UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REGIME NÃO RELATIVÍSTICO DO ESPALHAMENTO COMPTON NÃO LINEAR

Bruno Francisco Dias Aquino

Orientador: Prof. Dr. Stoian Ivanov Zlatev

São Cristóvão, SE
Abril de 2025

Bruno Francisco Dias Aquino

REGIME NÃO RELATIVÍSTICO DO ESPALHAMENTO COMPTON NÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Stoian Ivanov Zlatev

São Cristóvão, SE

Abril de 2025

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais pelo investimento e confiança em mim nesses últimos 23 anos. Ao meu irmão, por um suporte incomparável, sem o qual eu não estaria aqui, e à minha irmã, por sempre lembrar de mim. Ao Quito, dizem que um amigo assim só surge a cada 30 anos, sem ele, este trabalho seria impossível, foram madrugadas a fio de ódio mútuo, acho que fizemos um trabalho bacana. Ao professor Stoian, uma das mentes mais brilhantes que já conheci, por sua excelente orientação e por viabilizar este trabalho. Aos demais professores do Departamento de Física e Matemática, que me capacitaram com todos os fundamentos necessários para a realização deste trabalho e alguns com ótimos conselhos de vida. Aos incríveis Polar Kazz, Sofia Pinho, William Alves, Murilo Maia, Gabriel Schardong, Késia Farias e Carla Cecilia, pois transferi um pouco da minha loucura para vocês e sou grato por terem aguentado. Por fim, agradeço à UFS, que moldou quem sou hoje. Foram muitos almoços e jantas no resun e, nesses quatro anos, conheci muitas pessoas especiais. Aos amigos não nomeados, que me aturaram, me divertiram e me irritaram, meu muito obrigado.

"Quem rodou a cidade triunfou."

— Henrique Araujo

Resumo

Neste trabalho, analisamos detalhadamente o espalhamento Compton não linear no regime não relativístico da partícula incidente e em intensidades moderadas, a partir de soluções analíticas para a partícula escalar com carga do elétron na presença de um campo externo envelopado por um pulso finito. Diferentemente de abordagens anteriores, que tratam o problema de maneira relativística utilizando soluções de Volkov, empregamos a teoria de perturbação em ordens menores para obter uma redução satisfatória das expressões envolvidas, baseados em uma interpretação clara do regime de validade do sistema. Analisamos, ainda, a eficiência de diferentes perfis de pulso na dinâmica do espalhamento introduzindo um novo perfil, não encontrado na literatura, denominado por nós de pulso suave, o qual permite uma modelagem mais realista dos pulsos. Aplicamos o formalismo desenvolvido a teste, obtendo uma expressão para a densidade de probabilidade de emissão por partícula e analisamos cuidadosamente a influência dos parâmetros que variam o regime.

Palavras-chave: Espalhamento não Linear, Regime não Relativístico, Pulso de Laser.

Abstract

In this work, we thoroughly analyze nonlinear Compton scattering in the non-relativistic regime of the incident particle and at moderate intensities, based on analytical solutions for the scalar particle with the electron charge in the presence of an external field enveloped by a finite pulse. Unlike previous approaches, which address the problem in a relativistic manner using Volkov solutions, we employ perturbation theory at lower orders to achieve a satisfactory reduction of the involved expressions, based on a clear interpretation of the system's validity regime. We also analyze the efficiency of different pulse profiles in the scattering dynamics, introducing a new profile, not found in the literature, which we call the smooth pulse, allowing for a more realistic modeling of pulses. We apply the developed formalism to tests, obtaining an expression for the probability density of emission per solid angle per particle and carefully analyzing the influence of parameters that vary the regime.

Keywords: Nonlinear Scattering, Non-relativistic Regime, Laser Pulse.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

A história do espalhamento moderno começa com Joseph J. Thomson (Thomson, 1903). Thomson derivou a expressão para a potência irradiada por uma carga acelerada sob a influência de um campo eletromagnético oscilante, utilizando as equações de Maxwell. O resultado principal desse estudo é a seção de choque clássica do espalhamento de fótons por elétrons livres no regime não relativístico.

Arthur H. Compton (Compton, 1923), em 1923, demonstrou experimentalmente que, ao interagir com um elétron inicialmente em repouso, um fóton incidente pode transferir parte de sua energia e momento para o elétron. Esse fenômeno, conhecido como efeito Compton, levou à formulação da equação de Compton, que descreve o deslocamento no comprimento de onda do fóton espalhado em função do ângulo de espalhamento. Alguns anos depois, Dmitri M. Volkov (Volkov, 1935) encontrou uma solução exata para a equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético de onda plana clássica. Porém, quando Volkov publicou seu trabalho em 1935, as fontes dos campos eletromagnéticos disponíveis eram muito fracas para demonstrar efeitos não lineares significativos no espalhamento de partículas carregadas.

Todavia, o laser foi inventado por Theodore H. Maiman (Maiman, 1960) em 1960. Ele foi o primeiro a construir um laser operável, usando um cristal de rubi como meio ativo. A intensidade exata não foi especificada diretamente no artigo original, mas estimativas sugerem que a potência de pico do pulso de laser era da ordem de quilowatts (kW). A invenção do laser em 1960 revolucionou a óptica e a física de campos intensos. Pela primeira vez, era possível gerar campos eletromagnéticos coerentes e intensos que poderiam interagir fortemente com elétrons. Isso provocou um grande avanço no estudo da coerência óptica, levando a um renovado interesse nos estados coerentes da mecânica quântica. Os estados coerentes foram originalmente introduzidos por Erwin Schrödinger (Schrödinger, 1926) em 1926 no contexto do oscilador harmônico quântico. Ele mostrou que esses estados minimizam a relação de incerteza de Heisenberg, o que os torna os estados quânticos mais parecidos com um comportamento clássico. Em 1960, John R. Klauder (Klauder, 1963) contribuiu para a formulação matemática dos estados coerentes e suas aplicações na teoria quântica e, logo em seguida, no ano de 1963, Roy J.

Glauber desenvolveu a teoria quântica da coerência óptica, introduzindo os estados coerentes no contexto da óptica quântica (Glauber, 1963).

Em simultâneo, surge uma nova onda de interesse nas soluções de Volkov, especialmente com os trabalhos de Brown e Kibble (Brown and Kibble, 1964) e Nikishov e Ritus (Nikishov and Ritus, 1964) em 1964, que consideram o fundo de uma onda clássica por conta dos trabalhos de Klauder, Glauber e Volkov, e desenvolvem as primeiras versões do chamado espalhamento Compton não linear, que ocorre quando um elétron interage com um campo eletromagnético intenso (por exemplo, um pulso de laser forte) em vez de um único fóton isolado. Nesse caso, a interação não se limita à absorção de um único fóton, mas sim à absorção simultânea de múltiplos fótons do campo. Nessa interação, o elétron pode absorver múltiplos fótons do campo simultaneamente, e emissão de um único fóton levando a um deslocamento de frequência distinto daquele previsto no espalhamento Compton linear. Brown e Kibble analisaram a interação de elétrons com campos eletromagnéticos intensos em um regime híbrido, considerando a onda de fundo clássica, enquanto Nikishov e Ritus focaram em um tratamento totalmente quântico da interação. A primeira detecção experimental dos efeitos do espalhamento Compton não linear foi realizada por Englert et al. em 1983 (Englert and Rinehart, 1983).

Em 1964, Fried e Eberly (Fried and Eberly, 1964) analisaram o espalhamento Thomson de uma onda eletromagnética circularmente polarizada, com alta intensidade e baixa frequência, incidindo sobre um elétron livre. No entanto, o termo espalhamento Thomson não linear só foi introduzido na literatura em 1971, no trabalho de W. H. Kegel (Kegel, 1971). Kegel resolveu a equação clássica de movimento da particula carregada no campo externo para descrever a dinâmica do elétron, adotando uma abordagem relativística, mas mantendo o campo eletromagnético de fundo tratado classicamente. Para caracterizar o regime de espalhamento, ele considerou a situação em que a energia do fóton incidente é muito menor do que a energia do elétron espalhado. Além disso, com base no parâmetro clássico (Brown and Kibble, 1964) que mede a intensidade do campo, definido como $\xi = \frac{eA_0}{mc}$, no limite $\xi \ll 1$, o espalhamento se aproxima do regime linear (Thomson clássico), enquanto para $\xi \geq 1$, efeitos não lineares tornam-se significativos, levando à emissão de harmônicos. Seguindo essa linha de pesquisa, em 2002 Lau (Lau et al., 2003) trabalha uma formulação puramente clássica e relativística para descrever o espalhamento Thomson não linear. Ele demonstra que o parâmetro de intensidade ξ afeta diretamente a distribuição espectral da radiação espalhada para $\xi \geq 1$, porém em 1980 Bergou e Varró (Bergou and Varró, 1981) expandiram os resultados obtidos por Ehlotzky (Eberly, 1969) sobre a interação de elétrons livres não relativísticos com um campo eletromagnético externo obtendo uma função de onda para partícula no regime não relativístico sob a influência de um campo eletromagnético externo possibilitando assim o estudo do espalhamento Thomson não linear a partir de um regime não relativistico.

Em 2009, Madalina Boca e Viorica Florescu (Boca and Florescu, 2009) introduziram um modelo mais realista para a interação entre elétrons e pulsos de laser, considerando um pulso finito no tempo em vez de uma onda plana monocromática infinita. Para isso, desenvolveram um método que denominaram semiclássico, no qual a fundamentação teórica combina diversos aspectos da eletrodinâmica quântica e da teoria quântica de campos. O modelo utiliza a formulação de Glauber para feixes coerentes de fótons, justificando a descrição do campo de fundo como uma onda clássica. Além disso, a evolução da partícula carregada no campo externo é tratada por meio das soluções de Volkov. Um aspecto central desse formalismo é que os estados do elétron evoluem explicitamente no tempo, enquanto os estados dos fótons não; toda a evolução temporal do fóton está contida no operador potencial vetor quantizado. Esse tratamento possibilita a obtenção de expressões para a amplitude de transição, a densidade de probabilidade angular e espectral de emissão dos fótons emitidos para diferentes formatos de pulso.

Diferentemente dos estudos de Lau, não partimos de um regime clássico, mas consideramos diretamente uma solução da equação de Schrödinger para descrever a partícula carregada no campo externo. Em contraste com o método de Boca e Florescu, focamos no regime de baixas e moderadas intensidades do feixe, regime não relativístico e com polarização linear, e propomos uma interpretação mais clara por meio de um procedimento que denominamos transição intermediária. Nesse método, utilizamos as soluções de Bergou e sua formulação dos estados de quase-momento para interpretar de maneira mais satisfatória a quantidade de interesse: o quadrado da amplitude de transição.

Neste trabalho, analisamos o espalhamento Compton não linear no limite não relatívistico, empregando uma abordagem baseada na teoria de perturbação em menor ordem para no fim aplicar a condição das energias de Thomson. Essa formulação nos permite obter expressões manejáveis, assumindo que os efeitos da interação representam apenas pequenas correções ao sistema livre. Com isso, justificamos as diversas simplificações realizadas ao longo das seções, garantindo que os resultados sejam interpretados dentro do regime de validade da aproximação perturbativa, além de por todo o processo à prática no cálculo de um pulso que denominamos de pulso suave e comparar sua eficiencia com o chamado pulso retangular (Boca and Florescu, 2009) que usamos como um primeiro modelo para o desenvolvimento.

