



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

O Teorema de Banach-Steinhaus e algumas consequências

Lucio Santos Machado

Orientador: Jônison Lucas dos Santos Carvalho

São Cristóvão - SE
13 de junho de 2025

Lucio Santos Machado

O Teorema de Banach-Steinhaus e algumas consequências

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Jônison Lucas dos Santos Carvalho

São Cristóvão - SE
03 de julho de 2025

RESUMO

O trabalho presente visa, a partir de textos científicos já fundamentados, enunciar e demonstrar um dos principais teoremas da análise funcional, ramo da análise matemática, a saber o Teorema de Banach-Steinhaus. Esse teorema também é conhecido na literatura como o Princípio da Limitação Uniforme, e tem como principal característica garantir condição de uniformidade sobre uma certa classe de funções. De forma mais específica, ao considerar uma família de operadores lineares contínuos, limitados pontualmente, no ambiente dos espaços de Banach, esta limitação se torna uniforme.

Palavras-chave: Teorema de Banach-Steinhaus; Teorema de Baire; Espaços de Banach; Operadores lineares contínuos.

ABSTRACT

The objective of this study is to state and demonstrate, with the assistance of already established mathematical literature, one of the main theorems in functional analysis -a branch of mathematical analysis- namely the Banach-Steinhaus Theorem. This theorem is also commonly referred as the Uniform Boundedness Principle, and its main trait is to ensure a condition of uniformity over a certain class of functions. More specifically, when considering a family of continuous linear operators that are pointwise bounded within the setting of Banach spaces, this pointwise boundedness becomes uniform.

Keywords: Banach-Steinhaus Theorem; Baire's Theorem; Banach Spaces; Continuous linear operators.

SUMÁRIO

1	ESPAÇO VETORIAL NORMADO	8
1.1	Definições e exemplos	8
1.2	Topologia de um espaço vetorial normado	16
1.2.1	Conjunto aberto e fechado	16
1.2.2	Conjunto compacto	21
1.3	Espaços de Banach	27
2	OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS	31
2.1	Conceitos preliminares	31
2.2	Caracterização dos operadores lineares contínuos	35
2.3	Teorema de Banach-Steinhaus	44
2.3.1	Algumas consequências do Teorema de Banach-Steinhaus . . .	49
	REFERÊNCIAS	55

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional surgiu em meados do século XX, partindo por exemplo da necessidade de se estudar espaços vetoriais (com dimensão infinita), em particular de espaços de Banach, e de como funções lineares interagem com as estruturas desses espaços. O termo “espaço de Banach” refere ao matemático polonês Stefan Banach (1892, 1945), um dos pioneiros da Análise Funcional. Como exemplo de sua importância, temos o fato de que os axiomas de norma, uma das principais estruturas dos espaços estudados, foram apresentadas por Banach em sua tese “*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*” em 1922 e são utilizados até o presente momento.

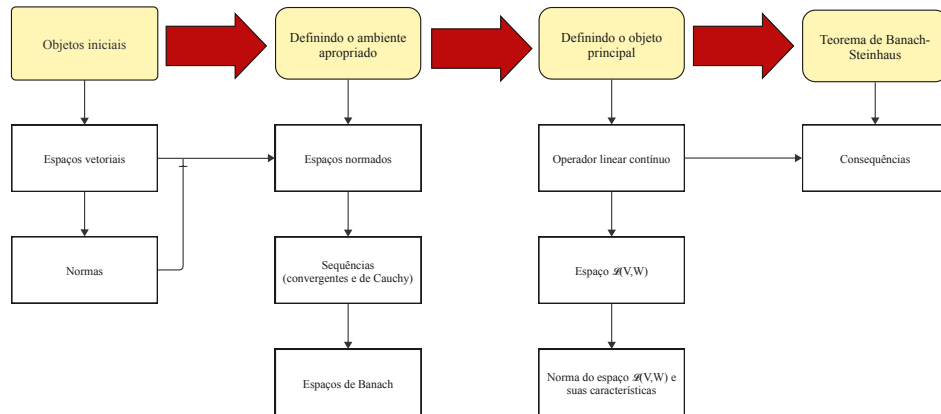
A Análise Funcional possui um conjunto de propriedades que permite aplicações nas demais áreas da Matemática, sendo um grande exemplo disso o estudo de equações diferenciais parciais (EDP). Vale mencionar que as equações diferenciais são fundamentais na atualidade, ao fornecer descrições de fenômenos biológicos, químicos ou físicos, como a propagação de calor e de ondas e o eletromagnetismo. Também descreve fenômenos probabilísticos e financeiros, como a EDP do modelo de Black-Scholes, que mede a evolução da precificação de ativos não direcionais, fornecendo uma estimativa teórica dos preços. A ligação entre as duas áreas é tão intensa que alguns pesquisadores buscam “reduzir” problemas de equações diferenciais a problemas de análise funcional, como Haim Brézis em seu livro *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* [3].

A literatura costuma referenciar o Teorema de Banach-Steinhaus, principal teorema desse trabalho, como um dos resultados fundamentais da Análise Funcional. Esse teorema também é conhecido como o Princípio da Limitação Uniforme, sendo provado no artigo escrito pelos matemáticos Stefan-Banach e Hugo Steinhaus (1887-1972) com o título de “*Sur le principe de la condensation de singularités*”, publicado na revista Fundamenta Mathematicae em 1927.

O Teorema de Banach-Steinhaus trata do controle uniforme partindo de hipóteses do controle pontual. De maneira mais específica, o teorema afirma que a limitação pontual de uma família de operadores lineares e contínuos implica na limitação uniforme relativa à norma de todos os operadores da família.

O fluxograma abaixo mostra as etapas deste trabalho.

Figura 1: Etapas do trabalho.



Fonte: De autoria própria.

De forma mais detalhada, no Capítulo 1 apresentamos objetos mais gerais, cuja familiaridade com os mesmos nos permite definir os principais objetos do texto, como por exemplo espaços normados, topologia e espaços de Banach.

No Capítulo 2, abordamos o conceito de operadores lineares contínuos, a demonstração do Teorema de Banach-Steinhaus e algumas consequências (aplicações).

1. ESPAÇO VETORIAL NORMADO

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e conceitos primordiais para os capítulos posteriores. Este capítulo está dividido em três seções. A Seção 1.1 consiste da definição de espaços normados e alguns exemplos. Na Seção 1.2, se faz presente alguns elementos como conjunto aberto, fechado e compacto, que são essenciais no estudo de topologia, seguido de alguns resultados elementares. Por fim, na Seção 1.3, é apresentado o conceito de espaço completo (ou Banach), que consiste do “ambiente” em que é estabelecido o resultado principal deste trabalho, o Teorema de Banach-Steinhaus.

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1.1 (Espaço vetorial). *Seja V um conjunto não vazio. Dizemos que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se for munido de duas operações $+$: $V \times V \rightarrow V$ (adição) e $\cdot$: $V \times \mathbb{K} \rightarrow V$ (multiplicação por um escalar) que satisfazem:*

1. (Comutatividade) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$;
2. (Associatividade) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$;
3. (Existência do elemento nulo) existe um elemento $0 \in V$ tal que

$$u + 0 = u, \forall u \in V;$$

4. (Existência do inverso aditivo) para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que

$$u + v = 0.$$

Neste caso, o elemento v é denotado por $-u$;

5. (Associatividade) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V$;
6. (Elemento identidade da multiplicação por escalar) $1 \cdot u = u, \forall u \in V$;
7. (Distributividade em relação à adição de vetores) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V$;
8. (Distributividade em relação à adição no corpo) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V$.

Observação 1.1.2. Ao longo deste trabalho, $\mathbb{K}$ denotará o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$. Além disso, ao considerar um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, diremos simplesmente espaço vetorial, a menos que seja necessário.

Observação 1.1.3. *Os elementos de um espaço vetorial V são chamados de vetores. Também vale ressaltar que em uma multiplicação de um vetor $u \in V$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, por simplicidade, denotaremos $\alpha \cdot u$ por αu .*

Observação 1.1.4. *É importante destacar que as operações $+: V \times V \rightarrow V$ e $\cdot: V \times \mathbb{K} \rightarrow V$ deixam subentendido que para V ser um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é necessário que os elementos $u + v$ e αu sejam vetores de V , para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.*

A seguir, apresentaremos um exemplo clássico de espaço vetorial.

Exemplo 1.1.5 (Espaço euclidiano). *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ definido da seguinte forma*

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial real (sobre o corpo $\mathbb{R}$), com as seguintes operações

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad e \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Claramente, $x + y$ e αx são vetores de $\mathbb{R}^n$. A seguir, vamos verificar os itens da Definição 1.1.1. Dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, note que

$$1. \quad x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x;$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x + (y + z) &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x + y) + z; \end{aligned}$$

$$3. \quad x + 0 = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n) = x;$$

$$4. \quad x + (-x) = (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) = (0, 0, \dots, 0) = 0;$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \alpha(\beta x) &= \alpha(\beta x_1, \dots, \beta x_n) = (\alpha(\beta x_1), \dots, \alpha(\beta x_n)) \\ &= ((\alpha\beta)x_1, \dots, (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta)(x_1, \dots, x_n) \\ &= (\alpha\beta)x; \end{aligned}$$

$$6. \quad 1x = (1x_1, \dots, 1x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x;$$

$$\begin{aligned} 7. \quad \alpha(x + y) &= \alpha(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \dots, \alpha(x_n + y_n)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\ &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) \\ &= \alpha x + \alpha y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad (\alpha + \beta)x &= ((\alpha + \beta)x_1, \dots, (\alpha + \beta)x_n) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1, \dots, \alpha x_n + \beta x_n) \\
&= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n) \\
&= \alpha x + \beta x.
\end{aligned}$$

Vale ressaltar que o espaço Euclidiano não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Para ver isto, considerando $n = 2$ e $\alpha = i \in \mathbb{C}$, tem-se $\alpha(1, 0) = (i, 0) \notin \mathbb{R}^2$, pois $i \notin \mathbb{R}$.

Definição 1.1.6 (Subespaço Vetorial). *Um subconjunto não-vazio W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial quando,*

- (i) $0 \in W$, em que 0 é o vetor nulo do espaço V ;
- (ii) $u + v \in W$, $\forall u, v \in W$;
- (iii) $\alpha u \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in W$.

É importante mencionar que se W é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V , então W é um espaço vetorial. Considerando que este ponto se afasta do foco central deste trabalho, a demonstração será omitida.

No que segue, precisaremos introduzir o conceito de norma.

Definição 1.1.7 (Espaço normado). *Seja V um espaço vetorial. Uma aplicação $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita norma se satisfaz as condições:*

1. $\|u\|_V \geq 0, \forall u \in V$;
2. $\|u\|_V = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
3. $\|\alpha u\|_V = |\alpha| \|u\|_V, \forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
4. $\|u + v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V, \forall u, v \in V$.

Neste caso, chamamos V de espaço normado e representamos por $(V, \|\cdot\|_V)$. Por simplicidade denotaremos $\|\cdot\|_V$ por $\|\cdot\|$, a menos que seja necessário.

Observação 1.1.8. *Se $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, o termo $|\alpha|$ significa*

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemplo 1.1.9 (Valor absoluto). *A função valor absoluto (ou módulo) definida nos reais por*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{se } \alpha \geq 0, \\ -\alpha, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

define uma norma em $\mathbb{R}$. De fato, mostraremos que a expressão satisfaz as condições da Definição 1.1.7.

1. Se $\alpha \geq 0$, $|\alpha| = \alpha \geq 0$. Por outro lado, para $\alpha < 0$, $|\alpha| = -\alpha > 0$, evidenciando que $|\alpha| \geq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponha que $|\alpha| = 0$. Então, $\alpha = 0$ ou $-\alpha = 0$, restando que $\alpha = 0$. Reciprocamente, se $\alpha = 0$, segue da definição que $|\alpha| = 0$.
3. Sejam $\alpha, c \in \mathbb{R}$. Se $c \geq 0$ e $\alpha \geq 0$, então $c\alpha \geq 0$ e

$$|c||\alpha| = c\alpha = |c\alpha| \geq 0.$$

Caso $c < 0$ e $\alpha \geq 0$, então $c\alpha \leq 0$ e

$$|c||\alpha| = -c\alpha = |c\alpha|.$$

Avaliando analogamente os demais casos, é possível concluir que $|c||\alpha| = |c\alpha|$, qualquer que sejam $\alpha, c \in \mathbb{R}$.

4. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha + \beta \geq 0$, então $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$. Nesse caso, se $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, é imediato que

$$|\alpha + \beta| = \alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|.$$

Ainda, suponha, sem perda de generalidade, que $\beta < 0$. Devemos ter que $\alpha > -\beta$ e $-\beta > \beta$. Portanto,

$$|\alpha + \beta| = \alpha + \beta \leq \alpha - \beta = |\alpha| + |\beta|.$$

Os outros casos, bem como os casos em que $\alpha + \beta < 0$, são análogos e serão omitidos.

Exemplo 1.1.10 (Norma Euclidiana). Um exemplo de norma no espaço $\mathbb{R}^n$, é a norma euclidiana, que é dada por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos verificar que esta função é uma norma.

1. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$, uma vez que $x_i^2 \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$;
2. Se $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = 0$, então

$$0 \leq x_i^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ou seja, $x_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, e assim $x = (0, \dots, 0) = 0$. Reciprocamente, se $x = (0, \dots, 0)$, então $\|x\| = \sqrt{0^2 + \cdots + 0^2} = 0$;

3. Considerando $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$, note que

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \dots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \dots + \alpha^2 x_n^2} = |\alpha| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\alpha| \|x\|;\end{aligned}$$

4. Antes de verificar este item, lembremos da definição de produto interno. Um produto interno de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades:

- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, $\forall u, v \in V$, onde $\bar{\alpha}$ é o conjugado de $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\forall u, v, w \in V$;
- $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
- $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V$, com $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

O produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ é dado pela expressão

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

e, portanto, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Um resultado clássico acerca de produto interno é a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a saber

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Note que, para $x = 0$ ou $y = 0$, a desigualdade acima é imediata. Para verificar sua validade nos demais casos, considere $x, y \neq 0$, de modo que podemos escrever $y = \alpha x + z$, com $\alpha = \langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle$ e z é tomado de forma que $\langle x, z \rangle = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\langle y, y \rangle &= \langle \alpha x + z, \alpha x + z \rangle = \langle \alpha x, \alpha x \rangle + \langle \alpha x, z \rangle + \langle z, \alpha x \rangle + \langle z, z \rangle \\ &= \alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, z \rangle + \langle z, z \rangle = \alpha^2 \langle x, x \rangle + \langle z, z \rangle.\end{aligned}$$

Como $\langle z, z \rangle \geq 0$, temos que

$$\langle y, y \rangle \geq \alpha^2 \langle x, x \rangle = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle^2} \langle x, x \rangle = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle}.$$

Segue imediatamente que

$$|\langle y, y \rangle| |\langle x, x \rangle| \geq |\langle x, y \rangle|^2,$$

garantindo a desigualdade através da substituição das normas de x e y . Finalmente, vamos verificar a desigualdade triangular. Para vetores arbitrários

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Utilizando a desigualdade (1.1), segue que

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

donde

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

No próximo exemplo, será apresentada duas normas clássicas no espaço euclidiano.

Exemplo 1.1.11 (Norma do máximo e da soma). No espaço $\mathbb{R}^n$, temos as normas do máximo e da soma, respectivamente dadas por

$$\|x\|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad e \quad \|x\|_S = |x_1| + \dots + |x_n|, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Mais detalhes dessa informação se encontram em [8, p. 6].

Para abordar o próximo exemplo de norma de forma adequada, precisaremos relembrar a definição de supremo e ínfimo.

Definição 1.1.12 (Supremo). Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq b, \quad \forall x \in X.$$

Neste caso, b é chamado de cota superior de X . Se b for a menor das cotas superiores de X , b é dito supremo de X e será denotado por $b := \sup X$. De forma mais explícita, $b = \sup X$ significa que se existir $c < b$, este valor c não pode ser cota superior de X , o que significa que deve existir $x_c \in X$ tal que $c < x_c$.

Definição 1.1.13 (Ínfimo). Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq x, \quad \forall x \in X.$$

Neste caso, a é chamado de cota inferior de X . Se a for a maior das cotas inferiores de X , a é dito ínfimo de X e será denotado por $a := \inf X$. Dessa maneira, $a = \inf X$ significa que se existir $a < d$, este valor d não pode ser cota inferior de X , ou seja, deve existir $x_d \in X$ tal que $x_d < d$.

Exemplo 1.1.14 (Espaço das funções limitadas). Seja X um conjunto não vazio. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada se existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X.$$

O conjunto

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ é limitada}\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais fornecidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X$$

e

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in X.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(X) &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \end{aligned}$$

é uma norma. De fato,

1. Dado $f \in \mathcal{B}(X)$, temos que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq |f(x)| \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

2. Suponha que $\|f\|_\infty = 0$. Dessa forma, para $x \in X$ arbitrário, tem-se

$$0 = \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq |f(x)| \geq 0,$$

donde $f(x) = 0$. Sendo assim $f = 0$, ou seja, f é a função identicamente nula. Por outro lado, se $f = 0$, isto é, $f(x) = 0, \forall x \in X$, então

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |0| = 0.$$

3. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{B}(X)$. Vamos verificar que

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

O caso $\alpha = 0$ é imediato, pois

$$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{x \in X} |(0 \cdot f)(x)| = \sup_{x \in X} |0f(x)| = 0 = |0| \|f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

Agora, vamos considerar $\alpha \neq 0$. Para $x \in X$ qualquer, note que

$$|(\alpha f)(x)| = |\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)| \leq |\alpha| \|f\|_\infty,$$

isto é $|\alpha| \|f\|_\infty$ é uma cota superior do conjunto $A := \{|(\alpha f)(x)| : x \in X\}$.

Para concluir, deve-se comprovar que $|\alpha|\|f\|_\infty$ é a menor das cotas superior do conjunto A . De fato, seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $k < |\alpha| \|f\|_\infty$. Então,

$$\frac{k}{|\alpha|} < \|f\|_\infty.$$

Usando o fato que $\|f\|_\infty$ é a menor das cotas superiores no conjunto $\{|f(x)| : x \in X\}$, deve existir $x_0 \in X$ tal que

$$\frac{k}{|\alpha|} < |f(x_0)|.$$

Dessa forma,

$$k < |\alpha| |f(x_0)| = |(\alpha f)(x_0)|.$$

Sendo $|(\alpha f)(x_0)| \in A$, podemos concluir que

$$|\alpha|\|f\|_\infty = \sup A = \sup_{x \in X} |(\alpha f)(x)| = \|\alpha f\|_\infty.$$

4. Seja $x \in X$. Dessa forma,

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Como $\|f + g\|_\infty$ é a menor das cotas superiores em relação ao conjunto $\{|(f + g)(x)| : x \in X\}$, tem-se

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Isto prova a desigualdade triangular.

Definição 1.1.15 (Norma induzida). Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e W um subespaço vetorial de V . A norma $\|\cdot\|_W : W \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|u\|_W = \|u\|, \quad \forall u \in W,$$

é dita norma induzida por V .

Exemplo 1.1.16. Considere

$$\mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

Vale relembrar que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x \in [a, b]$, se dado $\epsilon > 0$, é possível obter $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

A função f é dita *contínua* se for contínua em todo $x \in [a, b]$. Pelo Teorema de Weierstrass (veja [7, Teorema 6, p. 80]), se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Notando que

$$|f(x)| = f(x) \leq f(x_2), \quad \text{se } f(x) \geq 0$$

e

$$|f(x)| = -f(x) \leq -f(x_1), \quad \text{se } f(x) < 0,$$

podemos concluir que

$$|f(x)| \leq M := \max\{f(x_2), -f(x_1)\}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Neste caso f é limitada, o que significa que $\mathcal{C}[a, b]$ é um subespaço do espaço normado $\mathcal{B}([a, b])$ (veja definição em Exemplo 1.1.14). Naturalmente, $\mathcal{C}[a, b]$ é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}[a, b].$$

1.2 Topologia de um espaço vetorial normado

Nesta seção será feito um estudo sobre o conceito de topologia, que serve de base para todo o trabalho.

1.2.1 Conjunto aberto e fechado

Definição 1.2.1 (Bola aberta, fechada e esfera). *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Considerando $u_0 \in V$ e $r > 0$, os conjuntos*

$$(a) \ B(u_0; r) := \{u \in V : \|u - u_0\| < r\};$$

$$(b) \ B[u_0; r] := \{u \in V : \|u - u_0\| \leq r\};$$

$$(c) \ S(u_0; r) := \{u \in V : \|u - u_0\| = r\},$$

são chamados de *bola aberta*, *bola fechada* e *esfera*, respectivamente. Além disso, u_0 é dito *centro da bola* e r o *raio da bola* (ou *esfera*).

Definição 1.2.2 (Ponto interior). *Sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $X \subset V$. Dizemos que o vetor $v \in V$ é um *ponto interior* de X , se existe $r = r(v) > 0$, tal que*

$$B(v; r) \subset X.$$

Neste caso, denotamos o conjunto interior de X por

$$\text{int}(X) := \{v \in V : v \text{ é ponto interior de } X\}.$$

Definição 1.2.3 (Conjunto aberto). *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Dizemos que $A \subset V$ é aberto, quando $A \subset \text{int}(A)$.*

Exemplo 1.2.4 (Bola aberta é aberta). *Considere a bola aberta $B = B(u_0; r_0) \subset V$, onde V é um espaço vetorial normado. Tomando $u \in B$ arbitrariamente, precisamos mostrar que existe uma bola aberta com centro em u contida em B . Seja $d := \|u_0 - u\| < r_0$ e defina $r = r_0 - d > 0$. Afirmamos que $B(u; r) \subset B$. De fato, se $v \in B(u; r)$, então*

$$\|v - u_0\| = \|v - u + u - u_0\| \leq \|v - u\| + \|u - u_0\| < r + d = r_0,$$

ou seja, $v \in B$, de modo que B é um conjunto aberto.

Exemplo 1.2.5 (Interseção finita de abertos é aberto). *Seja V um espaço normado. Se $A \subset V$ e $B \subset V$ são conjuntos abertos, então $A \cap B$ é um conjunto aberto. De fato, tome $u \in A \cap B$. Como $u \in A$ e $u \in B$, existem $r_1, r_2 > 0$ tais que*

$$B(u; r_1) \subset A \quad \text{e} \quad B(u; r_2) \subset B.$$

Tomando $r := \min\{r_1, r_2\}$, teremos que

$$B(u; r) \subset B(u; r_1) \subset A \quad \text{e} \quad B(u; r) \subset B(u; r_2) \subset B.$$

Ora, isso nos diz que

$$B(u; r) \subset A \cap B,$$

donde $u \in \text{int}(A \cap B)$. Como u é arbitrário, segue que $A \cap B$ é um conjunto aberto.

A próxima definição é crucial para definir conjunto fechado.

Definição 1.2.6 (Ponto aderente). *Sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $X \subset V$. Dizemos que $v \in V$ é ponto aderente de X , se dado $r > 0$ qualquer, tem-se*

$$B(v; r) \cap X \neq \emptyset.$$

Neste caso, denotamos o fecho de X por

$$\overline{X} := \{v \in V : v \text{ é ponto aderente de } X\}.$$

Observação 1.2.7. *Observe que $X \subset \overline{X}$, qualquer que seja $X \subset V$, em que V é um espaço normado. Isso ocorre, pois dado $u \in X$, temos que $u \in B(u; r) \cap X$,*

qualquer que seja $r > 0$. Isto é,

$$B(u; r) \cap X \neq \emptyset, \quad \forall r > 0,$$

evidenciando que $u \in \overline{X}$.

Definição 1.2.8 (Conjunto fechado). *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Dizemos que $F \subset V$ é fechado, quando $\overline{F} \subset F$.*

Exemplo 1.2.9 (Bola fechada é fechada). *Considere $F = B[u_0; r_0]$, para algum $u_0 \in V$ e $r_0 > 0$, em que V é um espaço normado. Mostraremos que F é fechado. Para fazer isso, seja $u \in \overline{F}$. Consequentemente, $B(u; r) \cap F \neq \emptyset$, para todo $r > 0$. Sendo assim, para cada $r > 0$, obtemos $v_r \in B(u; r) \cap F$. Logo,*

$$\|u - u_0\| \leq \|u - v_r\| + \|v_r - u_0\| < r + r_0,$$

donde

$$\|u - u_0\| < r + r_0, \quad \forall r > 0.$$

Tomando o limite $r \rightarrow 0$, podemos concluir que $\|u - u_0\| \leq r_0$, e daí $u \in B[u_0; r_0] = F$. Portanto, F é fechado.

