

Universidade Federal de Sergipe

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rigidez e topologia do bordo para variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas

Vinícius Garangau Bispo



UNIVERSIDADE
FEDERAL DE
SERGIPE



Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - POSGRAP
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Rigidez e topologia do bordo para variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas

Vinícius Garangau Bispo

SÃO CRISTÓVÃO – SE
JULHO DE 2025

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - POSGRAP
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Rigidez e topologia do bordo para variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas

por

Vinícius Garangau Bispo

sob a orientação de

Profa. Dra. Orientadora Maria de Andrade Costa e Silva

São Cristóvão – SE
Julho de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Rigidez e topologia do bordo para variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizadas

por

Vinicius Garangau Bispo

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 MARIA DE ANDRADE COSTA E SILVA
Data: 15/07/2025 10:46:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
 FRANCIELE CONRADO DOS SANTOS
Data: 15/07/2025 10:51:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Dra. Franciele Conrado dos Santos - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
 FABIO REIS DOS SANTOS
Data: 15/07/2025 11:11:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos - UFPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 15 de Julho de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

B621r Bispo, Vinícius Garangau
Rigidez e topologia do bordo para variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas / Vinícius Garangau Bispo ; orientadora Maria de Andrade Costa e Silva. - São Cristóvão, 2025.
99 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Einstein, Equações de. 2. Topologia. 3. Curvatura. I. Silva, Maria de Andrade Costa e orient. II. Título.

CDU 515.1

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por me acompanhar durante toda a minha jornada e pela graça de ter alcançado mais um objetivo em minha vida.

Aos meus pais, Jose Dernival Bispo e Maria Lucia Garangau Bispo, por me amarem incondicionalmente e por todo apoio que recebi. Obrigado por tudo, amo os dois com todas as minhas forças.

À minha irmã, Milena Garangau Bispo, por estar sempre presente nos momentos importantes da minha vida, sejam eles de alegrias ou de dificuldades.

À professora Maria de Andrade Costa e Silva, por me orientar durante todo mestrado, incentivar, apoiar academicamente e por sempre ter acreditado em mim.

Aos professores Franciele Conrado e Fábio Reis, por aceitarem participar da banca e pelas valiosas sugestões.

Aos meus queridos amigos da graduação, Thaís Santos Costa, Ellen Santos Sodré, Kleyton Araújo, Yenthel Torres e em especial Lucas Querino, pois fizemos diversas disciplinas juntos da metade pro final do curso, pois fomos os únicos do nosso grupo de amigos que queria seguir na Matemática e José Wellington da Silva Junior, que formou dupla comigo nos cursos de Laboratório de Pesquisa, História da Matemática, Estágio Supervisionado I, II e III, entre outros.

À minha amiga Camilla dos Santos Anjos, por estar presente em minha vida durante tanto tempo e me aconselhar em momentos de incertezas.

Aos colegas do mestrado, Amanda Guimarães Melo, Jamisson dos Santos França, José Edivangel, José Jardel e Nívea Vitória, pelos momentos de estudo e pela companhia durante a pós-graduação.

Ao professor, Paulo de Sousa Rabelo, por te me orientado na graduação, pela amizade e pelas várias risadas que demos durante os anos de graduação e de mestrado.

Ao secretário do PROMAT, Neto, por te me auxiliado em entregas de documentos, como os necessários para obter a bolsa de estudos e por enviar o relatório da mesma.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro.

Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo sobre uma classe de variedades compactas com bordo que generalizam as variedades Einstein. O objetivo principal consiste em classificar as variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas sob determinadas hipóteses, as quais englobam variedades conhecidas, como as variedades estáticas e o espaço-tempo fluido estático perfeito. Os resultados aqui discutidos baseiam-se principalmente em um dos trabalhos de Allan Freitas e Márcio Santos, onde os autores estabelecem, a partir de condições geométricas específicas e com o auxílio de teoremas clássicos, como o Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov, uma classificação topológica para o bordo das variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas e demonstram propriedades de rigidez para tais variedades.

Palavras-chave: Variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas. Rigidez. Topologia do bordo.

Abstract

This dissertation presents a study on a class of compact manifolds with boundary that generalize Einstein manifolds. The main objective is to classify generalized $(\lambda, n + m)$ -Einstein manifolds under certain hypotheses, which encompass well-known manifolds such as static manifolds and the static perfect fluid space-time. The results presented here are mainly based on one of the works by Allan Freitas and Márcio Santos, where the authors establish, from specific geometric conditions and with the help of classical theorems, such as the Bishop-Gromov Volume Comparison Theorem, a topological classification for the boundary of the generalized $(\lambda, n + m)$ -Einstein manifolds and demonstrate rigidity properties for such manifolds.

Keywords: Generalized $(\lambda, n + m)$ -Einstein manifolds. Rigidity. Boundary topology.

Lista de Figuras

1.1	Representação geométrica da Definição 1.35	51
2.1	Hemisfério S_+^n	65
2.2	Cilindro	67

Sumário

Introdução	15
1 Preliminares	16
1.1 Conexões e Curvaturas	16
1.1.1 Conexões	16
1.1.2 Curvatura	18
1.1.3 Curvatura Seccional, Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar	20
1.2 Tensores	21
1.3 Operadores Diferenciais	25
1.4 Imersões Isométricas	30
1.5 Geodésicas e Campos de Jacobi	34
1.6 Fórmula de Bochner	39
1.7 Variações da Energia	45
1.8 Variedades com Bordo	51
1.9 Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov	53
2 Variedades $(\lambda, n + m)$-Einstein generalizadas	59
2.1 Definição e exemplos	59
2.2 Estimativas de Área e Classificação Topológica do Bordo	72
2.3 Algumas Desigualdades Integrais	87
Conclusão	97
Referências	98

Introdução

Do ponto de vista matemático e físico, as variedades de Einstein constituem uma classe importante de variedades Riemannianas com amplas aplicações em geometria diferencial e relatividade geral. O termo Einstein origina-se do contexto da teoria da relatividade, em que Albert Einstein utilizou a relação entre a curvatura de Ricci e a métrica do espaço-tempo para descrever a gravitação.

Formalmente, uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita variedade de Einstein se a curvatura de Ricci satisfaz a seguinte condição:

$$\text{Ric} = \lambda g,$$

onde $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e g é a métrica da variedade.

Essa condição surge naturalmente como solução das equações de campo de Einstein no vácuo, isto é, na ausência de matéria:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \kappa T, \tag{1}$$

em que R é a curvatura escalar da variedade, Λ é a constante cosmológica, κ é a constante de gravitação universal e T é o tensor energia-momento, que descreve a distribuição de matéria e energia.

Como caso particular é conhecido as soluções no vácuo, ou seja, neste caso $T = 0$, a equação reduz-se a $\text{Ric} = \lambda g$, caracterizando as variedades de Einstein. Essas variedades generalizam espaços de curvatura constante como esferas \mathbb{S}^n e espaços hiperbólicos \mathbb{H}^n e desempenham um papel central tanto na geometria Riemanniana quanto na física teórica, especialmente em estudos sobre a estrutura global do universo e soluções exatas em relatividade geral.

Motivado pela seguinte questão proposta no livro de Besse [2]:

“Existe um produto *warped* Einstein compacto com função *warping* não constante?”

O trabalho de Kim [13] introduziu a classe das variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein, caracterizadas pela equação:

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g, \quad (2)$$

onde Ric_f^m é o tensor de Ricci modificado dependente da função f e do parâmetro $m \in \mathbb{N}^*$, também conhecido como tensor m -Bakry-Emery, $\nabla^2 f$ denota a hessiana da função f e $df \otimes df$ representa o produto tensorial da 1-forma df consigo mesma e λ é uma constante real. Esta equação surge como uma generalização das variedades de Einstein clássicas, incorporando tanto a geometria da variedade quanto a influência da função *warping* f .

Neste trabalho, investigaremos as variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizadas, que constituem uma extensão natural das variedades Einstein.

Uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana (possivelmente com bordo ∂M), f é uma função suave satisfazendo:

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g), \quad (3)$$

com $f > 0$ no interior de M^n e $f = 0$ sobre ∂M (quando $\partial M \neq \emptyset$) e $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Em particular, dizemos que (M^n, g, f) é uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein se λ é uma constante.

Observemos que toda variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein é automaticamente uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada, pois basta tomar λ constante. Mas, a recíproca não é verdadeira, como será comentado mais adiante. Esta generalização permite estudar uma classe mais ampla de espaços geométricos, particularmente aqueles com estrutura de bordo não-trivial.

Um caso particular notável de variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada é o fator espacial de um espaço-tempo de fluido perfeito estático. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita um fator espacial de um espaço-tempo fluido estático perfeito se existirem funções suaves $f > 0$ no interior de M^n , $f = 0$ sobre ∂M (quando $\partial M \neq \emptyset$) e $\rho \in C^\infty(M^n)$ satisfazendo o seguinte sistema de equações:

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla^2} f, \\ \Delta f = \left(\frac{n-2}{2(n-1)} R + \frac{n}{n-1} \rho \right),$$

onde $\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - \frac{R}{n}g$ denota o tensor de Ricci sem traço, $\overset{\circ}{\nabla^2} f = \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g$ é a hessiana sem traço de f e ρ representa a densidade de energia do fluido [7]. De fato, tomando $m = 1$ e $\lambda = \frac{n}{n-1} \left(\frac{R}{2} - \rho \right)$ na definição de variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada obtemos o sistema que define o espaço-tempo fluido estático perfeito. Este exemplo é importante, entre outros motivos, pois não necessariamente λ é constante, ou seja, mostra que existe exemplos de variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada que não é uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein. Além disso, neste contexto, se tomarmos $\rho = -R/2$, obteremos a equação

que define as variedade estáticas, ou seja, $-(\Delta f)g + \nabla^2 f - f \text{Ric} = 0$ e $\Delta f + \frac{R}{n-1}f = 0$.

Esta dissertação está organizada em dois capítulos principais. No primeiro capítulo, desenvolvemos o aparato matemático necessário para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos inicialmente a notação utilizada e os conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana que servirão de base para todo o trabalho. Em seguida, discutiremos e demonstraremos teoremas importantes da teoria, com destaque para Teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov:

Teorema 0.1. *(Comparação de Volume de Bishop-Gromov). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para k constante,*

$$\text{Ric}(g) \geq (n-1)kg.$$

Então

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \text{Vol}(B_R^k),$$

onde B_R^k é uma bola geodésica de raio R na forma espacial de curvatura seccional constante k . A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial, for constante igual a k .

Além deste resultado crucial, serão discutidas ferramentas essenciais para nosso estudo vindas de Análise Geométrica.

O segundo capítulo desta dissertação concentra-se no estudo sistemático das variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizadas, desenvolvendo os seguintes aspectos fundamentais: definições e exemplos, propriedades geométricas, classificação topológica do bordo sob certas hipóteses e desigualdades integrais.

Como principal contribuição teórica, obtemos resultados de rigidez para esta classe de variedades. Em particular, demonstramos uma extensão do seguinte teorema fundamental devido a Chrúsciel [6] para o contexto das variedades estáticas:

Teorema 0.2. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada compacta e com bordo, tal que $\mathcal{L}_{\nabla f}R \geq 0$. Então*

$$\sum_{\alpha} K_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} (nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2-n))dS \geq 0, \quad (4)$$

onde ∂M_{α} denota as componentes conexas de ∂M , R_{γ}^{α} é a curvatura escalar de ∂M_{α} , R é a curvatura escalar de M^n , $K_{\alpha} = |\nabla f|$ é constante ao longo de ∂M_{α} , mas pode variar de acordo com α e $\mathcal{L}_{\nabla f}R \geq 0$ é a derivada de Lie da curvatura escalar na direção do ∇f , a saber, $\mathcal{L}_{\nabla f}R = \langle \nabla R, \nabla f \rangle$. Além disso, supondo que M^n tem fronteira conexa, a igualdade vale se, e somente se, M^n é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Esta abordagem unifica e generaliza diversos casos particulares conhecidos na literatura, estabelecendo novas conexões entre a geometria diferencial e a análise global em

variedades com bordo.

Uma consequência do resultado acima é o seguinte corolário:

Corolário 0.1. *Se (M^3, g, f) é uma variedade do tipo $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein generalizada compacta com bordo conexo tal que $\mathcal{L}_{\nabla f}R \geq 0$ e curvatura escalar positiva. Então ∂M é difeomorfa a uma esfera \mathbb{S}^2 .*

Inspirados pelo importante teorema de Boucher, Gibbons e Horowitz [3], que estabelece para variedades estáticas tridimensionais:

Teorema 0.3 (Boucher-Gibbons-Horowitz). *Seja (M^3, g) uma variedade estática compacta com bordo ∂M conexo e curvatura escalar $R > 0$. Então, ∂M é difeomorfo à esfera \mathbb{S}^2 , a área do bordo satisfaz $|\partial M| \leq 4\pi$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^3 é isométrico ao hemisfério de \mathbb{S}^3 .*

Neste trabalho, demonstraremos uma generalização deste resultado para variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas com $n > 2$. Especificamente, provaremos que:

Teorema 0.4. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada, compacta, com bordo, tal que, $\mathcal{L}_{\nabla f}R \geq 0$, $\inf R_\gamma > 0$ e $\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{n-1}g_{\partial M}$, onde $\widetilde{\text{Ric}}$ é o tensor de Ricci sobre ∂M e R_γ é a curvatura escalar sobre ∂M . Então,*

$$|\partial M|^\alpha (\inf_{\partial M} R) \leq n(n-1)\omega_{n-1}^\alpha, \quad (5)$$

onde $\alpha = \frac{2}{n-1}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Como consequência não trivial da demonstração do teorema anterior, obtemos o seguinte resultado estrutural para variedades tridimensionais com bordo desconexo:

Teorema 0.5 (Classificação de variedades $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein com bordo desconexo). *Seja (M^3, g) uma variedade compacta $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein satisfazendo $m > 1$, curvatura escalar constante R , curvatura de Ricci não-negativa ($\text{Ric} \geq 0$) e bordo ∂M desconexo. Então, (M^3, g) é isométrica ao cilindro métrico $\mathbb{S}^2 \times [0, a]$.*

Além disso, para uma nova caracterização do hemisfério, obteremos uma desigualdade integral. Para isso, consideramos a função

$$\rho = \frac{(n-1)\lambda - R}{m-1},$$

em M^n , com $m > 1$, e o tensor

$$P = \text{Ric} - \rho g.$$

O resultado é apresentado a seguir:

Teorema 0.6. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada compacta com bordo e $m > 1$, então*

$$\int_{M^n} f^{m+2} \text{tr}(P)(\rho - \lambda) dV + \frac{(n-1)m^2}{m-1} \int_{M^n} f^{m+1} \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV \leq 0.$$

Em particular, supondo que M^n tem bordo conexo, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Desta forma, a motivação central para investigar as variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein reside profundamente em sua relação estrutural com as variedades de Einstein do tipo *warped product*. Como demonstrado por He e Petersen [10], o estudo sistemático de variedades de Einstein na forma de produtos warped pode ser reduzido à análise da equação fundamental que caracteriza as variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein. Este trabalho será finalizado com uma síntese conclusiva e a apresentação de direções promissoras para investigações futuras.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados necessários para a compreensão do capítulo seguinte. Para maiores detalhes das demonstrações ver [4], [8], [14] e [17].

1.1 Conexões e Curvaturas

Nesta seção definiremos a conexão sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g) de dimensão n , a curvatura, que mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana, também definiremos a curvatura seccional, curvatura Ricci e curvatura escalar.

Nesta dissertação todas as variedades diferenciáveis são supostas de Hausdorff e com base enumerável. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M^n)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M^n e por $C^\infty(M^n)$ o conjunto das funções diferenciáveis em M^n .

1.1.1 Conexões

Definição 1.1. *Uma conexão Riemanniana em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma aplicação*

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\rightarrow \mathfrak{X}(M^n) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y,\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
- (iv) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

$$(v) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ e $f, g \in C^\infty(M^n)$.

Como a conexão Riemanniana é simétrica (item v da definição anterior), temos que em uma parametrização (U, \mathbf{x}) ,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$, onde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é a base coordenada em relação a parametrização \mathbf{x} .

Teorema 1.1. (*Levi - Civita*). *Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) , existe uma única conexão Riemanniana ∇ em M^n .*

Demonstração. Ver 4. página 61. □

Seja (U, \mathbf{x}) uma parametrização para M^n . Utilizaremos X_i para denotar $\frac{\partial}{\partial x_i}$. As funções reais Γ_{ij}^k definidas em U por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k,$$

são chamadas de coeficientes ou símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana.

A seguir definiremos um campo vetorial ao longo de uma curva e a sua derivada covariante.

Definição 1.2. *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M^n$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in V_{c(t)}M^n$. V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M^n , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

O campo vetorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado campo velocidade ou tangente de c .

Proposição 1.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com uma conexão Riemanniana ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M^n$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

$$a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

Demonstração. Ver [4], página 57. □

Definição 1.3. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com sua conexão Riemanniana ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M^n$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.*

Definição 1.4. *Um conjunto $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(M^n)$ é um referencial para M^n se*

$$\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$$

é base de $T_p M^n$ para cada $p \in M^n$. Isto nos diz que todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ pode ser escrito da forma

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i,$$

onde as funções $x_i : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Um referencial é dito ortonormal se $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ é uma base ortonormal de $T_p M^n$ para cada $p \in M^n$. Dizemos que um referencial $\{E_1, \dots, E_n\}$ é geodésico numa vizinhança $U \subset M^n$, se para cada $p \in U$, $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ é uma base ortonormal de $T_p M^n$ e $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

1.1.2 Curvatura

Nesta subseção definiremos curvaturas e apresentaremos algumas propriedades.

Definição 1.5. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ uma aplicação*

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n),$$

dada por,

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M^n).$$

Considere (U, \mathbf{x}) uma parametrização de M^n com coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Como

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

temos que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

ou seja, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante. Em particular, no caso do $(\mathbb{R}^n, \delta_{can})$ temos que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0.$$

A próxima definição traz algumas propriedades da curvatura.

Proposição 1.2. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n)$, isto é,*

$$\begin{aligned} R(fX_1 + hX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + hR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + hY_2) &= fR(X_1, Y_1) + hR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

onde $f, h \in C^\infty(M^n)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M^n)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, o operador curvatura*

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$$

é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

onde $f \in C^\infty(M^n)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Demonstração. Ver [4], página 101. □

Proposição 1.3. *(Primeira identidade de Bianchi).*

$$(\star) \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Demonstração. Pela simetria da conexão Riemanniana, temos que,

$$\begin{aligned} (\star) &= \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[Y, X] + \nabla_X[Z, Y] - \nabla_{[X, Z]}Y - \nabla_{[Y, X]}Z - \nabla_{[Z, Y]}X \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Na última igualdade, da demonstração anterior, utilizamos a seguinte identidade.