2 Fundamentação teórica

2.1 O Campo classico

Nesse trabalho, usamos um tratamento utilizado por muitos autores em problemas similares (Mackenroth et al., 2010; Seipt et al., 2016; Boca and Florescu, 2009; Bragin and Piazza, 2020), que combina a descrição clássica para o campo eletromagnético com uma abordagem quântica para a interação elétron-fóton. Quando um laser opera, ele gera um feixe com um número muito grande de fótons em um estado altamente coerente (Glauber, 1963). Isso significa que o estado do campo eletromagnético associado ao laser pode ser descrito como um estado coerente de muitos fótons, permitindo que seja tratado como um campo clássico.

Um estado coerente é uma solução especial da equação de Schrödinger para um sistema quântico oscilatório (Schrödinger, 1926), que também é um autofunção do operador de aniquilação. Os estados coerentes minimizam a relação de incerteza de Heisenberg para os operadores do campo eletromagnético, essa propriedade é crucial porque implica que, entre todos os estados quânticos possíveis, o estado coerente é o que mais se assemelha a um campo clássico oscilante, já que suas flutuações são as menores possíveis. O potencial vetor do campo eletromagnético pode ser visto, em primeira aproximação, como uma função clássica quando o campo está em um estado coerente. O que justifica a interpretação do campo como uma função clássica oscilante. Neste regime, um elétron não relativístico interage com um campo de laser intenso, sendo a dinâmica do campo tratada de forma clássica, enquanto a interação é descrita em termos da teoria quântica de campos. Mais detalhes podem ser encontratos nos trabalhos de Schrödinger (Schrödinger, 1926), Klauder (Klauder, 1960) e Glauber (Glauber, 1963).

2.1.1 Onda eletromagnética

Utilizaremos o calibre de Coulomb no vácuo (Griffiths, 2017), onde assumimos que o potencial escalar é nulo ($\Phi = 0$), pois não existe densidade de cargas no vácuo e que o potencial vetor $\mathbf{A}$ satisfaz a condição de divergência nula,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{2.1}$$

esse potencial satisfaz a equação de onda no vácuo e carrega as informações dos campos,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.2}$$

as expressões para os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ em termos do potencial $\mathbf{A}$ no calibre adotado são dadas por,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.3}$$

2.1.2 Direções de polarização

Sobre as direções associadas, o versor $\mathbf{n}$ indica a direção de propagação da onda, enquanto o versor s representa a direção de polarização, como na figura 1.

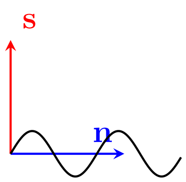


Figura 1: Propagação da onda.

É conveniente introduzirmos uma nova variável que combina as coordenadas espaciais e temporais de forma natural para a propagação da onda. Essa variável, chamada de coordenada do cone de luz ϕ (Boca and Florescu, 2009; Bergou and Varró, 1981) definida da seguinte maneira,

$$\phi = t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}, \tag{2.4}$$

seja o potencial vetor da forma $\mathbf{A} = X(\phi)\mathbf{s}$, fazendo uso do calibre (2.1), conclui-se que o vetor s é ortogonal à direção de propagação $\mathbf{n}$. Considerando a interação desse campo com uma partícula carregada, cuja dinâmica é regida pela força de Lorentz,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right), \tag{2.5}$$

substituimos os valores dos campos (2.3) em termos do potencial vetor na equação acima (2.5) e obtemos,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\frac{dX(\phi)}{d\phi}\left[(1 - \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}}{c})\mathbf{s} + \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s})}{c}\mathbf{n}\right], \tag{2.6}$$

essas equações (2.6) descrevem a dinâmica da partícula. O desafio reside no fato de as equações de movimento nas direções $\mathbf{s}$ e $\mathbf{n}$ estarem acopladas. O termo de força magnética $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ faz com que a aceleração em $\mathbf{n}$ dependa da velocidade em $\mathbf{s}$, e vice-versa. Isso significa que não podemos resolver cada equação de forma independente. Esse tipo de sistema geralmente conduz a soluções mais complexas, como movimentos elípticos ou trajetórias não triviais no espaço (Lau et al., 2003).

2.1.3 Equação de movimento na onda plana monocromática

No caso da onda plana monocromática, existe uma solução explícita para a trajetória de um elétron dentro dos limites não relativísticos que está descrita no trabalho de Eberly (Eberly, 1969), a mesma que havia sido utilizada por Thomson na descrição da seção de choque do espalhamento de raios X em 1903 (Thomson, 1903). Partindo da equação (2.5) para o elétron em condições onde a força elétrica rege a dinâmica do movimento,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}, \tag{2.7}$$

seja $\mathbf{k}_0$ o vetor de onda dado por $\mathbf{k}_0 = \frac{\omega_0}{c}\mathbf{n}$, como $\mathbf{E}$ é derivado por (2.3) conclui-se que $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E} = 0$, logo a equação acima implica que,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) = 0, \tag{2.8}$$

essa relação nos permite derivar a seguinte equação de movimento(Eberly, 1969),

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) - \frac{eA_0}{m\omega_0}\cos(\omega_0 t), \tag{2.9}$$

portanto, o movimento do elétron é caracterizado por uma oscilação harmônica no campo elétrico monocromático, e derivamos a partir desta equação de movimento (2.9) a seguinte relação,

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{c} = \frac{eA_0}{mc}\sin(\omega_0 t), \tag{2.10}$$

Onde nos é introduzido o que chamaremos de parâmetro clássico ao decorrer do texto, $\xi = \frac{eA_0}{mc}$. Esse parâmetro é essencialmente uma medida de como o campo elétrico do feixe acelera a partícula, descrito primeiramente por (Brown and Kibble, 1964) e (Nikishov and Ritus, 1964) e usado por diversos autores para medir o limiar relativístico (Eberly, 1969; Bergou and Varró, 1981; Fedotov et al., 2023). Quando ξ é maior ou aproximadamente igual a 1, a aceleração imposta pelo campo é tão grande que a partícula atinge velocidades comparáveis à velocidade da luz, entrando assim no regime relativístico.

2.1.4 Solução da função de onda

Após estabelecermos a descrição da onda plana monocromática passamos à análise do comportamento quântico do elétron sob a influência desse campo. Para descrever a dinâmica consideramos a equação de Schrödinger dependente do tempo. No calibre adotado o hamiltoniano da partícula é dado por (Sakurai and Napolitano, 2011),

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}(\phi)\right]^2, \tag{2.11}$$

a equação de Schrödinger correspondente para a função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ assume a forma,

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}(\phi)\right]^2\psi(\mathbf{r}, t), \tag{2.12}$$

expandindo o termo quadrático no Hamiltoniano, obtemos (2.13),

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{ie\hbar}{m}(\mathbf{A}\cdot\nabla) + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2\right]\psi(\mathbf{r},t) \quad , \tag{2.13}$$

uma solução conveniente para essa equação, conforme sugerido pelos trabalhos de Bergou e Varro (Bergou and Varró, 1981) é a seguinte,

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} M_{\mathbf{p}}(\phi), \quad E = \frac{p^2}{2m}, \tag{2.14}$$

onde a função de onda descreve uma partícula livre vestido pelo campo externo, e a modulação depende apenas da variável de ϕ. Substituindo (2.14) na equação (2.13), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária para $M_{\mathbf{p}}(\phi)$,

$$\frac{\hbar\omega_0}{2mc^2(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{mc})} M''_{\mathbf{p}}(\phi) + iM'_{\mathbf{p}}(\phi) + \left(\frac{\frac{e}{m}\mathbf{A}\cdot\mathbf{p} - \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2}{(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{mc})}\right) M_{\mathbf{p}}(\phi) = 0, \tag{2.15}$$

o coeficiente que acompanha a segunda derivada representa a razão entre a energia do fóton ($\hbar\omega_0$) e a energia de criação de pares ($2mc^2$) (Bergou and Varró, 1981), multiplicado por um fator de correção dependente da velocidade v da partícula. No regime óptico, a frequência da luz varia aproximadamente entre 10^{14} e 10^{15} Hz. Para a analise, assumimos $v \ll c$, o que nos permite considerar $1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{mc} \approx 1$, isso indica que o coeficiente da segunda derivada

Frequência (ν)	$\hbar\omega_0$ (J)	$\frac{\hbar\omega_0}{2mc^2}$ (adimensional)
3×10^{14} Hz (Infravermelho)	2.0×10^{-19}	1.22×10^{-6}
5×10^{14} Hz (Visível - vermelho)	3.3×10^{-19}	2.01×10^{-6}
7×10^{14} Hz (Visível - azul)	4.6×10^{-19}	2.80×10^{-6}
1×10^{15} Hz (Ultravioleta)	6.6×10^{-19}	4.02×10^{-6}

Tabela 1: Tabela com valores da razão.

é extremamente pequeno quando comparado aos outros termos da equação diferencial, como podemos ver na tabela 1, o que nos permite desconsiderar esse termo no regime de interesse. Dessa forma, uma solução aproximada para a equação diferencial (2.15) pode ser escrita como,

$$M_{\mathbf{p}}(\phi) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^{\phi} \frac{\frac{e}{m}(\mathbf{A}(\phi')\cdot\mathbf{p}) - \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2(\phi')}{\mathbb{d}_p} d\phi'\right], \tag{2.16}$$

$$\mathbb{d}_p = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{mc}\right) \approx 1, \tag{2.17}$$

as soluções obtidas, formam um conjunto completo de funções ortonormalizadas, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mathbf{p}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{p}'}| \, d^3p = \mathbb{1}, \quad \text{e} \quad \langle \psi_{\mathbf{p}} | \psi_{\mathbf{p}'} \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \tag{2.18}$$

no entanto, as funções (2.14) não são autofunções do operador momento usual, ao contrário das soluções de uma partícula livre. Isso ocorre porque, na presença de um campo externo, o momento canônico não é mais conservado. Seguindo a abordagem de Bergou e Varró (Bergou and Varró, 1981), classificamos essas soluções como autofunções do quase-momento, que leva em conta a interação com o campo externo e se torna a quantidade conservada no sistema.

2.1.5 Estados da partícula

Assumimos que o estado inicial da partícula está confinado em um volume V, o que permite a normalização da sua função de onda inicial, onde $L^3 = V$, já que desejamos uma densidade de emissão por particula como resultado final do processo, o que justifica a função inicial de partícula localizada,

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p}_0, L \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}, & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ 0, & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases}, \tag{2.19}$$

após a interação, no entanto, a partícula já não está mais confinada dentro de V, e a sua função de onda assume a forma de auto função do momento,

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \tag{2.20}$$

dessa forma, as equações (2.19) e (2.20) expressam o sistema desde num estado inicial bem definido dentro de V e num estado final que já não pode ser normalizado da mesma maneira. Já os estados intermediários da partícula são definidos pelas auto funções do quase momento (2.18).

2.2 O Campo quantizado

2.2.1 Onda Plana Monocromática quantizada

No contexto deste trabalho, a abordagem adotada (Boca and Florescu, 2009; Fedotov et al., 2023) considera um potencial vetor total dado pela combinação dos dois componentes,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{cl}(\phi) + \mathbf{A}^{q}(\mathbf{r}, t) \tag{2.21}$$

para capturar os efeitos quânticos associados à emissão de fótons, introduzimos a seguinte forma para o potencial vetor quântico (Bjorken and Drell, 1965),

$$\mathbf{A}^{q}(r, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_j \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} \left[a(\mathbf{k}, j) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + a^{\dagger}(\mathbf{k}, j) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right] \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, j), \tag{2.22}$$

aqui, a integral sobre todos os possíveis vetores de onda reflete o fato de que o campo eletromagnético pode ter diversas componentes com diferentes comprimentos de onda. A soma discreta considera as duas polarizações transversais permitidas para os fótons, enquanto os operadores de criação $a^{\dagger}(\mathbf{k}, j)$ e aniquilação $a(\mathbf{k}, j)$ são os responsáveis por descrever a quantização do campo eletromagnético. Para cada vetor de onda $\mathbf{k}$, existem dois vetores de polarização ortogonais $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$ e $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$, que satisfazem:

- $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, j) \cdot \mathbf{k} = 0$ (condição de transversidade)
- $\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, j) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}', j') = \delta_{jj'}$ (ortogonalidade das polarizações).
- $\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k}, 1) = -\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$, enquanto $\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k}, 2) = +\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$ (modos de polarização se comportam adequadamente sob inversão do vetor de onda).

