UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

A fidelidade como medida de transporte de informação quântica em sistemas de cadeias de spins

Jonatah Leite Passos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

A fidelidade como medida de transporte de informação quântica em sistemas de cadeias de spins

Jonatah Leite Passos

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de graduado em Matemática Aplicada e Computacional.

ORIENTADO PELO PROF. DR. ANDRÉ MAURÍCIO C. DE SOUZA

SÃO CRISTÓVÃO-SE - 2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria, primeiramente, de agradecer ao universo por nos proporcionar o evolucionismo e findarmos uma civilização tecnológica, podendo gozar da tecnologia que a natureza nos fornece. É de tamanha satisfação que venho, por meio deste, agradecer ao meu orientador prof. Dr. André Maurício Conceição de Souza pela orientação e, principalmente, pelo desafio que me propôs a estudar um tema tão complexo, demonstrando a mim muito apoio, sendo solícito e prestativo na minha caminhada acadêmica tratando de um tema extra curricular em paralelo a graduação, quando pouquíssimos profissionais aceitaria disponibilizar seu tempo instruir um jovem faminto em aprender sobre Computação Quântica. Agradeço também ao meu maior incentivador, o prof. Dr. Gastão Florêncio Miranda Junior, que me acompanhou desde o primeiro momento em que adentrei na Universidade Federal de Sergipe, até o momento deste trabalho. Houve um profissionalismo extremo para me incentivar a continuar estudando na área, sendo ele principal cursor para que o caminho entre eu e meu orientador se cruzasse. Vale ressaltar também a gratificante surpresa que eu tive em conhecer o homem responsável por me fazer gostar de álgebra linear, o prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos, que, apesar de nos encontrarmos em apenas uma oportunidade, foi de grande colaboração na minha aquisição de conhecimento, bem como os demais professores aqui citados. Ao departamento de matemática de forma geral, por conceber um vasto plantel de excelentes profissionais compromissados com a aprendizagem do dicente, além do que propõe a ementa, e a divulgação científica. Agradeço também aos professores Naldisson dos Santos, Kalasas Vasconcelos de Araujo, Aryana Joecy Lima da Silva Cavalcante, Franklin Zilmer e a excelentíssima chefe do departamento de matemática, que em diversas ocasiões foi minha docente, Giovana Siracusa Gouveia que tiveram suma importância para a minha formação acadêmica. Sem esquecer dos meus amigos e professores do ensino médio que colaboraram com a minha formação educacional e humanitária.

Ao meu pai, que me abandonou enquanto criança por ser incapaz de assumir suas responsabilidades e, deste modo, me ensinar o jeito correto de como não ser um homem, me tornando a cada dia um ser melhor e mais determinado para vencer na vida do jeito correto. À minha avó, pois, mesmo sendo uma pessoa humilde, assumiu o papel cuidando de uma criança revoltada e sem rumo, assumindo o papel de mãe, haja vista que minha mãe biológica é vitima de uma doença crônica, esquizofrenia, sendo incapaz de cuidar de um ser. Aos meus famíliares, em particular ao meu primo-irmão Daniel Santana Matos, por sentir junto toda a minha dor até chegar aqui. Aos amigos e amigas de caminhada, Marcello Vasconcelos da Silva, Rafael Ferreira da Silva e Thrycia Luana Araujo da Silva, que vivenciaram e são testemunhas do quão a vida foi cruel comigo até eu chegar aqui. Aos tios e tias que, sabendo da minha vulnerabilidade econômica, social e familiar, me incentivaram e investiram uma educação de qualidade para que eu passasse longe da violência que eu vivenciava morando no Bairro América, um dos bairros mais perigosos da cidade de Aracaju na época. Aos que tentaram me desvirtuar e falharam miseravelmente, tendo que engolir o fato de que um homem determinado a vencer na vida está fadado ao sucesso. Ademais, afirmo que uma mente brilhante nunca será apagada pela obscuridade da vida. "Nunca encontrará, na escuridão, o caminho da luz" – Mato Seco.

Sumário

1	Introdução				
2	2 Informação Quântica				
	2.1	Ruído Quântico	. 8		
	2.2	Canal Quântico	11		
3	Fide	elidade	14		
	3.1	Rede de Átomos	15		
	3.2	Operador Hamiltoniano e Matriz Hamiltoniana	19		
	3.3	Função Fidelidade	21		
4 Metodologia		todologia	24		
	4.1	Resultados	28		
5	Con	clusões e considerações finais 34	ŀ		
Α	Código feito na linguagem Python usando a base canônica da matriz Hamiltoniana de dimensão NxN.				
В	Código feito na linguagem Python usando modificando a diagonal principal da base canônica da matriz Hamiltoniana de dimensão NxN. 38				

Lista de Figuras

2.1	Esfera de Bloch	7
2.2	Gato de Schrödinger	9
2.3	Ilustração de um canal quântico	12
3.1	Rede de átomos simples linear	15
3.2	Ilustração do controle de informação em um circuito de um computado clássico	
4.1	Ilustração de um canal quântico com representações de saltos quânt	
4.2	Ilustração de um canal quântico	28
4.3.2	1Gráfico do comportamento da função fidelidade	29
4.3.2	2Gráfico do comportamento da função fidelidade	30
4.3.3	3Gráfico do comportamento da função fidelidade	31
4.3.4	4Gráfico do comportamento da função fidelidade	32
4.3.5	Gráfico do comportamento da função fidelidade	33

RESUMO

O trabalho de conclusão de curso (TCC) abordou a fidelidade da informação quântica em sistemas baseados em cadeias de spins. O estudo explorou a fidelidade como medida de transporte da informação quântica em cenários específicos, considerando a influência do ruído, a rede de átomos e a matriz Hamiltoniana. A metodologia incluiu análise crítica da literatura da área de estudo, adaptação dos conceitos e técnicas, simulações, cálculos e experimentos computacionais. No início, foi introduzido o conceito de máquina de Turing e a transição para a computação quântica devido ao limite físico do tamanho dos bits. Logo em seguida discutiu-se a informação quântica, ruído quântico e canais quânticos. Por coseguinte, a fidelidade foi abordada como uma medida da precisão na manipulação e preservação dos estados quânticos. A rede de átomos foi introduzida como um ambiente controlado para a pesquisa da fidelidade. A matriz Hamiltoniana, que desempenha um papel crucial na modelagem de sistemas quânticos, foi relacionada à fidelidade. As limitações da metodologia foram discutidas, e precauções para minimizar erros foram apresentadas. Os resultados mostraram variações na função de fidelidade em função do ruído e do tamanho da cadeia de spins. O TCC contribui para o avanço do conhecimento em computação quântica, especificamente na compreensão da fidelidade da informação quântica em sistemas de cadeias de spins.

ABSTRACT

The course conclusion work (TCC) addressed the fidelity of quantum information in systems based on spin chains. The study explored the fidelity as a measure of quantum information transport in specific scenarios, considering the influence of noise, the lattice of atoms and the Hamiltonian matrix. The methodology included critical analysis of the literature in the study area, adaptation of concepts and techniques, simulations, calculations and computational experiments. In the beginning, the concept of a Turing machine and the transition to quantum computing were introduced due to the physical limit on the size of bits. Soon after, quantum information, quantum noise and quantum channels were discussed. Therefore, fidelity was approached as a measure of precision in the manipulation and preservation of quantum states. The lattice of atoms was introduced as a controlled environment for fidelity research. The Hamiltonian matrix, which plays a crucial role in modeling quantum systems, has been linked to fidelity. The limitations of the methodology were discussed, and precautions to minimize errors were presented. The results showed variations in the fidelity function as a function of noise and spin chain size. TCC contributes to the advancement of knowledge in quantum computing, specifically in understanding the fidelity of quantum information in spin chain systems.

Capítulo 1 Introdução

Em meados de 1945, o professor e lógico matemático Allan Mathison Turing criou um modelo computacional abstrato conhecido como Máquina de Turing [1]. Uma máquina de Turing é um aparato idealizado que opera com sequências lógicas de unidades de informação chamadas de bits. Um bit pode adquirir apenas (0) ou (1) como valores, ou seja, qualquer informação é codificada e processada como uma sequência de zeros e uns nessa máquina. Um computador convencional como os que temos hoje sobre as nossas mesas é uma realização física de uma máquina de Turing. Toda informação fornecida a ele é lida, processada e retornada sob a forma de sequências de bits. Por serem idealizações matemáticas, máquinas de Turing independem de que objetos físicos irão representar bits. Nos computadores atuais, esses objetos são componentes eletrônicos que existem aos bilhões dentro dos chips.

