



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA –
PIBIC

Curvas em \mathbb{R}^2 e suas propriedades geométricas
Uma introdução à Geometria Diferencial

Área do conhecimento: Ciências exatas e da Terra
Subárea do conhecimento: Matemática
Especialidade do conhecimento: Geometria Diferencial

Relatório Final
Período da bolsa: de 09/2023 a 08/2024

Este projeto é desenvolvido com bolsa de iniciação científica

PIBIC/CNPq

Orientadora: Maria de Andrade Costa e Silva
Autor: Anderson Andrade Santos

Resumo

As curvas paramétricas são geralmente um conteúdo introdutório em Geometria Diferencial, através de seu estudo é possível se adentrar em conceitos da diferenciabilidade nessas curvas e, através disso, futuramente em superfícies. O estudo das curvas por si só não serve unicamente como introdução para conceitos mais avançados, já que esses simples objetos já podem ter diversas aplicações. O objetivo dessa pesquisa foi um estudo das propriedades dessas curvas no \mathbb{R}^2 . A partir desse conceito foi obtido um avanço na proposta inicial do projeto, mais precisamente, estudamos número de rotação e como consequência deste conhecimento foi provado o Teorema Fundamental da Álgebra.

Palavras Chaves – Curvas, Curvatura, Número de Rotação.

Sumário

1	Introdução	4
2	Objetivos	4
3	Metodologia	5
4	Resultados e Discussões	6
4.1	Conceitos básicos	6
4.2	Curvas em \mathbb{R}^2	6
4.2.1	Curvas diferenciáveis	7
4.2.2	Reparametrização e comprimento de arco	9
4.2.3	Curvatura e equações de Frenet	12
4.2.4	Resultados para curvatura	15
4.2.5	Teorema Fundamental das Curvas	18
4.2.6	Curvas implícitas	20
4.3	Tópicos Adicionais	23
4.3.1	Função Ângulo e Número de Rotação	23
4.3.2	Homotopias	27
4.3.3	Aplicações no Plano Complexo	31
5	Conclusões	35
6	Apêndice	35
7	Perspectivas de Futuros Trabalhos	36
8	Referências Bibliográficas	37
9	Outras Atividades	38

1 Introdução

O estudo das curvas em \mathbb{R}^2 é um dos primeiros contatos a se ter com Geometria Diferencial, utilizando resultados do Cálculo Diferencial é possível definir e encontrar diversas propriedades e características desses objetos, tendo diversas aplicações e generalizações futuras para espaços mais abstratos.

Nesta pesquisa estudamos essas propriedades, entre elas a curvatura de uma curva, visto que dada uma função curvatura é possível, de certa forma, encontrar uma curva correspondente, sendo esse um dos objetivos principais desse texto, que é o Teorema Fundamental das Curvas. Dando continuidade ao estudo, como tópico extra, foi aprofundado o conhecimento sobre propriedades de curvas, como o número de rotação, e a partir daí provaremos o Teorema Fundamental da Álgebra, que aqui demos uma prova alternativa através do estudo do número de rotação de curvas fechadas.

Mais precisamente, na primeira etapa faremos as definições de curvas parametrizadas, vetores tangente e normal, reparametrizações de curvas, até ter as ferramentas necessárias para enunciar e provar o Teorema Fundamental das Curvas Planas, além de demonstrar a curvatura como uma propriedade invariante da curva em relação à isometrias. Após isso também é reservado um espaço para o estudo de curvas definidas implicitamente, que serão vistas como curvas de nível de funções de duas variáveis. Por fim, por um caminho mais “topológico”, estudamos o número de rotação de curvas fechadas, que contam o número de “voltas” que a curva dá em relação a um ponto. Essa sendo outra propriedade invariante da curva, agora em relação à homotopias, um conceito de deformações contínuas das curvas, tendo esses estudos diversas aplicações no Plano Complexo. Desta forma, todos os tópicos do plano de trabalho foram estudados e progredimos no estudo das propriedades de curvas, fazendo uma ponte entre áreas da Matemática, como Geometria Diferencial, Topologia, Álgebra e Análise Complexa.

As aplicações de curvas são diversas, na física, matemática, computação, e demais áreas. Curvas de Bézier são um exemplo de curvas parametrizadas, que têm aplicação direta em diversos ramos da computação, como por exemplo no direcionamento de câmeras em jogos eletrônicos, ou na criação de desenhos e curvas em programas de edição de imagens (ver [10] para mais detalhes em Curvas de Bézier). Para o número de rotação mostraremos algumas aplicações no Plano Complexo. Para maiores detalhes de aplicações ver [9].

2 Objetivos

A pesquisa teve como objetivo o estudo de curvas no plano, um caso específico e mais básico em Geometria Diferencial, que aqui foi tratado com maior profundidade. Os objetivos específicos foram:

1. Desenvolver um conhecimento básico em Geometria Diferencial.
2. Utilizar ferramentas de Cálculo, Álgebra Linear, Topologia e EDO para obter propriedades geométricas.
3. Entender os conceitos elementares de forma geométrica e analítica.

4. Aperfeiçoar os conhecimentos em Matemática, mais especificamente na área de Geometria Diferencial.
5. Incentivo da continuidade dos estudos no Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UFS ou de outra instituição do país.
6. Escrever os relatórios técnicos dos estudos realizados.

3 Metodologia

A metodologia em matemática é padrão e segue a lógica dedutiva. Dessa forma, a metodologia utilizada para o desenvolvimento do projeto se baseia principalmente em:

1. Apresentação de seminários: Foi pesquisado o material bibliográfico referente ao plano de trabalho. O resultado foi apresentado ao grupo de pesquisa em forma de seminário, onde foram discutidos os problemas relacionados e possíveis soluções.
2. Participação da XIII Escola de Verão de Matemática da UFS.
3. Reuniões semanais ou quinzenais com a orientadora com o objetivo de tirar as dúvidas e avançar nas metas de estudo.
4. Escrita dos relatórios parciais e finais.

4 Resultados e Discussões

Nesta seção apresentaremos os principais tópicos estudados. Para maiores consultas, ver [1], [4] e [5].

4.1 Conceitos básicos

Definiremos alguns conceitos que serão utilizados em todo o texto, servindo também para enunciar alguns resultados sem demonstração e estabelecer notações.

Definição 1. Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ a operação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o produto interno euclidiano, isto é,

$$\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i.$$

Definição 2. A norma de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é também a norma euclidiana

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_i v_i^2}.$$

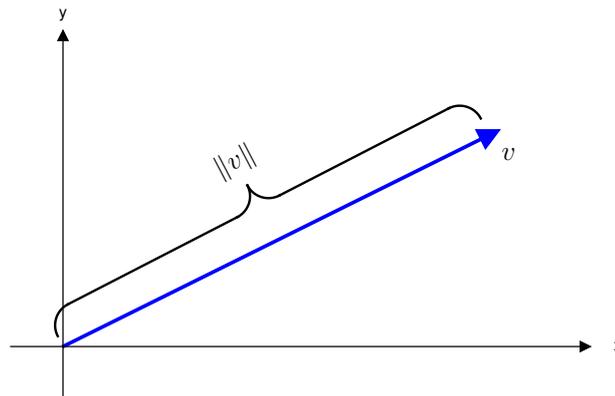


Figura 1: Norma de um vetor em \mathbb{R}^2 .

Proposição 1. Sejam as aplicações diferenciáveis $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(t)$ e $v(t)$, que para cada elemento em I associam um vetor em \mathbb{R}^n . Então

$$\frac{d}{dt} \langle u, v \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} u, v \right\rangle + \left\langle u, \frac{d}{dt} v \right\rangle.$$

Usaremos também a notação $u' = \frac{d}{dt} u$ para derivada em uma variável.

4.2 Curvas em \mathbb{R}^2

Nesta parte trataremos de curvas no plano \mathbb{R}^2 , utilizando conceitos do cálculo diferencial poderemos generalizar as ideias vistas anteriormente para encontrar diversas características e propriedades destas curvas.

As imagens do texto foram criadas utilizando Python e Matplotlib.

4.2.1 Curvas diferenciáveis

Definição 3. Uma curva parametrizada α em \mathbb{R}^2 é uma aplicação contínua $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde I é um intervalo. A aplicação α é contínua se as funções $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

Simplificaremos a partir daqui o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ por I de modo que fique subentendido que o domínio é um subconjunto dos reais, a menos que seja explícito que não.

Definição 4. O traço de uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o conjunto imagem dessa curva, $C = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$.

Note que duas curvas podem ser diferentes, mas ter o mesmo traço, onde o traço é a representação visual que temos da curva. Por exemplo, as curvas $\alpha(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [0, 1]$, (que pode ser vista como o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$) e $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, são diferentes curvas, mas possuem o mesmo traço.

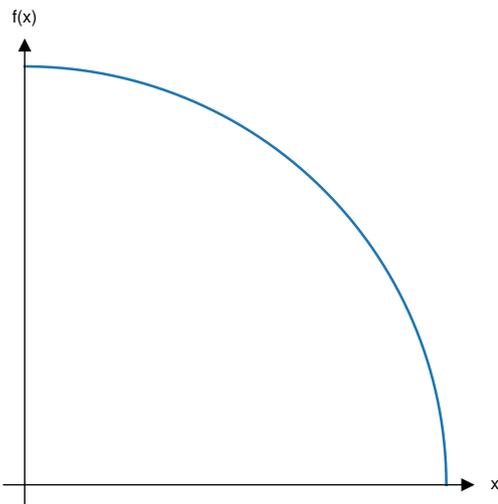


Figura 2: Curva α .

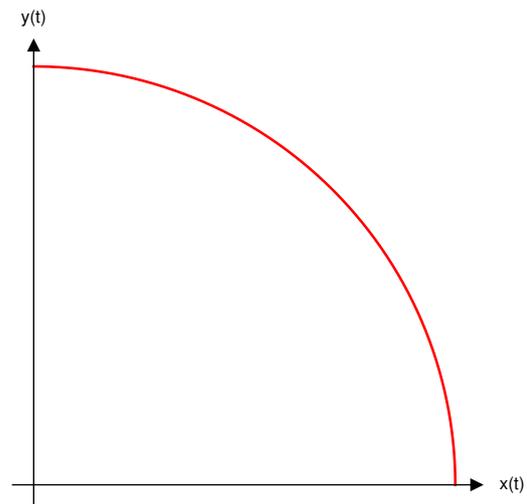


Figura 3: Curva β .

Diremos que uma curva $\alpha: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é fechada quando $\alpha(a) = \alpha(b)$, e que é uma curva simples se α é uma aplicação injetiva em I ou, no caso de uma curva fechada, injetiva em $[a, b)$, isto é, não possui autointerseção (ver Figura 4).

Definição 5. Uma curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é dita diferenciável de classe C^r , $r \geq 1$, quando suas componentes $x(t)$ e $y(t)$ são funções de classe C^r . Uma função é de classe C^r quando possui r -ésima derivada contínua.

O caso de uma curva C^0 , que quer dizer que é uma aplicação contínua, é simplesmente nossa definição de curva parametrizada, então nesse contexto toda curva parametrizada é, no mínimo, C^0 .