Já os operadores do campo obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[a(\mathbf{k}, j), a^{\dagger}(\mathbf{k}', j')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{jj'} \quad , \tag{2.23}$$

e todos os outros comutadores são zero. Isso significa que fótons com momentos ou polarizações diferentes são independentes entre si.

2.3 Sistema Composto

Trabalharemos em um espaço composto para a partícula e os fótons. O espaço de Hilbert dos fótons é dado pela soma direta dos espaços que descrevem diferentes números de fótons. Assim, temos um espaço para um fóton ($\mathcal{H}_1$), um espaço para dois fótons ($\mathcal{H}_2$), um espaço para três fótons ($\mathcal{H}_3$) e assim por diante. O espaço total dos fótons é, portanto,

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \tag{2.24}$$

onde $\mathcal{H}_n$ representa o espaço de Hilbert correspondente a um estado com n fótons. O espaço total do sistema, que combina a partícula e os fótons, é então dado por,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_F, \tag{2.25}$$

onde $\mathcal{H}_p$ é o espaço de Hilbert associado à partícula.

Em nosso caso, por conta da forma do potencial vetor (2.21) o hamiltoniano completo (2.11) toma a forma:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_I(t), \tag{2.26}$$

onde definimos $\mathbf{H}_I(t)$ representando no hamiltoniano total (2.26) a parte responsavel pela interação, tendo a seguinte forma

$$\mathbf{H}_\mathrm{I}(t) = -\frac{e}{m}\left[\mathbf{P} - e\mathbf{A}(\phi)\right]\mathbf{A}^{\mathfrak{q}}(r,t) + \frac{e^2}{2m}\left[\mathbf{A}^{\mathfrak{q}}(r,t)\right]^2, \tag{2.27}$$

e a parte livre,

$$\mathbf{H}_0(t) = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{P} - e\mathbf{A}^{cl}(\phi)\right]^2. \tag{2.28}$$

Precisamos estender $\mathbf{H}_0$ para atuar corretamente nesse espaço. Para isso, toda vez que $\mathbf{H}_0$ aparecer no texto a partir daqui, significa que estamos usando $H_0 \otimes \mathbb{1}_F$, onde $\mathbb{1}_F$ é o operador identidade no espaço dos fótons. Assim, nosso operador $\mathbf{H}_0$ atuará sobre funções de onda do sistema composto e o mesmo para $\mathbf{H}_I$.

2.3.1 Representação de interação

Enquanto na representação de Schrödinger os estados evoluem de acordo com o Hamiltoniano total $\mathbf{H}$, na representação de interação essa evolução ocorre devido à parte de interação do Hamiltoniano $\mathbf{H}_I$ (Sakurai and Napolitano, 2011).

Na representação de interação (Sakurai and Napolitano, 2011), um operador O qualquer no tempo t é dado por,

$$\mathbf{O}^{int}(t) = \mathbf{U}_0^{\dagger}(t,0)\,\mathbf{O}^{sch}\,\mathbf{U}_0(t,0), \tag{2.29}$$

onde:

- $\mathbf{O}^{int}(t)$ é o operador na representação de interação;
- $\mathbf{O}^{sch}$ é o operador na representação de Schrödinger;
- $\mathbf{U}_0(t,t_0)$ é o operador de evolução temporal devido ao Hamiltoniano livre $\mathbf{H}_0$, que evolui o sistema do tempo t_0 até t;

Os operadores de evolução $\mathbf{U}_0(t,t_0)$ seguem a equação diferencial,

$$\mathbf{H}_0(t)\mathbf{U}_0(t,t_0) = i\hbar\frac{\partial \mathbf{U}_0(t,t_0)}{\partial t}, \tag{2.30}$$

a solução dessa equação é dada pelo operador de evolução $\mathbf{U}_0(t,t_0)$ (Sakurai and Napolitano, 2011)

$$\mathbf{U}_0(t,0) = \mathcal{T}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathbf{H}_0(t')\,dt'\right], \tag{2.31}$$

com $\mathcal{T}$ denotando o operador de ordenamento temporal, necessário quando $H_I(t)$ não comuta em tempos diferentes. Os kets na representação de interação estão relacionados aos kets na representação de Schrödinger por meio do operador de evolução, associado ao Hamiltoniano livre,

$$|\psi^{(int)}(t)\rangle = \mathbf{U}_0^{\dagger}(t, t_0)|\psi^{(sch)}(t)\rangle. \tag{2.32}$$

2.3.2 Estados compostos

Estado inicial: Representa o sistema muito antes da interação com a onda eletromagnética. O símbolo ∞ não deve ser interpretado literalmente, mas apenas como uma indicação de um tempo suficientemente distante no passado ou futuro, antes da interação ocorrer ou muito depois. Nesse instante, assume-se que não há fótons presentes no sistema

$$|\Psi_1^{(int)}(-\infty)\rangle = |\mathbf{p_0}; L\rangle \otimes |0\rangle \tag{2.33}$$

Estado final: Representa o sistema muito depois da interação com a onda. Agora há um fóton associado ao sistema, com vetor de onda $\mathbf{k}$ e polarização λ.

$$|\Psi_{\mathbf{2}}^{(int)}(\infty)\rangle = |\mathbf{p}\rangle \otimes |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \,, \tag{2.34}$$

2.4 Amplitude de transição

A amplitude de transição $\mathcal{M}_{1\to 2}$ desempenha um papel central na descrição da emissão e espalhamento de partículas. Seu módulo ao quadrado, $|\mathcal{M}_{1\to 2}|^2$, está diretamente relacionado à probabilidade de transição e, consequentemente, à taxa de emissão de partículas. Para obter esse elemento, adotamos uma abordagem semelhante à de Boca e Florescu (Boca and Florescu, 2009), que trataram o espalhamento Compton não linear utilizando um método híbrido com relação a evolução dos estados da particula(evoluem no tempo) e dos fótons(evolução contida nos operadores de criação/aniquilação). No entanto, diferentemente do regime relativístico em que as soluções de Volkov são empregadas para descrever o elétron no campo externo, utilizamos as soluções de dipolo da equação de Schrödinger (Ehlotzky, 1982; Bergou and Varró, 1981) para descrever a dinâmica da partícula interagindo com o campo (2.14).

Uma dificuldade encontrada no método de Boca e Florescu é a necessidade de calcular o módulo ao quadrado da função delta de Dirac, o que pode levar a ambiguidades na definição da densidade de probabilidade de emissão por partícula. Para contornar esse problema, em nosso trabalho adotamos o chamado método das amplitudes intermediarias, que permite uma interpretação mais clara das transições de estados da partícula no campo externo. Esse método reformula a análise da interação sem a necessidade de lidar diretamente com a regularização do termo delta, tornando o cálculo da distribuição espectral mais bem definido.

2.4.1 Método das amplitudes intermediárias

A utilização do método das amplitudes intermediarias não apenas evita as dificuldades matemáticas associadas ao tratamento direto da delta de Dirac, mas também oferece uma compreensão mais intuitiva dos processos envolvidos. O desenvolvimento a seguir é apresentado com mais detalhes no TCC de Henrique (Falcão, 2025). Seguindo (Boca and Florescu, 2009) definimos a amplitude da seguinte forma

$$\mathcal{M}_{1\to 2} = \langle \Psi_1^{(int)}(\infty) | \mathcal{U}^{(int)}(\infty, -\infty) \, |\Psi_2^{(int)}(-\infty)\rangle \, , \tag{2.35}$$

essa formulação permite capturar os efeitos da interação partícula-campo, incluindo a possibilidade de emissão e absorção de fótons descritas pelos operadores criação e aniquilação. A teoria da perturbação em primeira ordem nos permite reescrever o operador de evolução temporal da seguinte maneira (Bjorken and Drell, 1965),

$$\mathbf{U}^{(int)}(\infty, -\infty) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{H}_I^{(int)}(t), \tag{2.36}$$

assim, podemos implementar (2.36), (2.33) e (2.34) a amplitude de transição (2.35) e reescreve-la,

$$\mathcal{M}_{1\to 2} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \langle 1_{\mathbf{k},\lambda}| \otimes \langle \mathbf{p}| \, \boldsymbol{H}_I^{(int)}(t) \, |\mathbf{p}_0; L\rangle \otimes |0\rangle \tag{2.37}$$

aqui usamos a completude dos vetores do espaço dos momentos intermediarios $|\mathbf{p}'\rangle$,

$$\mathcal{M}_{1\to 2} = -\frac{i}{\hbar}\int d^3p' \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \langle 1_{\mathbf{k},\lambda}| \otimes \langle \mathbf{p}| \, \boldsymbol{H}_I^{(int)}(t) \, |\mathbf{p'}, 0\rangle \, \langle \mathbf{p'}|\mathbf{p}_0; L\rangle \,, \tag{2.38}$$

aqui definiremos $\mathcal{M}(\mathbf{p}, 1_{\mathbf{k},\lambda}; \mathbf{p'}, 0)$ que representa um núcleo da transição ou uma transição para um estado intermediário.

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}, 1_{\mathbf{k},\lambda}; \mathbf{p'}, 0) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \langle 1_{\mathbf{k},\lambda}, \mathbf{p}| \, \boldsymbol{H}_I^{(int)}(t) \, |\mathbf{p'}, 0\rangle \tag{2.39}$$

Essa característica justifica a denominação método das amplitudes intermediárias, que é amplamente discutida no TCC de Henrique (Falcão, 2025), com essa definição nossa amplitude pode ser escrita da forma,

$$\mathcal{M}_{1\to 2} = \int d^3p' \mathcal{M}(\mathbf{p}, 1_{\mathbf{k},\lambda}; \mathbf{p'}, 0) \, \langle \mathbf{p'}|\mathbf{p}_0; L\rangle \tag{2.40}$$

aplicando a completude dos vetores do espaço $|\mathbf{r}\rangle$,

$$\langle \mathbf{p'}|\mathbf{p}_0; L\rangle = \int_V d^3r \, \langle \mathbf{p'}|\mathbf{r}\rangle \, \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}_0; L\rangle \,, \tag{2.41}$$

podemos usar de (2.19) e (2.20) para integrar o termo acima (2.41) dentro do volume V e obter as funções que chamaremos de pré deltas, bem desenvolvidas no TCC de Henrique (Falcão, 2025) e que são cruciais para obtenção do modulo ao quadrado da amplitude de transição,

$$\langle \mathbf{p'}|\mathbf{p}_0; L\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\prod_{j=1}^{3}\frac{2sin\left[\frac{(p_{oj}-p'_j)}{\hbar}\frac{L}{2}\right]}{\frac{(p_{oj}-p'_j)}{\hbar}} = \frac{1}{\hbar^{\frac{3}{2}}}\prod_{j=1}^{3}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\,\Delta\left(\frac{p_{0j}-p'_j}{\hbar}, L\right). \tag{2.42}$$

3 Regime não relativistico

Nesta seção, iniciaremos explorando as grandezas físicas associadas a onda, como a densidade de energia e a intensidade e como elas estão relacionadas ao parâmetro clássico que define a validade do regime. Esse tratamento fornecerá a base para a modelagem subsequente, na qual introduziremos um pulso de laser finito e analisaremos sua interação com um elétron não relativístico.