A necessidade do aumento de memória e da velocidade de processamento dos computadores fez com que os chips cada vez mais acomodassem um maior número desses componentes. Em 1970, Gordon Moore percebeu que havia um crescimento muito rápido no número de transistores por unidade de volume nos chips ao longo dos anos e, consequentemente, uma reduçao no tamanho físico dos bits [2]. Segundo a lei de Moore, nos próximos anos, o resultado é algo extraordinário pois no ano de 2020, um bit de informação passou a ser representado por apenas um único átomo. Isto poderia então significar o limite físico natural dos computadores. Com um átomo representando um bit, não haveria mais como aumentar a capacidade dos computadores. No entanto, não é bem assim, pois na escala atômica, o paradigma clássico da Máquina de Turing deixa de ser válido, pois essa escala é governada pela mecânica quântica, e os processos computacionais deverão obedecer às leis dessa nova teoria, e não às regras de uma máquina clássica.

Introdução

É neste momento que torna-se necessário a computação quântica[3], que é um campo de pesquisa interdisciplinar que combina princípios fundamentais da mecânica quântica com a teoria da informação e está no centro de uma revolução tecnológica que promete transformar a maneira como realizamos cálculos complexos e resolvemos problemas impossíveis para computadores clássicos. Ao explorar as propriedades únicas dos sistemas quânticos, como superposição e emaranhamento, os computadores quânticos têm o potencial de oferecer uma vantagem significativa em várias aplicações, incluindo criptografia, otimização, simulações quânticas e muito mais. Neste contexto de avanços rápidos e promissores na área de computação quântica, a qualidade da informação quântica gerada e processada em um sistema quântico torna-se uma preocupação fundamental. A fidelidade da informação quântica é uma medida crítica da precisão com que um sistema quântico pode manipular e preservar estados quânticos desejados. A fidelidade é, portanto, um indicador crucial da eficácia e confiabilidade dos dispositivos de computação quântica. Este trabalho de conclusão de curso (TCC) tem como objetivo central investigar e relatar a fidelidade da informação quântica em um contexto específico: uma rede de átomos, onde a evolução quântica é descrita através do formalismo da matriz Hamiltoniana. Ao longo deste TCC, exploraremos as bases teóricas que sustentam a computação quântica, examinaremos o conceito de fidelidade em detalhes e exploraremos como a matriz Hamiltoniana está relacionada à evolução de sistemas quânticos, com foco na preservação da informação quântica.

Ao longo deste TCC, destacaremos a importância da fidelidade da informação quântica, discutiremos como as redes de átomos e as matrizes Hamiltonianas desempenham um papel crucial na evolução quântica e mostraremos como a metodologia adotada pode contribuir para uma compreensão mais profunda desse fenômeno. Através dessa pesquisa, esperamos contribuir para o avanço do conhecimento na área de computação quântica e para a melhoria da confiabilidade e desempenho dos sistemas quânticos. Para atingir esse objetivo, este trabalho segue uma estrutura organizada em cinco capítulos. O **segundo capítulo** oferece uma visão geral dos princípios da informação quântica [3-8], abordando tópicos como ruído quântico e canais quânticos, que são fatores críticos que afetam a fidelidade em sistemas quânticos. O **terceiro capítulo** se aprofunda na fidelidade, com uma exploração das redes de átomos, operadores e matrizes Hamiltonianas e métodos de cálculo da fidelidade.

Introdução

O **quarto capítulo** descreve a metodologia usada neste estudo, baseada no trabalho "Unmodulated spin chains as universal quantum wires" de Antoni Wójcik, Tomasz Luczak, Pawe Kurzynski, Andrzej Grudka, Tomasz Gdala e Malgorzata Bednarska [9]. Por fim, o **quinto capítulo** apresenta as conclusões obtidas a partir deste trabalho e destaca as implicações e perspectivas para futuras pesquisas.

Capítulo 2 INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Neste capítulo discutiremos a teoria da informação quântica e da necessidade do surgimento dos conceitos quânticos como ferramenta para o desenvolvimento da computação do século XXI [3-8]. Na seção 2.1, elucidaremos uma vertente que torna a informação quântica necessária para estudos aprofundados da mecânica quântica, o ruído da informação quântica. Por fim, na seção 2.3, faremos uma abordagem sobre a transmissão dessas informações quânticas usando canais quânticos.

Para começarmos a falar de informação precisamos relatar que em 1948, marco onde desenvolvia-se a ciência da computação, o matemático Claude Shanon publicou uma série de trabalhos que se tornariam os fundamentos da teoria da informação e da comunicação, definindo assim, matematicamente, o conceito de informação [10-11]. Dentre estes trabalhos, Shanon desenvolveu dois teoremas onde no primeiro quantificava os recursos físicos necessários para transmitir ou armazenar uma certa quantidade de informações sem ruídos; e no segundo quantificou a quantidade de informação útil que pode ser transmitida através de um canal de ruídos e, para este caso, desenvolveu códigos corretores de erros. Aplicando esses e vários conceitos para computação, originou-se o conceito, na computação clássica, que a menor unidade de informação seria conhecida como bit e possui apenas dois valores possíveis que são 0 ou 1. Estes valores podem ser interpretados como verdadeiro ou falso. Mais na frente esses valores foram associados a circuitos. Com todo o aparato evolutivo da física mecânica quântica e, também, com a necessidade de processadores mais velozes e maior capacidade de armazenamento de informação, surgiu então a necessidade de uma nova interpretação para o conceito de bit.

CAPÍTULO 2. INFORMAÇÃO QUÂNTICA

A partir desses conceitos, foram implementadas propriedades da física mecânica quântica, baseadas em estruturas matemáticas tendo a Álgebra Linear [12] como mais abrangente, para desenvolver uma nova interpretação do bit clássico, o que chamaremos de bit quântico (qubit) [3]. Analogamente ao bit clássico, o bit quântico também pode assumir os valores lógicos "0" ou "1", mas, também, qualquer superposição destes. Fisicamente os qubits são representados por qualquer objeto quântico que tenham dois auto estados bem distintos, como estados de polarização de um fóton ou spins nucleares. Os auto estados de um qubit são formados por dois estados quântico possíveis que são os dois vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$. O conjunto de auto estados $\{|0\rangle$, $|1\rangle$ } forma uma base no espaço de Hilbert de duas dimensões. Um espaço de Hilbert (H) é um espaço vetorial complexo provido de uma métrica dada por um produto escalar. Em um espaço vetorial H, uma combinação linear de dois elementos pertencentes a H, $|\psi1\rangle$ e $|\psi2\rangle$ também pertence a H, isto é:

Dados $|\psi 1\rangle$, $|\psi 2\rangle \in H$, então $\alpha |\psi 1\rangle + \beta |\psi 2\rangle \in H$, onde α e β são números complexos. Como o auto estado de um qubit está intrinsecamente ligado ao espaço de Hilbert, podemos então definir que a diferença entre o bit e o qubit é que um estado quântico qualquer $|\psi\rangle$ pode ser produzido a partir do princípio de superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ de forma que

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle,$$
 (2.0)

onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são vetores ortogonais gerados do espaço vetorial e α e β são números complexos tal que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Podemos interpretar os estados físicos da equação (2.0) da seguinte forma: Imagine que o estado $|1\rangle$ é o elétron com o spin \uparrow enquanto que o estado $|0\rangle$ representa o spin \downarrow ao longo do eixo \mathbf{z} onde é possível mover o estado $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e vice-versa. Este estado genérico pode ser parametrizado por ângulos θ e ϕ , fazendo-se:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \beta = e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
, onde $\theta \in \varphi \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 2. INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Daí, aplicando na equação (2.0) obtemos:

$$|\psi\rangle = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]|0\rangle + \left[e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]|1\rangle$$

Os números θ e ϕ definem pontos sobre a superfície de uma esfera de raio r = 1, munida de estados elementares do qubit, chamada de esfera de Bloch, que está ilustrada na figura 2.1.

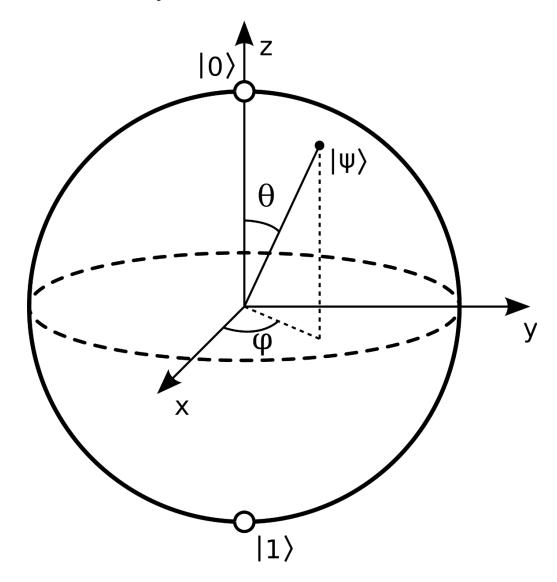


Figura 2.1: Esfera de Bloch. Fonte: Computação Quântica e Informação Quântica, Nielsen, 2005 [3].