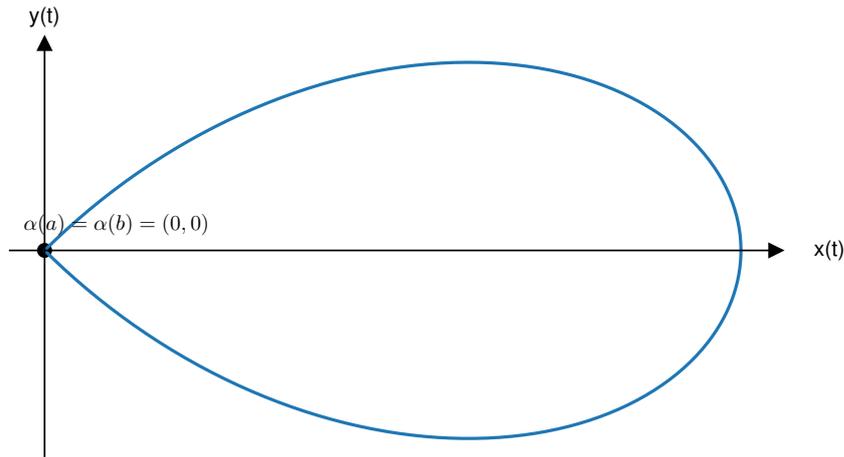


Figura 4: Curva simples e fechada.

A curva $\alpha = (t, |t|), t \in \mathbb{R}$, por exemplo, é de classe C^0 , mas não de classe C^1 , pois a função $f(t) = |t|$ não é diferenciável em 0, logo α não é diferenciável, por outro lado, se restringirmos o domínio da curva ao intervalo $[1, \infty)$, então teríamos α de classe C^r , para todo $r \in \mathbb{N}$ (uma curva suave). Outro exemplo seria a curva $\beta(t) = (t, t^2), t \in \mathbb{R}$, que é também suave.

Definição 6. Uma curva diferenciável $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular em $t_0 \in I$ se $\alpha'(t_0) \neq 0$. Diremos que α é regular se é regular em todo ponto.

Visualizando $\alpha'(t)$ como o vetor velocidade da curva, temos basicamente que α é regular se sua velocidade nunca é nula. Diremos então que o vetor derivada, ou vetor velocidade, de uma curva diferenciável α é o vetor $\alpha'(t)$.

Por exemplo, sejam as curvas $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ e $\beta(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Veja que $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ se anula para $t = 0$, isto é, o vetor velocidade é nulo no ponto $(0, 0)$, portanto, α não é regular. Por outro lado $\beta'(t) = (2t, 3t^2 - 1) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, logo, β é regular (ver Figura 5 e 6).

A seguir demonstraremos algumas propriedades locais de uma curva regular. Para dar sentido à ideia de propriedade local utilizaremos o conceito de vizinhança. Um conjunto $V \subset \mathbb{R}$ é dito vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}$, se existe $\epsilon > 0$ tal que $(p - \epsilon, p + \epsilon) \subset V$.

Como veremos, qualquer curva regular, localmente, não tem autointerseção, mesmo que a curva não seja uma curva simples.

Proposição 2. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular em $t_0 \in I$. Então existe vizinhança V de t_0 tal que α é injetiva para $t \in V \cap I$.

Demonstração. De fato, como $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$, então $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$, assumamos, sem perda de generalidade, que $x'(t_0) \neq 0$, como x' é uma função contínua, existe vizinhança V tal que para todo $t \in I \cap V$, $x'(t) > 0$ ou $x'(t) < 0$, portanto, x é estritamente monótona nessa restrição, logo, injetiva. Por fim então, α é injetiva para $t \in V \cap I$. \square

Outra propriedade local das curvas regulares nos diz que localmente a curva pode ser vista como o gráfico de uma função real. Essa propriedade pode ser vista como uma versão mais fraca de um teorema importante que veremos mais adiante.

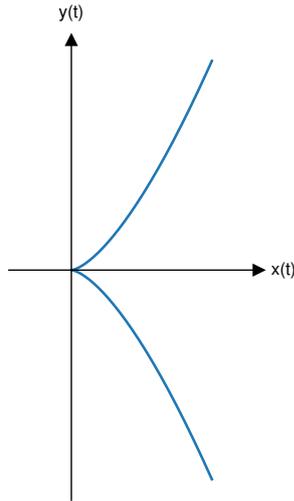


Figura 5: Curva α .

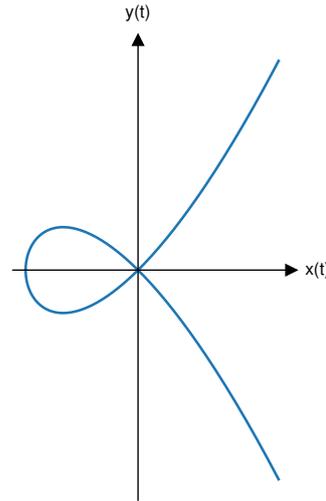


Figura 6: Curva β .

Proposição 3. *Seja $\alpha: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular em $t_0 \in (a, b)$, existe vizinhança $V \subset I$ tal que, para $t \in V$, o traço de α coincide com o traço de uma curva β da forma $\beta(t) = (t, f(t))$ ou $\beta(t) = (f(t), t)$, para uma função diferenciável $f: J \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$, então assumamos sem perda de generalidade que $x'(t_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Inversa¹ existe vizinhança $V \subset I$ tal que para $t \in V$, x é um homeomorfismo sobre $J = x(V)$ e sua inversa $x^{-1}: J \rightarrow V$ é diferenciável. Defina agora $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$. Daí

$$\beta(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t)),$$

onde $f(t) = y(x^{-1}(t))$ é composta de funções diferenciáveis e, portanto, função diferenciável. No caso em que $y'(t_0) \neq 0$, a função β seria da forma $\beta(t) = (x(y^{-1}(t)), y(y^{-1}(t))) = (f(t), t)$, com $f(t) = x(y^{-1}(t))$. \square

4.2.2 Reparametrização e comprimento de arco

Definição 7. *Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, uma curva parametrizada e $h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ uma função real sobrejetiva, ambas de classe C^r , $r \geq 1$. A curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$*

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)),$$

também de classe C^r , é dita reparametrização de α .

Por exemplo, sejam $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s))$ e $\beta(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Portanto, β é uma reparametrização de α pela função $h: [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$, dada por

$$h(t) = 2\pi t,$$

isto é, $\beta(t) = \alpha(h(t))$.

Temos a partir dessa definição e pela regra da cadeia que $\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$ e ainda $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|$. Considerando apenas reparametrizações onde $h'(t) \neq 0$ temos que, pelo Teorema do Valor Intermediário,

¹Disponível no Apêndice.

$h'(t) > 0$ ou $h'(t) < 0$, para todo $t \in I$, isto é, h é uma função monótona crescente ou decrescente. Se, nesse contexto, h é uma função estritamente crescente diremos que a reparametrização β preserva a orientação de α , se h for decrescente, β inverte orientação.

Como exemplo temos a reparametrização inversa de uma curva. Dadas uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $I = (a, b)$, e uma função real $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ dada por $h(t) = a + b - t$, temos que a curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ composição de α e h , $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$, é uma reparametrização que inverte orientação, pois $h'(t) = -1$, $\forall t \in J$. Além disso é fácil ver que β é simplesmente α percorrida no sentido contrário.

Relembrando agora ideias do cálculo integral, vimos o cálculo da área abaixo do gráfico de uma função como sendo a soma infinitesimal de retângulos formados abaixo da função integrada, faremos uma abordagem parecida para definir o comprimento de uma curva, o plano é somar pedaços infinitesimais de segmentos de reta nessa curva, como o vetor derivada é tangente à sua curva, o utilizamos como membro infinitesimal a ser somado, e a partir dessa intuição temos a seguinte definição:

Definição 8. Dada uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definimos a função comprimento de arco $\mathcal{L}_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du, \quad t_0 \in I.$$

O comprimento do arco de α de t_1 a t_2 , $t_2 \geq t_1$, é o número $\mathcal{L}_\alpha(t_2) - \mathcal{L}_\alpha(t_1)$.

Por exemplo, tome a curva $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$, e observe que

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Portanto o comprimento de α em todo seu domínio é $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\alpha(t) = \sqrt{2}$.

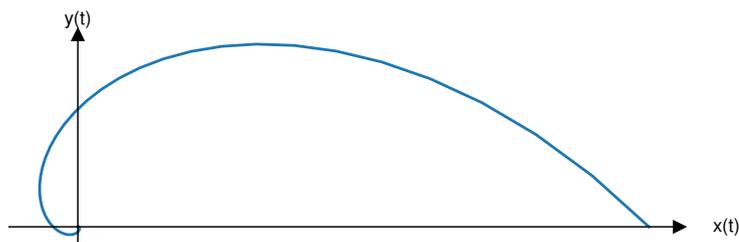


Figura 7: Curva $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$.

Proposição 4. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α , então se β preserva orientação $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_\beta$.

Demonstração. A partir do fato de que $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, sabemos que

$$\mathcal{L}_\beta(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(h(u))h'(u)\| du = \int_{t_0}^t \|\alpha'(h(u))\| \cdot |h'(u)| du.$$

Como β preserva orientação, h é uma função estritamente crescente, então $|h'(u)| = h'(u)$. Resolvendo por substituição, seja $v = h(u)$, então $dv = h'(u)du$,

substituindo também nos limites de integração temos

$$\mathcal{L}_\beta(t) = \int_{h(t_0)}^{h(t)} \|\alpha'(v)\| dv = \mathcal{L}_\alpha(h(t)).$$

□

Definição 9. Diremos que uma curva diferenciável α está parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0.$$

Com essa definição temos uma importante caracterização dessa propriedade:

Proposição 5. Uma curva diferenciável α está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Demonstração. De fato, seja α uma curva com $\|\alpha'(t)\| = 1$, então

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t du = t - t_0.$$

Por outro lado, se α está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0,$$

derivando os dois lados e utilizando o teorema fundamental do cálculo, obtemos $\|\alpha'(t)\| = 1$. □

Então a partir disso demonstramos a caracterização que nos diz que uma função é dita parametrizada pelo comprimento de arco quando seu vetor derivada é unitário. O teorema a seguir nos mostra a importância dessa propriedade.

Lema 1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular de classe C^r , $r \geq 1$, a função $\mathcal{L}_\alpha(t)$ também é de classe C^r .

Demonstração. Demonstração pode ser encontrada em [3]. □

Teorema 1. Toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Demonstração. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva de classe C^r e regular, isto é, $\|\alpha'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$, como a norma é maior ou igual a zero e $\|\alpha'(t)\| \neq 0$, temos então que $\|\alpha'(t)\| > 0$ para todo $t \in I$. Por outro lado lembre da definição da função comprimento de arco e veja que $\mathcal{L}'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Nessas condições, aplicando o Teorema da Função Inversa juntamente com o lema acima, temos um homeomorfismo, onde a inversa $h = \mathcal{L}^{-1} : J \rightarrow I$ também é diferenciável, possui derivada

$$h'(s) = \frac{1}{\mathcal{L}'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|},$$

e é de classe C^r . Por último defina uma reparametrização de α como a curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s))$, pela regra da cadeia $\beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s)$ e portanto

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1.$$

Portanto, temos que β é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco de classe C^r . \square

E então por último temos a nossa última definição dessa seção.

Definição 10. Dada uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^r, r \geq 1$, parametrizada pelo comprimento de arco, definimos o vetor tangente $t : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^{(r-1)}$ como $t(s) = \alpha'(s)$.

