UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE ITABAIANA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE MENDONÇA LIMA

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES SIMÉTRICAS

Itabaiana
2025

ALEXANDRE MENDONÇA LIMA

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES SIMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Alan Almeida Santos.

Itabaiana
2025

Documento assinado digitalmente
ALEXANDRE MENDONCA LIMA
Data: 11/04/2025 14:20:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

ALEXANDRE MENDONÇA LIMA

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES SIMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática de Itabaiana, Universidade Federal de Sergipe, como requisito avaliativo para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
ALAN ALMEIDA SANTOS
Data: 11/04/2025 14:32:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alan Almeida Santos
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Documento assinado digitalmente
AISLAN LEAL FONTES
Data: 11/04/2025 15:56:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Aislan Leal Fontes
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Documento assinado digitalmente
SAMUEL BRITO SILVA
Data: 11/04/2025 16:29:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Samuel Brito Silva
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Resultado: Aprovado. Data: 11 / 04 / 2025.

Dedico este trabalho a Deus, ao meu Senhor e Salvador, Jesus de Nazaré, e à minha mãe querida, Maria Santíssima.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por sempre colocar pessoas extraordinária na minha vida para cuidar de mim nos momentos em que mais preciso.

À minha esposa, Jaíne, que desde meu primeiro dia de aula na UFS esteve ao meu lado me incentivando, apoiando e ensinando (Amo você!).

Aos meus pais, Maria Lourdes e Antônio, que mesmo sem condições básicas, me ensinaram a lutar pelos meus sonhos e metas. E meus irmãos, em especial Tamires e Taise que sempre me incentivaram a perseverar nos estudos.

À minha vovozinha querida, Mirian, meus queridos amigos da feira, e à minha sogra, Josefa, e ao meu cachorrinho, Bernardo.

Ao meu orientador, que respeitando minhas limitações, fez-se sempre disponível para auxiliar-me. E todos os meus professores, desde os da pré-escola até os do DMAI, que compartilharam comigo suas experiências enriquecedoras, e com suas histórias de vida me inspiraram.

E por fim, aos meus irmãos da RCC, que intercederam por mim durante este trabalho, em especial aos do G.O. Força de Deus.

RESUMO

Este texto tem o objetivo de expor o Teorema Fundamental das Funções Simétricas e suas aplicações. Além disso, busca incentivar o leitor a utilizar a simetria/invariância, uma ferramenta simples e de baixo custo pedagógico para o ensino. Com base nisso e em outros resultados presentes nos currículos escolares desde o Ensino Médio, o leitor poderá resolver problemas mais complexos, como equações cúbicas, quádricas e biquadráticas, além de encontrar fórmulas para determinar suas raízes. Também será possível resolver sistemas de polinômios em duas variáveis, utilizando apenas seus coeficientes e as informações fornecidas pelo teorema.

Palavras-chave: simetria; invariância; funções simétricas; fórmulas; equações polinomiais

ABSTRACT

This text aims to present the Fundamental Theorem of Symmetric Functions and its applications. In addition, it seeks to encourage the reader to use symmetry/invariance, a simple and low-cost pedagogical tool for teaching. Based on this and other results presented in school curricula since high school, the reader will be able to solve more complex problems, such as cubic, quadric and biquadratic equations, in addition to finding formulas to determine their roots. It will also be possible to solve systems of polynomials in two variables, using only their coefficients and the information provided by the theorem.

Keywords: symmetry; invariance; symmetric functions; formulas; polynomial equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A referência principal para todo nosso estudo é o livro [5]. Aqui, estudaremos o **Teorema Fundamental das Funções Simétrica Elementares-(TFFSE)** e algumas de suas aplicações práticas. Vamos determinar as raízes de um polinômio através dos coeficientes, que são conhecidos, sem necessariamente ter que recorrer a números com radicais. Encontrar pontos de interseção entre cônicas, e fórmulas para determinar as soluções de equações de grau menor que cinco. Entre outras aplicações que veremos no decorrer do texto.

Um simples exemplo de aplicação do TFFSE é resolver o problema abaixo.

1.1 PROBLEMA INICIAL

Determine
$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3},$$
sabendo que x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação

$$x^3-2x^2-2x-2=0.$$

Para resolver este problema, é natural que pensemos primeiramente em determinar o valor de cada raiz usando o método de Cardano-Tartaglia, para depois fazer o produto entre suas inversas multiplicativas, e por último realizar a soma das frações. Porém, esse processo trabalhoso e de alto custo computacional, pode ser simplificado a algumas linhas quando utilizado o conhecimento do TFFSE.

Vamos aplicar o processo descrito anteriormente em uma equação quadrática,

$$x^2+3x-2=0,$$

onde determinaremos
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2},$$
sabendo que r_1 e r_2 são as raízes da equação. Pela fórmula para resolução de equações quadráticas, as raízes
$$r_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, r_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2},$$
quando aplicadas suas inversa e calculada a soma resultará em

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{-3+\sqrt{17}}+\frac{2}{-3-\sqrt{17}}=\frac{2(-3-\sqrt{17}-3+\sqrt{17})}{-8}=\frac{3}{2}.$$

Note que mesmo sendo uma equação quadrática, é muito trabalhoso e arriscado usar este método. Imagina, no caso da equação inicial, fazer o produto entre radicais cúbicos duplos.... Mas ao usarmos a informação de que *uma função simétrica das raízes pode ser* *escrita em termos dos coeficientes de seu polinômio*, podemos fazer este tipo de cálculo com rapidez e segurança. Vejamos com outros exemplos.

Exemplo 1 Dada a equação
$$x^2 + x + 1 = 0,$$
e suas raízes, x_1, x_2, temos que $x_1 + x_2 = -1$, é o coeficiente do termo de grau um e, $x_1 x_2 = 1$, é o termo de grau zero. Assim, ao tomarmos uma função do tipo

$$x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -1,$$

podemos trabalhar com os coeficientes da equação, que neste caso são inteiros e conhecidos, para determinarmos uma função simétrica das raízes, sem nem mesmo conhecê-las.

Daí, de forma análoga ao que fizemos no exemplo anterior, como x_1, x_2, x_3 são raízes da equação
$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0,$$
e $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ é o coeficiente do termo de grau dois, e $x_1 x_2 x_3 = 2$ é o do de grau zero, a soma resultará em
$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_1 x_2 x_3} = \frac{2}{2} = 1$$
Assim, resolvemos o problema de forma rápida e segura, sem ao menos conhecer as raízes.

2 POLINÔMIOS

Neste capítulo, estão reunidos alguns resultados algébricos, relacionados aos polinômios, presentes na educação do aluno desde o Ensino Médio.

2.1 POLINÔMIOS

Definição 1 *Um polinômio sobre* $\mathbb{R}$ *é uma função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *do tipo*

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ *é um natural, e* $a_i \in \mathbb{R}$.

Observações:
i) Os a_i são chamados de *coeficientes*, x de variável, e os monômios a_ix^i de termos do polinômio.
ii) Sendo $a_n \neq 0$, o grau de f será $\partial f = n$, e a_nx^n será o termo líder.
iii) Denotaremos por $f \in \mathbb{D}[x]$ os polinômios sobre $\mathbb{R}$ com variável x e coeficientes em $\mathbb{D}$.
iv) Chamaremos de identicamente nulo, o polinômio em que todos os coeficientes são zero, $0(x) = 0$.

Exemplo 2 O polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 2$ tem coeficientes em $\mathbb{Z}$, termo líder x^3, em que $a_3 = 1$, e é um polinômio sobre $\mathbb{R}$.