2.1 Ruído Quântico

Até então, nós estamos considerando sistemas de superposição de estados tal qual os qubits estão em um estado elementar genérico, emaranhado e em um sistema fechado. Isto é, utilizamos estruturas que não sofrem interações indesejadas com o mundo externo, trazendo para nós uma situação hipoteticamente favorável. Embora conclusões importantes possam ser obtidas sobre as tarefas de processamento da informação que, em princípio, podem ser feitas em sistemas ideais como esse. Mas, é notório que o mundo real não existe sistemas perfeitamente fechados, exceto, talvez o universo como um todo. Os sistemas reais sofrem interações indesejadas com o mundo externo, ou seja, o mundo macromolecular interfere nos sistemas, e essas interações indesejadas aparecem para nós como *ruído*. Esses sistemas que possuem interações indesejadas são chamados de sistemas abertos e só serão úteis para nós se, ao serem construídos, for possível obter a compreensão e o controle dos processos do ruído gerado pela interação. Mas, que tipo de interações estamos falando? O simples fato de observarmos passar um feixe de luz em um sistema ou até mesmo uma troca de calor entre um sistema e outro, é caracterizado como uma interação que modificaria todo o sistema que decairia na propriedade da superposição, como também é ilustrado na figura 2.1 em que tomamos como exemplo o famigerado gato de Schrödinger, pois só seria possível saber se o gato está vivo ou morto se alguém observar para dentro da caixa em que o gato está (sistema fechado). Isto é, o fato do observador conferir se o gato está vivo ou morto caracteriza uma interação entre o sistema e o mundo externo, que é o que fundamenta o termo *ruído*.

CAPÍTULO 2. INFORMAÇÃO QUÂNTICA

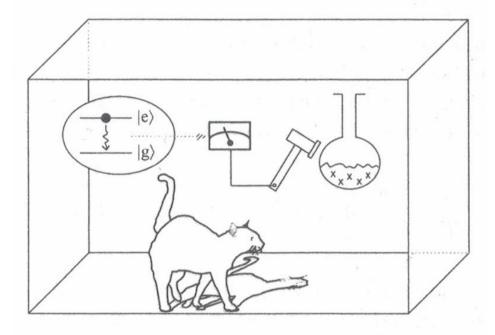


Figura 2.2: O infeliz gato de Schrödinger enfrenta uma situação de vida ou morte dependendo de um aparelho automático que quebra um frasco de veneno e o mata se for observado que um estado atômico excitado decaiu. Fonte: Computação Quântica e Informação Quântica, Nielsen, 2005 [3].

Nenhum sistema quântico pode ser perfeitamente fechado e isso é particularmente verdadeiro para computadores quânticos, que precisam ser programados cuidadosamente por um sistema externo para realizar as operações desejadas. Por exemplo, se o estado de um qubit for representado por duas posições de um elétron, a interação do elétron com outras cargas atuará como uma fonte de *ruído* não-controlado, que afetará o estado do qubit. O formalismo matemático das *operações quânticas* é a ferramenta correta para a descrição da dinâmica em sistemas abertos. Essa é uma ferramenta poderosíssima que permite que sejam consideradas simultaneamente várias possibilidades físicas, podendo ser usada para descrever não somente sistemas quase fechados, que são fracamente acoplados às suas vizinhanças, mas também aqueles que se acoplam fortemente, e ainda sistemas fechados que se tornam repentinamente abertos e sujeitos a medições.

CAPÍTULO 2. INFORMAÇÃO QUÂNTICA

No próximo tópico abordaremos a teoria de canais de comunicação quânticos. Perceba que um sistema aberto nada mais é que um sistema repleto de interações com um outro sistema externo. Isto nos remete a uma convicção de que sempre que processarmos uma informação quântica teremos que tratar do *ruído* ocasionado por essa observação externa. Para obtermos este tipo de controle do *ruído*, teremos que ter conhecimento prévio dos canais quânticos usados para o processamento da informação quântica.

2.2 Canal Quântico

Os teoremas de Shanon são resultados fundamentais para a teoria da informação clássica, principalmente o da codificação em canais sem ruído e o da codificação em canais ruidosos. O teorema da codificação em canais sem ruído quantifica quantos bits são necessários para armazenar a informação produzida por uma fonte, enquanto o teorema da codificação em canais ruidosos quantifica quanta informação pode ser transmitida de forma segura através de um canal ruidoso. Em particular, focaremos no teorema da codificação em canais ruidosos. Suponha então que queiramos transmitir a informação de um lugar para outro lugar no espaço, levando em consideração que esse "outro lugar" pode ser um outro ponto no espaço ou outro instante de tempo, através de um canal ruidoso. Mas, para essa transmissão ocorrer, é necessário que tenhamos que produzir um emaranhamento. O emaranhamento é um outro recurso estático fundamental da mecânica quântica. Suas propriedades são notavelmente diferentes daquelas dos recursos mais familiares da teoria da informação clássica, e ainda não são bem compreendidas. Na melhor das hipóteses, o que se tem são vários resultados relacionados a emaranhamento. Afinal, o que seria um emaranhamento? É um fenômeno da física mecânica quântica que permite que dois ou mais objetos estejam de alguma forma tão ligados que um objeto não possa ser corretamente descrito sem que a sua contra-parte seja mencionada, mesmo que os objetos possam estar espacialmente separados por milhões de anos-luz. Produzir emaranhamento é um processo dinâmico simples com interesse para a teoria de informação quântica. Imagine, por exemplo, que existe um par de qubits. Neste caso nomearemos cada qubit sendo uma molécula de hidrogênio e cada um dos hidrogênios estão selados em uma caixa, como ilustrado na figura 2.3.

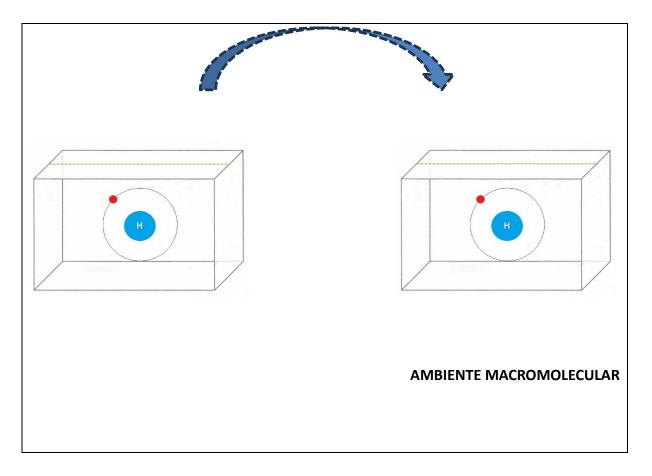


Figura 2.3: Exemplo de um sistema de transmissão de informação quântica em dois quibits emaranhados. Fonte: Própria.

Considere que eles compartilham um estado de Bell, isto é, representam o mais simples exemplo de emaranhamento. Neste caso, um hidrogênio detém a informação e precisa transmitir essa informação para o outro hidrogênio através de um canal quântico ruidoso. Para este exemplo, vamos utilizar o ambiente real como um canal para essa transmissão. É fácil perceber que para transferirmos o hidrogênio de um lado a outro, precisamos abrir a caixa. No momento que abrirmos a caixa nós iremos perder a molécula de hidrogênio, pois o ambiente irá se encarregar

CAPÍTULO 2. INFORMAÇÃO QUÂNTICA

de interagir com essa molécula rapidamente e assim perderemos a informação quântica.

Nada, exatamente nada, nos garante que obteremos a mesma molécula que perdemos a informação se aquecermos o universo inteiro, importante ressaltar que isso seria impossível, de modo que as moléculas mais complexas se quebrassem e isolássemos a molécula de hidrogênio que foi perdida. Isto é, no momento da interação nós perdemos a informação para sempre. Um método trivial, mas não eficiente, é tentar copiar a informação da molécula de hidrogênio e transmitir a informação sem perda de generalidade. Se isso fosse possível, o grande problema em produzir computadores quânticos em larga escala estaria resolvido. Temos a garantia de que esse método trivial é impossível de acontecer por causa do teorema da não clonagem que, em resumo, nos diz que não existe nenhuma operação unitária U capaz de clonar qualquer estado quântico |ψ⟩ para um segundo sistema. Percebam que transmitir uma informação quântica em um canal quântico ruidoso é uma tarefa complexa. No entanto, a física mecânica quântica nos fornece algumas propriedades curiosas que possibilita a resolução de problemas como esse, como por exemplo o teleporte quântico. Imaginem que esses mesmos hidrogênios compartilham um sistema quântico de dois qubits no estado maximamente emaranhado, então o hidrogênio pode teleportar o estado arbitrário de um qubit, para o outro hidrogênio, enviando apenas dois bits de informação. Ainda assim não temos certeza que teremos resultados satisfatórios em nossa transmissão de dados. Ao final deste tópico nós podemos concluir que, independente do canal que utilizarmos, ao transferirmos informações sempre haverá ruído que nos trará incerteza se aquela informação condiz com a informação original, se ela é verdadeira ou não. O nome dessa imprecisão nós chamamos de fidelidade. Abordaremos sobre este tema no capítulo 3, pois é uma primordialidade medir a fidelidade de um sistema para nos garantir o maior grau de certeza possível de que as informações quânticas transmitidas são as informações que desejamos e veremos que até a geometria do canal utilizado infere na medição de fidelidade.