Exemplo 1.2.10 (Interseção arbitrária de fechados é fechado). *Seja Γ um conjunto (finito ou infinito) de índices. Considere V um espaço normado e uma família de conjuntos $\{F_i\}_{i \in \Gamma}$, onde $F_i \subset V$ é fechado, qualquer que seja $i \in \Gamma$. Afirmamos que $F := \bigcap_{i \in \Gamma} F_i$ é fechado. Para comprovar essa afirmação, tome $u \in \overline{F}$. Logo,*

$$B(u; r) \cap F \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Sendo assim, para $r > 0$ qualquer, existe $v_r \in B(u; r) \cap F$. Como $F \subset F_i$, para todo $i \in \Gamma$, temos que $v_r \in F_i$, para qualquer $i \in \Gamma$, ou seja,

$$B(u; r) \cap F_i \neq \emptyset, \quad \forall r > 0, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Em outras palavras, $u \in \overline{F_i}$, para todo $i \in \Gamma$, e sendo cada F_i fechado, temos que $u \in F_i$, para todo $i \in \Gamma$. Portanto, $u \in F$, o que mostra que F de fato é fechado.

Finalizaremos esta subseção com a discussão sobre sequências convergentes e sua relação com o conceito de conjunto fechado.

Definição 1.2.11 (Sequência convergente). *Considere um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$. Uma sequência em V é uma função $v : \mathbb{N} \rightarrow V$, denotada por (v_n) (para mais detalhes veja Exemplo 1.2.12, substituindo $\mathbb{K}$ por V). Dizemos que a sequência (v_n) converge para $v \in V$, se dado $\epsilon > 0$ arbitrário, é possível determinar $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$*

tal que

$$\|v_n - v\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Neste caso, denota-se por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \quad \text{ou} \quad v_n \rightarrow v.$$

Exemplo 1.2.12. Através da definição de sequência convergente, podemos definir o seguinte espaço vetorial:

$$c_0 := \{x = (x_n) \subset \mathbb{K} : x_n \rightarrow 0\}.$$

Este espaço é normado, com respeito a norma a seguir

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n|\}, \quad \forall (x_n) \in c_0. \quad (1.2)$$

Vale destacar que a norma está bem definida, no sentido que o supremo acima existe para cada sequência do espaço c_0 , pois toda sequência convergente é limitada.

A demonstração que a expressão (1.2) é uma norma é similar ao Exemplo 1.1.14, e por isso omitiremos.

Proposição 1.2.13 (Unicidade de limite). Uma sequência (v_n) convergente em um espaço normado V , não pode convergir para dois limites diferentes.

Demonstração. Suponha que (v_n) converge simultaneamente para $u \in V$ e $v \in V$. Mostraremos que $u = v$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, podemos obter $N_u = N_u(\epsilon) \in \mathbb{N}$ e $N_v = N_v(\epsilon) \in \mathbb{N}$ que satisfaçam

$$\|v_n - u\| < \epsilon, \quad \forall n \geq N_u \quad \text{e} \quad \|v_n - v\| < \epsilon, \quad \forall n \geq N_v.$$

Definindo $n_0 := \max\{N_u, N_v\}$, se $n \geq n_0$, podemos concluir que

$$\|u - v\| = \|u - v_{n_0} + v_{n_0} - v\| \leq \|u - v_{n_0}\| + \|v_{n_0} - v\| < 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tomando $\epsilon \rightarrow 0^+$, segue que $\|u - v\| = 0$, isto é, $u = v$. $\square$

Definição 1.2.14 (Subsequência). Considere um espaço normado V e uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$. A restrição de $v : \mathbb{N} \rightarrow V$ ao subconjunto infinito

$$\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

é dita ser uma subsequência de (v_n) e denota-se por $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Na próxima observação, veremos que se uma sequência converge em um espaço normado, toda subsequência converge para o mesmo elemento.

Proposição 1.2.15. *Seja V um espaço vetorial normado e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma sequência que converge para $v \in V$. Considere $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então,*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}'} = v.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n - v\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Escolhendo $n'_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n'_0 \geq n_0$, segue que

$$\|v_n - v\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n'_0.$$

Portanto, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ converge para $v \in V$. □

Finalmente, diante do conceito de sequência convergente em espaços normados, temos o seguinte resultado de caracterização.

Proposição 1.2.16. *Seja $X \subset V$, em que V é um espaço normado. Então, $v \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência $(v_n) \subset X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$.*

Demonstração. Seja $v \in \overline{X}$ arbitrário. Dessa forma,

$$B\left(v; \frac{1}{n}\right) \cap X \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, podemos construir uma sequência (v_n) onde

$$v_n \in B\left(v; \frac{1}{n}\right) \cap X, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Em outras palavras,

$$0 \leq \|v_n - v\| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$.

Reciprocamente, suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Logo, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$\|v_n - v\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ora, isso nos diz que

$$v_n \in B(v; \epsilon) \cap X, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $B(v; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ qualquer que seja $\epsilon > 0$. Por definição, $v \in \overline{X}$. O resultado está demonstrado. □

1.2.2 Conjunto compacto

Definição 1.2.17 (Conjunto compacto). *Seja V um espaço normado. Um subconjunto K de V é dito compacto, se toda sequência $(v_n) \subset K$ admite uma subsequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ que converge para algum $v \in K$.*

O próximo resultado fornece algumas características de um conjunto compacto.

Proposição 1.2.18. *Seja V um espaço normado. Se $K \subset V$ é compacto, então K é limitado e fechado.*

Demonstração. Seja $K \subset V$ compacto. Afirmamos, primeiro, que K deve ser limitado. Suponha por absurdo que K não é limitado. Dessa forma, para cada $L > 0$, é possível obter $x_L \in K$ tal que

$$\|x_L\| > L.$$

Fazendo $L = 1, 2, \dots, n, \dots$ obtemos uma sequência $(v_n) \subset K$ satisfazendo

$$\|v_n\| > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Usando a compacidade de K , podemos concluir que existe uma subsequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ que converge para algum $v \in K$. Dessa maneira, para $\epsilon = 1 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}'$ tal que

$$\|v_n - v\| < 1, \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } n \in \mathbb{N}'.$$

Sendo assim, pela desigualdade $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in V$, segue que

$$\|v_n\| - \|v\| \leq \|v_n - v\| < 1, \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } n \in \mathbb{N}',$$

donde

$$\|v_n\| < 1 + \|v\|, \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } n \in \mathbb{N}'. \quad (1.4)$$

Como $\mathbb{N}'$ é ilimitado, existe $n_1 \in \mathbb{N}'$ e $n_1 \geq n_0$, em que $n_1 > 1 + \|v\|$. Isso combinado com (1.3) e (1.4), implica que

$$1 + \|v\| < n_1 < \|v_{n_1}\| < 1 + \|v\|.$$

O que é uma contradição, e portando K deve ser limitado.

Resta mostrar que K é fechado, isto é, $\overline{K} \subset K$. Para isso, tome $v \in \overline{K}$. Pela Proposição 1.2.16, existe uma sequência (v_n) em K tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Como K é compacto, existe uma subsequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de (v_n) , que converge para $u \in K$. Levando em conta as Proposições 1.2.13 e 1.2.15, podemos concluir que $v = u \in K$. Sendo assim $\overline{K} \subset K$, finalizando a demonstração. $\square$

A recíproca da Proposição 1.2.18 em geral é falsa. A seguir, veremos que a recíproca se aplica em espaços de dimensão finita. Antes, precisaremos do seguinte lema.

Lema 1.2.19. *Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço normado V . Então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$(|a_1| + \dots + |a_r|) \leq c \|a_1 v_1 + \dots + a_r v_r\|,$$

quaisquer que sejam os escalares $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$.

Demonstração. [1, Teorema 8.7, p. 122]. □

Proposição 1.2.20. *Seja V um espaço normado de dimensão finita. Se $K \subset V$ é fechado e limitado, então K é compacto.*

Demonstração. Seja V um espaço normado com $\dim V = r$. Dessa forma, podemos considerar $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base de V , em que $\|v_i\| = 1$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Vale relembrar que a definição de base significa o conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ satisfaz as condições:

1. $[v_1, \dots, v_r] := \{a_1 v_1 + \dots + a_r v_r : a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}\} = V$;
2. $\{v_1, \dots, v_r\}$ é um conjunto linearmente independente, isto é,

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0 \implies a_1 = \dots = a_r = 0.$$

Supondo que $K \subset V$ seja um conjunto fechado e limitado, devemos mostrar que K é compacto. Para fazer isso vamos considerar $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência qualquer de elementos em K e obter uma subsequência que converge para algum elemento de K . Como $u_n \in V = [v_1, \dots, v_r]$, podemos concluir que existem $a_1^n, \dots, a_r^n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u_n = a_1^n v_1 + \dots + a_r^n v_r. \tag{1.5}$$

Uma vez que K é limitado, existe um número $L > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Lema 1.2.19, existe $c > 0$ que satisfaz

$$(|a_1^n| + \dots + |a_r^n|) \leq c \|a_1^n v_1 + \dots + a_r^n v_r\| = c \|u_n\| \leq c \cdot L.$$

Como

$$|a_i^n| \leq (|a_1^n| + \dots + |a_r^n|) \leq c \cdot L, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

a sequência $(a_i^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ é limitada, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ fixado. Em particular, para $i = 1$, através do Teorema de Bolzano-Weierstrass ([7, Corolário, p. 30]) a sequência $(a_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergindo para $\beta_1 \in \mathbb{K}$. Mais precisamente, existe $N_1 \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n \in N_1} a_1^n = \beta_1.$$

Por (1.6), temos que $(a_2^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ é limitada, e assim usando novamente o Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtemos $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} a_2^n = \beta_2 \in \mathbb{K}.$$

Em particular, pela Proposição 1.2.15 temos que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} a_1^n = \beta_1.$$

Repetindo o processo até $i = r$, obtemos $\mathbb{N}_r \subset \cdots \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_r} a_i^n = \beta_i, \quad i \in \{1, \dots, r\}. \quad (1.7)$$

Escrevendo

$$w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r \in V,$$

afirmamos que a subsequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_r}$ converge para w . De fato, por (1.5), tem-se

$$\begin{aligned} \|u_n - w\| &= \|(a_1^n v_1 + \cdots + a_r^n v_r) - (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r)\| \\ &= \|(a_1^n - \beta_1)v_1 + \cdots + (a_r^n - \beta_r)v_r\| \\ &\leq \|(a_1^n - \beta_1)v_1\| + \cdots + \|(a_r^n - \beta_r)v_r\|. \end{aligned}$$

Dando continuidade aos cálculos e usando o fato que $\|v_i\| = 1$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, segue que

$$\|u_n - w\| \leq |a_1^n - \beta_1| \|v_1\| + \cdots + |a_r^n - \beta_r| \|v_r\| = |a_1^n - \beta_1| + \cdots + |a_r^n - \beta_r|.$$

Essa estimativa combinada com (1.7) assegura que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_r}$ converge para w . Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_r} \subset K$, segue que $w \in \overline{K}$, e assim $w \in K$, pois K é fechado. Portanto K é compacto. $\square$

Corolário 1.2.21. *A bola unitária fechada $B[0; 1] = \{u \in V : \|u\| \leq 1\}$ é compacta se V possui dimensão finita.*

Demonstração. Vimos que $B[0; 1]$ é fechada no Exemplo 1.2.9. Por outro lado, de forma imediata $B[0; 1]$ é um conjunto limitado por 1. Como V possui dimensão finita, segue da Proposição 1.2.20 que $B[0; 1]$ é compacta, encerrando a demonstração. $\square$

Posteriormente, veremos que a recíproca do Corolário 1.2.21 é verdadeira, porém antes disso precisaremos de dois resultados.

Lema 1.2.22 (Lema de Riesz). *Seja W um subespaço próprio e fechado do espaço normado V e seja $0 < \theta < 1$. Então existe $v \in V \setminus W$ (dependendo de θ) tal que*

$$\|v\| = 1 \text{ e}$$

$$\|v - u\| \geq \theta, \quad \forall u \in W.$$

Demonstração. Como W é um subespaço próprio de V , existe pelo menos um elemento $v_0 \in V \setminus W$. Afirmamos que

$$d := \inf_{u \in W} \|v_0 - u\| > 0. \quad (1.8)$$

Caso contrário $d = 0$. Pela definição de ínfimo, para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in W$ tal que

$$\|v_0 - u_\epsilon\| < d + \epsilon = \epsilon.$$

Dessa forma, fazendo $\epsilon = 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$ obtemos uma sequência $(u_n) \subset W$ tal que

$$\|v_0 - u_n\| < \frac{1}{n}.$$

Tomando $n \rightarrow \infty$, temos que $v_0 \in \overline{W}$ (veja Proposição 1.2.16). Sendo W fechado, então $v_0 \in W$, que é um absurdo, pois $v_0 \notin W$. Logo, $d > 0$.