2.1.1 DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Sejam $F, P \in \mathbb{R}[x]$ e $m \leq n$

$$\begin{array}{rcll} F(x) &=& a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, & \qquad a_n \neq 0 \\ P(x) &=& b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, & \qquad b_m \neq 0. \end{array}$$

Abaixo, temos o polinômio $f_1(x) \neq 0$, que é o resto parcial,

$$F(x) - c_0x^{n-m}P(x) = f_1(x), \qquad \text{com } c_0 = \frac{a_n}{b_m},$$

e terá grau $\partial f_1 = n_1 < n$. Se $m \leq n_1$, tomaremos uma constante, c_1, dividindo os coeficientes do termo líder de $f_1(x)$ pelo de $P(x)$, e assim encontraremos

$$f_1(x) - c_1x^{n_1-m}P(x) = f_2(x),$$

que se não for identicamente nulo, terá grau $\partial f_2 = n_2 < n_1$. Se $m \leq n_2$, repetiremos o processo. E continuaremos a repetir até um certo f_{k+1} que seja identicamente nulo ou de grau $n_{k+1} < m$. Assim, temos as identidades abaixo,

$$\begin{array}{rcl} F(x) - c_0 x^{n-m} P(x) & = & f_1(x), \\ f_1(x) - c_1 x^{n_1 - m} P(x) & = & f_2(x), \\ f_2(x) - c_2 x^{n_2 - m} P(x) & = & f_3(x), \\ f_3(x) - c_3 x^{n_3 - m} P(x) & = & f_4(x), \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(x) - c_k x^{n_k - m} P(x) & = & f_{k+1}(x), \end{array}$$

que quando somadas, os restos parciais se anularão e os

$$c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n_1 - m} + \cdots + c_k x^{n_k - m} = Q(x), \qquad f_{k+1}(x) = R(x)$$

formarão a identidade

$$F(x) = P(x)Q(x) + R(x),$$

em que $\partial R < m$ ou $R(x) = 0$.

Teorema 1 *Dados $F(x), P(x) \in \mathbb{R}[x]$, com $P(x) \neq 0$. Existem únicos $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que*

$$F(x) = P(x)Q(x) + R(x), \ \text{com } 0 \leq \partial R < \partial P. \tag{1}$$

Demonstração: Sejam

$$F(x) = P(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{e} \qquad F(x) = P(x)Q_1(x) + R_1(x)$$

com $0 \leq \partial R, \partial R_1 < \partial P$. Supondo que $Q(x) \neq Q_1(x)$,

$$\begin{array}{rlcll} \Rightarrow & P(x)Q(x) + R(x) & = & P(x)Q_1(x) + R_1(x) & \\ & R_1(x) - R(x) & = & P(x)[Q(x) - Q_1(x)] & \\ \Rightarrow & \partial[R_1(x) - R(x)] & = & \partial\{P(x)[Q(x) - Q_1(x)]\} & \\ & \partial[R_1 - R] & = & \partial[P] + \partial[Q - Q_1] & \geq \partial[P] \end{array}$$

Note que $\partial[R_1 - R] \leq \max\{\partial R, \partial R_1\} < \partial P$. Contradição! Portanto, $Q(x) = Q_1(x)$ e $R(x) = R_1(x)$. ■

Nomenclatura: $F(x)$ é o dividendo, $P(x)$ é o divisor, $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é o resto da divisão.

Exemplo 3 Sejam $f_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $f_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $f_3 = x_1x_2x_3$, $A(x) = -x^3 + f_1x^2 - f_2x + f_1f_2$ e $B(x) = x^3 - f_1x^2 + f_2x - f_3$.

Perceba que $A(x), B(x) \in \mathbb{Z}[f_1, f_2, f_3][x]$ são polinômios não nulos, e ao dividirmos $A(x)$ por $B(x)$ o quociente $Q(x) = -1$ e o resto $R(x) = f_1f_2 - f_3$ também pertencerá a $\mathbb{Z}[f_1, f_2, f_3][x]$. Assim, podemos escrever

$$A(x) = B(x).Q(x) + R(x) = -B(x) + f_1f_2 - f_3.$$

Teorema 2 *O resto obtido dividindo $f \in \mathbb{R}[x]$ por $x - c$ é o valor do polinômio $f(x)$ para $x = c$, isto é, $f(c)$.*

Demonstração:
Dado um polinômio $f(x)$, ao dividi-lo por $x - c$, escrevemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + r(x).$$

Perceba que $\partial r = 0$, pois o divisor tem grau um. Assim, $r(x) = r \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja, r é uma constante,

$$f(c) = (c - c)q(c) + r(c) = r(c) = r,$$

resultando na identidade

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c). \qquad \blacksquare$$

2.1.2 RAÍZES DE UM POLINÔMIO

Corolário 1 *$f \in \mathbb{R}[x]$ é divisível por $x - c$ se, e somente se, $f(c) = 0$*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Dado o polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$. Se ele é divisível por $x - c$, então $r(x) = 0$ e

$$f(x) = (x - c)q(x).$$

Mas pelo teorema 2 temos que $r(x) = f(c) \qquad \Rightarrow \qquad f(c) = 0$
$\Leftarrow$) Para $f(c) = 0$, pelo teorema 2, temos que

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) = (x - c)q(x) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ é divisível por } x - c. \qquad \blacksquare$$

Definição 2 *A raiz de um polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$ é uma constante r tal que*

$$f(r) = 0.$$

Teorema 3 (Teorema Fundamental da Álgebra)
Todo polinômio sobre $\mathbb{C}$ possui raiz complexa.

Não vamos demonstrar esse teorema, mas podemos encontrá-la em livros de álgebra. Por exemplo, no livro [5] está como um apêndice.

Exemplo 4 Determine as raízes cúbicas da unidade,

$$x^3 - 1 = 0.$$

Sabemos que 1 é raiz de $x^3 - 1$, então podemos dividir o polinômio $x^3 - 1$ por $(x - 1)$. Assim, escrevemos o dividendo como segue:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2),$$

em que o número complexo $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
Portanto, encontramos que o conjunto das raízes cúbicas da unidade é

$$S = \{-1, \omega, \omega^2\}.$$

Chamamos de *fatoração de um polinômio* o processo usado no exemplo anterior, em que escrevemos o polinômio como produto da subtração da variável x por cada uma das suas raízes.

Note que dado um polinômio $f \in \mathbb{C}[x]$, de grau n, pelo teorema Fundamental da Álgebra, existe $r_1 \in \mathbb{C}$ tal que,

$$f(x) = a_0(x - r_1)q_1(x), \text{ com } q_1(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Aplicando esse teorema em $q_1(x)$, temos que existe $r_2 \in \mathbb{C}$ tal que,

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)q_2(x), \text{ com } q_2(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Este processo poderá se repetir até um $q_{n-1}(x) = x - r_n$, resultando em

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

Esse procedimento de fatoração nos induzirá ao teorema a seguir que também não demonstraremos, mas pode ser encontrado em [5].

Teorema 4 *Um polinômio $f \in \mathbb{C}[x]$, não nulo e de grau $n > 0$, terá no máximo n raízes distintas.*

Definição 3 *Seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o conjunto raízes de um polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$ não nulo e de grau $n > 1$. Dizemos que f possui raízes múltiplas quando para qualquer $i, j = 1, 2, \ldots, n$*

$$x_i = x_j, \text{ com } i \neq j$$

Exemplo 5 Ao expandirmos o polinômio,

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2)...(x + a_n),$$

podemos expressá-lo com os coeficientes sendo polinômios de

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\
f_2 &= a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_2a_n + \cdots + a_{n-1}a_n, \\
&\vdots \\
f_{n-1} &= a_1a_2 \cdots a_{n-2}a_{n-1} + a_1a_2 \cdots a_{n-2}a_n, \\
f_n &= a_1a_2 \cdots a_n,
\end{aligned}$$

em que cada $a_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$, aqui chamaremos de variável.
Perceba que para duas variáveis, a_1, a_2, temos

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+a_1)(x+a_2) \\ &= x^2 + xa_1 + xa_2 + a_1a_2 \\ &= x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2 \\ &= x^2 + f_1x + f_2. \end{aligned}$$

Supondo que a identidade abaixo seja verdadeira para quaisquer n variáveis

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \cdots + f_n, \tag{2}$$

vamos mostrar que valerá para $n+1$ variáveis.
Para adicionarmos mais uma variável, faremos

$$(x+a_0)P(x) = (x+a_0)[(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)].$$

Usando a identidade (2), temos que
$(x+a_0)P(x) = (x+a_0)[x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \cdots + f_n]$
$= (x^{n+1} + f_1x^n + f_2x^{n-1} + \cdots + f_nx) + (a_0x^n + a_0f_1x^{n-1} + x^{n-2}a_0f_2 + \cdots + a_0f_n)$
$= x^{n+1} + x^n(f_1+a_0) + x^{n-1}(f_2+a_0f_1) + \cdots + a_0f_n$
$= x^{n+1} + x^n(f_1+a_0) + x^{n-1}(f_2+a_0f_1) + \cdots + a_0f_n$
Perceba que
$f_1 + a_0 = F_1, \quad f_2 + a_0f_1 = F_2, \quad \ldots, \quad a_0f_n = a_0a_1\ldots a_n.$
são os coeficientes para as $n+1$ variáveis.