Desta forma, temos que toda curva regular tem um vetor tangente não nulo e podemos reparametrizar pelo comprimento de arco para obter uma parametrização com vetor tangente unitário. Em geral utilizaremos a notação do parâmetro s quando estivermos falando de uma curva p.c.a (parametrizada pelo comprimento de arco) e o parâmetro t quando se tratando de uma curva parametrizada qualquer.

4.2.3 Curvatura e equações de Frenet

Façamos agora algumas observações sobre o que encontramos. Dada uma curva C^r regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, r \geq 2$, existe uma reparametrização p.c.a dessa curva, então assuma, sem perda de generalidade, que α está parametrizada pelo comprimento de arco e note que

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \iff \|\alpha'(s)\|^2 = 1 \iff \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1.$$

Derivando ambos os lados em relação a s , temos

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

isto é, $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$ para todo $s \in I$ (ou de outro modo, $t(s)$ é ortogonal a $t'(s)$). Sendo esse apenas um caso específico da proposição a seguir.

Proposição 6. Seja $v : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação C^1 e c uma constante real,

$$\|v(t)\| = c \iff \langle v(t), v'(t) \rangle = 0,$$

isto é, v é ortogonal a v' .

Demonstração. É fácil demonstrar repetindo o processo feito acima. \square

Outro conceito importante para nosso estudo em obter propriedades geométricas em curvas é o vetor unitário normal à curva. Primeiramente veja que, utilizando a matriz de rotação, dado um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$R_\theta v = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \text{sen } \theta \\ x \text{sen } \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Então podemos definir a aplicação de rotação pelo ângulo θ , $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, como

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

E, portanto, para conseguir um vetor normal à curva podemos simplesmente girar o vetor tangente 90 graus no sentido anti-horário, ou seja,

$$\begin{aligned} R_{\pi/2}(t(s)) &= (x'(s) \cos(\pi/2) - y'(s) \sin(\pi/2), x'(s) \sin(\pi/2) + y'(s) \cos(\pi/2)) \\ &= (-y'(s), x'(s)), \end{aligned}$$

daí definimos:

Definição 11. Dada uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ p.c.a, o vetor normal $n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ à curva α é dado por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Para visualizar os vetores $t(s)$ e $n(s)$ podemos vê-los como o vetor na posição $\alpha(s)$ na curva, isto é, origem em $\alpha(s)$ e ponto final em $\alpha(s) + t(s)$ (ou $\alpha(s) + n(s)$).

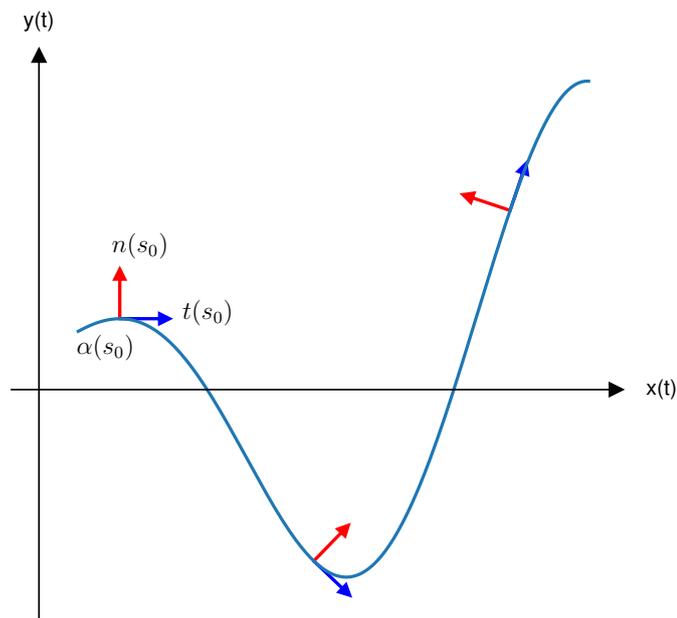


Figura 8: Vetores tangente e normal à uma curva α .

Com tudo isso em mãos podemos fazer algumas relações sobre esses vetores encontrados com a proposição a seguir.

Proposição 7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, curva p.c.a. de classe C^r , $r \geq 2$. Então $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$, e $n'(s)$ é paralelo a $t(s)$, isto é, existem funções $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $t'(s) = a(s)n(s)$ e $n'(s) = b(s)t(s)$.

Demonstração. Primeiro podemos notar que como $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortogonais e unitários, então $\tau = \{t(s), n(s)\}$ forma uma base ortonormal do \mathbb{R}^2 e portanto, para cada $s \in I$, $t'(s)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos dessa base, isto é, $t'(s) = a(s)t(s) + b(s)n(s)$, como $t(s)$ é ortogonal a $t'(s)$ e a $n(s)$, então (ocultando os parâmetros para melhor leitura)

$$0 = \langle t', t \rangle = \langle at + bn, t \rangle = \langle at, t \rangle + \langle bn, t \rangle = a.$$

Logo, $t'(s) = bn(s)$.

Para $n(s)$, note que como o normal é um vetor unitário, então $n(s)$ é ortogonal a $n'(s)$, e daí, utilizando o fato de τ ser base do \mathbb{R}^2 e a ortogonalidade de $n(s)$ com $n'(s)$ e $t(s)$, temos analogamente que

$$n' = \tilde{a}t + \tilde{b}n \implies 0 = \langle n', n \rangle = \langle \tilde{a}t + \tilde{b}n, n \rangle = \tilde{b}.$$

Segue o resultado. □

Essa proposição, portanto, nos dá uma importante ligação entre as derivadas do vetor normal e tangente de uma curva p.c.a. qualquer, adicionando mais uma informação no resultado dessa proposição temos algo ainda maior. Relembre que $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$, então derivando em ambos os lados temos

$$\langle t'(s), n(s) \rangle + \langle t(s), n'(s) \rangle = 0 \implies \langle t(s), n'(s) \rangle = -\langle t'(s), n(s) \rangle,$$

substituindo pelo que provamos na proposição anterior

$$\langle t(s), b(s)t(s) \rangle = -\langle a(s)n(s), n(s) \rangle \implies b(s) = -a(s),$$

portanto $t'(s) = a(s)n(s)$ e $n'(s) = -a(s)t(s)$. A partir dessa motivação definimos a noção de curvatura de uma curva e dela as equações de Frenet.

Definição 12. *Seja α curva de classe C^r , $r \geq 2$, parametrizada pelo comprimento de arco, a função curvatura de α é a função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^{(r-2)}$, tal que $t'(s) = k(s)n(s)$ e $n'(s) = -k(s)t(s)$.*

Temos daí as equações de Frenet para uma curva diferenciável de classe C^2

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -k(s)t(s). \end{cases}$$

A saber, aplicando o produto interno de ambos os lados da primeira equação, temos ainda um resultado explícito para $k(s)$

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \langle k(s)n(s), n(s) \rangle \iff k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle.$$

Isso nos dá uma ideia geométrica da curvatura, sendo uma escala do quanto o vetor $t'(s)$ (ou $\alpha''(s)$, que pode ser visto como a aceleração da curva) difere de $n(s)$.

Note que, em geral, não é simples o processo de reparametrizar uma curva pelo comprimento de arco e através das Equações de Frenet encontrar sua curvatura. Para isso a próxima seção irá, utilizando a teoria desenvolvida, nos mostrar meios mais fáceis para encontrar esses resultados. Por exemplo, dada a curva $\alpha(t) = (3t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ (ver Figura 9), temos

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = 3 \int_{t_0}^t \sqrt{1 + u^4} du,$$

que não é uma integral trivial, dificultando o processo de encontrar sua inversa. Encontraremos sua curvatura na seção seguinte.

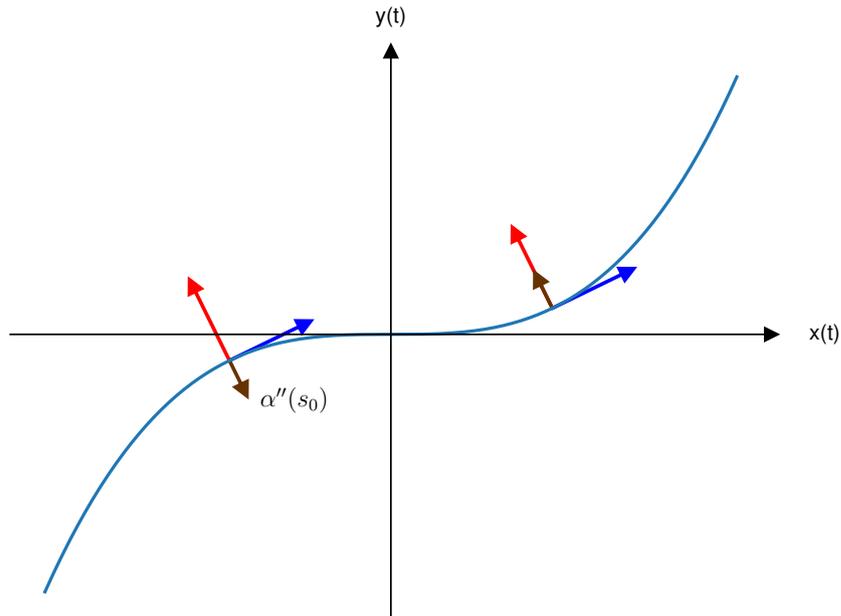


Figura 9: Vetor $\alpha''(s)$ em marrom da curva $\alpha(s)$.

4.2.4 Resultados para curvatura

Partindo do conceito de curvatura agora podemos provar importantes resultados relacionando curvas e sua curvatura. A partir daqui para simplificar escrita, quando estivermos falando da curvatura de uma curva, essa curva é, no mínimo, de classe C^2 .

Até o momento só falamos com profundidade de curvatura, vetor tangente e vetor normal em curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Utilizando do fato de toda curva regular ser reparametrizável pelo comprimento de arco, diremos que a curvatura, tangente e normal de α regular serão os de sua reparametrização pelo comprimento de arco β .

Proposição 8. *Uma curva regular α está contida em uma reta se, e somente se, $k \equiv 0$.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, se a curva está contida em uma reta então é da forma $\alpha(s) = p_0 + sv_0$, onde $p_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$, $s \in I$. Derivando duas vezes temos que $\alpha''(s) = t'(s) = 0$, portanto $k = \langle t', n \rangle = 0$. Por outro lado, se $k = 0$, como $t' = kn$, temos que $t' = 0$. Portanto, o vetor tangente é constante, isto é, $\alpha'(s) = v_0$, integrando temos $\alpha(s) = p_0 + sv_0$. \square

Teorema 2. *O traço de uma curva regular está contida em um círculo de raio $r > 0$ se, e somente se, $|k| = 1/r$.*

Demonstração. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ já reparametrizada pelo comprimento de arco, para demonstrar a necessidade veja que, se α está contida num círculo, temos

$$\|\alpha(s) - p_0\| = r \implies \langle \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 \rangle = r^2.$$

Derivando de ambos os lados, então

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0. \quad (1)$$

Derivando, novamente, obtemos

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \implies \langle \alpha''(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = -1. \quad (2)$$

Por (1) temos que $\alpha(s) - p_0$ é ortogonal a $\alpha'(s)$, como $\alpha''(s)$ também é ortogonal a $\alpha'(s)$, então $\alpha(s) - p_0$ e $\alpha''(s)$ têm a mesma direção, isto é, um é múltiplo do outro. A partir disso, usando (2) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz (no caso da igualdade), temos

$$\|\alpha''(s)\| \cdot \|\alpha(s) - p_0\| = |\langle \alpha''(s), \alpha(s) - p_0 \rangle| = 1.$$

Por outro lado, utilizando novamente Cauchy-Schwarz,

$$|k(s)| = |\langle t'(s), n(s) \rangle| = \|t'(s)\| \cdot \|n(s)\| = \|\alpha''(s)\|.$$

Então por fim, pelos dois resultados acima,

$$|k(s)| = \frac{1}{\|\alpha(s) - p_0\|} = \frac{1}{r}.$$

Para a suficiência, suponha $k = 1/r$ e defina a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(s) = \alpha(s) + rn(s)$. Substituindo, utilizando as equações de Frenet, e derivando temos que

$$f'(s) = t(s) - rk(s)t(s) = t(s) - t(s) = 0.$$

Portanto, f é constante, digamos $f(s) = p_0 \in \mathbb{R}^2$. Então pela definição

$$\begin{aligned} \alpha(s) + rn(s) = p_0 &\implies \alpha(s) - p_0 = -rn(s) \\ \implies \|\alpha(s) - p_0\| &= \|-rn(s)\| = r. \end{aligned}$$

No caso onde $k = -1/r$ é possível demonstrar analogamente definindo f como $f(s) = \alpha(s) - rn(s)$. \square

Note que só pontuamos anteriormente sobre a curvatura de uma curva regular utilizando sua parametrização pelo comprimento de arco, mas, além disso, podemos ainda demonstrar explicitamente como é essa curvatura, que segue.