Prosseguindo, desde que $d < d/\theta$, pela definição de ínfimo, deve existir $u_0 \in W$ tal que

$$0 < d \leq \|v_0 - u_0\| < \frac{d}{\theta}. \quad (1.9)$$

Afirmamos que

$$v := \frac{v_0 - u_0}{\|v_0 - u_0\|}$$

satisfaz as condições suficientes para conclusão do resultado. Primeiramente, note que $\|v\| = 1$. Por outro lado, como W é subespaço vetorial, então $v \notin W$, pois do contrário

$$v_0 = u_0 + \|v_0 - u_0\|v \in W,$$

o que seria uma contradição.

Por fim, vamos verificar que

$$\|v - u\| \geq \theta, \quad \forall u \in W.$$

Para $u \in W$ qualquer, temos que

$$\|v - u\| = \left\| \frac{v_0 - u_0}{\|v_0 - u_0\|} - u \right\| = \left\| \frac{(v_0 - u_0) - \|v_0 - u_0\|u}{\|v_0 - u_0\|} \right\| = \frac{\|v_0 - (u_0 + \|v_0 - u_0\|u)\|}{\|v_0 - u_0\|}.$$

Como $u_0, u \in W$ e W é um subespaço vetorial, temos que $u_0 + \|v_0 - u_0\|u \in W$. Por definição de d (veja (1.8)), segue que

$$d \leq \|v_0 - (u_0 + \|v_0 - u_0\|u)\| = \frac{\|v_0 - (u_0 + \|v_0 - u_0\|u)\|}{\|v_0 - u_0\|} \|v_0 - u_0\| = \|v - u\| \|v_0 - u_0\|,$$

donde

$$\frac{d}{\|v_0 - u_0\|} \leq \|v - u\|.$$

Usando (1.9), podemos concluir que

$$\|v - u\| > \theta,$$

completando a demonstração. $\square$

Lema 1.2.23. *Seja V um espaço normado e $W := [w_1, \dots, w_r] \subset V$. Se $\{w_1, \dots, w_r\}$ é linearmente independente, então W é fechado.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\overline{W} \subset W$. Seja $v \in \overline{W}$. Pela Proposição 1.2.16, existe uma sequência $(u_n) \subset W$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$. Afirmamos que a sequência (u_n) é limitada. Com efeito, para $\epsilon = 1 > 0$ sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n\| - \|v\| \leq \|u_n - v\| < 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

em que usamos a estimativa $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in W$. Dessa forma,

$$\|u_n\| \leq 1 + \|v\|, \quad \forall n \geq n_0.$$

Definindo $C := \max\{\|u\|_1, \dots, \|u\|_{n_0-1}, 1 + \|v\|\}$, segue que

$$\|u_n\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e portanto a afirmação é válida.

Por outro lado, como cada $u_n \in W = \{a_1 w_1 + \dots + a_r w_r : a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}\}$ existem escalares $a_1(n), \dots, a_r(n)$ tais que

$$u_n = a_1(n)w_1 + \dots + a_r(n)w_r. \quad (1.10)$$

Desde que (u_n) é limitada e $\{w_1, \dots, w_r\}$ é linearmente independente, similarmente ao que foi feito na demonstração da Proposição 1.2.20, podemos inferir que existem $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}'} a_i(n) = \beta_i, \quad i \in \{1, \dots, r\},$$

para algum conjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Aplicando o limite em (1.10) e fazendo uso da Proposição 1.2.15, tem-se

$$v = \lim_{n \in \mathbb{N}'} u_n = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r \in W.$$

A prova encerra aqui. $\square$

Finalmente, mostraremos que uma condição necessária e suficiente para que um espaço tenha dimensão finita é que a bola unitária fechada é compacta.

Teorema 1.2.24. *Um espaço normado V tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada $B[0; 1] \subset V$ é compacta.*

Demonstração. Supondo que V tem dimensão finita, pelo Corolário 1.2.21, segue que $B[0; 1] \subset V$ é compacta.

Reciprocamente, assuma que $B[0; 1]$ é compacta. Suponha por contradição que V possui dimensão infinita. Utilizaremos essa condição para construir uma sequência em $B[0; 1]$ que não admite subsequência convergente, o que contraria o fato de $B[0; 1]$ ser compacto. Para isso, tome $u_1 \in V$ com $\|u_1\| = 1$, de modo que $u_1 \in B[0; 1]$. O subespaço gerado por u_1 ,

$$[u_1] = \{\alpha_1 u_1 : \alpha_1 \in \mathbb{K}\},$$

é um subespaço próprio de V , visto que tem dimensão igual a 1. Ainda, por $\{u_1\}$ ser linearmente independente, o mesmo é fechado de acordo com o Lema 1.2.23.

Agora, seja $0 < \theta < 1$. O Lema 1.2.22 nos diz que existe $u_2 \in V \setminus [u_1]$, com $\|u_2\| = 1$, satisfazendo

$$\|u_2 - w\| \geq \theta > 0, \quad \forall w \in [u_1].$$

Como $u_1 = 1u_1 \in [u_1]$, em particular

$$\|u_2 - u_1\| \geq \theta > 0.$$

Visto que $u_2 \notin [u_1]$, podemos concluir que o conjunto $\{u_1, u_2\}$ forma uma base do subespaço

$$[u_1, u_2] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\},$$

e assim esse subespaço tem dimensão 2. Logo, $[u_1, u_2]$ é um subespaço próprio de V , pois V tem dimensão infinita. Usando novamente o Lema 1.2.23, o conjunto $[u_1, u_2]$ é fechado. Mais uma vez o Lema 1.2.22 assegura a existência de $u_3 \in V \setminus [u_1, u_2]$ tal que $\|u_3\| = 1$ e

$$\|u_3 - w\| \geq \theta, \quad \forall w \in [u_1, u_2].$$

Como $u_1 = 1u_1 + 0u_2 \in [u_1, u_2]$ e $u_2 = 0u_1 + 1u_2 \in [u_1, u_2]$, segue que

$$\|u_3 - u_i\| \geq \theta, \quad i = 1, 2.$$

Repetindo o processo, construímos uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B[0; 1]$ tal que

$$\|u_m - u_n\| \geq \theta > 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N} (m \neq n). \quad (1.11)$$

Resta mostrar que essa sequência não admite subsequência convergente. Do contrário,

existiria uma subsequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ convergindo para $u \in B[0; 1]$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existiria $n_0 \in \mathbb{N}'$ tal que

$$\|u_n - u\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0 \ (n \in \mathbb{N}'). \quad (1.12)$$

Em particular, (1.12) seria válido para $\epsilon = \theta/2$. Dessa forma,

$$\|u_m - u_n\| = \|u_m - u + u - u_n\| \leq \|u_m - u\| + \|u - u_n\| < \theta,$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}'$ tal que $m, n \geq n_0$, contrariando (1.11). Isso indica que $B[0; 1]$ não é compacta. Por argumento de contradição, segue que V deve ter dimensão finita. $\square$

1.3 Espaços de Banach

As definições vistas nas seções anteriores nos permite estabelecer um importante ambiente de estudo, onde diversos resultados de caracterização essenciais acontecem. Antes de definir esse ambiente, chamado de espaço de Banach, devemos definir uma nova classe de sequência.

Definição 1.3.1 (Sequência de Cauchy). *Dizemos que uma sequência (u_n) em um espaço normado V é de Cauchy, se dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

O próximo resultado apresenta uma relação entre sequência convergente e de Cauchy.

Proposição 1.3.2. *Toda sequência convergente em um espaço normado V é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Considere $(v_n) \subset V$ uma sequência convergindo para $v \in V$. Devemos mostrar que (v_n) satisfaz a Definição 1.3.1. Para isso, tome $\epsilon > 0$ qualquer. Pela definição de sequência convergente, podemos obter $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$\|v_n - v\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo, se $m, n \geq n_0$, então

$$\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \|v_n - v\| + \|v - v_m\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso encerra o resultado. $\square$

A recíproca da Proposição 1.3.2 é falsa, como veremos a seguir.

Exemplo 1.3.3. Considere o espaço c_0 definido no Exemplo 1.2.12 e o subespaço

$$c_{00} := \{x = (x_n) \in c_0 : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0, \forall n \geq n_0\} \subset c_0.$$

Sejam

$$x_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots\right), \dots, x_k = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots\right).$$

Afirmamos que a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset c_{00}$ é de Cauchy. De fato, basta notar que se $k > i$ (sem perda de generalidade), então

$$\|x_k - x_i\|_\infty = \left\| \left(0, \dots, \frac{1}{i+1}, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots\right) \right\|_\infty = \frac{1}{i+1} \rightarrow 0,$$

se $i \rightarrow \infty$.

Além disso, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset c_{00}$ converge para $x = (1/k)_{k \in \mathbb{N}}$. Com efeito,

$$\|x_k - x\|_\infty = \left\| \left(0, \dots, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, 0, \dots\right) \right\|_\infty = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Mas $x \notin c_{00}$, ou seja, mesmo sendo de Cauchy, a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset c_{00}$ não converge para nenhum elemento de c_{00} .

Logo mais, veremos que temos uma classe especial de conjuntos no qual, toda sequência de Cauchy converge para um elemento no conjunto “referência”.

Definição 1.3.4 (Espaço de Banach). Um espaço vetorial normado V é dito ser um espaço de Banach, ou espaço completo, se toda sequência de Cauchy em V é convergente para algum elemento de V .

Exemplo 1.3.5 (O corpo $\mathbb{K}$). A reta real $\mathbb{R}$ com a norma usual do módulo e os complexos $\mathbb{C}$, com a norma dada na Observação 1.1.8, são espaços completos. Veja [9, Proposição 5, p. 165].

Exemplo 1.3.6 (Espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$). O espaço $\mathbb{R}^2$ é completo com a norma euclidiana, pois herda a completude da reta real, uma vez que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Em geral, isso vale para o $\mathbb{R}^n$. Veja [9, Proposição 7 e Corolário 1, p. 166].

Exemplo 1.3.7. O espaço normado c_0 , visto no Exemplo 1.2.12, é um espaço de Banach. A demonstração desse fato consiste em tomar uma sequência de Cauchy arbitrária nesse espaço e mostrar que ela converge para algum elemento em c_0 . Sendo assim, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset c_0$ uma sequência de Cauchy, onde

$$x_n = (x_1^n, \dots, x_k^n, \dots).$$

Note que para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$|x_k^n - x_k^m| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^n - x_k^m| = \|x_n - x_m\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{quando } n, m \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Assim, podemos concluir que para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência $(x_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ é de Cauchy. Sendo $\mathbb{K}$ completo, podemos obter $y_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$|x_k^n - y_k| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Afirmamos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $y = (y_1, \dots, y_k, \dots)$. De fato, por (1.13), dado $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos concluir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_k^n - x_k^m| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Usando a convergência acima (passando a uma subsequência se necessário), tem-se

$$|x_k^n - y_k| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Por definição de supremo,

$$\|x_n - y\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^n - y_k| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

o que prova a afirmação. Pela desigualdade acima, pode-se inferir que

$$|(x_k^{n_0} - y_k) - 0| = |x_k^{n_0} - y_k| \leq \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

o que acarreta que a sequência $x_{n_0} - y = (x_1^{n_0} - y_1, \dots, x_k^{n_0} - y_k, \dots)$ é um elemento de c_0 . Portanto, $y = (y - x_{n_0}) + x_{n_0} \in c_0$, e assim a completude de c_0 está comprovada.

Além de nos auxiliar nas definições, os resultados das seções anteriores nos permite caracterizar os espaços de Banach, relacionando-os com conceitos anteriores. Como exemplo disso, o próximo resultado associa espaço de Banach com conjunto fechado.

Proposição 1.3.8. *Seja V um espaço de Banach e W um subespaço vetorial de V . Então W é um espaço de Banach com a norma induzida de V se, e somente se, W é fechado em V .*

Demonstração. Suponha que W seja um espaço de Banach. Vamos mostrar que $\overline{W} \subset W$. Com esse intuito, note que ao tomar $v \in \overline{W}$ podemos obter, através da Proposição 1.2.16, uma sequência $(v_n) \subset W$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0.$$

A Proposição 1.3.2 indica que (v_n) é uma sequência de Cauchy em V e, consequentemente, em W . Como W é um espaço de Banach, obtemos $u \in W$ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Todavia, a unicidade do limite nos diz que $v = u \in W$ (veja Proposição 1.2.13). Como v foi tomado arbitrariamente, temos que $\overline{W} \subset W$, e portanto W é fechado.

