline{m_2})$, portanto $\overline{f}$ está bem definida.

Observe agora que dados $m_1, m_2 \in (M/N)$ e $a \in A$

- $\overline{f}(\overline{m_1} + \overline{m_2}) = \overline{f}(\overline{m_1 + m_2}) = f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = \overline{f}(\overline{m_1}) + \overline{f}(\overline{m_2})$

- $\overline{f}(a\overline{m_1}) = \overline{f}(\overline{am_1}) = f(am_1) = af(m_1) = a\overline{f}(\overline{m_1})$.

Assim, $\overline{f}$ é homomorfismo.

Quanto a unicidade, agora suponha que exite $g : M/N \to M'$ tal que $g \circ \pi = f$. Sendo π sobrejetora exite uma inversa a direita. Assim,

$$g \circ \pi = f = \overline{f} \circ \pi \Rightarrow g \circ \pi \circ \pi^{-1} = \overline{f} \circ \pi \circ \pi^{-1} \Rightarrow g = \overline{f}$$

Portanto, $\overline{f}$ é único.

Teorema 1 ***(Teorema do Isomorfismo de A-módulos)*** *Sejam M, M' dois A-módulos e N um A-submódulo de M. Seja $f : M \to M'$ A-linear tal que $Ker(f) = N$. Então $M/N \simeq Im(f)$. Em particular, se f é sobrejetora $M/N \simeq M'$.*

Demonstração. Considere

$$\begin{array}{rccc} g: & M/N & \to & Im(f) \\ & \overline{m} & \mapsto & f(m) \end{array}$$

Pelo Lema anterior, g está bem definida e é homomorfismo. Note que g é sobrejetiva, pois é o mesmo homomorfismo $\overline{f}$ do lema com contra-domínio restrito a sua imagem. Dessa forma, para concluirmos o Teorema basta mostrar que g é injetiva.

Sejam $\overline{a}$ e $\overline{b} \in M/N$ tal que $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b})$ segue que

$$\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b}) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) - f(b) = 0 \Rightarrow f(a - b) = 0$$

pois f é homomorfismo. E,

$$f(a - b) = 0 \Rightarrow (a - b) \in Ker(f) = N \Rightarrow (a - b) \in N$$

Logo,

$$\overline{a - b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

como queríamos.

Exemplo 11 *Sejam A um anel e $M_1, \ldots, M_2$ um conjunto finito de A-módulos. Podemos induzir, de forma natural, uma estrutura de A-módulos para o conjunto $M_1 \times \ldots \times M_t = \{(m_1, \ldots, m_t) \mid m_i \in M_i; \forall i = 1, \ldots, t\}$. Seja N_i submódulo de M_i para $i = 1, \ldots, t$. Então $(M_1 \times \ldots \times M_t)/(N_1 \times \ldots \times N_t) \simeq (M_1/N_1) \times \ldots \times (M_t/N_t)$.*

Demonstração. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & M_1 \times \ldots \times M_t & \to & (M_1/N_1) \times \ldots \times (M_t/N_t) \\ & (m_1, \ldots, m_t) & \mapsto & (\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) \end{array}$$

Note que f é homomorfismo sobrejetor e o núcleo de f é $N_1 \times \ldots \times N_t$. De fato, tome $(m_1, \ldots, m_t)$ e $(m'_1, \ldots, m'_t) \in M_1 \times \ldots \times M_t$ e $a \in A$, então

$$\begin{array}{rcl} f((m_1, \ldots, m_t) + (m'_1, \ldots, m'_t)) & = & f(m_1 + m'_1, \ldots, m_t + m'_t) \\ & = & (\overline{m_1 + m'_1}, \ldots, \overline{m_t + m'_t}) \\ & = & (\overline{m_1} + \overline{m'_1}, \ldots, \overline{m_t} + \overline{m'_t}) \\ & = & (\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) + (\overline{m'_t}, \ldots, \overline{m'_t}) \\ & = & f(m_1, \ldots, m_t) + f(m'_1, \ldots, m'_t) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} f(a(m_1, \ldots, m_t)) & = & f(am_1, \ldots, am_t) \\ & = & (\overline{am_1}, \ldots, \overline{am_t}) \\ & = & a(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) \\ & = & af(m_1, \ldots, m_t) \end{array}$$

Logo, f é homomorfismo.

Seja $(m_1, \ldots, m_t) \in N_1 \times \ldots \times N_t$. Então $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$, assim $N_1 \times \ldots \times N_t \subset Ker(f)$. Por outro lado, se $(m_1, \ldots, m_t) \in Ker(f)$, teremos que $f((m_1, \ldots, m_t)) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$. Então $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$, logo $m_i \in N_i$ para $1 \leqslant i \leqslant t$. Isto é, $Ker(f) \subset N_1 \times \ldots \times N_t$. Dessa forma $Ker(f) = N_1 \times \ldots \times N_t$.

Além disso, f é sobrejetiva, pois seja $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_t}) \in (M_1/N_1) \times \ldots \times (M_t/N_t)$ existe $(m_1, \ldots, m_t) \in M_1 \times \ldots \times M_t$ tal que $f((m_1, \ldots, m_t)) = (m_1, \ldots, m_t)$.

Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo de A-módulos $(M_1 \times \ldots \times M_t)/(N_1 \times \ldots \times N_t) \simeq (M_1/N_1) \times \ldots \times (M_t/N_t)$.

Proposição 5 *Sejam M um A-módulo e $N \subseteq M$ um A-submódulo. Existe uma correspondência bijetiva entre os A-submódulos de M/N e os A-submódulos de M que contém N.*

Demonstração. Seja $\pi : M \to M/N$, mostramos que π é homomorfismo sobrejetivo com núcleo N. Dado W um submódulo de M, então $\pi(W)$ é um submódulo de M/N. Por outro lado, seja S submódulo de M/N, defina $W = \pi^{-1}(S)$ (submódulo de M). Note que $N \subset W$. De fato, como S é submódulo de M/N, segue que $\overline{0} \in S$. Sabemos que $\forall n \in N$, $\pi(n) = \overline{n} = \overline{0}$. Logo, $\forall n \in N, n \in \pi^{-1}(S) = W$.

Proposição 6 *Seja M um A-módulo.*

1. *Se $N \subseteq M \subseteq L$ são A-módulos, então $(L/N)/(M/N) \simeq (L/M)$.*

2. *Se M_1 e M_2 são A-submódulos de M, então $(M_1+M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2)$.*

Demonstração. 1. Defina

$$\begin{array}{rccc} f: & L/N & \to & L/M \\ & \overline{x}^1 & \mapsto & \overline{x}^2 \end{array}$$

f está bem definida, pois $N \subseteq M$ e é homomorfismo. De fato, sejam $\overline{a}^1, \overline{b}^1 \in L/N$ e $c \in A$

$$\begin{array}{rccccccccc} i. & f(\overline{a}^1 + \overline{b}^1) & = & f(\overline{a+b}^1) & = & \overline{a+b}^2 & = & \overline{a}^2 + \overline{b}^2 & = & f(\overline{a}^1) + f(\overline{b}^1) \\ ii. & f(c\overline{a}^1) & = & f(\overline{ca}^1) & = & \overline{ca}^2 & = & c\overline{a}^2 & = & cf(\overline{a}^1) \end{array}$$

Além disso, $Ker(f) = M/N$. De fato, seja $\overline{x}^1 \in Ker(f), f(\overline{x}^1) = \overline{0}^2$ teremos que $x \in M$. Como f é homomorfismo $f(\overline{0}^1) = \overline{0}^2$, assim $\overline{x}^1 = \overline{0}^1$ logo $x \in N$ implicando que $\overline{x}^1 \in M/N$. Por outro lado, se $\overline{x}^3 \in M/N$, então $x \in M$ logo $\overline{x}^2 = \overline{0}^2$ em L/M. Daí, $f(\overline{x}^1) = \overline{0}^2$, portanto, $\overline{x}^3 \in Ker(f)$.

Note que f é sobrejetiva, pois seja $\overline{x}^2 \in L/M$, por $N \subseteq M$, existe $\overline{x}^1$ em L/N tal que $f(\overline{x}^1) = \overline{x}^2$. Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo de A-módulos $(L/N)/(M/N) \simeq (L/M)$.

2. É fácil ver que $M_1 \subseteq M_1 + M_2$ e $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Seja f definida a seguir

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2 & \to & (M_1 + M_2)/M_1 \\ & m_2 & \mapsto & \overline{m_2} \end{array}$$

Dados $m_2, m_2' \in M_2$ e $a \in A$, então

$$\begin{array}{ccccccc} f(m_2 + m_2') & = & \overline{m_2 + m_2'} & = & \overline{m}_2 + \overline{m'}_2 & = & f(m_2) + f(m_2') \\ f(am_2) & = & \overline{am}_2 & = & a\overline{m}_2 & = & af(\overline{m}_2) \end{array}$$

logo f é homomorfismo de A-módulos. Note também que dado $m = m_1 + m_2 \in M_1 + M_2$, teremos que $m_2 = m - m_1 \in M_2$ e que

$$\begin{aligned} f(m - m_1) &= \overline{m - m_1} \\ &= \overline{m} - \overline{m_1} \end{aligned}$$

como $\overline{m_1} = \overline{0}$ teremos

$$f(m - m_1) = \overline{m}$$

assim, f é sobrejetiva. Além disso

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{m_2 \in M_2 : f(m_2) = \overline{0}\} \\ &= \{m_2 \in M_2 : \overline{m_2} = \overline{0}\} \\ &= \{m_2 \in M_2 : m_2 \in M_1\} \\ &= M_1 \cap M_2 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo $(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2)$.

5.5 A-Módulo Finitamente Gerado

Seja M um A-módulo, M é dito **finitamente gerado** se existem finitos $m_1, m_2, \ldots, m_t \in M$ tais que

$$M = Am_1 + \ldots + Am_t = \{\sum_{j=1}^{t} a_j m_j : a_j \in A\}$$

Os elementos $m_1, m_2, \ldots, m_t$ são chamados de **geradores** de M. Se M é gerado por um único elemento diremos que M é **cíclico**.

Exemplo 12 *Seja A um anel. Sobre o grupo abeliano $(A, +)$, defina uma multiplicação escalar por*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times A & \rightarrow & A \\ & (a, b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}$$

Com essa multiplicação A é A-módulo cíclico, gerado por 1, e os ideais de A são A-submódulos. De maneira geral A^t é um A-módulo finitamente gerado.

De fato, o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$, onde $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ elemento de A^t onde a i-ésima coordenada é 1 e as demais são zero geram A^t, pois dado $(a_1, \ldots, a_t) \in A^t$ teremos

$(a_1, a_2, \ldots, a_t) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_t(0, 0, \ldots, 1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i e_i$.

Proposição 7 *Seja M um A-módulo. Então M é finitamente gerado se, e só se, existe N A-submódulo de A^t, com $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que A^t/N é isomorfo a M.*

Demonstração. Seja M um A-módulo finitamente gerado e $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ geradores de M

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A^t & \rightarrow & M \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_t) & \mapsto & a_1 m_1 + \ldots + a_t m_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

ϕ é homomorfismo. Temos que ϕ é sobrejetivo, pois para cada $m \in M$ temos que $m = a_1 m_1 + \ldots + a_t m_t = \phi(a_1, \ldots, a_t)$. Logo, pelo Teorema do isomorfismo $A^t/Ker(\phi) \simeq M$. Como $Ker(\phi) = N$ é A-submódulo de A^t concluímos o que queríamos.

Por outro lado, seja $\phi : A^t/N \to M$ um isomorfismo com N A-submódulo N de A^t. Considere a projeção canônica $\pi : A^t \to A^t/N$. Então $f = \phi \circ \pi : A^t \to M$ é sobrejetiva.