Proposição 9. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular. Então,*

$$\begin{aligned} t(t) &= \frac{(x'(t), y'(t))}{\|\alpha'(t)\|}, \\ n(t) &= \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}, \\ k(t) &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}. \end{aligned}$$

Demonstração. Dada uma curva regular qualquer $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe a reparametrização p.c.a. $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde h é \mathcal{L}_α^{-1} e $J = \mathcal{L}_\alpha(I)$. Portanto temos que

$$\alpha(t) = \beta(\mathcal{L}_\alpha(t)) \implies \alpha'(t) = \beta'(\mathcal{L}_\alpha(t))\mathcal{L}'_\alpha(t) \implies \beta'(\mathcal{L}_\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\mathcal{L}'_\alpha(t)},$$

Como o vetor tangente e normal são definidos na curva p.c.a., $t(t) = \beta'(\mathcal{L}_\alpha(t))$, juntando ao fato de que $\mathcal{L}'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$, então

$$t(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\|\alpha'(t)\|} \quad e \quad n(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Agora, calculemos a curvatura, utilizando novamente o fato de que $\alpha'(t) = \beta'(\mathcal{L}_\alpha(t))\|\alpha'(t)\|$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \beta''(\mathcal{L}_\alpha(t))\|\alpha'(t)\|^2 + \beta'(\mathcal{L}_\alpha(t))(\|\alpha'(t)\|)' \\ \implies \beta''(\mathcal{L}_\alpha(t)) &= \frac{\alpha''(t) - \beta'(\mathcal{L}_\alpha(t))(\|\alpha'(t)\|)'}{\|\alpha'(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Pela ortogonalidade de n e β' , vemos que

$$\langle \beta''(\mathcal{L}_\alpha(t)), n(t) \rangle = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \langle \alpha''(t), n(t) \rangle = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3} \langle \alpha''(t), (-y'(t), x'(t)) \rangle.$$

E daí, temos por fim

$$k(t) = \langle \beta''(\mathcal{L}_\alpha(t)), n(t) \rangle = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

□

Relembre que anteriormente deixamos em aberto o problema de encontrar a curvatura da função $\alpha(t) = (3t, t^3)$. Derivando então a curva α temos que $\alpha'(t) = (3, 3t^2)$ e $\alpha''(t) = (0, 6t)$. Portanto,

$$k(t) = \frac{2t}{3(\sqrt{1+t^4})^3}.$$

O resultado a seguir será o último dessa seção e de importância na próxima, e nos diz que a curvatura de uma curva é invariante à translações e rotações no plano.

Proposição 10. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, uma curva regular, $k_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ sua função curvatura, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação de translação pelo vetor (a, b) e $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação de rotação pelo ângulo θ . Então k_α é invariante por T e por R_θ .*

Demonstração. Seja β a curva formada quando se é aplicada a translação em α , isto é,

$$\beta(t) = (T \circ \alpha)(t) = T(\alpha(t)) = (x(t) + a, y(t) + b).$$

Portanto,

$$\beta'(t) = (x'(t), y'(t)) = \alpha'(t),$$

$$\beta''(t) = (x''(t), y''(t)) = \alpha''(t),$$

aplicando a fórmula para $k(t)$ encontrada na Proposição 9, temos $k_\beta = k_\alpha$. Para o caso da rotação, tome ζ como sendo a aplicação de R_θ em α ,

$$\zeta(t) = R_\theta(\alpha(t)) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t)) = (x(t)\cos\theta - y(t)\sen\theta, y(t)\cos\theta + x(t)\sen\theta).$$

E daí,

$$\zeta'(t) = (\hat{x}'(t), \hat{y}'(t)) = (x'(t)\cos\theta - y'(t)\sen\theta, y'(t)\cos\theta + x'(t)\sen\theta),$$

$$\zeta''(t) = (\hat{x}''(t), \hat{y}''(t)) = (x''(t)\cos\theta - y''(t)\sen\theta, y''(t)\cos\theta + x''(t)\sen\theta),$$

utilizando a fórmula para curvatura e desenvolvendo os termos é fácil ver que

$$k_\zeta = \frac{\hat{x}'(t)\hat{y}''(t) - \hat{x}''(t)\hat{y}'(t)}{\|\zeta'(t)\|^3} = k_\alpha.$$

□

4.2.5 Teorema Fundamental das Curvas

Nesta seção mostraremos um importante resultado que nos diz que dada a função curvatura podemos encontrar uma curva correspondente, a menos de translações e rotações. Note primeiramente que dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, como seu vetor tangente está contido num círculo unitário, existe uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sen\theta(s))$, daí temos que

$$t'(s) = (-\sen\theta(s)\theta'(s), \cos\theta(s)\theta'(s)) \quad \text{e} \quad n(s) = (-\sen\theta(s), \cos\theta(s)).$$

Esse fato pode e será demonstrado com mais detalhes na seção seguinte, mas o utilizemos aqui sem distinção.

Utilizando o fato de que $t' = kn$, então

$$k(s) = \theta'(s).$$

E por fim, integrando dos dois lados,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(u)du + \theta(s_0), s_0 \in I.$$

Observe que podemos ver essa função $\theta(s)$ como o “ângulo” do vetor tangente, pois no caso onde $\theta(s_0) = 0$ teríamos que $\alpha'(s_0) = (\cos\theta(s_0), \sen\theta(s_0)) = (1, 0)$, então este seria o ângulo que o vetor tangente faz com o eixo x.

Tendo tudo isso em mente, podemos então seguir com o teorema.

Teorema 3 (Teorema Fundamental das Curvas). *Dados uma função contínua $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ e um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^2$, fixando $s_0 \in I$, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 tal que a curvatura de α é k , $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = v$.*

Demonstração. O resultado em questão é consequência do teorema da existência e unicidade de EDO, mas faremos aqui de maneira direta.

Dados $p = (x_0, y_0)$ e v unitário, temos primeiramente que $v = (\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0)$ para algum $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. Defina agora uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(u) du + \theta_0,$$

e uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen } \theta(t) dt.$$

Temos portanto que

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s)),$$

e ainda

$$\alpha'(s_0) = (\cos \theta(s_0), \text{sen } \theta(s_0)) = (\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0) = v.$$

A partir disso, então α é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\|\alpha'(s)\| = 1$, então $t(s) = \alpha'(s)$. Daí,

$$n(s) = (-y'(s), x(s)) = (-\text{sen } \theta(s), \cos \theta(s)).$$

Pelas Equações de Frenet, temos que

$$n'(s) = -k_\alpha(s)t(s).$$

Por outro lado,

$$n'(s) = (-\cos \theta(s)\theta'(s), -\text{sen } \theta(s)\theta'(s)) = -\theta'(s)t(s).$$

Então, temos que $k_\alpha(s) = \theta'(s) = k(s)$, portanto α tem curvatura k , como queríamos.

Provemos agora a unicidade dessa curva. Suponha que existam duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ e $\beta(s) = (u(s), v(s))$, satisfazendo as hipóteses. Defina as funções $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $f(s) = x'(s) - u'(s)$ e $g(s) = y'(s) - v'(s)$ então, utilizando as Equações de Frenet, note que

$$f'(s) = x''(s) - u''(s) = -k(s)y'(s) + k(s)v'(s) = -k(s)g(s),$$

$$g'(s) = y''(s) - v''(s) = k(s)x'(s) - k(s)u'(s) = k(s)f(s).$$

isto é, f e g satisfazem o sistema

$$\begin{cases} f'(s) = -k(s)g(s), \\ g'(s) = k(s)f(s). \end{cases}$$

A partir disso, temos que

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2)'(s) = f(s)f'(s) + g(s)g'(s) = 0.$$

Portanto, $(f^2 + g^2)$ é uma função constante, e como $\alpha'(s_0) = \beta'(s_0)$, então $(f^2 + g^2)(s_0) = 0$, logo a função $(f^2 + g^2)$ é nula para todo $s \in I$, isto é, $f(s) = g(s) = 0$. Assim, concluímos que

$$\alpha'(s) = \beta'(s), \forall s \in I.$$

Por fim, usando o fato de que $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, temos que $\alpha(s) = \beta(s)$, para todo $s \in I$. □

Corolário 1. *Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, se α e β tem a mesma curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, então existem uma translação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que*

$$\beta(s) = (T \circ R_\theta \circ \alpha)(s).$$

Demonstração. De fato, como $\alpha'(s)$ e $\beta'(s)$ são vetores unitários, fixando $s_0 \in I$, existe uma rotação R_θ que leva $\alpha'(s_0)$ a $\beta'(s_0)$, e ainda uma translação T que leva $\alpha(s_0)$ em $\beta(s_0)$. Daí então $(T \circ R_\theta \circ \alpha)$ tem as mesmas condições iniciais de β e a mesma curvatura, pois a curvatura é invariante por translações e rotações. Portanto, pela unicidade garantida pelo Teorema Fundamental das Curvas, $\beta(s) = (T \circ R_\theta \circ \alpha)(s)$. □

4.2.6 Curvas implícitas

Além das curvas parametrizadas ainda podemos ter curvas definidas implicitamente, onde não temos um resultado explícito para os pontos dessa curva, apenas uma relação entre suas componentes. Vimos anteriormente que o círculo centrado na origem e raio $r > 0$ pode ser descrito pela curva $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, por outro lado a equação $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, também descreve os pontos pertencentes a esse círculo. Vendo de outra maneira, a equação $F(x, y) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2,$$

descreve um círculo de raio r e centro $(0, 0)$. Podemos ver então as curvas implícitas como curvas de nível de uma função de duas variáveis no valor zero (ver Figura 10), onde dada uma curva de nível do tipo $g(x, y) = k$, podemos definir F como $F(x, y) = g(x, y) - k$, logo, a curva de nível ficaria

$$F(x, y) = 0.$$

Definição 13. *Uma curva implícita ζ é o conjunto de zeros de uma função $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, $\zeta = \{(x, y) \in U; F(x, y) = 0\}$, onde U é um conjunto aberto. Chamaremos ζ de curva associada à F .*

Observe que, nesse contexto, é fácil verificar se um ponto $p = (x_0, y_0)$ pertence ou não à ζ . Por outro lado, nem sempre é simples verificar se um ponto está ou não em uma curva paramétrica.