Portanto, encontramos que a identidade (2) é válida para qualquer variável $n \in \mathbb{N}$.

Uma característica importante desses coeficientes é que eles estão totalmente relacionados com as raízes do polinômio, pois eles são *funções simétricas elementares das raízes*. No próximo capítulo, veremos um pouco do que se trata essa simetria.

3 FUNÇÕES SIMÉTRICAS

3.1 FUNÇÕES SIMÉTRICAS

Neste capítulo, com exceção dos casos especificados no enunciado, tratarmos $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ como um polinômio em n variáveis, e $\sigma \in S_n$ uma permutação de n objetos.

Definição 4 *A ação de σ sobre F é o polinômio*

$$F^{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Exemplo 6 Seja $\sigma = (23) \in S_3$ então

$$F(x_1, x_2, x_3)^{\sigma} = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = F(x_1, x_3, x_2)$$

Definição 5 *O polinômio F será chamado de invariante sob a ação de $\sigma \in S_n$ quando*

$$F = F^{\sigma}.$$

Definição 6 *Dizemos que F é uma função simétrica quando*

$$\forall\ \sigma \in S_n, \qquad F^{\sigma} = F.$$

Exemplo 7 Funções simétricas de 3 variáveis
$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad P(a, b, c) = (a + b)(a + c)(b + c)$

3.2 FUNÇÕES SIGMA

A função sigma é uma notação que usaremos para simplificar a escrita das funções simétricas.
Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$.

Definição 7 *Uma função sigma do tipo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ é dada pelo somatório de todas $\sigma \in S_n$ que gerem valores distintos quando aplicados ao produto $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$.*

Denotamos a função sigma por

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Exemplo 8 Determine a função sigma do tipo (2,1,1) para três e quatro variáveis.
Note que

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132), \} \\ S_4 &= \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), \\ &\quad (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}. \end{aligned}$$

Quando aplicamos as respectivas permutações do S_3 e S_4 no produto $x_1^2x_2x_3$, as que geram valores distintos são:

$$\begin{array}{lcl} S_3 & \Rightarrow & (1),(12),(13) \\ S_4 & \Rightarrow & (1),(34),(234),(12),(12)(34),(1432),(13),(1243),(143),(124),(1234),(14). \end{array}$$

Daí,

$$\begin{array}{rl} n=3 \Rightarrow \ \Sigma x_1^2x_2x_3 = & (x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2). \\ n=4 \Rightarrow \ \Sigma x_1^2x_2x_3 = & (x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_3x_4) + (x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4) + \\ & (x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4) + (x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_2x_3). \end{array}$$

A seguir, observamos outro exemplo de como usar a notação sigma.

Exemplo 9 Escreva o polinômio abaixo com a notação sigma

$$A = (a_0 - a_1)^2a_2 + (a_0 - a_2)^2a_1 + (a_1 - a_2)^2a_0.$$

Perceba que por ser simétrico podemos escrevê-lo com a notação da função sigma como se segue

$$A(a_0,a_1,a_2) = [a_0^2a_2 - 2a_0a_1a_2 + a_1^2a_2] + [a_0^2a_1 - 2a_0a_1a_2 + a_2^2a_1] + [a_1^2a_0 - 2a_0a_1a_2 + a_2^2a_0] =$$

$$[a_0^2a_2 + a_1^2a_2 + a_0^2a_2 + a_1^2a_2 + a_0^2a_2 + a_1^2a_2] + 3(-2a_0a_1a_2) = \Sigma a_0^2a_1 - 6\Sigma a_0a_1a_2.$$

Assim, escrevemos $A(a_0,a_1,a_2)$ em termo das funções sigma do tipo (2,1) e (1,1,1).

Definição 8 *As funções simétricas elementares de n variáveis $x_1,\ldots,x_n$ são os coeficientes do polinômio gerador*

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n) \\ &= t^n - f_1t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}f_{n-1}t + (-1)^nf_n, \end{aligned} \tag{3}$$

onde

$$\begin{array}{rc} f_1(x_1,\ldots,x_n) = & \Sigma x_1 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) = & \Sigma x_1x_2 \\ f_3(x_1,\ldots,x_n) = & \Sigma x_1x_2x_3 \\ f_4(x_1,\ldots,x_n) = & \Sigma x_1x_2x_3x_4 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) = & \Sigma x_1x_2\cdots x_n \end{array}$$

Observações:

i) Perceba que dado um $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, conhecemos as funções simétricas elementares das suas raízes, e também que elas pertencem a $\mathbb{K}$.

ii) Doravante, quando falarmos das n *elementares*, estaremos nos referindo às funções simétricas elementares de n variáveis.

iii) No apêndice você pode encontrar a tabuada que converte as funções sigma em elementares. Usaremos ela para simplificação de contas.

Exemplo 10 Sejam $x_1, \dots, x_4$ raízes de $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$. Assim, suas n elementares são:

$$\begin{array}{rrrcrrr} f_1 = & \Sigma x_1 = & 0 & \quad & f_2 = & \Sigma x_1 x_2 = & -2 \\ f_3 = & \Sigma x_1 x_2 x_3 = & 3 & \quad & f_4 = & \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = & -2 \end{array}$$

Desta forma, veja que não precisamos conhecer as raízes para determinar suas elementares.

Exemplo 11 Sejam a, b, c, d raízes da equação

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$$

em que $a + b = 1$. Vamos determinar as raízes com o que vimos neste trabalho até o presente momento.

Perceba que pelas relações presentes na identidade ((3)), temos que:

$$\begin{cases} f_1 = a + b + c + d = 2, \\ f_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd = 2, \\ f_3 = abc + abd + acd + bcd = 1, \\ f_4 = abcd = -2. \end{cases}$$

Como $a + b = 1$, substituindo em f_1 encontramos $c + d = 1$. E substituindo esses valores em f_2 temos que $ab + cd = 1$. Daí, como segue abaixo, vamos criar equações quadráticas, cujos coeficientes já conhecemos, para podermos determinar as raízes a, b, c, d.

$$\begin{cases} abcd = -2 \\ ab + cd = 1. \end{cases} \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow \quad ab = 2, \quad cd = -1$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = 2. \end{cases} \Rightarrow y^2 - y + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \tfrac{1+i\sqrt{7}}{2}, \quad b = \tfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ cd = -1. \end{cases} \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad d = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Desta forma, as quatro raízes são os elementos do conjunto

$$S = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\}.$$

Exemplo 12 Considerando o polinômio, de variáveis a_1, a_2, a_3,

$$A(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}.$$

Percebe-se que ele é simétrico, pois permanece invariante ao permutarmos a_1, a_2, a_3. Vamos, neste momento, manipular este polinômio de forma a aparecer as funções simétricas elementares de suas variáveis como segue abaixo.

$$\begin{aligned} A(a_1, a_2, a_3) &= \frac{a_1^2 a_3 + a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_2^2 a_1 + a_3^2 a_2 + a_3^2 a_1}{a_1 a_2 a_3} \\ &= \frac{a_1^2(a_3 + a_2) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_2 + a_1)}{a_1 a_2 a_3} \\ &= \frac{a_1^2(f_1 - a_1) + a_2^2(f_1 - a_2) + a_3^2(f_1 - a_3)}{f_3} \\ &= \frac{f_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)}{f_3} \\ &= \frac{f_1(\Sigma a_1^2) - \Sigma a_1^3}{f_3} \end{aligned}$$

Usando a tabuada das funções sigma, para substituir os valores, temos:

$$A(a_1, a_2, a_3) = \frac{f_1(f_1^2 - 2f_2) - (f_1^3 + 3f_3 - 3f_1 f_2)}{f_3} = \frac{f_1 f_2 - 3f_3}{f_3}.$$

Encontramos assim a forma do polinômio $A(a_1, a_2, a_3)$ em função das simétricas elementares.

Mas será que qualquer função simétrica pode ser expressa em termos de funções simétricas elementares? Sim. E é justamente isso que mostraremos com o teorema que se segue.

3.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES SIMÉTRICAS

O teorema a seguir, foi demonstrado pelo famoso matemático francês, Augustin Louis Cauchy, usando Indução Matemática.

