Universidade Federal de Sergipe-UFS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de pós graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional– PROFMAT

O uso de dobraduras no ensino de geometria na educação básica: desafios e possibilidades.

Thaís Menandra Santos dos Anjos de Matos

São Cristóvão-SE

Julho, 2025

Thaís Menandra Santos dos Anjos de Matos

O uso de dobraduras no ensino de geometria na educação básica: desafios e possibilidades.

Dissertação de mestrado submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira

São Cristóvão-SE

Julho, 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

UFS

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O uso de dobraduras no ensino de geometria na educação básica: desafios e possibilidade

por

Thais Menandra Santos dos Anjos de Matos

Aprovada pela Banca Examinadora:

Allyson do Santo Oliveira
Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira - UFS
Orientador

Naldisson dos Santos
Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Primeiro Examinador

Diego Alves da Costa
Prof. Dr. Diego Alves da Costa - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 25 de Julho de 2025.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail:profmat@academico.ufs.br

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M433u

Matos, Thaís Menandra Santos dos Anjos de
O uso de dobraduras no ensino de geometria na educação básica: desafios e possibilidades / Thaís Menandra Santos dos Anjos de Matos ; orientador Allyson dos Santos Oliveira. – São Cristóvão, 2025.
94 f.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Geometria espacial. 2. Origami. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Educação básica. I. Oliveira, Allyson dos Santos orient. II. Título.

CDU 514:37

Agradecimentos

A realização deste trabalho representa não apenas a conclusão de uma etapa acadêmica, mas também a consolidação de um percurso de aprendizado construído com o apoio e a presença de muitas pessoas a quem sou profundamente grata.

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois sem ELE nada do que está sendo seria. A ELE toda honra, glória e louvor.

À minha família, pelo suporte emocional e pelo incentivo constante, pilares fundamentais para que eu pudesse seguir com dedicação e equilíbrio ao longo desta jornada. Em especial, ao meu marido, meu filho, meus pais, irmão e sobrinhos pela confiança depositada em minha formação e por me ensinarem, com o exemplo, a importância do esforço e da perseverança.

Ao meu orientador, Professor Dr. Allyson dos Santos Oliveira, expresso minha sincera gratidão pela orientação cuidadosa, pelas reflexões instigantes e pela confiança em meu potencial. Suas contribuições foram decisivas para a construção crítica e coerente desta dissertação.

Aos colegas do curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, e de forma mais que especial, à minha colega, amiga e irmã Shirlei Passos, agradeço pela convivência enriquecedora e pelas trocas que fortaleceram meu percurso formativo.

À instituição onde atuo como professora da Educação Básica, agradeço pela compreensão e apoio durante este período, assim como aos alunos que participaram das atividades desenvolvidas, cujo envolvimento e interesse deram sentido prático às investigações aqui apresentadas.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho, deixo o meu mais sincero agradecimento.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo investigar o ensino de sólidos geométricos por meio da técnica de dobraduras, com foco em sua aplicação no Ensino Básico. A proposta metodológica fundamenta-se nos princípios da Geometria Euclidiana e nas possibilidades didáticas proporcionadas pelo uso do origami como recurso pedagógico. A pesquisa foi desenvolvida no âmbito da Educação Básica, com aplicação de atividades práticas junto a estudantes do Ensino Fundamental, buscando compreender em que medida a utilização de dobraduras pode contribuir para a compreensão de conceitos como vértices, arestas, faces, planificação, área e volume dos sólidos. A análise qualitativa dos dados evidenciou que a abordagem com dobraduras favorece uma aprendizagem mais concreta, dinâmica e significativa, além de estimular a visualização espacial e o raciocínio geométrico dos alunos. Como fundamentação teórica, foram utilizados autores como Fiorentini (2006), Lorenzato (2009), Lira (2015), entre outros, além da aplicação dos axiomas de Huzita-Hatori para justificar matematicamente as construções realizadas com papel. O trabalho conclui que o uso de dobraduras se mostra uma estratégia eficaz na recomposição das aprendizagens em Geometria, apresentando desafios e possibilidades dos mesmos, de modo a tornar o ensino mais acessível e atrativo para os estudantes. Conclui-se que o origami é uma estratégia pedagógica eficaz, acessível e alinhada à BNCC, capaz de contribuir significativamente para a recomposição das aprendizagens em Geometria.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Origami. Dobraduras. Ensino de Matemática. Educação Básica.

ABSTRACT

This study aims to investigate the teaching of geometric solids through the folding technique, focusing on its application in Basic Education. The methodological proposal is grounded in the principles of Euclidean Geometry and the didactic possibilities offered by the use of origami as a pedagogical resource. The research was conducted within the scope of Basic Education, through the implementation of practical activities with high school students, seeking to understand the extent to which the use of paper folding can contribute to the comprehension of concepts such as vertices, edges, faces, nets, surface area, and volume of solids. The qualitative analysis of the data revealed that the approach using paper folding fosters more concrete, dynamic, and meaningful learning, as well as stimulating students' spatial visualization and geometric reasoning. The theoretical foundation included authors such as Fiorentini (2006), Lorenzato (2009), Lira (2015), among others, in addition to the application of the Huzita-Hatori axioms to mathematically justify the constructions made with paper. The study concludes that the use of paper folding proves to be an effective strategy for the recovery of learning in Geometry, presenting both challenges and possibilities that help make teaching more accessible and attractive to students. It is concluded that origami is an effective, accessible, and BNCC-aligned pedagogical strategy, capable of significantly contributing to the recovery of Geometry learning.

Keywords: Spatial Geometry; Origami; Paper Folding; Mathematics Education; Basic Education.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Com o avanço das tecnologias e das metodologias de ensino, a Matemática passou por transformações significativas, especialmente no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem. Esse novo cenário atribui ao estudante um papel mais ativo, exigindo dos professores um planejamento mais dinâmico e atrativo, capaz de despertar o interesse pela disciplina e favorecer aprendizagens mais significativas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, o ensino de Matemática frequentemente é percebido como abstrato e desmotivador. Para enfrentar esse desafio, é importante que os docentes façam uso de materiais didáticos que permitam a manipulação de conceitos matemáticos de forma concreta, uma vez que o uso de recursos figurativos-concretos pode auxiliar no processo de abstração e generalização, desde que estejam integrados a práticas pedagógicas bem estruturadas (MOYSéS, 2003).

Nesse contexto, destaca-se o potencial do ensino de Geometria e mais objetivamente, a possibilidade da inserção da utilização das dobraduras — especialmente os origamis — como ferramentas acessíveis e eficazes no processo de ensino e aprendizagem, como forma alternativa às construções com instrumentos como régua e compasso.

Por serem de baixo custo, esses materiais podem ser produzidos mesmo em instituições com poucos recursos, como é o caso da maioria das escolas públicas do país, utilizando apenas papel comum. Além de econômicos, as atividades com dobraduras promovem a participação ativa, pois requer atenção, concentração e foco dos estudantes. Além disso, a visualização espacial dos objetos construídos acaba por possibilitar a construção e assimilação de diversos conceitos geométricos a partir da experiência concreta, aliada à realidade dos estudantes, por se tratar muitas vezes, de objetos do seu cotidiano.

Contudo, é importante ressaltar que nenhum recurso didático, por si só, garante o sucesso do processo de aprendizagem. O uso de dobraduras deve estar articulado a propostas pedagógicas claras, que orientem o estudante na construção do conhecimento, permitindo compreender cada etapa até a conclusão da atividade.

Nesse trabalho, propõe-se então, a exploração do origami como recurso didático na construção geométrica como forma de apreender os conhecimentos geométricos e estimular a manipulação e aquisição dos sólidos construídos com o objetivo de valorizar sua contribuição para o ensino de Matemática na Educação Básica.

No **Capítulo 1**, são discutidos os fundamentos da Geometria Euclidiana Plana, com destaque para as noções de ponto, reta, plano e os postulados de Euclides, que sustentam a construção lógica do conhecimento geométrico.

O **Capítulo 2** apresenta um breve histórico sobre o origami e sua inserção no contexto educacional, além de abordar os sete Axiomas de Huzita-Hatori, que possibilitam as construções geométricas, além daquelas impossíveis com régua e compasso, destacando o potencial das dobraduras como ferramenta pedagógica.

No **Capítulo 3**, são exploradas construções geométricas realizadas por meio de dobraduras, com foco em sólidos tridimensionais, como os Sólidos de Platão, o paralelepípedo e diferentes tipos de pirâmides. As atividades práticas são acompanhadas de representações gráficas e orientações passo a passo.

O **Capítulo 4** discute os desafios e as possibilidades do ensino de Geometria com dobraduras na Educação Básica, analisando livros didáticos, a formação docente, as condições de ensino nas escolas públicas e o papel do professor como mediador do conhecimento.

O **Capítulo 5** apresenta a aplicação de uma sequência didática em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, incluindo os relatos dos estudantes e a análise qualitativa dos resultados obtidos, com destaque para as contribuições das dobraduras na compreensão de conceitos geométricos.

O **Capítulo 6** traz as conclusões do trabalho, apontando as principais contribuições da proposta, as limitações encontradas e sugestões para futuras investigações, reafirmando o potencial das dobraduras como recurso didático no ensino da Matemática.

Por fim, são apresentados nos apêndices os roteiros das atividades desenvolvidas, das produções dos estudantes realizadas coletiva e individualmente, bem como um roteiro de autoavaliação cujo objetivo foi compreender o nível de conscientização e aprendizagem alcançada pelos estudantes.

Dessa forma, este trabalho visa proporcionar a professores e estudantes da Educação Básica um instrumento didático alternativo que favoreça o ensino de Geometria de forma mais lúdica, acessível e significativa, promovendo uma aprendizagem mais concreta, interativa e significativa na Educação Básica, indo além da abordagem tradicional do ensino de Geometria, como comumente é verificado, possibilitando a interação, reflexão e o redimensionamento do processo ensino aprendizagem desse componente curricular tão relevante, a Matemática.

Capítulo 1

Geometria Euclidiana Plana: conceitos básicos e postulados de Euclides

A Geometria Euclidiana Plana, como é tradicionalmente conhecida, teve origem nos estudos sistematizados por Euclides de Alexandria, matemático da Grécia Antiga. Sua principal obra, Os Elementos, tornou-se um marco na história da matemática por organizar de maneira lógica e dedutiva os conhecimentos geométricos até então conhecidos.

Nessa obra, Euclides apresenta 23 definições fundamentais, entre elas as de ponto, reta, plano, círculo, triângulo e retas paralelas, as quais servem de base para os demais desenvolvimentos geométricos. Além dessas definições, Euclides introduz cinco noções comuns -consideradas verdades evidentes - e cinco postulados, ou axiomas, a partir dos quais toda a geometria plana é deduzida.

As (cinco) noções básicas, enunciadas como verdades óbvias, afirmam que:

1. Coisas iguais a uma mesma coisa também são iguais.

2. Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais.

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos também são iguais.

4. Coisas que coincidem uma com a outra são sempre iguais.

5. O total é sempre maior do que qualquer uma de suas partes.

De acordo com Boyer (1996), “a influência da obra *Os Elementos*, ultrapassou os limites da Matemática, moldando o raciocínio lógico por meio da estrutura dedutiva que se tornaria o paradigma das ciências formais por muitos séculos”. Essa estrutura lógica, iniciada com os postulados e culminando em teoremas mais complexos, tornou-se essencial para a formação do pensamento matemático rigoroso e para o desenvolvimento da capacidade de argumentação valorizadas ainda hoje.

A partir daí é possível apreeender que o método adotado por Euclides baseia-se no raciocínio dedutivo, em que parte-se de princípios aceitos sem demonstração (axiomas) e, por meio de regras lógicas, chega-se a novas e importantes proposições. Assim, para validar uma afirmação, faz-se necessário demonstrar que ela decorre logicamente de outras já aceitas como verdadeiras, em um encadeamento de argumentos que conduz à construção sistemática do conhecimento. Esse modelo lógico aqui apresentado permitiu que, a partir de apenas cinco postulados, Euclides deduzisse cerca de 465 proposições, muitas delas complexas e não intuitivas, o que evidencia o poder do raciocínio axiomático.

Os cinco postulados da Geometria Euclidiana são:

1. É possível traçar uma reta entre quaisquer dois pontos.
2. Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em linha reta.
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta corta duas outras de modo que a soma dos ângulos internos de um lado seja menor que dois ângulos retos, então essas duas retas, se prolongadas, se encontrarão do lado onde a soma dos ângulos é menor que 180 graus.

O quinto postulado, conhecido como postulado das paralelas, foi alvo de muitas tentativas de demonstração, sendo posteriormente responsável pelo surgimento das chamadas Geometrias Não Euclidianas.

As noções primitivas dão início à Geometria Plana, de modo que o ponto é a base de toda a Geometria, pois a partir de conjuntos de pontos é possível construir as figuras geométricas. O ponto é, portanto, um objeto que não possui definição, dimensão e forma; portanto, é impossível encontrar qualquer medida de ponto como, por exemplo, comprimento, largura, altura, área ou volume.