Proposição 1.4. *Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$, então*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ (identidade de Jacobi).}$$

Demonstração. Vem [4], página 29. □

Notação 1.1. *A partir de agora, denotaremos*

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = R(X, Y, Z, T).$$

Proposição 1.5. *(Simetria da curvatura).*

(a) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0.$

(b) $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T).$

(c) $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z).$

(d) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y).$

Demonstração. Ver [4], página 102. □

1.1.3 Curvatura Seccional, Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar

A curvatura seccional ou Riemanniana está intimamente ligada com a curvatura. É conveniente utilizar a notação a seguir. Dado um espaço vetorial V , indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.6. *Seja $\sigma \subset T_p M^n$ um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M^n$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Ver [4], página 104. □

A seguir, definiremos curvatura seccional, curvatura de Ricci e curvatura escalar.

Definição 1.6. Dado um ponto $p \in M^n$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M^n$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .

Definição 1.7. A curvatura de Ricci é a forma bilinear

$$\text{Ric}_p : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\text{Ric}_p(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle,$$

onde $X, Y \in T_p M^n$.

Definição 1.8. A curvatura escalar é a função

$$R : M^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$R(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(E_i, E_i),$$

onde $\{E_i\}$ é base ortonormal do $T_p M^n$.

Em outras palavras, a curvatura de Ricci é o traço em relação a métrica da curvatura e a curvatura escalar é o traço da curvatura de Ricci.

1.2 Tensores

Nesta seção apresentaremos a definição de tensor em uma variedade Riemanniana, assim como, a sua derivada covariante e por fim demonstraremos a segunda identidade de Bianchi.

Definição 1.9. Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação $C^\infty(M^n)$ -multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M^n) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M^n)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow C^\infty(M^n).$$

Ou seja, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M^n)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M^n , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + hY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + hT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ e $f, h \in C^\infty(M^n)$.

Um tensor T é um objeto pontual. Com efeito, fixe um ponto $p \in M^n$ e seja U uma vizinhança de p em M^n onde é possível definir campos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M^n)$ de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i(q)\}_{i=1}^n$, formam uma base de $T_q M^n$ diremos, neste caso, que $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial móvel em U . Sejam

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, \dots, Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}, \quad i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n,$$

as restrições a U dos campos Y_1, \dots, Y_r , expressas no referencial móvel $\{E_i\}_{i=1}^n$. Por linearidade,

$$T(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1} \dots y_{i_r} T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}).$$

As funções $T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}) = T_{i_1 \dots i_r}$ em U são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$.

Da expressão acima resulta que o valor de $T(Y_1, \dots, Y_r)$ em um ponto $p \in M^n$ depende apenas dos valores em p das componentes de T , e dos valores Y_1, \dots, Y_r em p . É neste sentido que dizemos que T é pontual.

Notação 1.2. Também é comum usar a notação $(1, r)$ -tensor para definir $T(X_1, \dots, X_r)(p) \in \mathbb{R}$, isto é

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M^n) \times \dots \times \mathfrak{X}(M^n)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 1.10. Sejam T_1 um r -tensor e T_2 um s -tensor em uma variedade Riemanniana M^n . O produto tensorial de T_1 por T_2 é um $(r + s)$ -tensor, denotado por $T_1 \otimes T_2$ e definido por

$$T_1 \otimes T_2(X_1, \dots, X_{r+s}) = T_1(X_1, \dots, X_r) T_2(X_{r+1}, \dots, X_{r+s}).$$

Observação 1.1. É conveniente identificar o campo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ com o tensor

$$X : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$$

dado por $X(Y) = \langle X, Y \rangle$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.

É possível estender aos tensores a noção de derivada covariante.

Definição 1.11. Seja T um r -tensor. A derivada covariante ∇ de T é um $r + 1$ -tensor dada por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Observação 1.2. Se T é um 2-tensor em uma variedade Riemanniana, então podemos

associá-lo a um único $(1,1)$ -tensor, que também denotamos por T , da seguinte forma

$$T(X, Y) = g(T(X), Y) = \langle T(X), Y \rangle. \quad (1.1)$$

De fato, sejam

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i \text{ e } Y = \sum_{j=1}^n y_j E_j.$$

Definindo

$$T(X) = \sum_{i,k=1}^n x_i T(E_i, E_k) E_k,$$

temos que

$$\begin{aligned} \langle T(X), Y \rangle &= \left\langle \sum_{i,k=1}^n x_i T(E_i, E_k) E_k, \sum_{j=1}^n y_j E_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n x_i y_j T(E_i, E_j) \langle E_k, E_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j T(E_i, E_j) \\ &= T(X, Y). \end{aligned}$$

Definição 1.12. Dados dois 2-tensores T, F , o produto interno de Hilbert-Schmidt entre eles é dado por

$$\langle T, F \rangle = \text{tr}(T^* F) = \sum_{i=1}^n \langle T(E_i), F(E_i) \rangle, \quad (1.2)$$

onde T^* é o operador adjunto de T . Portanto, se T é um operador autoadjunto, temos que

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^n \langle T(E_i), T(E_i) \rangle,$$

definindo assim, a norma de Hilbert-Shmidt, $|\cdot|$, para operadores.

Proposição 1.7. (Segunda identidade de Bianchi).

$$\nabla R(X, Y, Z, W, T) + \nabla R(X, Y, W, T, Z) + \nabla R(X, Y, T, Z, W) = 0$$

para todo $X, Y, Z, W, T \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Demonstração. Como as entidades envolvidas são tensores, basta demonstrar a igualdade em um ponto $p \in M^n$. Então, tomemos um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M^n$. No

ponto p temos que,

$$\begin{aligned}
\nabla R(E_i, E_j, E_k, E_l, E_m) &= E_m \langle R(E_i, E_j) E_k, E_l \rangle \\
&= E_m \langle R(E_k, E_l) E_i, E_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_m} R(E_k, E_l) E_i, E_j \rangle + \langle R(E_k, E_l) E_i, \nabla_{E_m} E_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_m} R(E_k, E_l) E_i, E_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_m} \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i - \nabla_{E_m} \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i + \nabla_{E_m} \nabla_{[E_k, E_l]} E_i, E_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_m} \nabla_{[E_k, E_l]} E_i, E_j \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla R(E_i, E_j, E_k, E_l, E_m) = \langle \nabla_{E_m} \nabla_{[E_k, E_l]} E_i, E_j \rangle. \quad (1.3)$$

Analogamente,

$$\nabla R(E_i, E_j, E_l, E_m, E_k) = \langle \nabla_{E_k} \nabla_{[E_l, E_m]} E_i, E_j \rangle \quad (1.4)$$

e

$$\nabla R(E_i, E_j, E_m, E_k, E_l) = \langle \nabla_{E_l} \nabla_{[E_m, E_k]} E_i, E_j \rangle. \quad (1.5)$$

Por (1.3), (1.4) e (1.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla R(E_i, E_j, E_k, E_l, E_m) + \nabla R(E_i, E_j, E_l, E_m, E_k) + \nabla R(E_i, E_j, E_m, E_k, E_l) &= \\
\langle \nabla_{E_m} \nabla_{[E_k, E_l]} E_i + \nabla_{E_k} \nabla_{[E_l, E_m]} E_i + \nabla_{E_l} \nabla_{[E_m, E_k]} E_i, E_j \rangle. & \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Note que

$$[E_i, E_j](p) = (\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i)(p) = 0.$$

Logo,

$$0 = R([E_k, E_l], E_m) E_i = \nabla_{E_m} \nabla_{[E_k, E_l]} E_i - \nabla_{[E_k, E_l]} \nabla_{E_m} E_i + \nabla_{[[E_k, E_l], E_m]} E_i.$$

Portanto,

$$\nabla_{E_m} \nabla_{[E_k, E_l]} E_i = \nabla_{[E_k, E_l]} \nabla_{E_m} E_i - \nabla_{[[E_k, E_l], E_m]} E_i = -\nabla_{[[E_k, E_l], E_m]} E_i. \quad (1.7)$$

Analogamente,

$$\nabla_{E_k} \nabla_{[E_l, E_m]} E_i = -\nabla_{[[E_l, E_m], E_k]} E_i \quad (1.8)$$

e

$$\nabla_{E_l} \nabla_{[E_m, E_k]} E_i = -\nabla_{[[E_l, E_k], E_l]} E_i. \quad (1.9)$$

Aplicando (1.7), (1.8) e (1.9) em (1.6) e utilizando a identidade de Jacobi, temos que

$$\nabla R(E_i, E_j, E_k, E_l, E_m) + \nabla R(E_i, E_j, E_l, E_m, E_l) + \nabla R(E_i, E_j, E_m, E_k, E_l) = 0.$$

□

1.3 Operadores Diferenciais

Nesta seção, definiremos os operadores diferenciais, sendo eles, o gradiente, a hessiana e o laplaciano de uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana e do divergente de um campo de vetores nesta variedade, além de apresentar e demonstrar alguns resultados e propriedades.

Definição 1.13. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Definimos o gradiente de uma função diferenciável $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, como o único campo de vetores ∇f em M^n tal que*

$$g(\nabla f(p), v) = df_p \cdot v, \quad p \in M^n, \quad v \in T_p M^n.$$

Definição 1.14. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M^n)$. A divergência de X é uma função real diferenciável definida em M^n , denotada por $\text{div}(X)$, e definida por*

$$\text{div}(X) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal.

Definição 1.15. *Seja T um k -tensor em uma variedade Riemanniana (M^n, g) . A divergência de T é um $(k-1)$ -tensor, denotado por $\text{div}(T)$, e definido por*

$$\text{div}(T)(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} T(X_1, \dots, X_{k-1}, E_i).$$

Observação 1.3. *Para um $(1,2)$ -tensor simétrico e $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ tem-se*

$$(\text{div}(T))(X) = \text{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X). \quad (1.10)$$

De fato, tomando $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico, temos que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(T))(X) &= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} T(X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n [E_i(T(X, E_i)) - T(\nabla_{E_i} X, E_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n [E_i \langle T(X), E_i \rangle - T(E_i, \nabla_{E_i} X)] \\
&= \operatorname{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X).
\end{aligned}$$

Conforme queríamos demonstrar.

Note que $\operatorname{div}(T(X))$ é a divergência do campo $T(X)$. Além disso, a divergência de uma função f multiplicada por um tensor T é dada por

$$(\operatorname{div}(fT))(X) = T(X, \nabla f) + f(\operatorname{div}(T))(X). \quad (1.11)$$

Definição 1.16. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M^n)$. A hessiana de f é um 2-tensor simétrico, denotado por $\nabla^2 f$ e definido por*

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

Observação 1.4. *(Simetria da hessiana). Aqui verificaremos a simetria da hessiana.*

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \\
&= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\
&= X(Y(f)) - ([X, Y] + \nabla_Y X)(f) \\
&= X(Y(f)) - (XY - YX + \nabla_Y X)(f) \\
&= X(Y(f)) - X(Y(f)) + Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) \\
&= Y \langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle \\
&= \nabla^2 f(Y, X).
\end{aligned}$$

Definição 1.17. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. O laplaciano de (M^n, g) é o operador $\Delta : C^\infty(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ dado por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f), \quad f \in C^\infty(M^n).$$

Observação 1.5. Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal, então

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \operatorname{tr}(\nabla^2 f),$$

onde tr significa traço em relação a métrica.

Portanto, a divergência do produto tensorial

$$df \otimes df(X, Y) = \langle \nabla f, X \rangle \langle \nabla f, Y \rangle$$

é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(df \otimes df)(X) &= \operatorname{div}(\nabla f) \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, X \rangle \\ &= \Delta f \langle \nabla f, X \rangle + \nabla^2 f(\nabla f, X). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Proposição 1.8. Seja T um 2-tensor em uma variedade Riemanniana (M^n, g) então

$$\operatorname{div}(T(\phi Z)) = \phi(\operatorname{div} T)(Z) + \phi \langle \nabla Z, T \rangle + T(Z, \nabla \phi), \quad (1.13)$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ e $\phi \in C^\infty(M^n)$.

Demonstração. Sejam $\phi \in C^\infty(M^n)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Usando a linearidade do tensor T , temos que

$$T(\phi Z) = \phi T(Z).$$

Então

$$\operatorname{div}(T(\phi Z)) = \operatorname{div}(\phi T(Z)). \quad (1.14)$$

Pela definição de divergência e pela equação (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi T(Z)) &= \phi \operatorname{div}(T(Z)) + T(Z, \nabla \phi) \\ &= \phi(\operatorname{div} T)(Z) + \phi \langle \nabla Z, T \rangle + T(Z, \nabla \phi). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Portanto de (1.14) e (1.15), inferimos que

$$\operatorname{div}(T(\phi Z)) = \phi(\operatorname{div} T)(Z) + \phi \langle \nabla Z, T \rangle + T(Z, \nabla \phi),$$

conforme queríamos demonstrar. \square

Lema 1.1. Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , temos que

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}) = \frac{1}{2} \nabla R. \quad (1.16)$$

Demonstração. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em $p \in M^n$ e $X \in T_p M^n$. Então

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= X(R)(p) \\ &= X\left(\sum_{i=1}^n \text{Ric}(E_i, E_i)\right)(p) \\ &= X\left(\sum_{i,j=1}^n \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle\right)(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_X R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle(p). \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla R, X \rangle(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_X R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle(p).$$

Pela segunda Identidade de Bianchi, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= \sum_{i,j=1}^m \langle \nabla_{E_i} R(E_j, X)E_j - \nabla_{E_j} R(X, E_i)E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} R(E_j, X)E_j, E_i \rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_j} R(X, E_i)E_j, E_i \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} R)(E_j, X, E_i, E_j) - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} R)(X, E_i, E_i, E_j). \end{aligned}$$

Trocando i por j na segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} R)(E_j, X, E_i, E_j) - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} R)(X, E_j, E_j, E_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} R)(X, E_j, E_i, E_j) + \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} R)(X, E_j, E_i, E_j) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} R)(X, E_j, E_i, E_j). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla_{E_i} \text{Ric}(X, E_i) \\ &= 2(\text{div}(\text{Ric}))(X). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2} \nabla R.$$

Conforme queríamos demonstrar. \square

Proposição 1.9. *Dada uma função $f \in C^\infty(M^n)$, vale a seguinte identidade*

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f. \quad (1.17)$$

Demonstração. Sabemos que,

$$(\operatorname{div}(T))(X) = \operatorname{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X),$$

para um (1,2)-tensor simétrico. Portanto, tomando $T = \nabla^2 f$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(\nabla^2 f))(X) &= \sum_{i=1}^n [E_i \nabla^2 f(X, E_i) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i} X, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [E_i \langle \nabla_X \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} \nabla f, E_i \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i] - \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} \nabla f, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$R(E_i, X) \nabla f = \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f - \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f - \nabla_{[E_i, X]} \nabla f,$$

tem-se que

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle = \langle R(E_i, X) \nabla f + \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f + \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle$$

e por

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i) Y, E_i \rangle,$$

temos

$$\operatorname{Ric}(X, \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i) \nabla f, E_i \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle &= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f + \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle \\ &= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle \\ &= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + X(\Delta f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Note que,

$$X(\Delta f) = \langle \nabla \Delta f, X \rangle.$$

Como

$$\nabla_X E_i = 0 \implies [E_i, X] = \nabla_{E_i} X.$$

Concluimos que

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f)(X) = \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \langle \nabla \Delta f, X \rangle.$$

□

1.4 Imersões Isométricas

Nesta seção definiremos imersão isométrica em uma variedade Riemanniana. Posteriormente generalizaremos a noção da segunda forma fundamental e finalizaremos demonstrando a equação de Gauss.

Definição 1.18. *Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana (M^n, g) de dimensão n em uma variedade Riemanniana $(\overline{M}^{n+m}, \overline{g})$ de dimensão $k = n + m$. Dados $u, v \in T_p M^n$, se $g(u, v) = \overline{g}(df_p(u), df_p(v))$, ($g = f^* \overline{g}$), então f passa a ser imersão isométrica de M^n em \overline{M}^{n+m} .*

Sabemos que para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M^n$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}^{n+m}$ é uma subvariedade, pois toda imersão é localmente um mergulho. Para simplificar a notação, indicaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_p M^n$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}^{n+m}$. Essas identificações serão usadas para estender um campo local de vetores em M^n a um campo local de vetores em \overline{M}^{n+m} . Para cada $p \in M^n$, o produto interno em $T_p M^n$ decompõe $T_p \overline{M}^{n+m}$ na soma direta

$$T_p \overline{M}^{n+m} = T_p M^n \oplus (T_p M^n)^\perp,$$

onde $(T_p M^n)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M^n$ em $T_p \overline{M}^{n+m}$. Assim, se $v \in T_p \overline{M}^{n+m}$, podemos escrever

$$v = v^\top + v^\perp,$$

onde $v^\top \in T_p M^n$ é a componente tangencial de v e $v^\perp \in (T_p M^n)^\perp$ é a componente normal de v . A conexão Riemanniana de \overline{M}^{n+m} será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M^n , e \overline{X} e \overline{Y} são extensões locais a \overline{M}^{n+m} , então

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top.$$

No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Exemplo 1.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. A inclusão $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão. Assim, introduzindo a métrica Riemanniana $g = i^* \delta$ em S , onde δ é a métrica*

Euclideana em \mathbb{R}^3 , temos que i é uma imersão isométrica.

Definição 1.19. A segunda forma fundamental de $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ é a aplicação

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\rightarrow \mathfrak{X}(M^n)^\perp \\ (X, Y) &\mapsto \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y, \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{X}(M^n)^\perp = \{V : M^n \rightarrow T\overline{M}^{n+m}; V(p) \in (T_p M^n)^\perp \forall p \in M^n\}$.

Proposição 1.10. B é uma forma bilinear e simétrica

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, temos que B é aditiva em X e Y e $B(fX, Y) = fB(X, Y)$, $f \in C^\infty(U)$. Resta mostrar que $B(X, fY) = fB(X, Y)$, $f \in C^\infty(U)$. Indicando por \overline{f} uma extensão de f a \overline{U} , tem-se que

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \overline{\nabla}_X(\overline{fY}) - \nabla_X(fY) \\ &= \overline{f}\overline{\nabla}_X \overline{Y} - f\nabla_X Y + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como em M^n , $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$, concluímos que as duas últimas parcelas se anulam, ou seja, $B(X, fY) = fB(X, Y)$, isto é, B é linear.