O teorema a seguir nos mostra uma generalização do que vimos anteriormente, que uma curva regular pode ser vista localmente como um gráfico.

Teorema 4. *Seja ζ uma curva implícita associada a uma função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , $k \geq 1$. Dado $p = (x_0, y_0) \in U$, se $\nabla F(p) \neq 0$, então ζ pode ser vista localmente como o gráfico de uma função C^k . Isto é, caso $F_y \neq 0$, existem uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}$ de x_0 e uma função $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , tal que $\zeta \cap V = \{(x, g(x)); x \in V\}$. E ainda*

$$g'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

No caso de apenas $F_x \neq 0$, $\zeta \cap V = \{(g(y), y); y \in V\}$, para V vizinhança de y_0 e $g'(y) = -\frac{F_y}{F_x}$.

Demonstração. Aplique o Teorema da Função Implícita (Ver Apêndice). □

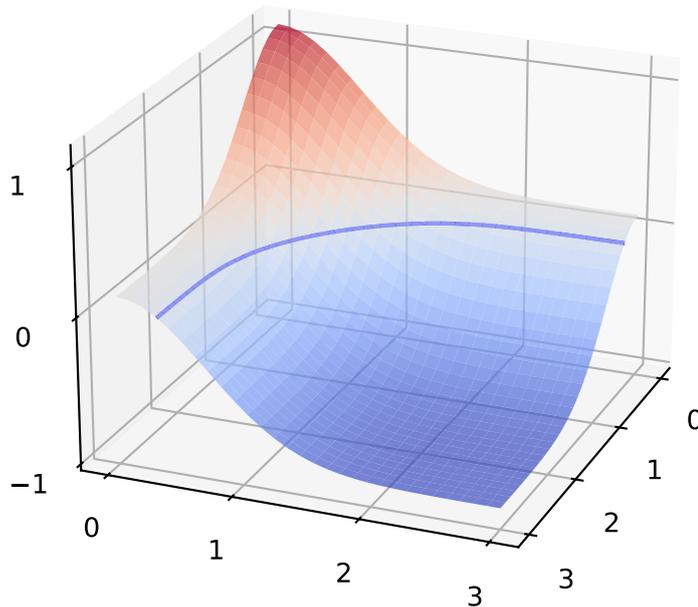


Figura 10: Curva gerada pelos zeros de uma função de duas variáveis.

Podemos agora usar nossas ferramentas para curvas parametrizadas para determinar características de curvas implícitas, como sua curvatura no ponto, vetor tangente e normal.

Proposição 11. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , com U aberto e ζ sua curva associada. Dado $p = (x_0, y_0) \in \zeta$, se $F_y > 0$, então²*

$$t(p) = \frac{(F_y(p), -F_x(p))}{\|\nabla F(p)\|},$$

$$n(p) = \frac{(F_x(p), F_y(p))}{\|\nabla F(p)\|},$$

$$k(p) = -\frac{F_{xx}(p)F_y(p)^2 - 2F_{xy}(p)F_x(p)F_y(p) + F_{yy}(p)F_x(p)^2}{\|\nabla F(p)\|^3}.$$

²Sendo necessário apenas $\nabla F \neq 0$, existindo resultado análogo para os outros casos.

Demonstração. Pelo teorema acima sabemos que existem uma vizinhança V de p e uma função $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde ζ pode ser vista como a curva $\beta = V \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta = (x, g(x))$, em V . Para calcular o vetor tangente então podemos usar a fórmula calculada anteriormente para curvas parametrizadas. Primeiramente, como $F_y > 0$, veja que

$$\|\beta'(x)\| = \sqrt{1 + (g'(x))^2} = \sqrt{\frac{(F_y)^2 + (F_x)^2}{(F_y)^2}} = \frac{\|\nabla F(x, g(x))\|}{F_y(x, g(x))}.$$

Utilizando este fato, então

$$t(x) = \frac{(1, g'(x))}{\|\beta'(x)\|} = \frac{F_y}{\|\nabla F\|} (1, g'(x)) = \frac{(F_y(x, g(x)), -F_x(x, g(x)))}{\|\nabla F(x, g(x))\|},$$

$$n(x) = \frac{(-g'(x), 1)}{\|\beta'(x)\|} = \frac{F_y}{\|\nabla F\|} (-g'(x), 1) = \frac{(F_x(x, g(x)), F_y(x, g(x)))}{\|\nabla F(x, g(x))\|}.$$

Para a curvatura, ocultando o ponto $(x, g(x))$ quando necessário e derivando novamente a função $g'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$, temos

$$g''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

Utilizando o fato de que $\beta'(x) = (1, g'(x))$ e $\beta''(x) = (0, g''(x))$, pela Proposição 9, temos

$$k(x) = \frac{x'y'' - x''y'}{\|\beta'(x)\|^3} = \frac{g''(x)}{\sqrt{1 + g'(x)^2}} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{\|\nabla F\|^3}.$$

Assim concluindo o que queríamos provar. □

Como exemplo podemos utilizar novamente o caso do círculo. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$, $r > 0$, temos então a curva associada $\zeta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$, isto é, pontos da forma $x^2 + y^2 = r^2$. Daí temos que $(0, 0) \notin \zeta$, e sabendo que $\nabla F(x, y) = (2x, 2y)$ só se anula no ponto $(0, 0)$, então todos os pontos da curva cumprem a hipótese e podemos calcular localmente o vetor tangente, normal e a curvatura da curva ζ para $F_y > 0$ (o semicírculo acima do eixo x).

Utilizando a proposição acima temos então que

$$t(x, y) = \frac{(2y, -2x)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{(y, -x)}{r},$$

$$n(x, y) = \frac{(2x, 2y)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{(x, y)}{r},$$

$$k(x, y) = -\frac{2(2y)^2 + 2(2x)^2}{(\sqrt{4x^2 + 4y^2})^3} = -\frac{2((2y)^2 + (2x)^2)}{(4x^2 + 4y^2)(2r)} = -\frac{1}{r}.$$

4.3 Tópicos Adicionais

Nesta seção serão apresentados tópicos adicionais que foram estudados, fazendo uma ponte entre Geometria Diferencial, Topologia e Álgebra.

4.3.1 Função Ângulo e Número de Rotação

Através da ideia do ângulo que uma curva faz com o eixo x a cada instante t , poderemos definir a ideia de número de rotação de uma curva, que intuitivamente conta o número de “voltas” que uma curva fechada faz em relação a um ponto. Juntamente com a ideia de deformação de curvas, poderemos mostrar propriedades do número de rotação, e através dele estudar algumas aplicações dessa teoria no Plano Complexo e na Teoria de Cauchy.

Retomando o que foi comentado anteriormente, queremos agora estudar o “ângulo de uma curva”. Relembre que utilizamos o fato de existir uma função ângulo para o vetor tangente de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, mais propriamente temos o resultado a seguir que nos garante isso.

Teorema 5. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^r ($r \geq 1$) com $\|\alpha(t)\| = 1$, então existe função $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r tal que*

$$\alpha(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)). \quad (3)$$

Se θ e φ são duas funções satisfazendo (3), então $\varphi(t) = \theta(t) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Escrevendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, como $\|\alpha(t)\| = 1$, temos que $\alpha(t)$ é ortogonal à $\alpha'(t)$, a partir disso podemos concluir que $\alpha'(t)$ é um múltiplo do vetor $(-y(t), x(t))$, de outro modo, existe $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = -\lambda(t)y(t) \quad \text{e} \quad y'(t) = \lambda(t)x(t).$$

Como $(-y(t), x(t))$ é um vetor unitário, temos ainda que

$$\alpha'(t) = \lambda(t)(-y(t), x(t)) \implies \lambda(t) = \langle \alpha'(t), (-y(t), x(t)) \rangle,$$

portanto, λ é de classe C^{r-1} . Para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(a) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, podemos definir $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , dada por

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_a^t \lambda(u) du.$$

Resta mostrar que a função em questão satisfaz o que desejamos. Como $\theta'(t) = \lambda(t)$, e utilizando o fato de $\alpha'(t) = \lambda(t)(-y(t), x(t))$, temos que

$$\frac{d}{dt}(x(t)\cos \theta(t) + y(t)\sin \theta(t)) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}(-x(t)\sin \theta(t) + y(t)\cos \theta(t)) = 0,$$

isto é, são constantes. Por outro lado, se $t = a$,

$$x(a)\cos \theta(a) + y(a)\sin \theta(a) = \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$$

e

$$-x(a)\sin \theta(a) + y(a)\cos \theta(a) = -\cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0.$$

Logo, por serem termos constantes, o mesmo é válido para todo $t \in [a, b]$. Resolvendo o sistema para $x(t)$ e $y(t)$

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = 0, \end{cases}$$

temos que

$$\alpha(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Por fim, sejam θ e φ duas funções satisfazendo (3), daí obtemos

$$\cos \theta(t) = \cos \varphi(t) \quad \text{e} \quad \sin \theta(t) = \sin \varphi(t),$$

o que ocorre se, e somente se, $\theta(t) - \varphi(t)$ é um múltiplo de 2π , $\forall t \in [a, b]$. \square

Dada uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ p.c.a., o vetor tangente $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz as hipóteses do teorema acima, e temos o resultado como queríamos, onde chamamos a função θ de função ângulo. Temos ainda um resultado de unicidade:

Corolário 2. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^r ($r \geq 1$) tal que $\|\alpha(t)\| = 1$. Dado θ_0 tal que $\alpha(a) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ existe única função θ de classe C^r satisfazendo (3) com $\theta(a) = \theta_0$.*

Demonstração. Suponha que existam θ e φ satisfazendo (3) e $\theta(a) = \varphi(a) = \theta_0$, temos que

$$\varphi(t) - \theta(t) = 2k\pi \implies \frac{\varphi(t) - \theta(t)}{2\pi} = k,$$

$k \in \mathbb{Z}$. De outro modo, uma função contínua que assume valores em \mathbb{Z} e, portanto, constante. Temos então que a diferença de φ e θ é constante e como $\varphi(a) - \theta(a) = 0$, então $\varphi(t) = \theta(t)$ para todo t em $[a, b]$. \square

Note ainda que temos uma outra interessante aplicação desse resultado. Dada uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 (sem mais restrições) e um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ que não está no traço da curva α , podemos definir uma curva auxiliar $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(t) = \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}.$$

A partir dessa construção, a curva β cumpre as hipóteses do teorema acima e portanto temos o resultado:

Corolário 3. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^r ($r \geq 1$) e p um ponto fora do traço de α . Então existe função $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r satisfazendo*

$$\alpha(t) = p + \|\alpha(t) - p\|(\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Dois funções dessa forma diferem por um múltiplo de 2π . Dado θ_0 com

$$\alpha(a) = p + \|\alpha(a) - p\|(\cos \theta_0, \sin \theta_0),$$

a função θ é única e $\theta(a) = \theta_0$.

Em razão desse resultado podemos fazer a definição a seguir, que nos dará uma visão alternativa da curva, dependendo em ângulo e norma, como em coordenadas polares.

Definição 14. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 e p um ponto fora do traço de α . Uma função $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\alpha(t) = p + \|\alpha(t) - p\|(\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

é chamada de função ângulo de α em relação a p .