Dessa forma, dado $m \in M$ existe $(a_1, \ldots, a_t) \in A^t$ tal que

$$m = f(a_1, \ldots, a_t) = f(\sum_{i=1}^{t} a_i m_i)$$

como f é homomorfismo

$$m = \sum_{i=1}^{t} f(a_i e_i) = \sum_{i=1}^{t} f(a_i) f(e_i)$$

ou seja, $f(e_1), \ldots, f(e_i)$ são geradores de M, portanto, M é finitamente gerado.

Seja M um A-módulo. Como nos Espaços Vetoriais, dizemos que os elementos $m_1, \ldots, m_t$ de M são **A-linearmente independentes** sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_j m_j = 0$, com $a_j \in A$, tivermos que $a_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, t$. Neste caso, usaremos a notação A-li. Caso contrário diremos que $m_1, \ldots, m_t$ são **A-linearmente dependentes**. Neste caso, usaremos a notação A-ld.

Definição 8 *Um A-módulo finitamente gerado M é dito livre se ele admite um conjunto finito de geradores $m_1, \ldots, m_t$ que são A-li. Neste caso, diremos que $m_1, \ldots, m_t$ é uma base para M e $M = Am_1 + \ldots + Am_t$.*

Exemplo 13 *Note que $(\mathbb{Z}_n, +)$ não é livre como $\mathbb{Z}$-módulo. Na verdade é possível verificar que qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}_n$ é ld. Considere, por exemplo, $\mathbb{Z}_6$ considere o subconjunto $\{\overline{2}, \overline{5}\}$. Se $a\overline{2} + b\overline{5} = \overline{0}$ considere $a = 30$*

e $b = 30$. De forma geral, podemos considerar os coeficientes sendo um múltiplo comum entre os elementos do conjunto de geradores e n.

Observação 2 *Sejam M um A-módulo livre e $m \in M$. Então existem únicos $a_1, ..., a_t \in A$ tais que*

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i$$

onde $\{m_1, \dots, m_t\}$ é base de M.

De fato, suponhamos que existem $a'_1, \dots, a'_t$ tais que $m = \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i$. Dessa forma,

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i = \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i$$

logo

$$\sum_{i=1}^{t} (a_i - a'_i) m_i = 0$$

como M é livre temos que $a_i - a'_i = 0 \Rightarrow a_i = a'_i$, para todo $1 \leq i \leq t$.

Observação 3 *Note que se M é A-linear livre, de base $\{m_1, \dots, m_t\}$ é equivalente a $M \simeq A^t$. Da Proposição anterior sabemos que M ser finitamente gerado é equivalente a dizer que existe A-submódulo N de A^t tal que $A^t/N \simeq M$. Na demonstração da mesma proposição $N = Ker(h)$*

$$\begin{array}{rccc} h\colon & A^t & \to & M \\ & (a_1, a_2, \dots, a_t) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

Note que , sendo M A-módulo livre $Ker(h) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$. De fato, se $(a_1, \dots, a_t) \in Ker(h)$

$$\begin{aligned} h(a_1, a_2, \ldots, a_t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{t} a_i m_i &= 0 \end{aligned}$$

como $m_1, \ldots, m_t$ é A-li. Logo, $a_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, t$. Portanto, $M \simeq A^t$.

Observação 4 *Sabemos que em um espaço vetorial, um vetor não nulo forma um conjunto li. No entanto, o mesmo não é válido para A-módulos. Por exemplo, considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Temos que:*

$$2 \cdot (0, \overline{1}) = (0, \overline{0})$$

.

Dessa forma, o conjunto $\{(0, \overline{1})\}$ é formado por um elemento não nulo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, e não é li.

Definição 9 *Seja M um A-módulo. Dizemos que M é* ***livre de torção*** *quando para todo $m \in M$ não nulo tivermos que o conjunto m é l.i.*

Exemplo 14 *Espaços Vetoriais são módulos livres de torção.*

Observação 5 *Nem sempre um submódulo de um módulo livre é livre. Considere como exemplo o anel $\mathbb{Z}_6$ dos inteiros módulo 6, que é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre com base $\{\overline{1}\}$. Note que $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ é um $\mathbb{Z}_6$-submódulo de $\mathbb{Z}_6$ que não é livre. De fato, todo subconjunto unitário de N é linearmente dependente, é fácil ver que $3 \cdot n = 0$ para todo $n \in N$.*

Proposição 8 *Seja M um A-módulo. Então M é livre de torção se, e somente se, dados $a \in A$ e $m \in M$ tais que $am = 0$, então $a = 0$ ou $m = 0$.*

Demonstração. Sejam $a \in A, m \in M$ tais que $am = 0$. Se $m = 0$ não há nada que provar, se $m \neq 0$ como M é livre de torção então o conjunto m é A-l.i. logo $am = 0$ implica que $a = 0$.

Reciprocamente, vamos supor verdadeira a propriedade se $am = 0$ então $a = 0$ ou $m = 0$ para todo $a \in A$, $m \in M$. Então para todo $m \in M$, com $m \neq 0$ vai-se verificar que se $am = 0$ teremos que $a = 0$ logo o conjunto m é A-l.i. e portanto M é livre de torção.

Observação 6 *Nem sempre um submódulo de um módulo finitamente gerado é finitamente gerado. Por exemplo, considere o anel de polinômio* $M = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]$, *que é M-módulo finitamente gerado por 1, mas* $N = (x_1, x_2, \ldots)$ *é M-submódulo de M e não é finitamente gerado, pois não é finito.*

Proposição 9 *Sejam A um domínio de ideais principais e M um A-módulo finitamente gerado. Então todo A-submódulo de M é finitamente gerado.*

Demonstração. Seja M um A-módulo finitamente gerado, logo existem $m_1, \ldots, m_t$ tais que $M = Am_1, \ldots, Am_t$. Seja N um A-submódulo de M, vamos mostrar que N é finitamente gerado por indução sobre t.

Se M for gerado por um elemento considere $f : A \to Am_1 = M$ definida por $f(a) = am_1$.

Note que, f é homomorfismo. Além disso, f é sobrejetiva pois, dado $m \in M$ temos que $m = am_1$ para algum $a \in A$, e $f(a) = am_1 = m$.

Seja $I = ker(f)$, pelo Teorema do isomorfismo temos que $A/I \simeq M$. Logo exite W submódulo de A/I tal que $W \simeq N$, pois se W é submódulo de A/I, então a imagem de W é isomorfa a um submódulo de M.

Pela Proposição 5 $W = J/I$ com J ideal de A com $I \subseteq J$.

Como A é domínio de ideias principais, $J = \langle a \rangle$, logo J/I também é ideal principal. Assim, N é gerado por um único elemento.

Suponha que o resultado seja válido para A-módulos gerados por uma quantidade de elementos menores que t.

Defina $M' = Am_2, \ldots, Am_t$ e $B = \{b \in A : bm_1 \in N + M'\}$, com $N \subseteq M = Am_1 + M'$ submódulo de M.

Note que B é ideal de A, pois se $b \in B$ e $a \in A$ temos que $(ab)m_1 = a(bm_1) = a(n + m') = an + am' \in N + M'$, pois NeM' são A-submódulo, assim

$$(ab)m_1 \in N + M' \Rightarrow ab \in B$$

Como todo ideal de A é principal, $B = \langle b \rangle$. E, como $bm_1 \in N + M'$ existe $n' \in N$ tal que $bm_1 - n' \in M'$.

Afirmação: $N = An' + (N \cap M')$.

Seja $x \in N, x = m' + a_0 m_1$ com $a_0 \in A$ e $m' \in M'$. Temos que

$$x = m' + a_0 m_1 \Rightarrow a_0 m_1 = x - m' \in N + M' \Rightarrow a_0 \in B \Rightarrow a_0 = ab$$

Daí, $a_0 m_1 = abm_1 - an_0 + an_0 = a(bm_1 - n_0) + an_0$ e, como $bm_1 - n_0 \in M'$, temos que $a(bm_1 - n_0) + an_0 \in M' + An_0 \Rightarrow a_0 m_1 \in M' + An_0$. Assim, $x = m' + a_0 m_1 \in An_0 + M'$.

Agora escreva $x = a_1 n_0 + m'' coma_1 \in A$ e $m'' \in M'$. Segue que, $m'' = x - a_1 n_0 \in N \Rightarrow m'' \in N \Rightarrow m'' \in (N \cap M') \Rightarrow x \in An_0 + (N \cap M')$.

Por outro lado, seja $x \in An_0 + (N \cap M') \Rightarrow x = an_0 + k$ com $k \in (N \cap M') \Rightarrow an_0 + k \in N \Rightarrow x \in N$

Como $N = An_0 + (N \cap M')$ e M' é finitamente gerado por hipótese de indução, logo $(N \cap M')$ também é finitamente gerado. Assim, $An_0 + (N \cap M')$ é finitamente gerado, consequentemente, N é finitamente gerado.

Sejam A um anel, M um A-módulo e I um ideal de A. Como $IM = \{\sum_{i=1}^{t} a_i m : a_i \in I\}$ é um A-submódulo de M, então podemos considerar o A-módulo quociente M/IM. Podemos também considerar o grupo quociente $(M/IM, +)$ munido da multiplicação escalar:

$$\begin{array}{ccc} (A/I) \times (M/IM) & \to & (M/IM) \\ (\overline{a}, \overline{m}) & \mapsto & \overline{am} \end{array}$$

Verifiquemos que esta multiplicação é bem definida e que, com ela, (M/IM) é um (A/I)-módulo. Sejam $\overline{a_1}, \overline{a} \in A/I$ com $\overline{a_1} = \overline{a}$ e $\overline{m_1}, \overline{m} \in M/IM$ tal que $\overline{m_1} = \overline{m}$, então $m_1 - m \in IM$ e $a_1 - a \in I$. Logo, $a(m_1 - m) \in IM$ e $(a_1 - a)m \in IM$, pois IM é A-módulo. Assim,

$$\begin{array}{ccccccc} a_1\overline{(m_1 - m)} & = & \overline{a_1 m_1 - a_1 m} & = & \overline{a_1 m_1} - \overline{a_1 m} & = & \overline{0} \\ \overline{(a_1 - a)m} & = & \overline{a_1 m - am} & = & \overline{a_1 m_1} - \overline{am} & = & \overline{0} \end{array}$$

portanto, $\overline{a_1 m_1} = \overline{a_1 m} = \overline{am}$.

Proposição 10 *Seja N um subgrupo do grupo (M/IM, +). Então o subgrupo N é um A-submódulo de M/IM se, e somente se, N é um (A/I)-submódulo de M/IM.*

Demonstração. Seja N um A-submódulo de M/IM. Tome $\overline{n} \in N$, e $\overline{a} \in A/I$, então $\overline{a} \cdot \overline{n} = \overline{an} \in N$.

Reciprocamente, se N é um (A/I)-submódulo. Tome $\overline{n} \in N$, e $a \in A$, então $a\overline{n} = \overline{an} = \overline{a} \cdot \overline{n} \in N$.

6 Produto Tensorial

Neste capítulo, vamos desenvolver um A-módulo especial, conhecido como Produto Tensorial. Além disso, exploraremos definições e algumas propriedades de Sequências Exatas, assim como sua aplicação Lema da Serpente.