Para a simetria, temos que

$$\begin{aligned} B(X, Y) - B(Y, X) &= (\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_Y \overline{X} - \nabla_Y X) \\ &= \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \overline{\nabla}_Y \overline{X} + \nabla_Y X - \nabla_X Y \\ &= [\overline{X}, \overline{Y}] - [X, Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donde $B(X, Y) = B(Y, X)$. □

Definição 1.20. Seja $p \in M^n$ e $\eta \in (T_p M^n)^\perp$. A aplicação

$$H_\eta : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R},$$

dado por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M^n,$$

que pela proposição anterior, é uma forma bilinear simétrica. A forma quadrática II_η definida em $T_p M^n$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

Observação 1.6. A aplicação bilinear H_η fica associada a uma aplicação linear auto-

adjunta $S_\eta : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.11. *Sejam $p \in M^n$, $x \in T_p M^n$ e $\eta \in (T_p M^n)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M^n . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top.$$

Demonstração. Seja x e $y \in T_p M^n$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente, e tangentes a M^n . Então $\langle N, Y \rangle = 0$, sendo assim,

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= \langle -\bar{\nabla}_X N, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_p M^n$. □

Definição 1.21. *Uma imersão $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ é uma geodésica em $p \in M^n$ se para todo $\eta \in (T_p M^n)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p . A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M^n$.*

Proposição 1.12. *(Equação de Gauss). Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Então*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle,$$

para todo $X, U, Z, T \in \mathfrak{X}(M^n)$, onde \bar{R} e R são tensores curvatura de \bar{M}^{n+m} e M^n , respectivamente.

Demonstração. Note que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z) \\ &= R(X, Y)Z + B(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^\perp B(X, Z) - S_{B(X, Z)} Y - B(X, \nabla_Y Z) \\ &\quad - \nabla_X^\perp B(Y, Z) + S_{B(Y, Z)} X + B([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Tomando o produto interno com T

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle.$$

Como gostaríamos. □

Exemplo 1.2. Seja $(\mathbb{S}^n(r), g)$ uma esfera de dimensão n e o raio r . Vamos mostrar que a curvatura escalar de $\mathbb{S}^n(r)$ é $R_{\mathbb{S}^n(r)} = \frac{n(n-1)}{r^2}$. De fato, sabemos que a curvatura seccional, denotada por $K(\sigma)$ em cada $p \in \mathbb{S}^n(r)$ associada a um plano $\sigma \subset T_p\mathbb{S}^n(r)$ é dada por

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2},$$

onde X, Y são vetores que geram σ e R é o tensor de curvatura Riemanniana na métrica g . Afirmamos que

$$K(\sigma) = \frac{1}{r^2}.$$

Com efeito, a esfera \mathbb{S}^n de raio r pode ser mergulhada no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} com a métrica induzida e $R_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$. Considere N o vetor normal unitário da esfera e denote por $S_\eta(X) = -\nabla_X N$ o operador forma. No caso da esfera

$$S_\eta(X) = -\frac{1}{r}X. \quad (1.18)$$

Portanto, obtemos que a segunda forma fundamental é

$$B(X, Y) = \langle S_\eta(X), Y \rangle N = -\frac{1}{r}\langle X, Y \rangle N.$$

Usando a equação de Gauss, temos:

$$R(X, Y)Z = \left(-\frac{1}{r}\langle Y, Z \rangle\right)\left(-\frac{1}{r}X\right) - \left(-\frac{1}{r}\langle X, Z \rangle\right)\left(-\frac{1}{r}Y\right).$$

Ou seja,

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Daí

$$R(X, Y, Y, X) = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Y \rangle \langle X, X \rangle - \langle X, Y \rangle^2).$$

O que implica

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{1}{r^2} = K.$$

Para provar (1.18), note que o vetor normal em $p \in \mathbb{S}^n(r)$ é $N = \frac{p}{r}$. Daí, $\nabla_X N = \frac{X}{r}$, implicando que $S_\eta(X) = -\frac{X}{r}$. Por outro lado, como a curvatura escalar é constante,

então

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Tomando o traço, obtemos:

$$R_{ij} = g^{kl}R_{likj} = K g^{kl}(g_{lk}g_{ij} - g_{lj}g_{ik}).$$

Note que

$$g^{kl}g_{lk} = \delta_k^k = n,$$

$$g^{kl}g_{lj} = \delta_j^k$$

e

$$g_{ik}\delta_j^k = g_{ij}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Ric} &= K(n g_{ij} - \delta_j^k g_{ik}) \\ &= K(n g_{ij} - g_{ij}) \\ &= K(n - 1)g_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Ric}_{\mathbb{S}^n(r)} = \frac{1}{r^2}(n - 1)g. \quad (1.19)$$

Tomando novamente o traço,

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}R_{ij} \\ &= K(n - 1)g^{ij}g_{ij} \\ &= K(n - 1)\delta_i^i. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$R_{\mathbb{S}^n(r)} = \frac{n(n - 1)}{r^2}.$$

Conforme queríamos demonstrar.

1.5 Geodésicas e Campos de Jacobi

Nesta seção, introduziremos a noção de geodésica como uma curva cuja a aceleração é nula e de campos de Jacobi, que são campos de vetores ao longo de geodésicas.

Definição 1.22. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $I \subset \mathbb{R}$ uma aberto. Uma*

curva

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$$

é dita ser geodésica em $t_0 \in I$ se

$$\frac{D}{Dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

em $t = t_0$. Se γ é geodésica em todo $t \in I$ dizemos que γ é geodésica em I .

Note que se $\gamma \rightarrow M^n$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{Dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

ou seja, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Portanto, de agora em diante, suporemos que $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$. Então, o comprimento de arco s de γ a partir de uma origem fixa é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Quando $c = 1$, diremos que a γ é uma geodésica normalizada.

Determinaremos as equações locais satisfeitas por uma geodésica γ em uma parametrização (U, \mathbf{x}) . Seja $\mathbf{x}^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de γ na parametrização \mathbf{x} .

A curva γ é uma geodésica se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

isto é,

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1 \dots, n.$$

Definição 1.23. Uma geodésica $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser minimizante, se $l(\gamma) \leq l(\alpha)$, para qualquer curva diferenciável por partes α ligando as extremidades de γ , onde $l(\gamma)$ denota o comprimento da curva γ .

Como as geodésicas são soluções de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-linear, o seu domínio maximal de definição é um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ o qual nem sempre é todo \mathbb{R} .

Como decorrência do teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias, segue o seguinte resultado.

Proposição 1.13. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M^n$ e $v \in T_p M^n$, existe uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow M^n$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Onde a existência da proposição acima é garantida apenas com um intervalo de definição "pequeno".

Definição 1.24. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é completa quando, para todo $p \in M^n$, as geodésicas que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.25. Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e $p \in M^n$. Definimos a aplicação exponencial em p por

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p M^n &\rightarrow M^n \\ v &\mapsto \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right), \end{aligned}$$

onde $\gamma(t, p, v)$ é a geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Geometricamente, $\exp_p v$ é o ponto de M^n obtido percorrendo uma distância igual a $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, a partir de p , sobre a geodésica que passa por p com velocidade $\frac{v}{|v|}$.

Definição 1.26. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ conexo cuja a fronteira ∂A é uma curva diferenciável por partes tal que os ângulos dos vértices sejam diferentes de π . Uma superfície parametrizada é uma aplicação diferenciável

$$s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^n,$$

isto é, s se estende a uma aplicação $s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^n$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 que contém A .

Definição 1.27. Um campo de vetores V ao longo de s é uma aplicação que a cada ponto $p \in A$ associa um vetor $V(p) \in T_{s(p)} M^n$. Dizemos que V é diferenciável se, para toda $f \in C^\infty(M^n)$ a aplicação $p \mapsto V(p)f$ é diferenciável.

Note que, para v_0 fixo, a aplicação $u \rightarrow s(u, v_0)$ é uma curva em M^n , denotamos por $\frac{\partial s}{\partial u}$ seu campo de vetores tangente, $u \rightarrow ds_{(u, v_0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}(u, v_0)\right)$. Isto define $\frac{\partial s}{\partial u}$ para todo $(u, v) \in A$ e $\frac{\partial s}{\partial u}$ é um campo de vetores ao longo de s . De mesmo modo, podemos definir $\frac{\partial s}{\partial v}$.

Definição 1.28. Se V é um campo de vetores definido ao longo de s ,

$$\frac{DV}{Du}, \frac{DV}{Dv},$$

são derivadas covariantes ao longo de $u \mapsto s(u, v_0)$ e $v \mapsto (u_0, v)$ respectivamente.

Lema 1.2. (Simetria). Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana com sua conexão ∇ e $s : A \rightarrow M^n$ uma superfície parametrizada. Então

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u}.$$

Demonstração. Ver [4], página 76. □

Lema 1.3. (Gauss). *Sejam $p \in M^n$ e $v \in T_p M^n$ tal que a $\exp_p(v)$ esteja definida. Seja $w \in T_v(T_p M^n) \approx T_p M^n$. Então*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Demonstração. Ver [4], página 77. □

Usaremos a notação $B(0, \epsilon)$ para indicar uma bola aberta de centro na origem de $T_p M^n$ e raio ϵ e a notação $B[0, \epsilon]$ para indicar uma bola fechada de centro na origem de $T_p M^n$ e raio ϵ .

Definição 1.29. *Se V é uma vizinhança da origem em $T_p M^n$ na qual \exp_p é difeomorfismo, dizemos que o conjunto $U = \exp_p V$ é uma vizinhança normal de p . Se $B(0, \epsilon)$ é tal que $B[0, \epsilon] \subset V$, chamamos $B(p, \epsilon) := \exp_p B(0, \epsilon)$ a bola geodésica de centro em p e raio ϵ , $B[p, \epsilon] := \exp_p B[0, \epsilon]$ o disco geodésico de centro em p , raio ϵ e $S(p, \epsilon) = \exp_p(\partial B[0, \epsilon])$ a esfera geodésica. As geodésicas que partem de p são chamadas de geodésicas radiais.*

Proposição 1.14. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^n$ superfície parametrizada (u, v) coordenadas em \mathbb{R}^2 . Seja $V = V(u, v)$ um campo de vetores ao longo de f . Então,*

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} = R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Definição 1.30. (Campo de Jacobi). *Um campo de vetores J ao longo de uma geodésica γ é dito ser um campo de Jacobi se satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{D^2 J(t)}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

Exemplo 1.3. (Campo de Jacobi em variedades de curvatura seccional constante k). *Sejam $\gamma : [0, l] \rightarrow M^n$ geodésica normalizada e S_k um campo de Jacobi ao longo de γ normal a γ' , se T é qualquer campo de vetores ao longo de γ . Então*

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', S_k)\gamma', T \rangle &= k[\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle S_k, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle S_k, \gamma' \rangle] \\ &= k \langle S_k, T \rangle \\ &= \langle k S_k, T \rangle. \end{aligned}$$

Daí, pela equação que define campo de Jacobi, concluímos que

$$\frac{D^2 S_k}{dt^2} + k S_k = 0.$$

Seja $\omega(t)$ um campo paralelo ao longo de γ tal que $\langle \omega, \gamma' \rangle = 0$ e $|\omega(t)| = 1$.

Afirmção 1.1.

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\omega(t); & \text{se } k > 0, \\ t\omega(t); & \text{se } k = 0, \\ \frac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}\omega(t); & \text{se } k < 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Com condições iniciais:

$$\begin{cases} S_k(0) = 0 \\ S'_k(0) = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Proposição 1.15. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M^n$ geodésica. Então J campo de Jacobi ao longo de γ é dado por:*

$$J(t) = (\operatorname{dexp}_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

Demonstração. Ver [4], página 126. □

Definição 1.31. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, dados p e $q \in (M^n, g)$, a distância de p a q é definida por*

$$d(p, q) = \inf\{l(f_{p,q}); f_{p,q} \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q\}.$$

Note que (M^n, d) é um espaço métrico. Além disso, d gera a topologia de M^n .

Teorema 1.2. (Ropf-Rinow). *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $p \in M^n$. São equivalentes:*

- (a) \exp_p está definida em todo o $T_p M^n$.
- (b) Os limitados e fechados são compactos.
- (c) (M^n, d) é um espaço métrico completo.
- (d) (M^n, g) é uma variedade completa.
- (e) Existe $k_n \subset M^n$, com $k_n \subset \operatorname{int}(k_{n+1})$, tal que $\bigcup k_n = M^n$ e se $q_n \notin k_n$ então $d(p, q_n)$ tende a infinito.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

- (f) Para todo $q \in M^n$ existe γ ligando p a q tal que $l(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Ver [4], página 162. □

1.6 Fórmula de Bochner

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados clássicos da Geometria Diferencial e da Análise Geométrica, a saber o teorema da divergência, o teorema espectral, o teorema de Lichnerowicz e o teorema de Obata, além de demonstrar a fórmula de Bochner. Iniciaremos com as seguintes definições, fundamentais para os resultados de [9]:

Definição 1.32. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. A derivada de Lie do tensor métrico g na direção de um campo de vetores X é um 2-tensor, denotado por $\mathcal{L}_X g$, e definido por*

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y),$$

onde $Z, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Observação 1.7. *Seja T um 2-tensor, então $\mathcal{L}_X T = \langle \nabla T, X \rangle$. Portanto, $\mathcal{L}_{\nabla f} R = \langle \nabla R, \nabla f \rangle$.*

Definição 1.33. *Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) , dizemos que $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ é campo conforme, se*

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho g,$$

para alguma função suave ρ definida em M^n .

A seguir, serão anunciados os clássicos resultados: Teorema da Divergência e Teorema Espectral.

Teorema 1.3. *(Teorema da Divergência). Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, com bordo e X um campo de vetores em M^n . Então*

$$\int_{M^n} \operatorname{div}(X) dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dS,$$

onde ν é um vetor normal unitário, com orientação externa sobre ∂M . Note ainda que, se $\partial M = \emptyset$, então

$$\int_{M^n} \operatorname{div}(X) dV = 0.$$

Teorema 1.4. *(Teorema Espectral). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(i) *O conjunto dos autovalores do operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ consiste de uma sequência infinita*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \uparrow \infty;$$

(ii) Cada autovalor λ_i tem multiplicidade infinita e os autoespaços correspondentes a autovalores distintos são ortogonais no sentido de $L_1^2(M^n)$, onde $L_1^2(M^n)$ é o complemento de $C^\infty(M^n)$ com respeito à norma

$$\|\varphi\|^2 = \int_{M^n} \varphi^2 dM^n + \int_{M^n} |\nabla\varphi|^2 dM^n;$$

(iii) A soma direta dos autoespaços correspondentes é densa em $L_1^2(M^n)$ na topologia da norma e densa em $C^k(M^n)$ na topologia da convergência uniforme, $k = \dots$.

Utilizamos o teorema a seguir, para o cálculo destes autovalores.

Teorema 1.5. (Princípio do Min - Max). Sejam f_i as auto funções do Laplaciano correspondentes aos autovalores λ_i , isto é,

$$\Delta f_i = -\lambda_i f_i.$$

Se

$$H = \{f \in L_1^2(M^n); \int_{M^n} f dM^n = 0\},$$

então

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n}{\int_{M^n} f^2 dM^n}; f \in H \right\}$$

e

$$\lambda_i = \inf \left\{ \frac{\int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n}{\int_{M^n} f^2 dM^n}; f \in H, \int_{M^n} f f_j dM^n = 0, j = 1, \dots, i-1 \right\}.$$

Em particular

$$\lambda_1 \int_{M^n} f^2 dM^n \leq \int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n.$$

O seguinte teorema servirá como ferramenta para a demonstração dos principais resultados deste trabalho.

Teorema 1.6. (Identidade de Pohozaev - Schoen). Se X é um campo vetorial em uma variedade compacta (M^n, g) e T é um 2-tensor, então

$$\int_{M^n} (\operatorname{div}(T))(X) dV = -\frac{1}{2} \int_{M^n} \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle dV + \int_{\partial M} T(X, \nu) dS,$$

onde ν é um vetor normal com orientação externa sobre ∂M .

Demonstração. Pela observação [1.32](#), temos que

$$\begin{aligned}\langle T, \mathcal{L}_X g \rangle &= \sum_{i,j=1}^n T(E_i, E_j) \cdot \mathcal{L}_X(E_i, E_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n [\langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle + \langle \nabla_{E_j} X, T(E_j) \rangle] \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle.\end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência, segue que

$$\int_{M^n} \operatorname{div}(T(X)) dV = \int_{\partial M} \langle T(X), \nu \rangle dS.$$

Agora, da definição da divergência de um tensor, temos que

$$\int_{M^n} \operatorname{div}(T(X)) dV = \int_{M^n} (\operatorname{div}(T))(X) dV + \frac{1}{2} \int_{M^n} \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle dV.$$

Portanto,

$$\int_{M^n} (\operatorname{div}(T))(X) dV = -\frac{1}{2} \int_{M^n} \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle dV + \int_{\partial M} T(X, \nu) dS.$$

□

Proposição 1.16. *Para todo campo de vetores diferencial X em uma variedade Riemanniana (M^n, g) e $f \in C^\infty(M^n)$ são válidas as equações:*

$$(1) \quad \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X) = \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle + \langle \nabla^2 f, \nabla X \rangle.$$

$$(2) \quad (\text{Fórmula de Bochner}) \quad \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle.$$

Demonstração. [\(1\)](#) Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em $p \in M^n$. Então, pela simetria da hessiana de f , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X)p &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle,\end{aligned}$$

e como

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X)p &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i) \nabla f + \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f - \nabla_{[X, E_i]} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i) \nabla f, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X, E_i]} \nabla f, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X)p &= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X, E_i]} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + X(\Delta f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} X \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle + \langle \nabla^2 f, \nabla X \rangle.
\end{aligned}$$

Para provarmos (2), tome $X = \nabla f$ em (1), então

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(\nabla f)p = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \rangle.$$

□

Afirmção 1.2. $\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(\nabla f) = \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2.$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(\nabla f) &= \operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla^2 f(\nabla f), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i \langle \nabla^2(\nabla f), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i \langle \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i E_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i E_i |\nabla f|^2 \\
&= \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Lema 1.4. *Para uma função f em uma variedade Riemanniana, temos*

$$2(\operatorname{div} \nabla^2 f)(\nabla f) = \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 - |\nabla^2 f|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \quad (1.22)$$

Demonstração. Pela equação (1.17), sabemos que

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f.$$

Então

$$(\operatorname{div} \nabla^2 f)(\nabla f) = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle. \quad (1.23)$$

Pela Fórmula de Bochner, temos que

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle. \quad (1.24)$$

Juntando as equações (1.23) e (1.24), inferimos que

$$2(\operatorname{div} \nabla^2 f)(\nabla f) = \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 - |\nabla^2 f|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle.$$

□

Lema 1.5. *(Fórmula de Newton). Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e $A = (a_{ij})_{n \times n}$ sua matriz associada a um par de bases qualquer. Então*

$$\|A\|^2 \geq \frac{1}{n} (\operatorname{tr}(A))^2$$

e ocorre a igualdade se, e somente se, $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. De fato,

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2 = \frac{1}{n} (\operatorname{tr}(A))^2.$$

□

No caso mais geral, se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M^n)$, então

$$\|\nabla^2 f\|^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta f)^2.$$

O seguinte teorema é utilizado na demonstração do teorema de Obata.

Teorema 1.7. *(Lichnerowicz). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n , compacta, sem bordo e conexa. Seja $f \in C^\infty(M^n)$ uma auto função do Laplaciana de*

M^n correspondente ao primeiro autovalor não-nulo, isto é,

$$\Delta f = -\lambda_1 f, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Suponha que a curvatura Ricci de M^n na direção do gradiente de f é limitada inferiormente por

$$\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq k|\nabla f|^2,$$

para todo $p \in M^n$ e para alguma constante $k > 0$. Então $\lambda_1 \geq nk$.