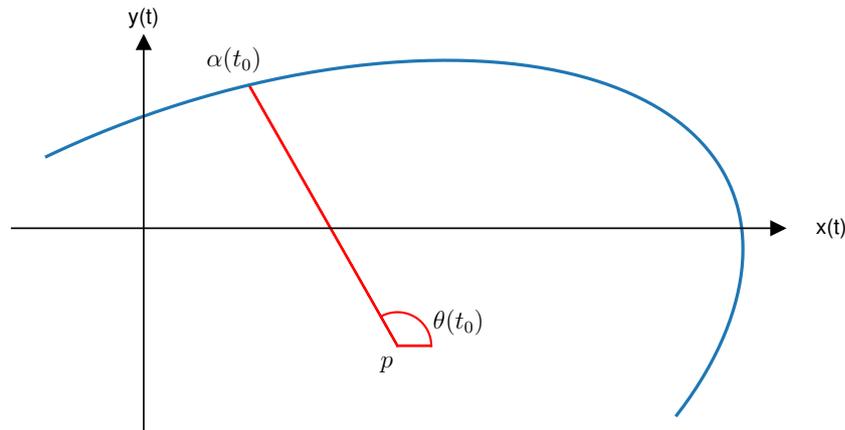


Figura 11: Função ângulo de α em relação a p .

Veja agora que, se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1 fechada, p um ponto fora de seu traço e θ uma função ângulo em relação a p , como $\alpha(a) = \alpha(b)$, evidentemente $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. A partir disso, nesse mesmo contexto, definimos:

Definição 15. O número de rotação de α em relação a p é dado por

$$W(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}.$$

Evidentemente o número de rotação não depende da função ângulo escolhida. De fato, se φ é outra função ângulo temos que $\varphi(t) = \theta(t) + 2k\pi$, logo,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (\theta(b) + 2k\pi) - (\theta(a) + 2k\pi) = \theta(b) - \theta(a).$$

Intuitivamente o número de rotação conta quantas “voltas líquidas” (isto é, a diferença entre voltas no sentido anti-horário e no sentido horário) a curva dá em volta do ponto p , já que estamos calculando a diferença de ângulo no início e no final da curva, que incrementa por um valor de 2π ao dar uma volta. Importante frisar que essa teoria de ângulo e número de rotação também é válida para curvas C^0 , mas foge dos objetivos deste texto.

Uma fórmula integral para o número de rotação pode ser encontrada com um procedimento análogo ao que foi feito anteriormente para relacionar a função ângulo do vetor tangente e a curvatura de uma curva. Relembre que anteriormente definimos o vetor normal $n(s)$ de uma curva p.c.a. como o vetor $t(s)$ rotacionado 90 graus no sentido anti-horário por $n(s) = (-y(s), x(s))$, obtendo então

$n(s) \perp t(s)$. Por esse motivo, dado um vetor $v = (x, y)$, utilizemos a notação $v^\perp = (-y, x)$. Com isso em mente, vimos também que se θ é o ângulo do vetor tangente de uma curva α , p.c.a., então

$$\theta'(s) = k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle t'(s), t(s)^\perp \rangle.$$

De modo análogo, para um caso mais geral, temos:

Lema 2. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 tal que $\|\alpha(t)\| = 1$. Se $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função ângulo de α , então*

$$\theta'(t) = \langle \alpha'(t), \alpha(t)^\perp \rangle.$$

Demonstração. Tomando função ângulo θ , tal que $\alpha(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, temos que

$$\alpha'(t) = \theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) = \theta'(t) \alpha(t)^\perp.$$

Tomando o produto interno com $\alpha(t)^\perp$ temos o esperado. \square

Proposição 12. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 e p um ponto não pertencente ao traço de α . Então o número de rotação de α em torno de p é dado por*

$$W(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle \alpha'(t), (\alpha(t) - p)^\perp \rangle}{\|\alpha(t) - p\|^2} dt.$$

Demonstração. Definindo $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\beta(t) = \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|},$$

temos que β cumpre as hipóteses do lema, portanto,

$$\theta'(t) = \langle \beta'(t), \beta(t)^\perp \rangle = \frac{\langle \alpha'(t), (\alpha(t) - p)^\perp \rangle}{\|\alpha(t) - p\|^2}.$$

Integrando, temos então uma fórmula para uma função ângulo de α em relação a p , dada pela equação

$$\theta(t) - \theta(a) = \int_a^t \frac{\langle \alpha'(u), (\alpha(u) - p)^\perp \rangle}{\|\alpha(u) - p\|^2} du.$$

Por fim, segue nosso resultado

$$W(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle \alpha'(t), (\alpha(t) - p)^\perp \rangle}{\|\alpha(t) - p\|^2} dt.$$

\square

Um ponto interessante é que, se tomarmos p como a origem (e a origem não estiver no traço da curva), temos uma simplificação do resultado encontrado, e então o número de rotação é dado por

$$W(\alpha, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt.$$

É intuitivo que uma translação da curva não mude o número de rotação, desde que a translação também seja aplicada ao ponto em questão. Então calcular o número de rotação de uma curva α em relação a um ponto p é o mesmo que calcular o número de rotação da curva dada por $\alpha(t) - p$ em relação a origem, utilizando a fórmula acima.

Através da fórmula integral encontrada, e mais alguns conceitos básicos, é possível ainda derivar algumas propriedades envolvendo o número de rotação. Tais propriedades são de grande importância nessa teoria, mas por não terem uso direto no objetivo deste texto não as provaremos aqui nem formalizaremos seus resultados, por outro lado, citaremos intuitivamente suas ideias e onde suas demonstrações podem ser encontradas. Elas nos dizem que

1. $W(\alpha, p)$ é invariante por reparametrizações de α ;
2. $W(\alpha, p)$ não depende do ponto inicial e final de α ;
3. Se η é uma curva que percorre α e depois β (ou vice-versa), então $W(\eta, p) = W(\alpha, p) + W(\beta, p)$.

Tais fatos são geometricamente intuitivos, e são válidos também para curvas contínuas, um estudo mais aprofundado para entender tais propriedades e suas demonstrações pode ser feito em [2].

4.3.2 Homotopias

Nosso objetivo vem, de fato, da relação do número de rotação com um conceito de deformação de uma curva em outra. Esse é o conceito de homotopia que agora formalizaremos.

Definição 16. *Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ curvas fechadas e contínuas. Uma homotopia entre α e β é uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo*

$$H(0, t) = \alpha(t),$$

$$H(1, t) = \beta(t),$$

$$H(s, a) = H(s, b).$$

Neste contexto, se a imagem de H está contida em U , dizemos que α e β são homotópicas ($\alpha \sim \beta$) em U . Em particular, se α é homotópica a uma curva constante diremos que α é homotópica a zero ($\alpha \sim 0$).

Note que, quando óbvio, ocultaremos o conjunto ao qual estamos falando da homotopia, mas ele é sempre crucial, visto que quaisquer duas curvas são homotópicas em relação a \mathbb{R}^2 , o que não é necessariamente válido para algum outro conjunto arbitrário.

Nesse contexto de homotopia, intuitivamente, a variação na variável t caminha pela curva, enquanto a variação em s varia a deformação da curva. Com isso em mente, a continuidade de curvas volta a aparecer no nosso estudo, já que uma forma alternativa de ver uma homotopia é como uma família de curvas fechadas e contínuas a um parâmetro, isto é, ao definir $H_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $H_s(t) = H(s, t)$ para s fixado, temos que H_s é uma curva fechada e contínua para

todo $s \in [0, 1]$. Com essa notação, se H é uma homotopia entre as curvas α e β , então $H_0 = \alpha$ e $H_1 = \beta$.

Para fixar a ideia, tomamos o exemplo da homotopia $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(s, t) = (1 - s)(\cos t, \sin t),$$

essa é uma homotopia entre um círculo de raio 1 e uma curva constante $\beta(t) = 0$, nesse contexto são duas curvas homotópicas em \mathbb{R}^2 .

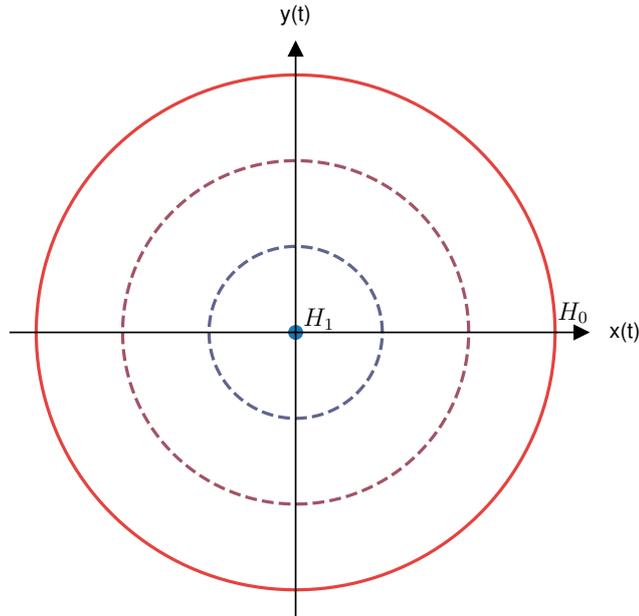


Figura 12: Homotopia H.

Um outro exemplo pode ser dado pela homotopia $G : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$G(s, t) = ((1 + s) \cos t, \sin t),$$

neste caso, G é uma homotopia entre um círculo e uma elipse da forma $(2 \cos t, \sin t)$.

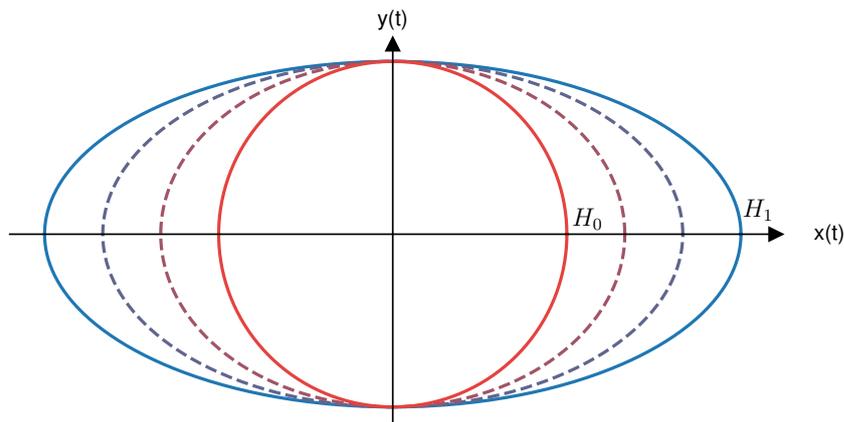


Figura 13: Homotopia G.

Dadas duas curvas fechadas de classe C^1 homotópicas, se tomarmos³ ho-

³Assumiremos que se duas curvas de classe C^1 são homotópicas, então existe homotopia entre elas também de classe C^1 .

motopia $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 entre essas duas curvas, temos que cada curva fechada H_s também será de classe C^1 . Se p é um ponto de \mathbb{R}^2 que não está contido no traço de H_s , para todo $s \in [0, 1]$, podemos ainda, utilizando a Proposição 12, encontrar o número de rotação de cada curva H_s em relação ao ponto p . Podemos então definir uma aplicação $\mathcal{W} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ associada à homotopia H , que a cada $s \in [0, 1]$ associa o número de rotação da curva H_s em relação ao ponto p , isto é, $\mathcal{W}(s) = W(H_s, p)$. Nosso objetivo é mostrar que essa é uma função contínua, e daí, como assume valores em \mathbb{Z} , constante.