Definição 10 *Sejam M, N e P três A-módulos. A função* $f : M \times N \to P$ *é A-bilinear se* $\forall m, m' \in M;\ n, n' \in N$ *e* $a \in A$ *satisfaz:*

1. $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$

2. $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$

3. $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$

Construiremos um A-módulo denotado por T, chamado de ***produto tensorial*** *de M e N, com a propriedade que a aplicação A-bilinear* $M \times N \to P$ *esteja em correspondência com a aplicação A-linear* $T \to P$*, para todo A-módulo P.*

Teorema 2 *Sejam M e N dois A-módulos. Então existe um A-módulo T junto com a aplicação A-bilinear* $g : M \times N \to T$ *tal que, dados quaisquer A-módulos P e* $f : M \times N \to P$ *aplicação A-bilinear, existe uma única aplicação A-linear* $f' : T \to P$ *com* $f = f' \circ g$*. Além disso, se (T, g) e* (T', g') *são dois pares que satisfazem essa propriedade, então existe um único isomorfismo* $j : T \to T'$ *tal que* $j \circ g = g'$*.*

Demonstração. Para que o produto tensorial funcione da maneira que esperamos, que ele seja A-bilinear, ou seja, $(u + u') \otimes v = (u \otimes v) + (u' \otimes v)$,

$u \otimes (v + v') = (u \otimes v) + (u \otimes v')$, $(au) \otimes v = a(u \otimes v)$ e $u \otimes (av) = a(u \otimes v)$. Construíremos da seguinte forma:

Seja C o A-módulo livre cujos elementos são combinações lineares de elementos de $M \times N$ com coeficientes em A, isto é, são expressões da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i); a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N.$$

Seja um A-submódulo D de C gerado por todos os elementos de C do tipo:

$$\begin{array}{rcccclc}
(x + x', y) & - & (x, y) & - & (x', y) & & (1) \\
(x, y + y') & - & (x, y) & - & (x, y') & & (2) \\
 & & (ax, y) & - & a(x, y) & & (3) \\
 & & (x, ay) & - & a(x, y) & & (4)
\end{array}$$

Considere o A-módulo $T = C/D$. Para cada elemento base $(x, y) \in C$, denote sua classe em T por $x \otimes y$. Uma vez que os elementos (1), (2), (3) e (4) pertencem a D, note que

$$\begin{array}{rcl}
(x + x', y) - (x, y) - (x', y) \in D & \Rightarrow & (x + x', y) - (x, y) - (x', y) - 0 \in D \\
 & \Rightarrow & \overline{(x + x', y) - (x, y) - (x', y)} = \overline{0} \in C/D \\
 & \Rightarrow & \overline{(x + x', y)} - \overline{(x, y)} - \overline{(x', y)} = \overline{0} \\
 & \Rightarrow & \overline{(x + x', y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(x', y)} \\
 & \Rightarrow & (x + x') \otimes y = (x \otimes y) + (x' \otimes y) \qquad (5)
\end{array}$$

Analogamente, temos

$$
\begin{aligned}
x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y' && (6)\\
(ax) \otimes y &= a(x \otimes y) && (7)\\
x \otimes (ay) &= a(x \otimes y) && (8)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, definindo

$$
\begin{aligned}
g: \quad M \times N &\rightarrow \quad T\\
(x, y) &\mapsto x \otimes y
\end{aligned}
$$

segue então de 5, 6, 7 e 8 que g é aplicação A-bilinear.

Agora, dado uma aplicação A-bilinear qualquer $f : M \times N \rightarrow P$, ela é estendível por linearidade a um homomorfismo $\overline{f} : C \rightarrow P$, com $\overline{f}(x, y) = f(x, y)$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\overline{f}((x + x', y) - (x, y) - (x', y)) &= f((x + x', y) - (x, y) - (x', y))\\
&= f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y)\\
&= f(x, y) + f(x', y) - f(x, y) - f(x', y)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, segue que $\overline{f}$ se anula nos elementos 2, 3 e 4 de D, isto é, $D \subseteq Ker(\overline{f})$. Então, pelo Lema 1 existe um único $f' : C/D \rightarrow P$ como no seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & C/D \arrow[dl, "f'"] \\
P &
\end{tikzcd}
$$

tal que $\overline{f} = f' \circ \pi \Rightarrow \overline{f}|_{M \times N} = f' \circ \pi|_{M \times N} \Rightarrow f = f' \circ g$.

Consequentemente (T, g) satisfazem as hipóteses do Teorema.

Unicidade: Suponha que existam T' A-módulo e $g' : M \times N \to T'$ aplicação bilinear satisfazendo as hipóteses do Teorema. Tomando $P = T'$ e $f = g'$, existe única transformação A-linear $j' : T' \to T$ tal que $g = j' \circ g'$, como sugere o diagrama.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & T' \\ T \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & T' \arrow[dl, "j'"] \\ T & \end{tikzcd}$$

Note que a função $j : T \to T'$ é de forma que $g' = j \circ g$ e a $j' : T' \to T$ satisfaz $g = j' \circ g'$. Daí,

$$(j' \circ j) \circ g = j' \circ (j \circ g) = j' \circ g' = g$$

logo $j' \circ j = id : T \to T$. Portanto j' é isomorfismo.

Observação 7 *O A-módulo T construído na proposição anterior é chamado de* ***produto tensorial*** *de M por N e será denotado por* $M \otimes_A N$. *Ele é gerado pelos elementos* $x \otimes y$ *com* $x \in M$ *e* $y \in N$, *chamaremos um elemento deste tipo de* ***tensor elementar***. *Se* $(x_i)_{i \in I}$ *e* $(y_j)_{j \in J}$ *são famílias de geradores de M e N, respectivamente, então os elementos* $x_i \otimes y_j$ *geram* $M \otimes_A N$. *De fato, seja* $(x \otimes y) \in M \otimes N$

$$
\begin{aligned}
(x \otimes y) &= (\sum_{i \in I} a_i x_i \otimes y_i) \\
&= \sum_{i \in I} (a_i x_i \otimes y_i) \\
&= \sum_{i \in I} (a_i x_i \otimes \sum_{j \in J} a'_j y_j) \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (a_i x_i \otimes a'_j y_j) \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i a'_j (x_i \otimes y_j)
\end{aligned}
$$

Se M e N são finitamente gerados, então $M \otimes_A N$ também é.

Observação 8 *A notação $x \otimes y$ pode gerar ambiguidade, a menos que especifiquemos o produto tensorial ao qual pertence. Pode acontecer, por exemplo, que nos submódulos de M' e N' de M e N, respectivamente, $x \otimes y$ seja zero em $M \otimes N$ e não seja não nulo em $M' \otimes N'$, com $x \in M'$ e $y \in N'$.*

Por exemplo, considere $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}_2$ e $M' = 2\mathbb{Z}$. Note que $2 \otimes \overline{1} = 2.1 \otimes \overline{1} = 2(1 \otimes \overline{1}) = (1 \otimes 2.\overline{1}) = (1 \otimes \overline{2}) = (1 \otimes \overline{0}) = 0$ em $M \otimes N$, mas $2 \otimes 1$ é não-nulo em $M' \otimes N$.

Sabemos que se M e N são A-módulos finitamente gerados, então $M \otimes N$ também será. Neste caso, $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 = \langle 2 \otimes \overline{1} \rangle$, pois $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$ e $\mathbb{Z}_2 = \langle \overline{1} \rangle$.

Então, $\langle 2 \otimes \overline{1} \rangle \neq 0$ pois $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ não é o módulo zero. Para mostrar tal afirmação, defina a função

$$
\begin{aligned}
f : 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}_2 \\
(x, y) &\mapsto \overline{(\tfrac{xy}{2})}
\end{aligned}
$$

Note que f é A-bilinear, dados $a \in \mathbb{Z}$, $x, x' \in 2\mathbb{Z}$ e $\overline{y}, \overline{w} \in \mathbb{Z}_2$

- $f((ax+x',\overline{y})) = \overline{(\frac{(ax+x')y}{2})} = \overline{(\frac{axy+x'y}{2})} = \overline{(\frac{axy}{2})}+\overline{(\frac{x'y}{2})} = a\overline{(\frac{xy}{2})}+\overline{(\frac{x'y}{2})} = af(x,\overline{y})+f(x',\overline{y})$

- $f((x,a\overline{y}+\overline{w})) = f((x,\overline{ay+w})) = \overline{(\frac{x(ay+w)}{2})} = \overline{(\frac{axy+xw}{2})} = \overline{(\frac{axy}{2})} + \overline{(\frac{xw}{2})} = a\overline{(\frac{xy}{2})} + \overline{(\frac{xw}{2})} = af(x,\overline{y})+f(x,\overline{w})$

Então, podemos aplicar o teorema

$$\begin{tikzcd}
2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & 2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, "f'"] \\
\mathbb{Z}_2 &
\end{tikzcd}$$

Como f e g são sobrejetiva, f' também é. E $\mathbb{Z}_2$ não é módulo nulo, então $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ não pode ser módulo nulo. Logo, $(2 \otimes \overline{1}) \neq 0$ em $M' \otimes N$.

Observação 9 *Indutivamente podemos definir uma aplicação multilinear* $f : M_1 \times \ldots \times M_t \to P$ *analogamente a definição 9, isto é, linear em cada coordenada. Segue da prova do teorema que teremos um produto multitensor* $T = M_1 \times \ldots \times M_t$*, gerado por todos produtos* $x_1 \otimes \ldots \otimes x_t$ *com* $x_i \in M_i, 1 \leq i \leq t$.

Proposição 11 *Sejam* $\mathbb{Z}_m$ *e* $\mathbb{Z}_n$ *dois* $\mathbb{Z}$*-módulos. Então* $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ *é o módulo zero, se* m *e* n *são coprimos.*

Demonstração. *Sejam* m *e* n *relativamente primos, logo existe* $r, s \in \mathbb{Z}$ *tal que* $mr + ns = 1$*. Então, dado* $x \otimes y \in \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ *temos*

$$\begin{aligned}
x \otimes y &= 1 \cdot (x \otimes y) \\
&= (mr + ns) \cdot (x \otimes y) \\
&= mr(x \otimes y) + ns(x \otimes y) \\
&= (mrx) \otimes y + x \otimes (nsy) \\
&= 0 \otimes y + x \otimes 0 \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$*.*

A seguir, declaramos alguns dos vários "isomorfismos canônicos" existentes:

Proposição 12 *Sejam* M, N *e* P A*-módulos. Então existem únicos isomorfismos*

1. $M \otimes N \simeq N \otimes M$;
2. $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$;
3. $(M \times N) \otimes P \simeq (M \otimes N) \times (N \otimes P)$;
4. $A \otimes M \simeq M$

Demonstração. (1) Como queremos provar o isomorfismo, para isso devemos aplicar o teorema. Sabemos que existe a aplicação A-bilinear $g : M \times N \to M \otimes N$, então devemos entregar uma outra aplicação bilinear, neste caso será $f : M \times N \to N \otimes M$. Note que f definida por $f(m, n) = n \otimes m$ é de fato A-bilinear

- $f(am + m', n) = n \otimes (am + m') = (n \otimes am) + (n \otimes m') = a(n \otimes m) + (n \otimes m') = af(m, n) + f(m', n)$;

- $f(m, an + n') = (an + n') \otimes m = (an \otimes m) + (n' \otimes m) = a(n \otimes m) + (n' \otimes m) = af(m, n) + f(m, n')$

Assim, podemos aplicar o teorema

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \otimes N \arrow[dl, "f'"] \\ N \otimes M & \end{tikzcd}$$

Com $f = f' \circ g \Rightarrow n \otimes m = f(m, n) = (f' \circ g)(m, n) = f'(g(m, n)) = f'(m \otimes n) \Rightarrow f'(m \otimes n) = n \otimes m$.

Então, fazemos a mesma análise para o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \otimes M \arrow[dl, "j"] \\ M \otimes N & \end{tikzcd}$$

Como $g = j \circ f \Rightarrow m \otimes n = g(m, n) = j(f(m, n)) = j(n \otimes m) \Rightarrow j(n \otimes m) = m \otimes n$.

Portanto, podemos observar que

$(j \circ f') \circ g = j \circ (f' \circ g) = j \circ f = g$

$(f' \circ j) \circ f = f' \circ (j \circ f) = f' \circ g = f$

$\Rightarrow j \circ f' = f' \circ j = id$

$\Rightarrow M \otimes N \simeq N \otimes M$.