Teorema 5

Seja $\mathbb{D}$ um domínio de integridade. Se $F \in \mathbb{D}[x_1, \ldots, x_n]$ é simétrico então existe $\hat{F} \in \mathbb{D}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \hat{F}(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Demonstração:

Seja $F(x_1, x_2)$ uma função simétrica, cujas duas variáveis, x_1 e x_2, também compõem as funções elementares

$$f_1 = x_1 + x_2, \qquad f_2 = x_1 x_2.$$

Inicialmente, vamos organizar $F(x_1, x_2)$ em potências de x_1,

$$F(x_1, x_2) = A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + ... + A_m \in \mathbb{D}[x_2][x_1].$$

Substituindo x_2 por $f_1 - x_1$ e organizando novamente em potências de x_1,

$$F(x_1, x_2) = B_0 x_1^l + B_1 x_1^{l-1} + ... + B_l \in \mathbb{D}[f_1][x_1]. \tag{4}$$

Perceba que escrevemos a função simétrica como um polinômio cujos coeficientes pertencem ao conjunto das funções simétricas elementares de duas variáveis. Portanto, eles são simétricos e mesmo que permute as variáveis entre si,

$$F(x_2, x_1) = B_0 x_2^l + B_1 x_2^{l-1} + ... + B_l \in \mathbb{D}[f_1][x_2],$$

o polinômio continuará invariante em seus coeficientes, o que já era esperado uma vez que estamos tratando de uma função simétrica de duas letras.
Tomando

$$K(t) = B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + ... + B_l \in \mathbb{D}[f_1, f_2][t],$$

que é um polinômio que assume os valores de $F(x_1, x_2)$ quando substituímos a variável t por qualquer uma da F, vamos dividi-lo por $P(t) = t^2 - f_1 t + f_2 \in \mathbb{D}[f_1, f_2][t]$, que é o gerador das elementares e têm como raízes as variáveis de F.
Reescrevendo

$$K(t) = P(t)Q(t) + R(t), \text{ em que o } 0 \leq \partial R < \partial P = 2.$$

Assim, $R(t) = Ct + D$, em que $C, D \in \mathbb{D}[f_1, f_2]$ são polinômios em f_1 e f_2, construídos como declarado no teorema. Voltando $t = x_1$, temos que, $P(x_1) = 0$ e $K(x_1) = Cx_1 + D$. Como $K(x_1) = F(x_1, x_2)$ então,

$$F(x_1, x_2) = Cx_1 + D, \tag{5}$$

trocando x_1 por x_2,

$$F(x_2, x_1) = Cx_2 + D \tag{6}$$

Por $F(x_1, x_2)$ ser simétrica, igualando ((5)) com ((6)) encontra-se

$$C(x_1 - x_2) = 0, \quad \forall x_1, x_2 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Portanto,

$$F(x_1, x_2) = D,$$

o que prova a validade do teorema para duas variáveis. Assumindo-o verdadeiro para funções simétricas de $n-1$ variáveis, encontraremos que também será válido para funções simétricas de n variáveis.

Denotando por $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n-1}$ as funções simétricas elementares de $n-1$ variáveis $x_2, x_3, ..., x_n$, obviamente temos

$$f_1 = x_1 + \phi_1, \quad f_2 = x_1\phi_1 + \phi_2, \quad ..., \quad f_{n-1} = x_1\phi_{n-2} + \phi_{n-1}, \tag{7}$$

por outro lado,

$$\phi_1 = -x_1 + f_1, \qquad \phi_2 = x_1^2 - x_1 f_1 + f_2, \quad \ldots$$
$$\phi_{n-1} = (-1)^{n-1}[x_1^{n-1} \ - \ x_1^{n-2} f_1 + ... + (-1)^{n-1} f_{n-1}].$$

Seja $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma função simétrica de n variáveis. Arranjando-a em potências de x_1, escrevemos

$$F = A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + ... + A_m \in \mathbb{D}[x_2, x_3, \ldots, x_n][x_1].$$

Como F é simétrica em n variáveis, também será em $n-1$. Assim, os coeficientes são funções simétricas das variáveis $x_2 \ldots, x_n$. Por isso, usando a hipótese de indução, podemos expressar $A_i \in \mathbb{D}[x_2, x_3, \ldots, x_n]$, como polinômios de $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n-1}$, e estes, por sua vez, são expressões de x_1 e $f_1, ..., f_{n-1}$. Substituindo elas em F e reorganizando os resultados em de potência x_1, podemos escrever

$$F = B_0 x_1^l + B_1 x_1^{l-1} + ... + B_l \in \mathbb{D}[f_1, f_2 \ldots, f_{n-1}][x_1. \tag{8}$$

Como F é simétrica,

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\text{então} F = B_0 x_1^l + B_1 x_1^{l-1} + ... + B_l = B_0 x_2^l + B_1 x_2^{l-1} + ... + B_l$$

. Isso também será válido para qualquer permutação das variáveis. Por isso,

$$F = \Phi(t), \qquad \forall\, x_i = t, \text{ com } i = 1, \ldots, n.$$
$$\Phi(t) = B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + ... + B_l \in \mathbb{D}[f_1, f_2 \ldots, f_n][t].$$

Ao dividirmos $\Phi(t)$ pelo polinômio gerador,

$$P(t) = (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n) = t^n - f_1 t^{n-1} + f_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n f_n,$$

obtemos a identidade

$$\Phi(t) = P(t)Q(t) + R(t) \in \mathbb{D}[f_1, f_2, \ldots, f_n][t]. \tag{9}$$

Perceba que

$$R(t) = C_0 t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \cdots + C_{n-1} \in \mathbb{D}[f_1, f_2, \ldots, f_n][t]$$

. Ao substituirmos t por x_i na identidade ((9)), $\Phi(x_i) = F$ e $P(x_i) = 0$, ou seja,

$$C_0 t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \cdots + C_{n-1} - F = 0, \qquad \forall\, t.$$

Como temos um polinômio de grau $n-1$ que se anula em n valores, pelo teorema 4, este polinômio será nulo.

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-2} = 0 \qquad \text{e} \qquad C_{n-1} - F = 0.$$

Deste modo, encontramos

$$F = C_{n-1} \in \mathbb{D}[f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

que prova este teorema. ■

A seguir faremos algumas aplicações de cunho didático como sugestão de exercícios sobre eliminação de simetrias algébricas.

Exemplo 13 Como podemos calcular a área de um triângulo, cujos lados são as raízes do polinômio cúbico qualquer?
Vamos tomar uma equação cúbica genérica

$$K(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

em que $K(x) \in \mathbb{R}[x]$, e x_1, x_2, x_3 são raízes de K. Heron de Alexandria (10 d.C. - 80 d.C.)determinou que, conhecendo as medidas dos três lados de um triângulo, a sua área será dada por

$$A = \sqrt{p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)}, \text{ com } p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)} \\ &= \sqrt{p(p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3)}. \end{aligned}$$

Perceba que a área A é uma função simétrica das raízes x_1, x_2, x_3, que os coeficientes $\alpha = -f_1, \beta = f_2, \gamma = -f_3$, e

$$p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{-\alpha}{2}.$$

Substituindo-os na fórmula da área,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3)} \\ &= \sqrt{\tfrac{-\alpha}{2}[(\tfrac{-\alpha}{2})^3 + \alpha(\tfrac{-\alpha}{2})^2 + \beta(\tfrac{-\alpha}{2}) + \gamma]} \\ &= \sqrt{\tfrac{-\alpha}{16}[\alpha^3 - \beta\alpha + 8\gamma]} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{[-\alpha^4 + 4\beta\alpha^2 - 8\alpha\gamma]}, \end{aligned}$$

determinamos que a área de um triângulo cujos lados são as raízes de uma equação cúbica pode ser encontrada conhecendo somente os coeficientes dessa equação.