Reciprocamente, seja $W \subset V$ fechado em V . Afirmamos que toda sequência de Cauchy em W converge para algum elemento de W . De fato, seja $(v_n) \subset W \subset V$ uma sequência de Cauchy. Uma vez que V é um espaço de Banach, obtemos $v \in V$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0.$$

Utilizando novamente a Proposição 1.2.16, notamos que $v \in \overline{W}$. Ora, W ser fechado nos diz que $v \in W$, mostrando que W é um espaço de Banach. O resultado está provado. $\square$

2. OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS

Neste capítulo, mais precisamente na Seção 2.3, está o resultado principal do trabalho, a saber, o Teorema de Banach-Steinhaus. As demais seções tratam de definições e resultados essenciais acerca de operadores lineares contínuos em espaços normados, objetos aos quais o Teorema de Banach-Steinhaus se aplica. De forma mais específica, a Seção 2.1 traz uma definição desse objeto, bem como alguns exemplos que buscam esclarecer seu significado. A Seção 2.2 relata um breve estudo voltado para caracterização de operadores lineares contínuos, visando os resultados essenciais para a compreensão do teorema principal.

2.1 Conceitos preliminares

Definição 2.1.1 (Operador linear contínuo). *Sejam $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Um operador linear é uma aplicação $T : V \rightarrow W$ que satisfaz:*

$$(a) \quad T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in V;$$

$$(b) \quad T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in V.$$

Um operador linear contínuo é um operador linear $T : V \rightarrow W$ no qual, dados $u_0 \in V$ e $\epsilon > 0$ arbitrários, podemos encontrar $\delta = \delta(u_0, \epsilon) > 0$ tal que

$$\|u - u_0\|_V < \delta \implies \|T(u) - T(u_0)\|_W < \epsilon.$$

Definição 2.1.2 (Espaço de operadores lineares contínuos). *O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de V em W é escrito como*

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \rightarrow W \text{ tal que } T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Quando $V = W$, denota-se por $\mathcal{L}(V)$.

Exemplo 2.1.3 (Operador nulo). *O operador nulo de V em W , isto é,*

$$\begin{aligned} T_0 : V &\rightarrow W \\ u &\mapsto T_0(u) = 0, \end{aligned}$$

é um operador linear contínuo. De fato,

$$(a) \quad \text{Para todo } u, v \in V,$$

$$T_0(u + v) = 0 = 0 + 0 = T_0(u) + T_0(v);$$

(b) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$,

$$T_0(\alpha u) = 0 = \alpha 0 = \alpha T_0(u).$$

Ou seja, T_0 é um operador linear. Para mostrar que T_0 é contínuo, seja $u_0 \in V$. Dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \epsilon > 0$, temos que se $\|u - u_0\| < \delta$, então

$$\|T_0(u) - T_0(u_0)\| = \|0\| = 0 < \epsilon.$$

Portanto, $T_0 \in \mathcal{L}(V, W)$. Em geral, T_0 é denotado por 0 .

Exemplo 2.1.4 (Operador identidade). O operador identidade

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ u &\mapsto T(u) = u, \end{aligned}$$

satisfaz:

(a) para quaisquer $u, v \in V$, tem-se

$$T(u + v) = u + v = T(u) + T(v);$$

(b) para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$,

$$T(\alpha u) = \alpha u = \alpha T(u).$$

Assim, T é um operador linear. Além disso, T é um operador contínuo. Com efeito, dado quaisquer $\epsilon > 0$ e $u_0 \in V$, podemos fazer $\delta = \epsilon$ de modo que

$$\|u - u_0\| < \delta \implies \|T(u) - T(u_0)\| = \|u - u_0\| < \delta = \epsilon.$$

Conclui-se que $T \in \mathcal{L}(V)$. Representaremos o operador identidade por I .

Exemplo 2.1.5. Considere o produto interno do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, lembrado no item 4 do Exemplo 1.1.10. Ao fixarmos um vetor não nulo $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, podemos definir o operador

$$\begin{aligned} T_y : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto T_y(x) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Mostraremos que $T_y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Primeiramente, verificaremos que T_y é linear. Ora, T_y satisfaz:

(a) para quaisquer vetores $x = (x_1, x_2, x_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned} T_y(x + z) &= \langle x + z, y \rangle = (x_1 + z_1)y_1 + (x_2 + z_2)y_2 + (x_3 + z_3)y_3 \\ &= x_1y_1 + z_1y_1 + x_2y_2 + z_2y_2 + x_3y_3 + z_3y_3 \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3) = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \\ &= T_y(x) + T_y(z); \end{aligned}$$

(b) para qualquer vetor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T_y(\alpha x) = \langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + (\alpha x_3)y_3 = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3),$$

donde

$$T_y(\alpha x) = \alpha \langle x, y \rangle = \alpha T_y(x).$$

Portanto, T_y é um operador linear.

Além disso, T_y é um operador contínuo. Considere $x \in \mathbb{R}^3$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Definindo $\delta = \epsilon/\|y\| > 0$, fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.1), conclui-se que se

$$\|z - x\| < \delta,$$

então

$$|T_y(z) - T_y(x)| = |T_y(z - x)| = |\langle z - x, y \rangle| \leq \|z - x\| \|y\| < \delta \|y\| = \epsilon.$$

Portanto, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Na observação a seguir, veremos que o conjunto de operadores lineares contínuos tem uma estrutura de espaço vetorial.

Observação 2.1.6. Sejam $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Com as seguintes operações

$$(T + S)(u) = T(u) + S(u) \quad e \quad (\alpha T)(u) = \alpha T(u), \quad \forall u \in V,$$

$\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. De fato, sabemos que $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ (operador nulo) pelo Exemplo 2.1.3.

Agora, sejam $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$. Então, $T + S$ satisfaz os itens:

(a) para quaisquer $u, v \in V$ tem-se

$$\begin{aligned} (T + S)(u + v) &= T(u + v) + S(u + v) = T(u) + T(v) + S(u) + S(v) \\ &= (T(u) + S(u)) + (T(v) + S(v)) \\ &= (T + S)(u) + (T + S)(v); \end{aligned}$$

(b) para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$ segue que

$$\begin{aligned}(T + S)(\alpha u) &= T(\alpha u) + S(\alpha u) = \alpha T(u) + \alpha S(u) = \alpha(T(u) + S(u)) \\ &= \alpha(T + S)(u).\end{aligned}$$

Sendo assim $T + S$ é um operador linear.

Finalmente, resta verificar que $T + S$ é contínuo. Para confirmar isso, tome qualquer $\epsilon > 0$ e $u_0 \in V$. Uma vez que $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, temos que T e S são contínuos, de modo que existem $\delta_T = \delta_T(\epsilon, u_0) > 0$ e $\delta_S = \delta_S(\epsilon, u_0) > 0$ tais que

$$\|u - u_0\| < \delta_T \implies \|T(u) - T(u_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\|u - u_0\| < \delta_S \implies \|S(u) - S(u_0)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Definimos $\delta = \min\{\delta_T, \delta_S\} > 0$, de forma que

$$\|u - u_0\| < \delta \implies \begin{cases} \|T(u) - T(u_0)\| < \frac{\epsilon}{2}, \\ \|S(u) - S(u_0)\| < \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

Com isso, se $\|u - u_0\| < \delta$, então

$$\begin{aligned}\|(T + S)(u) - (T + S)(u_0)\| &= \|T(u) + S(u) - T(u_0) - S(u_0)\| \\ &= \|T(u) - T(u_0) + S(u) - S(u_0)\| \\ &\leq \|T(u) - T(u_0)\| + \|S(u) - S(u_0)\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Logo, $T + S$ é contínuo em u_0 . Como u_0 foi tomado arbitrariamente, segue que $T + S$ é contínuo. De forma similar, $\alpha T \in \mathcal{L}(V, W)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Pela Definição 1.1.6, juntamente do fato de que subespaços vetoriais são espaços vetoriais, concluímos a afirmação.

No que segue, encerraremos essa seção com algumas definições e observações.

Definição 2.1.7 (Espaço dual). O espaço dual de um espaço normado V é definido por $V' := \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$.

Definição 2.1.8 (Isomorfismo). Um isomorfismo entre dois espaços normados V e W é um operador linear contínuo $T : V \rightarrow W$ bijetor, tal que sua inversa $T^{-1} : W \rightarrow V$ é contínua. Dois espaços V e W são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles, e denota-se por $V \cong W$.

Observação 2.1.9. Se $T : V \rightarrow W$ é um operador linear bijetor, então é possível concluir que $T^{-1} : W \rightarrow V$ é um operador linear. Efetivamente, sejam $w_1, w_2 \in W$ e

$\alpha \in \mathbb{K}$. Como T é sobrejetor, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Daí,

$$\begin{aligned} T^{-1}(w_1 + w_2) &= T^{-1}(T(v_1) + T(v_2)) = T^{-1}(T(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 \\ &= T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

Além disso,

$$T^{-1}(\alpha w_1) = T^{-1}(\alpha T(v_1)) = T^{-1}(T(\alpha v_1)) = \alpha v_1 = \alpha T^{-1}(w_1),$$

indicando que T^{-1} é um operador linear.

Definição 2.1.10 (Isometria). Considere a aplicação $f : V \rightarrow W$, em que V e W são espaços normados. Dizemos que f preserva a distância quando

$$\|f(u)\|_W = \|u\|_V, \quad \forall u \in V.$$

Neste caso, chamamos f de isometria. Se f é também linear, dizemos que f é uma isometria linear.

Observação 2.1.11. Toda isometria linear é injetiva e contínua. De fato, seja $T : V \rightarrow W$ uma isometria linear. Verificaremos primeiro que T é injetiva. Para isso, consideramos $T(u) = T(v)$ e mostraremos que $u = v$. Note que

$$T(u) - T(v) = 0 \implies \|T(u) - T(v)\| = 0,$$

em que usamos a propriedade 2 de norma (veja Definição 1.1.7). Sendo T isometria, segue que

$$0 = \|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| = \|u - v\|,$$

e assim $u = v$, pela mesma propriedade.

Resta mostrar que T é contínua. Com esse objetivo, tome $\epsilon > 0$ e $u_0 \in V$. Logo, escolhendo $\delta = \epsilon > 0$, conclui-se que

$$\|u - u_0\| < \delta \implies \|T(u) - T(u_0)\| = \|T(u - u_0)\| = \|u - u_0\| < \epsilon.$$

Portanto, T é contínuo, finalizando a verificação da afirmação.

2.2 Caracterização dos operadores lineares contínuos

Como mencionado anteriormente, essa seção contém resultados que ocorrem devido à natureza dos operadores lineares contínuos. O teorema que segue trata de um resultado de caracterização, o qual promove formas alternativas de verificar se um operador é contínuo.

Teorema 2.2.1. Sejam V e W espaços normados e $T : V \rightarrow W$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) T é contínuo;
- (ii) T é contínuo na origem;
- (iii) $\sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\| < \infty$;
- (iv) existe uma constante $C = C(T) \geq 0$ tal que

$$\|T(u)\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Demonstração. Verificaremos as implicações.

(i) $\implies$ (ii): É imediato.

(ii) $\implies$ (iii): Considere $\epsilon = 1$. Como T é contínuo na origem, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\| = \|u - 0\| < \delta \implies \|T(u)\| = \|T(u) - T(0)\| < 1.$$

Agora, seja $u \in V$ arbitrário com $\|u\| \leq 1$. Desde que $\|(\delta/2)u\| \leq \delta/2 < \delta$, a implicação acima nos indica que

$$\frac{\delta}{2}\|T(u)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2}u\right) \right\| < 1.$$

Ou seja,

$$\|T(u)\| \leq \frac{2}{\delta}, \quad \forall u \in V \text{ tal que } \|u\| \leq 1.$$

Com isso, (iii) é válido se (ii) ocorre.

(iii) $\implies$ (iv): Seja $v \in V$. Caso $v = 0$ a desigualdade é imediata. Suponha que $v \neq 0$. Neste caso, $\|v/\|v\|\| = 1$ e pelo item (iii) podemos concluir que

$$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \leq \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\|,$$

em que usamos a linearidade de T . Consequentemente,

$$\|T(v)\| \leq \left(\sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\| \right) \|v\|,$$

encerrando a verificação do item (iv).