(2) Da mesma forma, devemos buscar uma aplicação A-bilinear. Assim, para cada $w \in P$ defina

$$\begin{array}{rcl} f_w : M \times N & \to & M \otimes (N \otimes P) \\ (u, v) & \mapsto & u \otimes (v \otimes w) \end{array}$$

- $f_w(au+u',v) = (au+u')\otimes(v\otimes w) = (au\otimes(v\otimes w))+(u'\otimes(v\otimes w)) = a(u\otimes(v\otimes w))+(u'\otimes(v\otimes w)) = af_w(u,v)+f_w(u',v)$;

- $f_w(u,av+v') = u\otimes((av+v')\otimes w) = u\otimes(av\otimes w+v'\otimes w) = u\otimes(a(v\otimes w))+u\otimes(v'\otimes w)) = a(u\otimes(v\otimes w))+(u\otimes(v'\otimes w)) = af_w(u,v)+f_w(u,v')$

Logo, f_w é bilinear, então pelo teorema

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_w"'] & M\otimes N \arrow[dl, "f'_w"] \\ M\otimes(N\otimes P) & \end{tikzcd}$$

Para cada $w\in P$, existe único homomorfismo f'_w tal que
$f_w = f'_w\circ j \Rightarrow f_w(u,v) = f'_w(j(u,v)) = f'_w(u\otimes v) \Rightarrow f'_w(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes w)$.
Agora, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f:(M\otimes N)\times P & \to & M\otimes(N\otimes P) \\ (h,w) & \mapsto & f'_w(h) \end{array}$$

- $f(ah_1+h_2,w) = f'_w(ah_1+h_2) = af'_w(h_1)+f'_w(h_2) = af(h_1,w)+f(h_2,w)$;

- $f(h,aw_1+w_2) = f'_{aw_1+w_2}(h) = f'_{aw_1+w_2}(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes(aw_1+w_2)) = u\otimes(v\otimes(aw_1)+(v\otimes w_2)) = u\otimes(v\otimes(aw_1))+u\otimes(v\otimes w_2) = a(u\otimes(v\otimes(w_1))+u\otimes(v\otimes w_2) = (af'_{w_1}+f'_{w2})(u\otimes v)$

Então, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} (M\otimes N)\times P \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f"'] & (M\otimes N)\otimes P \arrow[dl, "f'"] \\ M\otimes(N\otimes P) & \end{tikzcd}$$

tal que $f'(h \otimes w) = f(h, w)$ com $h \in M \otimes N$ e $w \in P$. Em particular, para $u \in M$ e $v \in N$ temos $f'((u \otimes v) \otimes w) = f(u \otimes v, w) = f'_w(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w)$.

Analogamente, considere a função A-bilinear

$$\begin{array}{rcl} f_u : N \times P & \to & (M \otimes N) \otimes P \\ (u, w) & \mapsto & (u \otimes v) \otimes w \end{array}$$

De fato:

- $f_u(av + v', w) = (u \otimes (av + v')) \otimes w = (u \otimes (av) + (u \otimes v')) \otimes w = (u \otimes (av)) \otimes w + (u \otimes v') \otimes w = a((u \otimes v) \otimes w) + (u \otimes v') \otimes w = af_u(v, w) + f_u(v', w)$;

- $f_u(v, aw + w') = (u \otimes v) \otimes (aw + w') = (u \otimes v) \otimes aw + (u \otimes v) \otimes w' = a((u \otimes v) \otimes w) + (u \otimes v) \otimes w' = af_u(v, w) + f_u(v, w')$

Logo, pelo teorema temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} N \times P \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f_u"'] & N \otimes P \arrow[dl, "f'_u"] \\ (M \otimes N) \otimes P & \end{tikzcd}$$

tal que $f'_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$

Considere,

$$\begin{array}{rcl} g : M \times (N \otimes P) & \to & (M \otimes N) \otimes P \\ (u, l) & \mapsto & g(u, l) = f'_u(l) \end{array}$$

função A-bilinear:

- $g(u, al + l') = f'_u(al + l') = af'_u(l) + f'_u(l') = ag(u, l) + g(u, l')$;

- $g(au+u',l) = f'_{au+u'}(l) = f'_{au+u'}(v\otimes w) = ((au+u')\otimes v)\otimes w = (au\otimes v+u'\otimes v)\otimes w = (au\otimes v)\otimes w+(u'\otimes v)\otimes w = (af'_u+f'_{u'})(l) = ag(u,l)+g(u',l)$

Assim, pelo teorema temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times (N \otimes P) \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "g"'] & M \otimes (N \otimes P) \arrow[dl, "g'"] \\
(M \otimes N) \otimes P &
\end{tikzcd}$$

tal que $g'(u\otimes l) = f'_u(l) = (u\otimes v)\otimes w$. Portanto $(g'\circ f') = f'\circ g' = id$ $\Rightarrow M\otimes(N\otimes P) \simeq (M\otimes N)\otimes P$

(3) Considere a função

$$\begin{aligned} f : (M\times N)\times P &\rightarrow (M\otimes P, N\otimes P) \\ ((u,v),w) &\mapsto (u\otimes w, v\otimes w) \end{aligned}$$

Dado $a\in A$; $(u,v);(u',v')\in M\times N$ e $w,w'\in P$

- $f(a(u,v)+(u',v'),w) = f((au+u',av+v'),w) = ((au+u')\otimes w,(av+v')\otimes w) = (au\otimes w+u'\otimes w, av\otimes w+v'\otimes w) = a(u\otimes w, v\otimes w)+(u'\otimes w, v'\otimes w) = af((u,v),w)+f((u',v'),w)$;

- $f((u,v),aw+w') = (u\otimes(aw+w'), v\otimes(aw+w')) = (u\otimes aw+u\otimes w', v\otimes w+v\otimes w') = a(u\otimes w, v\otimes w)+(u\otimes w', v\otimes w') = af((u,v),w)+f((u,v),w')$

é A-bilinear, então aplicando o teorema

$$\begin{tikzcd}
(M \times N) \times P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & (M \times N) \otimes P \arrow[dl, "f'"] \\
(M \otimes P) \times (N \otimes P) &
\end{tikzcd}$$

tal que $f = f' \circ g \Rightarrow f'((u,v) \otimes w) = (u \otimes w, v \otimes w)$

Po outro lado,

$$\begin{tikzcd}
(M \times N) \times P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (M \otimes P) \times (N \otimes P) \arrow[dl, "g'"] \\
(M \times N) \otimes P &
\end{tikzcd}$$

tal que $g = g' \circ f \Rightarrow g'(u \otimes w, v \otimes w) = (u,v) \otimes w$

Portanto,

$(g' \circ f')((u,v) \otimes w) = g'(u \otimes w, v \otimes w) = (u,v) \otimes w$

$(f' \circ g')(u \otimes w, v \otimes w) = f'((u,v) \otimes w) = (u \otimes w, v \otimes w)$

$\Rightarrow f' \circ g' = g' \circ f' = id \Rightarrow (M \times N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \times (N \otimes P)$

(4) Seja a aplicação A-bilinear

$$\begin{array}{rcl} f : A \times M & \to & M \\ (a,v) & \mapsto & av \end{array}$$

Pelo teorema, temos

$$\begin{tikzcd}
A \times M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes M \arrow[dl, "j"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

Com $f = j \circ g \Rightarrow j(a \otimes v) = av$.

Queremos encontrar uma aplicação j' tal que $(j \circ j')(v) = v$.

Considere então

$$\begin{array}{rcl} j' : M & \to & A \otimes M \\ v & \mapsto & 1 \otimes v \end{array}$$

Note que,

$(j \circ j')(v) = j(1 \otimes v) = v$

$(j' \circ j)(a \otimes v) = j'(av) = 1 \otimes av = a(1 \otimes v) = a \otimes v$

$\Rightarrow j \circ j' = j' \circ j = id \Rightarrow A \otimes M \simeq M$

6.1 Restrições e Extensão por Escalares

Definição 11 *Sejam $f : A \to B$ homomorfismo de anéis e N um B-módulo. Então N tem uma estrutura de A-módulo definida da forma: se $a \in A$ e $x \in N$, então ax é definido como $f(a)x$. Este é A-módulo é dito ser obtido de N por **restrição por escalares**. Em particular, f define assim uma estrutura de A-módulo em B.*

Observação 10 *Note que N, com tal definição, realmente é um A-módulo: Dados $a, a' \in A$ e $x, y \in N$, temos*

- $1_A x := f(1_A)x = 1_B x = x$
- $(a + a')x := f(a + a')x(f(a) + f(a'))x = f(a)x + f(a')x = ax + a'x$
- $(aa')x := f(aa')x = af(a')x = a(a'x)$
- $a(x + y) := f(a)(x + y) = f(a)x + f(a)y = ax + ay$

Então N é A-módulo, de maneira análoga, temos que B é A-módulo.

Proposição 13 *Suponha que N seja finitamente gerado como B-módulo e que B seja finitamente gerado como A-módulo. Então N é finitamente gerado como A-módulo.*

Demonstração. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_t$ geradores de N sobre B e $x_1, \ldots, x_r$ geradores de B como A-módulo. Então, $n \in N$ pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{t} b_i y_i$ e cada b_i é escrito como $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j$. Daí,

$$n = b_1 y_1 + \ldots + b_t y_t = (\sum_{j=1}^{r} a_{1j} x_j) y_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{r} a_{tj} x_j) y_t$$

Olhando N por restrições por escalares.

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} f(a_{ij}) x_j y_i$$

Portanto, N é finitamente gerado como A-módulo.

Definição 12 *Seja M um A-módulo. Como vimos, se existir um homomorfismo $f : A \to B$, então B pode ser considerado como um A-módulo e podemos formar o A-módulo $M_B = B \otimes_A M$. Observe que M_B possui uma estrutura de B-módulo da forma*

$$b(b' \otimes x) = (bb') \otimes x$$

$\forall b, b' \in B$ e $\forall x \in M$.

*Diremos que o B-módulo M_B é obtido por **extensão de escalares**.*

Observação 11 *Observe que M_B é de fato um B-módulo,*

- $1_B(b \otimes x) := (1_B b) \otimes x = b \otimes x$
- $(b_1+b_2)(b\otimes x) := ((b_1+b_2)b\otimes x) = (b_1 b+b_2 b)\otimes x = (b_1 b)\otimes x+(b_2 b)\otimes x := b_1(b \otimes x) + b_2(b \otimes x)$

- $(b_1b_2)(b \otimes x) := ((b_1b_2)b) \otimes x = (b_1(b_2b)) \otimes x := b_1(b_2b \otimes x)$
- $b_1((b\otimes x)+(b'\otimes x)) = b_1((b+b')\otimes x) := (b_1(b+b'))\otimes x = (b_1b+b_1b')\otimes x = (b_1b) \otimes x + (b_1b') \otimes x := b_1(b \otimes x) + b_1(b' \otimes x)$

Proposição 14 *Se M é finitamente gerado como A-módulo, então M_B é finitamente gerado como B-módulo.*

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_t$ geradores de M como A-módulo. Seja $m \in M_B = B \otimes_A M$ então existem $b \in B$ e $x \in M$ tais que

$$m = b \otimes x = b \otimes (\sum_{i=1}^{t} a_i x_i)$$

e pelo que foi visto no teorema

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i(b \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{t} a_i b(1 \otimes x_i)$$

isto é, $(1 \otimes x_i)$ gera M_B é finitamente gerado como B-módulo. Os elementos a_i estão sendo identificados como $f(a_i)$.