Exemplo 14 Sendo x_1, x_2, x_3 raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Calcule o valor de

$$\log(\frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3}).$$

Note que o logaritmando é uma função simétrica das raízes, portanto pode ser escrito em termo das elementares como segue abaixo.

$$\log(\frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3}) = \log(\frac{x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1^2x_3^2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1^2x_2^2}{x_1x_2x_3})$$

$$= \log(\frac{x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2}{x_1x_2x_3}) = \log(\frac{\Sigma x_1^2x_2^2}{f_3})$$

usando a tabuada para substituir a função sigma de três variáveis pelas elementares

$$\log(\frac{\Sigma x_1^2x_2^2}{f_3}) = \log(\frac{f_2^2 - 2f_3f_1}{f_3}) = \log(\frac{1^2 - 2 \cdot (1) \cdot 0}{1})$$

$$\Rightarrow \qquad \log(\frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3}) = \log 1 = 0$$

Exemplo 15 Dado $F = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$, podemos escrevê-lo como um polinômio em função das simétricas elementares?

Perceba que $F \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ é um polinômio simétrico das variáveis x_1, x_2, x_3. Logo, pelo teorema anterior, existe $\hat{F} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ tal que

$$F(x_1, x_2, x_3) = \hat{F}(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$$

Apresentarei duas formas de determinar $\hat{F}$. A primeira é seguindo os passos da demonstração do teorema e a segunda é usando a notação sigma e a tabuada das funções sigma.
i) Perceba que, pelas funções simétricas elementares de três variáveis, $x_2 + x_3 = f_1 - x_1$ e $x_2x_3 = f_2 - x_1(f_1 - x_1)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
F &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\
&= (x_2 + x_3)x_1^2 + (x_2 + x_3)^2x_1 + x_2x_3(x_2 + x_3) \\
&= (f_1 - x_1)x_1^2 + (f_1 - x_1)^2x_1 + (x_1^2 - f_1x_1 + f_2)(f_1 - x_1) \\
&= -x_1^3 + f_1x_1^2 - f_2x_1 + f_1f_2 \\
\Rightarrow \ K(t) &= -t^3 + f_1t^2 - f_2t + f_1f_2
\end{aligned}$$

Dividindo $K(t)$ pelo polinômio gerador $P(t) = t^3 - f_1t^2 + f_2t - f_3$, do exemplo (3) temos que:

$$K(t) = -P(t) + f_1f_2 - f_3$$

Ao substituir t por $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$ encontramos

$$F(x_1, x_2, x_3) = f_1f_2 - f_3 = \hat{F}(f_1, f_2, f_3).$$

ii) Neste momento, vamos escrever a F em funções sigma e, usando a tabuada presente no apêndice, determinar como ela ficará em termo das simétricas elementares de três variáveis.

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\
&= x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2x_3 \\
&= \Sigma x_1^2 x_2 + 2\Sigma x_1x_2x_3 \qquad \text{(usando a tabuada das funções)} \\
&= (f_1f_2 - 3f_3) + 2f_3 \\
&= f_1f_2 - f_3 \\
&= \hat{F}(f_1, f_2, f_3)
\end{aligned}$$

Exemplo 16 Seja ω a raiz cúbica imaginária da unidade, e x_1, x_2 e x_3 raízes da função cúbica $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

Tomando as funções
$F_1 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$ e
$F_2 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 + (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3$, perceba que elas são simétricas. Fazendo a distributiva, podemos escrevê-las com a notação sigma
$F_1 = \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1x_2$,
$F_2 = 2\Sigma x_1^3 - 3\Sigma x_1^2x_2 + 12x_1x_2x_3$.
E, usando a tabuada das funções sigma para 3 variáveis e a identidade (3), em termos dos coeficientes da função $f(x)$

$$F_1 = f_1^2 - 3f_2 = p^2 - 3q,$$

$$F_2 = 2f_1^3 - 9f_1f_2 + 27f_3 = -2p^3 + 9pq - 27r.$$

Assim sendo, encontramos que essas funções simétricas podem ser escritas em termos das elementares e também dos coeficientes da $f(x)$.

Exemplo 17 Sejam

$$\begin{aligned}
y_1 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \\
y_2 &= (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 \\
y_3 &= (x_1 + x_4 - x_3 - x_2)^2
\end{aligned}$$

com x_1, x_2, x_3, x_4 raízes da equação biquadrática

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Vamos determinar:
a) $y_1 + y_2 + y_3$ e $y_1y_2y_3$.
Perceba que quando aplicamos a distributividade,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3\Sigma x_1^2 - 2\Sigma x_1x_2.$$

$$y_1y_2y_3 = \Sigma x_1^3 - \Sigma x_1^2x_2 + 2\Sigma x_1x_2x_3.$$

Substituindo os valores da tabuada sigma de 4 variáveis, encontramos

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 3(f_1^2 - 2f_2) - 2f_2 \\ &= 3f_1^2 - 8f_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 y_2 y_3 &= [(f_1^3 + 3f_3 - 3f_1 f_2) - (f_1 f_2 - 3f_3) + 2f_3]^2 \\ &= [f_1^3 - 4f_1 f_2 + 8f_3]^2 \end{aligned}$$

Substituindo pelos coeficientes da equação biquadrática temos:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3p^2 - 8q$$

$$y_1 y_2 y_3 = (p^3 - 4pq + 8r)^2$$

b) Fica a cargo do leitor, verificar que

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = 3p^4 + 16(pr - p^2 q + q^2) - 64s$$

4 APLICAÇÕES

Além das aplicações vistas até aqui em exemplos, abordaremos mais alguns usos para o TFFSE.

4.1 ELIMINAÇÃO

O processo de eliminação é usado para resolver sistemas polinomiais de duas variáveis. Ao isolar uma delas, manipulamos a outra de forma a aparecer uma solução para o sistema. Uma das ferramentas de manipulação é dada através do polinômio **resultante** que será definido a seguir.

Definição 9 *Dado um sistema linear*

$$\begin{cases} f(x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n = 0 \\ g(x) = b_m + b_{m-1}x + \cdots + b_0x^m = 0 \end{cases}$$

com $f, g \in \mathbb{R}[y][x]$ *polinômios não nulos, e* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *raízes de* $f(x)$.

Define-se resultante de $f(x)$ *e* $g(x)$ *o polinômio*

$$R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n).$$

Observações:

1. $R(f, g)$ é uma função simétrica das raízes.
2. Sendo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ raízes de $g(x)$, o resultante de $g(x)$ e $f(x)$ será dado por
$$R(g, f) = b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_m).$$
3. Um dos fatores da resultante ser nulo é condição necessária e suficiente para afirmar que existe raiz comum entre $f(x)$ e $g(x)$.

Exemplo 18 Verifique soluções reais para o sistema a seguir:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \\ g(x, y) = x^3 + y^3 - 1. \end{cases}$$

Considerando $f, g \in \mathbb{R}[y][x]$, escrevemos

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 0x + (y^2 - 1) \\ g(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + (y^3 - 1) \end{cases}$$

Sendo α_1, α_2 raízes de f, temos que $g(\alpha_1)g(\alpha_2) \in \mathbb{R}[y]$

$$g(\alpha_1)g(\alpha_2) = [\alpha_1^3 + y^3 - 1][\alpha_2^3 + y^3 - 1] = (\alpha_1\alpha_2)^3 + (\alpha_1^3 + \alpha_2^3)(y^3 - 1) + (y^3 - 1)^2.$$

Perceba que, pela relação entre as raízes de um polinômio e os seus coeficientes na forma expandida, ao olharmos para $f(x)$ e as relações entre funções sigma e as simétricas elementares de duas variáveis,

$$\begin{aligned}
g(\alpha_1)g(\alpha_2) &= (y^2-1)^3 + 0(y^3-1) + (y^3-1)^2 \\
&= [(y-1)(y+1)]^3 + [(y-1)(y^2+y+1)]^2 \\
&= (y-1)^2[(y-1)(y+1)^3 + (y^2+y+1)^2] \\
&= (y-1)^2(2y^4+4y^3+3y^2) \\
&= (y-1)^2y^2(2y^2+4y+3).
\end{aligned}$$

Note também que sua nulidade implica em raiz comum entre f e g. Como estamos em busca das raízes reais do sistema, e o fator $(2y^2+4y+3)$ não possui raízes em $\mathbb{R}$,

$$R(f,g) = g(\alpha_1)g(\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow \ y \in \{0,1\}.$$

Se (x,y) é solução do sistema, então $g(x,y)=0$ para $y \in \{0,1\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
g(x,0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 1 \\
g(x,1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos $S = \{(0,1),(1,0)\}$ que é o conjunto das soluções para o sistema.