3.1 Parâmetros da uma onda plana monocromática

Podemos relacionar energia transportada e intensidade ao parâmetro relativístico e fazer uma analise precisa da validade do sistema (Eberly, 1969). A energia transportada por uma onda eletromagnética no vácuo está dividida igualmente entre os campos elétrico e magnético. A densidade de energia eletromagnética total U é a soma das densidades de energia dos campos elétrico e magnético (Griffiths, 2017),

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2; \quad U_B = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2, \tag{3.1}$$

com isso podemos obter a intensidade da onda monocromática plana (Eberly, 1969):

$$I = c\frac{\epsilon_0 A_0^2 \omega_0^2}{2} \tag{3.2}$$

Escrevendo o lado direito em função do parâmetro clássico, obtemos uma intensidade limite para o limiar relativístico, qualquer intensidade maior implicaria um regime relativístico, chamamos essa valor de intensidade crítica I_c (Eberly, 1969):

$$\frac{I}{I_c} = \xi^2 \tag{3.3}$$

$$I_c = \frac{m^2 \omega_0^2 c^3 \epsilon_0}{2e^2} \tag{3.4}$$

Com todos os resultados acima, podemos calcular os valores da intensidade, amplitude do potencial vetor, intensidade crítica para as frequências dentro do visível, região de nosso interesse por conta da condição $\hbar\omega \ll mc^2$ e com o parâmetro ξ tomando o valor de 0.09. Abaixo os resultados obtidos:

ω_0 **(rad/s)**	**I (W/m²)**	$\mathbf{A_0}$ **(T.m)**	**Ic (W/m²)**	**Cor**
1.88×10^{15}	1.1102×10^{20}	1.5352×10^{-4}	1.3731×10^{22}	Infravermelho
2.51×10^{15}	1.9742×10^{20}	1.5352×10^{-4}	2.4410×10^{22}	Vermelho
3.14×10^{15}	3.0854×10^{20}	1.5352×10^{-4}	3.8141×10^{22}	Verde
3.77×10^{15}	4.4408×10^{20}	1.5352×10^{-4}	5.4923×10^{22}	Azul
4.71×10^{15}	6.9402×10^{20}	1.5352×10^{-4}	8.5817×10^{22}	Violeta

Tabela 2: Tabela com valores e cores correspondentes ao espectro para $\xi = 0.09$

A Tabela 2 apresenta os valores relevantes para a caracterização de uma onda eletromagnética monocromática no regime próximo ao limiar relativístico. A primeira coluna contém os valores de frequência ω_0, escolhidos dentro do espectro visível. A segunda coluna representa a intensidade máxima I da onda eletromagnética, calculada para um parâmetro clássico $\xi = 0.09$. A quarta coluna mostra a intensidade crítica I_c, que representa o valor de intensidade necessário para atingir o regime relativístico se apenas o parâmetro ξ fosse variado, mantendo a frequência fixa. Por fim, a última coluna indica a cor correspondente à frequência da onda dentro do espectro visível. Essa tabela ilustra como a intensidade crítica I_c varia com a frequência e estabelece limites para a transição entre os regimes clássico e relativístico.

3.2 Modelagem do sistema

Podemos fazer a análise de alguns parâmetros importantes a partir do momento que escolhemos frequências na faixa apresentada na tabela 2, para o elétron temos sua energia sendo aproximadamente 511 keV, já a energia associada ao fóton emitido pelo laser é da ordem de alguns eV,

$$\frac{E_{\text{fóton}}}{E_{\text{elétron}}} \approx 5,87 \times 10^{-6}, \tag{3.5}$$

essa razão indica que a energia do fóton é cerca de $0,000587\%$ da energia de repouso do elétron, tornando a diferença de energia do elétron antes e depois da interação praticamente negligenciável. Somente após a absorção de um número extremamente grande de fótons essa diferença se tornaria significativa. Reafirmamos aqui as condições do nosso regime $\hbar\omega_0 << mc^2$, velocidades baixas do elétron e intensidades baixas e moderadas $\xi < 1$, qualquer variação significativa desses parâmetros livres pode nos levar a outro regime.

3.2.1 Pulso de Laser

No caso específico de um pulso de laser, a estrutura do potencial vetor deve refletir a natureza oscilatória da onda eletromagnética, bem como a sua modulação espacial e temporal. Para descrever essa modulação, introduzimos uma função $g(\phi)$, que atua como um envelope para o pulso, podendo assumir diferentes formas, como funções degrau (Boca and Florescu, 2009), senos elevados a potências (Mackenroth et al., 2010), gaussianas (Boca and Florescu, 2010) e até pulsos dependentes do tempo (Kharin et al., 2016). Para essa parametrização, podemos escrever o potencial vetor clássico como:

$$\mathbf{A}(\phi) = A_0 \sin(\omega_0 \phi) g(\phi) \mathbf{s} \tag{3.6}$$

A função $g(\phi)$ regula a duração num intervalo $|\phi| \leq \frac{\tau}{2}$, permitindo modelar diferentes perfis de pulso. Aqui, usamos uma polarização linear para um primeiro estudo, mas outros autores se utilizam de polarizações circulares em seus estudos (Boca and Florescu, 2010; Fedotov et al., 2023; Kharin et al., 2016)

Para comparação entre dois pulsos diferentes, precisamos garantir o mesmo fluxo de energia, logo, introduzimos a energia transportada por unidade de área $f_l(\tau)$ de um pulso que é definida como a integral do vetor de Poynting ao longo do tempo. O vetor de Poynting (Griffiths, 2017), denotado por $\mathbf{S}$, é dado por,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{3.7}$$

o módulo do vetor de Poynting, $S(t)$, representa a densidade instantânea de potência transportada por unidade de área pela onda eletromagnética ou pulso de laser. Assim, a energia transportada por unidade de área pode ser escrita como,

$$f_l(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)dt \tag{3.8}$$

com o vetor de Poynting tomando a forma abaixo para um pulso de laser com nosso tipo de envelope por conta de (3.6) e (2.3),

$$\mathbf{S} = \frac{A_0^2}{\mu_0 c}\left[\omega_0^2\cos^2(\omega_0\phi)g^2(\phi) + \sin^2(\omega_0\phi)\left(\frac{dg(\phi)}{d\phi}\right)^2 + 2\omega_0 g(\phi)\frac{dg(\phi)}{d\phi}\cos(\omega_0\phi)\sin(\omega_0\phi)\right]\mathbf{n}. \tag{3.9}$$

3.2.2 O Hamiltoniano Completo

Faremos agora uma análise dos termos presentes em (2.27). Começando pelos operadores que geram a dinâmica no espaço dos fótons, temos o termo linear $\mathbf{A}^q(\mathbf{r},t)$, aplicando este operador ao estado de vácuo $|0\rangle$, obtemos,

$$\mathbf{A}^q(r,t)\,|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sum_j \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k\epsilon_0}}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},j)\,|1_{\mathbf{k},j}\rangle\,, \tag{3.10}$$

observamos que o estado gerado é uma superposição de estados de um único fóton com diferentes vetores de onda $\mathbf{k}$ e polarizações j. Fazendo a projeção no estado de fóton único atuamos com o bra $\langle 1_{\mathbf{k}',j'}|$,

$$\langle 1_{\mathbf{k}',j'}|\,\mathbf{A}^q(r,t)\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},j) \tag{3.11}$$

o resultado final é apenas um fator escalar associado ao estado inicial do fóton $(\mathbf{k}, j)$. Fazendo uma análise semelhante para o termo quadratico $(\mathbf{A}^q(\mathbf{r}, t))^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^q(r,t)\cdot\mathbf{A}^q(r,t) = \Bigg[\int\int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \sum_{jj'} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k'}\epsilon_0}} \\ \times \left(a(\mathbf{k}, j) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + a^\dagger(\mathbf{k}, j) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right) \\ \times \left(a(\mathbf{k}', j') e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega_{k'} t)} + a^\dagger(\mathbf{k}', j') e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega_{k'} t)} \right) \\ \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, j) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}', j') \Bigg], \end{aligned} \tag{3.12}$$

expandindo o produto das exponenciais na expressão acima (3.12), temos quatro termos distintos:

1. Termos de aniquilação de dois fótons (aa):

$$a(\mathbf{k}, j) a_{\mathbf{k}'j'} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega_{k'} t)} \tag{3.13}$$

2. Termos de criação de dois fótons ($a^\dagger a^\dagger$):

$$a^\dagger(\mathbf{k}, j) a^\dagger(\mathbf{k}', j') e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega_{k'} t)} \tag{3.14}$$

3. Termos mistos (criação e aniquilação) ($aa^\dagger$):

$$a(\mathbf{k}, j) a^\dagger(\mathbf{k}', j') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega_{k'} t)} \tag{3.15}$$

4. Termos mistos (criação e aniquilação, mas na ordem oposta) ($a^\dagger a$):

$$a^\dagger(\mathbf{k}, j) a(\mathbf{k}', j') e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega_{k'} t)} \tag{3.16}$$

Sabendo que os operadores de criação e aniquilação satisfazem a relação de comutação (2.23), aplicamos o estado de vácuo $|0\rangle$ para cada um dos quatro casos e obtemos os seguintes resultados apresentados na tabela 3

Caso	Expressão	Resultado
aa	$a(\mathbf{k}, j)a(\mathbf{k}', j')\|0\rangle$	0
$a^\dagger a^\dagger$	$a(\mathbf{k}, j)^\dagger a(\mathbf{k}', j')^\dagger\|0\rangle$	$\|\mathbf{k}, j; \mathbf{k}', j'\rangle$
$aa^\dagger$	$a(\mathbf{k}, j)a^\dagger(\mathbf{k}', j')\|0\rangle$	$\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{jj'}\|0\rangle$
$a^\dagger a$	$a^\dagger(\mathbf{k}, j)a(\mathbf{k}', j')\|0\rangle$	0

Tabela 3: Resultados da atuação dos operadores sobre o vácuo

Portanto, o termo $(\mathbf{A}^q(\mathbf{r}, t))^2$ pode ser interpretado como uma contribuição à amplitude de probabilidade em processos onde pares de fótons são criados, porém, deixaremos esses processos de lado já que estamos tratando de teorias perturbativas em primeira ordem, e tratamos as interações como uma expansão em séries de potências da constante de estrutura fina α (Angioi et al., 2016). O termo de menor ordem em α é geralmente o termo dominante, enquanto os termos de ordem superior são correções menores. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a constante de estrutura fina é definida como,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \tag{3.17}$$

para expressar $\frac{e}{m}$ e $\frac{e^2}{m}$ em termos de α, fazemos o seguinte,

$$\frac{e}{m} = \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0\hbar c\alpha}}{m}; \quad \frac{e^2}{m} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c\alpha}{m}, \tag{3.18}$$

se tivermos um sistema inicial no vácuo $|0\rangle$ e o Hamiltoniano de interação atuar sobre ele, a transição para um estado de um fóton $|1_{k,\lambda}\rangle$ ocorre com uma única aplicação do termo linear em $\mathbf{A}$,

$$\langle 1_{k,\lambda}| \mathbf{H} |0\rangle \sim e, \tag{3.19}$$

já a transição para um estado de dois fótons $|1_{k_1,\lambda_1}; 1_{k_2,\lambda_2}\rangle$ requer a atuação do termo quadrático $\mathbf{A}^2$, que é de segunda ordem em e,

$$\langle 1_{k_1,\lambda_1}; 1_{k_2,\lambda_2} | \, \mathbf{H} \, |0\rangle \sim e^2, \tag{3.20}$$

convertendo para a constante de estrutura fina podemos expressar a probabilidade relativa de criação de dois fótons em relação à criação de um único fóton como,

$$\frac{P_2}{P_1} \sim \alpha. \tag{3.21}$$

como $\alpha \approx \frac{1}{137}$, isso significa que a emissão de dois fótons é significativamente menos provável do que a emissão de um único fóton, assim, em uma aproximação de primeira ordem, faz sentido negligenciar o termo quadrático, o que nos permite reduzir o hamiltoniano da interação (2.27) para a forma a seguir,

$$\mathbf{H}_I = -\frac{e}{m} \left[\mathbf{P} - e\mathbf{A}(\phi) \right] \mathbf{A}^{\mathbf{q}}(r,t), \tag{3.22}$$