6.2 Sequências Exatas

Definição 13 *Uma sequência de homomorfismos de A-módulos*

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \ldots$$

*é dita exata em M_i se $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. A **sequência é exata** se é exata em cada M_i.*

Proposição 15 *Sejam os A-módulos M', M, M" e homomorfismos f e g.*

i. *A sequência de A-módulos* $0 \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{f} M$ *é exata se, e somente se,* f *é injetiva.*

ii. *A sequência de A-módulos* $M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{g'} 0$ *é exata se, e somente se,* g *é sobrejetiva.*

iii. *A sequência de A-módulos* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *é exata se, e somente se,* f *é injetiva,* g *é sobrejetiva e* g *induz um isomorfismo de* $Coker(f) = M/f(M')$*.*

Demonstração. (i) : $(\Leftarrow)$ f é injetiva $\Rightarrow Ker(f) = \{0\}$ como $Im(f') = \{0\} \Rightarrow Ker(f) = Im(f')$. Logo, a sequência é exata.

$(\Rightarrow)$ A sequência é exata $\Rightarrow Ker(f) = Im(f') \Rightarrow Ker(f) = \{0\}$. Logo, f é injetiva.

(ii) : $(\Leftarrow)$ g é sobrejetiva $\Rightarrow Im(g) = M'' \Rightarrow Im(g) = M'' = Ker(g')$. Logo, a sequência é exata.

$(\Rightarrow)$ A sequência é exata $\Rightarrow Im(g) = Ker(g') = M''$. Portanto, g é sobrejetivo.

(iii) : Seja

$$\begin{array}{rcl} \overline{g} : M/f(M') & \to & M'' \\ \overline{u} & \mapsto & \overline{g}(\overline{u}) = g(u) \end{array}$$

$(\Rightarrow)$ Resta mostrar que $\overline{g}$ está bem definida e é isomorfismo. De fato, como g é sobrejetiva então $M/Ker(g) \xrightarrow{\tilde{g}} M''$ com $\tilde{g}(\overline{u}) = g(u)$ é isomorfismo. Como $f(M') = Ker(g)$ então $\tilde{g} = \overline{g}$. Portanto, $\overline{g}$ é isomorfismo de A-módulos.

$(\Leftarrow)$ Resta mostrar que $Im(f) = Ker(g)$.

($\subseteq$): Seja $u \in Im(f)$. Logo,

$$g(u) = \overline{g}(\overline{u}) = \overline{g}(\overline{0}) = 0_{M'} \Rightarrow u \in Ker(g)$$

($\supseteq$): Seja $u \in Ker(g)$. Logo,

$$0 = g(u) = \overline{g}(\overline{u}) \Rightarrow \overline{u} \in Ker(\overline{g}) = \{0\} \Rightarrow \overline{u} = \overline{0} \Rightarrow u \in Im(f)$$

Portanto, $Im(f) = Ker(g)$.

Deste modo, as sequências da forma i, ii e iii são denominadas por **sequência exata à esquerda**, **sequência exata à direita** e **sequência exata curta**, respectivamente.

Exemplo 15 *Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. Se $i : N \hookrightarrow M$ e $\pi : M \to M/N$ então a sequência $0 \to N \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$ é exata, pois i é injetiva, π é sobrejetiva e $Im(i) = N = Ker(\pi)$.*

Proposição 16 *Sejam L, M e N módulos. A sequência de homomorfismos $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$ é exata se, e somente se, $N = Coker(\alpha)$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Temos por hipótese que β é sobrejetiva e $Im(\alpha) = Ker(\beta)$.

Pelo teorema do isomorfismo temos,

$Im(\beta) \simeq M/Ker(\beta) \Rightarrow N \simeq M/Ker(\beta) = M/Im(\alpha) \Rightarrow N = Coker(\alpha)$.

$\Leftarrow$) Sabemos que $N = Coker(\alpha) = M/Im(\alpha)$. Para provar que a sequência é exata, temos que mostrar que β é sobrejetiva e $Im(\alpha) = Ker(\beta)$.

Como $N = M/Im(\alpha)$, então $\beta : M \to N$ é sobrejetiva.

$\bullet Ker(\beta) \subseteq Im(\alpha)$:

Seja $x \in Ker(\beta)$, então $\beta(x) = \overline{0}$.

Pela definição de β, temos $\overline{x} = \overline{0}$. Assim, $x \in Im(\alpha)$.

$\bullet Im(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$:

Seja $y \in Im(\alpha)$ então $\beta(y) = \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow y \in Ker(\beta)$.

Portanto, $Ker(\beta) = Im(\alpha)$.

Proposição 17 *Sejam quaisquer A-módulos, junto com uma sequência, as seguintes condições são válidas:*

1. *A sequência $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ é exata se, e somente se, para todo A-módulo N a sequência*

$$0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N)$$

   é exata.

2. *A sequência $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ é exata se, e somente se, para todo A-módulo M a sequência*

$$0 \to Hom(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N'')$$

   é exata.

Demonstração.

(1) ($\Rightarrow$) Para mostrar que

$$0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N)$$

é uma sequência exata, basta mostrar que $\overline{v}$ é injetiva e que $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$.

• Seja $f \in Ker(\overline{v})$, então $\overline{v}(f) = 0$. Mas, $\overline{v}(f) = f \circ v : M \to N$ logo $f \circ v = 0$. Como v é sobrejetiva e $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ ser exata, $v(M) = M''$ logo $f \equiv 0$, isto é, $Ker(\overline{v}) = \{0\}$. Portanto, $\overline{v}$ é injetiva.

• $Im(\overline{v}) \subseteq Ker(\overline{u})$: Seja $f \in Im(\overline{v})$ existe homomorfismo $g : M'' \to N$ tal que $\overline{v}(g) = f = g \circ v$. Temos que $\overline{u}(f) = f \circ u$, então substituindo f temos $\overline{u}(f) = g \circ v \circ u$. Como $Ker(v) = Im(u) \Rightarrow v \circ u = 0 \Rightarrow \overline{u}(f) = 0 \Rightarrow f \in Ker(\overline{u})$.

• $Ker(\overline{u}) \subseteq Im(\overline{v})$: Seja $g \in Ker(\overline{u})$ temos que mostrar que existe um homomorfismo $f : M'' \to N$ tal que $g = \overline{v}(f) = f \circ v$.

Dado $m'' \in M''$ como v é sobrejetiva, existe $m \in M$ tal que$v(m) = m''$. Defina $f : M'' \to N$ como $f(m'') = g(m)$. Dessa forma, f está bem definida, pois sejam $m_1, m_2 \in M$ tais que $v(m_1) = v(m_2)$ teremos que $v(m_1 - v(m_2)) = 0 \Rightarrow (m_1 - m_2) \in Kerv = Im(u)$ logo vai existir $m' \in M'$ tal que $u(m') = m_1 - m_2$. Aplicando a g teremos $g(u(m')) = g(m_1 - m_2) = g(0)$. Assim, $g(m_1) = g(m_2)$.

Agora, verifiquemos que f é homomorfismo. Seja $m'_1, m'_2 \in M''$ e $a \in A$, então existem m_1, m_2 tais que $v(m_1) = m''_1$, $v(m_2) = m''_2$. Daí, $m''_1 + m''_2 = v(m_1 + m_2)$ e $am''_1 = av(m_1) = v(am_1)$. Dessa forma

- $f(m''_1 + m''_2) = g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2) = f(m''_1) + f(m''_2)$

- $f(am''_1) = g(am_1) = ag(m_1) = af(m''_1)$

Portanto, $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$.

($\Leftarrow$) Temos que mostrar que v é sobrejetiva e que $Im(u) = Ker(v)$. Para provar a sobrejetividade de v, usaremos o seguinte.

Afirmação: Se existir dois homomorfismos $g_1, g_2 : Y \to Z$ com $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implicando em $g_1 = g_2$, então $f : X \to Y$ é sobrejetiva.

Sejam os homomorfismos $g_1, g_2 : M'' \to N$ tais que $(g_1 \circ v)(m) = (g_2 \circ v)(m)$ $\forall m \in M$.

Pelo homomorfismo induzido temos $(g_1 \circ v)(m) = \overline{v}(g_1)$ e $(g_2 \circ v)(m) = \overline{v}(g_2)$, logo $\overline{v}(g_1) = \overline{v}(g_2)$ e como $\overline{v}$ é injetiva, temos que $g_1(m'') = g_2(m'')$ $\forall m'' \in M''$. Assim, v é sobrejetiva.

• $Im(u) \subseteq Ker(v)$: Seja $m \in Im(u)$ então existe $m' \in M'$ tal que $u(m') = m$. Como $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u}) \Rightarrow \overline{u} \circ \overline{v}(f) = f \circ v \circ u$ para todo homomorfismo $f : M'' \to N$. Tomando $M'' = N$, f é identidade e $v \circ (m') = v(m) = 0$, logo $m \in Ker(v)$.

• $Ker(v) \subseteq Im(u)$: Seja $m \in Ker(v) \Rightarrow v(m) = 0$. Considere $N = M/Im(u)$ e $\pi : M \to N$ projeção canônica. Daí, $\overline{u}(\pi) = (\pi \circ u)(m') = \pi(u(m')) = \overline{0} \Rightarrow \pi \in Ker(\overline{u}) = Im(\overline{v})$, logo existe homomorfismo $f : M'' \to N$ tal que $\overline{v}(f) = \pi$. Como $\overline{v}(f) = f \circ v$, então $\pi(m) = f(v(m)) = \overline{0}$, concluindo que $Ker(v) \subset Ker(\pi)$ e sabemos que $Ker(\pi) \subset Im(u)$, logo $m \in Im(u)$.

(2) ($\Rightarrow$) Para mostrar que

$$0 \to Hom(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N'')$$

é uma sequência exata, basta mostrar que $\overline{u}$ é injetiva e que $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$. Sejam $f, g : M \to N' \in Hom(M, N')$ tais que $\overline{u}(f) = \overline{u}(g)$. Pelo homomorfismo induzido temos que $\overline{u}(f(m)) = u(f(m))$ e $\overline{u}(g)(m) = u(g(m))$, como u é injetiva, $f(m) = g(m)$ concluindo que $\overline{u}$ é injetiva.

- $Im(\overline{u}) \subseteq Ker(\overline{v})$: Seja $f \in Im(\overline{u})$ então existe $g : M \to N'$ homomorfismo tal que $\overline{u}(g) = f = u \circ g$ substituindo f em $\overline{v}(f) = v \circ f$, teremos $\overline{v}(f) = v \circ u \circ g = 0$ pois $Ker(v) = Im(u) \Rightarrow \overline{v}(f) = 0 \Rightarrow f \in Ker(\overline{v})$.

- $Ker(\overline{v}) \subseteq Im(\overline{u})$: Seja $f \in Ker(\overline{v})$ então $\overline{v}(f(m)) = 0$ $\forall m \in M$. Pelo homomorfismo induzido temos $\overline{v}(f(m)) = v(f(m)) = 0$, logo $f(m) \in Ker(v) = Im(u)$. Daí, existe um $n' \in N'$ tal que $u(n') = f(m)$ para cada $m \in M$. Defina

$$\begin{aligned} g : M &\to N' \\ m &\mapsto n' \end{aligned}$$

está bem definida. De fato, sejam $m_1, m_2 \in M$ tais que $m_1 = m_2$ e $g(m_1) = n'_1$ e $g(m_2) = n'_2$. Temos que $m_1 - m_2 = 0$, daí $0 = f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) = u(n'_1) - u(n'_2) \Rightarrow u(n'_1) = u(n'_2) \Rightarrow n'_1 = n'_2 \Rightarrow g(m_1) = g(m_2)$.

Note que g é homomorfismo, pois sejam $m_1, m_2 \in M$ com $g(m_1) = n'_1$ e $g(m_2) = n'_2$ e $g(m_1 + m_2) = n'$. Temos $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = u(n'_1) + u(n'_2) = u(n'_1 + n'_2) \Rightarrow g(m_1 + m_2) = n'_1 + n'_2$. Logo, $g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2)$. E, $f(am_1) = af(m_1) = au(n'_1) = u(an'_1)$. Assim, $g(am_1) = an'_1$. Logo, $\overline{u}(g(m)) = u(g(m))u(n')f(m)$ concluindo $f \in Im(\overline{u})$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ é exata, basta mostrar que u é injetiva e que $Im(u) = Ker(v)$. Para mostrar a injetividade de u, usaremos o seguinte.