Exemplo 19 Dado o sistema abaixo, vamos determinar suas soluções

$$\begin{cases}
f(x,y) = x^2 - yx + y^2 - 1 \\
g(x,y) = x^2 + (y-2)x + (-3y^2+2y+1).
\end{cases}$$

Sejam $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ raízes de $g(x)$, desta forma, o resultante

$$\begin{aligned}
R(g,f) &= f(\alpha_1)f(\alpha_2) \\
\\
&= (\alpha_1^2 - y\alpha_1 + y^2 - 1)(\alpha_2^2 - y\alpha_2 + y^2 - 1) \\
\\
&= \alpha_1^2\alpha_2^2 - y(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_1) + (y^2-1)(\alpha_1^2+\alpha_2^2) \\
&\quad + y^2\alpha_1\alpha_2 - y(y^2-1)(\alpha_1+\alpha_2) + (y^2-1)^2.
\end{aligned}$$

Substituindo as funções simétricas elementares e suas variações de acordo com a tabuada das σ no resultante acima, temos:

$$
\begin{aligned}
R(g,f) &= f(\alpha_1)f(\alpha_2)\\
&= f_2^2 - y(f_1f_2) + (y^2-1)(f_1^2 - 2f_2) + y^2f_2 - y(y^2-1)f_1 + (y^2-1)^2\\
&= (-3y^2+2y+1)^2 - y(2-y)(-3y^2+2y+1) + (y^2-1)(7y^2-8y+2)\\
&\quad +y^2(-3y^2+2y+1) + (y^3-y)(y-2) + y^4 - 2y^2 + 1\\
&= (-3y^2+2y+1)[-3y^2+2y+1-2y+y^2+y^2]\\
&\quad +7y^4-8y^3+2y^2-7y^2+8y-2+y^4-2y^3-y^2+2y+y^4-2y^2+1\\
&= (-3y^2+2y+1)[-y^2+1] + 9y^4 - 10y^3 - 8y^2 + 10y - 1\\
&= 12y^4 - 12y^3 - 12y^2 + 12y = 12y(y-1)(y^2-1)\\
&= 12y(y-1)^2(y+1)
\end{aligned}
$$

Supondo a existência de uma solução para o sistema, então do resultante $R(g,f)=0$ temos que $y \in \{-1,0,1\}$. Assim,

$$
\begin{array}{llll}
y=-1 & \Rightarrow\ f(x) = x^2 + x = x(x+1) & \Rightarrow & x \in \{0,-1\}.\\
y=0 & \Rightarrow\ f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) & \Rightarrow & x \in \{-1,1\}.\\
y=1 & \Rightarrow\ f(x) = x^2 - x = x(x-1) & \Rightarrow & x \in \{0,1\}.
\end{array}
$$

$$\Rightarrow\ x \in \{-1,0,1\}$$

Note que quando

$$(x,y) \in \{(-1,0),(0,-1)\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x,y) = 0.\\ g(x,y) \neq 0.\end{cases}$$

Portanto, S é o conjunto de soluções do sistema

$$S = \{(x,y)/(-1,-1),(1,0),(1,1),(0,1)\}.$$

$\boxdot$

Mas o que acontece quando usamos o resultante para dois polinômios $f, g \in \mathbb{R}[x]$? Vamos ver no exemplo abaixo.

Exemplo 20 Determine o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 3 = 0\\ g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.\end{cases}$$

Sendo x_1, x_2 raízes de f, perceba que $R(f,g) = g(x_1)g(x_2) \in \mathbb{Q}$ é uma função simétrica das raízes x_1, x_2. Portanto, ela é determinável.
$R(f,g) = (x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 + 1)(x_2^3 + 2x_2^2 - x_2 + 1)$

$= x_1^3x_2^3 + 2\Sigma x_1^3x_2^2 - \Sigma x_1^3x_2 + \Sigma x_1^3 + 4\Sigma x_1^2x_2^2 - 2\Sigma x_1^2x_2 + 2\Sigma x_1^2 - x_1x_2 - \Sigma x_1 + 1$

$= f_2^3 + 2f_1f_2^2 - f_2(f_1^2 - 2f_2) + 4f_2^2 + f_1^3 - 3f_1f_2 - 2f_1f_2 + 2(f_1^2 - 2f_2) + f_2 - f_1 + 1$

Do polinômio $f(x)$, sabemos que $f_1 = -2$ e $f_2 = 3$. Substituindo-os na identidade acima, temos que

$$R(f,g) = 57.$$

Como o resultante deu diferente de zero, então podemos concluir que o sistema dado não possui solução.

Exemplo 21 Verifique soluções reais para o sistema a seguir:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2y \\ g(x,y) = (y-1)x + y. \end{cases}$$

Considerando $f, g \in \mathbb{R}[y][x]$, e α_1, α_2 raízes de f, temos que $g(\alpha_1)g(\alpha_2) \in \mathbb{R}[y]$

$$\begin{aligned} R(f,g) &= g(\alpha_1)g(\alpha_2) \\ &= [(y-1)\alpha_1 + y][(y-1)\alpha_2 + y] \\ &= (y-1)^2\alpha_1\alpha_2 + y(y-1)(\alpha_1 + \alpha_2) + y^2 \end{aligned}$$

Perceba que, pela relação entre as raízes de um polinômio e os seus coeficientes na forma expandida, ao olharmos para $f(x)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -y$ e $\alpha_1\alpha_2 = y^2 - 2y$. Então,

$$\begin{aligned} R(f,g) &= (y-1)^2\alpha_1\alpha_2 + y(y-1)(\alpha_1 + \alpha_2) + y^2 \\ &= (y-1)^2(y^2 - 2y) + y(y-1)(-y) + y^2 \\ &= y(y-1)^2(y-2) - y^2(y-1) + y^2 \\ &= y(y-1)^2(y-2) - y^3 + 2y^2 \\ &= y(y-2)[(y-1)^2 - y] \\ &= y(y-2)[y^2 - 3y + 1] \\ &= y(y-2)(y - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(y - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) \end{aligned}$$

Note também que sua nulidade implica em raiz comum entre f e g. Desta forma,

$$R(f,g) = g(\alpha_1)g(\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow \ y \in \{0, 2, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\}.$$

Se (x,y) é solução do sistema, então $g(x,y) = 0$ para os y encontrados. Daí,

$$\begin{array}{lcc} g(x,0) = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ g(x,2) = 0 & \Rightarrow & x = -2 \\ g(x, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 & \Rightarrow & x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ g(x,1) = 0 & \Rightarrow & x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{array}$$

Assim, o conjunto solução do sistema é

$$S = \{(0,0), (-2,2), (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})\}.$$

Uma observação interessante sobre estas aplicações é que podemos abordar estes problemas no ensino básico pois, deve ser uma competência específica do aluno do Ensino Médio "investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias", e "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados", como vemos em [1].

4.2 DISCRIMINANTE

Dado um polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$, seu *discriminante*, é uma função simétrica das raízes, portanto conhecido, que revelará a existência de raízes múltiplas no polinômio. Este conhecimento, que é introduzido de forma discreta no ensino de resolução das equações quadráticas, e acompanha o aluno desde o 9º ano do Ensino Fundamental, aqui será estendido para um polinômio de grau n, como mostraremos.
Para x_1, x_2, raízes do polinômio

$$f(x) = x^2 - f_1 x + f_2 \in \mathbb{R}[x],$$

perceba que ao tomamos a diferença de suas raízes, ainda não saberemos muito sobre ela. Mas quando elevamos ela ao quadrado, encontramos uma função simétrica das raízes que é conhecida, pois pelo TFFSE, será escrita em termos dos coeficientes do polinômio $f(x)$,

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = f_1^2 - 4f_2,$$

e sua nulidade indicará que $x_1 = x_2$.
O mesmo processo pode ser aplicado a um polinômio cúbico

$$f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x],$$

em que suas raízes, x_1, x_2, x_3, não serão simétricas quando feito o produto das suas três diferenças. Porém, ao elevamos esse produto ao quadrado, obtemos uma função simétrica das três raízes do polinômio $f(x)$, que são conhecidos.

$$\begin{aligned}
\Delta &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \\
&= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2)(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) \\
&= \Sigma x_1^4x_2^2 - 2\Sigma x_1^4x_2x_3 + 2\Sigma x_1^3x_2^2x_3 - 2\Sigma x_1^3x_2^3 - 6\Sigma x_1^2x_2^2x_3^2 \\
&= -4p^3 - 27q^2.
\end{aligned}$$