Por fim, com o auxilio do parametro clássico, podemos fazer uma analise das contribuições de cada termo presente em (3.22) com respeito aos operadores que atuam de forma ativa sobre o espaço da partícula

$$\left[-i\hbar \, \nabla - e \, \mathbf{A}(\phi) \right] \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t), \tag{3.23}$$

O operador do momento atuando sobre a função de onda junto ao potêncial clássico, nos permite rearranjar os termos presentes da seguinte maneira

$$\left[-i\hbar \, \nabla - e \, \mathbf{A}(\phi) \right] \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = \left[\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\phi) \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{mc} \right) + \frac{e^2}{2mc} \mathbf{A}^2(\phi) \cdot \mathbf{n} \right] \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) \tag{3.24}$$

Aqui, podemos explicitar o parâmetro clássico ξ que encapsula os efeitos do potencial na forma adimensionalizada

$$mc\left[\frac{\mathbf{p}}{mc} - \xi\,\left(1 + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{mc}\right)\,\mathrm{g}(\phi)\,\sin\left(\omega_0\phi\right)\cdot\boldsymbol{s} + \xi^2\,\frac{\mathrm{g}^2(\phi)}{2}\,\sin^2\left(\omega_0\phi\right)\cdot\mathbf{n}\right]\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t), \qquad (3.25)$$

A partir da análise da ordem de grandeza do parâmetro, podemos concluir que caso ele seja pequeno o suficiente os termos de segunda ordem são significativamente menos relevantes para o processo em questão, Por esse motivo, poderão ser descartados nas etapas seguintes. Além disso, o momento da partícula após o espalhamento é extremamente pequeno, devido a condição de espalhamento Thomson, a razão $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{mc}$ vai para zero, simplificando significativamente a expressão final

$$[-i\hbar\,\nabla - e\,\mathbf{A}(\phi)]\,\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = [-e\,A_0\,\mathrm{g}(\phi)\,\sin\left(\omega_0\phi\right)\cdot\boldsymbol{s}]\,\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) \qquad (3.26)$$

Na expressão (2.16) podemos fazer uma analise similar da contribuição dos termos e percebemos que a contribuição mais significativa está no primeiro termo, isso nos trás uma outra redução muito util mais a frente

$$M_{\mathbf{p}}(\phi) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^{\phi}\frac{e}{m}(\mathbf{A}(\phi')\cdot\mathbf{p}\,)\right] \qquad (3.27)$$

4 Pulso

No Capítulo 3, estudamos as reduções aplicáveis ao sistema e discutimos seus regimes de validade. Agora, utilizamos essas reduções para caracterizar o espalhamento sobre influência de um pulso específico. Essa abordagem nos permitirá testar a robustez de nossa formulação teórica e verificar suas previsões quantitativas.

4.1 Formulação Geral

Começamos pela forma reduzida do termo de interação do hamiltoniano (3.22), usando a completude do espaço dos vetores $|\mathbf{r}\rangle$ sobre (2.39) e atuando com o potencial vetor quântico (2.22) sobre o estado de vácuo como na expressão (3.11), sabendo quem são as funções de onda dos estados de quase momento (2.14), obtemos uma forma mais explícita para a amplitude intermediária, que poderemos analisar em detalhes,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{p}, 1_{\mathbf{k},\lambda}; \mathbf{p\prime}, 0) = -\frac{ie}{\hbar m}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V d^3r \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^3 2\epsilon_0\omega}}\, \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} \\ \times\, \psi^*_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)\left[-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - e\mathbf{A}(\phi)\right]\psi_{\mathbf{p\prime}}(\mathbf{r},t),\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde aplicamos a redução (3.26) à equação acima e obtemos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{p}, 1_{\mathbf{k},\lambda}; \mathbf{p\prime}, 0) = \frac{ie^2 A_0}{m}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\epsilon_0\omega\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3r\, \exp\left[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t\right] \\ \times\, \psi^*_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)\psi_{\mathbf{p\prime}}(\mathbf{r},t)\cdot \mathrm{g}(\phi)\, \sin\left(\omega_0\phi\right)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)\cdot \boldsymbol{s},\end{aligned} \tag{4.2}$$

ao reformular a integral, com uma mudança de variáveis para as coordenadas do cone de luz (2.4), simplificamos três das quatro integrais espaciais, deixando apenas a dependência em ϕ.

Dessa forma, podemos integrar (4.2) e obter,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{p}, 1_{\mathbf{k},\lambda}; \mathbf{p'}, 0) = \frac{i\xi c}{2\pi}\sqrt{\frac{c\alpha}{\omega}}\delta\left(\Delta p'_n - \hbar k_n - \frac{1}{c}(\Delta E' - \hbar\omega)\right)\\ \times\, \delta(\Delta p'_\perp - \hbar k_\perp) F(\mathbf{p}, \mathbf{p'}, \mathbf{k})\, \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)\cdot \boldsymbol{s},\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde definimos:

$$\Delta p'_i = p'_i - p_i, \quad \Delta E' = E^{'} - E. \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}F(\mathbf{p}, \mathbf{p'}, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \exp\left[-\frac{ic}{2\hbar}(\Delta\mathbf{p'} - \mathbf{k}\hbar)_{\mathbf{n}}\phi\right]\\ \times \exp\left[\frac{-i}{2\hbar}(\Delta E' - \hbar\omega_k)\phi\right]\\ \times\, M_{\mathbf{p'}}(\phi) M^*_{\mathbf{p}}(\phi)\, \mathrm{g}(\phi)\, \sin(\omega_0\phi).\end{aligned} \tag{4.5}$$

As funções delta de Dirac na expressão impõem condições de conservação de momento e energia no processo. A função delta $\delta(\Delta p'_\perp - \hbar k_\perp)$ impõe a igualdade $\Delta p'_\perp = \hbar k_\perp$, garantindo que a variação do momento nas direções perpendiculares à propagação ($\perp$) corresponde exatamente ao momento transferido pelo fóton nessas direções. Enquanto a função delta mais elaborada,

$$\delta\left(\Delta p'_n - \hbar k_n - \frac{1}{c}(\Delta E' - \hbar\omega)\right), \tag{4.6}$$

combina a conservação da energia com a conservação da componente de momento na direção de propagação $\mathbf{n}$. Sabendo que a diferença das energias é quase nula pela condição do espalhamento Thomson, as funções delta eliminam a dependência dos momentos de (4.5), deixando todas as quantidades expressas apenas em termos de $\mathbf{k}$,

$$F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \exp(\omega\phi)\, M_{\mathbf{p'}}(\phi) M^*_{\mathbf{p}}(\phi)\, \mathrm{g}(\phi)\, \sin(\omega_0\phi). \tag{4.7}$$

4.2 Probabilidade de Emissão

Para obtermos uma grandeza adimensional a partir de (2.40) realizamos uma integração sobre os momentos finais possíveis para o elétron e sobre os vetores de onda $\mathbf{k}$,

$$W = \int d^3k \int d^3p \lim_{L\to\infty} |\mathcal{M}_{1\to 2}|^2, \tag{4.8}$$

no limite $L \to \infty$, utilizamos a expressão obtida para (4.3) em (2.40) para obter por meio das relação das pré deltas com as deltas de Dirac a seguinte expressão,

$$W = \int d^3k \frac{\xi^2\alpha}{(2\pi)^2}\frac{c^3}{\omega} \int d^3p\, \delta\left[(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})\cdot\mathbf{n} + \frac{\hbar\omega}{c}\right] \delta^2(\Delta p_\perp - \hbar k_\perp)|F(\mathbf{k})|^2|\epsilon(\mathbf{k},\lambda)\cdot\mathbf{s}|^2 \tag{4.9}$$

as condições impostas pelas deltas de Dirac resultam nos vínculos entre o momento final $\mathbf{p}$, os momentos iniciais $\mathbf{p}_0$ e o momento do fóton emitido $\hbar\mathbf{k}$:

$$p_\perp = p_{0_\perp} - \hbar k_\perp; \quad p_n = (p_{0_n} - \hbar k_n) + \frac{\hbar\omega}{c}, \tag{4.10}$$

respeitando essas condições e integrando (4.9), obtemos uma expressão satisfatória,

$$W = \int d^3k\; w(\mathbf{k}); \qquad w(\mathbf{k}) = \frac{\xi^2\alpha}{(2\pi)^2}\frac{c^3}{\omega}\,|F_1(\mathbf{k})|^2\left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{s}\right)^2, \tag{4.11}$$

se considerarmos o fóton espalhado na direção radial em coordenadas esféricas, temos um ângulo θ formado entre o vetor de polarização da onda incidente e a direção de propagação do fóton emitido, além de um ângulo ϕ entre a direção de propagação da onda incidente e a projeção da direção de propagação do fóton emitido no plano x, y, sendo assim, temos duas direções de polarização possíveis, (2.22):

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda) = \begin{cases} \mathbf{e}_\theta, & \lambda = 1, \\ -\mathbf{e}_\phi, & \lambda = 2. \end{cases} \tag{4.12}$$

porém, escolhendo a direção de propagação da onda incidente como sendo ao longo do eixo x, $\mathbf{n} = \mathbf{e_x}$, e a direção de polarização ao longo do eixo z, $\mathbf{s} = \mathbf{e_z}$, o produto $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \boldsymbol{s}$ só é diferente de zero para o caso $\lambda = 1$. Podemos expressar a densidade de probabilidade de emissão por partícula a partir de (4.11),

$$\frac{dW}{d\Omega dk} = \frac{\xi^2 \alpha}{(2\pi)^2} \frac{c^3}{\omega} \left| F_1(\mathbf{k}) \right|^2 \sin^2(\theta)\, k^2 \tag{4.13}$$

essa expressão indica a distribuição angular e espectral da probabilidade de emissão do fóton, em SI, tendo unidades de metro por esfero radiano($\frac{m}{sr}$), aparecendo como objeto de análise em varios outros estudos de espalhamento Compton não linear (Boca and Florescu, 2009; Mackenroth et al., 2010; Seipt et al., 2016), porém, em regimes diferentes do presente trabalho.