Afirmação: Se existir homomorfismos $g_1, g_2 : Z \to Y$ com $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implicando em $g_1 = g_2$, então $f : Y \to X$ é injetiva.

Suponha que existam homomorfismo $g_1, g_2 : M \to N'$ tais que $u \circ g_1 =$

$u \circ g_2$. Pelo homomorfismo induzido temos que $u \circ \overline{u}(g_1)$ e $u \circ g_2 = \overline{u}(g_2)$ logo, por $\overline{u}$ ser injetiva $g_1 = g_2 \Rightarrow u$ é injetiva.

• $Im(u) \subseteq Ker(v)$: Como $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$ e $(\overline{v} \circ \overline{u})(f(m)) = v \circ u \circ f$ $\forall f \in Hom(M, N')$. Temos que $f = id : N' \to N' \Rightarrow v \circ u \circ f = v \circ u = 0$ $\Rightarrow Im(u) \subseteq Ker(v)$.

• $Ker(v) \subseteq Im(u)$: Suponha, por absurdo, que existe $n \in Ker(v)$ tal que $n \notin Im(u)$. Então, $u(n') \neq n$ $\forall n' \in N'$. Assim, $v(u(n')) \neq v(n) = 0$ $\Rightarrow v(u(n')) \neq 0$ $\forall n' \in N' \Rightarrow \overline{v} \circ \overline{u} \neq 0$ o que é um absurdo, pois $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$. Portanto, $Ker(v) \subseteq Im(u)$.

Logo, $Im(u) = Ker(v)$.

6.3 Lema da Serpente

Proposição 18 ***(Lema da Serpente)*** *Sejam M', M, M", N', N e N" módulos sobre um anel A, onde existem sequências exatas e homomorfismos da seguinte forma:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "j'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

no qual o diagrama é comutativo com as setas exatas. Então, existe uma sequência exata

$0 \to Ker(f') \xrightarrow{g_1} Ker(f) \xrightarrow{j_1} Ker(f'') \xrightarrow{\psi} Coker(f') \xrightarrow{g_2} Coker(f) \xrightarrow{j_2} Coker(f'') \to 0(*)$

onde g_1 e j_1 são restrições de g e j, g_2 e j_2 são induzidos por g' e j', respectivamente.

Demonstração.

Suponha que o diagrama acima é comutativo com setas exatas. Para mostrar que $(*)$ existe e é exata, vamos mostrar que a sequência é exata e que existe $\psi : Ker(f'') \rightarrow Coker(f')$ homomorfismo.

Para isso, iremos dividir a demonstração em nove etapas, 1. restringir g e j, 2. mostrar que g_1 é injetiva, 3. $Im(g_1) = Ker(j_1)$, 4. definir g_2 e j_2, 5. $Im(g_2) = Ker(j_2)$, 6. mostrar que j_2 é sobrejetiva, 7. definir ψ, 8. $Im(j_1) = Ker(\psi)$ e 9. $Im(\psi) = Ker(g_2)$.

1. Seja

$$\begin{array}{rcl} g_1 : Ker(f') & \rightarrow & Ker(f) \\ m' & \mapsto & g_1(m') = g(m') \end{array}$$

está bem definido. De fato, se $m' \in Ker(f')$ então $f(g_1(m')) = f(g(m')) = g'(f'(m')) = 0 \Rightarrow g_1(m') \in Ker(f)$. Claramente é homomorfismo, por ser restrição do homomorfismo g.

Analogamente,

$$\begin{array}{rcl} j_1 : Ker(f) & \rightarrow & Ker(f'') \\ m & \mapsto & j_1(m) = j(m) \end{array}$$

está bem definida. De fato, se $m \in Ker(f)$ então $f''(j_1(m)) = f''(j(m)) = j'(f(m)) = 0 \Rightarrow j_1(m) \in Ker(f'')$. Que é homomorfismo, por ser restrição do homomorfismo j.

2. Como g_1 é restrição do homomorfismo g que é injetiva, então g_1 é injetiva.

3. $Im(g_1) \subseteq Ker(j_1)$: Seja $m \in Im(g_1)$ existe $m' \in Ker(f')$ tal que $m = g_1(m') = g(m')$. Como $Im(g) = Ker(j)$, temos que $j_1(m) = j(m) = j(g(m')) = 0 \Rightarrow m \in Ker(j_1)$.

$Ker(j_1) \subseteq Im(g_1)$: Seja $m \in Ker(j_1) \Rightarrow j_1(m) = 0 = j(m)$. Como $ker(j) = Im(g)$, existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = m$. Se m' pertencer a $Ker(f')$ então teremos que $m \in Im(g_1)$. De fato, pela comutatividade do diagrama e por $Ker(j_1) \subset Ker(f)$, temos que $0 = f(m) = f(g(m')) = g'(f'(m')) \Rightarrow f'(m') \in Ker(g')$ e g' é injetiva. Daí, $Ker(g') = \{0\}$ logo $f'(m') = 0 \Rightarrow m' \in Ker(f')$.

4. Defina

$$\begin{array}{rcl} g_2 : N'/Im(f') & \to & N/Im(f) \\ \overline{n'} & \mapsto & \overline{g'(n')} \end{array}$$

está bem definida pois, sejam $\overline{n'_1}$ e $\overline{n'_2} \in Coker(f')$ tal que $\overline{n'_1} = \overline{n'_2}$ $\Rightarrow n'_1 - n'_2 \in Im(f')$, logo existe $m' \in M'$ tal que $f'(m') = n'_1 - n'_2$. Pela comutatividade do diagrama $f(g(m')) = g'(f'(m')) = g'(n'_1 - n'_2) = g'(n'_1) - g'(n'_2) \Rightarrow g'(n'_1) - g'(n'_2) \in Im(f) \Rightarrow \overline{g'(n'_1) - g'(n'_2)} = \overline{0}$ em $Coker(f) \Rightarrow \overline{g'(n'_1)} = \overline{g'(n'_2)}$.

Note que g_2 é homomorfismo. Seja $\overline{n'_1}$ e $\overline{n'_2} \in Coker(f')$ e $a \in A$.

- $g_2(\overline{n'_1} + \overline{n'_2}) = g_2(\overline{n'_1 + n'_2}) = \overline{g'(n'_1 + n'_2)} = \overline{g'(n'_1)} + \overline{g'(n'_2)} = g_2(\overline{n'_1}) + g_2(\overline{n'_2})$;
- $g_2(a\overline{n'_1}) = g_2(\overline{an'_1}) = \overline{g'(an'_1)} = a\overline{g'(n'_1)} = ag_2(\overline{n'_1})$.

Defina agora,

$$\begin{array}{rcl} j_2 : Coker(f) & \to & Coker(f'') \\ \overline{n} & \mapsto & \overline{j'(n)} \end{array}$$

está bem definida. Sejam $\overline{n_1} = \overline{n_2} \in Coker(f)$ temos que $n_1 - n_2 \in Im(f)$. Logo, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n_1 - n_2$. Pela comutatividade do diagrama $f''(j(m)) = j'(f(m)) = j'(n_1 - n_2) = j'(n_1) - j'(n_2) \Rightarrow j'(n_1) - j'(n_2) \in Im(f'')$, ou seja, $\overline{j'(n_1) - j'(n_2)} = \overline{0}$ em $Coker(f'')$, logo $\overline{j'(n_1)} = \overline{j'(n_2)}$.

Note que j_2 é homomorfismo. De fato, sejam $\overline{n_1}$ e $\overline{n_2} \in Coker(f)$ e $a \in A$.

- $j_2(\overline{n_1} + \overline{n_2}) = j_2(\overline{n_1 + n_2}) = \overline{j'(n_1 + n_2)} = \overline{j'(n_1)} + \overline{j'(n_2)} = j_2(\overline{n_1}) + j_2(\overline{n_2})$;

- $j_2(a\overline{n_1}) = j_2(\overline{an_1}) = \overline{j'(an_1)} = a\overline{j'(n_1)} = aj_2(\overline{n_1})$.

5. $Im(g_2) \subseteq Ker(j_2)$: Seja $\overline{n} \in Im(g_2)$, existe $\overline{n'} \in coker(f')$ tal que $g_2(\overline{n'}) = \overline{n} = \overline{g'(n')}$ como $Im(g') = Ker(j')$, temos que $j_2(\overline{n}) = j_2(\overline{(g'(n'))}) = \overline{j'(g'(n'))} = \overline{0}$ em $Coker(f'')$, logo $\overline{n} \in Ker(j_2)$.

$Ker(j_2) \subseteq Im(g_2)$: Seja $\overline{n} \in Ker(j_2) \Rightarrow j_2(\overline{n}) = \overline{0} = \overline{j'(n)}$ em $Coker(f'')$, logo $j'(n) \in Im(f'')$ então existe $m'' \in M''$ tal que $f''(m'') = j'(n)$. Sabemos que j é sobrejetiva, logo para cada $m'' \in M''$ existe $m \in M$ tal que $j(m) = m''$. Daí, $j'(f(m)) = f''(j(m)) = f''(m'') = j'(n) \Rightarrow j'(f(m)) = j'(n) \Rightarrow j'(n - f(m)) = 0$. Isto é, $n - f(m) \in Ker(j') = Im(g')$, logo existe $n' \in N'$ tal que $j'(n') = n - f(m)$. Assim, $g_2(\overline{n'}) = \overline{j'(n')} = \overline{n - f(m)} = \overline{n}$ logo $\overline{n} \in Im(g_2)$.

6. Seja $\overline{n''} \in coker(f'')$.Como j' é sobrejetiva para cada $n'' \in N''$ existe $n \in N$ tal que $j'(n) = n'' \Rightarrow \overline{n''} = \overline{j'(n')} = j_2(\overline{n})$, concluindo que j_2 é sobrejetiva.

7. Defina

$$\begin{array}{rcl} \psi : Ker(f'') & \to & Coker(f') \\ m'' & \mapsto & \overline{n'} \end{array}$$

Para encontrar a cara de um elemento da $Im(\psi)$, é feita a seguinte análise. Seja $m'' \in Ker(f'') \subset M''$, então existe $m \in M$ tal que $m'' = j(m)$, por j ser sobrejetiva. Pela comutatividade do diagrama temos que $j'(f(m)) = f''(j(m)) = f''(m'') = 0$, logo $f(m) \in Ker(j') = Im(g')$. Como g' é injetiva, existe único $n' \in N$ tal que $f(m) = g'(n')$. Então, podemos olhar a classe de n' no $Coker(f')$, assim temos $\psi(m'') = \overline{n'}$.

Sejam m_1'' e $m_2'' \in Ker(f'')$, logo existe m_1 e $m_2 \in M$ tal que $j(m_1) = m_1''$ e $j(m_2) = m_2''$. Com $j'(f(m_1)) = f''(j(m_1)) = f''(m_1'') = 0 \Rightarrow f(m_1) \in Ker(j') = Im(g')$, então existe único $n_1' \in N'$ tal que $f(m_1) = g'(n_1')$. Da mesma forma, temos $f(m_2) = g'(n_2')$. Seja $j(m_1) = j(m_2) \Rightarrow j(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in Ker(j) = Im(g)$ e sendo g injetiva, existe único $m' \in M'$ tal que $g(m') = m_1 - m_2$. Daí, $g'(n_1' - n_2') = g'(n_1') - g'(n_2') = f(m_1) - f(m_2) = f(m_1 - m_2) = f(g(m')) = g'(f'(m')) \Rightarrow g'(n_1' - n_2') = g'(f'(m')) \Rightarrow g'(n_1' - n_2' - f'(m')) = 0$, logo $n_1' - n_2' - f'(m') \in Ker(g')$ e como g' é injetiva, temos $n_1' - n_2' - f'(m') = 0 \Rightarrow n_1' - n_2' = f'(m') \Rightarrow n_1' - n_2' \in Im(f')$. Dessa forma, $\overline{n_1' - n_2'} = \overline{0}$ em $Coker(f')$, concluindo $\overline{n_1'} = \overline{n_2'}$.