Aplicando semelhante método para um polinômio de grau n . Sejam

$$f(x) = x^n + f_1x^{n-1} + \cdots + f_n \in \mathbb{R}[x],$$

e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suas raízes. O produto das $\frac{n(n-1)}{2}$ diferenças $x_\alpha - x_\beta$, com os índices $\alpha < \beta$ variando de 1 a n,

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n),$$

quando feita qualquer permutação de suas raízes gerará dois valores. Mas o mesmo não ocorrerá quando elevamos cada fator ao quadrado, pois resultará em uma função simétrica das raízes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que poderá ser determinada conhecendo os coeficientes do polinômio $f(x)$. Assim, o discriminante $\Delta \in \hat{F}[f_1, \ldots, f_n]$ do $f(x)$ será dado por

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2\cdots(x_1 - x_n)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2\cdots(x_2 - x_n)^2\cdots(x_{n-1} - x_n)^2.$$

Podemos também determinar o discriminante de $f(x)$ através do resultante entre ele e a sua derivada $f'(x)$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+ \\ & & +\cdots+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n), \end{array}$$

Perceba que quando $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $f'(x)$ será

$$\begin{array}{rcl} f'(x_1) & = & (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n); \\ f'(x_2) & = & (x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n); \\ \vdots & \vdots & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f'(x_n) & = & (x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}), \end{array}$$

e seu produto

$$f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ \Delta.$$

Portanto, obtemos o resultante

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ \Delta.$$

4.3 SOLUÇÕES DE LAGRANGE

Esta técnica desenvolvida pelo matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), nos apresenta uma forma de determinar as fórmulas de resolução de equações quadráticas, cúbicas e biquadráticas, através dos seus coeficientes.

4.3.1 SOLUÇÃO DE LAGRANGE PARA EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Inicialmente vamos determinar uma forma de encontrar a tão consagrada fórmula de resolução para equações quadráticas. Tomando um polinômio quadrático $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, como segue abaixo,

$$f(x) = x^2 + bx + c.$$

Para determinar as raízes dele, construiremos uma função linear, $\alpha r_1 + \beta r_2$, com r_1, r_2 raízes de $f(x)$ e α, β raízes da unidade de uma equação do mesmo grau, que neste caso serão 1 e -1, ficando $r_1 - r_2$. Como queremos usar a simetria, basta elevá-la ao quadrado. Fazendo manipulações algébricas obtemos

$$(r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + (4r_1r_2 - 4r_1r_2) = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2.$$

Substituindo os valores na equação anterior, encontramos

$$(r_1 - r_2)^2 = b^2 - 4c = \Delta.$$

Somando $r_1 + r_2 = -b$ com $r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta}$, obtermos o valor da primeira raiz

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

E, analogamente, repetindo a soma para $r_2 - r_1 = -\sqrt{\Delta}$, encontramos a segunda raiz.

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Portanto, conseguimos encontrar a fórmula geral que determina os valores das raízes de uma equação quadrática, usando apenas seus coeficientes.

Neste momento, pode até parecer mais trabalhoso determinar as raízes de uma equação quadrática desta forma, uma vez que conhecemos essa fórmula desde o 9º ano do Ensino Fundamental, mas quando partirmos para equações cúbicas e biquadráticas, que analogamente determinaremos as raízes sem conhecê-las, será muito mais prático.

4.3.2 SOLUÇÃO DE LAGRANGE PARA EQUAÇÃO CÚBICA

Para determinarmos os valores das raízes da equação,

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

analogamente ao que fizemos para equações quadráticas, vamos construir uma função linear com as raízes cúbicas da unidade, $1, \omega$ e ω^2:

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3,$$

em que as variáveis x_1, x_2 e x_3 são raízes de $f(x)$. Observe que três das possíveis permutações entre as variáveis podem ser obtidas por

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \omega(x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1) = \omega^2(x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2).$$

Escolhendo uma das que ainda não foram encontradas,

$$x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2,$$

obtemos as outras,

$$x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 = \omega(x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1) = \omega^2(x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3).$$

Além disso,
$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = (x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1)^3 = (x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3$ e
$(x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2)^3 = (x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1)^3 = (x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3)^3$.
Tomando $y_1 = (x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$ e $y_2 = (x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)^3$, que ainda não são simétricos, mas suas combinações $y_1 + y_2$ e $y_1 y_2$, são funções simétricas de variáveis, x_1, x_2 e x_3. E pelo resultado do Exemplo 16, sabemos que

$$y_1 + y_2 = -2p^3 + 9pq - 27r,$$

$$y_1 y_2 = (p^2 - 3q)^3.$$

Assim, podemos construir uma equação quadrática em que y_1 e y_2 são raízes

$$y^2 + (2p^3 - 9pq + 27r)y + (p^2 - 3q)^3 = 0.$$

Ao encontrarmos os valores de y, extraímos sua raiz cúbica

$$\sqrt[3]{y_1} = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \qquad \sqrt[3]{y_2} = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2$$

Uma observação importante é que a escolha dos y_i tem que respeitar a identidade abaixo

$$\sqrt[3]{y_1}\,\sqrt[3]{y_2} = p^2 - 3q.$$

Tomando a função linear $x_1 + x_2 + x_3 = -p$, vamos construir um sistema 3x3 que pode ser resolvido escalonando sua forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -p \\ 1 & \omega & \omega^2 & \sqrt[3]{y_1} \\ 1 & \omega^2 & \omega & \sqrt[3]{y_2} \end{pmatrix}.$$

Assim, encontraremos os valores das 3 raízes,

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}}{3},$$

$$x_2 = \frac{-p + \omega^2 \sqrt[3]{y_1} + \omega \sqrt[3]{y_2}}{3},$$

$$x_3 = \frac{-p + \omega \sqrt[3]{y_1} + \omega^2 \sqrt[3]{y_2}}{3}.$$

4.3.3 SOLUÇÃO DE LAGRANGE PARA EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA

Seja uma função biquadrática do tipo

$$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s,$$

cuja raízes são x_1, x_2, x_3, x_4. Para adquirirmos apenas três valores distintos com a permutação dessas, criaremos uma função do tipo

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2.$$

Os valores distintos

$$y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \qquad y_2 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2,$$

$$y_3 = (x_1 + x_4 - x_3 - x_2)^2$$

quando combinados como abaixo, tornam-se simétricos.

$$y_1 + y_2 + y_3, \qquad y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3, \qquad y_1y_2y_3$$

Por serem funções simétricas construídas através das nossas variáveis, pelo Teorema Fundamental das Funções Simétricas Elementares, podemos escrevê-las em função dos coeficientes de $f(x)$ como segue, pelo exemplo (17)

$y_1 + y_2 + y_3 = 3p^2 - 8q$

$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3p^4 + 16(pr - p^2q + q^2) - 64s,$

$y_1y_2y_3 = (p^3 - 4pq + 8r)^2$

Observe que para escolher os valores de y_1, y_2, y_3, eles tem que satisfazer a relação $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = p^3 - 4pq + 8r.$

Note que y_1, y_2, y_3 são as raízes cúbicas da equação

$$y^3 - (3p^2 - 8q)y^2 + (3p^4 + 16pr - 16p^2q + 16q^2 - 64s)y - (p^3 - 4pq + 8r)^2,$$

e se encontrarmos seus respectivos valores, podemos determinar os das raízes x_1, x_2, x_3, x_4, resolvendo as equações lineares

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{y_1},$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \sqrt{y_2},$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \sqrt{y_3}.$$

Assim, os valores para as raízes da equação biquadrática são

$$x_1 = \frac{-p+\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}}{4}, \qquad x_2 = \frac{-p+\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}}{4},$$

$$x_3 = \frac{-p-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}}{4}, \qquad x_4 = \frac{-p-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}}{4}.$$

Atente-se que a escolha dos y_i dependem da condição

$$\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = -p^3 + 4pq - 8r.$$

O tratamento das soluções de Lagrange podem proporcionar que os alunos desenvolvam a habilidade específica da BNCC (EM13MAT301): "resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais", como encontramos em [1].

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram feitos alguns estudos sobre Funções Simétricas que, com o domínio de propriedades algébricas e resultados conhecidos desde a educação básica, facilitam a manipulação de equações algébricas e polinômios das mais diversas formas independentemente de seu grau.