(iv) $\implies$ (i): Seja $u_0 \in V$. Para todo $u \in V$, temos que $(u - u_0) \in V$. Portanto, utilizando a hipótese,

$$\|T(u) - T(u_0)\| = \|T(u - u_0)\| \leq C\|u - u_0\|.$$

Para mostrar que T é contínuo, tome $\epsilon > 0$. Escrevendo $\delta = \epsilon/C > 0$, se $\|u - u_0\| <$

δ , então

$$\|T(u) - T(u_0)\| \leq C\|u - u_0\| < C\delta = \epsilon.$$

Portanto (i) ocorre e a demonstração desse teorema está finalizada. $\square$

Daremos um exemplo da praticidade do resultado anterior para averiguar a continuidade de operadores lineares.

Exemplo 2.2.2. O Teorema 2.2.1 nos fornece uma maneira mais direta de mostrar a continuidade do operador $T_y(x) = \langle x, y \rangle$, citado no Exemplo 2.1.5. Basta relembrar que a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que

$$|T_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Fazendo $C = \|y\|$ no Teorema 2.2.1 (item (iv)), a continuidade segue imediatamente.

O próximo exemplo trata de um operador que não é contínuo.

Exemplo 2.2.3. Considere o subespaço de $\mathcal{C}[0, 1]$, formado pelas funções polinomiais,

$$\mathcal{P}[0, 1] := \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Defina o operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P}[0, 1] &\rightarrow \mathcal{P}[0, 1] \\ f &\mapsto T(f) = f', \end{aligned}$$

em que f' representa a derivada de f . Claramente T é um operador linear, pelas propriedades de derivação.

Afirmamos que T não é um operador contínuo. Do contrário, pelo Teorema 2.2.1, existe $C > 0$ tal que

$$\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{P}[0, 1]. \quad (2.1)$$

Considerando para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) := x^n$, $\forall x \in [0, 1]$, temos que $f_n \in \mathcal{P}[0, 1]$. Além disso, $T(f_n)(x) = nx^{n-1}$. Sendo assim

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1$$

e

$$\|T(f_n)\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |nx^{n-1}| = n.$$

Por (2.1),

$$n \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso é uma contradição, e portanto T não pode ser um operador contínuo.

Uma consequência do Teorema 2.2.1 estabelece uma caracterização de espaços isomorfos partindo de certas estimativas.

Corolário 2.2.4. *Seja $T : V \rightarrow W$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então, T é isomorfismo se, e somente se, existem constantes $C, D > 0$ tais que*

$$C\|u\| \leq \|T(u)\| \leq D\|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Demonstração. Seja T um isomorfismo. Vimos na Observação 2.1.9 que todo operador inverso de um operador linear é também linear, isto é, T e T^{-1} são lineares. Ainda, T e T^{-1} são contínuos pela definição de isomorfismo. Logo, o Teorema 2.2.1 garante a existência de $C_1, C_2 \geq 0$ tais que

$$\|T^{-1}(w)\| \leq C_1\|w\|, \quad \forall w \in W \quad \text{e} \quad \|T(u)\| \leq C_2\|u\|, \quad \forall u \in V. \quad (2.2)$$

Afirmamos que $C_1, C_2 > 0$. Se $C_2 = 0$, então $T(u) = 0$, para todo $u \in V$, de forma que se $w \in W \setminus \{0\}$, então $0 = T(T^{-1}(w)) = w$, o que é uma contradição. Caso $C_1 = 0$, de forma similar também chegaríamos em uma contradição. Logo a afirmação está verificada.

Agora, considere $u \in V$ arbitrário. Portanto,

$$C_1\|u\| = C_1\|T^{-1}(T(u))\| \leq C_1 \cdot C_2\|T(u)\|,$$

em que substituímos w por $T(u)$ em (2.2). Dessa forma,

$$\frac{1}{C_1}\|u\| \leq \|T(u)\|.$$

Essa desigualdade combinada com (2.2) implica que

$$C\|u\| \leq \|T(u)\| \leq D\|u\|, \quad \forall u \in V,$$

com $C = 1/C_1 > 0$ e $D = C_2 > 0$.

Reciprocamente, suponha que existam $C, D > 0$ tais que

$$C\|u\| \leq \|T(u)\| \leq D\|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Pelo Teorema 2.2.1, segue que T é contínuo. Ainda pelas estimativas acima, tem-se

$$\|u\| \leq \frac{1}{C}\|T(u)\| \implies \|T^{-1}(w)\| \leq \frac{1}{C}\|w\|, \quad (w = T(u)).$$

Novamente, pelo Teorema 2.2.1, T^{-1} é contínuo, e portanto T é um isomorfismo. O resultado está finalizado. $\square$

Uma contribuição relevante do Teorema 2.2.1 é poder estabelecer uma norma para o espaço $\mathcal{L}(V, W)$.

Proposição 2.2.5. *Considere os espaços vetoriais normados V e W . A expressão*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\|$$

define uma norma no espaço vetorial $\mathcal{L}(V, W)$. Por simplicidade, denotaremos essa norma por $\|T\|$.

Demonstração. Verificaremos os itens da Definição 1.1.7.

1. Observe que

$$\|T\| \geq 0, \quad \forall T \in \mathcal{L}(V, W).$$

De fato, seja $u \in V$, com $\|u\| \leq 1$. Assim,

$$\|T\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\| \geq \|T(u)\| \geq 0.$$

2. Mostraremos que $\|T\| = 0 \iff T = 0$ ($T(u) = 0, \forall u \in V$). Inicialmente, suponha que $\|T\| = 0$. Dado $v \in V$ com $\|v\| \leq 1$, tem-se

$$0 \leq \|T(v)\| \leq \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\| = \|T\| = 0.$$

Já para $\|v\| > 1$, temos que

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1.$$

Consequentemente,

$$0 = \|T\| \geq \left\| T \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|T(v)\|,$$

donde

$$0 \|v\| \geq \|T(v)\| \geq 0.$$

Ou seja, $T(v)=0$, em ambos os casos. Portanto, T é o operador identicamente nulo.

Reciprocamente, se $T = 0$, então

$$\|T\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|0\| = 0.$$

3. Precisamos mostrar que $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$. O caso $\alpha = 0$ é imediato, e por isso

omitiremos. Considere $\alpha \neq 0$ e note que

$$\|\alpha T\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|(\alpha T)(u)\|.$$

Em seguida, tome $u_0 \in V$ com $\|u_0\| \leq 1$. Observando que

$$\|(\alpha T)(u_0)\| = |\alpha| \|T(u_0)\| \leq |\alpha| \|T\|,$$

podemos concluir que o termo $|\alpha| \|T\|$ é uma cota superior do conjunto

$$\{\|(\alpha T)(u)\| : u \in V \text{ e } \|u\| \leq 1\}. \quad (2.3)$$

Para obter a igualdade esperada, basta mostrar que $|\alpha| \|T\|$ é a menor das cotas superiores deste conjunto (para mais informações, verifique Definição 1.1.12). Com esse objetivo, tome $M < |\alpha| \|T\|$. Então

$$\frac{M}{|\alpha|} < \|T\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\|.$$

Pela definição de supremo, obtemos $u_1 \in V$ com $\|u_1\| \leq 1$ tal que

$$\frac{M}{|\alpha|} < \|T(u_1)\|.$$

Isso implica que

$$M < |\alpha| \|T(u_1)\| = \|(\alpha T)(u_1)\|.$$

Por definição, $|\alpha| \|T\|$ deve ser o supremo do conjunto (2.3), e assim

$$\|\alpha T\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|(\alpha T)(u)\| = |\alpha| \|T\|.$$

4. Para mostrar a última propriedade, considere $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$. Observe que

$$\|T + S\| = \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|(T + S)(u)\|.$$

Ainda, para todo $u \in V$ com $\|u\| \leq 1$, temos que

$$\|(T + S)(u)\| = \|T(u) + S(u)\| \leq \|T(u)\| + \|S(u)\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Dessa forma, a soma $\|T\| + \|S\|$ é uma cota superior do conjunto

$$\{\|(T + S)(u)\| : u \in V \text{ e } \|u\| \leq 1\}.$$

Como o supremo é a menor das cotas superiores, devemos ter

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|,$$

finalizando a verificação. Com as verificações dos itens 1-4, evidencia-se que $\|T\|$ define uma norma em $\mathcal{L}(V, W)$. $\square$

Nos próximos exemplos, vamos calcular a norma de alguns operadores.

Exemplo 2.2.6. *Vamos determinar a norma do operador identidade pertencente ao espaço $\mathcal{L}(V)$ (veja o Exemplo 2.1.4). Note que para $u \in V$, com $\|u\| \leq 1$, tem-se*

$$\|I(u)\| = \|u\| \leq 1,$$

onde 1 é uma cota superior do conjunto $\{\|I(u)\| : u \in V \text{ e } \|u\| \leq 1\}$. Consequentemente, $\|I\| \leq 1$. Por outro lado, seja $v \in V \setminus \{0\}$. Daí,

$$1 = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| I \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right\| \leq \|I\|.$$

Portanto, $\|I\| = 1$.

Exemplo 2.2.7. *Considere o operador $T_y(x) = \langle x, y \rangle$ do Exemplo 2.1.5. Para determinar sua norma, primeiramente lembre-se que*

$$\|T_y\| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}} |T_y(x)| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}} |\langle x, y \rangle|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, notamos que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.4)$$

Ao considerarmos especificamente $\|x\| \leq 1$ na desigualdade acima, obtemos

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|y\|,$$

de maneira que $\|y\|$ é uma cota superior de

$$\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \|x\| \leq 1\},$$

onde $\|T_y\| \leq \|y\|$. Mais ainda, afirmamos que $\|y\| = \|T_y\|$. Para verificar isso, observe que $\|y/\|y\|\| = 1$, e então

$$\left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \right| \in \{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \|x\| \leq 1\}.$$

Logo,

$$\left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \right| \leq \|T_y\|,$$

isto é,

$$\|y\| = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \frac{|\langle y, y \rangle|}{\|y\|} \leq \|T_y\|.$$

Portanto, $\|y\| = \|T_y\|$.

Finalizamos a seção com dois resultados a respeito do espaço normado $\mathcal{L}(V, W)$.

Proposição 2.2.8. *Sejam V e W espaços normados. Então os seguintes itens são válidos:*

(a) $\|T(u)\| \leq \|T\|\|u\|$, $\forall T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\forall u \in V$;

(b) se W for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(V, W)$ também é um espaço de Banach.

Demonstração. Para demonstrar o item (a), seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $u \in V$. Se $u = 0$ a desigualdade é imediata. Agora, suponha que $u \neq 0$. Dessa forma,

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1,$$

e assim

$$\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} = \left\| T \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \right\| \leq \sup_{\{u \in V: \|u\| \leq 1\}} \|T(u)\| = \|T\|.$$

Logo,

$$\|T(u)\| \leq \|T\|\|u\|,$$

provando o item (a).

Quanto a demonstração do item (b), tomaremos uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(V, W)$ e mostraremos que ela converge para algum elemento de $\mathcal{L}(V, W)$, se W for um espaço de Banach. Considere $(T_n) \subset \mathcal{L}(V, W)$ uma sequência de Cauchy arbitrária. Então, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \implies \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Pelo item (a), se $n, m \geq n_0$, segue que

$$\|T_n(u) - T_m(u)\| = \|(T_n - T_m)(u)\| \leq \|T_n - T_m\|\|u\| < \epsilon\|u\|, \quad \forall u \in V. \quad (2.5)$$

Dessa forma, podemos concluir que a sequência $(T_n(u)) \subset W$ é de Cauchy, qualquer que seja $u \in V$ fixado. Como W é um espaço de Banach, $(T_n(u))$ converge para

algum elemento $v_u \in W$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u) = v_u$. Diante disso, defina

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow W \\ u &\mapsto T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u). \end{aligned}$$

Se fizermos $n \rightarrow \infty$ em (2.5), com m fixo, notamos que o operador T satisfaz

$$\|T(u) - T_m(u)\| \leq \epsilon \|u\|, \quad \forall m \geq n_0. \quad (2.6)$$

Lembrando que $u \in V$ foi tomado arbitrário, para $\|u\| \leq 1$ a inequação acima implica que

$$\|(T_m - T)(u)\| = \|T_m(u) - T(u)\| \leq \epsilon, \quad \forall m \geq n_0.$$

Assim, podemos concluir que $\epsilon > 0$ é uma cota superior do conjunto

$$\{\|(T_m - T)(u)\| : u \in V \text{ e } \|u\| \leq 1\}.$$

Logo,

$$\|T_m - T\| \leq \epsilon, \quad \forall m \geq n_0.$$

Em outras palavras, acabamos de verificar que (T_m) converge para T , com respeito a norma do espaço $\mathcal{L}(V, W)$.