Capítulo 3: Fidelidade

Agora que construímos o alicerce do conhecimento da informação quântica, do qubit, do ruído e do canal quântico, podemos falar sobre fidelidade. Para começar a abordagem, vamos imaginar que devemos passar informações quânticas em um canal ruidoso, independente da distância da entrada e da saída da informação. Até que ponto podemos inferir que a informação foi preservada durante o processo? Para responder essa pergunta, precisamos de ferramentas matemáticas que nos forneçam tal credibilidade. Já que independe da distância, então devemos ter uma estrutura que preserve distância, isto é, uma métrica. Usaremos a fidelidade para medir a distância entre estados quânticos, apesar da fidelidade não ser uma métrica sobre operadores densidade, ela dá origem a uma métrica útil. Existem outras métricas para calcular essa distância, a dedução da medição pela fidelidade é a mais elementar para resolução de cálculos. Com efeito, seja um sistema quântico em um estado $|\psi\rangle$ e que algum processo físico ocorra, mudando o estado para $\varepsilon(|\psi\rangle\langle\psi|)$. Quão bem o canal ε preserva o estado $|\psi\rangle$ do sistema? Esse tipo de situação é comum em computação quântica e informação quântica, haja vista que, na memória de um computador quântico, $|\psi\rangle$ é o estado inicial da memória e ε representa a dinâmica pela qual passa a memória, incluindo processos de ruído causados pela interação com o ambiente. De maneira colinear, um canal de comunicação que transmite o estado | ψ de um lugar pro outro é imperfeito e a sua ação é representada pela operação ε . Veremos a seguir que o número de átomos numa rede, a geometria da rede, lê-se canal, e outras características são parâmetros para o problema de medição de fidelidade.

3.1 Rede de átomos

A importância de uma rede de átomos na dedução da fidelidade de um computador quântico é um aspecto fundamental no desenvolvimento e avanço da computação quântica. Perceba que a natureza intrincada dos sistemas quânticos exige abordagem mais sofisticadas para garantir a precisão e confiabilidade dos cálculos realizados em um computador quântico. A construção de uma rede de átomos desempenha um papel crucial nesse processo de designar a fidelidade. Como sabemos, os quibits são altamente suscetíveis a erros devido a interferência do ambiente, ruído térmico e outras fontes de decoerência quântica. Por isso, a fidelidade de um qubit refere-se à sua capacidade de manter e manipular informações com precisão e confiabilidade ao longo do tempo. Uma rede de átomos simples, como a rede de átomos linear ilustrada na figura 3.1, pode desempenhar um papel crucial na dedução da fidelidade em um computador quântico devido às suas propriedades bem controladas e interações presíveis. Átomos individuais são altamente isolados do ambiente, o que reduz significativamente a interferência indesejada. Além do fato que as interações entre átomos podem ser cuidadosamente manipuladas e ajustadas, permitindo a implementação de portas quânticas e operações quânticas complexas com alta precisão.



Figura 3.1: Exemplo de uma rede de átomos simples linear com 1 dimensão. Fonte: Própria.

Em paralelo ao computador quântico, que com essas funcionalidades após implementação de uma rede de átomos consegue inferir o espectro de energia de tal modo que o estado elementar do qubit fique mais estável para aferição da fidelidade, o computador clássico também possui problemas semelhantes, como ilustrado na figura 3.2. Na arquitetura dos computadores clássicos, o canal utilizado para a transferência do bit clássico é o circuito, que também possui ruído. Só conseguimos inferir a informação de bit 0 ou bit 1, se a voltagem do sistema for distrubída corretamente. Isto é, o que estiver acima de determinada voltagem é bit 1, o que estiver abaixo, é bit 0 e o que estiver entre o bit 0 e bit 1 é o ruído. Nós conseguimos manipular o ruído de um computador clássico pela voltagem da corrente do circuito. Algo semelhante estamos tentando fazer para o computador quântico.

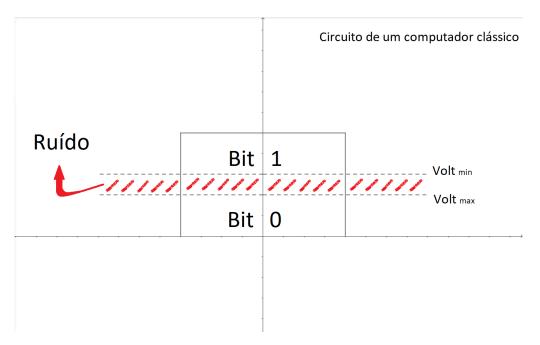


Figura 3.2: Exemplo de controle de informação em um circuito de um computador clássico no qual o espectro de energia do sistema dita se o bit será 0, caso ele não ultrapasse a voltagem máxima, se o bit será 1, caso ele não tenha uma voltagem inferior a voltagem mínima e se será um lixo, isto é, se a informação contém ruído, caso a voltagem esteja entre a voltagem mínima e a voltagem máxima. Fonte: Própria.

É notório que seja necessário a utulização de um espaço-tempo contínuo para uma rede de átomos simples, de uma dimensão. Para isso, nós precisamos discretizar o espaço, em seguida discretizar a dinâmica e por seguinte discretizar a equação de Schröedinger. Pois, só com a discretização feita é que se consegue levar em conta a periodicidade da rede de átomos que forma o sólido. Imagine um cenário semelhante a figura 3.1, donde um elétron que carregou o primeiro átomo necessita ser transferido até o ultimo átomo, através de saltos, basicamente o elétron sai pulado de um átomo pro outro. É sabido que este processo custará tempo para ser finalizado e, após ter esse cenário proposto que está discretizado, pode-se discretizar a equação de Schröedinger e a partir daí pode-se calcular o espectro de energia através do operador evolução temporal \hat{U} . Seja N o número de átomos de uma rede, 1 o átomo inicial e t o tempo que leva para todo o processo ser concluído. Então podemos representar matematicamente de tal forma:

$$\langle N | \widehat{U} | 1 \rangle (t)$$
, donde $\widehat{U} = e^{\frac{-i\widehat{H}t}{h}}$. (3.0)

Perceba que apareceu um novo operador na equação, é o operador \widehat{H} . Esse operador aparece na equação de Schröedinger discretizada e é aqui onde todas as peças se encaixam. Com efeito, a equação de Schröedinger é dada por:

$$\widehat{H}|\psi\rangle = ih\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \tag{3.1}$$

O operador \widehat{H} é o operador energia da mecânica quântica. Este operador determina as grandezas físicas da dinâmica das partículas quânticas, inclusive a *fidelidade*. Este operador é chamado de *Hamiltoniano*. Resolvendo a equação 3.1, temos:

$$\Rightarrow \widehat{H}\psi(t) = ih\frac{d}{dt}\psi(t)$$

$$\Rightarrow \widehat{H} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ih}} = \frac{d\psi}{\mathrm{dt}}$$

$$\Rightarrow -\frac{i\hat{H}}{h} \int dt = \ln \psi(t)$$

$$\Rightarrow \ \psi(t) \ = \ \psi(0) \ e^{\frac{-i \hat{H} t}{h}}$$

$$\Rightarrow \ |\psi(t)\rangle \ = \ \underbrace{e^{\frac{-i\widehat{H}t}{h}}}_{\widehat{U}} |\psi(0)\rangle \ \ (\text{condição de contorno do operador})$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \widehat{U} |\psi(0)\rangle.$$

É sabido agora que tanto a forma do sólido construído pela cadeia dos átomos quanto o operador de evolução temporal são parâmetros para a aferição do cálculo da fidelidade. No entanto, sabemos também que o operador de evolução temporal \widehat{U} está associado ao Hamiltoniano \widehat{H} , logo o Hamiltoniano passa também a ser parâmetro e quiçá o mais importante de todos eles. Separamos o próximo tópico exclusivamente para tratar dessa peculiaridade.

3.2 Operador Hamiltoniano e Matriz Hamiltoniana

Na computação quântica, o operador Hamiltoniano e a matriz Hamiltoniana são conceitos bastante interligados e tem papéis importantíssimos na modelagem e na resolução de problemas quânticos. O operador Hamiltoniano, muitas vezes denotado como " \hat{H} ", é um conceito central na mecânica quântica e na computação quântica. Ele descreve a energia total de um sistema quântica e é usado para prever a evolução temporal desse sistem, além de ser uma parte fundamental da equação de Schrödinger, que descreve a evolção temporal de estados quânticos. A matriz Hamiltoniana é exatamente a representação matricial do operador Hamiltoniano. Isso nos fornece um poder matemático muito forte, haja vista que podemos usar diversas ferramentas da algebra, como o fato da matriz Hamiltoniana ser uma matriz hermitiana, o que significa que ela é a sua própria matriz adjunta e seus autovalores correspondem às energias permitidas no sistema. Na computação quântica as matrizes Hamiltoniana servem, principalmente, para modelar sistemas quânticos, como átomos, moléculas ou qubits em um processador quântico. Enquanto o operador Hamiltoniano é uma representação abstrata da energia total de um sistema quântico, a matriz nos fornece uma representação numérica dessa mesma energia em uma base específica no espaço de Hilbert.