4.3 Pulso suave

A partir desse momento precisamos apenas definir a forma do nosso pulso e usar a expressão (4.13) para obtermos expressões interessantes para pulsos particulares e faremos isso nessa sessão. Na prática, lasers reais não emitem pulsos com um início e fim abruptos. Em vez disso, a amplitude do campo cresce gradualmente até atingir um valor máximo e depois decai suavemente. Modelos simples, como a função degrau, são úteis para análises iniciais, mas não capturam a transição realista da intensidade do laser. Nesta versão será tratado o processo induzido por um laser com um pulso envelopado pela forma, (4.14), representado na figura (7),

$$\mathrm{g}(\phi) = \begin{cases} 0 & ; \quad |\phi| > \frac{\tau}{2} \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau}\phi\right) & ; \quad |\phi| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases} \tag{4.14}$$

aqui o tempo de duração é $\tau = NT$, onde $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ é o período fundamental e N representa o número de ciclos. Agora podemos integrar (4.7), para isso definirei os termos abaixo para enxugar as contas subsequentes,

$$\kappa_n = (n_1 + n_2 + n_3)k_0 - \frac{k_0}{N}(n_3 - n_2); \qquad \xi \frac{k}{k_0} \cos(\theta) = \beta, \tag{4.15}$$

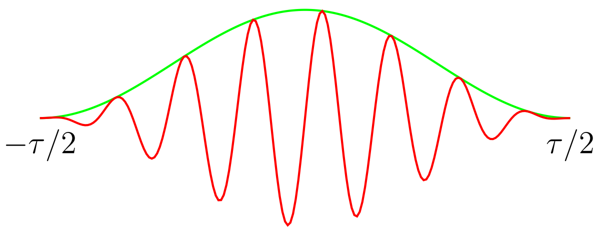


Figura 2: Representação de um pulso suave.

o parâmetro κ_n captura contribuições harmônicas do sistema. n_1, n_2, n_3 são índices associados às harmônicas do sistema. Assim, após algumas passagens desenvolvidas no apêndice A obtemos a seguinte expressão analítica A função $F(\mathbf{k})$ que é dada por uma série de funções de Bessel (Arfken et al., 2012) e foi desenvolvida no apêndice,

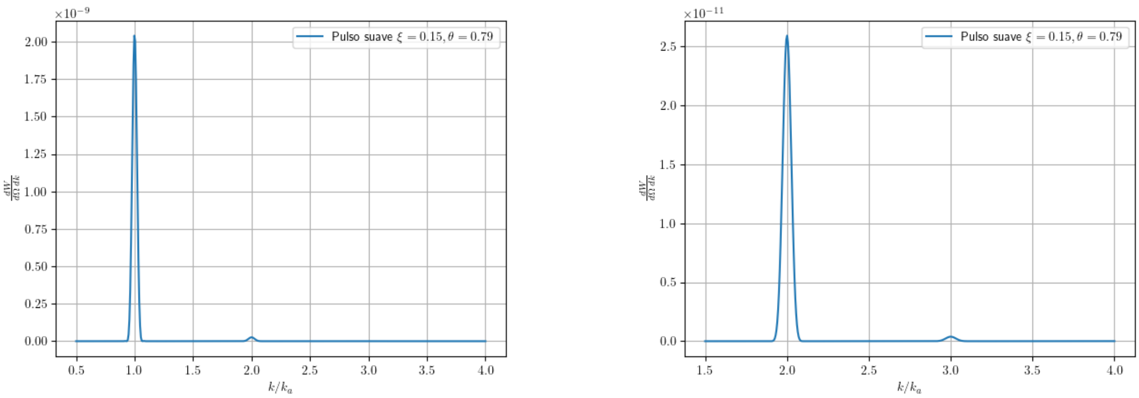
$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{k}) = & \sum_{n_1,n_2,n_3=-\infty}^{\infty} i^{n_1+n_2+n_3} J_{n_1}\left(\frac{\beta}{2}\right) J_{n_2}\left(\frac{1}{4}\frac{\beta}{(1+\frac{1}{N})}\right) J_{n_3}\left(\frac{1}{4}\frac{\beta}{(1-\frac{1}{N})}\right) \\
& \times \left\{ \left[\frac{\sin\left[(\frac{k}{2}+\frac{k_x}{2}-\kappa_n)\frac{N\pi}{k_0}\right]}{c(\frac{k}{2}+\frac{k_x}{2}-\kappa_n)} - \frac{\sin\left[(\frac{k}{2}-\frac{k_x}{2}+\kappa_n)\frac{N\pi}{k_0}\right]}{c(\frac{k}{2}-\frac{k_x}{2}+\kappa_n)} \right] \right. \\
& + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left[\left(\frac{3k}{2}+\frac{k_x}{2}+\frac{k_0}{N}-\kappa_n\right)\frac{N\pi}{k_0}\right]}{c(\frac{3k}{2}+\frac{k_x}{2}+\frac{k_0}{N}-\kappa_n)} - \frac{\sin\left[\left(\frac{k}{2}-\frac{k_x}{2}+\frac{k_0}{N}+\kappa_n\right)\frac{N\pi}{k_0}\right]}{c(\frac{k}{2}-\frac{k_x}{2}+\frac{k_0}{N}+\kappa_n)} \right. \\
& \left.\left. + \frac{\sin\left[\left(\frac{3k}{2}+\frac{k_x}{2}-\frac{k_0}{N}-\kappa_n\right)\frac{N\pi}{k_0}\right]}{c(\frac{3k}{2}+\frac{k_x}{2}-\frac{k_0}{N}-\kappa_n)} - \frac{\sin\left[\left(\frac{k}{2}-\frac{k_x}{2}-\frac{k_0}{N}+\kappa_n\right)\frac{N\pi}{k_0}\right]}{(\frac{k}{2}-\frac{k_x}{2}-\frac{k_0}{N}+\kappa_n)} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

5 Resultados

5.1 Emissão de fótons

O primeiro resultado significativo é a curva obtida a partir de (4.13). Para a geração e análise dos resultados gráficos deste trabalho, utilizamos as bibliotecas matplotlib.pyplot e scipy.special.jv. A primeira foi empregada para a visualização dos dados, enquanto a segunda permitiu o cálculo das funções de Bessel.

Nesta primeira análise, consideramos um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ entre o vetor de polarização z da onda incidente e a direção de propagação do fóton emitido, além de um ângulo $\phi = \frac{\pi}{4}$ entre a direção de propagação x da onda incidente e a projeção da direção de propagação do fóton emitido no plano x, y, uma onda incidente com a frequência $\omega_0 = 2.7 \times 10^{15}$ rad/s, um período $\tau = 30T = \frac{60\pi}{\omega_0}$s, onde $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ é o período fundamental, e $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$.



(a) 1º e 2º harmônicos

(b) 2º e 3º harmônicos

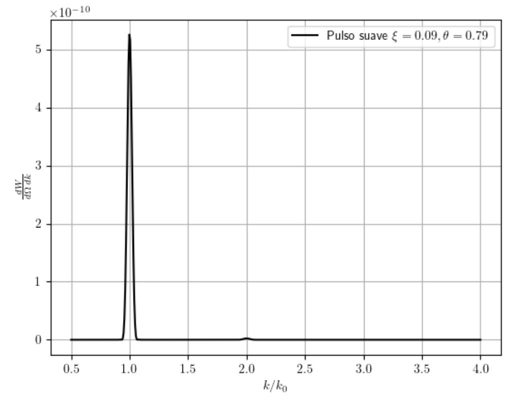
Figura 3: Densidade de probabilidade de emissão por particula($\frac{m}{sr}$).

Na Figura 3a, observamos que há uma probabilidade associada à emissão de um fóton com vetor de onda de módulo k_0, conforme esperado em um espalhamento Thomson não linear no regime de baixas e moderadas intensidades do campo, um fóton espalhado sai com praticamente a mesma frequênca, no entanto, também há a possibilidade de emissão de um fóton com o dobro da frequência do fóton incidente e um fóton com o triplo, um efeito não linear característico, o elétron absorve n fótons e emite apenas um. Esse fenômeno torna-se mais evidente na

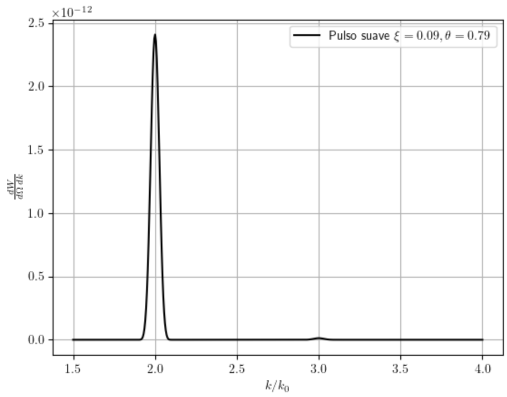
Figura 3b quando damos um zoom na região.

5.2 Influência de ξ

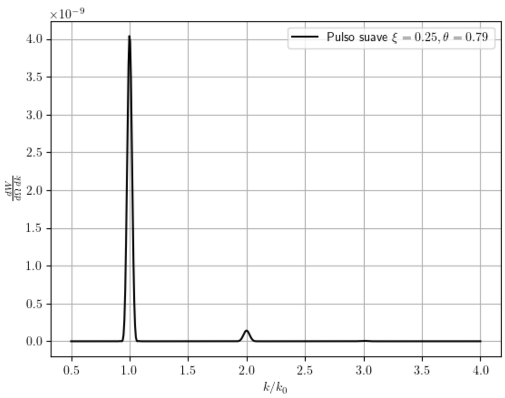
Para avaliar os efeitos não lineares, realizamos cálculos para $\xi = 0.09$ e $\xi = 0.25$, comparando as curvas obtidas ao fixar a frequência $\omega_0 = 3.77 \times 10^{15}$ rad/s, um período $\tau = 10T$.



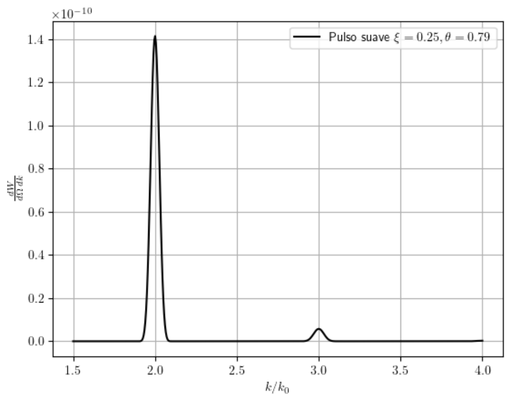
(a) $\xi = 0.09$, 1º e 2º harmônicos



(b) $\xi = 0.09$, 2º e 3º harmônicos



(c) $\xi = 0.25$, 1º e 2º harmônicos



(d) $\xi = 0.25$, 2º e 3º harmônicos

Figura 4: Densidade de probabilidade de emissão por particula para diferentes intensidades do campo (ξ).

Conforme esperado, à medida que a intensidade do campo aumenta, a contribuição de ordens harmônicas superiores se torna mais pronunciada. No entanto, devido ao regime relativamente fraco considerado ($\xi < 1$), esses efeitos são sutis e as frequências dos harmônicos k/k_0 apresentam apenas pequenos desvios em relação aos valores previstos pelo espalhamento linear.

A presença dessas correções pode ser atribuída à transferência de energia do fóton para o elétron no processo de espalhamento, modificando ligeiramente a distribuição de frequências dos fótons emitidos explicitada na expressão (4.10). Este efeito é especialmente visível nas curvas para $\xi = 0.25$ correspondente as figuras 4c e 4d, onde o espectro apresenta deslocamentos pequenos nos picos harmônicos.

5.3 Direções do Espalhamento

A função (4.16) apresenta uma dependência direta de $\cos(\theta)$, sugerindo que a probabilidade é maximizada quando $\cos(\theta)$ atinge seu valor máximo, como $\cos(\theta)$ é máximo para $\theta = 0$, esse seria um candidato natural, entretanto, considerando a influência da polarização, a expressão (4.13) é maximizada para $\theta = \frac{\pi}{2}$, porém, os termos das funções de Bessel em (4.16), para qualquer $n_i > 0$, se anulam com esse valor devido a (4.15), ocultando os efeitos não lineares. Portanto, esses efeitos são mais intensos para valores intermediários de θ, que podemos avaliar por meio da análise gráfica da Figura 5.