Já as retas, são definidas como um conjunto de pontos compreendidos como linhas infinitas e não curvas. Estas não apresentam definição, mesmo considerando que sejam formadas por pontos.

Referente ao plano, este é reconhecido como sendo o objeto formado pelo conjunto de enfileiramento de retas. Na Geometria Euclidiana, um **plano** é uma superfície perfeitamente lisa, contínua e bidimensional, que se estende infinitamente em todas as direções dentro de suas duas dimensões. Ele não possui espessura, e qualquer ponto pertencente a esse plano pode ser conectado a outro por um segmento de reta inteiramente contido nele.

De modo intuitivo, pode-se imaginar o plano como uma folha de papel ilimitada, onde figuras geométricas como retas, polígonos e circunferências podem ser traçadas. Formalmente, o plano é definido por três pontos não colineares, isto é, que não pertencem à mesma reta, garantindo assim a unicidade e existência de um único plano que os contém.

No espaço tridimensional, o plano pode ser representado por uma equação do tipo:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde a, b, c e d são constantes reais e (x, y, z) são as coordenadas dos pontos do espaço que pertencem ao plano. Essas noções primitivas que não definidas, podem ser reconhecidas de dois tipos,tais quais os objetos e as relações não definidas (JúNIOR, 2000).

Nesse contexto, ponto, reta e plano, ainda que as suas representações geométricas e espaciais sejam importantes, são exemplos de objetos não definidos. Assim as ideias de pertinência e continência são exemplos de relações não definidas. Dessa forma, as relações existentes entre os objetos são estabelecidas pelas propriedades como, por exemplo, numa reta em que há infinitos pontos que pertencem a ela. Esta propriedade estabelece uma relação de pertinência entre o objeto ponto e o objeto reta.

O ponto, a reta e o plano são então, definições primitivas que devem ser aceitas sem contestação e a partir delas surgiram os fundamentos da Geometria Plana ou Euclidiana.

Esses postulados ou axiomas primitivos da geometria, são aceitos sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova, conforme corrobora Junior:

> Axiomas ou propriedades primitivas ou postulados: são as propriedades selecionadas para servir de fundamentação à Geometria. Em grego, axioma, significa "dignos de confiança." Teoremas: são as demais propriedades que podem ser deduzidas a partir dos postulados, o termo postulado é proveniente da palavra grega que significa "penso, medito." (JUNIOR, 2013)

Nesse sentido, na Geometria Euclidiana, como anteriormente colocado, ponto, reta e plano são considerados conceitos primitivos, ou seja, não são definidos por outros conceitos, mas sim compreendidos intuitivamente. No entanto, Euclides propôs definições descritivas para esses elementos em Os Elementos, com o intuito de guiar a compreensão inicial:

- Ponto: aquilo que não possui dimensão.

Ponto A

Figura 1.1: Representação de um ponto.
Fonte: Elaboração própria.

- Reta: um comprimento sem largura.

Reta r

Figura 1.2: Representação de uma reta.
Fonte: Elaboração própria.

- Plano: superfície que possui apenas comprimento e largura.

Plano π

Figura 1.3: Representação de um plano.
Fonte: Elaboração própria.

Esses elementos são essenciais para as construções geométricas e para o entendimento das propriedades dos sólidos que serão estudados posteriormente neste trabalho. A compreensão clara desses conceitos é fundamental para a manipulação de formas geométricas por meio de dobraduras.

Vale ressaltar ainda que, de acordo com Maiorino (2011), o estudo dos teoremas de Euclides favorece a compreensão de conceitos como congruência, paralelismo, proporcionalidade e relações métricas, que são basilares para a resolução de problemas geométricos no Ensino Básico. Nesse contexto, o uso de dobraduras pode contribuir para tornar esses conceitos mais concretos, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem elementos geométricos presentes nos teoremas euclidianos, uma vez que desde os primeiros anos escolares, os conceitos de ponto e reta são introduzidos, embora frequentemente sem uma análise mais profunda de suas propriedades.

A partir dos postulados de Euclides é possível verificar que a Geometria da Incidência busca formalizar as ideias iniciais por meio de axiomas que estabelecem relações fundamentais entre esses elementos apresentados.

Os axiomas de incidência que regem a existência de pontos e retas são:

Axioma de Incidência 1: Por dois pontos distintos passa uma única reta.

Esse axioma estabelece que, dados dois pontos distintos, existe uma e somente uma reta que os contém.

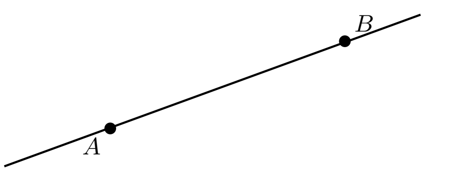

Figura 1.4: A única reta que passa por dois pontos distintos
Fonte: Elaboração própria.

Axioma de Incidência 2: Toda reta contém, pelo menos, dois pontos distintos.

Esse axioma afirma que uma reta não pode ser formada por um único ponto; ela deve conter, no mínimo, dois pontos distintos.

Figura 1.5: Uma reta contendo ao menos dois pontos
Fonte: Elaboração própria.

Axioma de Incidência 3: Existem três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.

Esse axioma garante a existência do plano, ao afirmar que nem todos os pontos pertencem a uma mesma reta.

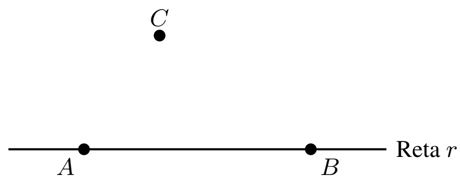

Figura 1.6: Três pontos, dos quais A e B são colineares, mas C não
Fonte: Elaboração própria.

Esses axiomas compõem a base da Geometria da Incidência e fundamentam a estrutura lógica sobre a qual se constrói a Geometria Plana. Ponto, reta, plano e espaço são considerados conceitos primitivos, e a partir deles se desenvolve um conjunto robusto de conhecimentos geométricos tão úteis e necessários ao ensino tanto de Matemática quanto de outros componentes curriculares.

Capítulo 2

Origamis e dobraduras: breve histórico

Historicamente, origami é uma arte milenar que consiste na criação de figuras por meio de dobras em papel, sem o uso de recortes ou colagens. Sua origem está fortemente relacionada ao desenvolvimento do papel, cuja invenção é atribuída à China, por volta do século II a.C. Assim, é plausível supor que as primeiras dobraduras tenham surgido naquele contexto cultural, posteriormente, essa prática foi difundida para o Japão, onde se desenvolveu de forma mais sistemática entre os séculos XVII e XIX, durante o período Edo. Já no Japão, o origami assumiu significados simbólicos e cerimoniais, sendo utilizados, por exemplo, em eventos religiosos e sociais.

O termo "origami" deriva da junção dos vocábulos japoneses "ori" (dobrar) e "kami" (papel), formando a expressão "papel dobrado". Porém, inicialmente, o origami era conhecido por outros nomes, como Orisue e Origata, designando formas dobradas com fins decorativos ou simbólicos. Com o passar do tempo, o termo foi consolidado e popularizado como "origami", especialmente a partir do final do século XIX.

Já na Europa, o uso de dobraduras de papel também se desenvolveu de forma independente, principalmente a partir do século XV, quando o papel se tornou mais acessível. Acredita-se que a presença árabe na Península Ibérica contribuiu para essa difusão.

As dobraduras europeias, diferenciando-se dos fins asiáticos, assumiram, em muitos casos, uma característica mais geométrica e sistemática, sendo utilizadas inclusive em contextos educacionais. Um exemplo marcante do uso das dobraduras, foi a sua introdução nas escolas alemãs, como parte do trabalho pedagógico desenvolvido por Friedrich Fröbel, criador dos jardins de infância (Kindergarten), que reconhecia o valor das dobraduras para o ensino de formas e estruturas espaciais.

Atualmente, o origami é reconhecido não apenas como expressão artística, mas também como ferramenta educacional. Suas aplicações vão desde atividades recreativas até propostas pedagógicas estruturadas, como no ensino de Geometria, por permitir a visualização e manipulação concreta de conceitos abstratos.

Na educação matemática, o origami ganhou destaque a partir dos estudos de Robert Lang, Toshikazu Kawasaki e Humiaki Huzita, que sistematizaram os fundamentos matemáticos das dobras. Esses fundamentos permitiram o desenvolvimento de modelos cada vez mais complexos e rigorosos do ponto de vista geométrico.

Assim é possível afirmar que o uso de dobraduras, tem se mostrado uma ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de geometria, pois além de estimular a visualização espacial, permite ao estudante explorar conceitos matemáticos por meio de construções manuais, promovendo uma aprendizagem ativa.

Como colocado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, os conceitos geométricos representam parte crucial no currículo de Matemática do Ensino Fundamental pois por meio de conceitos explorados, o estudante tem a possibilidade de desenvolver um importante pensamento que lhe permitirá compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive, interagindo de forma crítica e ativa na sua construção. Sobre o estudo da Geometria, os PCNs explicitam que:

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações problema e é tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.(BRASIL, 1998)

Dessa forma, é possível compreender a importância do ensino de Geometria para a aquisição de conhecimentos de extrema relevância para o sucesso da aquisição de conhecimentos matemáticos, pois a partir destes conhecimentos os estudantes podem ter seu repertório ampliado e qualificado continuamente. Assim, trabalho com dobraduras possibilita a visualização, a discussão e a exploração das propriedades dos polígonos, o que oportuniza a exploração das relações espaciais, tão importante no ensino de Matemática na educação básica, tornando-a cada vez mais concreta e possível de ser manuseada nessa fase de ensino como colocado por Lorenzato (2009).

Além disso, de acordo com Lorenzato (2010) é importante compreender que o experimentar é essencial, uma vez que desperta a reflexão, o raciocínio e a constante construção do conhecimento, pois experimentar se constitui em investigar e valorizar o processo da construção do saber em lugar do resultado, pois mais importante que saber o resultado final, a solução, é entender como a mesma foi encontrada. "A experimentação é o melhor modo para se conseguir a aprendizagem com significado, uma vez que ela realça o "porquê", a explicação e, assim valorizar a compreensão". Tais características são inerentes ao ensino de Geometria a partir do uso de dobraduras.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o ensino de Geometria no Ensino Fundamental deve envolver atividades práticas e o uso de materiais concretos, com o objetivo de desenvolver a visualização espacial, a percepção de formas e a construção de conceitos geométricos fundamentais. Nesse contexto, as dobraduras (como o origami) constituem uma ferramenta valiosa para explorar propriedades das figuras planas e espaciais, bem como relações entre pontos, retas e planos.

Segundo a BNCC:

> "É essencial que os alunos tenham a oportunidade de observar, descrever, comparar, classificar, desenhar e construir figuras geométricas planas e espaciais, utilizando diferentes materiais e tecnologias, de forma a desenvolver progressivamente a capacidade de abstração e a visualização espacial." (BRASIL, 2018).

As dobraduras permitem que os estudantes manipulem diretamente o papel para observar simetrias, congruências, ângulos e outras propriedades geométricas. Essa abordagem está em conformidade com diversas habilidades da BNCC, como a habilidade (EF03MA16), que propõe "reconhecer e nomear figuras geométricas espaciais (como cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone e pirâmide), identificando características (número de faces, vértices e arestas), utilizando materiais concretos".

Além disso, a habilidade (EF04MA19) sugere "construir figuras geométricas planas e espaciais usando materiais diversos, como palitos, dobraduras e softwares de geometria", o que reforça a aplicabilidade das dobraduras como estratégia para o ensino de Geometria.

Dessa forma, o uso de dobraduras, não apenas atende às orientações da BNCC, como também favorece a aprendizagem significativa de conceitos geométricos por meio da experimentação e da construção ativa do conhecimento.

2.1 Axiomas de Huzita-Hatori

O matemático japonês Humiaki Huzita destacou-se por sistematizar seis operações fundamentais capazes de descrever construções geométricas com dobraduras (sem a necessidade do uso de objetos como régua e compasso). Posteriormente, o físico Koshiro Hatori contribuiu com um sétimo axioma, completando o conjunto conhecido atualmente como os Sete Axiomas de Huzita-Hatori.

Esses axiomas descrevem dobras possíveis em uma folha de papel a partir de pontos e retas definidos, sendo equivalentes a construções geométricas que, em muitos casos, ultrapassam as possibilidades da régua e compasso, conforme as construções realizadas a partir da Geometria Euclidiana.

A seguir, serão apresentados os axiomas de Huzita-Hatori com sua breve interpretação geométrica, bem como sua aplicação pedagógica, sua equivalência com a Geometria Euclidiana, quando possível, e sua aplicação didática. A intenção aqui é apresentar a aplicabilidade desses axiomas nas mais variadas etapas da educação básica.

Axioma I: Dados dois pontos distintos p_1 e p_2, existe uma única dobra (reta) que passa por ambos.