Este capítulo menciona a essência do operador Hamiltoniano, suas aplicações na computação quântica e a relação com a matriz Hamiltoniana. Na computação quântica, os algoritmos são projetados para capitalizar as vantagens oferecidas pelo mundo quântico, como a superposição e o emaranhamento de qubits [13]. O operador hamiltoniano desempenha um papel central na implementação desses algoritmos, permitindo a simulação de sistemas quânticos, a fatoração de números inteiros grandes, como o algoritmo de *Shor* [14]e a resolução de problemas de otimização complexos, como o algoritmo de *Grover* [15]. Através da manipulação do operador Hamiltoniano, a computação quântica promete soluções mais eficientes e precisas para inúmeros problemas. Para transformar esse mecanismo palpável, representemos matricialmente o operador Hamiltoniano. A matriz hamiltoniana é essa representação e desempenha um papel crucial na descrição do comportamento quântico de sistemas de múltiplas partículas. Na computação quântica, a matriz é usada para determinar a evolução temporal do estado quântico do sistema durante os diversos estágios de um algoritmo, vide o operador \widehat{U} na equação (3.0).

Através da diagonalização e manipulação da matriz hamiltoniana, é possível calcular as energias e estados estacionários do sistema, fundamentais para a solução de problemas complexos de forma mais eficiente do que os métodos clássicos.

A relação entre a matriz Hamiltoniana e a fidelidade surge exatamente em contextos da computação quântica quando se considera a evolução temporal de um sistema quântico. Quando um computador quântico realiza operações em um sistema quântico, ele está essencialmente evoluindo o estado quântico do sistema de acordo com a matriz Hamiltoniana correspondente a essa operação. A fidelidade de uma operação quântica pode ser afetada por vários fatores, como erros na implementação da operação, ruído quântico e interferência ambiental. Os erros da implementação da operação de uma operação quântica está relacionada à fidelidade do estado resultante em relação ao estado alvo desejado. Portanto, a matriz Hamiltoniana entra diretamente na análise da fidelidade, pois a precisão na aplicação das operações quânticas depende da precisão da modelagem da matriz Hamiltoniana correspondente ao sistema. Em resumo, a fidelidade depende diretamente de como é feita a matriz Hamiltoniana. A base canônica de uma matriz Hamiltoniana no espaço de Hilbert é dada por:

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Função Fidelidade

Este tópico será destinado a tratarmos exclusivamente de contas com o objetivo de representar em números reais a equação da fidelidade ao longo da evolução do temporal, relacionada com a equação de Schrödinger. Com efeito, dada a equação de fidelidade

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{|f(t)|}{3} + \frac{|f(t)|^2}{6}$$

$$com f(t) = \langle N|e^{-i\hat{H}t}|1\rangle. \text{ Note que } f(0) = \langle N|1\rangle = 0$$
(3.3.1)

$$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{2}.$$

É fácil perceber que \widehat{H} é simétrico, haja vista a matriz Hamiltoniana apresentada na seção anterior, então as autoenergias tem que ser reais. Portanto, escrevemos $\widehat{H}|\emptyset i\rangle = Ei|\emptyset i\rangle$, com Ei sendo a base de autovalores dos autovetores $|\emptyset i\rangle$ de \widehat{H} . Mas $|\mathrm{N}\rangle = \sum_i \mathrm{b}i|\emptyset i\rangle$, $|1\rangle = \sum_i \mathrm{a}i|\emptyset i\rangle$ e sabendo que $\langle \emptyset i'|\emptyset i\rangle$ é ortogonal, então:

$$f(t) = \langle N|e^{-i\hat{H}t}|1\rangle = \langle \sum_{i} bi|\emptyset i\rangle |e^{-i\hat{H}t}| \sum_{i} ai|\emptyset i\rangle \rangle$$

$$= \sum_{i} aibi' \langle \emptyset i'|e^{-i\hat{H}t}|\emptyset i\rangle$$

$$= \sum_{i} aibi' \langle \emptyset i'|e^{-iEit}|\emptyset i\rangle$$

$$= \sum_{i} aie^{-iEit} \sum_{i'} bi' \langle \emptyset i'|\emptyset i\rangle^{USANDO\ A\ ORTOGONALIDADE}$$

$$= \sum_{i} aibie^{-iEit} .$$

Sabendo que E(i) são os autovalores e V(i,i) são os autovetores, considere $\widehat{M} = \widehat{V}\widehat{E}\widehat{V}^{-1}$, donde $\widehat{E}(i',j) = \begin{cases} e^{-iEi't} & i'=j \\ 0 & i'\neq j \end{cases}$ e assim $f(t) = \widehat{M}(N,1)$.

Com efeito, note que

$$\begin{split} \widehat{M}(N,1) &= \\ &= \begin{pmatrix} V(1,1) & V(1,2) & \dots & V(1,N) \\ V(2,1) & V(2,2) & \dots & V(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(N,1) & V(N,2) & \dots & V(N,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE1t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-iE2t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-iENt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{-1}(1,1) & V^{-1}(1,2) & \dots & V^{-1}(1,N) \\ V^{-1}(2,1) & V^{-1}(2,2) & \dots & V^{-1}(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V^{-1}(N,1) & V^{-1}(N,2) & \dots & V^{-1}(N,N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V(1,1)e^{-iE1t} & V(1,2)e^{-iE2t} & \dots & V(1,N)e^{-iENt} \\ V(2,1)e^{-iE1t} & V(2,2)e^{-iE2t} & \dots & V(2,N)e^{-iENt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(N,1)e^{-iE1t} & V(N,2)e^{-iE2t} & \dots & V(N,N)e^{-iENt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{-1}(1,1) & V^{-1}(1,2) & \dots & V^{-1}(1,N) \\ V^{-1}(2,1) & V^{-1}(2,2) & \dots & V^{-1}(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V^{-1}(N,1) & V^{-1}(N,2) & \dots & V^{-1}(N,N) \end{pmatrix} \end{split}$$

$$= V(N,1)V^{-1}(1,1)e^{-iE1t} + V(N,2)V^{-1}(2,1)e^{-iE2t} + \dots + V(N,N)V^{-1}(i,i)e^{-iENt} = f(t)$$

$$\Rightarrow \ f(t) = \ \textstyle \sum_{i} \, , \hat{V} \left(N, i' \right) \, \hat{V}^{-1}(i', i') e^{-i E(i') t} = \ \textstyle \sum_{i'=1}^{N} V(N, i') \, V^{-1}(i', i') e^{-i Ei' t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{i'=1}^{N} V(N, i') V^{-1}(i', i') [\cos(E(i')t) - isen(E(i')t)]$$

$$\Rightarrow f(t) = \underbrace{\sum_{i'=1}^{N} V(N,i') \, V^{-1}(i',i') \cos(E(i')t)}_{Ref(t)} - \underbrace{i \sum_{i'=1}^{N} V(N,i') \, V^{-1}(i',i') sen(E(i')t)}_{Imf(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i'=1}^{N} \underbrace{V(N,i')}_{autovetor} \underbrace{V^{-1}(i',i')}_{inversa} \cos\left(t\underbrace{E(i')}_{autovalor}\right) \\ -\sum_{i'=1}^{N} \underbrace{V(N,i')}_{autovetor} \underbrace{V^{-1}(i',i')}_{inversa} \sin\left(t\underbrace{E(i')}_{autovalor}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) = Ref + iImf \\ f^*(t) = Ref - iImf \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f(t)|^2 = f(t)f^*(t) = (Ref)^2 + (Imf)^2$$

$$\Rightarrow De (3.3.1), temos que F(t) = \frac{1}{2} + \frac{|f(t)|}{3} + \frac{|f(t)|^2}{6}$$
$$\therefore F(t) = F(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(Ref)^2 + (Imf)^2}}{3} + \frac{(Ref)^2 + (Imf)^2}{6}$$

Temos, finalmente, a fórmula para calcular a fidelidade do sistema quântico representada por F(t). Ao longo deste trabalho, essa forma final que será utilizada para os cálculos com o objetivo inferir as devidas conclusões necessárias.