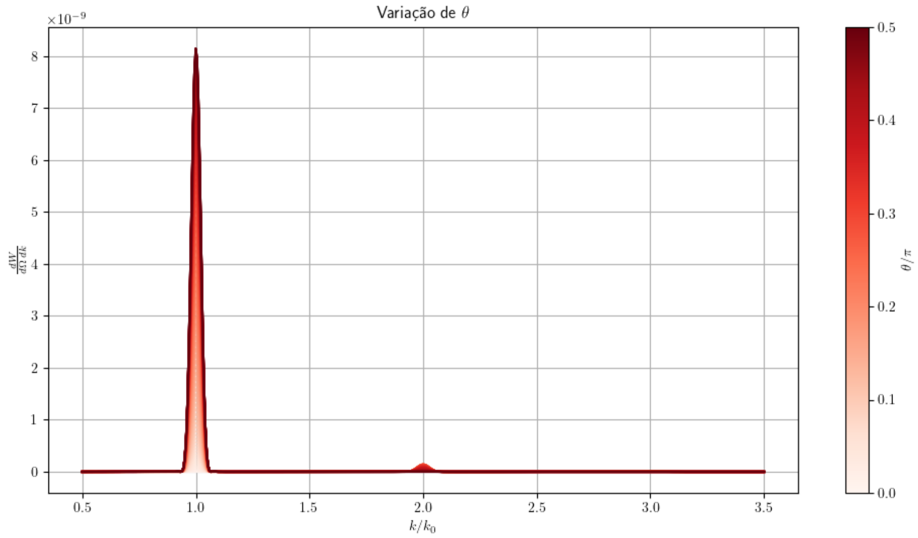


Figura 5: Variação de θ com $\xi = 0.25$, 1º e 2º harmônicos.

Percebe-se que, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, maximizamos o primeiro harmônico, porém perdemos a produção do segundo. Já para $\theta = 0$, não há espalhamento. Por outro lado, o valor intermediário $\theta = \frac{\pi}{4}$ maximiza o segundo harmônico.

Para o ângulo azimutal, como a expressão depende explicitamente de ϕ, devido ao termo k_x dentro do argumento da função seno torna-se complexa a determinação de um valor mais eficiente, porém usando de ferramentas computacionais conseguimos ver que as variações nesse ângulo não geram mudanças significativas na expressão final, por isso fixaremos $\phi = \frac{\pi}{4}$ para as próximas analises

5.4 Comparação entre Pulsos Retangular e Pulso Suave

A escolha da forma do pulso também influencia chance de emissão dos fótons. Para isso, utilizamos o pulso retangular desenvolvido no TCC de Henrique (Falcão, 2025), como forma de comparação.

$$g(\phi) = \begin{cases} 0 \quad ; \quad |\phi| > \frac{\tau}{2} \\ 1 \quad ; \quad |\phi| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases} \tag{5.1}$$

Enquanto um pulso retangular corresponde a uma distribuição espectral mais restrita, um pulso cosseno ao quadrado apresenta uma variação gradual da intensidade ao longo do tempo. Integração do vetor de Poynting (3.8) para os pulsos retangular e suave e abaixo fizemos a comparação:

Pulso Retangular:

$$f_l(\tau) = \frac{A_{0ret}^2 \omega_0^2}{2c} \tau \tag{5.2}$$

Pulso Suave:

$$f_l(\tau) = \frac{A_{0suave}^2 \omega_0^2}{2c} \left[\frac{3}{16}\tau + \frac{3}{8N}\tau + \frac{1}{16N^2}\tau \right] \tag{5.3}$$

Igualando as expressões obtidas para os diferentes perfis de pulso, encontramos um coeficiente dependente apenas do número de ciclos. Esse coeficiente nos permite avaliar a relação entre as amplitudes dos campos para uma mesma energia por unidade de área, sendo dado por:

$$R(N) = \left[\frac{3}{16} + \frac{3}{8N} + \frac{1}{16N^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.4}$$

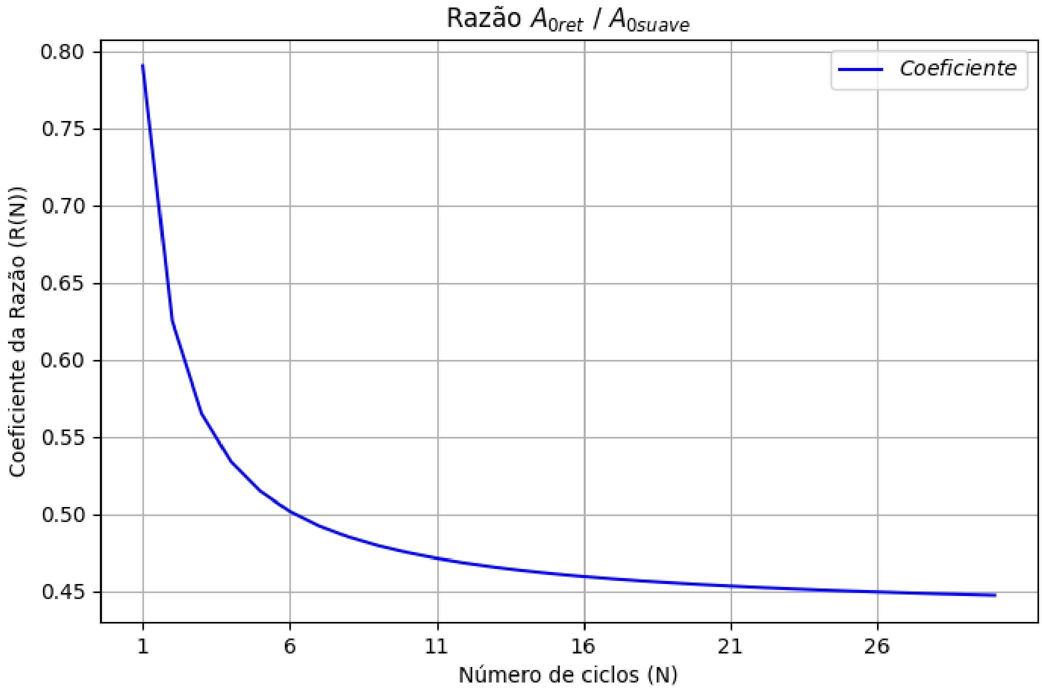


Figura 6: Comparação da razão da amplitude máxima dos pulsos suave e retangular

No limite de muitos ciclos ($N \to \infty$), essa razão tende a aproximadamente 0,45. Isso confirma que o pulso suave é mais eficiente que o retangular, isso se dá pelo seguinte motivo, o pulso suave apresenta uma amplitude máxima maior porque sua energia está mais concentrada em um curto intervalo de tempo, enquanto no pulso retangular a energia é distribuída uniformemente ao longo de toda a sua duração.

Como o parâmetro clássico de intensidade ξ é diretamente proporcional a A_0 dos pulsos, essa relação nos permite comparar os dois pulsos a uma mesma energia por unidade de área. Para isso, fixamos $N = 30$ ciclos e consideramos ξ do pulso suave igual a 0.25. O valor de ξ para o pulso retangular é então ajustado pelo fator da razão $R(30)$, ou seja,

$$\xi_{retangular} = R(30) \times 0.25 \tag{5.5}$$

com essa escolha, podemos comparar diretamente os efeitos da forma do pulso na interação com a partícula, garantindo que ambos carreguem a mesma energia por unidade de área. Abaixo, apresentamos as curvas correspondentes para os dois casos. Para o pulso suave na figura 7 $\frac{dW}{d\Omega dk} \approx 4,1 \cdot 10^{-9}\ \frac{m}{sr}$ e na figura 8 para o pulso retangular $\frac{dW}{d\Omega dk} \approx 1,5 \cdot 10^{-9}\ \frac{m}{sr}$.

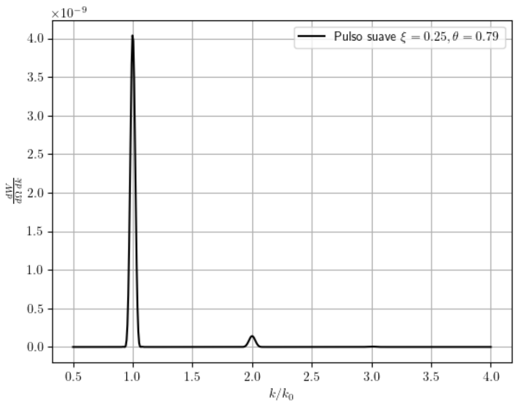


Figura 7: Curva do pulso suave com $\xi = 0.25$ e $N = 30$ ciclos

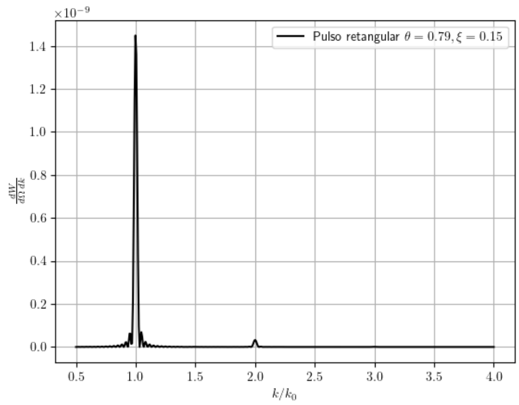


Figura 8: Curva do pulso retangular com $\xi = R(30) \times 0.25$ e $N = 30$ ciclos

6 Conclusão

Neste trabalho, utilizando teoria de perturbação em ordens menores, obtivemos uma redução satisfatória para o hamiltoniano de interação no regime não relativístico de espalhamento Thomson não linear. Isso permitiu a obtenção de expressões que analisamos dentro dos limites impostos por esse regime.

Introduzimos um novo perfil de pulso, não encontrado na literatura, que denominamos pulso suave. Aplicamos o formalismo desenvolvido para obter uma expressão para a densidade de probabilidade de emissão por particula, permitindo-nos analisar a influência do parâmetro clássico, do número de ciclos e das direções de espalhamento. Além disso, realizamos um comparativo com o pulso retangular, onde verificamos que o pulso suave apresenta maior eficiência para a mesma energia por unidade de área.

Como perspectivas para trabalhos futuros, poderíamos avaliar um regime em que a componente da força magnética sobre a partícula fosse relevante, comparando as discrepâncias entre os resultados para melhor calibrar o regime de validade e o mesmo para uma análise considerando uma partícula com spin $\frac{1}{2}$, como um elétron real, e investigar as diferenças nos resultados para refinar ainda mais o modelo desenvolvido.

Referências

J. J. Thomson. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. *Philosophical Magazine*, 25:347–365, 1903.

Arthur H. Compton. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Physical Review*, 21(5):483–502, 1923. doi: 10.1103/PhysRev.21.483. URL https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.21.483.

D. M. Volkov. Über eine klasse von lösungen der diracschen gleichung. *Zeitschrift für Physik*, 94:250–260, 1935. doi: 10.1007/BF01331022.

T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 187:493–494, 1960. doi: 10.1038/187493a0.

Erwin Schrödinger. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14:664–666, 1926. doi: 10.1007/BF01507634.

John R. Klauder. Continuous-representation theory. i. postulates of continuous-representation theory. *Journal of Mathematical Physics*, 4(8):1055–1058, 1963. doi: 10.1063/1.1703983.

Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Physical Review*, 130:2529–2539, 1963. doi: 10.1103/PhysRev.130.2529.

L. S. Brown and T. W. B. Kibble. Interaction of intense laser beams with electrons. *Physical Review*, 133:A705, 1964.

A. I. Nikishov and V. I. Ritus. Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field. i. *Soviet Physics JETP*, 19:529–541, 1964.

T. J. Englert and E. A. Rinehart. Second-harmonic photons from the interaction of free electrons with intense laser radiation. *Phys. Rev. A*, 28:1539–1545, Sep 1983. doi: 10.1103/PhysRevA.28.1539. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.28.1539.

Zoltan Fried and Joseph H. Eberly. Scattering of a high-intensity, low-frequency electromagnetic wave by an unbound electron. *Phys. Rev.*, 136:B871–B887, Nov 1964. doi: 10.1103/PhysRev.136.B871. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.136.B871.

WH Kegel. Nonlinear thomson scattering and nonthermal radio emission. *Astronomy and Astrophysics, Vol. 13, p. 280 (1971)*, 13:280, 1971.

Y. Y. Lau, Fei He, Donald P. Umstadter, and Richard Kowalczyk. Nonlinear thomson scattering: A tutorial. *Physics of Plasmas*, 10(5):2155–2162, 2003. doi: 10.1063/1.1565115.

J. Bergou and S. Varró. Optically induced band structure of free electrons in an external plane wave field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 14(12):2281–2303, 1981. doi: 10.1088/0305-4470/14/12/018.

Joseph H. Eberly. Interaction of very intense light with free electrons. In *Progress in Optics*, volume 7, pages 359–415. Elsevier, 1969. doi: 10.1016/S0079-6638(08)70598-5. URL https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70598-5.

Madalina Boca and Viorica Florescu. Nonlinear compton scattering with a laser pulse. *Physical Review A*, 80(5):053403, 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.80.053403.

F. Mackenroth, A. Di Piazza, and C. H. Keitel. Determining the carrier-envelope phase of intense few-cycle laser pulses. *Physical Review Letters*, 105:063903, 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.063903.

Daniel Seipt, Vasily Kharin, Sergey Rykovanov, Andrey Surzhykov, and Stephan Fritzsche. Analytical results for nonlinear compton scattering in short intense laser pulses. *Journal of Plasma Physics*, 82:655820203, 2016. doi: 10.1017/S002237781600026X.

S. Bragin and A. Di Piazza. Electron-positron annihilation into two photons in an intense plane-wave field. *Physical Review D*, 102:116012, 2020. doi: 10.1103/PhysRevD.102.116012.

John R. Klauder. The action option and a feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Annals of Physics*, 11:123–168, 1960. doi: 10.1016/0003-4916(60)90131-7.

David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4 edition, 2017. ISBN 978-1108420419.

A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, and G. Torgrimsson. Advances in qed with intense background fields. *Physics Reports*, 1010:1–138, 2023.

J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, San Francisco, 2nd edition, 2011.

James D. Bjorken and Sidney D. Drell. *Relativistic Quantum Fields*. International Series in Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, 1965. ISBN 978-0070054945.

F. Ehlotzky. Optically induced band structure of free electrons in an external plane wave field. *Journal of Mathematical Physics*, 23:1254–1259, 1982. doi: 10.1063/1.525718.

Henrique Araujo Falcão. Abordagem quântica para espalhamento thomson não linear. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Sergipe, 2025. Submetido, 2025.

M. Boca and V. Florescu. Thomson and compton scattering with an intense laser pulse. *The European Physical Journal D*, 60:369–377, 2010. doi: 10.1140/epjd/e2010-10429-y.

V. Kharin, D. Seipt, and S. Rykovanov. Temporal laser pulse shape effects in nonlinear thomson scattering. *Physical Review A*, 93:063801, 2016.

A. Angioi, F. Mackenroth, and A. Di Piazza. Nonlinear single compton scattering of an electron wave packet. *Physical Review A*, 93:052102, 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.052102.

George B. Arfken, Hans J. Weber, and Frank E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 7th edition, 2012. ISBN 978-0-12-384654-9.

A - Integração de $F(\mathbf{k})$

Para realizar a integração (4.7), explicitarei aqui o termo resultante do produto das partes vestidas da função de onda(2.16) para o pulso suave:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{p'}}(\phi)M^*_{\mathbf{p}}(\phi) = \exp&\left[-\frac{i}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{2m}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\cos(\omega_0\phi)\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0+\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\cos\left(\omega_0\phi\left(1+\frac{2\pi}{\omega_0\tau}\right)\right)\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{i}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{4m(\omega_0-\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\cos\left(\omega_0\phi\left(1-\frac{2\pi}{\omega_0\tau}\right)\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{2m}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0+\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0-\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right]
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

As 3 ultimas exponenciais podem ser desconsideradas pois são termos constantes(uma fase global), e usando expansões em Jacobi-Anger podendo reescreever as 3 primeiras da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{p'}}(\phi)M^*_{\mathbf{p}}(\phi) = &\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n\left(\frac{1}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{2m}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right)\exp\left[-in\omega_0\phi\right] \\
&\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0+\frac{2\pi}{\tau})}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right)\exp\left[-in\omega_0\phi\left(1+\frac{2\pi}{\omega_0\tau}\right)\right] \\
&\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0-\frac{2\pi}{\tau})}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right)\exp\left[-in\omega_0\phi\left(1-\frac{2\pi}{\omega_0\tau}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Irei organizar mais um pouco as coisas:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{p'}}(\phi)M^{*}_{\mathbf{p}}(\phi) = \sum_{n_1,n_2,n_3=-\infty}^{\infty} & i^{n_1+n_2+n_3} J_{n_1}\left(\frac{1}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{2m}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right) \\
& \cdot J_{n_2}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0+\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right) \\
& \cdot J_{n_3}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0-\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right) \\
& \cdot \exp\left[-i\omega_0\phi(n_1+n_2+n_3) - i\phi\frac{2\pi}{\tau}(n_2-n_3)\right]
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

Agora podemos integrar $F(\mathbf{p},\mathbf{p'},\mathbf{k})$, para isso definirei o termo abaixo para enxugar as contas subsequentes:

$$
\Omega_n = (n_1+n_2+n_3)\omega_0 + \left(\frac{c}{2\hbar}(\mathbf{\Delta p}-\hbar\mathbf{k}).\hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2\hbar}(E_1-E_2-\hbar\omega) + \frac{2\pi}{\tau}(n_2-n_3)\right) \tag{A.4}
$$

Permitendo então seguir com o calcúlo

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{p},\mathbf{p'},\mathbf{k}) = \sum_{n_1,n_2,n_3} & i^{n_1+n_2+n_3} J_{n_1}\left(\frac{1}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{2m}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right) J_{n_2}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0+\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right) \\
& \cdot J_{n_3}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0-\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin(\omega\phi)\cos^2\left(\frac{\pi}{\tau}\phi\right) e^{-i\Omega_n\phi}\, d\phi
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

Bastando resolver a integral:

$$
I = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin(\omega\phi)\cos^2\left(\frac{\pi}{\tau}\phi\right) e^{-i\Omega_n\phi}\, d\phi \tag{A.6}
$$

reselvondo-a em duas partes, I_1 e I_2

Passo 1: Expansão de $\cos^2(\Omega_n)$

Expandindo a integral em duas partes:

$$I = \frac{1}{2}\int \sin(\omega\phi)e^{-i\Omega_n\phi}\,d\phi + \frac{1}{2}\int \sin(\omega\phi)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}\phi\right)e^{-i\Omega_n\phi}\,d\phi \tag{A.7}$$

Chamando essas duas integrais de I_1 e I_2, respectivamente.

Passo 2: Resolução de I_1

A primeira integral I_1 é dada por:

$$I_1 = \int \sin(\omega\phi)e^{-i\Omega_n\phi}\,d\phi \tag{A.8}$$

Usamos a forma exponencial de $\sin(\Omega_n)$ resultando em:

$$I_1 = \int \frac{e^{i\omega\phi} - e^{-i\omega\phi}}{2i}e^{-i\Omega_n\phi}\,d\phi \tag{A.9}$$

Distribuíndo $e^{-i\Omega_n\phi}$ e integrando cada termo:

$$I_1 = \frac{1}{2i}\int e^{i(\omega-\Omega_n)\phi}\,d\phi - \frac{1}{2i}\int e^{-i(\omega+\Omega_n)\phi}\,d\phi \tag{A.10}$$

Integrando:

$$I_1 = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i(\omega-\Omega_n)\phi}}{i(\omega-\Omega_n)} - \frac{e^{-i(\omega+\Omega_n)\phi}}{i(\omega+\Omega_n)}\right]\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \tag{A.11}$$

Passo 3: Resolução de I_2

Agora, para a integral I_2:

$$I_2 = \int \sin(\omega\phi)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}\phi\right)e^{-i\Omega_n\phi}\,d\phi \tag{A.12}$$

Essa expressão pode ser escrita na forma:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \left[\sin\left(\omega\phi + \frac{2\pi}{\tau}\phi\right) + \sin\left(\omega\phi - \frac{2\pi}{\tau}\phi\right) \right] e^{-i\Omega_n \phi} \, d\phi \tag{A.13}$$

Agora escrevemos as exponencias como senos e substituimos nos dois termos:

$$I_2 = \frac{1}{4i} \int \left[e^{i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau}\right)\phi} - e^{-i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau}\right)\phi} + e^{i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau}\right)\phi} - e^{-i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau}\right)\phi} \right] e^{-i\Omega_n \phi} \, d\phi \tag{A.14}$$

Simplificando a integral:

$$I_2 = \frac{1}{4i} \int \left[e^{i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n\right)\phi} - e^{-i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n\right)\phi} + e^{i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n\right)\phi} - e^{-i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n\right)\phi} \right] d\phi \tag{A.15}$$

Agora, integrando cada termo:

$$I_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n\right)\phi}}{\omega + \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n} - \frac{e^{-i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n\right)\phi}}{\omega + \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n} + \frac{e^{i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n\right)\phi}}{\omega - \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n} - \frac{e^{-i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n\right)\phi}}{\omega - \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n} \right] \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \tag{A.16}$$

Agora o resultado final:

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2i} & \left[\frac{e^{i(\omega - \Omega_n)\phi}}{i(\omega - \Omega_n)} - \frac{e^{-i(\omega + \Omega_n)\phi}}{i(\omega + \Omega_n)} \right] \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n\right)\phi}}{\omega + \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n} - \frac{e^{-i\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n\right)\phi}}{\omega + \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n} \right. \\ & \left. + \frac{e^{i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n\right)\phi}}{\omega - \frac{2\pi}{\tau} - \Omega_n} - \frac{e^{-i\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n\right)\phi}}{\omega - \frac{2\pi}{\tau} + \Omega_n} \right] \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \end{aligned} \tag{A.17}$$

Assim obtemos o resultado da integração:

$$F(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \sum_{n_1,n_2,n_3=-\infty}^{\infty} i^{n_1+n_2+n_3} J_{n_1}\left(\frac{1}{\hbar\omega_0}\frac{eA_0}{2m}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right)\cdot J_{n_2}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0+\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right)$$
$$\cdot J_{n_3}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{eA_0}{4m(\omega_0-\frac{2\pi}{\tau})}(\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right)\cdot I \tag{A.18}$$

Após a consideração do momento inicial nulo e o uso das funções delta de Dirac a função passa a depender apenas do vetor de onda k e tomam a forma da expressão (4.16) após substituirmos os limites de integração de I e transformando as esponencias em senos além disso usamos o fato de que $\tau = NT$.