Resta mostrar que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Primeiramente, note que T é linear, uma vez que para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$, tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha u + v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n(\alpha u) + T_n(v)) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(v) = \alpha T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que T é contínuo ao escrevê-lo como combinação linear de operadores contínuos. Uma vez que

$$\|(T_{n_0} - T)(u)\| \leq \epsilon \|u\|, \quad \forall u \in V,$$

concluimos, através do Teorema 2.2.1, que $(T_{n_0} - T) \in \mathcal{L}(V, W)$ (usamos (2.6)). Como $\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial, então $T = -(T_{n_0} - T) + T_{n_0}$ pertence ao espaço $\mathcal{L}(V, W)$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Corolário 2.2.9. *Seja V um espaço normado. Então, o espaço dual $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. De fato, como $\mathbb{K}$ é completo, segue do item (b) da Proposição 2.2.8 que V' é um espaço de Banach. $\square$

2.3 Teorema de Banach-Steinhaus

Finalmente, nesta seção apresentaremos a demonstração do resultado principal. Antes, precisaremos de um resultado clássico, a saber o Teorema de Baire.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Baire). *Sejam V um espaço de Banach não-vazio e (F_n) uma sequência de subconjuntos fechados em V tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = V.$$

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} possui interior não vazio, ou seja, $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Com o intuito de obter uma contradição, suponha que a conclusão do resultado é falsa, isto é,

$$\text{int}(F_n) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Em seguida, considere $A_n := V \setminus F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, faremos algumas afirmações juntamente com suas demonstrações.

Afirmção 1: A_n é aberto, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, dado $y \in A_n$, devemos garantir que existe $r > 0$ tal que $B(y; r) \subset A_n$. De fato, se $y \in A_n$, por definição $y \notin F_n = \overline{F_n}$ (pois F_n é fechado). Logo, existe $r > 0$ tal que

$$B(y; r) \cap F_n = \emptyset.$$

Agora, basta verificar que $B(y; r) \subset A_n$. Tomando $z \in B(y; r)$, pela igualdade acima, $z \notin F_n$, ou seja, $z \in A_n$, o que mostra que a inclusão é válida. Portanto, A_n é aberto.

Afirmção 2: $A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro, vamos verificar que

$$V \setminus \text{int}(F_n) = \overline{V \setminus F_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Para provar a inclusão $V \setminus \text{int}(F_n) \subset \overline{V \setminus F_n}$, seja $u \in V \setminus \text{int}(F_n)$. Daí, $u \notin \text{int}(F_n)$, isto é, dado $r > 0$ temos que

$$B(u; r) \not\subset F_n.$$

Sendo assim, existe $v \in B(u; r)$ tal que $v \notin F_n$ ($v \in V \setminus F_n$). Logo,

$$B(u; r) \cap (V \setminus F_n) \neq \emptyset.$$

Como $r > 0$ é arbitrário, por definição de fecho, $u \in \overline{V \setminus F_n}$.

Para garantir que (2.8) é válido, resta verificar que $\overline{V \setminus F_n} \subset V \setminus \text{int}(F_n)$. Usando a contrapositiva, considere $w \notin V \setminus \text{int}(F_n)$. Sendo assim, $w \in \text{int}(F_n)$, o que implica que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(w; \epsilon) \subset F_n.$$

Consequentemente,

$$B(w; \epsilon) \cap (V \setminus F_n) = \emptyset,$$

donde $w \notin \overline{V \setminus F_n}$, e portanto a igualdade (2.8) é verdadeira. Finalmente, combinando (2.8) com (2.7), podemos concluir que

$$\overline{A_n} = \overline{V \setminus F_n} = V \setminus \text{int}(F_n) = V \setminus \emptyset = V, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Logo, se $A_n = \emptyset$, então $\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A_n} = V$, que seria uma contradição. Isso garante a validade dessa afirmação.

Afirmção 3: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Como $A_1 \neq \emptyset$, pela afirmação 2, existe $x_1 \in A_1$. Usando o fato que A_1 é aberto (pela afirmação 1), existe $\delta > 0$ tal que $B(x_1; \delta) \subset A_1$. Tomando $0 < \delta_1 < \min\{1, \delta/2\}$, temos que

$$B[x_1; \delta_1] \subset A_1. \quad (2.10)$$

De fato, se $y \in B[x_1; \delta_1]$, então

$$\|y - x_1\| \leq \delta_1 < \frac{\delta}{2} < \delta,$$

isto é, $y \in B(x_1; \delta) \subset A_1$. Por outro lado, por (2.9), temos que $x_1 \in V = \overline{A_2}$. A Definição 1.2.6 diz que

$$B(x_1; \delta_1) \cap A_2 \neq \emptyset,$$

donde existe $x_2 \in B(x_1; \delta_1) \cap A_2$. Como $B(x_1; \delta_1) \cap A_2$ é aberto (veja Exemplos 1.2.4 e 1.2.5), através de argumento similar para obter (2.10), podemos considerar $0 < \delta_2 < 1/2$ tal que

$$B[x_2; \delta_2] \subset B(x_1; \delta_1) \cap A_2 \subset B[x_1; \delta_1] \cap A_2.$$

Repetindo o processo de forma indutiva, podemos obter duas sequências $(\delta_n) \subset \mathbb{R}$ e $(x_n) \subset V$ que satisfazem

$$0 < \delta_n < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad B[x_{n+1}; \delta_{n+1}] \subset B[x_n; \delta_n] \cap A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Em particular,

$$B[x_{n+1}; \delta_{n+1}] \subset B[x_n; \delta_n] \subset \dots \subset B[x_2; \delta_2] \subset B[x_1; \delta_1]. \quad (2.12)$$

Afim de utilizar a completude de V , mostraremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Para isso, tome $\epsilon > 0$ arbitrário. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 2/\epsilon$. Se $m, n \geq n_0$, então

$$B[x_n; \delta_n] \cap B[x_m; \delta_m] \subset B[x_{n_0}; \delta_{n_0}].$$

Consequentemente,

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x_n\| \leq \delta_{n_0} + \delta_{n_0} = 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \epsilon.$$

Isso nos diz que a sequência (x_n) é de Cauchy, o que acarreta que converge para algum $x \in V$, pois V é um espaço de Banach.

Para finalizar a verificação dessa afirmação, mostraremos que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Fixando $n \in \mathbb{N}$, por (2.12), temos que

$$x_m \in B[x_m; \delta_m] \subset B[x_n; \delta_n], \quad \forall m \geq n.$$

Em outras palavras, $(x_m)_{m \in \mathbb{N}'}$ é uma subsequência de $B[x_n; \delta_n]$, em que $\mathbb{N}' = \{n < n+1 < n+2 < \dots\}$. Além disso, $(x_m)_{m \in \mathbb{N}'}$ converge para x (veja Proposição 1.2.15). Pela Proposição 1.2.16, juntamente com o Exemplo 1.2.9, temos que $x \in \overline{B[x_n; \delta_n]} = B[x_n; \delta_n] \subset A_n$. Como $n \in \mathbb{N}$ foi tomado arbitrário, a afirmação 3 está provada.

Finalmente, fazendo uso da afirmação 3,

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (V \setminus F_n) = V \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = V \setminus V = \emptyset,$$

que é um absurdo, e assim o resultado está demonstrado. $\square$

Logo abaixo, demonstraremos um lema, que servirá com resultado auxiliar para o Teorema de Banach-Steinhaus.

Lema 2.3.2. *Sejam V e W espaços normados. Se $f : V \rightarrow W$ é contínua, então o conjunto*

$$f^{-1}(F) := \{v \in V : f(v) \in F\} \subset V$$

é fechado em V , se F for fechado em W .

Demonstração. Tome $u \in \overline{f^{-1}(F)}$. Devemos mostrar que $u \in f^{-1}(F)$. Através da Proposição 1.2.16, obtemos uma sequência $(u_n) \subset f^{-1}(F)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Afirmamos que a sequência $(f(u_n)) \subset F$ converge para $f(u)$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta > 0$ que satisfaz

$$\|w - u\| < \delta \implies \|f(w) - f(u)\| < \epsilon.$$

Usando a convergência $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u\| < \delta, \quad \forall n \geq n_0.$$

Dessa maneira, se $n \geq n_0$, pela implicação acima, segue que

$$\|f(u_n) - f(u)\| < \epsilon,$$

provando a afirmação. Logo, pela Proposição 1.2.16, $f(u) \in \overline{F} \subset F$ (pois F é fechado). Portanto, $u \in f^{-1}(F)$, o que encerra a demonstração do lema. $\square$

Teorema 2.3.3 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Seja V um espaço de Banach e W um espaço normado. Considere uma família de operadores $(T_i)_{i \in \Gamma}$, em que $T_i \in \mathcal{L}(V, W)$, para cada $i \in \Gamma$. Suponha que para cada $u \in V$, existe $L_u \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|T_i(u)\| \leq L_u, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Então, existe $L \in \mathbb{R}$ (independente de u) tal que

$$\|T_i\| = \sup_{\{u \in V : \|u\| \leq 1\}} \|T_i(u)\| \leq L, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Em outras palavras, se

$$\sup_{i \in \Gamma} \|T_i(u)\| < \infty, \quad \forall u \in V,$$

então

$$\sup_{i \in \Gamma} \|T_i\| < \infty.$$

Demonstração. Nessa demonstração utilizaremos o Teorema de Baire. Com essa finalidade, devemos encontrar subconjuntos fechados $F_n \subset V$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = V$.

Para obter tais subconjuntos, inicialmente considere

$$S_n^i := \{u \in V : \|T_i(u)\| \leq n\}. \quad (2.13)$$

Desde que

$$(\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}[0, n] := \{v \in V : (\|\cdot\| \circ T_i)(v) \in [0, n]\} = \{v \in V : \|T_i(v)\| \in [0, n]\},$$

podemos concluir que $S_n^i = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}[0, n]$. Uma vez que T_i é contínuo, pois $T_i \in \mathcal{L}(V, W)$, e a norma $\|\cdot\|$ também é contínua, pelo Lemma 2.3.2, pode-se

concluir que S_n^i é fechado, pois é imagem inversa do fechado $[0, n] \subset \mathbb{R}$. A seguir, defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n := \bigcap_{i \in \Gamma} S_n^i.$$

Através do Exemplo 1.2.10, temos que F_n é um conjunto fechado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = V.$$

Como $F_n \subset V$, para cada $n \in \mathbb{N}$, claramente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset V$. Sendo assim, resta provar que $V \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Com efeito, seja $v \in V$. Por hipótese, existe $L_v \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T_i(v)\| \leq L_v, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Desde que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq L_v$. Por conseguinte,

$$\|T_i(v)\| \leq m, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Sendo assim, $v \in S_m^i$, para todo $i \in \Gamma$ (veja definição em (2.13)), e como consequência, temos que $v \in \bigcap_{i \in \Gamma} S_m^i = F_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Portanto, $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Podemos finalmente aplicar o Teorema 2.3.1 para garantir a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Logo, podemos considerar $w \in \text{int}(F_{n_0})$. Por definição de ponto interior, obtemos $\epsilon > 0$ que nos fornece

$$B(w; \epsilon) \subset F_{n_0}.$$

Considerando $u \in V$ com $\|u\| \leq 1$, se $z = w + (\epsilon/2)u$, temos que

$$\|z - w\| = \left\| \frac{\epsilon}{2} u \right\| < \epsilon.$$

Isto é, $z \in B(w; \epsilon) \subset F_{n_0}$. Como $F_{n_0} = \bigcap_{i \in \Gamma} S_{n_0}^i$, então

$$\|T_i(z)\| \leq n_0, \quad \|T_i(w)\| \leq n_0, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Agora, note que

$$\|T_i(u)\| = \left\| T_i \left(\frac{2}{\epsilon} (z - w) \right) \right\| = \frac{2}{\epsilon} \|T_i(z - w)\| \leq \frac{2}{\epsilon} (\|T_i(z)\| + \|T_i(w)\|) \leq \frac{4n_0}{\epsilon}.$$

Como $u \in V$ com $\|u\| \leq 1$ foi tomado arbitrário, segue que

$$\|T_i\| \leq \frac{4n_0}{\epsilon}, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Escolhendo $L = (4n_0)/\epsilon$, o resultado está demonstrado. $\square$

Na observação a seguir, veremos que a completude do espaço é indispensável no Teorema de Banach-Steinhaus.