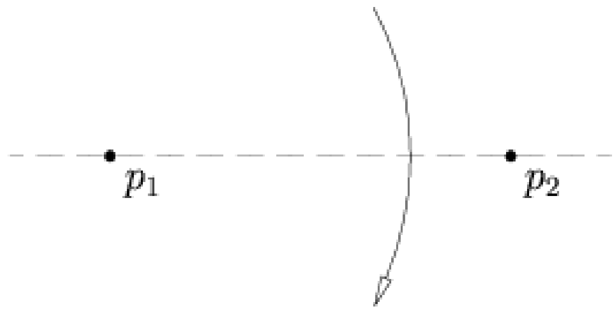

Figura 2.1: Axioma I
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

- Interpretação geométrica: Esse postulado equivale ao axioma fundamental da Geometria Euclidiana que afirma que por dois pontos distintos passa exatamente uma reta. A dobra que une p_1 e p_2 pode ser feita alinhando um ponto sobre o outro com o vinco resultante da dobra.
- Aplicação didática: Ideal para introduzir a noção de reta entre dois pontos em atividades com dobraduras. Pode ser explorado desde o 6º ano do Ensino Fundamental.
- Correspondência euclidiana: uma única reta passa por dois pontos distintos.

Axioma II: Dados dois pontos distintos: p_1 e p_2, existe uma dobra que leva o ponto p_1 até o ponto p_2.

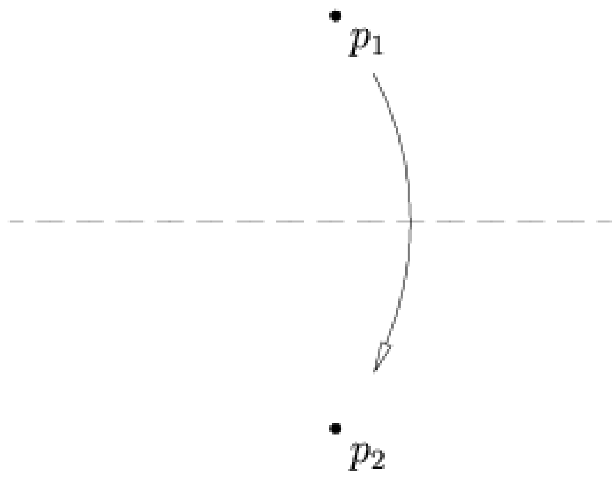

Figura 2.2: Axioma II
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

- Interpretação geométrica: Trata-se da construção da mediatriz do segmento $\overline{p_1p_2}$, pois a dobra que leva um ponto ao outro gera uma linha de simetria entre os dois;
- Aplicação didática: Permite discutir propriedades da mediatriz, simetria axial e equidistância, ponto médio, além de favorecer a compreensão de locais geométricos no plano.
- Correspondência euclidiana: a **mediatriz** é a reta que passa exatamente pelo ponto médio desse segmento e que é perpendicular a ele. Em outras palavras, trata-se da reta que divide

o segmento em duas partes congruentes, formando ângulos retos com ele no ponto de interseção. Assim, se um ponto pertence à mediatriz de um segmento que une os pontos p_1 e p_2, então ele está à mesma distância de p_1 e de p_2.

Axioma III: Dadas duas retas l_1 e l_2, existe uma dobra que leva l_1 a coincidir com l_2.

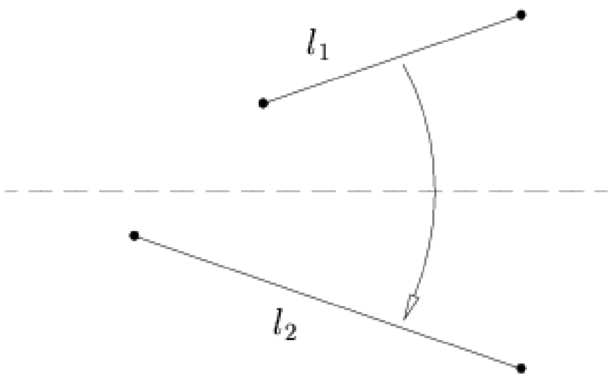

Figura 2.3: Axioma III
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

- Interpretação geométrica: Essa operação corresponde à construção do bissetor angular entre as retas l_1 e l_2, assumindo que elas se interceptam ou não são paralelas.
- Aplicação didática: Utilizada para introduzir o conceito de bissetriz de um ângulo. Pode ser aplicada em estudos de reflexão de luz, simetrias e ângulos internos em polígonos.
- Correspondência euclidiana: essa dobra corresponde à bissetriz do ângulo formado pelas duas retas.

Axioma IV: Dado um ponto e uma reta, existe uma única dobra perpendicular à reta passando pelo ponto.

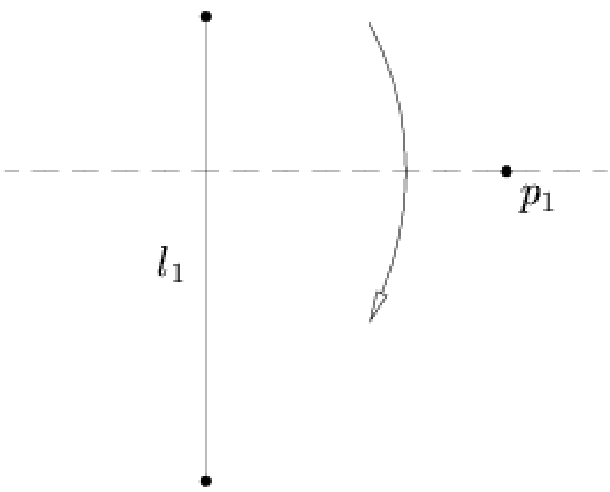

Figura 2.4: Axioma IV
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

- Interpretação geométrica: construção de perpendicularidade entre uma reta e um ponto;
- Aplicação didática: utilizada na construção de retas perpendiculares, considerando a ideia de distância entre uma reta e um ponto;
- Correspondência euclidiana: construção da perpendicular por um ponto externo.

Axioma V: Dados dois pontos distintos e uma reta, é possível realizar uma dobra que leve um dos pontos até a reta e passe pelo outro, desde que certas condições sejam respeitadas: a distância entre os pontos p_1 e p_2 deve se maior ou igual que a distância entre l_1 e p_2.

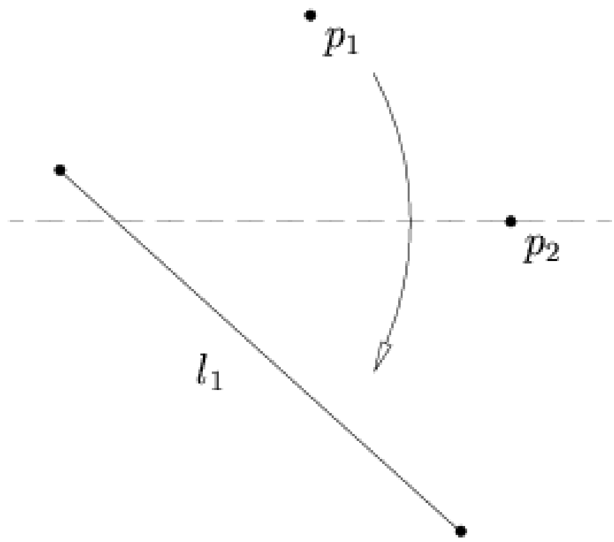

Figura 2.5: Axioma V
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

Observação: essa construção não é possível com régua e compasso, o que destaca o poder das dobraduras.

- Interpretação geométrica: Trata-se de uma variação do axioma IV, mas com as restrições aplicadas em diferente ordem. Pode envolver reflexões oblíquas e construções indiretas.
- Aplicação didática: Pode ser trabalhado em atividades investigativas para estimular o raciocínio geométrico e a dedução de propriedades relacionadas à simetria e à perpendicularidade.
- Correspondência euclidiana: esse axioma pode ser associado à intersecção de uma parábola com uma reta, ou à solução de problemas geométricos que envolve reflexão e distância.

Axioma VI: Dados dois pontos p_1 e p_2 e duas retas l_1 e l_2, existe uma dobra que leva simultaneamente p_1 sobre l_1 e p_2 sobre l_2.

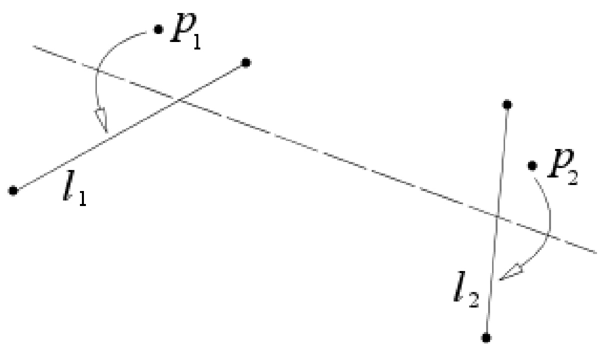

Figura 2.6: Axioma VI
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

Observação: essa operação também excede as possibilidades da ferramentas clássicas.

- Interpretação geométrica: Este é o postulado mais complexo do conjunto, pois sua resolução envolve a solução de equações cúbicas.
- Aplicação didática: Pode ser usado em contextos de ensino médio ou superior para mostrar como o origami ultrapassa as limitações das construções clássicas. Serve para ampliar a visão dos estudantes sobre as fronteiras da Geometria.
- Correspondência euclidiana: não é possível realizar essa construção usando régua e compasso. Esse axioma demonstra que o origami tem um poder construtivo maior que o da geometria euclidiana tradicional.

Axioma VII: Dado um ponto p e duas retas l_1 e l_2, existe uma dobra que leva p sobre l_1 e é perpendicular a l_2.

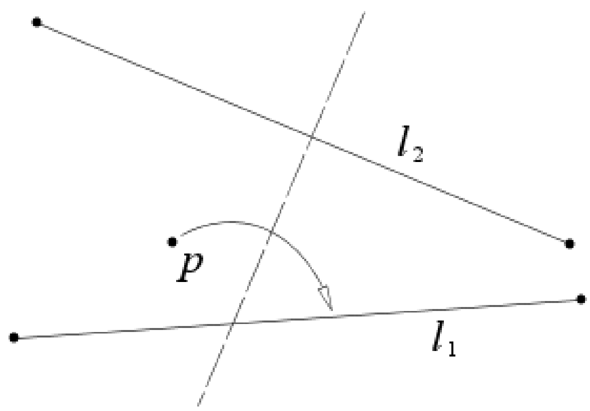

Figura 2.7: Axioma VII
Fonte: Elaboração própria com base em (HUZITA, 1989).

- Interpretação geométrica: Aqui, há uma restrição dupla: a dobra deve alinhar um ponto com uma reta e ao mesmo tempo formar ângulo reto com uma segunda reta. Essa construção geralmente resulta em uma parábola, dependendo das condições iniciais.
- Aplicação didática: Interessante para introduzir a ideia de construções com múltiplas con-

dições e para provocar discussões sobre lugares geométricos. Também serve de transição para temas de Geometria Analítica.

- Correspondência euclidiana: ultrapassa o conjunto de construções tradicionais possíveis com régua e compasso, exigindo a resolução de um sistema de equações que envolvem: a reflexão de um ponto em relação a uma reta variável (a ser determinada) e a ortogonalidade entre a dada reta e outra reta já fixa.

Observação: esse axioma pode ser obtido por composições sucessivas dos anteriores, mas é tratado como um axioma independente por sua importância prática.

Assim, a partir do exposto é possível observar que a articulação entre a Geometria Euclidiana Plana e os Axiomas de Huzita-Hatori possibilita compreender como os princípios clássicos da geometria podem ser aplicados, de forma concreta, por meio de dobraduras utilizadas no origami. Essa relação não apenas favorece o aprendizado de conteúdos matemáticos, como também proporciona uma alternativa metodológica inovadora para a sala de aula.

De acordo com Lorenzato:

> Usando a régua e o compasso, é possível traçar linhas retas, construir um ângulo e sua bissetriz, obter retas perpendiculares, paralelas, diagonais e muitas outras figuras. Várias dessas construções podem ser feitas com as dobraduras, o que possibilita ao professor de matemática, em sala de aula, enfatizar a importância do lúdico na construção, comparação, estabelecimento de relações, medição, visualização e resolução de problemas. (LORENZATO, 2009, p.99)

Daí, têm-se que a Geometria Euclidiana, estruturada por meio de definições, postulados e teoremas em *Os Elementos* de Euclides, constitui a base do ensino tradicional de Geometria. Por outro lado, a Geometria Origâmica, fundamentada nos axiomas de Huzita-Hatori, oferece uma abordagem alternativa e complementar, explorando construções por meio de dobras em papel.

É possível verificar que ambas as abordagens partem de um conjunto pequeno de axiomas ou postulados para construir um sistema lógico consistente. Assim como os teoremas de Euclides partem de princípios simples para alcançar proposições complexas, os axiomas de Huzita-Hatori permitem construir figuras geométricas progressivamente mais elaboradas.