Demonstração. Pela fórmula de Bochner, temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle.$$

Integrando sobre M^n e usando o Teorema da divergência para $\partial M = \emptyset$, obtemos

$$0 = \frac{1}{2} \int_{M^n} \Delta|\nabla f|^2 dM^n = \int_{M^n} \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle dM^n + \int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dM^n + \int_{M^n} |\nabla^2 f|^2 dM^n.$$

Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial para $\mathfrak{X}(M^n)$ e $f_i = E_i(f)$. Então

$$|\nabla^2 f|^2 = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n f_{ii}^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n f_{ii} \right)^2 = \frac{1}{n} \Delta f^2 = \frac{\lambda_1^2 f^2}{n}.$$

Pela hipótese sobre a curvatura de Ricci e o fato de que $\Delta f = -\lambda_1 f$, temos que

$$0 \geq -\lambda_1 \int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n + (n-1)k \int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n + \frac{\lambda_1^2}{n} \int_{M^n} f^2 dM^n.$$

Agora, aplicando o teorema da divergência na expressão

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

Ficamos com

$$\int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n = - \int_{M^n} f\Delta f dM^n = \lambda_1 \int_{M^n} f^2 dM^n.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} 0 &\geq (-\lambda_1 + (n-1)k) \int_{M^n} |\nabla f|^2 dM^n + \frac{\lambda_1^2}{n} \int_{M^n} f^2 dM^n \\ &= (-\lambda_1 + (n-1)k)\lambda_1 \int_{M^n} f^2 dM^n + \frac{\lambda_1^2}{n} \int_{M^n} f^2 dM^n \\ &= \frac{\lambda_1}{n} [-(n-1)\lambda_1 + n(n-1)k] \int_{M^n} f^2 dM^n. \end{aligned}$$

Como $f^2 \geq 0$ e $\lambda_1 > 0$, segue que

$$-(n-1)\lambda_1 + n(n-1)k \leq 0.$$

Portanto,

$$\lambda_1 \geq nk.$$

□

Teorema 1.8. (Obata). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n , compacta, sem bordo e conexa. Suponha que o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano de M^n é dado por*

$$\lambda_1 = nk.$$

Se a curvatura de Ricci na direção do gradiente da autofunção f , associada ao autovalor λ_1 , satisfaz

$$\text{Ric}_p(\nabla f, \nabla f) = k|\nabla f|^2,$$

então M^n é isométrica a uma esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Demonstração. Ver [15], página 337. □

1.7 Variações da Energia

Nesta seção, apresentaremos uma caracterização das geodésicas como "soluções de um problema variacional". Iniciaremos dando precisão de "curvas vizinhas" de uma curva dada.

Definição 1.34. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $c : [0, a] \rightarrow M^n$ uma curva diferenciável por partes nesta variedade. Uma variação de c é uma aplicação contínua $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M^n$ tal que:*

i) $f(0, t) = c(t)$, $t \in [0, a]$.

ii) Existe uma subdivisão de $[0, a]$ por pontos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = a$, tal que a restrição de f a cada $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$, é diferenciável.

Uma variação é dita própria se

$$f(s, 0) = c(0)$$

e

$$f(s, a) = c(a),$$

para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Se f é diferenciável, a variação diz-se diferenciável.

Para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, a curva parametrizada $f_s : [0, a] \rightarrow M^n$ dada por $f_s(t) = f(s, t)$ é chamada de curva da variação.

Chamaremos de curva transversal da variação a curva parametrizada diferenciável, $f_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$, com t fixado, dada por $f_t(s) = f(s, t)$. O vetor velocidade de uma curva transversal em $s = 0$, ou seja, $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é um campo vetorial (diferenciável por partes), ao longo de $c(t)$ e é chamado de campo variacional de f .

Proposição 1.17. *Dado um campo $V(t)$, diferenciável por partes, ao longo de uma curva diferenciável por partes*

$$c : [0, a] \rightarrow M^n,$$

existe uma variação

$$f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M^n$$

de c tal que $V(t)$ é o campo variacional de f , além disso, se $V(0) = V(a) = 0$, é possível escolher f com uma variação própria.

Demonstração. Ver [4], página 213. □

Agora, faremos a comparação do comprimento de arco de c com o comprimento de arco das curvas vizinhas de uma variação $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M^n$ de c , definimos a função $L : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(s) = \int_0^s \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| dt, \quad s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Também faremos o estudo da função energia $E(s)$ dada por

$$E(s) = \int_0^s \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt, \quad s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Tome $c : [0, a] \rightarrow M^n$ uma curva e sejam

$$L(c) = \int_0^a \left| \frac{dc}{dt} \right| dt \quad \text{e} \quad E(c) = \int_0^a \left| \frac{dc}{dt} \right|^2 dt.$$

Fazendo $f = 1$ e $h = \left| \frac{dc}{dt} \right|$ na desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\left(\int_0^a fh \, dt \right)^2 \leq \int_0^a f^2 dt \cdot \int_0^a h^2 dt,$$

obtemos

$$L(c)^2 \leq aE(c).$$

Note que a igualdade é válida se, e somente se h é constante, sendo assim, se, e somente se, t é proporcional ao comprimento de arco.

Proposição 1.18. *Sejam $p, q \in M^n$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M^n$ uma geodésica minimizante ligando p a q . Então, para toda curva $c : [0, a] \rightarrow M^n$ ligando p a q , temos que*

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

e vale a igualdade se, e somente se, c é uma geodésica minimizante.

Demonstração. Pelo que foi visto anteriormente nesta seção, temos que

$$aE(\gamma) = (L(\gamma))^2 \leq (L(c))^2 \leq aE(c),$$

provando a primeira afirmação. Se a igualdade for válida, obtemos que

$$(L(c))^2 = aE(c),$$

implicando que o parâmetro de c é proporcional ao comprimento de arco, e

$$L(\gamma) = L(c),$$

o que implica que c é uma geodésica minimizante. A recíproca é trivial. \square

A partir da proposição acima, concluímos que as curvas que minimizam a energia são parametrizadas por um parâmetro proporcional ao comprimento de arco.

Proposição 1.19. *(Fórmula da primeira variação da energia de uma curva). Sejam $c : [0, a] \rightarrow M^n$ uma curva diferenciável por partes e $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M^n$ uma variação c . Se $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia de f , então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E'(0) &= -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} \right\rangle dt - \sum_{i=1}^k \left\langle V(t_i), \frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle V(0), \frac{dc}{dt}(0) \right\rangle + \left\langle V(a), \frac{dc}{dt}(a) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde $V(t)$ é o campo variacional de f , e

$$\frac{dc}{dt}(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{dc}{dt}, \quad \text{onde } t > t_i$$

e

$$\frac{dc}{dt}(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{dc}{dt}, \quad \text{onde } t < t_i.$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$E(s) = \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Derivando e utilizando a simetria da conexão Riemannia, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2 \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{ds} = \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt. \quad (1.26)$$

Fazendo $s = 0$ em (1.26), temos (1.25). \square

Uma aplicação da fórmula da primeira variação é a seguinte caracterização das geodésicas.

Proposição 1.20. *Uma curva diferenciável por partes $c : [0, a] \rightarrow M^n$ é uma geodésica se, e somente se, para toda variação própria f de c , tem-se $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.*

Demonstração. Ver [4], página 217. \square

Proposição 1.21. *(Fórmula da segunda variação da energia de uma curva). Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M^n$ uma geodésica e $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M^n$ uma variação própria de γ . Se $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia de f . Então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} E''(0) &= - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2 V}{dt^2} + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right) \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle dt \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-) \right\rangle,
\end{aligned} \quad (1.27)$$

onde V é o campo variacional de f , R é a curvatura de M^n e

$$\frac{DV}{dt}(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{DV}{dt}, \text{ onde } t > t_i$$

e

$$\frac{DV}{dt}(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{DV}{dt}, \text{ onde } t < t_i.$$

Demonstração. Tomando a derivada de (1.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d^2 E}{ds^2} &= \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\
&\quad - \int_0^a \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Fazendo $s = 0$ na expressão acima, anulamos o primeiro e terceiro termos, pois f é própria e γ é uma geodésica. Mais ainda, como

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t},$$

em $s = 0$, temos que

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D^2}{dt^2} V + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right) \frac{d\gamma}{dt}. \quad (1.28)$$

Como a variação é própria, segue que

$$\sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = - \sum_{i=1}^k \left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-) \right\rangle, \quad (1.29)$$

Pelas equações (1.28) e (1.29), temos (1.27). \square

Uma das aplicações da fórmula da segunda variação de energia é o seguinte teorema:

Teorema 1.9. (*Bonnet-Myers*). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci satisfaz*

$$\text{Ric} \geq \frac{1}{r^2} > 0.$$

Então M^n é compacta e o diâmetro de M^n satisfaz

$$\text{diam}(M^n) \leq \pi r.$$

Demonstração. Sejam p e q pontos quaisquer de M^n . Como M^n é completa, pelo Teorema 1.2, existe uma geodésica minimizante

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M^n$$

ligando p a q . Basta mostrar que o comprimento

$$l(\gamma) \leq \pi r,$$

pois M^n é limitada e completa, portanto compacta; mais ainda, como $d(p, q) \leq \pi r$, quaisquer que sejam $p, q \in M^n$, segue-se que $\text{diam}(M^n) \leq \pi r$.

Por absurdo, suponhamos que,

$$l(\gamma) = l > \pi r.$$

Consideremos campos paralelos $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$ ao longo de γ que, para cada $t \in [0, 1]$,

são ortonormais e pertencem ao complemento ortogonal de $\gamma'(t)$. Seja $e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{l}$ e seja V_j um campo de vetores ao longo de γ dado por

$$V_j(t) = (\text{sen } \pi t)e_j(t), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Note que

$$V_j(0) = V_j(1) = 0,$$

V_j dá origem a uma variação própria de γ , cuja energia indicaremos por E_j . Usando a fórmula da segunda variação de energia e o fato que e_j é paralelo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_j''(0) &= -\int_0^1 \langle V_j, V_j'' + R(\gamma', V_j)\gamma' \rangle dt \\ &= \int_0^1 \text{sen}^2 \pi t (\pi^2 - l^2 K(e_n(t), e_j(t))) dt, \end{aligned}$$

onde $K(e_n(t), e_j(t))$ é a curvatura seccional em $\gamma(t)$ segundo o plano gerado por $e_n(t)$ e $e_j(t)$. Somando em j e usando a definição de curvatura de Ricci, tem-se que

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) = \int_0^1 \{ \text{sen}^2 \pi t ((n-1)\pi^2 - (n-1)l^2 \text{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t))) \} dt.$$

Como

$$\text{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)) \geq \frac{1}{r^2} \text{ e } l > \pi r,$$

obtemos

$$(n-1)l^2 \text{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)) > (n-1)\pi^2.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) < \int_0^1 \text{sen}^2 \pi t ((n-1)\pi^2 - (n-1)\pi^2) dt = 0.$$

Ou seja, existe um índice j tal que $E''(j) < 0$, que pela proposição [1.18](#), contradiz o fato de γ ser minimizante. Concluimos que

$$l(\gamma) = l > \pi r.$$

Logo,

$$\text{diam}(M^n) \leq \pi r.$$

Conforme queríamos demonstrar. □

1.8 Variedades com Bordo

Nesta seção será apresentada a definição de uma variedade com bordo. Para maiores detalhes ver [14].

Seja $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 < 0\}$ e considere a topologia induzida de \mathbb{R}^n , $\bar{A} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$. Identificaremos o hiperplano do \mathbb{R}^n , $x_1 = 0$, com \mathbb{R}^{n-1} .

Sejam U e V conjuntos abertos de \bar{A} e $\varphi : U \rightarrow V$ um homeomorfismo, então a restrição de φ a $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ é homeomorfismo de $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ sobre $V \cap \mathbb{R}^{n-1}$, ou seja

$$\varphi|_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} : U \cap \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow V \cap \mathbb{R}^{n-1}$$

é um homeomorfismo.

Uma função sobre \bar{A} é diferenciável quando é a restrição a \bar{A} de uma função diferenciável sobre \mathbb{R}^n .

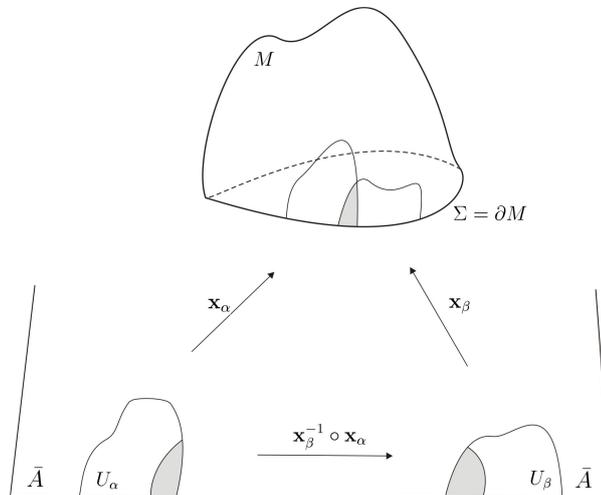
Definição 1.35. *Uma variedade diferenciável com bordo de dimensão n é um conjunto M^n e uma família de aplicações injetivas*

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \bar{A} \rightarrow M^n$$

de abertos U_α de \bar{A} em M^n tais que

- (1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$;
- (2) Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \bar{A} e a aplicação $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável;
- (3) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições anteriores.

Figura 1.1: Representação geométrica da Definição 1.35.



Fonte: Menezes (2009).

Observação 1.8. *Os abertos de \bar{A} que não contém pontos do hiperplano \mathbb{R}^{n-1} também são abertos em \mathbb{R}^n .*

Os pontos de M^n que tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^n são chamados de pontos interiores, os pontos em que toda vizinhança possui pontos do hiperplano \mathbb{R}^{n-1} , são chamados pontos do bordo. Denotaremos o conjunto dos pontos do bordo por ∂M e o conjunto dos pontos interiores por $\text{int } M^n$.

Salientando que os resultados das seções anteriores valem para variedades com bordo com as devidas adequações.

Teorema 1.10. *Seja M^n uma variedade com bordo, então ∂M é uma variedade sem bordo de dimensão $n - 1$.*

Demonstração. Seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável em M^n .

Para cada α , consideremos a restrição y_α de x_α a $V_\alpha = U_\alpha \cap x_\alpha^{-1}(\partial M)$ e seja $\Lambda = \{\alpha; V_\alpha \neq \emptyset\}$.

Afirmção 1.3. $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, y_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ é uma estrutura diferenciável em ∂M . De fato,

(1) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} y_\alpha(U_\alpha) = \partial M$; pois, dado qualquer $q \in \partial M$, como $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em M^n , existe α tal que $q \in x_\alpha(U_\alpha)$, logo $q \in x_\alpha(U_\alpha) \cap \partial M$ e portanto, $V_\alpha \neq \emptyset$ e $q \in y_\alpha(V_\alpha)$.

(2) Se $\alpha, \beta \in \Lambda$ são tais que

$$y_\alpha(V_\alpha) \cap y_\beta(V_\beta) = W_1 \neq \emptyset.$$

Então

$$x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_2 \neq \emptyset.$$

Os conjuntos

$$x_\alpha^{-1}(W_2), x_\beta^{-1}(W_2)$$

são abertos de \mathbb{R}^n e a aplicação

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$$

é diferenciável em $x_\alpha^{-1}(W_2)$. Logo os conjuntos

$$y_\alpha^{-1}(W_1) = x_\alpha^{-1}(W_2 \cap \partial M), y_\beta^{-1}(W_1) = x_\beta^{-1}(W_2 \cap \partial M)$$

são abertos de \mathbb{R}^{n-1} e a aplicação

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha,$$

a qual é a restrição de $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ a $x_\alpha^{-1}(W_2 \cap \partial M)$ é diferenciável.

Assim, ∂M é uma variedade diferenciável sem bordo de dimensão $n - 1$ \square

Observação 1.9. (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta com bordo se M^n é uma variedade com bordo e M^n é um subconjunto compacto de alguma variedade Riemanniana (sem bordo).

Exemplo 1.4. O hemisfério (ver figura 2.1) e o cilindro (ver figura 2.2), são variedades com bordo.

1.9 Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov

Nesta seção demonstraremos o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

O caráter local dos resultados desta seção nos permitem trabalhar em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ do espaço Euclidiano munido de uma métrica Riemanniana g , que em coordenadas polares (r, w) pode ser escrita como

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2, \quad (1.30)$$

onde dw^2 representa a métrica canônica em S^{n-1} .

Observação 1.10. Fixado $p \in U$ se $r(x) := d(x, p)$ é a função distância induzida por g , então

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r},$$

onde, para cada w fixado em $T_p M^n$, $\frac{\partial}{\partial r}$ é o vetor velocidade das geodésicas dadas pelas curvas $r \mapsto \exp_p(rw)$.

De fato, por um lado temos que

$$\left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial r} = 1, \quad (1.31)$$

por definição de gradiente. Por outro,

$$\left\langle r, \frac{\partial}{\partial w_i} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial w_i} = 0,$$

pois r não depende dos w'_i s. Assim, ∇r é um múltiplo de $\frac{\partial}{\partial r}$ e, por (1.31), o múltiplo de ∇r é igual a 1. Portanto

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r},$$

como gostaríamos.

Proposição 1.22. *Seja \mathbb{R}^n munido com a métrica Riemanniana g em coordenadas polares, vista em (1.30). Então para $x = rw$, $r > 0$, $w \in S^{n-1}$ e para quaisquer X, Y ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$, temos*

$$\nabla^2 r(X, Y) = \frac{f'(r)}{f(r)}g(X, Y).$$

Além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1) \frac{f'(r)}{f(r)}. \quad (1.32)$$

Demonstração. Ver [17], página 46. □

Proposição 1.23. *Seja $r : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $r(x) = d(x, p)$. Então,*

$$\nabla^2 r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0.$$

Se $X \perp \frac{\partial}{\partial r}$, então

$$\nabla^2 r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = 0.$$

Demonstração. Ver [17], página 49. □

Exemplo 1.5. *Vamos calcular o Laplaciano da função distância r_k , considerando a métrica*

$$dr^2 + f_k^2(r)dw^2, \quad (1.33)$$

onde

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sen}(r\sqrt{k}); & \text{se } k > 0, \\ r; & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \text{senh}(r\sqrt{-k}); & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Derivando a função $f_k(r)$, ficamos com

$$f'_k(r) = \begin{cases} \cos(r\sqrt{k}); & \text{se } k > 0, \\ 1; & \text{se } k = 0, \\ \cosh(r\sqrt{-k}); & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Pelas duas proposições acima, temos que:

$$\begin{cases} k > 0 & \Rightarrow \nabla^2 r_k = \sqrt{k} \cot(r\sqrt{k})g \\ k = 0 & \Rightarrow \nabla^2 r_k = \frac{1}{r}g \\ k < 0 & \Rightarrow \nabla^2 r_k = \sqrt{-k} \coth(r\sqrt{-k})g. \end{cases}$$

Concluimos que,

$$\frac{\Delta r_k}{n-1} = \begin{cases} \sqrt{k} \cot(r\sqrt{k}); & \text{se } k > 0, \\ \frac{1}{r}; & \text{se } k = 0, \\ \sqrt{-k} \coth(r\sqrt{-k}); & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Teorema 1.11. (*Comparação do Laplaciano*). *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e r a distância ao ponto $p \in M^n$. Suponhamos que a curvatura Ricci de M^n satisfaz*

$$\text{Ric}(g) \geq (n-1)kg$$

e que a função r é diferenciável no ponto x . Então

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}), \quad (1.34)$$

onde $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$ e $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$, com r_k sendo a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa forma espacial de curvatura seccional constante k e r é a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa variedade completa. A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a k .