No livro do G. Iezzi, [3], dentro do capítulo das Equações Polinomiais, encontramos uma seção inteira falando sobre as relações entre coeficientes e raízes de um polinômio, denominando-as de "Relações de Girard". Oriento essa leitura e estudo, pois lá está repleto de exercícios e exemplos, nível Ensino Médio, que podem complementar o entendimento e aplicações do TFFSE.

O estudo e pesquisa feitopor Souza, em [4], identifica que dos documentos oficiais que temos no Brasil, o que consta abordando equações polinomiais aparece principalmente na forma quadrática, exponencial e resolução de sistema linear com, no máximo, ordem 3x3. A exemplo, em [1], temos a BNCC, que é o documento norteador da educação pública e privada no Brasil, apresenta este conteúdo como parte flexível (ou seja, não consta nela), facultando à escola, secretaria ou o município a inserção do conteúdo no currículo formativo do aluno.

Além disso, segundo o mesmo autor, o tratamento de equações de ordem superior, por serem dificultosas para abordagem e representação gráfica, devem acontecer no âmbito de suas raízes. Por isso, abordar este conteúdo que usando a simples informação do teorema principal, que toda função simétrica das raízes de um polinômio pode ser escrita em termos dos coeficientes do mesmo polinômio, torna-se uma alternativa viável.

Ao estudante de Matemática, essa informação te possibilita ter maior destreza na manipulação de equações algébricas independente de seu grau.

Ao professor de educação básica, uso do Teorema das Funções Simétricas Elementares é uma ferramenta que pode ser apresentada aos seus alunos, pois como visto no decorrer do texto, é uma ferramenta de baixo custo pedagógico, e que pode facilitar manipulações algébricas, até mesmo na hora de encontrar fórmulas para resolução de equações cúbicas e biquadráticas não triviais, assim como determinar as soluções de um sistema algébrico.

Além disso, os alunos, mesmo que da educação básica, ao usarem este conhecimento, podem ser estimulados a desenvolver, "segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções"(BRASIL, 2018), que é uma competência específica de Matemática presente na BNCC.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Secretários de Educação. União Nacional dos Dirigentes Municipais da Educação. "Base Nacional Comum Curricular – BNCC: Educação é a Base". Brasília – DF, 2018.

[2] COELHO, Flávio Ulhoa. "Um Curso de Álgebra Linear". 2ª ed. rv. e ampl., 5reimpr.- São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2020.

[3] IEZZI, G. "Fundamentos de matemática elementar 6: complexos, polinômios, equações". 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[4] SOUZA, Lucas Benjamin Barbosa "Sequência didática para o ensino de raízes racionais de equações polinomiais: um produto educacional"/ Lucas Benjamin Barboza Souza, Natanael Freitas Cabral. – Belém, 2023. p.35 e 36.

[5] USPENSKY, J. W. "Theory of equations". New York, McGraw-Hill, 1948.

APÊNDICE A – Tabuada das funções sigma em elementares

Construímos esta tabuada que "converte"funções sigma em simétricas elementares através de manipulações algébricas. Como um exemplo do processo, vamos determinar a função sigma de três variáveis, x_1, x_2, x_3,

$$\Sigma x_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

em termos das suas elementares, assim como segue abaixo.

Primeiramente, já temos definido que as funções simétricas de três variáveis são:

$$f_1 = \Sigma x_1, \quad f_2 = \Sigma x_1 x_2, \quad f_3 = x_1 x_2 x_3.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_1^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 = \Sigma x_1^3 + 3\Sigma x_1^2 x_2 \\ \Rightarrow \ \Sigma x_1^3 &= f_1^3 - 3\Sigma x_1^2 x_2 \end{aligned}$$

Como precisamos calcular o $\Sigma x_1^2 x_2$, faremos

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ &= \Sigma x_1^2 x_2 + 3\Sigma x_1 x_2 x_3 \\ &= \Sigma x_1^2 x_2 + 3f_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \Sigma x_1^2 x_2 = f_1 f_2 - 3f_3$$

Assim, ao substituirmos na identidade anterior, temos:

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^3 &= f_1^3 - 3\Sigma x_1^2 x_2 \\ &= f_1^3 - 3(f_1 f_2 - 3f_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \Sigma x_1^3 = f_1^3 - 3f_1 f_2 + 9f_3$$

Desta forma, determinamos a função sigma, soma do cubo das três variáveis, em termos das suas elementares.

Perceba que ela é uma ferramenta que facilita bastante a vida do estudante, pois permite reduzir cálculos e tamanho de notações assim como fizemos no decorrer deste trabalho.

Segue abaixo as tabuadas de duas, três e quatro variáveis. Fica a cargo do leitor, construir mais funções sigma de acordo com o próprio interesse e conveniência.

Σx_1	$=$	f_1
$\Sigma x_1 x_2$	$=$	f_2
Σx_1^2	$=$	$f_1^2 - 2f_2$
Σx_1^3	$=$	$f_1^3 - 3f_1 f_2$
Σx_1^4	$=$	$f_1^4 - 4f_1^2 f_2 + 2f_2^2$
$\Sigma x_1^3 x_2$	$=$	$f_2(f_1^2 - 2f_2)$
$\Sigma x_1^3 x_2^2$	$=$	$f_1 f_2^2$
Σx_1^5	$=$	$f_1^5 - 5f_1 f_2(f_1^2 - f_2)$

Tabela 1 – Funções sigma para duas variáveis, x_1, x_2.

Σx_1	$=$	$f_1,$
$\Sigma x_1 x_2$	$=$	$f_2,$
$\Sigma x_1 x_2 x_3$	$=$	f_3
Σx_1^2	$=$	$f_1^2 - 2f_2$
$\Sigma x_1^2 x_2$	$=$	$f_1 f_2 - 3f_3$
Σx_1^3	$=$	$f_1^3 + 9f_3 - 3f_1 f_2$
$\Sigma x_1^2 x_2^2$	$=$	$f_2^2 - 2f_3 f_1$
$\Sigma x_1^3 x_2$	$=$	$f_1(f_1 f_2 - f_3) - 2f_2^2$
$\Sigma x_1^2 x_2 x_3$	$=$	$f_1 f_3$
Σx_1^4	$=$	$f_1^4 - 4f_1(f_1 f_2 - f_3) + 2f_2^2$
$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3$	$=$	$f_2 f_3$

Tabela 2 – Funções sigma para três variáveis, x_1, x_2, x_3.

Σx_1	$=$	$f_1,$
$\Sigma x_1 x_2$	$=$	$f_2,$
$\Sigma x_1 x_2 x_3$	$=$	f_3
$\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4$	$=$	f_4
Σx_1^2	$=$	$f_1^2 - 2f_2$
Σx_1^3	$=$	$f_1^3 + 3f_3 - 3f_1 f_2$
$\Sigma x_1^2 x_2$	$=$	$f_1 f_2 - 3f_3$
Σx_1^4	$=$	$f_1^4 + 4f_1(f_3 - f_1 f_2) + 2f_2^2 - 4f_4$
$\Sigma x_1^2 x_2^2$	$=$	$f_2^2 - 2f_3 f_1 + 2f_4$
$\Sigma x_1^3 x_2$	$=$	$f_1^2 f_2 + 4f_4 - (2f_2^2 + f_1 f_3)$
$\Sigma x_1^2 x_2 x_3$	$=$	$f_1 f_3 - 4f_4$
Σx_1^5	$=$	$f_1^5 - 5[f_1(f_1^2 f_2 + f_4 - f_1 f_3 - f_2^2) + f_2 f_3]$
$\Sigma x_1^4 x_2$	$=$	$f_2(f_1^3 + 5f_3 - 3f_1 f_2) + f_1 f_4 - f_1^2 f_3$
$\Sigma x_1^3 x_2^2$	$=$	$f_1(f_2^2 - 2f_3 f_1 + 5f_4) - f_2 f_3$
$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3$	$=$	$f_2 f_3 - 3f_4 f_1$
$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4$	$=$	$f_1 f_4$
$\Sigma x_1^3 x_2 x_3$	$=$	$f_3(f_1^2 - 2f_2) - f_1 f_4$

Tabela 3 – Funções sigma para quatro variáveis, x_1, x_2, x_3, x_4.