Enquanto a Geometria Euclidiana tradicional utiliza régua e compasso como ferramentas de construção, a Geometria Origâmica utiliza o papel e a manipulação tátil como instrumentos geométricos, promovendo uma abordagem mais concreta e experimental.

Integrar os dois sistemas em sala de aula amplia o repertório geométrico dos alunos à proporção que lhes oportuniza a utilização de instrumentos alternativos como a manipulação de dobraduras permitindo tornar tangíveis conceitos abstratos da Geometria Euclidiana, como:

- Mediatriz como perpendicular que divide um segmento;
- Bissetriz como dobradura que divide um ângulo em duas partes iguais;
- Propriedades de simetria, congruência e equivalência;

- Interseção de retas e definição de ângulos.

Essa abordagem multisensorial, segundo Maiorino (2011), pode facilitar a aprendizagem, especialmente para estudantes com dificuldades na abstração geométrica.

Em suma, é possível afirmar que o diálogo entre os teoremas de Euclides e os axiomas de Huzita-Hatori enriquece o ensino de Geometria ao articular teoria e prática, abstração e experimentação, de modo que ao incorporar o origami como ferramenta didática, o professor oferece aos alunos novas formas de explorar propriedades geométricas, estimulando o raciocínio lógico, a criatividade e a percepção espacial, característica de grande relevância no processo de aprendizagem dos estudantes da educação básica.

A tabela a seguir resume os postulados de Huzita-Hatori, suas características geométricas e aplicações no contexto educacional:

Tabela 2.1: Aplicação dos Axiomas de Huzita Hatori

Axiomas	**Construção Geométrica**	**Aplicações no Ensino**
A1	Reta entre dois pontos	Noção de reta, distância e alinhamento entre dois pontos.
A2	Mediatriz (dobrar um ponto sobre outro)	Simetria, equidistância.
A3	Sobreposição de retas	Bissetriz de ângulos, simetria.
A4	Alinhamento ponto-reta + perpendicularidade	Construção condicionada, parábolas.
A5	Perpendicular por um ponto	Ângulo reto, simetria axial.
A6	Alinhamento simultâneo de dois pontos sobre duas retas	Construção cúbica, resolução de problemas impossíveis com régua e compasso.
A7	Alinhamento ponto-reta + perpendicularidade (variação)	Exploração de simetrias e construções restritivas.

Fonte: Elaboração própria.

Esses axiomas demonstram que é possível realizar construções geométricas equivalentes — e até mais amplas — do que aquelas feitas com régua e compasso, utilizando apenas papel e dobras. A compreensão dessas operações amplia o repertório de ferramentas didáticas e fortalece a relação entre geometria teórica e prática, superando a mera abstração de conteúdos, possibilitando assim uma aprendizagem mais significativa.

A partir do exposto, é possível afirmar que os axiomas de Huzita-Hatori ampliam significativamente as possibilidades de ensino da Geometria no contexto escolar básico. Ao incorporá-los de forma planejada em atividades com dobraduras. Nesse sentido, para que a aprendizagem aconteça de forma efetiva, o professor pode desenvolver um ensino mais dinâmico, interativo e conceitualmente profundo, favorecendo a construção ativa do conhecimento geométrico, onde o estudante represente o sujeito capaz de produzir e compreender os conceitos lhes apresentados.

Dessa forma, é importante destacar que a abordagem por meio dos Axiomas de Huzita-Hatori favorece não apenas a aprendizagem matemática, mas também o desenvolvimento da criatividade, da coordenação motora e da visualização espacial dos estudantes, aspectos essenciais na formação matemática na Educação Básica.

2.2 A Trissecção do Ângulo

A trissecção de um ângulo é um dos problemas mais conhecidos da geometria clássica. Ao lado da quadratura do círculo e da duplicação do cubo, compõe o grupo dos três problemas impossíveis da Antiguidade quando se utiliza apenas régua e compasso. No entanto, com o uso de dobragens de papel — ou seja, técnicas oriundas do Origami geométrico — é possível realizar essa tarefa com precisão.

Aqui será apresentada uma construção que permite dividir um ângulo qualquer em três partes iguais, por meio de dobras retas. A proposta é baseada no método fundamentado no sexto axioma da geometria do Origami, conhecido como Axioma de Huzita-Hatori, cujo objetivo aqui é dividir um ângulo qualquer $\angle EBC$ em três ângulos congruentes, utilizando apenas dobras feitas em uma folha de papel. O processo se baseia em identificar certos pontos e linhas auxiliares que permitem realizar uma dobra que satisfaça simultaneamente duas condições geométricas, algo que não é possível com régua e compasso, mas que é permitido pela teoria do Origami.

As imagens utilizadas ao longo desta dissertação que ilustram o processo de construção dos sólidos geométricos por meio de dobraduras foram retiradas da obra *Explorando Geometria com Origami*, de Furuia e Cavacami (2009), respeitando os princípios de citação e referência conforme as normas da ABNT e encontram-se devidamente referenciadas com a expressão "Adaptado de Furuia e Cavacami (2009)" no corpo do texto e na legenda correspondente.

Etapas do Procedimento

- Começa-se com o ângulo $\angle EBC$, onde B é o vértice comum e os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{BC}$ formam os lados do ângulo.

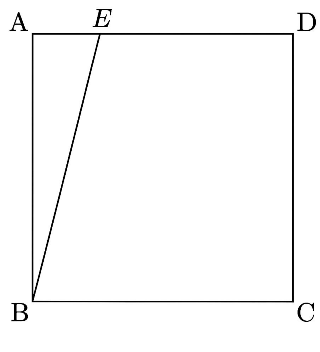

Figura 2.8: Ângulo inicial $\angle EBC$.

Fonte: Furuia e Cavacami(2009).

- Sobre o papel, traça-se uma linha FG paralela a uma base arbitrária, acima do ângulo, de modo que fique no mesmo plano da figura.

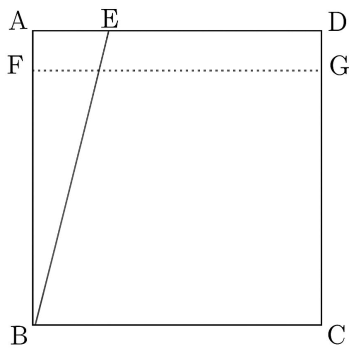

Figura 2.9: Ângulo inicial $\angle EBC$.

Fonte: Furuia e Cavacami (2009).

- Determinam-se os pontos médios dos segmentos $\overline{FB}$ e $\overline{GC}$, denotados por H e I, respectivamente.

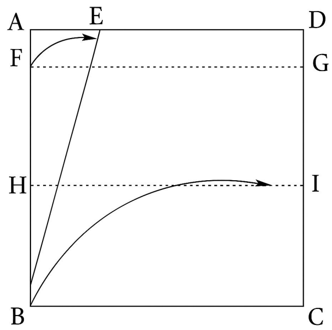

Figura 2.10: Pontos médios H e I dos segmentos $\overline{FB}$ e $\overline{GC}$.

Fonte: Furuia e Cavacami (2009).

A existência dessa dobra simultânea é garantida pelo **Axioma 6 de Huzita-Hatori**, que permite dobrar o papel de modo a levar dois pontos sobre duas retas distintas simultaneamente. Assim tem-se o seguinte resultado:

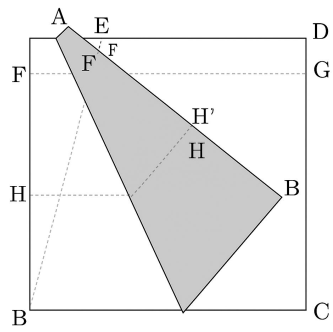

Figura 2.11: Dobra simultânea: $F \mapsto \overline{EB}$ e $B \mapsto \overline{HI}$.

Fonte: Furuia e Cavacami(2009).

- Realiza-se uma dobra única que leva o ponto F sobre a reta $\overline{EB}$ e o ponto B sobre a reta $\overline{HI}$.

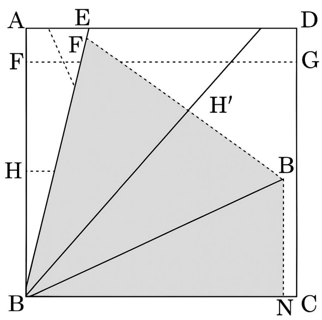

Figura 2.12: Imagens dos pontos após a dobra: B', F' e H'.

Fonte: Furuia e Cavacami (2009).

Após efetuar essa dobra e desdobrar o papel, os pontos onde F e B foram levados são marcados como F' e B'. Além disso, o ponto H também será refletido, originando um novo ponto H'. A partir desses pontos, será possível verificar a trissecção do ângulo.

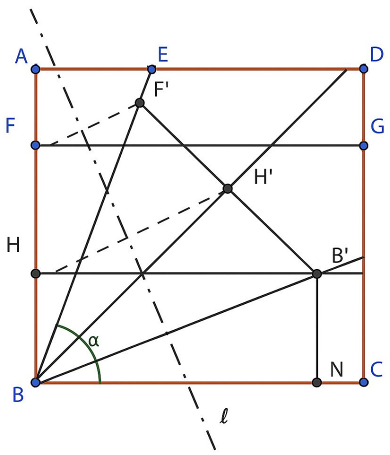

Figura 2.13: Formação de três triângulos congruentes com vértice comum B.

Fonte: Furuia e Cavacami (2009).

É possível verificar então que a construção produz três triângulos retângulos e congruentes: $\triangle BB'F'$, $\triangle BB'H'$ e $\triangle BB'N$, onde o ponto N é o vértice do terceiro triângulo, simetricamente oposto a F' e H'. Esses triângulos compartilham o lado comum $\overline{BB'}$ e possuem lados congruentes, o que assegura a igualdade dos ângulos internos formados em B. Dessa forma, o ângulo $\angle EBC$ foi dividido em três ângulos iguais.

2.3 Resolução do Problema da Duplicação do Cubo através de dobragens

A duplicação do cubo, também conhecida como *problema délico*, consiste em construir um novo cubo, a partir de um cubo dado, cujo volume desse novo cubo seja exatamente o dobro do volume do cubo anterior. Esse é um dos três grandes problemas clássicos da Antiguidade que se mostraram insolúveis utilizando apenas régua e compasso. No entanto, a Geometria do Origami permite resolver esse problema por meio das dobraduras, em especial com a aplicação do **Axioma VI** de Huzita-Hatori. Se a aresta do cubo inicial é a, então o novo cubo deve ter aresta b, tal que:

$$b^3 = 2a^3 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[3]{2}a.$$

Embora esse problema seja insolúvel utilizando apenas régua e compasso, ele pode ser resolvido com as técnicas de dobradura do Origami, especialmente com o uso do sexto axioma de Huzita, que permite levar simultaneamente dois pontos a duas retas por meio de uma única dobra.

A partir de um segmento de comprimento unitário é possível construir segmentos que representam a, a^2, e a^3, conforme ilustrado a seguir.

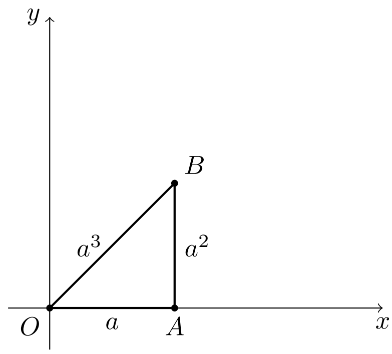

Figura 2.14: Construção dos segmentos a, a^2 e a^3

Fonte: Furuia e Cavacami(2009).

- Obtenção de $\sqrt[3]{2}a$: Tendo obtido o segmento a^3, podemos duplicá-lo, formando $u = 2a^3$. O objetivo agora é determinar um segmento de comprimento $b = \sqrt[3]{2}a$.

Etapas da construção

- Construa um retângulo $ABCD$ suficientemente grande.
- No segmento AB, marque os pontos E e F tais que $AE = 1$ e $AF = 2$.
- No lado AD, marque os pontos I e A' de modo que $AI = IA' = u = 2a^3$.
- Trace as retas EG e $A'B'$, e identifique $O = EG \cap IJ$.
- A dobra que leva I sobre FH e E sobre $A'B'$, segundo o Axioma 6, determina uma linha ℓ que intercepta EG no ponto P. Neste ponto, $OP = \sqrt[3]{2}a$.

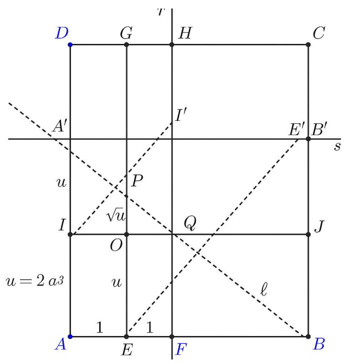

Figura 2.15: Duplicação do cubo

Fonte: Furuia e Cavacami(2009).

A construção realizada com Origami fornece uma solução exata para a duplicação do cubo, o que demonstra o poder das técnicas de dobradura frente às limitações da geometria euclidiana clássica com régua e compasso. A chave está na possibilidade de realizar dobras simultâneas (Axioma 6), viabilizando construções que ultrapassam o campo das soluções clássicas.