Proposição 13. *Sejam $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ homotopia entre curvas de classe C^1 e p ponto que não está contido no traço de H_s , para todo $s \in [0, 1]$. Então \mathcal{W} é função constante para todo $s \in [0, 1]$.*

Demonstração. Tome H em questão sendo de classe C^1 . Veja agora que para cada s temos uma fórmula integral para o número de rotação da curva H_s em relação ao ponto p , dada por

$$\mathcal{W}(s) = W(H_s, p) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle (H(s, t) - p)^\perp, \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \rangle}{\|H(s, t) - p\|^2} dt.$$

Se escrevermos

$$F(s, t) = \frac{\langle (H(s, t) - p)^\perp, \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \rangle}{\|H(s, t) - p\|^2},$$

temos que $\mathcal{W}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b F(s, t) dt$. Como H é de classe C^1 , $\frac{\partial H}{\partial t}$ é de classe C^0 , e então F é uma função contínua, daí, por estar definida em um compacto, uniformemente contínua. De outro modo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $s, r \in [0, 1]$ com $|s - r| < \delta$ e $t, u \in [a, b]$ com $|t - u| < \delta$ implicam

$$|F(s, t) - F(r, u)| < \frac{2\pi \epsilon}{b - a}.$$

Tome agora uma partição do intervalo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b$, de tal modo que $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Então, dados $s, r \in [0, 1]$ com $|s - r| < \delta$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}(s) - \mathcal{W}(r)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_a^b (F(s, t) - F(r, t)) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b |F(s, t) - F(r, t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |F(s, t) - F(r, t)| dt < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{W} é (uniformemente) contínua e por assumir valores em \mathbb{Z} é, então, constante. \square

Um resultado imediato da proposição acima nos diz, de certa forma, que homotopia implica mesmo número de rotação.

Proposição 14. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $p \notin U$. Se α e β são curvas fechadas de classe C^1 e homotópicas em U , então*

$$W(\alpha, p) = W(\beta, p).$$

Em particular, se α é homotópica a zero, então $W(\alpha, p) = 0$.

Demonstração. Seja H homotopia entre α e β , temos que $W(\alpha, p) = W(H_0, p)$ e $W(\beta, p) = W(H_1, p)$, como $W(H_s, p)$ é constante para todo s , então $W(\alpha, p) = W(\beta, p)$. \square

Importante notar que a volta desse teorema não é válido, mesmo pedindo que o número de rotação das curvas fechadas α e β em U sejam o mesmo para todos os pontos fora de U , ainda não podemos concluir que α e β são homotópicas. Um contra exemplo (visual) se dá pela curva de Pochhammer.

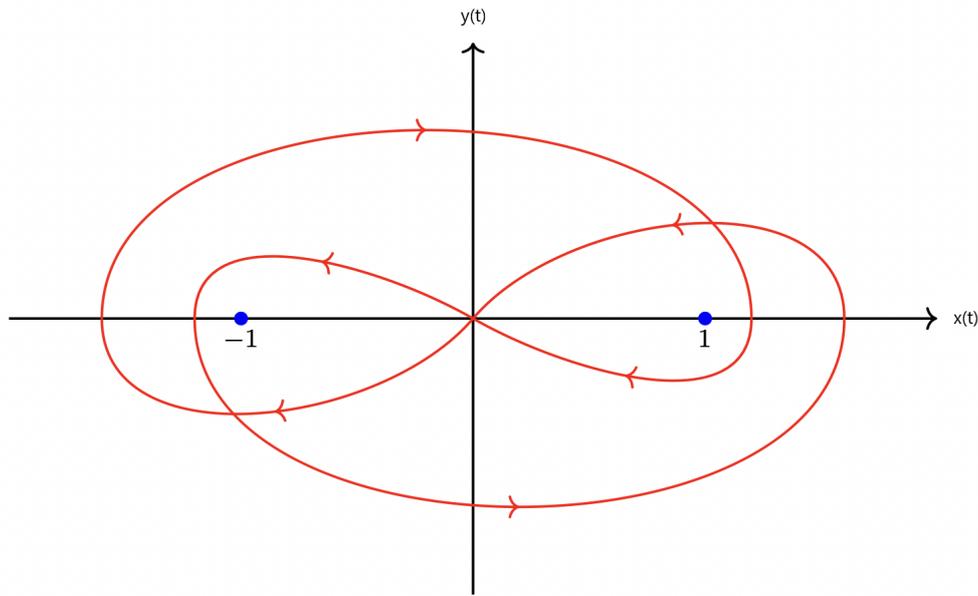


Figura 14: Imagem editada de <https://j-m-moore.github.io/pochhammer.png>.

Denotando α como a curva em questão, tome $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$, visualmente pode-se notar que $W(\alpha, -1) = W(\alpha, 1) = 0$, assim como o número de rotação de uma curva constante β em U . Como α não é homotópica a zero (também visual), então α e β tem mesmo número de rotação em relação a pontos fora de U , mas não são homotópicas.

Por outro lado, em um caso particular, teremos a equivalência. Para entender isso estudemos agora os casos onde o complementar do nosso conjunto consiste em um ponto, que pode ser chamado também de plano perfurado. Alguns resultados já saem diretamente da Proposição 14.

Proposição 15. *Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ duas curvas fechadas de classe C^1 , tais que, para todo $t \in [a, b]$, o ponto p não pertence ao segmento de reta que liga $\alpha(t)$ a $\beta(t)$. Então $W(\alpha, p) = W(\beta, p)$.*

Demonstração. O resultado é intuitivo, visto que o ponto p não pertence à reta que liga $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, podemos construir homotopia entre essas curvas, e, portanto, elas têm o mesmo número de rotação. A função explícita para a homotopia $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ em questão é dada por

$$H(s, t) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t).$$

O que conclui o resultado. \square

Corolário 4. Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ duas curvas fechadas de classe C^1 , tais que, para todo $t \in [a, b]$

$$\|\alpha(t) - \beta(t)\| < \|\alpha(t) - p\|.$$

Então $W(\alpha, p) = W(\beta, p)$.

Demonstração. Novamente o resultado é intuitivo, se a distância de $\alpha(t)$ a p é maior que a distância a $\beta(t)$, então p não pertence ao segmento de reta que liga $\alpha(t)$ a $\beta(t)$. De fato, se p pertencesse ao segmento de reta que liga $\alpha(t)$ a $\beta(t)$, teríamos $\|\alpha(t) - \beta(t)\| \geq \|\alpha(t) - p\|$, uma contradição. \square

Por fim, nosso teorema de equivalência entre homotopia e número de rotação no plano perfurado.

Teorema 6. Duas curvas fechadas $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ de classe C^1 são homotópicas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, se, e somente se,

$$W(\alpha, p) = W(\beta, p).$$

Em particular, $\alpha \sim 0$ se, e somente se, $W(\alpha, p) = 0$.

Demonstração. A ida é apenas um caso particular do que já foi provado. Prove-mos então a volta.

Sejam $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ uma curva tal que, para algum $n \in \mathbb{Z}$, $W(\varphi, p) = n$ e θ função ângulo de φ e relação a p . Defina agora também $\gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ por

$$\gamma_n(t) = p + \left(\cos \left(\frac{2n\pi t}{b-a} \right), \text{sen} \left(\frac{2n\pi t}{b-a} \right) \right).$$

Temos trivialmente que $W(\gamma_n, p) = n$. Construamos agora homotopia entre φ e γ_n através da aplicação $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$H(s, t) = p + (\|\varphi(t) - p\|(1-s) + s) \cdot (\cos f(s, t), \text{sen} f(s, t)),$$

onde $f(s, t) = (1-s)\theta(t) + s\frac{2n\pi t}{b-a}$. A aplicação H é contínua e temos obviamente que $H(0, t) = \varphi(t)$, $H(1, t) = \gamma_n(t)$, $H(s, a) = H(s, b)$ e p não está na imagem de H . Portanto, concluímos que se uma curva tem número de rotação n , então ela é homotópica à γ_n (o círculo que “gira” em torno do ponto p n vezes). Como α e β têm o mesmo número de rotação, são homotópicas a uma mesma curva, e então são, por fim, homotópicas. \square

4.3.3 Aplicações no Plano Complexo

Estudando o plano mais a fundo é possível ainda o equipar com uma operação de multiplicação, onde dados dois elementos $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, sua multiplicação é dada por

$$z \cdot w = (z_1w_1 - z_2w_2, z_1w_2 + z_2w_1).$$

Nesse caso, denominamos o elemento $(0, 1)$ como a unidade imaginária i , a partir disso temos o resultado mais elementar a respeito dos números complexos:

$$i^2 = -1.$$

Agora, se definirmos $1 = (1, 0)$, temos que $\{1, i\}$ forma uma base ortonormal de \mathbb{C} e podemos representar qualquer elemento desse espaço por $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Equipado dessa operação o plano se torna um corpo e novas possibilidades surgem através dessa estrutura, seus elementos são chamados de números complexos e utilizamos a notação \mathbb{C} quando nos referindo ao plano com a operação de multiplicação.

Se definirmos a operação exponencial, agora para números complexos, por

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \quad \text{onde } z = x + iy,$$

temos então a fórmula de Euler para $z = it$

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t.$$

Relembrando que \mathbb{C} ainda possui as propriedades de \mathbb{R}^2 como espaço Euclidiano, dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, é possível encontrar a norma $|z|$ e ainda expressar z em função de norma e ângulo, isto é, $z = (|z|\cos \theta, |z|\operatorname{sen} \theta) = |z|\cos \theta + i|z|\operatorname{sen} \theta$. Se chamarmos $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, utilizando a fórmula de Euler temos que qualquer número complexo pode ser reescrito no que chamamos de forma polar:

$$z = re^{i\theta}.$$

Um círculo de centro 0 e raio r pode então ser descrito facilmente por

$$z(t) = re^{it}.$$

Através da forma polar é fácil mostrar que a multiplicação complexa, de certa forma, “multiplica norma e soma ângulos”, isto é, dados $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = |w|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)) = |z||w|e^{i(\theta + \varphi)}.$$

É possível, após isso, definir derivadas de funções complexas por limites, assim como é feito para funções reais, e ainda definir integrais de caminhos no plano complexo. A teoria diferencial e integral no plano complexo diverge fortemente do caso real, por ser bem mais restrita. Aplicações dessa teoria surgem aos montes, um dos principais resultados que pode ser provado através do estudo de integrais complexas é o Teorema Fundamental da Álgebra, aqui utilizaremos um outro caminho, e provaremos através do número de rotação estudado anteriormente, identificando o plano \mathbb{R}^2 como \mathbb{C} .

Primeiro provaremos um importante resultado, que é válido no plano \mathbb{R}^2 , que nos mostra, de certa forma, um “Teorema do Valor Intermediário” para discos. Para isso utilizemos a notação D_r para o disco centrado em 0 e de raio r e ∂D_r sua fronteira.