Capítulo 4 Metodologia

Este capítulo desempenha um papel crucial neste trabalho de conclusão de curso, pois aborda a metodologia adotada para investigar a fidelidade da informação quântica em um contexto específico, com base no estudo apresentado no artigo científico intitulado "Unmodulated Spin Chains as Universal Quantum Wires" [9]. O objetivo deste capítulo é detalhar como a pesquisa foi conduzida, os métodos e técnicas empregados, bem como as principais etapas envolvidas na análise da fidelidade em sistemas quânticos baseados em cadeias de spins. Para contextualizar essa escolha metodológica, é importante destacar que o artigo científico em questão aborda a utilização de cadeias de spins como "fios quânticos universais". Nesse cenário, os spins desempenham o papel de qubits e podem ser manipulados para realizar operações quânticas e transmitir informações de maneira eficaz. O estudo propõe que, sob certas condições, tais cadeias de spins não moduladas podem servir como canais quânticos robustos para a transmissão de informação quântica.

A metodologia adotada neste capítulo baseia-se na análise crítica do referido artigo científico, seguida da adaptação e aplicação dos conceitos e técnicas apresentados para investigar a fidelidade da informação quântica em cenários específicos relacionados à rede de átomos e à matriz Hamiltoniana, conforme discutidos nos capítulos anteriores. As etapas da metodologia são detalhadas, desde a formulação de hipóteses e objetivos específicos até a coleta de dados e análise dos resultados. Este capítulo também abordará os experimentos computacionais, simulações e cálculos envolvidos na aplicação da metodologia, destacando as ferramentas e recursos utilizados para realizar as investigações. Além disso, serão discutidas as limitações da metodologia e as precauções tomadas para minimizar possíveis fontes de erro ou viés. A escolha de basear-se no artigo "Unmodulated Spin Chains as Universal Quantum Wires" como fundamento metodológico é motivada pelo seu caráter inovador e pelas implicações que suas descobertas podem ter na compreensão e desenvolvimento de sistemas quânticos.

A metodologia adotada visa explorar e adaptar os conceitos apresentados no artigo, buscando ampliar nosso entendimento sobre a fidelidade da informação quântica em um contexto específico.

Isto posto, considere a rede de átomos abaixo, donde $\stackrel{\text{de}}{\square}$ é a distância entre o primeiro átomo e o segundo ou entre o penúltimo átomo e o último. Além disso, $\stackrel{\epsilon}{\square}$ é a distância entre os demais átomos da rede:

Figura 4.1: Exemplo de uma rede de átomos linear com as representações dos saltos quânticos.

Fonte: Própria.

Com efeito, vamos propor que $|v^{\gamma}\rangle = \sum_{i=0}^{N+1} v_i^{\gamma} = 1$. Isto é, $v_0^{\gamma} + v_1^{\gamma} + \dots + v_N^{\gamma} + v_{N+1}^{\gamma} = 1$, ou seja, o somatório dos autovetores é igual a 1. Como $v_0^{\gamma} = \frac{a}{c} \sin \gamma$, $v_0^{\gamma} = \sum_{i=0}^{N-1} (\cos((k+1)v_i) + (1-a^2)\cos((k+1)v_i)) \cos((k+1)v_i) = v_0^{\gamma}$

$$v_k^{\gamma} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{c} (sen[(k+1)\gamma] + (1-a^2)sen[(k-1)\gamma]) e v_{N+1}^{\gamma} = \mu v_0^{\gamma},$$
 donde $\mu = \pm 1$,

$$\Rightarrow v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_N^2 + v_{N+1}^2 = 1 = \frac{a^2 sen^2(\gamma)}{c^2} + \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{N} (sen[(k+1)\gamma] + (1-a^2)^2 sen[(k-1)\gamma])^2 + \mu \frac{a^2 sen^2(\gamma)}{c^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2a^2sen^2(\gamma)}{c^2} + \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{N} (sen[(k+1)\gamma] + (1-a^2)^2 sen[(k-1)\gamma])^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 2a^2 sen^2(\gamma) + \sum_{k=0}^{N} (sen^2[(k+1)\gamma]) + \sum_{k=0}^{N} ((1-a^2)^2 sen^2[(k-1)\gamma]) + 2(1-a^2) \sum_{k=0}^{N} sen[(k+1)\gamma] sen[(k-1)\gamma].$$
(4.1)

Mas,
$$sen[(k+1)\gamma]sen[(k-1)\gamma] = sen^2(k\gamma) - sen^2(\gamma)$$
 e, note que,
$$\sum_{k=1}^N sen^2(k\gamma) = sen^2(\gamma) + sen^2(2\gamma) + \ldots + sen^2(N\gamma) = \frac{N+1}{2},$$
 pois $sen^2(\gamma) = \frac{1-cos(2\gamma)}{2}$.

$$\Rightarrow sen^2(m\gamma) = \frac{1 - cos(2m\gamma)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{N} sen^{2}(m\gamma) = \sum_{m=1}^{N} (\frac{1}{2} - \frac{cos(2m\gamma)}{2}) = \frac{1}{2} (\sum_{m=1}^{N} 1 - \sum_{m=1}^{N} cos(2m\gamma))$$

Quando $\gamma = \frac{\pi}{2N+2}$, temos que $\sum_{m=1}^{N} \cos(2m\gamma) = -1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(N - (-1) \right) = \frac{N+1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{N} sen^{2}(m\gamma) = \frac{N+1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{N} sen^2((m+1)\gamma) = sen^2(2\gamma) + sen^2(3\gamma) + \dots + sen^2((N+1)\gamma) + sen^2(\gamma) - sen^2(\gamma)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{N} sen^{2}((m+1)\gamma) = \sum_{m=1}^{N+1} sen^{2}(m\gamma) - sen^{2}(\gamma) = \frac{N+2}{2} - sen^{2}(\gamma).$$

E ainda,

$$\sum_{m=1}^{N} sen^{2}((m-1)\gamma) = sen^{2}(0\gamma) + sen^{2}(\gamma) + sen^{2}(2\gamma) + \cdots$$
$$+ sen^{2}((N+1)\gamma)$$

$$\sum_{m=1}^{N} sen^2((m-1)\gamma) = \frac{N-1+1}{2} = \frac{N}{2} . \text{ Portanto, de (4.1), temos que}$$

$$c^2 = 2a^2sen^2(\gamma) + \frac{N+2}{2} - sen^2(\gamma) + \frac{N}{2}(1-a^2)^2$$

$$+ 2(1-a^2)[\sum_{k=1}^{N} sen^2(k\gamma) - \sum_{k=1}^{N} sen^2(\gamma)]$$

$$\Rightarrow c^2 = 2a^2 sen^2(\gamma) + \frac{N+2}{2} - sen^2(\gamma) + \frac{N}{2}(1 - 2a^2 + a^4) + 2(1 - a^2)\frac{N+1}{2} - 2N(1 - a^2)sen^2(\gamma)$$

$$\Rightarrow c^2 = sen^2(\gamma)[2a^2 - 1 - 2N(1 - a^2)] + \frac{N+2}{2} + \frac{N}{2}(1 - 2a^2 + a^4) + (N + a^2)$$
+1)(1 - a^2)

$$\Rightarrow c^2 = sen^2(\gamma)[2a^2 - 1 - 2N(1 - a^2)] + \frac{N+2}{2} + \frac{N}{2}(1 - 2a^2 + a^4) + (N + 1)(1 - a^2). \text{ Como } sen^2(\gamma) = 1 - cos^2(\gamma)$$

$$\Rightarrow c^2 = 2a^2 - 1 - 2N + 2Na^2 + \frac{N}{2} + 1 + \frac{N}{2}(1 - 2a^2 + a^4) + (N+1)(1-a^2) - \cos^2(\gamma)[2a^2 - 1 - 2N(1-a^2)]$$

$$\Rightarrow c^2 = (N+1)2a^2 - N - Na^2 + \frac{N}{2}a^4 + (N+1)(1-a^2) - -\cos^2(\gamma)[2a^2 - 1 - 2N + 2Na^2]$$

$$\Rightarrow c^2 = (N+1)(1+a^2) - N(1+a^2) + \frac{N}{2}a^4 - \cos^2(\gamma)[2(N+1)(a^2-1)+1]$$

$$\Rightarrow c^2 = (1+a^2) + \frac{N}{2}a^4 + \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{2} - \cos^2(\gamma)[2(N+1)(a^2-1) + 1]$$

$$\Rightarrow c^2 = (1+a^2) + \left(\frac{N+1}{2}\right)a^4 - \frac{a^4}{2} - \cos^2(\gamma)[2(N+1)(a^2-1)+1]$$

$$\Rightarrow c^2 = (N+1) \left[\frac{a^4}{2} + 2(1-a^2)\cos^2(\gamma) \right] + 1 + a^2 - \frac{a^4}{2} - \cos^2(\gamma) =$$

$$= (N+1) \left[2(1-a^2)\cos^2(\gamma) + \frac{a^4}{2} \right] + 1 + a^2 - \frac{a^4}{2} - \left(1 - \sin^2(\gamma) \right).$$

Portanto, finalmente,

$$c^{2} = (N+1)\left[2(1-a^{2})cos^{2}(\gamma) + \frac{a^{4}}{2}\right] + a^{2} - \frac{a^{4}}{2} + sen^{2}(\gamma)$$

4.1 Resultados

Como o nosso principal objetivo é investigar o comportamento da função fidelidade, houvese necessário a construção de um algoritmo para o cálculo da fidelidade para diferentes valores de N. Além disso, o código utilizado, vide **Apêndice A**, foi feito na linguagem Python usando a base canônica da matriz Hamiltoniana de dimensão NxN.