Demonstração. Ver [17], página 52. □

Seja

$$\mathbf{x} : U \rightarrow M^n$$

uma parametrização positiva de classe C^∞ em torno de $p = \mathbf{x}(q) \in M^n$. Neste caso, a base coordenada

$$\left\{ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$$

corresponde a base canônica de \mathbb{R}^n pela parametrização \mathbf{x} , define a orientação positiva de $T_p M^n$. Nesta parametrização podemos escrever a métrica em sua forma matricial, pondo

$$G = (g_{ij}),$$

onde

$$g_{ij} := \langle X_i, X_j \rangle$$

e sua inversa é dada por

$$G^{-1} = (g^{ij}).$$

A forma pull back $\mathbf{x}^*(dM^n)$ de dM^n é uma n -forma em U , sendo assim, existe uma função diferenciável $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{x}^*(dM^n)(q) = a(q)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(q).$$

Definição 1.36. *Seja $R \subset M^n$ uma região aberta e conexa cujo o fecho é compacto seja $p \in M^n$. Vamos supor que \bar{R} está contido na vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ da parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M^n$ dada acima, e que a fronteira de $\mathbf{x}^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em \mathbb{R}^n . Definimos o volume de R por*

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \int_R dM^n := \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \mathbf{x}^* dM^n \\ &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Proposição 1.24. *Quando M^n é completa, $\Omega = \exp_p(\varepsilon_p)$ tem medida total, onde*

$$\varepsilon_p = \{rv \in \mathbb{R}^n; 0 \leq r \leq \infty, v \in S^{n-1}\}.$$

Teorema 1.12. *(Comparação de Volume de Bishop-Gromov). Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para k constante,*

$$\text{Ric}(g) \geq (n-1)kg.$$

Então

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \text{Vol}(B_R^k),$$

onde B_R^k é uma bola geodésica de raio R na forma espacial de curvatura seccional constante k . A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial, for constante igual a k .

Demonstração. Segundo em [\(1.32\)](#) a expressão do Laplaciano em coordenadas polares é dado por

$$\Delta r(x) = (n-1) \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Como $g = \det(g_{ij})$ e considerando a métrica g em coordenadas polares como

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2,$$

temos que

$$g = f^{2(n-1)},$$

portanto

$$\sqrt{g} = f^{n-1},$$

onde

$$(\sqrt{g})' = (n-1)f^{n-2}f'.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta r &= (n-1)\frac{f'}{f} \\ &= (n-1)\frac{\frac{f^2}{f^n}f'}{f} \\ &= (n-1)\frac{f^{n-2}}{f^{n-1}}f' \\ &= \frac{(\sqrt{g})'}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Consequentemente, tem-se que

$$\Delta r_k = (n-1)\frac{f'_k}{f_k} = \frac{(\sqrt{g_k(r)})'}{\sqrt{g_k(r)}}.$$

Do teorema de comparação do Laplaciano temos que $\Delta r \leq \Delta r_k$, e assim para qualquer ω vale

$$\frac{(\sqrt{g(r, \omega)})'}{\sqrt{g(r, \omega)}} \leq \frac{(\sqrt{g_k(r)})'}{\sqrt{g_k(r)}},$$

note que pela desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{g(r, \omega)}}{\sqrt{g_k(r)}} \right)' &= \frac{\sqrt{g_k(r)}(\sqrt{g(r, \omega)})' - \sqrt{g(r, \omega)}(\sqrt{g_k(r)})'}{g_k(r)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Além disso, é conhecido, ver apêndice de [17], página 62, que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g(r, \omega)}}{\sqrt{g_k(r)}} = 1.$$

Sendo assim,

$$\sqrt{g(r, \omega)} \leq \sqrt{g_k(r)},$$

para todo $r > 0$. Agora, utilizando a definição de volume dada em (1.35), a integração

em coordenadas polares e a proposição (1.24), temos que

$$\begin{aligned}\text{Vol}(B_R(p)) &= \int_{B_R(p)} dM^n \\ &= \int_{B_R(p) \cap \Omega} dM^n \\ &= \int_{B_R(0) \cap \varepsilon_p} \sqrt{g} dr d\omega \\ &\leq \int_{B_R(0) \cap \varepsilon_p} \sqrt{g_k} dr d\omega \\ &= \text{Vol}(B_R^k),\end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar.

O caso da igualdade, sucede do teorema de comparação do Laplaciano. \square

Capítulo 2

Variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas

Neste capítulo, vamos definir e apresentar alguns exemplos de variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizadas e demonstrar os principais resultados desta dissertação baseados em [9].

2.1 Definição e exemplos

Nessa seção apresentaremos a definição de variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas e alguns exemplos destas variedades.

Definição 2.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser Einstein quando*

$$\text{Ric} = \lambda g = \frac{R}{n}g, \quad (2.1)$$

onde $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real.

Afirmamos que se (M^n, g) é Einstein, conexa e $n \geq 3$, então a curvatura escalar R é constante. De fato, como

$$\text{div Ric} = \frac{1}{2}\nabla R$$

e pela equação (2.1), segue que

$$\frac{1}{2}\nabla R = \frac{\nabla R}{n}.$$

Daí

$$(n - 2)\nabla R = 0.$$

Por hipótese $n \geq 3$ e M^n é conexa, então segue a afirmação.

Agora, definiremos uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein.

Definição 2.2. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein, se existirem uma função suave f em M^n e uma função constante λ que satisfaz a seguinte equação*

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g, \quad (2.2)$$

onde $m \in \mathbb{N}^*$ e o tensor Ric_f^m é chamado de tensor m -Bakry-Emery.

Se tivermos a função f constante na equação (2.2), então o tensor Ric_f^m se torna o tensor Ricci na forma clássica e também será escrito como múltiplo de sua métrica, concluimos que as variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein estendem de forma natural as variedades Einstein.

Finalmente, definiremos uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada.

Definição 2.3. *Uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana, possivelmente com bordo e f uma função suave tal que*

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g), \quad (2.3)$$

com $f > 0$ no interior de M^n e $f = 0$ sobre ∂M . Além disso, λ é uma função suave em M^n e $m \in \mathbb{N}^*$.

Um caso particular é a variedade Riemanniana de um espaço-tempo fluido estático perfeito, que definiremos a seguir.

Definição 2.4. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser fator espacial de um espaço-tempo fluido estático perfeito, se existirem funções suaves $f > 0$ e ρ em M^n que satisfazem as equações de fluido perfeito:*

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f, \quad (2.4)$$

$$\Delta f = \left(\frac{n-2}{2(n-1)} \text{R} + \frac{n}{n-1} \rho \right). \quad (2.5)$$

Observação 2.1. *Se (M^n, g, f) é uma $(\lambda, m + n)$ -Einstein generalizada, então*

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = m \overset{\circ}{\nabla}^2 f. \quad (2.6)$$

De fato, por (2.3) temos que

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\nabla}^2 f &= \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \\
 &= \frac{f}{m} (\text{Ric} - \lambda g) - \frac{f}{mn} (R - \lambda n) g \\
 &= \frac{f}{m} \left(\text{Ric} - \lambda g - \frac{Rg}{n} + \lambda g \right) \\
 &= \frac{f}{m} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n} g \right) \\
 &= \frac{f}{m} \overset{\circ}{\text{Ric}}.
 \end{aligned}$$

Conforme gostaríamos.

Observação 2.2. Como uma consequência da observação 2.1, toda variedade $(\lambda, m + n)$ -Einstein generalizada, cuja hessiana sem traço da função potencial é nula, é Einstein. De fato, se $\overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0$, então $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$, pois $f > 0$. Ou seja, (M^n, g) é Einstein.

Observação 2.3. Assim, fazendo $m = 1$ e $\lambda = \frac{1}{n-1} \left(\frac{R}{2} - \rho \right)$, temos que um fluido estático perfeito é um exemplo de uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada. Com efeito,

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$$

e

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= \left(R - \frac{1}{n-1} \left(\frac{R}{2} - \rho \right) n \right) f \\
 &= \left(R - \frac{1}{n-1} \left(\frac{nR}{2} - n\rho \right) \right) f \\
 &= \left(R - \frac{nR}{2n-2} + \frac{n\rho}{n-1} \right) f \\
 &= \left(\frac{n-2}{2n-2} R + \frac{n\rho}{n-1} \right) f.
 \end{aligned}$$

Definiremos a seguir uma variedade estática.

Definição 2.5. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser uma variedade estática se existe uma função suave $f > 0$ em M^n , tal que

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - f \text{Ric} = 0.$$

Observação 2.4. Uma variedade estática é um fator espacial de um espaço-tempo fluido estático perfeito, em particular, é uma variedade $(\lambda, m + n)$ -Einstein generalizada. De fato, suponha que (M^n, g, f) seja um fator espacial de um espaço-tempo fluido estático

perfeito compacta com bordo e $\rho = -\frac{R}{2}$, então de (2.5)

$$\Delta f + \frac{R}{n-1}f = 0$$

e de (2.4)

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - f \text{Ric} = 0,$$

equação que caracteriza uma variedade estática.

Observação 2.5. Por outro lado, se $u = e^{-\frac{f}{m}}$, temos que

$$\nabla u = -\frac{1}{m}e^{-\frac{f}{m}}\nabla f.$$

Daí,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{m^2}e^{-\frac{f}{m}}df \otimes df - \frac{1}{m}e^{-\frac{f}{m}}\nabla^2 f.$$

portanto,

$$\frac{m}{u}\nabla^2 u = -\nabla^2 f + \frac{1}{m}df \otimes df.$$

Sendo assim, existe uma relação entre (2.2) e (2.3). Inferimos que, toda variedade $(\lambda, m+n)$ -Einstein é uma variedade $(\lambda, m+n)$ -Einstein generalizada. Além disso, uma variedade $(\lambda, m+n)$ -Einstein generalizada com λ constante é uma $(\lambda, m+n)$ -Einstein.

A seguir, provaremos um resultado que será fundamental para obter os resultados de [9].

Proposição 2.1. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada. Então $|\nabla f| \neq 0$ em ∂M .*

Demonstração. Sejam $x_0 \in \partial M$ e $\gamma(t)$ uma geodésica minimizante unitária partindo de x_0 tal que $\gamma'(0) \perp \partial M$. Seja $h(t) = f(\gamma(t))$ e $\omega(t) = \text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) - \lambda$. Então a equação para f torna-se uma equação diferenciável ordinária linear de segunda ordem ao longo de γ para h :

$$\begin{aligned} h''(t) &= \nabla^2 f(\gamma'(t), \gamma'(t)), \\ &= \frac{1}{m}\omega(t)h(t), \\ h(0) &= f(\gamma(0)) = f(x_0) = 0, \text{ pois } x_0 \in \partial M, \\ h'(0) &= g(\nabla f, \gamma')_{x_0}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\nabla f(x_0) = 0$, então $h'(0) = 0$, e usando que $h(0) = 0$ concluímos que $h = 0$ ao longo de todo γ . Como $\gamma(t) \in \text{int } M^n$ para $0 < t < \epsilon$, temos uma contradição. \square

Observação 2.6. Como f é nula sobre ∂M , temos pela equação (2.6) que,

$$\begin{aligned} f \overset{\circ}{\text{Ric}} = m \overset{\circ}{\nabla}^2 f &\Rightarrow \overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0 \\ &\Rightarrow \nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g. \end{aligned}$$

Lema 2.1. Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada. Então $|\nabla f|$ é constante e não-nulo em ∂M .

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} X(|\nabla f|^2) &= X(\langle \nabla f, \nabla f \rangle) \\ &= 2\langle \nabla_X \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2\langle \nabla_X \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2\nabla^2 f(X, \nabla f) \end{aligned}$$

e pela observação anterior, temos que

$$\begin{aligned} 2\nabla^2 f(X, \nabla f) &= \frac{2\Delta f}{n} g(X, \nabla f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois como $\partial M = f^{-1}(0)$, tem-se que ∇f é ortogonal a todo X , onde X é um campo de vetores tangentes no bordo de M^n . Logo, $|\nabla f|$ é constante e, pela proposição 2.1, não-nulo sobre ∂M . \square

Lema 2.2. Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada. Então ∂M é totalmente geodésica.

Demonstração. Como $|\nabla f|$ é constante e não nulo, podemos definir o normal no ∂M para fora por $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Usando o fato de que f é nula sobre ∂M e tomando o traço sobre a equação (2.3), temos que $\Delta f = 0$ sobre ∂M . Por definição da segunda forma fundamental, segue que

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\langle \nabla_{E_i} \nu, E_j \rangle \\ &= -\langle \nabla_{E_i} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, E_j \rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|} (\nabla^2 f(E_i, E_j)) \\ &= -\frac{\Delta f}{n|\nabla f|} g(E_i, E_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que ∂M é totalmente geodésica. \square

Exemplo 2.1. (O hemisfério). Considere o hemisfério \mathbb{S}_+^n em \mathbb{R}^{n+1} munido com métrica Euclidiana (ver figura 2.1). Seja $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ em que $|v| = 1$, onde sua última coordenada é positiva e $f(x) = \langle x, v \rangle$ a função altura sobre \mathbb{S}_+^n . Agora, tomando $m \geq 1$ constante finita e $\lambda = m + n - 1$, temos que o hemisfério é compacto, orientável e é uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada com bordo \mathbb{S}^{n-1} . De fato, considere $\{E_i\}$ uma base de $T\mathbb{S}_+^n$, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle E_i, \nabla f \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} x, v \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{E_i} v \rangle \\ &= \langle E_i, v \rangle + \langle x, 0 \rangle \\ &= \langle E_i, v \rangle. \end{aligned}$$

Então, temos que $\nabla f = v^\top$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X v^\top, Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X (v - \langle v, N \rangle N), Y \rangle \\ &= -\langle v, N \rangle \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &= \langle v, N \rangle \langle S_\eta(X), Y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle v, N \rangle \langle S_\eta(X), Y \rangle.$$

Seja x um vetor posição, se $N(x) = x$, segue que

$$S_\eta(X) = -X^\top.$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= \langle v, N \rangle \langle S_\eta(X), Y \rangle \\ &= \langle v, x \rangle \langle -X^\top, Y \rangle \\ &= -\langle v, x \rangle \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\nabla^2 f = -fg. \quad (2.7)$$

E como temos

$$\text{Ric} = (n - 1)g,$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g) &= \frac{f}{m}((n-1)g - (m+n-1)g) \\ &= \frac{f}{m}((n-1-m-n+1)g) \\ &= -fg. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Portanto, de (2.7) e (2.8), segue que

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g).$$

Como gostaríamos.

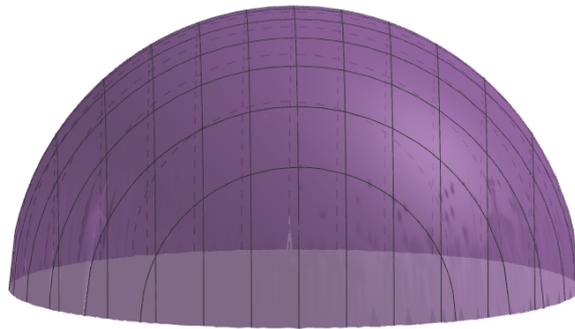


Figura 2.1: Hemisfério \mathbb{S}_+^n .

Exemplo 2.2. (O cilindro). Considere o cilindro (ver figura 2.2)

$$M^n = \mathbb{S}^{n-1} \times [0, a],$$

com

$$a = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda}} \pi,$$

onde $\lambda > 0$, munido com a métrica

$$g = dt^2 + \left(\frac{n-2}{\lambda}\right) g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Mostraremos que (M^n, g) com a função potencial

$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right),$$

é uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada, compacta, orientável e com bordo desconexo (o bordo de M^n é a união de duas cópias de \mathbb{S}^{n-1}). De fato, note que $f > 0$ no interior de M^n e

$$\partial M = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^{n-1} \times \left\{ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda}} \pi \right\} = \partial M_1 \cup \partial M_2.$$

Além disso

$$\begin{cases} f(0) = \text{sen}(0) = 0 \text{ sobre } \partial M_1 \\ f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0 \text{ sobre } \partial M_2. \end{cases}$$

Portanto, $f = 0$ sobre ∂M . Como

$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right),$$

temos que

$$\nabla f = \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} \partial t.$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla f &= X\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right)\right) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} \partial t \\ &= -\text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}\right)^2 \langle \partial t, X \rangle \partial t \\ &= -f(t) \left(\frac{\lambda}{m}\right) \langle \partial t, X \rangle \partial t. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\nabla^2 f(X, Y) = -f(t) \left(\frac{\lambda}{m}\right) \langle \partial t, X \rangle \langle \partial t, Y \rangle. \quad (2.9)$$

Agora, note que

$$g = dt^2 + \left(\frac{n-2}{\lambda}\right) g_{\mathbb{S}^{n-1}} = dt^2 + g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)},$$

onde

$$r = \sqrt{\frac{n-2}{\lambda}}.$$

Além disso, como g é uma métrica produto, temos que

$$\text{Ric}_{M^n} = \text{Ric}_{\mathbb{R}} + \text{Ric}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}.$$

Daí, segue que

$$\text{Ric}_{M^n} = \text{Ric}_{\mathbb{R}} + \text{Ric}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}$$

e pela equação (1.19), temos que

$$\text{Ric}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} = \frac{1}{r^2}(n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{M^n} &= 0 + (n-2)\frac{\lambda}{n-2}g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \\ &= \lambda g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g) &= \frac{f}{m}(\lambda g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} - \lambda(dt^2 + g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)})) \\ &= \frac{f}{m}(-\lambda dt^2) \\ &= -f\left(\frac{\lambda}{m}\right)dt^2. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g)(X, Y) = -f\left(\frac{\lambda}{m}\right)\langle \partial t, X \rangle \langle \partial t, Y \rangle. \quad (2.10)$$

Portanto, de (2.9) e (2.10), segue que

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g).$$

Conforme queríamos demonstrar.

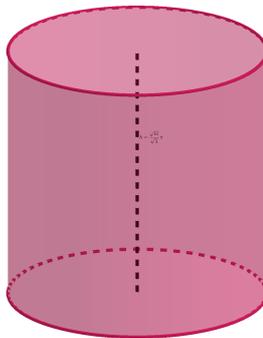


Figura 2.2: Cilindro.