A aplicação dos axiomas de Huzita, e em especial o sexto axioma, torna possível a resolução de problemas geométricos históricos que desafiaram matemáticos por séculos. A duplicação do cubo, ao ser resolvida com Origami, ilustra como essa arte milenar pode oferecer novas perspectivas para o ensino e a compreensão da matemática, contribuindo para tornar conteúdos abstratos mais concretos e acessíveis.

Essa construção é um exemplo marcante da superioridade da Geometria Origâmica em relação às limitações impostas pela Geometria Euclidiana com instrumentos clássicos. O uso do Axioma VI de Huzita-Hatori, além de ilustrar esse poder construtivo, possibilita levar ao ambiente escolar a resolução de um problema histórico utilizando uma abordagem concreta e significativa para os estudantes.

Assim é possível verificar que validade da construção baseia-se no fato de que a dobra realizada é a mediatriz entre os segmentos correspondentes e satisfaz a condição de superposição dos pontos e retas estabelecidas. O ponto P assim obtido permite determinar um novo segmento b tal que, ao construir um cubo com essa aresta, o volume será exatamente o dobro do volume do cubo original.

Portanto, a técnica de Origami aplicada aqui demonstra a potência da geometria das dobragens na resolução de problemas que são, de outra forma, insolúveis com os instrumentos clássicos. Ao utilizar o Axioma 6 de Huzita-Hatori, conseguimos realizar, com rigor matemático e simplicidade visual, uma tarefa que as construções geométricas com régua e compasso não permitem: a duplicação exata do volume de um cubo.

Capítulo 3

Construções com origamis

A Geometria tem sido, desde a Antiguidade, uma das áreas mais exploradas da Matemática, oferecendo não apenas uma base lógica e estruturada, mas também uma rica possibilidade de experimentação visual e tátil. No contexto do Ensino Básico, no entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades com sua abordagem puramente abstrata. A introdução de estratégias didáticas mais interativas, como o uso de dobraduras, pode contribuir significativamente para a superação dessas dificuldades, proporcionando um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e sensível à diversidade de estilos cognitivos dos estudantes.

A Geometria é frequentemente ensinada a partir de definições formais, teoremas e demonstrações que, embora fundamentais para o rigor matemático, podem afastar os estudantes quando não são devidamente contextualizados. De acordo com Boyer (1996), a Geometria, especialmente na tradição euclidiana, representa uma das formas mais refinadas do pensamento dedutivo, mas seu ensino exige mediações que traduzam esse formalismo para o cotidiano do aluno.

A aprendizagem geométrica torna-se mais significativa quando os estudantes são desafiados a explorar, manipular e construir conceitos a partir da realidade. O Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB), destaca a importância de "explorar formas geométricas tridimensionais por meio de experiências com objetos do cotidiano" (Secretaria da Educação do Estado da Bahia, 2022). Neste sentido, as dobraduras se apresentam como uma forma concreta de materializar ideias abstratas, aproximando o raciocínio geométrico da experiência sensorial.

O uso de origami no ensino da Matemática tem ganhado destaque nas últimas décadas, especialmente por sua capacidade de integrar diferentes dimensões do conhecimento: visual, tátil, lógico e criativo. Conforme destaca FUKUCHI (2012), o processo de dobrar papel permite ao aluno explorar conceitos matemáticos como simetria, congruência, proporcionalidade, paralelismo e perpendicularidade, de forma intuitiva e concreta. Nessa perspectiva, é importante colocar que:

> "A proposição de atividades de dobradura e montagem de figuras tridimensionais contribui para que os estudantes desenvolvam a percepção espacial e a capacidade de representar e identificar objetos em diferentes perspectivas." (Secretaria da Educação do Estado da Bahia, 2022)

Além disso, o uso de origami contribui para o desenvolvimento da motricidade fina, da concentração e do exercício da paciência, tornando-se uma prática interdisciplinar que pode envolver a Arte, a História, entre outros componentes curriculares. No contexto específico da Matemática, o valor das dobraduras está em sua capacidade de ilustrar propriedades geométricas de maneira palpável.

As construções geométricas tradicionais, realizadas com régua e compasso, seguem os postulados da Geometria Euclidiana. Com as dobraduras, porém, é possível expandir essas construções, inclusive resolvendo problemas que são insolúveis no contexto clássico, como a trisseção de um ângulo ou a duplicação do cubo. Isso é possível graças aos chamados *postulados de Huzita-Hatori*, que formalizam operações geométricas executadas com papel.

Para Geretschläger (1995), as construções por dobradura permitem realizar operações básicas que, combinadas, ultrapassam as limitações da geometria com régua e compasso. Tais operações incluem a criação de pontos médios, a dobragem de linhas paralelas e perpendiculares, a reflexão de pontos e até a construção de interseções entre linhas dobradas.

Dentre as construções geométricas mais comuns com dobraduras no Ensino Básico, destacam-se:

- Dobrar a mediatriz de um segmento ao unir suas extremidades;

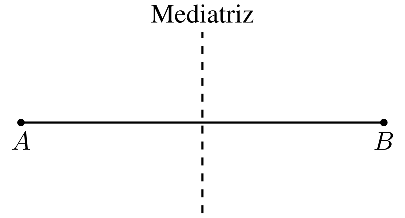

Figura 3.1: Construção da mediatriz de um segmento por dobradura.
Fonte: Elaboração própria.

- Dobrar a bissetriz de um ângulo ao sobrepor os lados;

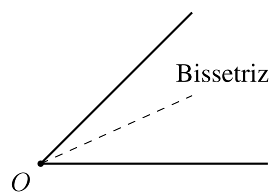

Figura 3.2: Dobra da bissetriz de um ângulo ao sobrepor lados.
Fonte: Elaboração própria.

- Criar perpendiculares e paralelas a partir de dobras sucessivas;

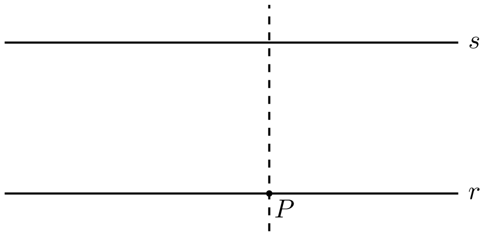

Figura 3.3: Construção de reta perpendicular e paralela por dobraduras.
Fonte: Elaboração própria.

- Construir polígonos regulares e identificar seus eixos de simetria;

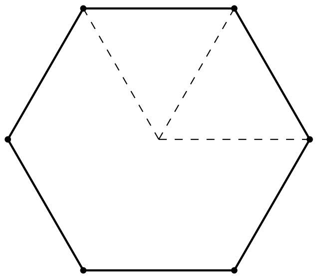

Figura 3.4: Polígono regular (hexágono) e seus eixos de simetria.
Fonte: Elaboração própria.

- Formar moldes para a construção de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirâmides).

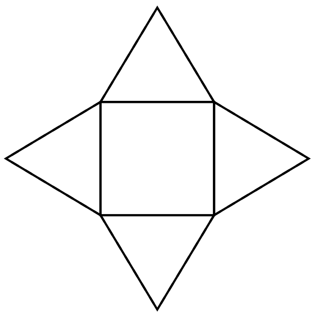

Figura 3.5: Planificação de pirâmide de base quadrada.
Fonte: Elaboração própria.

Essas atividades permitem ao estudante visualizar propriedades, experimentar variações e fazer inferências, aproximando o raciocínio geométrico de um processo investigativo.

Como já colocado anteriormente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe, para o componente de Matemática, o desenvolvimento de competências que incluem o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a comunicação matemática e a argumentação. Sendo assim, o uso de dobraduras se alinha a essas diretrizes ao incentivar uma aprendizagem ativa e investigativa a partir da exploração de conceitos e conhecimentos geométricos.

A BNCC enfatiza ainda que os alunos devem ser capazes de reconhecer e representar figuras geométricas em diferentes dimensões, compreender suas propriedades e utilizá-las para resolver problemas reais (BRASIL, 2018). Nesse cenário, as dobraduras apresentam-se como uma estratégia metodológica que oferece suporte tanto à visualização quanto à construção dos conhecimentos geométricos, permitindo ao estudante vivenciar os conceitos em ação.

E mais ainda, quando integradas de forma planejada ao ensino da Geometria, contribuem para uma aprendizagem mais concreta, significativa e prazerosa, rompendo com a rigidez do ensino tradicional e convidando o aluno a experimentar, explorar e criar. Ao mesmo tempo enquanto oferecem ao professor uma ferramenta didática poderosa, capaz de articular teoria e prática de maneira efetiva, de modo que a adoção de dobraduras no contexto das construções geométricas representa, portanto, uma forma de ressignificar o ensino da Geometria, aproximando-o da experiência do aluno e valorizando a criatividade no processo de aprendizagem matemática.

Nesse sentido, o estudo dos sólidos geométricos representa uma oportunidade de extrema relevância no que se refere à possibilidade de desenvolver nos estudantes habilidades fundamentais como a visualização espacial, o raciocínio lógico e a capacidade de abstração. Esses conteúdos, pertencentes ao campo da Geometria Espacial, possuem ampla aplicabilidade e são essenciais para a formação matemática significativa na Educação Básica.

Segundo DANTE (2005), o ensino da geometria deve privilegiar a construção do conhecimento a partir de experiências concretas, especialmente nos anos iniciais. Nesse sentido, a abordagem dos sólidos geométricos proporciona aos estudantes o contato com objetos tridimensionais reais, permitindo a observação, manipulação e comparação de formas. Essa prática contribui significativamente para a construção de conceitos geométricos mais complexos. Além disso, a Geometria Espacial está diretamente relacionada à realidade dos alunos. Figuras como cubos, paralelepípedos, pirâmides, fazem parte do cotidiano, e reconhecê-las ajuda na compreensão do espaço físico e da organização dos objetos ao redor.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta que os estudantes desenvolvam a habilidade de identificar, representar e comparar objetos geométricos em diferentes posições e dimensões. No componente curricular de Matemática, espera-se que, ao longo da Educação Básica, os alunos aprendam a reconhecer características de sólidos, como faces, arestas e vértices, bem como a compreender as relações entre figuras espaciais e planas. (BRASIL, 2018)

O trabalho com sólidos geométricos permite então, abordar diversos conteúdos curriculares de maneira integrada. A partir da exploração de prismas e pirâmides, por exemplo, é possível estudar áreas, volumes, simetrias, projeções e planificações. Esses conhecimentos são essenciais tanto para a resolução de problemas quanto para a interpretação de representações gráficas e técnicas em outras áreas do saber.

Dessa forma, a utilização de recursos manipulativos, como blocos lógicos, sólidos desmontáveis e dobraduras, potencializa o aprendizado de Geometria Espacial. Esses materiais manipulávais possibilitam ao estudante agir sobre o objeto de estudo, manipulando-o, girando-o e observando-o de diferentes ângulos, o que favorece a construção do conceito (BORIN, 2010)

O origami, como já se sabe, técnica tradicional de dobrar papel, tem se mostrado uma ferramenta pedagógica eficaz no ensino de geometria. É possível afirmar que a construção de sólidos por meio do origami estimula o pensamento geométrico, uma vez que envolve operações como simetria, congruência, ângulos e paralelismo (FREITAG, 2012) . Além disso, atividades com dobraduras desenvolvem a coordenação motora, a atenção e a criatividade dos estudantes.

A aprendizagem de sólidos geométricos está então, associada a importantes capacidades cognitivas, como a organização espacial, a memória visual e o raciocínio dedutivo. Conforme DUVAL (1999), o pensamento geométrico requer a articulação entre diferentes registros de representação — icônico, simbólico e verbal — e o trabalho com sólidos contribui para essa articulação, pois envolve representação tridimensional, linguagem matemática e operações mentais complexas.

A utilização do origami na construção de sólidos geométricos, especialmente os poliedros, proporciona uma experiência didática enriquecedora, permitindo ao estudante visualizar, manusear e compreender conceitos espaciais de maneira concreta. Dentre os diversos autores que exploram essa abordagem, destaca-se a japonesa Miyuki Kawamura, referência mundial na criação de origamis modulares.

Segundo Kawamura (2002), a construção de poliedros com origami modular desenvolve o raciocínio espacial e estimula a percepção geométrica dos modelos tridimensionais." A autora propõe modelos formados por múltiplas unidades dobradas a partir de folhas quadradas, que, ao serem encaixadas sem o uso de cola, constituem formas estáveis e esteticamente harmoniosas.

Assim, pode-se afirmar que o desenvolvimento dessas habilidades é crucial não apenas para a aprendizagem matemática, mas também para outras áreas do conhecimento, como física, artes, geografia e ciências, onde a compreensão do espaço e das formas é igualmente importante.

Então, explorar os sólidos geométricos na Educação Básica pode representar uma prática que oferece ao estudante a oportunidade de desenvolver uma compreensão mais profunda do mundo tridimensional em que vive. Através da manipulação concreta, da observação e da análise das propriedades das formas espaciais, os alunos constroem conhecimentos significativos e duradouros.