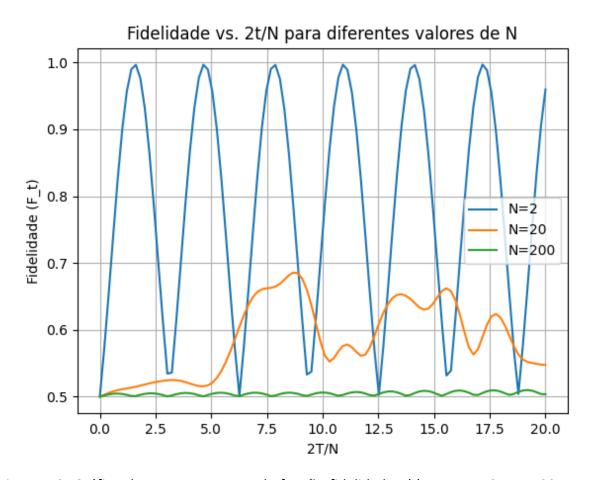


Figura 4.2: Gráfico do comportamento da função fidelidade F(t) para N = 2, N = 20 e N = 200, usando uma escala temporal 2T/N, com um intervalo de 0 a 20 com 100 pontos. Fonte: Gráfico extraído do Pycharm Professional.

Mas, nem tudo são flores na física mecânica quântica. Afim de trazer um âmbito mais real, e para o estudo ficar de acordo com nosso trabalho, introduziremos um ruído que representa o mundo macromolecular influenciando no sistema. Isto posto, a figura 4.2 a seguir consta um estudo construído através do ruído inserido na diagonal principal deste mesmo código, donde os 0's da diagonal principal são substituidos por números aléatórios que são limitados pelo intervalo fechado de $-\frac{w}{2}$ e $\frac{w}{2}$, onde e0 só pode assumir valores entre 0 e 1. Foram tiradas 5 amostras executando o programa 5 vezes, mudando os números aleatórios toda vez que iniciou-se o programa. As devidas modificações encontra-se no **Apêndice B**

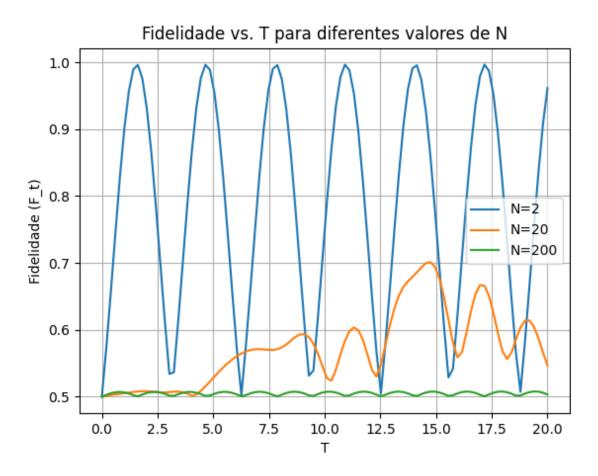


Figura 4.3.1: Gráfico do comportamento da função fidelidade F(t) para N = 2, N = 20 e N = 200, usando uma escala temporal 2T/N, com um intervalo de 0 a 20 com 100 pontos, executando o programa 5 vezes e fornecendo 5 gráficos diferentes para cada execução. Fonte: Gráficos extraídos do Pycharm Professional.

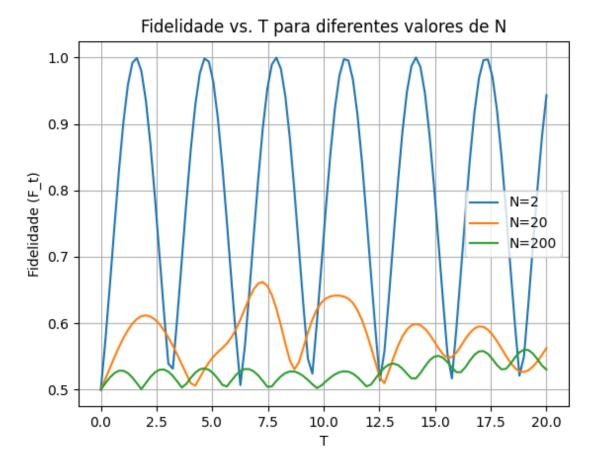


Figura 4.3.2: Gráfico do comportamento da função fidelidade F(t) para N = 2, N = 20 e N = 200, usando uma escala temporal 2T/N, com um intervalo de 0 a 20 com 100 pontos, executando o programa 5 vezes e fornecendo 5 gráficos diferentes para cada execução. Fonte: Gráficos extraídos do Pycharm Professional.

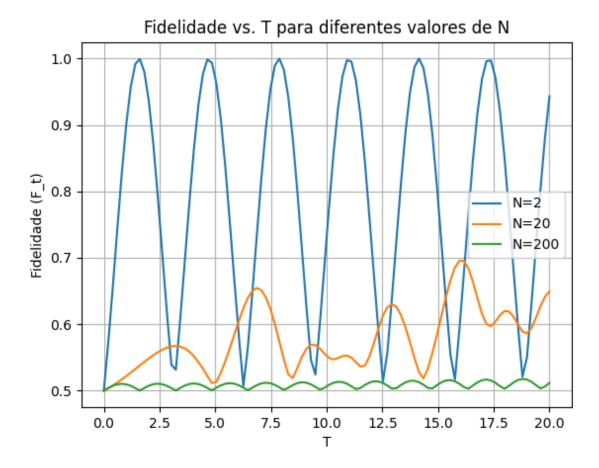


Figura 4.3.3: Gráfico do comportamento da função fidelidade F(t) para N = 2, N = 20 e N = 200, usando uma escala temporal 2T/N, com um intervalo de 0 a 20 com 100 pontos, executando o programa 5 vezes e fornecendo 5 gráficos diferentes para cada execução. Fonte: Gráficos extraídos do Pycharm Professional.

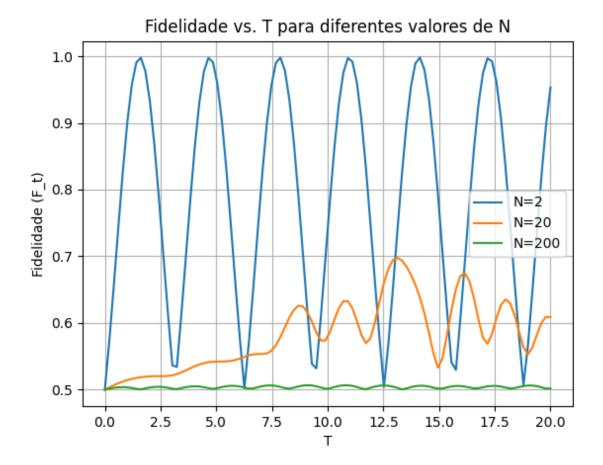


Figura 4.3.4: Gráfico do comportamento da função fidelidade F(t) para N = 2, N = 20 e N = 200, usando uma escala temporal 2T/N, com um intervalo de 0 a 20 com 100 pontos, executando o programa 5 vezes e fornecendo 5 gráficos diferentes para cada execução. Fonte: Gráficos extraídos do Pycharm Professional.

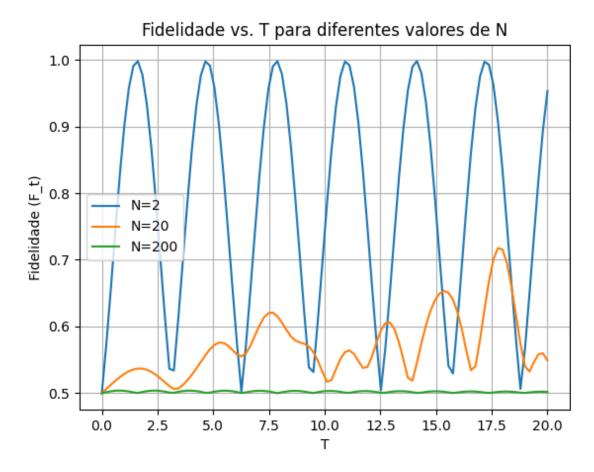


Figura 4.3.5: Gráfico do comportamento da função fidelidade F(t) para N = 2, N = 20 e N = 200, usando uma escala temporal 2T/N, com um intervalo de 0 a 20 com 100 pontos, executando o programa 5 vezes e fornecendo 5 gráficos diferentes para cada execução. Fonte: Gráficos extraídos do Pycharm Professional.