Agora, demonstraremos o seguinte lema, que serve como ferramenta para a demonstração da proposição a seguir.

Lema 2.3. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada. Se M^n for Einstein, então temos que*

$$\nabla^2 f = \left(-\frac{R}{n(n-1)}f + \frac{c}{m} \right)g,$$

onde c é uma constante.

Demonstração. Como M^n é Einstein e $n \geq 3$, temos que $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$, então $\text{Ric} = \frac{R}{n}g$, com R constante. Mais ainda,

$$\begin{aligned} f \overset{\circ}{\text{Ric}} = 0 &\Rightarrow m \overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0 \\ &\Rightarrow \overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0 \\ &\Rightarrow \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g = 0 \\ &\Rightarrow \nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}g. \end{aligned}$$

Pela equação (2.3), ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}g &= \frac{f}{mn}(R - \lambda n)g \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{R}{n}f - f\lambda \right)g. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usando a equação (1.17), temos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f &= \frac{1}{m} \left(\text{div} \left(\left(\frac{R}{m}f - f\lambda \right)g \right) \right) \\ &= \frac{1}{m} \nabla \left(f \frac{R}{n} - f\lambda \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{R}{n} \nabla f + \nabla \Delta f = \frac{R}{mn} \nabla f - \frac{1}{m} \nabla(\lambda f) \quad (2.12)$$

Da equação (2.12), segue que

$$\begin{aligned} -\nabla(\lambda f) &= \frac{mR}{n} \nabla f + m \nabla \Delta f - \frac{R}{n} \nabla f \\ &= \frac{R(m-1)}{n} \nabla f + m \nabla \Delta f \\ &= \frac{R}{n} \nabla f (m-1) + R \nabla f - n \nabla(f\lambda). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$-\nabla(\lambda f) + n\nabla(f\lambda) = \frac{R(m+n-1)}{n}\nabla f.$$

Ou seja,

$$\nabla(\lambda f) = \frac{R(m+n-1)}{n(n-1)}\nabla f \iff \nabla\left(\lambda f - \frac{R(m+n-1)}{n(n-1)}f\right) = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda f = \frac{R(m+n-1)}{n(n-1)}f - c, \quad (2.13)$$

onde c é uma constante. Substituindo em (2.11), obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{m}\left(\frac{R}{n}f - \frac{R(m+n-1)}{n(n-1)}f + c\right)g \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{(n-1)R - (m+n-1)R}{n(n-1)}f + c\right)g \\ &= \left(-\frac{R}{n(n-1)}f + \frac{c}{m}\right)g. \end{aligned}$$

Como gostaríamos. □

Agora, vamos apresentar duas proposições de suma importância para obter os principais resultados de [9].

Proposição 2.2. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada com bordo conexo. Se M^n é Einstein, então M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. Mais ainda, λ é constante e f é a função altura no hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.*

Demonstração. Como M^n é Einstein e $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada, provamos na demonstração do lema 2.3 que

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}g. \quad (2.14)$$

Relembrando que de (1.17), temos que

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f.$$

Tomando a divergência em (2.14), ficamos com

$$\nabla\Delta f = -\frac{R}{n-1}\nabla f. \quad (2.15)$$

De fato, note que

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{div}\left(\frac{\Delta f}{n}g\right).$$

Daí

$$\begin{aligned} \nabla \Delta f &= -\operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{\nabla \Delta f}{n} \implies \frac{\nabla \Delta f}{n} - \nabla \Delta f = \operatorname{Ric}(\nabla f) \\ &\implies \frac{1-n}{n} \nabla \Delta f = \operatorname{Ric}(\nabla f). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como M^n é Einstein, obtemos

$$\operatorname{Ric}(\nabla f) = \frac{R}{n} \nabla f.$$

Usando (2.16), inferimos que

$$\nabla \Delta f = -\frac{R}{n-1} \nabla f.$$

Assim, de (2.6), (2.14), conclui-se que

$$\nabla^2(\Delta f) = -\frac{R}{(n-1)n} \Delta f g.$$

Como Δf não é constante temos que R é um autovalor diferente de zero de Δ com condição de contorno de Dirichlet e portanto $R > 0$. Levando em conta que $\Delta f = 0$ ao longo de ∂M , pelo Lema 3 de [16], que diz que, seja M^n uma variedade Riemanniana, compacta, conexa, com curvatura Ricci não negativa, se M^n admite uma função $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ e L uma constante não nula tal que

(a) $\nabla^2 f = L \cdot g$.

(b) $f|_{\partial M}$ é constante.

Então M^n é isométrica a bola em \mathbb{R}^n . E pelo Teorema B (II) do mesmo artigo, que diz que se M^n admite uma função $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ e L constante não nula tal que

(a) $\nabla^2 f = -Lfg$.

(b) $f|_{\partial M}$ é constante.

Então a métrica em M^n é de curvatura seccional constante L . Concluimos que M^n é o hemisfério de \mathbb{S}^n com curvatura seccional $c = \frac{R}{(n-1)n}$. Para mostrar que λ é constante, segue da equação (2.13), que

$$\lambda f = \frac{R(m+n-1)}{n(n-1)} f - c,$$

sabemos que $f = 0$ em ∂M , assim, $c = 0$. Logo,

$$\lambda f = \frac{R(m+n-1)}{n(n-1)} f,$$

concluimos que

$$\lambda = \frac{R(m + n - 1)}{n(n - 1)},$$

sendo assim, λ é uma constante. Como $\frac{R}{n - 1}$ é o primeiro autovalor de Δ com condição de contorno de Dirichlet e

$$\Delta f = -\frac{R}{n - 1}f,$$

segue que f é uma função altura no hemisfério de \mathbb{S}^n . \square

A seguir, vamos lembrar de uma identidade integral importante, que será usada ao longo do trabalho. Tal identidade decorre diretamente do teorema da divergência e da identidade de Bianchi e é conhecida por alguns autores como identidade de Pohozaev-Schoen. Para fim de completude, vamos declará-la abaixo.

Proposição 2.3. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada compacta. Então*

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS + \frac{2 - n}{2n} \int_{M^n} \mathcal{L}_{\nabla f} R dV,$$

onde ν é um vetor normal com orientação externa em ∂M .

Demonstração. Tome $T = \overset{\circ}{\text{Ric}}$ e $X = \nabla f$ no teorema (1.6). De fato, substituindo no teorema anteriormente citado, ficamos com

$$\int_{M^n} (\text{div}(\overset{\circ}{\text{Ric}}))(\nabla f) dV = -\frac{1}{2} \int_{M^n} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \mathcal{L}_{\nabla f} g \rangle dV + \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \text{div}(\overset{\circ}{\text{Ric}}) &= \text{div} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n}g \right) = \frac{1}{2} \nabla R - \frac{\nabla R}{n} \\ &= \frac{n - 2}{2n} \nabla R \end{aligned}$$

e

$$\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \mathcal{L}_{\nabla f} g \rangle = 2 \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 f \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \mathcal{L}_{\nabla f} g \rangle &= -\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 f \rangle \\
 &= -\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 f + \frac{\Delta f}{n} g \rangle \\
 &= -\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 f \rangle \\
 &= -\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \frac{f}{m} \overset{\circ}{\text{Ric}} \rangle = -\frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2.
 \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS + \frac{2-n}{2n} \int_{M^n} \mathcal{L}_{\nabla f} R dV.$$

□

2.2 Estimativas de Área e Classificação Topológica do Bordo

Nessa seção, aplicaremos a proposição [2.3](#) para obter os principais resultados de [\[9\]](#). Obtemos alguns resultados de caracterização para métricas $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas com bordo não vazio, usando uma equação integral conhecida como identidade de Pohozaev-Schoen. O primeiro resultado fornece uma informação sobre a curvatura escalar do bordo ∂M .

Teorema 2.1. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada compacta e com bordo, tal que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$. Então*

$$\sum_{\alpha} K_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} (nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2-n)) dS \geq 0, \tag{2.17}$$

onde ∂M_{α} denota as componentes conexas de ∂M , R_{γ}^{α} é a curvatura escalar de ∂M_{α} , R é a curvatura escalar de M^n e $K_{\alpha} = |\nabla f|$ é constante ao longo de ∂M_{α} , mas pode variar de acordo com o α . Além disso, supondo que M^n tem fronteira conexa, a igualdade vale se, e somente se, M^n é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração. Pela proposição [2.3](#), segue que

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS + \frac{2-n}{2n} \int_{M^n} \mathcal{L}_{\nabla f} R dV.$$

Como estamos supondo que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$, obtemos

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV \leq \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS. \tag{2.18}$$

sabemos que o vetor normal unitário com orientação externa sobre o bordo, é

$$\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|},$$

pelo lema 2.2 ∂M é totalmente geodésica. Assim pela equação de Gauss, tem-se que

$$\begin{aligned} R_{\gamma ijkl}^\alpha &= R_{ijkl} - h_{il}h_{jk} + h_{ik}h_{jl} \\ &= R_{ijkl}. \end{aligned}$$

Tomando o traço duas vezes, obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\gamma ik}^\alpha &= R_{ik} - R_{inkn} \\ R_\gamma^\alpha &= R - 2R_{nn}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_\gamma^\alpha = R - 2 \operatorname{Ric}(\nu, \nu)$$

ao longo de cada componente conexa ∂M_α do bordo. Note que $\nabla f = -\nu|\nabla f|$. Então

$$\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f, \nu) = -|\nabla f| \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nu, \nu) = -|\nabla f|(\operatorname{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n}).$$

Logo, desta equação e de (2.18), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{M^n} \frac{f}{m} \left| \operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g \right|^2 dV &\leq \int_{\partial M} \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f, \nu) dS \\ &= - \int_{\partial M} |\nabla f| (\operatorname{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n}) dS \\ &= \int_{\partial M} -|\nabla f| (\operatorname{Ric}(\nu, \nu) + \frac{R}{n}) dS \\ &\leq \sum_\alpha K_\alpha \int_{\partial M_\alpha} (-\operatorname{Ric}(\nu, \nu) + \frac{R}{n}) dS. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} R - 2\operatorname{Ric}(\nu, \nu) = R_\gamma^\alpha &\implies \operatorname{Ric}(\nu, \nu) = -\frac{R_\gamma^\alpha}{2} + \frac{R}{2} \\ &\implies -\operatorname{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R_\gamma^\alpha}{2} - \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{M^n} \frac{f}{m} \left| \text{Ric} - \frac{R}{n} g \right| dV &\leq \sum_{\alpha} K_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} \left(\frac{R}{n} + \frac{R_{\gamma}^{\alpha}}{2} - \frac{R}{2} \right) dS \\ &= \sum_{\alpha} K_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} \frac{1}{2n} \left(nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2 - n) \right) dS, \end{aligned}$$

onde $K_{\alpha} = |\nabla f|$ é constante ao longo de ∂M_{α} . Assim, da desigualdade anterior,

$$\sum_{\alpha} K_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} (nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2 - n)) dS \geq 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = 0,$$

isto é, $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$. Logo, M^n é uma variedade Einstein e pela Proposição 2.2, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

□

Observação 2.7. Uma importante classe de exemplos aplicáveis do último resultado são as variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein com curvatura escalar constante, que foram abordadas em [11]. Em particular quando a curvatura escalar é uma constante positiva $n(n - 1)$ o último teorema fornece um resultado de rigidez interessante. Se ∂M é isométrica a esfera $(n - 1)$ - dimensional então M^n é um hemisfério de \mathbb{S}^n . De fato, considerando $R_{\gamma}^{\alpha} = (n - 1)(n - 2)$ e $R = n(n - 1)$, temos que

$$\begin{aligned} |\nabla f| \int_{\partial M} (nR_{\gamma} + R(2 - n)) dS &= |\nabla f| \int_{\partial M} (n(n - 1)(n - 2) + n(n - 1)(2 - n)) dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Outra aplicação do teorema acima é a seguinte caracterização topológica para o bordo em variedades $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein generalizadas.

Corolário 2.1. Se (M^3, g, f) é uma variedade $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein generalizada compacta com bordo conexo tal que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$ e curvatura escalar positiva. Então ∂M é difeomorfa a uma esfera \mathbb{S}^2 .

Demonstração. Fazendo $n = 3$ no Teorema 2.1 e levando em conta que o bordo de M^n é conexo, temos que

$$\int_{\partial M} (3R_{\gamma} - R) dS \geq 0 \implies \int_{\partial M} R_{\gamma} dS \geq \int_{\partial M} R dS. \quad (2.19)$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet, tem-se

$$\int_{\partial M} K_\gamma dS = 2\pi\chi(\partial M).$$

Agora, usando o fato de que $R_\gamma = 2K_\gamma$, obtemos

$$\int_{\partial M} 3R_\gamma dS = 12\pi\chi(\partial M). \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.19), segue que

$$12\pi\chi(\partial M) \geq \int_{\partial M} R dS > 0.$$

Portanto, ∂M é difeomorfo a uma esfera \mathbb{S}^2 . \square

Observamos que em [3], foi mostrado que o bordo ∂M de uma variedade estática tridimensional com bordo conexo e curvatura escalar positiva deve ser a 2-esfera cuja a área satisfaz a desigualdade $|\partial M| \leq 4\pi$. Mais ainda, a igualdade vale se, e somente se, M^n é um hemisfério. Motivado por esse resultado e suas extensões naturais em dimensões superiores, temos um similar resultado para variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas com $n > 2$.

Teorema 2.2. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada, compacta, com bordo, tal que, $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$, $\inf R_\gamma > 0$ e $\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{n-1} g_{\partial M}$, onde $\widetilde{\text{Ric}}$ é o tensor de Ricci sobre ∂M e R_γ é a curvatura escalar sobre ∂M . Então,*

$$|\partial M|^\alpha (\inf_{\partial M} R) \leq n(n-1)\omega_{n-1}^\alpha, \quad (2.21)$$

onde $\alpha = \frac{2}{n-1}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração. Notemos que o valor mínimo do conjunto dado por $\{\widetilde{\text{Ric}}(u, u); u \in TM^n; |u| = 1\} = (n-2)\delta$ é atingido para algum $\delta > 0$. Então temos que

$$\widetilde{\text{Ric}} \geq (n-2)\delta.$$

Pelo teorema de Bonnet-Myers, tem-se

$$\text{diam}(\partial M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

E pelo teorema de Bishop-Gromov

$$\left| B_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\partial M} \right| \leq \left| \mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1} \right|$$

onde $g_\delta = \frac{1}{\delta}g_{can}$, em que, g_{can} é a métrica canônica de \mathbb{S}^{n-1} . Como temos que

$$|\partial M| \leq |B_{\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}}^{\partial M}(p)|$$

para todo $p \in \partial M$, concluímos que

$$|\partial M| \leq |\mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1}| \quad (2.22)$$

Além disso como $g_\delta = \frac{1}{\delta}g_{can}$, temos que

$$\det(g_\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-1} \det(g_{can}).$$

Daí,

$$\sqrt{\det(g_\delta)} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\det(g_{can})}.$$

Levando em consideração a definição de volume, temos ao integrar a última igualdade sobre a esfera

$$\text{Vol}(\mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1})^{\frac{2}{n-1}} = |\mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1}|^{\frac{2}{n-1}} = \frac{1}{\delta}(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}, \quad (2.23)$$

onde ω_{n-1} denota o volume da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} . De (2.22) e (2.23) tem-se que

$$|\partial M| \leq \delta^{\frac{-2}{n-1}} \omega_{n-1}. \quad (2.24)$$

Observe que existe ν unitário tal que $\widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) = (n - 2)\delta$, como por hipótese,

$$\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{n - 1},$$

tem-se que

$$\delta \geq \frac{R_\gamma}{(n - 1)(n - 2)}. \quad (2.25)$$

Por outro lado, como $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$, do Teorema 2.1, temos

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dv \leq \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS. \quad (2.26)$$

Afirmção 2.1.

$$\int_{M^n} \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dv \leq \frac{1}{2} \int_{\partial M} R_\gamma |\nabla f| dS - \frac{n - 2}{2n} \int_{\partial M} R |\nabla f| dS. \quad (2.27)$$

De fato, notemos que

$$\text{Ric}(\nabla f, \nu) = -|\nabla f| \left(\text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n} \right)$$

e pela equação de Gauss

$$\text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) &= -|\nabla f| \left(\frac{R}{2} - \frac{R_\gamma}{2} - \frac{R}{n} \right) \\ &= |\nabla f| \frac{R_\gamma}{2} - \frac{n-2}{2n} R |\nabla f|. \end{aligned}$$

De (2.27) e (2.25), segue que

$$\delta \geq \frac{\inf_{\partial M} R}{n(n-1)}. \quad (2.28)$$

Assim, de (2.24) e (2.28), obtemos

$$|\partial M| \leq \left(\frac{\inf_{\partial M} R}{n(n-1)} \right)^{-\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1},$$

ou melhor

$$|\partial M| \leq \left(\frac{n(n-1)}{\inf_{\partial M} R} \right)^\alpha \omega_{n-1},$$

onde $\alpha = \frac{2}{n-1}$. Portanto,

$$|\partial M|^\alpha \inf_{\partial M} R \leq n(n-1) \omega_{n-1}^\alpha.$$

Observe que a igualdade vale se, e somente se, M^n é uma variedade Einstein. Em particular, pela Proposição 2.2 concluímos que a igualdade se mantém se, e somente se, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. \square

No contexto de bordo desconexo, o próximo teorema fornece um resultado de classificação para variedades $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein com curvatura Ricci não negativa. No entanto, antes de demonstrá-lo, demonstraremos 3 lemas que servirão como ferramentas para que resultado seja obtido.