> "Na etapa do Ensino Fundamental, é essencial que os estudantes possam manipular objetos, construir modelos e observar formas geométricas em contextos reais e em materiais didáticos que favoreçam a compreensão das características e propriedades das figuras planas e espaciais." (Secretaria da Educação do Estado da Bahia, 2022)

Assim, é fundamental que o professor planeje e execute atividades que contemplem o estudo dos sólidos geométricos de maneira contextualizada e dinâmica, incorporando recursos visuais e manipulativos, como as dobraduras. Tais práticas tornam o ensino mais atrativo, favorecendo a aprendizagem e o desenvolvimento integral do aluno.

3.1 Sólidos de Platão

Os **sólidos de Platão** são cinco poliedros convexos regulares. Cada sólido possui faces formadas por polígonos regulares congruentes e o mesmo número de faces se encontra em cada vértice. Segundo Dolce e Pompeo (2003, p.150) *"esses sólidos representam as únicas possibilidades de combinação regular de polígonos no espaço tridimensional"*.

Ainda para Dolce e Pompeo,

> Os sólidos de Platão são então, corpos limitados por polígonos regulares congruentes, com o mesmo número de faces reunidas em torno de cada vértice. Apenas cinco poliedros satisfazem essas condições de regularidade: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. (DOLCE; POMPEO, 2003, p. 152)

A importância desses sólidos vai além da matemática: Platão os associava aos quatro elementos da natureza (fogo, terra, ar e água) e ao universo. Como afirma Boyer e Merzbach (2021, p.98), os sólidos regulares despertaram o interesse dos gregos antigos por sua beleza e simetria.

Esses sólidos apresentam características importantes:

Tabela 3.1: Características dos sólidos de Platão

Sólido	**Faces**	**Arestas**	**Vértices**	**Face regular**
Tetraedro	4	6	4	Triângulo equilátero
Cubo (Hexaedro)	6	12	8	Quadrado
Octaedro	8	12	6	Triângulo equilátero
Dodecaedro	12	30	20	Pentágono regular
Icosaedro	20	30	12	Triângulo equilátero

Fonte: Elaboração própria.

Esses sólidos de Platão são objetos matemáticos fundamentais tanto para a geometria quanto para a história da referida ciência. Sua estrutura regular e simétrica inspira até hoje diversas áreas, desde o ensino da matemática até o design e a arquitetura.

Nesse sentido, apreende-se que a utilização do origami modular no ensino de Geometria permite que os estudantes construam sólidos compostos a partir da repetição e interconexão de unidades dobradas, promovendo o desenvolvimento do raciocínio espacial, da percepção de simetrias e da compreensão das propriedades dos poliedros. Segundo Furuia e Cavacami (2009), "o uso do origami modular permite uma abordagem mais dinâmica para o estudo dos sólidos geométricos, pois, ao montar os módulos, o aluno explora a estrutura da figura e suas relações internas". Essa prática favorece a aprendizagem significativa ao articular a manipulação concreta com a reflexão matemática, tornando o processo mais atrativo, investigativo e acessível para os alunos da Educação Básica.

A seguir serão apresentados alguns sólidos geométricos e suas características mais relevantes, bem como exemplos de poliedros construídos com base nos origamis descritos na obra de Kawamura (2002).

3.2 Paralelepípedo

O paralelepípedo é um dos sólidos geométricos mais estudados no Ensino Básico, sendo um exemplo clássico de prisma. Trata-se de um poliedro que possui seis faces, todas com formato de paralelogramo. Quando todas as faces são retângulos, o paralelepípedo é chamado de *reto*.

Os principais elementos de um paralelepípedo são:

- **Vértices**: pontos de encontro de três arestas. Um paralelepípedo possui 8 vértices.
- **Arestas**: segmentos de reta que unem dois vértices consecutivos. Possui 12 arestas.
- **Faces**: superfícies planas que delimitam o sólido. Um paralelepípedo possui 6 faces.
- **Diagonais das faces**: segmentos de reta que ligam dois vértices não consecutivos de uma mesma face.
- **Diagonais do sólido**: segmentos de reta que ligam dois vértices não pertencentes à mesma face.

Os paralelepípedos são assim classificados:

- **Paralelepípedo oblíquo**: quando as faces laterais não são perpendiculares à base.
- **Paralelepípedo reto**: quando todas as faces são retângulos.
- **Cubo (ou hexaedro regular)**: caso particular de paralelepípedo reto com todas as arestas congruentes.

O estudo do paralelepípedo permite desenvolver noções de espacialidade, volume e área total, sendo também um dos sólidos mais simples de ser modelado por dobraduras, especialmente a partir de sua planificação em papel (FREITAG, 2012). A construção física do paralelepípedo contribui para a compreensão de seus elementos, pois o estudante pode visualizar concretamente as relações entre faces, vértices e arestas.

Por meio de dobras sucessivas a partir de um papel quadrado, é possível construir paralelogramos retângulos (retângulos e quadrados). Essas figuras servem de base para estruturas tridimensionais e permitem discutir propriedades como lados opostos paralelos e ângulos retos.

A construção de sólidos geométricos com a técnica de origami estimula o raciocínio espacial, a coordenação motora e a compreensão prática de conceitos como arestas, faces e vértices. A seguir, descrevemos o passo a passo para construir um paralelepípedo (caixa retangular) utilizando uma única folha de papel retangular.

Além disso, por meio de dobraduras é possível oferecer aos alunos a oportunidade de explorar as propriedades espaciais de maneira concreta, desenvolvendo a visualização tridimensional, o raciocínio lógico e a percepção geométrica. A seguir, apresentamos o passo a passo para a construção de um paralelepípedo, o cubo.

Cubo:

É um sólido geométrico pertencente ao grupo dos *sólidos platônicos*, caracterizado por possuir **seis faces congruentes** no formato de quadrados, **doze arestas iguais** e **oito vértices**. É um caso particular do paralelepípedo retângulo, no qual todas as dimensões (comprimento, largura e altura) são iguais. É muito relevante reconhecer suas características e calcular suas medidas. Assim, seja a o comprimento da aresta do cubo:

- **Perímetro:** Perímetro de uma face quadrada do cubo é:

$$P = 4a$$

- **Área Total:** A área de cada face é a^2, e como o cubo possui 6 faces:

$$A_T = 6a^2$$

- **Volume:** O volume do cubo é calculado pelo produto das três dimensões:

$$V = a^3$$

- **Planificação do Cubo (hexaedro):**

  A seguir, temos a planificação tradicional do cubo (em cruz):

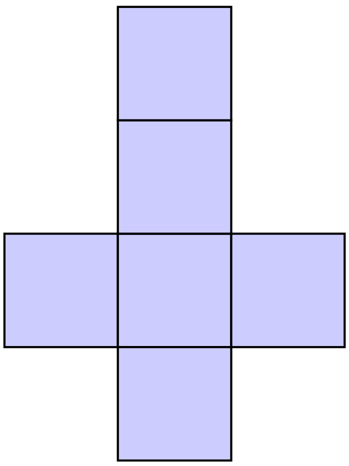

Figura 3.6: Planificação do cubo.
Fonte: Elaboração própria.

Instruções para dobradura de um Hexaedro

- Com uma folha de papel retangular, dobre o canto superior esquerdo até alinhar com a lateral direita inferior, formando um triângulo. Essa dobra servirá para criar um quadrado perfeito.

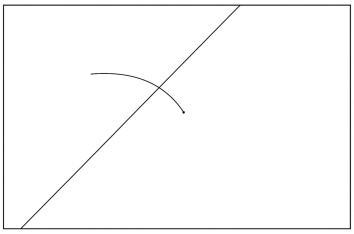

Figura 3.7: Hexaedro-passo I

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Recorte o excesso inferior da folha. O que resta é um quadrado que será usado para a dobradura do módulo.

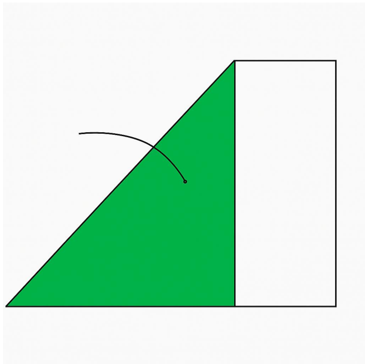

Figura 3.8: Hexaedro-passo II

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Divida o quadrado visualmente em três partes iguais na vertical. Em seguida, dobre uma parte para frente e a outra para trás, produzindo um formato de sanfona.

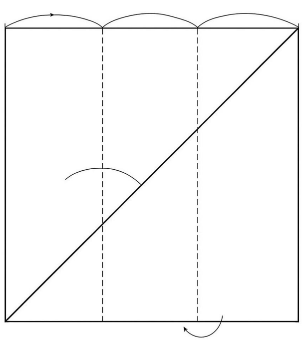

Figura 3.9: Hexaedro-passo III

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Dobre o vértice superior direito e o inferior esquerdo de forma que eles se alinhem com os lados opostos do papel. Essa etapa criará ângulos que definirão as abas de encaixe.

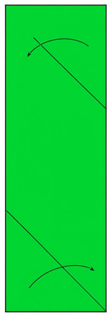

Figura 3.10: Hexaedro-passo IV

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Dobre as extremidades resultantes sobre o quadrado central, criando uma estrutura com duas pontas opostas e “bolsos” laterais que servirão para o encaixe entre os módulos.

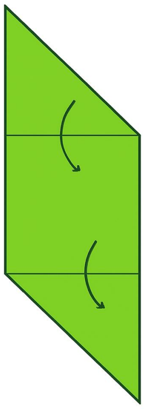

Figura 3.11: Hexaedro-passo V

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Repita esse processo até obter um total de seis módulos idênticos.

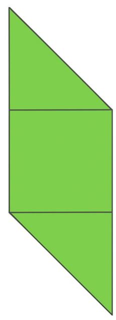

Figura 3.12: Hexaedro-passo VI

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Pegue três dos módulos prontos e encaixe-os conforme ilustrado: dois nas laterais e um ao centro. Use os bolsos formados pelas dobras para fixá-los entre si.

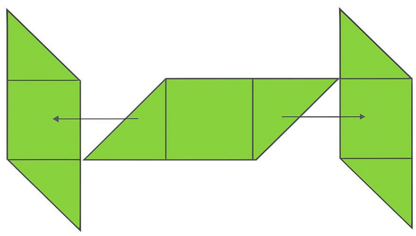

Figura 3.13: Hexaedro-passo VII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Acrescente dois novos módulos nas laterais da estrutura central já formada. Continue usando os encaixes para unir os módulos com firmeza.

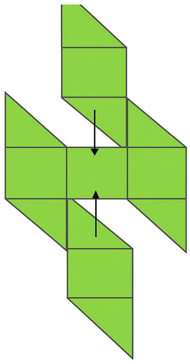

Figura 3.14: Hexaedro-passo VIII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Una as pontas laterais que estão livres para iniciar a formação da estrutura tridimensional.

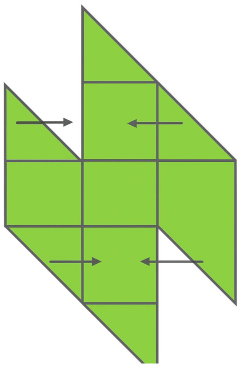

Figura 3.15: Hexaedro-passo IX

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Encaixe o último módulo como se estivesse fechando uma caixa com tampa, completando a forma do sólido.

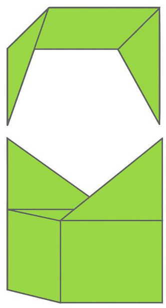

Figura 3.16: Hexaedro-passo X

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

- Ao final, o resultado será um hexaedro regular, também conhecido como cubo, composto por seis faces quadradas perfeitamente encaixadas.

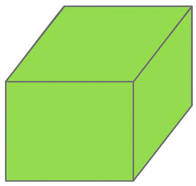

Figura 3.17: Hexaedro-passo XI

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

Assim é possível trabalhar noções básicas e mais complexas de geometria, sobretudo a espacial, relacionando-a com objetos e situações cotidianas. Segundo a BNCC, atividades que envolvem modelagem geométrica contribuem para o desenvolvimento da percepção espacial e da capacidade de abstração dos estudantes. (BRASIL, 2018)

3.3 Pirâmides

Uma **pirâmide** é um poliedro formado por um polígono chamado *base* e por faces laterais triangulares que se encontram em um ponto comum, chamado *vértice da pirâmide* ou *ápice*. As arestas que ligam o vértice às extremidades da base são chamadas arestas laterais.

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o formato de sua base:

- **Triangular:** base com 3 lados (4 faces);
- **Quadrangular:** base com 4 lados (5 faces);
- **Pentagonal:** base com 5 lados (6 faces);
- **Hexagonal:** base com 6 lados (7 faces);
- etc.

Além disso, uma pirâmide pode ser:

- **Regular:** quando a base é um polígono regular e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.
- **Irregular:** quando a base não é regular ou as faces laterais não são congruentes.