Proposição 16. *Sejam $F : D_r \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ função de classe C^1 e $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrização de ∂D_r , dada por $\alpha(t) = (r \cos(2\pi t), r \operatorname{sen}(2\pi t))$. Se 0 não pertence ao traço da curva $\alpha_F = (F \circ \alpha)$ e $W(\alpha_F, 0) \neq 0$, então existe $p \in D_r$ tal que $F(p) = 0$.*

Demonstração. Suponha por contradição que $0 \notin F(D_r)$. Defina então $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$H(s, t) = F(s \alpha(t)).$$

É óbvio que H é contínua, $H(0, t) = F(0)$, $H(1, t) = \alpha_F(t)$ e $H(s, 0) = H(s, 1)$, temos ainda que 0 não está na imagem de H , pois a imagem de H está contida ou em $F(D_r)$ ou na imagem de α_F , e 0 não está em nenhum desses conjuntos. Temos então uma homotopia entre α_F e uma curva constante em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Portanto, $W(\alpha_F, 0) = 0$, uma contradição. \square

Teorema 7 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio de grau $n \geq 1$ em \mathbb{C} admite raiz complexa.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio de grau n dado por

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 1.$$

Tome $r > 1 + \sum_{i=1}^n |a_i|$ e consideremos a restrição de f ao fecho do disco D_r . Afirmamos que f admite raiz nesse conjunto. Para demonstrar, defina uma parametrização da fronteira de D_r pela curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\alpha(t) = r e^{2\pi i t},$$

temos ainda, por consequência, uma outra curva $\alpha_f = (f \circ \alpha)$ na imagem de f . Se 0 pertence ao traço de α_f , já temos trivialmente nosso resultado. Por outro lado, se 0 não pertence ao traço de α_f , precisamos que $W(\alpha_f, 0) \neq 0$, assim, pela Proposição acima, $0 \in f(D_r)$. Defina agora função auxiliar $\zeta_n : D_r \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\zeta_n(z) = z^n$, pelas propriedades da multiplicação complexa, $\zeta_n(r e^{it}) = r^n e^{nit}$. Se definirmos $\alpha^n = (\zeta_n \circ \alpha)$, então $\alpha^n(t) = r^n e^{2\pi n i t}$. Logo,

$$W(\alpha^n, 0) = n.$$

Considerando $z(t) = r e^{2\pi i t}$, para todo $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} |\alpha_f(t) - \alpha^n(t)| &= |f(r e^{2\pi i t}) - \zeta_n(r e^{2\pi i t})| = |z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n - z^n| \\ &\leq |a_1| |z^{n-1}| + \dots + |a_{n-1}| |z| + |a_n|, \end{aligned}$$

pelas propriedades de números complexos, e como $|z| = r$, temos que $|z^n| = |z|^n = r^n$, e daí, já que $r > 1$, obtemos

$$|\alpha_f(t) - \alpha^n(t)| \leq |a_1| r^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| r + |a_n| \leq r^{n-1} \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Por último, como

$$r^{n-1} \sum_{i=1}^n |a_i| < r^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n |a_i| + 1 \right) < r^n,$$

temos então que

$$|\alpha_f(t) - \alpha^n(t)| < r^n = |\alpha^n(t)|.$$

Portanto, pelo Corolário 4, temos que

$$W(\alpha_f, 0) = W(\alpha^n, 0) = n > 0,$$

como queríamos. \square

Avançando um pouco no estudo do cálculo diferencial e integral no plano complexo, tendo um conhecimento inicial das definições, é possível ainda encontrar uma fórmula explícita para o número de rotação de uma curva C^1 em termos de uma integral complexa.

Relembramos primeiramente que a integral complexa é dada a partir de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ de classe C^1 e uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde a integral é tomada ao longo de γ por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

e onde a integral de uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + iv(t)$, é dada por

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Tendo isso em mente, temos o resultado:

Teorema 8. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curva fechada de classe C^1 . Se z_0 não pertence ao traço de γ , então*

$$W(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Demonstração. Seja θ função ângulo de γ com relação à z_0 . Podemos então escrever γ como

$$\gamma(t) = z_0 + r(t) e^{i\theta(t)},$$

onde $r(t) = |\alpha(t) - z_0|$. Pela definição de integral complexa, temos então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{r(t) e^{i\theta(t)}} (r'(t) e^{i\theta(t)} + i\theta'(t) r(t) e^{i\theta(t)}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b [(\log |\alpha(t) - z_0|)' + i\theta'(t)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\theta(b) - \theta(a)) i = W(\gamma, z_0). \end{aligned}$$

□

Esse é um importante conceito no estudo de integrais complexas, ou como é comumente chamado, Teoria de Cauchy, na verdade, os teoremas globais envolvendo integrais complexas utilizam fortemente os conceitos de número de rotação e homotopias aqui estudados.

Como uma última aplicação, temos um importante resultado da Análise Complexa, que mostra uma outra conexão entre número de rotação e homotopias no plano. Para isso precisamos primeiramente introduzir um novo conceito, frequentemente utilizado em estudos em topologia, que intuitivamente caracteriza a idéia de buracos.

Definição 17. *Diremos que um subconjunto $U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo se toda curva fechada de classe C^1 em U é homotópica a zero.*

Esse é um conceito que pode ser generalizado para espaços mais abstratos que o plano, mas trataremos apenas desse último caso. O resultado que nos interessa relaciona esse conceito com o número de rotação de curvas nesse conjunto em relação a elementos fora do conjunto.

Teorema 9. *Um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexo se, e somente se, para toda curva fechada γ de classe C^1 em U e todo z fora de U*

$$W(\gamma, z) = 0.$$

Demonstração. A ida é simples. Como toda curva γ em U é homotópica a zero, então, pela Proposição 14, $W(\gamma, z) = 0$, para todo $z \notin U$. Por outro lado, a volta depende de resultados avançados na Teoria de Cauchy e não será provada aqui. Essa teoria e a demonstração da volta podem ser encontradas em [7] ou [8]. \square

O resultado por si só é intuitivo e uma interessante descrição de “buraco”, visto que, se um subconjunto U possui um buraco, é esperado que existam curvas em U que “girem” em torno de pontos naquele buraco, que são elementos fora de U . Esta é inclusive uma comum definição de conjuntos simplesmente conexos no plano, utilizada em alguns livros em Análise Complexa.

5 Conclusões

Através do estudo em questão foi possível fazer uma introdução sobre as propriedades geométricas das curvas planas, tendo a curvatura como uma invariante sob rotações e translações, uma propriedade intrínseca das curvas. Tudo isso levando à conclusão do Teorema Fundamental das Curvas, através das Equações de Frenet discutidas no texto, que correlaciona as derivadas dos vetores tangente e normal à curva através de um sistema de Equações Diferenciais. Como consequência disso tivemos a identificação de curvas dado apenas uma função curvatura e condições iniciais, sendo um importante resultado dessa teoria.

Pela característica local dos resultados encontrados, pudemos ainda generalizar o estudo para curvas implicitamente definidas, derivando mais alguns importantes resultados.

Como último estudo, nos aprofundamos no número de rotação de curvas fechadas, uma outra propriedade invariante, nesse caso em relação à homotopias. A partir disso, utilizando essa teoria, demonstramos o Teorema Fundamental da Álgebra, além de algumas aplicações no Plano Complexo.

Apesar de certa parte do conteúdo ser visto em um curso introdutório em Geometria Diferencial, pudemos nos aprofundar mais diretamente nas curvas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} , demonstrando resultados geralmente não vistos na ementa de um curso na área.

6 Apêndice

Teorema 10 (Teorema da Função Inversa). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 1$), $U \subset \mathbb{R}$ aberto. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) \neq 0$, então existe vizinhança $V \subset U$ de a tal que f restrita a V é invertível e possui inversa f^{-1} de classe C^k , e ainda*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f^{-1}(f(x))}.$$

Demonstração. Demonstração pode ser vista em [4]. □

Teorema 11 (Teorema da Função Implícita). *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k ($k \geq 1$), U aberto, e $p = (x_0, y_0) \in U$. Se $F(p) = c$, $c \in \mathbb{R}$ e $F_y(p) \neq 0$, então existem vizinhanças $V \subset \mathbb{R}$ de x_0 e $W \subset \mathbb{R}$ de y_0 e uma função $g : V \rightarrow W$ tal que $g(x_0) = y_0$ e $F(x, g(x)) = c$, $\forall x \in V$. A função g em questão também é de classe C^k e*

$$g'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Demonstração. Veja que, assumindo a existência da função $g(x)$ diferenciável, podemos derivar de ambos os lados a equação $F(x, g(x)) = c$, e daí

$$F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))g'(x) = 0,$$

e como $F_y \neq 0$, então

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}.$$

Para resultado geral ver [4]. □

Veja que isso também é válido no caso onde, ao invés de F_y , $F_x \neq 0$, e neste caso $g(y_0) = x_0$, $F(g(y), y) = 0$, para todo ponto em alguma vizinhança de y_0 e $g'(y) = -\frac{F_y}{F_x}$.

7 Perspectivas de Futuros Trabalhos

Através de um estudo introdutório na Geometria Diferencial, pudemos entender mais propriamente as curvas em \mathbb{R}^2 . Boa parte dos conceitos aqui apresentados podem ser generalizados para o espaço \mathbb{R}^3 , onde ainda podemos estudar conceitos mais gerais como o de superfícies, objetos construídos a partir de vizinhanças parametrizadas, um procedimento parecido com o que aqui foi feito para curvas.

Em um contexto mais geral de superfícies o conceito de curvatura pode ser generalizado, podemos então fazer conexões entre Geometria Diferencial e Topologia (como também foi feito aqui para curvas) através do Teorema de Gauss-Bonnet, onde geralmente os conceitos aqui estudados de número de rotação e ângulo de vetor tangente podem ser utilizados. A conexão feita pelo Teorema de Gauss-Bonnet traz uma relação entre propriedades topológicas da superfície com a “curvatura total” que a superfície deve ter, um número encontrado ao integrar a curvatura por toda a superfície, e é um ótimo tema de estudo para futuros trabalhos.

A área da Geometria Diferencial é vasta, avançando nos estudos ainda existem tópicos interessantes a serem estudados, como geodésicas, completude de superfícies, vistas como espaço métrico, e até variedades, generalizando o conceito de superfícies para espaços n -dimensionais. Havendo diversos caminhos a ser seguidos.

8 Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy; NETO, Gregório Silva. Geometria Diferencial das Curvas no \mathbb{R}^2 . Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.
- [2] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy; NETO, Gregório Silva. Differential Geometry of Plane Curves. American Mathematical Society, 2022.
- [3] BIEZUNER, Rodney Josué. Notas de aula geometria diferencial, 2019.
- [4] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise, Vol 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [5] CALLIOLI, Carlos; DOMINGUES, Hygino; COSTA, Roberto. Álgebra Linear e Aplicações. Atual Paradidático, 2009.
- [6] FERNANDES, Cecília; BERNARDES, Nilson. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [7] ULLRICH, David. Complex Made Simple. American Mathematical Society, 2008.
- [8] CONWAY, John B. Functions of One Complex Variable I. Springer, 2000.
- [9] ANDRADE, Maria; LEWINER, Thomas. Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução às Geometrias Euclidiana e Afim. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.
- [10] HOLMÉR, Freya. The Beauty of Bézier Curves. Youtube, 19 de agosto de 2021. 24min25s. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw>>. Acesso em: 30 de janeiro de 2024.

9 Outras Atividades

1. Tópicos extras estudados (Homotopia, Número de Rotação, Teorema Fundamental da Álgebra, Análise Complexa).
2. Participação nas palestras “Regularidade Eventual de Equações Diferenciais Parciais”, “Métricas críticas do funcional volume com restrições no tensor Weyl” e “Um (breve) passeio pela geometria de superfícies singulares” na XIII Escola de Verão de Matemática da UFS.
3. Aperfeiçoamento do desenvolvimento de ferramentas para visualização matemática, utilizando o Python e o Matplotlib.
4. Aperfeiçoamento do LaTeX.