Observação 2.3.4. *No Exemplo 1.3.3 vimos que o espaço c_{00} não é um espaço de Banach. Agora, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ a aplicação $T_n : c_{00} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por*

$$T_n(x) := nx_n, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in c_{00}.$$

Afirmamos que $T_n \in (c_{00})' = \mathcal{L}(c_{00}, \mathbb{K})$. O fato de T_n ser linear é imediato, e por isso vamos omitir. A continuidade é garantida ao observar a desigualdade

$$|T_n(x)| = |nx_n| = n|x_n| \leq n \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = n\|x\|_\infty,$$

juntamente com o Teorema 2.2.1 (item (iv)).

Por outro lado, com o intuito de determinar a norma de T_n , se $\|x\|_\infty \leq 1$, pela desigualdade acima segue que $|T_n(x)| \leq n$, e assim $\|T_n\| \leq n$, pela definição de supremo. Além disso, considerando $y = (y_n) \in c_{00}$, em que $y_n = 1$ e $y_i = 0$, para $i \neq n$, tem-se

$$n = |T_n(y)| \leq \|T_n\|,$$

pois $\|y\|_\infty = 1$. Logo, $\|T_n\| = n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Com o intuito de usar a conclusão do Teorema de Banach-Steinhaus, note que para $x = (x_n) \in c_{00}$ fixado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$, para $n \geq n_0$. Sendo assim,

$$|T_i(x)| = i \cdot 0 = 0, \quad \forall i \geq n_0 \quad e \quad |T_i(x)| = i \cdot x_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n_0 - 1\}.$$

Portanto,

$$|T_i(x)| \leq L_x := \max_{1 \leq i \leq n_0 - 1} \{i \cdot |x_i|\}.$$

Supondo que o Teorema 2.3.3 seja válido para $V = c_{00}$, podemos concluir que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$n = \|T_n\| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é um absurdo.

2.3.1 Algumas consequências do Teorema de Banach-Steinhaus

A subseção que segue apresentará os últimos resultados do trabalho, todos eles sendo decorrentes do Teorema de Banach-Steinhaus (ou Princípio da Limitação Uniforme).

Proposição 2.3.5. *Sejam V um espaço de Banach e W um espaço normado. Considere $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V, W)$ uma sequência de operadores tais que, para qualquer*

$u \in V$, $(T_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em W . Dessa forma, a aplicação

$$T : V \rightarrow W$$

$$u \mapsto T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u),$$

é um operador linear contínuo.

Demonstração. Com as hipóteses fornecidas, devemos mostrar que T é contínuo, uma vez que a linearidade resulta das operações aritméticas dos limites.

Note que

$$\|T_n(u)\| \leq L_u < \infty, \quad \forall u \in V,$$

pois $(T_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para cada $u \in V$, e portanto limitada. Pelo Teorema 2.3.3, podemos inferir que

$$\|T_n\| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum $L \in \mathbb{R}$. Portanto, como $T_n \in \mathcal{L}(V, W)$ com $n \in \mathbb{N}$ qualquer, podemos utilizar o item (a) da Proposição 2.2.8 para garantir que

$$\|T_n(u)\| \leq \|T_n\| \|u\| \leq L \|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Ao fazer $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos $\|T(u)\| \leq L \|u\|$, onde o Teorema 2.2.1 assegura a continuidade de T . Está verificado que T é um operador linear contínuo, finalizando a demonstração. $\square$

Proposição 2.3.6. *Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço normado V sobre $\mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(v_n)| < \infty, \quad \forall \psi \in V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}).$$

Então,

$$\sup_{\{\psi \in V' : \|\psi\| \leq 1\}} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(v_n)| < \infty.$$

Demonstração. Seja $\psi \in V'$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere $\xi_1, \dots, \xi_i \in \mathbb{R}$ (dependentes de ψ) dados por

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{se } \psi(v_j) \geq 0, \\ -1, & \text{se } \psi(v_j) < 0, \end{cases}$$

para cada $j \in \{1, \dots, i\}$. Em seguida, defina para cada $i \in \mathbb{N}$, o operador $T_i : V' \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_i(\psi) = \sum_{n=1}^i \xi_n \psi(v_n), \quad \forall \psi \in V'.$$

Claramente T_i é linear. Além disso, fixando $i \in \mathbb{N}$,

$$|T_i(\psi)| = \left| \sum_{n=1}^i \xi_n \psi(v_n) \right| \leq \sum_{n=1}^i |\psi(v_n)| \leq \sum_{n=1}^i \|\psi\| \|v_n\|, \quad \forall \psi \in V',$$

onde utilizamos o fato que $|\xi_n| = 1$ juntamente com o item (a) da Proposição 2.2.8, com $T = \psi$ e $u = v_n$. Sendo assim,

$$|T_i(\psi)| \leq \left(\sum_{n=1}^i \|v_n\| \right) \|\psi\|, \quad \forall \psi \in V'.$$

Aplicando o item (iv) do Teorema 2.2.1, podemos concluir que T_i é contínuo, e portanto $T_i \in \mathcal{L}(V', \mathbb{R})$.

Por outro lado, por hipótese, para $\psi \in V'$ fixado, temos que

$$|T_i(\psi)| = \left| \sum_{n=1}^i \xi_n \psi(v_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(v_n)| = L_\psi < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Desde que V' é um espaço de Banach (veja Corolário 2.2.9), podemos aplicar o Teorema 2.3.3 para obter $L \in \mathbb{R}$ (independente de ψ) tal que

$$\|T_i\| = \sup_{\{\psi \in V' : \|\psi\| \leq 1\}} |T_i(\psi)| \leq L, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left| \sum_{n=1}^i \xi_n \psi(v_n) \right| = |T_i(\psi)| \leq L, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall \psi \in V' \text{ tal que } \|\psi\| \leq 1.$$

Agora, usando que $\xi_n \psi(v_n) = |\psi(v_n)| \geq 0$, podemos concluir que

$$\left| \sum_{n=1}^i \xi_n \psi(v_n) \right| = \sum_{n=1}^i \xi_n \psi(v_n) = \sum_{n=1}^i |\psi(v_n)|,$$

e conseqüentemente,

$$\sum_{n=1}^i |\psi(v_n)| \leq L, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall \psi \in V' \text{ tal que } \|\psi\| \leq 1.$$

Aplicando o limite $i \rightarrow \infty$, concluímos o resultado. $\square$

A próxima proposição é o último resultado a ser apresentado, com sua demonstração encerrando nosso estudo. Ela evidencia a utilidade do princípio da limitação uniforme na determinação da completude de espaços normados.

Proposição 2.3.7. *Seja $D_{x_0} := \{f \in \mathcal{C}[a, b] : f \text{ é diferenciável em } x_0\}$, com $x_0 \in$*

(a, b) . Então, D_{x_0} não é Banach.

Demonstração. Lembremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em um ponto $x_0 \in (a, b)$ quando existe o seguinte limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.14)$$

Denotamos esse limite por $f'(x_0)$.

Como $x_0 \in (a, b)$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_0 + 1/n_0 < b$. Dessa maneira, se $n \geq n_0$, tem-se $a < x_0 + 1/n < b$. Em seguida considere, para cada $n \geq n_0$, a aplicação $T_n : D_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_n(f) = n \left[f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right], \quad \forall f \in D_{x_0}.$$

A seguir faremos duas afirmações.

Afirmção 1: $T_n \in D'_{x_0} = \mathcal{L}(D_{x_0}, \mathbb{R})$.

Para verificar que T_n é linear, note que

$$\begin{aligned} T_n(\alpha f + g) &= n \left[(\alpha f + g) \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - (\alpha f + g)(x_0) \right] \\ &= \alpha n \left[f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right] + n \left[g \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - g(x_0) \right] \\ &= \alpha T_n(f) + T_n(g), \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g \in D_{x_0}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A continuidade de T_n segue da seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= \left| n \left[f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right] \right| \leq n \left(\left| f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) \right| + |f(x_0)| \right) \\ &\leq n \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) = 2n \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

A afirmação está verificada.

Afirmção 2: Para cada $f \in D_{x_0}$, existe $L_f \in \mathbb{R}$ tal que

$$|T_n(f)| \leq L_f, \quad n \geq n_0.$$

Primeiramente, perceba que

$$T_n(f) = n \left[f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right] = \frac{f(x_0 + 1/n) - f(x_0)}{1/n}.$$

Para estimar a limitação de (T_n) , fazemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + 1/n) - f(x_0)}{1/n},$$

Através de (2.14), ao considerar $h = 1/n$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Logo, a sequência $(T_n(f)) \subset \mathbb{R}$ é limitada, para cada $f \in D_{x_0}$ fixado. Isso é suficiente para a conclusão dessa afirmação.

Finalmente, suponha por contradição que D_{x_0} é um espaço de Banach. Pelas Afirmações 1 e 2, podemos aplicar o Teorema 2.3.3 (Princípio da Limitação Uniforme) para obter $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T_n\| = \sup_{\{f \in D_{x_0} : \|f\|_\infty \leq 1\}} |T_n(f)| \leq L, \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.15)$$

Em seguida, escolha $n_1 \geq n_0$ tal que $n_1 > L$ e $a < x_0 - 1/n_1$. Com o intuito de obter a contradição, defina $g \in D_{x_0}$ por

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } a \leq x < x_0 - \frac{1}{n_1}, \\ n_1(x - x_0), & \text{se } x_0 - \frac{1}{n_1} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{n_1}, \\ 1, & \text{se } x_0 + \frac{1}{n_1} < x \leq b. \end{cases}$$

A figura abaixo apresenta o gráfico da função g .

Dando continuidade à demonstração, note que

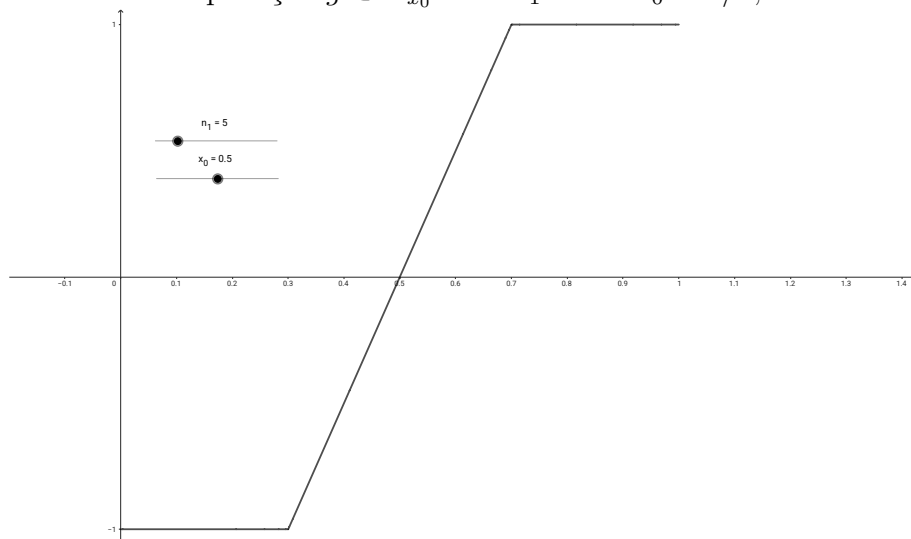
$$T_{n_1}(g) = n_1 \left[g\left(x_0 + \frac{1}{n_1}\right) - g(x_0) \right] = n_1 \left[n_1 \left(x_0 + \frac{1}{n_1} - x_0\right) - n_1(x_0 - x_0) \right] = n_1.$$

Desde que $\|g\|_\infty = 1$, a igualdade acima combinada com (2.15), implica que

$$n_1 = |T_{n_1}(g)| \leq \|T_{n_1}\| \leq L.$$

Mas isso é uma contradição, pois $n_1 > L$. Portanto, o espaço D_{x_0} não pode ser Banach, e a prova está completa. $\square$

Figura 1: Gráfico da aplicação $g \in D_{x_0}$ caso $n_1 = 5$ e $x_0 = 1/2$, com $a = 0$ e $b = 1$.



Fonte: De autoria própria com o auxílio do aplicativo Geogebra.

REFERÊNCIAS

- [1] BACHMAN, G; NARICI, L. **Functional Analysis**. 2. ed. Nova Iorque: DOVER PUBLICATIONS, 2000.
- [2] BOTELHO, G. M. A.; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.
- [3] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Nova Iorque: Springer, 2010.
- [4] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. 2^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013
- [5] KREYSZIG, E. **Introductory Funtional Analysis with Applications**. Nova Iorque: Wiley Classics Library Edition, 1989.
- [6] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 10^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- [7] LIMA, E. L. **Análise Real, vol. 1**: funções de uma variável. 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- [8] LIMA, E.L. **Curso de Análise. Vol. 2**. 12^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- [9] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020
- [10] RUDIN, W. **Functional Analysis**. Singapura: Tata McGraw-Hill Publising Company, 1976.