Lema 2.4. *Seja (M^n, g) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein. Então:*

- (1) $\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m} |\nabla f|^2 \Delta f.$
- (2) $\frac{1}{2} \nabla R = \frac{m-1}{m} \text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \nabla f.$

$$(3) \quad \frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R = -\frac{m-1}{m}\left|\overset{\circ}{\text{Ric}}\right|^2 - \frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right).$$

Demonstração. Vamos provar o item (1). Pela equação (1.22), temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = 2(\text{div } \nabla^2 f)(\nabla f) + |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle. \quad (2.29)$$

Tomando a divergência em (2.2), temos

$$\text{div}(\text{Ric}) + \text{div}(\nabla^2 f) - \frac{1}{m}\text{div}(df \otimes df) = 0.$$

De (1.12), temos que $\text{div}(df \otimes df) = \nabla^2 f(\nabla f) + \Delta f \nabla f$. Portanto,

$$\text{div Ric} + \text{div } \nabla^2 f - \frac{1}{m}\Delta f \nabla f - \frac{1}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0, \quad (2.30)$$

onde $\nabla_{\nabla f} \nabla f$ é equivalente a $\nabla^2 f(\nabla f)$. Então

$$2 \text{div Ric} + 2 \text{div } \nabla^2 f - \frac{2}{m}\Delta f \nabla f - \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} 2 \text{div } \nabla^2 f &= -2 \text{div Ric} + \frac{2}{m}\Delta f \nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f \\ &= -\nabla R + \frac{2}{m}\Delta f \nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f. \end{aligned}$$

Logo,

$$2 \text{div } \nabla^2 f(\nabla f) = -\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{2}{m}\Delta f |\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f). \quad (2.31)$$

Tomando o traço em (2.2), ficamos com

$$R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n. \quad (2.32)$$

Tomando a derivada covariante de (2.32), obtemos

$$\nabla R + \nabla \Delta f - \frac{1}{m}\nabla|\nabla f|^2 = \nabla R + \nabla \Delta f - \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0. \quad (2.33)$$

Aplicando estas igualdades em (2.31)

$$\begin{aligned} 2(\text{div } \nabla^2 f)(\nabla f) &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle - \frac{1}{m}\langle \nabla|\nabla f|^2, \nabla f \rangle + \frac{2}{m}|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) \\ &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle - \frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla f \rangle + \frac{2}{m}\Delta f |\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) \\ &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \frac{2}{m}\Delta f |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Pela equação (2.29), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2 + |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \\ &= |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f. \end{aligned}$$

O que demonstra o item (1) Para o item (2), usando as equações (1.16), (2.30), (1.17), (2.33), tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla R &= 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric} \\ &= -2 \operatorname{div} \nabla^2 f + \frac{2}{m}\Delta f \nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f \\ &= -2 \operatorname{Ric}(\nabla f) - 2\nabla \Delta f + \frac{2}{m}\Delta f \nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f \\ &= -2 \operatorname{Ric}(\nabla f) + 2\nabla R - \frac{2}{m}\nabla|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\Delta f \nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f. \end{aligned}$$

Observe que, $\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f} \nabla f$, então

$$\nabla R = 2 \operatorname{Ric}(\nabla f) - \frac{2}{m}\Delta f \nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f. \quad (2.34)$$

De (2.2), temos que

$$\operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla^2 f(\nabla f) - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \nabla f = \lambda \nabla f.$$

Então

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = \lambda \nabla f + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \nabla f - \operatorname{Ric}(\nabla f).$$

Logo,

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = \left(\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \right) \nabla f - \operatorname{Ric}(\nabla f).$$

Portanto, substituindo e usando a equação (2.34), temos o item (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla R &= \operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}\left(\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \right) \nabla f - \frac{\operatorname{Ric}(\nabla f)}{m} - \frac{1}{m}\left(-R + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 + \lambda n \right) \nabla f \\ &= \frac{m-1}{m} \operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda) \nabla f. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Finalmente, para o item (3), tomando o divergente da equação acima, obtemos que

$$\frac{1}{2}\Delta R = \frac{m-1}{m} \operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) + \frac{1}{m} \operatorname{div}((R - (n-1)\lambda) \nabla f). \quad (2.36)$$

Pela equação (2.35), temos que

$$\frac{m-1}{m} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) = -\frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\langle \nabla f, \nabla f \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle. \quad (2.37)$$

Por (1.10), segue que

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{Ric}(\nabla f)) &= \langle \text{div Ric}, \nabla f \rangle + \text{tr}(\text{Ric} \circ \nabla^2 f) \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \text{tr}\left(\text{Ric} \circ \left(\frac{1}{m}df \otimes df + \lambda g - \text{Ric}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{m} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})) \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)|\nabla f|^2 \right) \\ &\quad + \text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Onde a última equação vem da equação (2.37). Por (1.11), obtemos

$$\text{div}((R - (n-1)\lambda)\nabla f) = (R - (n-1)\lambda)\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f \rangle. \quad (2.39)$$

Substituindo as equações (2.38) e (2.39) na equação (2.36), inferimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta R &= \frac{m-1}{2m}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)|\nabla f|^2 \right) \\ &\quad + \frac{m-1}{m} \text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\Delta f + \frac{1}{m}\langle \nabla R, \nabla f \rangle \\ &= \frac{m+2}{2m}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{m-1}{m} \text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})) \\ &\quad + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda) \left(\Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \right). \end{aligned}$$

Pela equação (2.32), segue que

$$\frac{1}{2}\Delta R = \frac{m+2}{2m}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{m-1}{m} \text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})) - \frac{1}{m}(R - \lambda n)(R - (n-1)\lambda).$$

Sejam $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ os autovalores da curvatura de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i - |\text{Ric}|^2 \\ &= \lambda R - |\text{Ric}|^2 \\ &= \lambda R - \left| \text{Ric} - \frac{R}{n}g \right|^2 - \frac{R^2}{n} \\ &= -\left| \overset{\circ}{\text{Ric}} \right|^2 + R \left(\lambda - \frac{R}{n} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R = -\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right) - \frac{m-1}{m}\left|\overset{\circ}{\text{Ric}}\right|^2. \quad (2.40)$$

□

Lema 2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein com $m \geq 1$,*

a) *Se $\lambda > 0$ e M^n é compacta então a curvatura escalar é limitada inferiormente por*

$$R \geq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}.$$

b) *Se $\lambda < 0$ e a curvatura escalar é constante, então*

$$n\lambda \leq R \leq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}.$$

Demonstração. Começaremos com a demonstração do item [a\)](#), como M^n é compacta, aplicando equação [\(2.40\)](#) a um ponto mínimo de R . Assim, como $\Delta R_{\min} \geq 0$ e $\nabla R_{\min} = 0$, a expressão do item [\(3\)](#) do Lema [2.4](#) é não-negativa, então

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R_{\min} - n\lambda)\left(R_{\min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right) \geq \frac{m-1}{m}\left|\text{Ric} - \frac{1}{n}Rg\right|^2 \geq 0.$$

Note que,

$$-\frac{m+n-1}{mn} < 0$$

e estamos em uma inequação do segundo grau, onde temos $n\lambda$ e $\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$ como raízes. Como $\lambda < 0$, temos que

$$n\lambda \geq R_{\min} \geq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}.$$

Como estamos aplicando em um ponto mínimo de R , temos que

$$R \geq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}.$$

Para o item [b\)](#), como R é constante a equação [\(2.40\)](#) do lema [2.4](#) é nula, então

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right) = \frac{m-1}{m}\left|\text{Ric} - \frac{1}{n}Rg\right|^2 \geq 0.$$

Novamente estamos em uma inequação do segundo grau, onde temos $n\lambda$ e $\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$

como raízes. Como $\lambda < 0$, então

$$R \in \left[n\lambda, \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \right].$$

□

Lema 2.6. *Seja (M^n, g) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein com $m > 1$ e curvatura escalar constante, então*

$$\text{Ric}(\nabla f) = -\frac{1}{m-1}(R - (n-1)\lambda)\nabla f.$$

Demonstração. Da equação (2.35), temos que

$$\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m}\text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f. \quad (2.41)$$

Como R é constante e $m > 1$, segue que

$$\text{Ric}(\nabla f) = -\frac{1}{m-1}(R - (n-1)\lambda)\nabla f.$$

□

As próximas definições servem para um melhor entendimento, da demonstração do resultado que queremos obter, maiores detalhes podem ser vistos em [12].

Definição 2.6. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n , com bordo suave e L e Λ , dois números reais. Dizemos que M^n é de classe (L, Λ) se $\text{Ric} \geq (n-1)L$ e $\text{tr}(S_\eta) \leq (n-1)\Lambda$, para todo campo vetorial normal interno unitário η de ∂M , onde S_η é a segunda forma fundamental de ∂M com respeito a η .*

Definição 2.7. *Seja f a solução da equação:*

$$f'' + Lf = 0 \text{ com } f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1.$$

Seja h a solução da equação:

$$h'' + Lh = 0 \text{ com } h(0) = 1 \text{ e } h'(0) = \Lambda.$$

Definimos os conjuntos

$$C_1(L, \Lambda) = \inf\{t : t > 0 \text{ e } h(t) = 0\}$$

e

$$C_2(L, \Lambda) = \inf\{t : t > 0 \text{ e } h'(t) = 0\}.$$

Se $h > 0$ em $[0, \infty)$, temos $C_1(L, \Lambda) = +\infty$ e para $h' > 0$ em $[0, \infty)$ temos, $C_2(L, \Lambda) = +\infty$.

Definição 2.8. Dadas duas variedades Riemannianas (B, g_B) e (F, g_F) e uma função positiva $u \in C^\infty(B)$ uma métrica produto warped em $B \times F$ é definida por

$$g = g_B + u^2 g_F.$$

A variedade produto com tal métrica será denotada por $M = B \times_u F$ e a função u é denominada função warping.

Agora podemos provar o seguinte resultado de classificação.

Teorema 2.3. Seja (M^3, g) uma variedade do tipo $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein compacta com $m > 1$, curvatura escalar constante, curvatura Ricci não negativa e bordo desconexo. Então M^3 é isométrica a um cilindro $\mathbb{S}^2 \times [0, a]$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que os componentes conexos do bordo são duas esferas topológicas. De fato, pelo lema [2.6](#), temos que

$$\text{Ric}(\nabla f) = -\frac{1}{m-1}[R - (n-1)\lambda](\nabla f). \quad (2.42)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f) &= -\frac{1}{m-1}[R - (n-1)\lambda](\nabla f) - \frac{R}{n}(\nabla f) \\ &= \left[\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} - \frac{R}{n} \right](\nabla f) \\ &= \left[\frac{(n-1)\lambda}{m-1} - \frac{R}{m-1} - \frac{R}{n} \right](\nabla f) \\ &= \left[\frac{(n-1)\lambda}{m-1} - \left(\frac{n+m-1}{n(m-1)} \right) R \right](\nabla f) \\ &= \left[-\frac{R}{(m-1)n}(n+m-1) + \frac{n-1}{m-1}\lambda \right](\nabla f). \end{aligned}$$

Daí, para $n = 3$ e levando em conta que o campo externo ao bordo é $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, tem-se

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu \nu) &= -\frac{R}{3(m-1)}(2+m) + \frac{2\lambda}{m-1} \\ &= \frac{2+m}{3(m-1)} \left(-R + \frac{6\lambda}{2+m} \right) \\ &= \frac{2+m}{3(1-m)} \left(R - \frac{6\lambda}{2+m} \right), \end{aligned}$$

então, temos que

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \frac{2+m}{3(1-m)} \left(R - \frac{6\lambda}{2+m} \right), \quad (2.43)$$

ao longo do bordo. Como M^3 é compacta, a partir do Teorema 4.1 de [10], temos que, $\lambda > 0$ e portanto, do lema 2.5, segue que

$$R \geq \frac{n(n-1)}{m+n-1} \lambda = \frac{6}{m+2} \lambda > 0.$$

Assim, voltando para o problema (2.43), temos

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \frac{2+m}{3(1-m)} \left(-\frac{6\lambda}{m+2} + R \right) \leq 0, \quad (2.44)$$

ao longo do bordo. Agora por (2.44) temos,

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{3} g(\nu, \nu) = \text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{3} \leq 0.$$

Daí,

$$\text{Ric}(\nu, \nu) \leq \frac{R}{3}. \quad (2.45)$$

Agora, pela equação de Gauss,

$$R - 2\text{Ric}(\nu, \nu) = R_\gamma^\alpha$$

Então

$$\begin{aligned} R - R_\gamma^\alpha = 2\text{Ric}(\nu, \nu) &\Rightarrow \text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2} \leq \frac{R}{3} \\ &\Rightarrow \frac{R}{3} \geq \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2} \\ &\Rightarrow \frac{R_\gamma^\alpha}{2} \geq -\frac{R}{3} + \frac{R}{2} \\ &\Rightarrow R_\gamma^\alpha \geq \frac{R}{3} \\ &\Rightarrow R_\gamma^\alpha \geq \frac{R}{3} > 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\text{Ric}(\nu, \nu) = -\frac{1}{m-1}(R - 2\lambda).$$

Pois, basta usar (2.44) e que

$$\text{Ric}(\nu, \nu) = \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \frac{R}{3}.$$

Portanto, ∂M_α possui curvatura gaussiana constante e positiva. Então ∂M_α é isométrica a uma esfera. Agora usando a hipótese de que $\text{Ric} \geq 0$, pelo Teorema B de [12], que diz que seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de classe (L, Λ) , suponha que ∂M é desconexa e tem uma componente conexa Γ_1 . Então:

- (1) Se $L = 0$ e $\Lambda = 0$, M^n é isométrica ao produto $[0, a] \times \Gamma_1$.
- (2) Se $L > 0$, então $\Lambda > 0$ e

$$\min_{2 \leq j} d(\Gamma_1, \Gamma_j) \leq 2C_2(L, \Lambda),$$

onde $\{\Gamma_j\}_{j=1,2,\dots}$, são componentes conexas de ∂M . Mais ainda se

$$\min_{2 \leq j} (\Gamma_1, \Gamma_j) = 2C_2(L, \Lambda),$$

então M^n é isométrico ao produto warped $[0, 2C_2(L, \Lambda)] \times_h \Gamma_1$.

No nosso caso, $\Lambda = 0$, pois ∂M é totalmente geodésico. Concluimos que a fronteira tem exatamente duas componentes conexas. Portanto, (M^3, g) é isométrica ao cilindro $(\mathbb{S}^2 \times [0, a], g_0)$, onde g_0 é a métrica produto. \square

Usando a fórmula de Gauss-Bonnet-Chern temos uma estimativa da característica de Euler do bordo de uma variedade $(\lambda, 5 + m)$ -Einstein generalizada.

Teorema 2.4. *Seja (M^5, g, f) uma variedade $(\lambda, 5 + m)$ -Einstein generalizada, conexa, com bordo ∂M , $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$ e $\min_{\partial M} R > 0$. Suponha também que ∂M é Einstein, então*

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{3}{200} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M|,$$

onde vale a igualdade se, e somente se, M^5 é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^5(c)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.1, segue que

$$\int_{\partial M} 5R_\gamma + R(2 - 5)dS \geq 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} 5 \int_{\partial M} R_\gamma dS \geq 3 \int_{\partial M} R dS &\Rightarrow \int_{\partial M} R_\gamma dS \geq \frac{3}{5} \int_{\partial M} R dS \\ &\Rightarrow \int_{\partial M} R_\gamma dS \geq \frac{3}{5} \min_{\partial M} R |\partial M|, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{3}{5} \min_{\partial M} R |\partial M| \leq \int_{\partial M} R_\gamma dS.$$

Daí,

$$\left(\frac{3}{5} \min_{\partial M} R |\partial M| \right)^2 \leq \left(\int_{\partial M} R_\gamma dS \right)^2. \quad (2.46)$$

Pela desigualdade de Schwarz, temos que

$$\left(\int_{\partial M} R_\gamma dS \right)^2 \leq \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS |\partial M|. \quad (2.47)$$

De (2.46) e (2.47), tem-se

$$\frac{9}{25} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M| \leq \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS. \quad (2.48)$$

Lembrando que a fórmula de Gauss-Bonnet-Chern é dado por

$$8\pi^2 \chi(\partial M) = \frac{1}{4} \int_{\partial M} |W_\gamma|^2 dS + \frac{1}{24} \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS - \frac{1}{2} \int_{\partial M} |\text{Ric}_\gamma^\circ|^2 dS.$$

Concluimos que,

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{1}{24} \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS.$$

Pois, ∂M é Einstein e

$$\int_{\partial M} |W_\gamma|^2 dS \geq 0.$$

Por (2.48), segue que

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{1}{24} \frac{9}{25} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M|,$$

então

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{3}{200} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M|.$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se, a seguinte igualdade é válida,

$$\int_{\partial M} 5R_\gamma + R(2 - 5) dS = 0.$$

E pelo Teorema 2.1 a igualdade é válida se, e somente se, M^5 é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^5(c)$. \square

2.3 Algumas Desigualdades Integrais

Nesta seção, trabalharemos com algumas desigualdades integrais, consideraremos a função

$$\rho = \frac{(n-1)\lambda - R}{m-1}$$

sobre M^n e o tensor

$$P = \text{Ric} - \rho g.$$

O objetivo é obter uma nova caracterização para o hemisfério.

Teorema 2.5. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada compacta com bordo $m > 1$, então*

$$\int_{M^n} f^{m+2} \text{tr}(P)(\rho - \lambda) dV + \frac{(n-1)m^2}{m-1} \int_{M^n} f^{m+1} \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV \leq 0.$$

Em particular, supondo que M^n tem bordo conexo, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração. Tomando a divergência em

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m} (\text{Ric} - \lambda g),$$

pela equação (1.17), temos

$$\begin{aligned} \nabla \Delta f + \text{Ric}(\nabla f) &= \frac{1}{m} [\text{div}(f \text{Ric}) - \text{div}(f \lambda g)] \\ &= \frac{1}{m} \left[\text{Ric}(\nabla f) + \frac{f \nabla R}{2} - \lambda \nabla f - f \nabla \lambda \right] \\ &= \frac{\text{Ric}(\nabla f)}{m} + \frac{f \nabla R}{2m} - \frac{\lambda \nabla f}{m} - \frac{f \nabla \lambda}{m}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Ric}(\nabla f) - \frac{\text{Ric} \nabla f}{m} + \nabla \Delta f + \frac{f \nabla \lambda}{m} - \frac{f \nabla R}{2m} + \frac{\lambda \nabla f}{m} = 0.$$

Portanto,

$$\text{Ric}(\nabla f) \left(\frac{m-1}{m} \right) + \nabla \Delta f + \frac{f \nabla \lambda}{m} + \frac{\lambda \nabla f}{m} - \frac{f \nabla R}{2m} = 0. \quad (2.49)$$

Como

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m} (\text{Ric} - \lambda g),$$

temos que

$$\Delta f = \frac{f}{m} (R - \lambda n).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\nabla \Delta f &= \frac{1}{m} \nabla (fR - \lambda fn) = \frac{1}{m} (f \nabla R + R \nabla f - n(\lambda \nabla f + f \nabla \lambda)) \\ &= \frac{f \nabla R}{m} + \frac{R \nabla f}{m} - \frac{n}{m} (\lambda \nabla f) - \frac{n}{m} f \nabla \lambda.\end{aligned}$$

Sendo assim, substituindo a última expressão em (2.49), obtemos:

$$\text{Ric}(\nabla f) \left(\frac{m-1}{m} \right) + \frac{f \nabla R}{m} + \frac{R \nabla f}{m} - \frac{n}{m} \lambda \nabla f - \frac{n}{m} f \nabla \lambda + \frac{f \nabla \lambda}{m} + \frac{\lambda \nabla f}{m} - \frac{f \nabla R}{2m} = 0.$$

Logo,

$$\text{Ric}(\nabla f) \left(\frac{m-1}{m} \right) + \frac{f \nabla R}{2m} + \frac{R \nabla f}{m} + \frac{1-n}{m} \lambda \nabla f + \frac{(1-n)}{m} f \nabla \lambda = 0.$$

Multiplicando os dois membros por $\frac{m}{m-1}$, temos que

$$\text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{2(m-1)} f \nabla R + \frac{1}{m-1} R \nabla f + \frac{(1-n)}{m-1} \lambda \nabla f + \frac{(1-n)}{m-1} f \nabla \lambda = 0.$$

Daí,

$$\text{Ric}(\nabla f) + \frac{f \nabla R}{2(m-1)} + \frac{\nabla f}{m-1} (R + (1-n)\lambda) + \frac{(1-n)}{m-1} f \nabla \lambda = 0.$$

Segue que

$$\text{Ric}(\nabla f) - \nabla f \left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) + \frac{1}{2(m-1)} f \nabla R + \frac{(1-n)}{m-1} f \nabla \lambda = 0.$$

Portanto,

$$P(\nabla f) + \frac{f \nabla R}{2(m-1)} - \frac{(n-1)f \nabla \lambda}{m-1} = 0, \quad (2.50)$$

pois

$$P = \text{Ric} - \rho g$$

e

$$\rho = \frac{(n-1)\lambda - R}{m-1}.$$

Em particular $P(\nabla f) = 0$ ao longo do bordo, uma vez que $f = 0$ sobre ∂M .