Assim como os demais sólidos geométricos, a construção e o estudo de pirâmides na educação básica, com dobradura revela-se uma estratégia eficaz no ensino de geometria espacial, pois permite aos alunos visualizar conceitos como faces, arestas, vértices e desenvolver noções de área e volume (IBRAIM; PIRES, 2022).

Tetraedro

O **tetraedro**, uma pirâmide, é um dos cinco sólidos de Platão e está entre os sólidos mais estudados na geometria espacial. Trata-se de um poliedro convexo formado por quatro faces triangulares congruentes, sendo, portanto, um caso particular de pirâmide com base triangular. É o poliedro com o menor número de faces, vértices e arestas possíveis.

O tetraedro é um sólido geométrico tridimensional cujas quatro faces são triângulos equiláteros congruentes. Por isso, ele é considerado um *sólido regular*. Cada face tem três lados iguais, e todos os ângulos internos medem $60°$.

Esse sólido é constituído pelos seguintes elementos básicos:

- **Faces**: 4 triângulos equiláteros;
- **Arestas**: 6 segmentos de reta que formam as bordas das faces;
- **Vértices**: 4 pontos onde três arestas se encontram;
- **Altura**: distância perpendicular do vértice oposto à base até o plano da base;
- **Aresta lateral**: qualquer aresta que liga o vértice da pirâmide a um vértice da base.

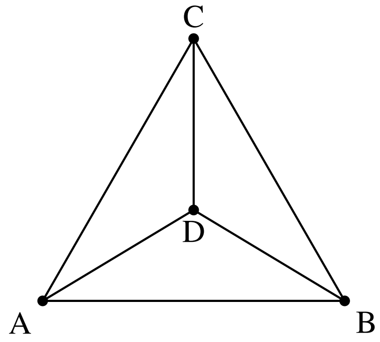

Figura 3.18: Representação do Tetraedro com vértices A, B, C, D

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se destacar então, as principais propriedades do tetraedro:

- É um poliedro regular e convexo;
- Possui simetria tetraédrica (grupo de simetria A_4);
- Cada vértice é comum a três arestas e três faces;
- As alturas do tetraedro (linhas que unem vértices ao centro da face oposta) são concorrentes em um ponto chamado *centro geométrico*.

O volume e a área de um tetraedro regular com aresta de comprimento a, é dado pelas seguintes fórmulas, respectivamente:

- **Área total:**
$$A_T = 4 \cdot \left(a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = a^2\sqrt{3}$$
- **Volume:**
$$V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

O estudo do tetraedro em sala de aula pode ser enriquecido com construções por dobraduras, o que facilita a visualização das faces, vértices e arestas. A construção de tetraedros com papel também permite que o estudante compreenda os conceitos de simetria, planificação e volume de forma concreta, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio espacial.

O tetraedro é um sólido formado por quatro faces triangulares congruentes. Sua construção com dobraduras exige a formação de triângulos equiláteros e a articulação das faces de modo a gerar um volume, sua montagem permite discutir conceitos como vértices, arestas e ângulos interno.

Nesse sentido é possível apreender que a construção de um tetraedro por meio de origami desenvolve a percepção espacial dos estudantes e reforça conceitos geométricos como arestas, vértices e faces.

A seguir, apresentamos o passo a passo para a construção de um tetraedro regular utilizando técnicas de dobradura (origami modular). São necessárias duas folhas quadradas de papel de mesma dimensão. Cada folha gera um módulo, e ambos são montados ao final para formar o sólido.

Instruções para dobradura de um Tetraedro

Materiais: será necessário duas folhas quadradas de papel, de mesmo tamanho.

1. Dobre e desdobre as folhas ao meio.

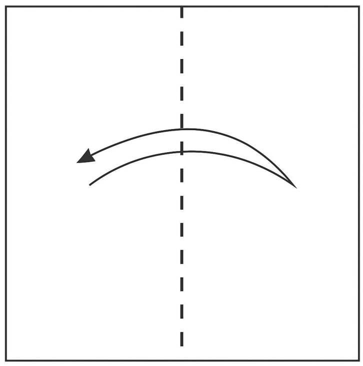

Figura 3.19: Tetraedro: passo I

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

2. Leve o canto inferior esquerdo à linha central anteriormente formada e dobre-a. Atente-se para que a dobra passe pelo canto inferior direito.

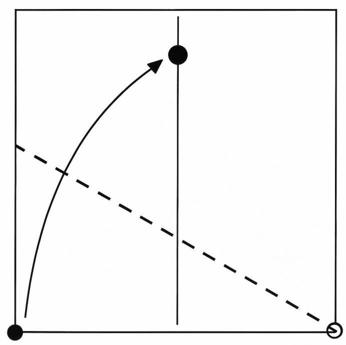

Figura 3.20: Tetraedro: passo II

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

3. Junte os dois pontos marcados e dobre.

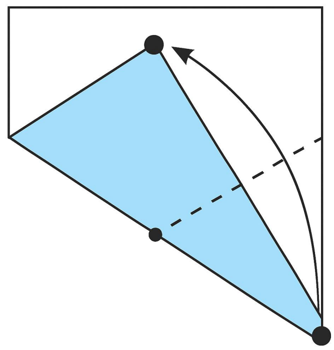

Figura 3.21: Tetraedro: passo III

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

4. Dobre ao longo de toda a borda.

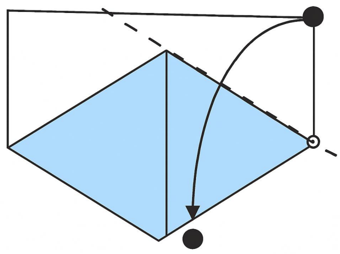

Figura 3.22: Tetraedro: passo IV

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

5. Dobre novamente ao longo da borda.

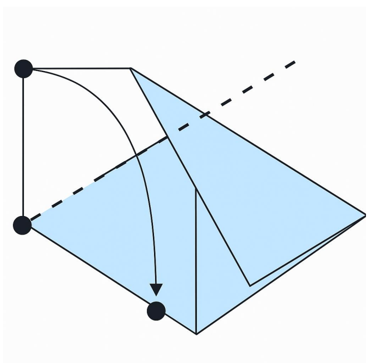

Figura 3.23: Tetraedro: passo V

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

6. Agora será preciso que se obtenha 2 peças idênticas. Desdobre ambas até voltarem a ser quadrados.

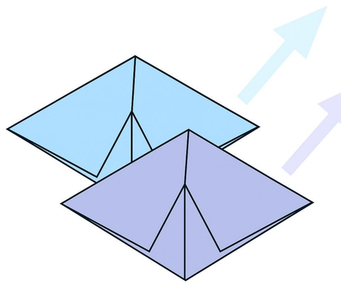

Figura 3.24: Tetraedro: passo VI

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

7. Dobre ao longo da linha de vinco existente. (Cada unidade dobra o lado oposto.)

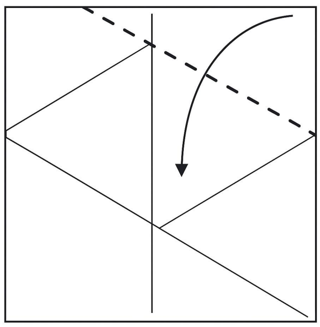

Figura 3.25: Tetraedro: passo VII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

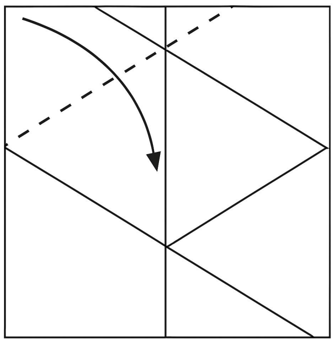

Figura 3.26: Tetraedro: passo VII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

8. Dobre ao longo da linha de vinco existente.

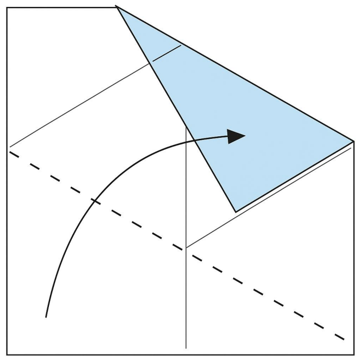

Figura 3.27: Tetraedro: passo VIII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

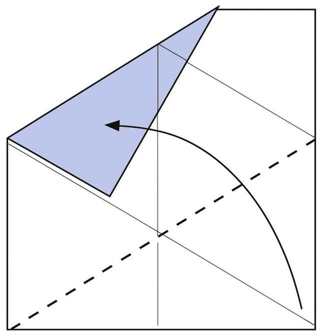

Figura 3.28: Tetraedro: passo VIII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

9. Dobre e volte a desdobrar como indicado.

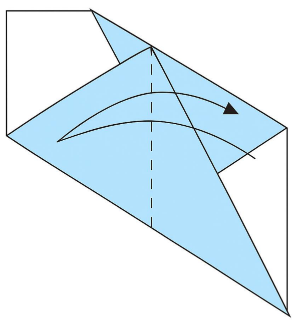

Figura 3.29: Tetraedro: passo XIX

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

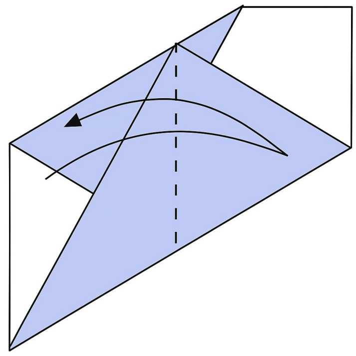

Figura 3.30: Tetraedro: passo XIX

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

10. Dobre e desdobre novamente. Estas são as duas partes que formarão o tetraedro.

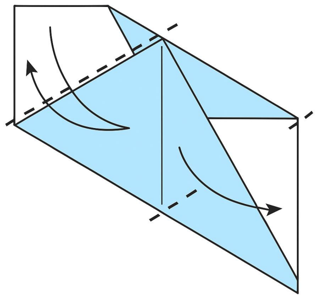

Figura 3.31: Tetraedro: passo X

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

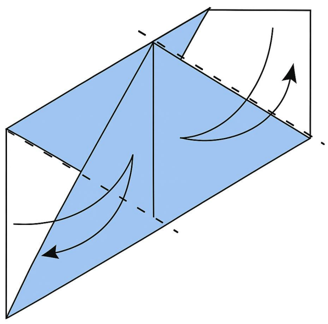

Figura 3.32: Tetraedro: passo X

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

11. Insira uma aba na abertura correspondente da outra peça.

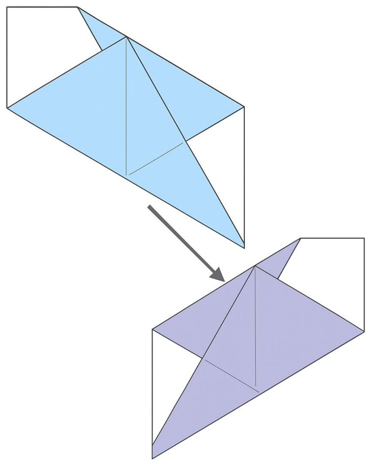

Figura 3.33: Tetraedro: passo XI

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

12. Levante ao longo das três linhas de vincos e forme uma dobra tipo montanha.

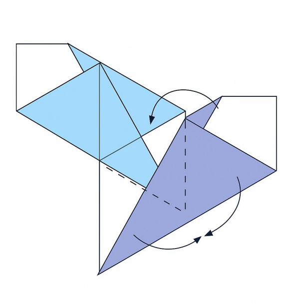

Figura 3.34: Tetraedro: passo XII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

13. Coloque a aba triangulada dentro da abertura.

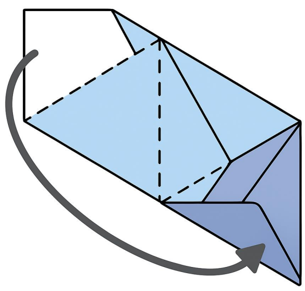

Figura 3.35: Tetraedro: passo XIII

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

14. **Tetraedro formado.**

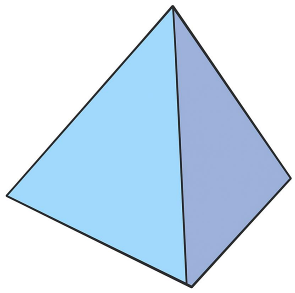

Figura 3.36: Tetraedro: passo XIV

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

É importante lembrar que durante a construção dos origamis, é possível explorar os elementos trabalhados e, após a construção do mesmo também pode-se explorar elementos como:

- **Número de faces**: 4 (triangulares iguais);
- **Vértices**: 4;
- **Arestas**: 6;
- **Relação de Euler**: $V - A + F = 2$.

Assim, é importante a apresentação da planificação do sólido geométrico que foi construído:

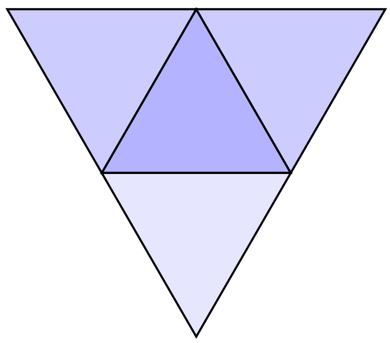

Figura 3.37: Tetraedro planificado

Fonte: Elaboração própria.