Capítulo 5 Conclusões e Considerações Finais

Este trabalho de conclusão de curso apresentou uma investigação sobre a fidelidade da informação quântica em sistemas baseados em cadeias de spins, inspirado pelo artigo científico "Unmodulated Spin Chains as Universal Quantum Wires". Através da análise crítica do artigo e da aplicação dos conceitos e técnicas nele apresentados, foi possível explorar a fidelidade da informação quântica em cenários específicos e ampliar nosso entendimento sobre o tema.

Os resultados obtidos, conforme apresentado no Capítulo 4, demonstram o comportamento da função de fidelidade para diferentes valores de N. A introdução de um ruído na diagonal principal da matriz Hamiltoniana permitiu uma análise mais realista do sistema, levando em consideração a influência do mundo macromolecular. As simulações realizadas mostraram variações na função de fidelidade para diferentes execuções do programa, refletindo a natureza estocástica do ruído introduzido.

A metodologia adotada neste trabalho provou ser eficaz para investigar a fidelidade da informação quântica em sistemas baseados em cadeias de spins [16]. No entanto, é importante destacar que existem limitações inerentes à metodologia e às ferramentas utilizadas. Haja vista que um grande fator também influenciador é a distância dos saltos de um átomo para outro em uma rede, onde o espéctro de energia entre os saltos podem sofrer mudanças, gerando assim mais ruído no sistema. A precisão dos resultados é limitada pela capacidade computacional disponível e pelo número de pontos escolhidos para a escala temporal. Além disso, a escolha dos valores para N e para o intervalo do ruído pode influenciar os resultados obtidos.

Em conclusão, este trabalho contribuiu para a compreensão da fidelidade da informação quântica em sistemas baseados em cadeias de spins. Os resultados obtidos fornecem insights valiosos que podem ser úteis para futuras pesquisas na área de informação quântica. Além disso, o estudo demonstrou a aplicabilidade e eficácia das cadeias de spins como "fios quânticos universais", conforme proposto no artigo científico que serviu como base para este trabalho.

Para trabalhos futuros, sugere-se a exploração de diferentes tipos de ruído e a investigação de seu impacto na fidelidade da informação quântica. Além disso, seria interessante explorar outras técnicas e métodos para calcular a fidelidade e comparar os resultados obtidos com os deste trabalho. Finalmente, a realização de experimentos práticos para validar os resultados das simulações computacionais também seria uma direção valiosa para futuras pesquisas.

Apêndice A Código usando a base canônica da matriz Hamiltoniana de dimensão NxN

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Valores de N
Ns = [2, 20, 200]
# Valores de T
T = np.linspace(0, 20, 100)
# Intervalo de 0 a 20, com 100 pontos
# Inicialize uma lista para armazenar as Fidelidades para cada valor de N
fidelidades = []
for N in Ns:
  # Inicializar a matriz A com zeros
  A = np.zeros((N, N), dtype=int)
  # Preencher os elementos adjacentes à diagonal principal com 1
  for i in range(N):
    if i > 0:
      A[i, i - 1] = 1 # Elemento à esquerda
    if i < N - 1:
      A[i, i+1] = 1 # Elemento à direita
    A[i, i] = 0 # Diagonal principal
  # Calcule os autovalores e autovetores da matriz
  eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)
```

```
# Calcule a matriz diagonalizada
  diagonal matrix = np.diag(eigenvalues)
  # Calcule a matriz inversa dos autovetores
  inverse_eigenvectors = np.linalg.inv(eigenvectors)
  # Inicialize as variáveis ref teimf t para cada valor de T
  fidelidade N = []
  for t in T:
    ref t = 0
    imf t = 0
    for i in range(N):
      Eii = diagonal matrix[i, i]
      ref_t += eigenvectors[i, N-1] * inverse_eigenvectors[0, i] * np.cos(t * Eii)
      imf_t += eigenvectors[i, N-1] * inverse_eigenvectors[0, i] * np.sin(t * Eii)
    # Calcule F(t) com base em ref te imf t
    F_t = 1/2 + (np.sqrt(ref_t^**2 + imf_t^**2)/3) + ((ref_t^**2 + imf_t^**2)/6)
    fidelidade N.append(F t)
  # Armazene a lista de fidelidades para este valor de N
  fidelidades.append(fidelidade_N)
# Plote os gráficos
for i, N in enumerate(Ns):
  plt.plot(T, fidelidades[i], label=f'N={N}')
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('Fidelidade (F t)')
plt.legend()
plt.title('Fidelidade vs. T para diferentes valores de N')
plt.grid()
plt.show()
```

Apêndice B Código usando a base canônica da matriz Hamiltoniana de dimensão NxN após modificação na diagonal principal

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Valores de N
Ns = [2, 20, 200]
# Valores de T
T = np.linspace(0, 20, 100)
# Intervalo de 0 a 20, com 100 pontos
# Inicialize uma lista para armazenar as Fidelidades para cada valor de N
fidelidades = []
for N in Ns:
  # Inicializar a matriz A com zeros
  A = np.zeros((N, N), dtype=float)
# Preencher os elementos adjacentes à diagonal principal com 1
  for i in range(N):
    if i > 0:
      A[i, i-1] = 1 # Elemento à esquerda
    if i < N - 1:
      A[i, i+1] = 1 # Elemento à direita
```

```
# Diagonal principal
    w = np.random.uniform(0, 1) # w é um valor aleatório entre 0 e 1
    A[i, i] = np.random.uniform(-w/2, w/2) # Substituir o zero por um número aleatório
entre -w/2 e w/2
  # Calcule os autovalores e autovetores da matriz
  eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)
  # Calcule a matriz diagonalizada
  diagonal matrix = np.diag(eigenvalues)
  # Calcule a matriz inversa dos autovetores
  inverse eigenvectors = np.linalg.inv(eigenvectors)
  # Inicialize as variáveis ref t e imf t para cada valor de T
  fidelidade N = []
  for t in T:
    reft=0
    imf_t = 0
    for i in range(N):
      Eii = diagonal matrix[i, i]
      ref_t += eigenvectors[i, N-1] * inverse_eigenvectors[0, i] * np.cos(t * Eii)
      imf t += eigenvectors[i, N-1] * inverse eigenvectors[0, i] * np.sin(t * Eii)
    # Calcule F(t) com base em ref te imf t
    F t = 1/2 + (np.sqrt(ref t**2 + imf t**2)/3) + ((ref t**2 + imf t**2)/6)
    fidelidade N.append(F t)
  # Armazene a lista de fidelidades para este valor de N
  fidelidades.append(fidelidade N)
# Plote os gráficos
for i, N in enumerate(Ns):
  plt.plot(T, fidelidades[i], label=f'N={N}')
```

```
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('Fidelidade (F_t)')
plt.legend()
plt.title('Fidelidade vs. T para diferentes valores de N')
plt.grid()
plt.show()
```

Referências Bibliográficas

- [1] Turing, A. M. (1937). "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem." Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1), 230-265
- [2] Moore, G. E. (1965). "Cramming more components onto integrated circuits." Electronics, 38(8).
- [3] M. A. Nielsen and Isaac L Chuang, "Computação Quântica e Informação Quântica", Editora Bookman, Porto Alegre, 2005.
- [4] An Introduction to Quantum Computing" de Phillip Kaye, Raymond Laflamme e Michele Mosca.
- [5] "Quantum Computing: Progress and Prospects" do National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine.
- [6] "Quantum Computing for Computer Scientists" de Noson S. Yanofsky e Mirco A. Mannucci.
- [7] "Introdução à Programação de Computadores Quânticos", de Prof. Renato Portugal (LNCC) e Prof. Franklin Marquezino (UFRJ).
- [8] Preskill, J. (2018). "Quantum Computing in the NISQ era and beyond." arXiv:1801.00862.
- [9] Antoni Wójcik, Tomasz Luczak, Pawe Kurzynski, Andrzej Grudka, Tomasz Gdala e Malgorzata Bednarska (2005). "Unmodulated spin chains as universal quantum wires". PHYSICAL REVIEW A 72, 034303.
- [10] Shannon, C. E. (1948). "A Mathematical Theory of Communication." The Bell System Technical Journal, 27(3), 379-423.
- [11] Shannon, C. E. (1949). "Communication in the Presence of Noise." Proceedings of the IRE, 37(1), 10-21.
- [12] LAGES, Elon. Álgebra Linear. 3ª edição. Editora X, 2020. 300p
- [13] DiVincenzo, D. P. (2000). "The physical implementation of quantum computation." Fortschritte der Physik, 48(9-11), 771-783.
- [14] Shor, P. W. (1994). "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring." Proceedings of the 35th annual symposium on foundations of computer science, 124-134.
- [15] Grover, L. K. (1996). "A fast quantum mechanical algorithm for database search." Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 212-219.
- [16] Guilherme M. A. Almeida, Francesco Ciccarello, Tony J. G. Apollaro, Andre M. C. Souza. "Quantum-state transfer in staggered coupled-cavity arrays". PHYSICAL REVIEW A 93, 032310 (2016)