Note que,

$$P(\nabla f^{m+1}) = (m+1)f^m P(\nabla f). \quad (2.51)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
P(\nabla f^{m+1}) &= \text{Ric}(\nabla f^{m+1}) - \left[\left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) \right] (\nabla f)^{m+1} \\
&= (m+1)f^m \text{Ric}(\nabla f) - (m+1)f^m \left[\left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) \right] (\nabla f) \\
&= (m+1)f^m \left[\text{Ric}(\nabla f) - \left[\left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) \right] (\nabla f) \right] \\
&= (m+1)f^m P(\nabla f).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{div}(f^{m+1}P) &= f^{m+1} \text{div}(P) + P(\nabla f^{m+1}) \\
&= f^{m+1} \text{div} \left(\text{Ric} - \left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) g \right) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^{m+1} \left(\frac{\nabla R}{2} - \frac{(n-1)\nabla\lambda - \nabla R}{m-1} \right) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^{m+1} \left(\frac{\nabla R}{2} + \frac{\nabla R}{m-1} - \frac{(n-1)\nabla\lambda}{m-1} \right) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^{m+1} \left(\frac{(m+1)\nabla R}{2(m-1)} - \frac{(n-1)\nabla\lambda}{m-1} \right) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^m \left(\frac{(m+1)f\nabla R}{2(m-1)} - \frac{(n-1)f\nabla\lambda}{(m-1)} \right) + (m+1)f^m P(\nabla f).
\end{aligned}$$

Pela equação (2.50), temos que

$$\frac{f\nabla R}{2(m-1)} = -P(\nabla f) + \frac{(n-1)f\nabla\lambda}{m-1}.$$

O que implica,

$$\begin{aligned}
\text{div}(f^{m+1}P) &= f^m \left(\frac{(n-1)(m+1)f\nabla\lambda}{m-1} - \frac{(n-1)f\nabla\lambda}{m-1} - (m+1)P(\nabla f) \right) \\
&\quad + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^m \left(\frac{(n-1)m f\nabla\lambda}{m-1} \right) - (m+1)f^m P(\nabla f) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^{m+1} \left(\frac{\nabla\lambda(n-1)m}{m-1} \right).
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\text{div}(f^{m+1}P) = f^{m+1} \left(\frac{\nabla\lambda(n-1)m}{m-1} \right). \tag{2.52}$$

Relembremos que, para T um $(1, 2)$ -tensor simétrico e X um campo de vetores, temos

que

$$(\operatorname{div}(T))(X) = \operatorname{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X).$$

Logo, para $T = f^{m+1}P$ e $X = \nabla f$, ficamos com

$$\operatorname{div}(f^{m+1}P)(\nabla f) = \operatorname{div}(f^{m+1}P(\nabla f)) - f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle.$$

Então, integrando, obtemos

$$\int_{M^n} \operatorname{div}(f^{m+1}P(\nabla f))dV = \int_{M^n} \operatorname{div}(f^{m+1}P)(\nabla f)dV + \int_{M^n} f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle. \quad (2.53)$$

Temos que $P(\nabla f) = 0$ ao longo bordo, o teorema da divergência implica que

$$\int_{M^n} \operatorname{div}(f^{m+1}P(\nabla f))dV = \int_{\partial M} f^{m+1}\langle P(\nabla f), \nu \rangle dS = 0,$$

onde ν é um vetor unitário com orientação externa sobre ∂M . Portanto, por (2.53), temos

$$\int_{M^n} f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle dV + \int_{M^n} \operatorname{div}(f^{m+1}P)(\nabla f)dV = 0.$$

Agora, por (2.52), inferimos que:

$$\int_{M^n} f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle dV + \frac{(n-1)m}{m-1} \int_{M^n} f^{m+1}\langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV = 0. \quad (2.54)$$

Por outro lado,

$$\langle P, \nabla^2 f \rangle = \left\langle \overset{\circ}{P} + \frac{\operatorname{tr}(P)}{n}g, \overset{\circ}{\nabla}^2 f + \frac{\operatorname{tr}(\nabla^2 f)}{n}g \right\rangle.$$

Note que $\overset{\circ}{P} = \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}$. De fato, observe que $\operatorname{tr}(P) = R - n\rho$. Daí, por definição

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{P} &= P - \frac{\operatorname{tr}(P)}{n}g \\ &= \operatorname{Ric} - \rho g - \frac{(R - n\rho)}{n}g \\ &= \operatorname{Ric} - \rho g - \frac{R}{n}g + \rho g \\ &= \operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g = \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Sendo assim, pela equação (2.6), temos:

$$\begin{aligned}
\langle P, \nabla^2 f \rangle &= \left\langle \overset{\circ}{P} + \frac{R - n\rho}{n}g, \frac{f}{m} \overset{\circ}{Ric} + \frac{f}{m} \frac{(R - \lambda n)}{n}g \right\rangle \\
&= \left\langle \overset{\circ}{P} + \frac{R - n\rho}{n}g, \overset{\circ}{Ric} + \frac{R - \lambda n}{n}g \right\rangle \frac{f}{m} \\
&= \left\langle \overset{\circ}{P} + \frac{R - n\rho}{n}g, \overset{\circ}{P} + \frac{R - \lambda n}{n}g \right\rangle \frac{f}{m} \\
&= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + \frac{R - n\rho}{n} \langle g, \overset{\circ}{P} \rangle + \frac{R - n\lambda}{n} \langle g, \overset{\circ}{P} \rangle + \frac{(R - n\rho)}{n} \cdot \frac{(R - n\lambda)}{n} \langle g, g \rangle \right) \frac{f}{m} \\
&= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + (R - \rho n) \cdot \frac{(R - \lambda n)}{n} \right) \frac{f}{m} \\
&= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + \text{tr}(P) \cdot \frac{R - \lambda n}{n} \right) \frac{f}{m}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle P, \nabla^2 f \rangle = \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + \text{tr}(P) \cdot \frac{R - \lambda n}{n} \right) \frac{f}{m}. \quad (2.56)$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
|\overset{\circ}{P}|^2 = \langle \overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{P} \rangle &= \left\langle P - \frac{R - n\rho}{n}g, P - \frac{R - n\rho}{n}g \right\rangle \\
&= |P|^2 - 2 \frac{R - n\rho}{n} \langle g, P \rangle + \left(\frac{R - n\rho}{n} \right)^2 \langle g, g \rangle \\
&= |P|^2 - \frac{2 \text{tr}(P)^2}{n} + \frac{\text{tr}(P)^2}{n^2} n \\
&= |P|^2 - \frac{\text{tr}(P)^2}{n}.
\end{aligned}$$

Então,

$$|\overset{\circ}{P}|^2 = |P|^2 - \frac{\text{tr}(P)^2}{n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle P, \nabla^2 f \rangle &= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + \text{tr}(P) \left(\frac{R - n\lambda}{n} \right) \right) \frac{f}{m} \\
&= \left(|P|^2 - \frac{\text{tr}(P)^2}{n} + \text{tr}(P) \left(\frac{R - n\lambda}{n} \right) \right) \frac{f}{m}.
\end{aligned}$$

Note que

$$-\frac{\text{tr}(P)^2}{n} + \text{tr}(P) \left(\frac{R - n\lambda}{n} \right) = \text{tr}(P)(\rho - \lambda).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{\operatorname{tr}(P)^2}{n} + \operatorname{tr}(P)\left(\frac{R - n\lambda}{n}\right) &= \frac{-R^2 + 2\rho nR - \rho^2 n^2 + R^2 - Rn\lambda - R\rho n + \rho n^2 \lambda}{n} \\ &= 2\rho R - \rho^2 n - R\lambda - R\rho + \rho n\lambda \\ &= (R - \rho n)(\rho - \lambda) = \operatorname{tr}(P)(\rho - \lambda). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\langle P, \nabla^2 f \rangle = (|P|^2 + \operatorname{tr}(P)(\rho - \lambda)) \frac{f}{m}.$$

Da equação (2.54) e da equação anterior, temos que

$$\int_{M^n} f^{m+1} (|P|^2 + \operatorname{tr}(P)(\rho - \lambda)) \frac{f}{m} dV + \frac{(n-1)m}{m-1} \int_{M^n} f^{m+1} \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV = 0,$$

ou seja,

$$\int_{M^n} f^{m+2} \operatorname{tr}(P)(\rho - \lambda) dV + \frac{(n-1)m^2}{m-1} \int_{M^n} f^{m+1} \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV \leq 0.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $|P|^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ric} = \rho g \Leftrightarrow M^n$ é Einstein. Segue da proposição 2.2 que M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. \square

A seguir, usando as propriedades do bordo de uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada com $m > 1$, obtemos o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 2.6. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada compacta com $m > 1$. Suponha que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$. Então*

$$\int_{\partial M} \operatorname{tr}(P) dS \geq 0.$$

Em particular, supondo que M^n tem bordo conexo, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração. Pela equação (2.50), temos

$$P(\nabla f) = (\operatorname{Ric} - \rho g)(\nabla f) = 0 \tag{2.57}$$

ao longo do bordo. Temos que $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um campo vetorial unitário com orientação

externa em ∂M . Então, pela equação (2.55), temos

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) &= \overset{\circ}{P}(\nu, \nu) \\ &= P(\nu, \nu) - \frac{\text{tr}(P)}{n} \\ &= -\frac{\text{tr}(P)}{n}.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Pela equação de Gauss

$$\text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2},$$

sendo assim,

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \frac{(n-2)}{2n}R - \frac{R_\gamma^\alpha}{2}.$$

Agora, pela equação (2.58), tem-se que

$$-\frac{\text{tr}(P)}{n} = \frac{(n-2)R}{2n} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\text{tr}(P) &= -\frac{(n-2)}{2}R + \frac{nR_\gamma^\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2}(nR_\gamma^\alpha + (2-n)R).\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.1

$$\int_{\partial M} \text{tr}(P) dS \geq 0.$$

Além disso, supondo que M^n tem bordo conexo, pelo Teorema 2.1 a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. \square

Observação 2.8. *Se λ for constante, temos que*

$$P(\nabla f, \nabla f) = -\frac{f}{2(m-1)} \langle \nabla R, \nabla f \rangle.$$

De fato, como λ é constante, pela (2.50), temos que

$$\frac{f \nabla R}{2(m-1)} + P(\nabla f) = 0.$$

Portanto,

$$P(\nabla f, \nabla f) = -\frac{f}{2(m-1)} \langle \nabla R, \nabla f \rangle.$$

Observação 2.9. *Em uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein compacta e com curvatura escalar constante, tem-se que $\text{tr}(P) \geq 0$. Na verdade esta desigualdade é equivalente a dizer que*

$$R \geq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \text{tr}(P) &= R - \frac{(n-1)\lambda - R}{m-1}n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1)R - (n-1)\lambda n + Rn}{m-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow R(m-1+n) - (n-1)\lambda n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow R(m-1+n) \geq (n-1)\lambda n \\ &\Leftrightarrow R \geq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}. \end{aligned}$$

O próximo resultado estende uma desigualdade anterior obtida em [1] no caso sem bordo.

Teorema 2.7. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada compacta e com bordo conexo. Se*

$$\int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV \geq \frac{(n-1)}{n} \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV,$$

então M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração. Lembramos que a fórmula de Bochner é dada por

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + |\nabla^2 f|^2.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \int_{M^n} \Delta |\nabla f|^2 dV = \int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV + \int_{M^n} \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV + \int_{M^n} |\nabla^2 f|^2 dV. \quad (2.59)$$

Pelo Teorema da divergência, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{M^n} \Delta |\nabla f|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\Delta f|^2 \rangle dS, \quad (2.60)$$

onde $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um vetor unitário com orientação externa sobre ∂M . Temos que

$$\begin{aligned} |\nabla^2 f|^2 &= \left| \overset{\circ}{\nabla}^2 f + \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 = \left\langle \overset{\circ}{\nabla}^2 f + \frac{\Delta f}{n} g, \overset{\circ}{\nabla}^2 f + \frac{\Delta f}{n} g \right\rangle \\ &= \left| \overset{\circ}{\nabla}^2 f \right|^2 + \frac{(\Delta f)^2}{n}. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{M^n} |\nabla^2 f|^2 dV = \int_{M^n} |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV + \frac{1}{n} \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.60) e (2.59) em (2.58), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS &= \int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV + \int_{M^n} |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV \\ &+ \frac{1}{n} \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV + \int_{M^n} \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Fazendo $T = (\Delta f)g$ e $X = \nabla f$ na identidade de Pohozaev - Schoen, tem-se que

$$\int_{M^n} \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV = -\frac{1}{2} \int_{M^n} \langle \Delta f g, \mathcal{L}_{\nabla f} g \rangle dV + \int_{\partial M} \langle \Delta f \nabla f, \nu \rangle dS.$$

Agora, note que $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nabla f} g(E_i, E_j) &= \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle + \langle \nabla_{E_j} \nabla f, E_i \rangle \\ &= 2\langle \nabla_{E_i}^2 f, E_j \rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\int_{M^n} \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV = - \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV + \int_{\partial M} \Delta f \langle \nabla f, \nu \rangle dS. \quad (2.63)$$

De (2.62) e (2.63), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS &= \int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV + \int_{M^n} |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV + \frac{1}{n} \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV \\ &- \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV + \int_{\partial M} \Delta f \langle \nabla f, \nu \rangle dS. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{M^n} |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV &= - \left(\int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV - \frac{(n-1)}{n} \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV \right) \\ &- \int_{\partial M} \Delta f \langle \nabla f, \nu \rangle dS + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS. \end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$\int_{M^n} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV \geq \frac{n-1}{n} \int_{M^n} (\Delta f)^2 dV,$$

então

$$\int_{M^n} |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV \leq 0, \quad (2.64)$$

onde usamos que $\nabla^2 f = 0$ e $|\nabla f|$ é constante no ∂M . Daí, $\overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0$. Usando a equação (2.6) concluímos que (M^n, g) é Einstein. Da proposição 2.2, segue que M^n é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. \square

Conclusão

Nesta dissertação abordamos as variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizadas compactas com bordo não vazio. Estendendo alguns resultados conhecidos sobre variedades estáticas para as variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein.

Primeiramente, apresentamos conceitos e demonstramos alguns resultados clássicos da Geometria Riemanniana e da Análise Geométrica, tais como: variedades e métricas Riemannianas, Conexão de Levi-Civita, tensor curvatura, segunda forma fundamental, curvatura de Ricci, Teorema de Gauss-Bonnet, Teorema da Divergência, Teorema de Comparação de Volume, visando demonstrar os principais resultados deste trabalho.

Posteriormente, apresentamos a definição de uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada, assim como alguns exemplos destas variedades, além de demonstrarmos que uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein é um caso particular de uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada. Também abordamos algumas estimativas de área e realizamos uma classificação topológica do seu bordo, conseqüentemente obtemos uma caracterização sobre o hemisfério de \mathbb{S}^n .

Finalmente, lidamos com algumas desigualdades integrais nas variedades $(\lambda, n + m)$ -Einstein, definindo uma função sobre M^n e um novo tensor, obtendo assim, uma nova caracterização para o hemisfério de \mathbb{S}^n .

Os resultados vistos nesta dissertação podem ser utilizados em outros contextos, como nas variedades quasi-Einstein e nas m -quasi-Einstein generalizadas, como podem ser visto em [5] e em [1], respectivamente.

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, A., AND RIBEIRO, E. Characterizations and integral formulae for generalized m -quasi-Einstein metrics. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 45 (2014), 325–341.
- [2] BESSE, A. L. Riemannian submersions. In *Einstein Manifolds*. Springer, 1987, pp. 235–277.
- [3] BOUCHER, W., GIBBONS, G. W., AND HOROWITZ, G. T. Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime. *Physical Review D* 30, 12 (1984), 2447.
- [4] CARMO, M. P. Geometria Riemanniana-5a edição. *Projeto Euclides-IMPA* (2015).
- [5] CASE, J., SHU, Y.-J., AND WEI, G. Rigidity of quasi-einstein metrics. *Differential Geometry and its Applications* 29, 1 (2011), 93–100.
- [6] CHRUSCIEL, P. T. Remarks on rigidity of the de Sitter metric. *homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/papers/deSitter/deSitter2.pdf*.
- [7] COUTINHO, F., DIÓGENES, R., LEANDRO, B., AND RIBEIRO, E. Static perfect fluid space-time on compact manifolds. *Classical and Quantum Gravity* 37, 1 (2019), 015003.
- [8] FERREIRA JÚNIOR, G. D. S., ET AL. Rigidez e topologia de variedades quase-Einstein com fronteira. *Dissertação de Mestrado - UFPB* (2021).
- [9] FREITAS, A., AND SANTOS, M. Boundary topology and rigidity results for generalized $(\lambda, n+m)$ -Einstein manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* 199, 6 (2020), 2511–2520.
- [10] HE, C., PETERSEN, P., AND WYLIE, W. On the classification of warped product Einstein metrics. *Communications in Analysis and Geometry* 20, 2 (2012), 271–311.
- [11] HE, C., PETERSEN, P., AND WYLIE, W. Warped product Einstein metrics over spaces with constant scalar curvature. *Asian j. math* (2014).

- [12] KASUE, A. Ricci curvature, geodesics and some geometric properties of Riemannian manifolds with boundary. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 35, 1 (1983), 117–131.
- [13] KIM, D.-S., AND KIM, Y. Compact Einstein warped product spaces with non-positive scalar curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society* 131, 8 (2003), 2573–2576.
- [14] MENEZES, A. M. D. J. A rigidez da curvatura de Ricci do hemisfério S_+^n . *Dissertação de Mestrado - UFAL* (2009).
- [15] OBATA, M. Certain conditions for a riemannian manifold to be isometric with a sphere dedicated to professor kentaro yano on his fiftieth birthday. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 14, 3 (1962), 333–340.
- [16] REILLY, R. C. Geometric applications of the solvability of Neumann problems on a Riemannian manifold. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 75 (1980), 23–29.
- [17] SANTOS, E. A. F. D., ET AL. O teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov. *Dissertação de Mestrado - UFAL* (2009).



UNIVERSIDADE
FEDERAL DE
SERGIPE