Mostraremos que ψ é homomorfismo. Sejam m_1'', $m_2'' \in Ker(f'')$ e $a \in A$ tais que $\psi(m_1'') = \overline{n_1'}$, $\psi(m_2'') = \overline{n_2'}$ e $\psi(am_1'') = \overline{n'}$. Logo, existem $m_1, m_2, m_3 \in M$ tais que $j(m_1) = m_1''$, $j(m_2) = m_2''$ e $j(m_3) = am_1''$, com $f(m_1) = g'(n_1')$, $f(m_2) = g'(n_2')$ e $f(m_3) = g'(n')$ para únicos n_1', n_2' e $n' \in N'$.

- Note que, $0 = f''(m_1'' + m_2'') = f''(j(m_1 + m_2)) = j'(f(m_1 + m_2)) \Rightarrow f(m_1 + m_2) \in Ker(j') = Im(g')$ então existe n_3' tal que $f(m_1 + m_2) = g'(n_3')$. Logo, $\psi(m_1' + m_2') = \psi(n_3')$. Mas $g'(n_3') = f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = g'(n_1') + g'(n_2') = g'(n_1' + n_2') \Rightarrow n_3' = n_1' + n_2'$ por g' ser injetiva. Assim, $\overline{n_3'} = \overline{n_1' + n_2'} \Rightarrow \psi(m_1' + m_2') = \psi(m_1') + \psi(m_2')$.

- Note que, $j(am_1) = aj(m_1) = am_1'' = j(m_3) \Rightarrow j(am_1 - m_3) = 0 \Rightarrow am_1 - m_3 \in Ker(j) = Im(g)$, então existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = am_1 - m_3$. Daí, $g'(an_1' - n') = ag'(n_1') - g'(n') = af(m_1) - f(m_3) = f(am_1 - m_3) = f(g(m')) = g'(f'(m')) \Rightarrow g'(an_1' - n') = g'(f'(m'))$. Como g' é injetiva, $an_1' - n' = f'(m') \Rightarrow an_1' - n' \in Im(f')$. Logo, $\overline{an_1' - n'} = \overline{0} \Rightarrow \overline{an_1'} = \overline{n'} \Rightarrow \psi(am_1'') = a\psi(m_1'')$.

8. $Im(j_1) \subseteq Ker(\psi)$: Seja $m'' \in Im(j_1) \Rightarrow m \in Ker(f)$ tal que $j_1(m) = j(m) = m''$. Como $f(m) = 0 = g'(n')$, segue que $n' = 0$, pois g' é injetiva. Assim, $\psi(m'') = \overline{0} \Rightarrow m'' \in Ker(\psi)$.

$Ker(\psi) \subseteq Im(j_1)$: Seja $m'' \in Ker(\psi) \Rightarrow \psi(m'') = \overline{0} = \overline{n'}$, com $j(m) = m''$ e $g'(n') = f(m)$ para algum $m \in M$. Como $\overline{n'} = \overline{0} \Rightarrow n' \in Im(f')$, então existe $m' \in M'$ tal que $f'(m') = n'$. Daí, $f(m) = g'(n') = g'(f'(m')) = f(g(m')) \Rightarrow f(m - g(m')) = 0 \Rightarrow m - g(m') \in Ker(f)$. Assim, $j_1(m - g(m')) = j(m) - j(g(m')) = j(m) = m''$, logo $m'' \in Im(j_1)$.

9. $Im(\psi) \subseteq Ker(g_2)$: Seja $\overline{n'} \in Im(\psi)$ então existe $m'' \in Ker(f'')$ tal que $\psi(m'') = \overline{n'}$, com $j(m) = m''$ e $f(m) = g'(n')$ para algum $m \in M$. Como, $g'(n') \in Im(f) \Rightarrow g_2(\overline{n'}) = \overline{g'(n')} = \overline{0} \Rightarrow n' \in Ker(g_2)$.

$Ker(g_2) \subseteq Im(\psi)$: Seja $\overline{n'} \in Ker(g_2) \Rightarrow g_2(\overline{n'}) = \overline{0} = \overline{g'(n')} \Rightarrow g'(n') \in Im(f) \Rightarrow m \in M$ tal que $f(m) = g'(n')$. Note que, $f''(j(m)) = j'(f(m)) = j'(g'(m')) = 0 \Rightarrow j(m) = m'' \in Ker(f'')$. Daí, $\psi(m'') = \overline{n'} \Rightarrow \overline{n'} \in Im(\psi)$.

7 Propriedade Exata do Produto Tensorial

Chegamos ao capítulo principal do nosso trabalho, onde exploraremos as consequências da tensorização de sequências de homomorfismos de A-módulos exatos. Antes de prosseguirmos, demonstraremos o seguinte isomorfismo canônico entre A-módulos.

Proposição 19 *Sejam M, N e P módulos sobre um anel A, temos então que o módulo $Hom(M \otimes N, P)$ é isomorfo ao módulo $Hom(M, Hom(N, P))$.*

Demonstração. Seja a função

$\phi : Hom(M \otimes N, P) \to Hom(M, Hom(N, P))$ definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{rclcl} \phi : Hom(M \otimes N, P) & \to & Hom(M, Hom(N, P)) & & \\ f & \mapsto & \phi(f) : M & \to & Hom(N, P) \\ & & u & \mapsto & \phi(f)(u) : N \to P \\ & & & & \quad v \mapsto f(u \otimes v) \end{array}$$

é um isomorfismo. Primeiramente precisamos entender porque está bem definida como função, para isso, inicialmente mostraremos que $\phi(f)(u) : N \to P$ é um homomorfismo. De fato,

$$\begin{array}{rcl} \phi(f)(u)(av_1 + v_2) & = & f(u \otimes (av_1 + v_2)) \\ & = & f(a(u \otimes v_1) + (u \otimes v_2)) \\ & = & af(u \otimes v_1) + f(u \otimes v_2) \\ & = & a\phi(f)(u)(v_1) + \phi(f)(u)(v_2) \end{array}$$

para cada u em M, então $\phi(f) : M \to Hom(N, P)$ está bem definida. Agora, temos que verificar que $\phi(f) : M \to Hom(N, P)$ é homomorfismo, então

$$\begin{aligned}
\phi(f)(au_1+u_2)(v) &= f((au_1+u_2)\otimes v)\\
&= f(a(u_1\otimes v)+(u_2\otimes v))\\
&= af(u_1\otimes v)+f(u_2\otimes v)\\
&= a\phi(f)(u_1)(v)+\phi(f)(u_2)(v)
\end{aligned}$$

logo para cada f, $\phi(f)$ é homomorfismo. E finalmente, mostraremos que a ϕ é homomorfismo de módulos.

Sejam f, $g \in Hom(M\otimes N, P)$ e $a \in A$. Dado $u \in M$ qualquer, logo para todo $v \in N$,

$$\begin{aligned}
\phi(af+g)(u)(v) &= (af+g)(u\otimes v)\\
&= af(u\otimes v)+g(u\otimes v))\\
&= a\phi(f)(u)(v)+\phi(g)(u)(v)\\
&= (a\phi(f)(u)+\phi(g)(u))(v)\\
&= (a\phi(f)+\phi(g))(u)(v)
\end{aligned}$$

Por seguinte, seja $f \in Ker(\phi)$, então $\phi(f)=0$

Assim, $\phi(f)(u)=0\ \forall u \in M$, então para todo $u \in M$ e $v \in N$ segue que $(\phi(f)(u))(v)=0\ \forall v \in N$. Que implica, $f(u\otimes v)=0$, $\forall u \in M$ e $v \in N$. Como $\{u\otimes v/u \in M \text{ e } v \in N\}$ é um gerador de $M\otimes N$, temos $f(w)=0_p$ $\forall w \in M\otimes N$. Logo, $f=0$ implicando em ϕ ser injetiva.

• ϕ é sobrejetiva.

Seja $g \in Hom(M, Hom(N,P))$, queremos encontrar uma f tal que $\phi(f)=g$, então dado

$$\begin{aligned}
\tilde{g}: M\times N &\to P\\
(u,v) &\mapsto \tilde{g}(u,v)=g(u)(v)
\end{aligned}$$

que é bilinear por g ser homomorfismo, temos então o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & M \otimes N \arrow[dl, "\exists f"] \\ P & \end{tikzcd}$$

Assim, pelo teorema universal existe único homomorfismo $f : M \otimes N \to P$ tal que $f(u \otimes v) = \tilde{g}(u, v) = g(u)(v)$, $\forall u \in M$ e $v \in N$. Logo, para todo $u \in M$ tem-se $g(u)(v) = f(u \otimes v) = \phi(f)(u)(v)$, $\forall v \in N$.

Que implica $g(u) = \phi(f)(u)$, $\forall u \in M$. Logo, $g = \phi(f)$. E portanto, temos o isomorfismo canônico

$$Hom(M \otimes N, P) \simeq Hom(M, Hom(N, P))$$

Na proposição a seguir, demonstraremos que ao tensorizar una sequência exata curta à direita, ela permanece exata.

Proposição 20 *Sejam* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *uma sequência exata de homomorfismos de* A*-módulos e* N *um* A*-módulo qualquer. Então a sequência* $M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$ *é exata.*

Demonstração. Suponha que a sequência $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata. Seja P um A-módulo qualquer, pela proposição 17 temos que a sequência

$$0 \to Hom(M', P) \to Hom(M, P) \to Hom(M'', P)$$

é exata, onde podemos aplicar novamente a proposição 17 para um A-módulo N qualquer, que implica

$$0 \to Hom(N, Hom(M', P)) \to Hom(N, Hom(M, P)) \to Hom(N, Hom(M'', P))$$

que é exata.

Mas vimos anteriormente que $Hom(N, Hom(M', P)) \simeq Hom(M' \otimes N, P)$, $Hom(N, Hom(M, P)) \simeq Hom(M \otimes N, P)$ e $Hom(N, Hom(M'', P)) \simeq Hom(M'' \otimes N, P)$.

Daí, a sequência

$0 \to Hom(M' \otimes N, P) \to Hom(M \otimes N, P) \to Hom(M'' \otimes N, P)$

é exata. Consequentemente, pela proposição 17, a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

é exata.

Observação 12 *Geralmente isso não é verdade, se $M' \to M \to M''$ é uma sequência exata de homomorfismo de A-módulos, a sequência $M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N$ obtido por tensor com um módulo arbitrário N, pode não ser exata. Veja no exemplo a seguir.*

Exemplo 16 *Seja $A = \mathbb{Z}$ e considere a sequência exata $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$, onde $f(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{Z}$. Se tensorizar com $N = \mathbb{Z}_2$, a sequência $0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ não é exata, pois para qualquer $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ temos*

$$(f \otimes 1)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$$

então $f \otimes 1$ é o homomorfismo nulo, enquanto que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ não é o módulo zero. Pois, já que $Ker(f \otimes 1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ que é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ e não é o módulo nulo, isso implica em $f \otimes 1$ não ser injetiva e a sequência tensorizada não ser exata. Isso ocorre, pois o tensor pode destruir a injetividade.

Como observado, ao tensorizar uma sequência exata de homomorfismos de A-módulos, geralmente ela não permanece exata. No entanto, se a sequência se torna exata ao ser tensorizada com um A-módulo N, então N é considerado um **módulo plano**.

Proposição 21 *As seguintes condições são equivalentes, para um A-módulo N:*

i. *N é plano;*

ii. *Se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata qualquer de A-módulos, a sequência tensorizada $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ é exata;*

iii. *Se $f : M' \to M$ é injetiva, então $f \otimes id : M' \otimes N \to M \otimes N$ é injetiva;*

Demonstração.

$i) \Rightarrow iii)$: Seja $f : M' \to M$ homomorfismo injetivo de A-módulos. Então $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ é uma sequência exata e como N é plano, então $0 \to M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes id} M \otimes N$ é exata. Logo, $f \otimes id$ é injetivo.

$iii) \Rightarrow ii)$: Como $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata, pela 20 segue que $M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$ é exata. Como $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ é exata então f é injetiva. Logo, $f \otimes 1 : M' \otimes 1 \to M \otimes N$ é injetiva.

Portanto, $0 \to M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$ é exata.

$ii) \Rightarrow i)$: Seja $\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{i} M_{i+1} \to \cdots$ uma sequência exata qualquer. Seja $N_i := Im(f_{i-1})$, $\forall i \in I$. Queremos mostrar que $Im(f_{i-1} \otimes id) = Ker(f_i \otimes id)$.

Logo, $0 \to N_i \xrightarrow{j_i} M_i \xrightarrow{\tilde{f}_i} N_{i+1} \to 0$ é exata. Por hipótese, segue que

$0 \to N_i \otimes N \xrightarrow{j_i \otimes id} M_i \otimes N \xrightarrow{\tilde{f}_i \otimes id} N_{i+1} \otimes N \to 0$ é exata. Logo, $Im(j_i \otimes id) = Ker(\tilde{f}_i)$.

Mostrar que $Im(f_{i-1} \otimes id) \subseteq Ker(f_i \otimes id)$. Observe que $(f_i \otimes id) \circ (f_{i-1} \otimes id) = (f_i \circ f_{i-1}) \otimes (id \circ id) = 0 \otimes id = 0$.

• $Ker(f_i \otimes id) \subseteq Im(f_{i-1} \otimes id)$

Seja $u \in Ker(f_i \otimes id)$. Logo, $(\tilde{f}_i \otimes id)(u) = (f_i \otimes id)(u) = 0 \Rightarrow u \in ker(\tilde{f}_i \otimes id) \Rightarrow u \in Im(j_i \otimes id) \Rightarrow \exists v \in N_i \otimes N$ tal que $u = (j_i \otimes id)(v)$.

Escreva $v = \sum_{l=1}^{r} w_l \otimes v_l$ onde $w_l \in N_i$ e $v_l \in N$, $\forall l \in \{1, ..., r\}$, para cada l podemos escrever $w_l = f_{i-1}(u_l)$, para algum $u_l \in M_{i-1}$.

Logo, $u = (j_i \otimes id)(\sum_{l=1}^{r} f_{i-1}(u_l) \otimes v_l) = \sum_{l=1}^{r}(f_{i-1}u_l)) \otimes v_v = \sum_{l=1}^{r}(f_{i-1} \otimes id)(u_l \otimes v_l) \in Im(f_{i-1} \otimes id)$.

Proposição 22 *Se N é um A-módulo livre, então N é plano.*

Demonstração.

Seja $f : M' \to M$ um homomorfismo de A-módulos. Como N é livre então existe um isomorfismo de módulos $\phi : N \to A^{\oplus}$. Pela proposição existem isomorfismos de A-módulos $\gamma' : M' \otimes A^{\oplus} \to (M' \otimes A)^{\oplus}$ e $\gamma : M \otimes A^{\oplus} \to (M \otimes A)^{\oplus}$ tais que $\gamma'(u' \otimes (a_i)) = (u' \otimes a_i)$ e $\gamma(u \otimes (a_i)) = (u \otimes a_i)$ $\forall u \in M$, $u' \in M'$ e $a_i \in A^{\oplus}$.

Como $M' \otimes A \simeq M'$ e $M \otimes A \simeq M$, então existem isomorfismos $\varphi' : (M' \otimes A)^{\oplus} \to (M')^{\oplus}$ e $\varphi : (M \otimes A)^{\oplus} \to (M)^{\oplus}$ tais que $\varphi'((u'_i \otimes a_i)) = (a_i u'_i)_{i \in \wedge}$ e $\varphi((u_i \otimes a_i)) = (a_i u_i)$. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
M' \otimes N & \xrightarrow{f \otimes id_N} & M \otimes N \\
\downarrow{\scriptstyle id_{M'} \otimes \phi} & & \downarrow{\scriptstyle id_M \otimes \phi} \\
M' \otimes A^{\oplus} & \xrightarrow{f \otimes id_{A^{\oplus}}} & M \otimes A^{\oplus} \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\
(M' \otimes A)^{\oplus} & \xrightarrow{(f \otimes id_A)^{\oplus}} & (M \otimes A)^{\oplus} \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
(M')^{\oplus} & \xrightarrow{f^{\oplus}} & (M)^{\oplus}
\end{array}$$

Como f é injetivo, então $f^{\oplus}$ é injetivo. Como o diagrama é comutativo com homomorfismos verticais isomorfismos então $f \otimes id_N$ é injetivo. Logo, N é plano.

Proposição 23 *Seja A um anel e $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ uma sequência exata de módulos. Com M'' plano.*

(1) Então $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ é exata para algum módulo N.

(2) Então M é plano se e somente se M' é plano.

Demonstração.

(1) Como M'' é plano, $M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ é exata. Então nos resta mostrar que $0 \to M' \otimes N \xrightarrow{\gamma} M \otimes N$ é exata, nesse caso devemos mostrar que γ é injetiva.

Pelo terceiro ponto da proposição 15, a sequência $0 \to Ker(t) \xrightarrow{h} A^{\oplus\wedge} \xrightarrow{t} N \to 0$ é exata. Então, tensorizando as sequências teremos

$M' \otimes Ker(t) \xrightarrow{\beta'} M \otimes Ker(t) \xrightarrow{j} M'' \otimes Ker(t) \to 0$ que é exata pela proposição 20, $0 \to M' \otimes A^{\oplus\wedge} \xrightarrow{\beta} M \otimes A^{\oplus\wedge} \xrightarrow{\alpha'} M'' \otimes A^{\oplus\wedge} \to 0$ é exata e β é injetiva por $A^{\oplus\wedge}$ ser plano, que é plano pela proposição anterior. $0 \to$

$M'' \otimes Ker(t) \xrightarrow{\alpha} M'' \otimes A^{\oplus\wedge}$ é exata por M'' ser plano, então α é injetiva. As sequências $M' \otimes Ker(t) \xrightarrow{f'} M' \otimes A^{\oplus\wedge} \to M' \otimes N \to 0$ e $M \otimes Ker(t) \xrightarrow{g'} M \otimes A^{\oplus\wedge} \to M \otimes N \to 0$ são exatas pela proposição 20.

Assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & M' \otimes Ker(t) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f'"] & M \otimes Ker(t) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g'"] & M'' \otimes Ker(t) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes A^{\oplus\wedge} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & M \otimes A^{\oplus\wedge} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & M'' \otimes A^{\oplus\wedge} \arrow[r] & 0 \\
 & M' \otimes N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & M \otimes N \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

que é comutativo, então teremos $g' \circ \beta' = \beta \circ f'$ e $\alpha \circ j = \alpha \circ g'$. De fato,

sejam $g' = id \otimes h$, $\beta' = f \otimes id$, $f' = id \otimes h$ e $\beta = f \otimes id$. Então, dados $m' \in M'$ e $x \in Ker(t)$

$g'(\beta'(m' \otimes x)) = g'(f(m') \otimes x) = f(m') \otimes h(x)$ por outro lado,

$\beta(f'(m' \otimes x)) = \beta(m' \otimes h(x)) = f(m') \otimes h(x)$

Sejam $\alpha = id \otimes h$, $j = g \otimes id$, $g' = id \otimes h$ e $\alpha' = g \otimes id$. Dados $m \in M$ e $a \in Ker(t)$

$\alpha(j(m \otimes a)) = \alpha(g(m) \otimes a) = g(m) \otimes h(a)$ por outro lado,

$\alpha'(g'(m \otimes a)) = \alpha'(m \otimes h(a)) = g(m) \otimes h(a)$

Portanto, o diagrama é comutativo. Temos que $M' \otimes N = Coker(f')$ e $M \otimes N = Coker(g')$ pela proposição 16. Então, podemos aplicar o lema da serpente, adquirindo assim a sequência $Ker(\alpha) \to Coker(f') \to Coker(g')$ que é exata. Como α é injetiva o $Ker(\alpha) = 0$, então a sequência exata fica da seguinte forma $0 \to M' \otimes N \xrightarrow{\gamma} M \otimes N$. Logo, temos que γ é injetiva.

(2) Pegue um homomorfismo injetivo $h' : N' \to N$ e vamos tensorizar na sequência exata. As sequências $0 \to M' \otimes N' \to M \otimes N' \to M'' \otimes N' \to 0$ e $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ são exatas pelo ponto (1) dessa proposição. Gerando assim, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \otimes N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \otimes N' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \otimes N' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes N \arrow[r, "\beta"] & M \otimes N \arrow[r, "j'"] & M'' \otimes N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vamos provar que o diagrama é comutativo, sejam $\beta' = f \otimes id$, $\alpha = id \otimes h'$, $\beta = f \otimes id$ e $\alpha' = id \otimes h'$. Dados $m' \in M'$ e $n' \in N'$

$\alpha(\beta'(m' \otimes n')) = \alpha(f(m') \otimes n') = f(m') \otimes h'(n')$ por outro lado,

$\beta(\alpha'(m' \otimes n')) = \beta(m' \otimes h'(n')) = f(m') \otimes h'(n')$

Sejam $\alpha'' = id \otimes h'$, $j = g \otimes id$, $\alpha = id \otimes h'$ e $j' = g \otimes id$. Dados $m \in M$ e $n' \in N'$

$\alpha''(j(m \otimes n')) = \alpha''(g(m) \otimes n') = g(m) \otimes h'(n')$ por outro lado,

$j'(\alpha(m \otimes n')) = j'(m \otimes h'(n')) = g(m) \otimes h'(n')$.

$\Rightarrow$) M é plano, então α é injetiva.

Como o diagrama é comutativo, temos $\alpha \circ \beta' = \beta \circ \alpha'$

Seja $m \in M' \otimes N'$ e $\in Ker(\alpha') \Rightarrow \alpha(\beta'(m)) = \beta(\alpha'(m)) \Rightarrow \alpha(\beta'(m)) = 0$ como α é injetivo, então $\beta'(m) = 0$. Logo, $m \in Ker(\beta')$, assim $Ker(\alpha') \subset Ker(\beta')$ como β' é injetiva, então $Ker(\alpha') = 0$. Portanto, α' é injetivo e M' é plano.

$\Leftarrow$) M' é plano e α' é injetivo. Como temos o diagrama comutativo, podemos aplicar o lema da serpente. Assim, temos a sequência $Ker(\alpha') \to$

$Ker(\alpha) \to Ker(\alpha'')$ exata, como M'' é plano e α'' é injetivo. Então, temos $0 \to Ker(\alpha) \to 0$, logo $Ker(\alpha) = 0$, α é injetivo e M é plano.

8 Referências

[1] SILVA, Ewellyn Carolaine. *Introdução à Álgebra Comutativa: um estudo sobre tensores e sequências exatas.* Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade de Pernambuco. 2019.

[2] ATIYAH, M. F. MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company. 1969.

[3] ALTMAN, Allen. KLEIMAN, Steven. *A Term of Commutative Algebra.* Worldwide Center of Mathematics, LLC. 2013.

[4] PEREZ, Victor Hugo. *Introdução a Álgebra Homologica e Módulos Cohen-Macaulay.* Departamento de Matemática, Brasília, 2019.

[5] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à Álgebra.* Projeto Euclides. IMPA

[6] GARCIA, Arnaldo. LEQUAIN, Yves. *Elementos de álgebra.* 4ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2006.