A Base Nacional Comum Curricular-BNCC (BRASIL, 2018), propõe que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à visualização e construção de objetos tridimensionais por meio de planificações, dobraduras e representações espaciais. Assim a construção de um sólido geométrico com dobraduras está diretamente relacionada às habilidades a seguir:

- Habilidade (EF07MA20): Construir, com material concreto ou digital, representações de prismas e pirâmides a partir de suas planificações;

- Habilidade (EF07MA21): Determinar e comparar áreas e volumes de prismas, relacionando com as medidas de suas planificações.

Ela (BNCC), ainda propõe o trabalho com sólidos geométricos a partir de construções concretas e planificações, especialmente no Ensino Fundamental, afirma que: "Construir, com material concreto ou digital, representações de prismas e pirâmides a partir de suas planificações, identificando suas características (faces, vértices e arestas)."(BRASIL, 2018)

Octaedro

O octaedro é mais um dos cinco sólidos de Platão e pertence à família dos sólidos regulares convexos. Ele é composto por oito faces triangulares congruentes, doze arestas e seis vértices. Sua simetria elevada e estrutura simples fazem dele um objeto geométrico relevante tanto em contextos matemáticos quanto em aplicações práticas, como a cristalografia e a modelagem tridimensional.

Um octaedro regular é formado por oito triângulos equiláteros. Cada vértice é comum a quatro dessas faces e cada aresta é compartilhada entre duas delas. A combinação de faces e vértices confere ao octaedro uma aparência semelhante à de duas pirâmides de base quadrada unidas por suas bases.

Do ponto de vista geométrico, pode-se considerar o octaedro como um sólido dual do cubo: enquanto o cubo tem seis faces quadradas e oito vértices, o octaedro possui oito faces triangulares e seis vértices. É possível calcular a área e o volume de um octaedro a partir das seguintes fórmulas matemáticas, onde a representa o comprimento da aresta:

- Área: é obtida somando-se as áreas de suas 8 faces triangulares equiláteras:

$$A = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3} \tag{3.1}$$

- Volume: pode ser calculado pela fórmula:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \tag{3.2}$$

Essas fórmulas também mostram-se úteis para análises comparativas com outros sólidos geométricos estudados por meio de dobraduras.

Os principais elementos do octaedro são:

- **Faces:** 8 triângulos equiláteros congruentes.
- **Arestas:** 12 segmentos de mesma medida que ligam os vértices.
- **Vértices:** 6 pontos onde se encontram quatro faces triangulares.

- **Ângulos internos das faces:** cada triângulo possui ângulos internos de $60°$, mas o ângulo sólido em cada vértice do octaedro é superior a $180°$.

A construção do octaedro por meio de dobraduras proporciona aos estudantes a visualização concreta das suas propriedades e promove o desenvolvimento do raciocínio espacial. O uso de papel para dobrar e montar o sólido estimula a compreensão de conceitos como congruência, simetria e relações métricas entre elementos geométricos.

Do ponto de vista pedagógico, o octaedro, assim como os demais sólidos geométricos aqui apresentados, oferece oportunidades para explorar diversos conteúdos da geometria, como a construção de triângulos equiláteros, a análise de polígonos regulares e a introdução ao conceito de poliedros regulares. Além disso, atividades práticas envolvendo dobraduras favorecem o engajamento dos alunos e facilitam a assimilação dos conteúdos matemáticos de forma lúdica e significativa.

O octaedro regular é formado por oito faces triangulares equiláteras. Sua construção requer o uso de módulos interligados por dobras e destaca a simetria e a estrutura do sólido. O processo de dobragem reforça a ideia de congruência e regularidade das faces.

Instruções para dobradura de um octaedro

1. Pegue uma folha de papel com formato retangular.

Figura 3.38: Construção do octaedro-passo 01

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

2. Dobre-a ao meio, no sentido do comprimento.

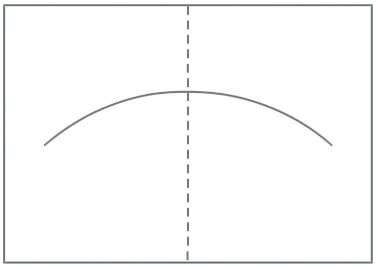

Figura 3.39: Construção do octaedro-passo 02

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

3. Dobre o lado esquerdo da folha até encontrar o vinco central, de forma a formar um quarto da largura total.

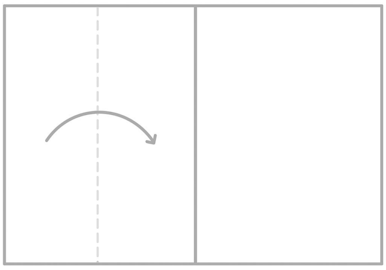

Figura 3.40: Construção do octaedro-passo 03

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

4. Dobre-a ao meio, no sentido do comprimento.

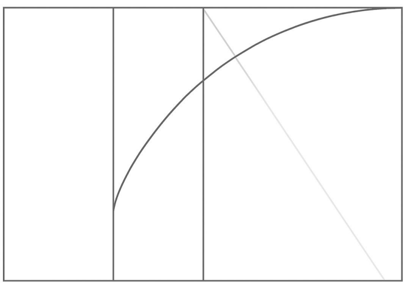

Figura 3.41: Construção do octaedro-passo 04

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

5. Leve o vértice inferior direito até a marca de um quarto da folha, usando como guia o ponto médio da borda inferior.

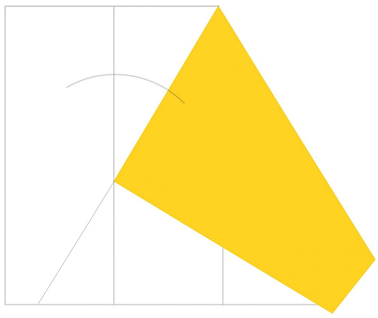

Figura 3.42: Construção do octaedro-passo 05

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

6. Dobre-a ao meio, no sentido do comprimento.

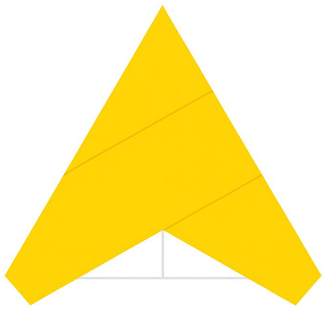

Figura 3.43: Construção do octaedro-passo 06

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

7. Dobre agora o vértice inferior esquerdo sobre essa nova dobra.

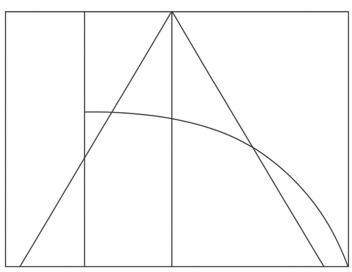

Figura 3.44: Construção do octaedro-passo 07

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

8. Dobre-a ao meio, no sentido do comprimento.

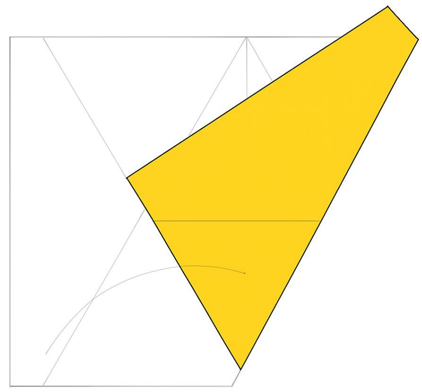

Figura 3.45: Construção do octaedro-passo 08

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

9. Refaça os vincos com firmeza e abra novamente a folha.

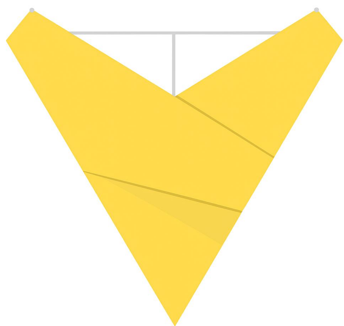

Figura 3.46: Construção do octaedro-passo 09

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

10. Dobre os vértices superior direito e inferior esquerdo alinhando-os ao primeiro vinco feito.

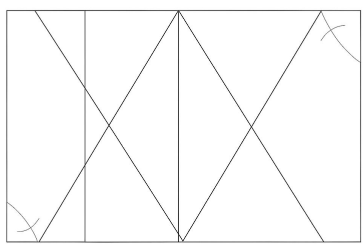

Figura 3.47: Construção do octaedro-passo 10

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

11. Realize dobras ao longo dos novos segmentos obtidos, seguindo a direção da segunda linha

de vinco.

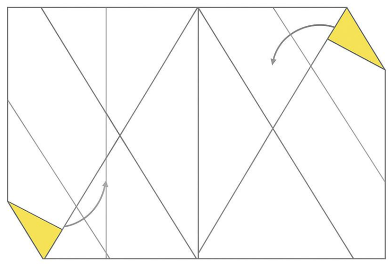

Figura 3.48: Construção do octaedro-passo 11

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

12. Una os segmentos resultantes levando-os até o centro da folha.

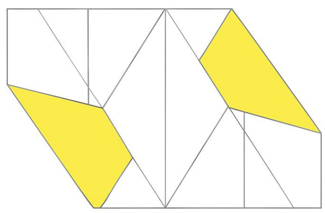

Figura 3.49: Construção do octaedro-passo 12

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

13. Dobre para trás as extremidades que sobrarem e encaixe-as para dentro da estrutura.

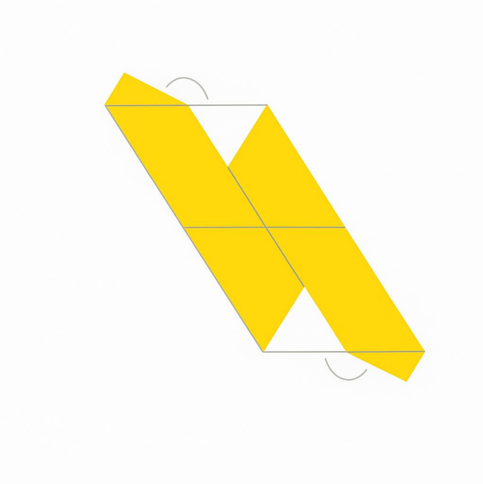

Figura 3.50: Construção do octaedro-passo 13

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

14. Dobre a folha ao meio sobre a linha central, fazendo com que dois dos quatro triângulos se sobreponham.

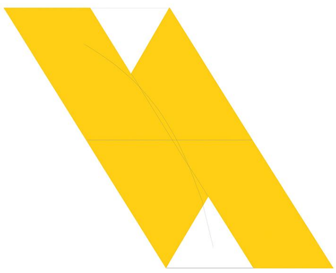

Figura 3.51: Construção do octaedro-passo 14

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

15. Observe os quatro triângulos equiláteros formados e sobreponha os dois das extremidades sobre os dois centrais, formando assim dois módulos.

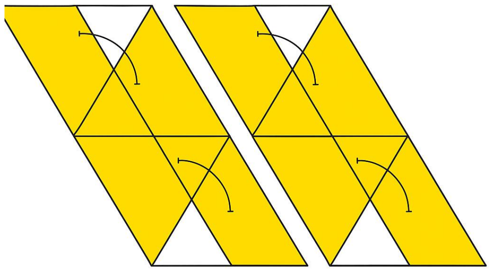

Figura 3.52: Construção do octaedro-passo 15

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

16. Para criar dois módulos simétricos, repita os passos anteriores a partir do passo 10, mas invertendo a orientação dos vértices.

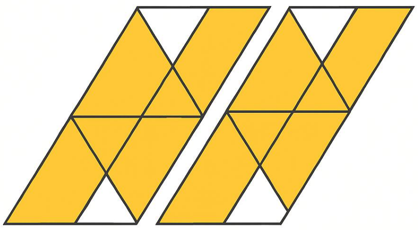

Figura 3.53: Construção do octaedro-passo 16

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

17. Monte os módulos conforme demonstrado, começando pelos dois idênticos.

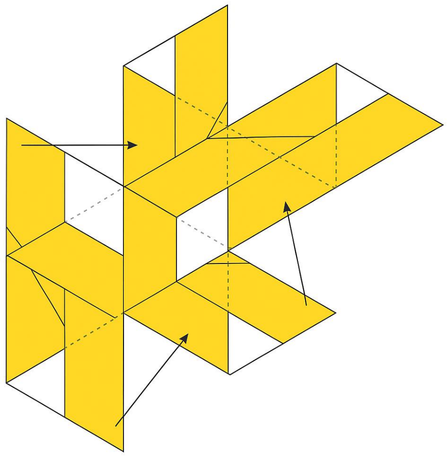

Figura 3.54: Construção do octaedro-passo 17

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

18. Encaixe os vértices de forma a obter pontos com quatro arestas conectadas.

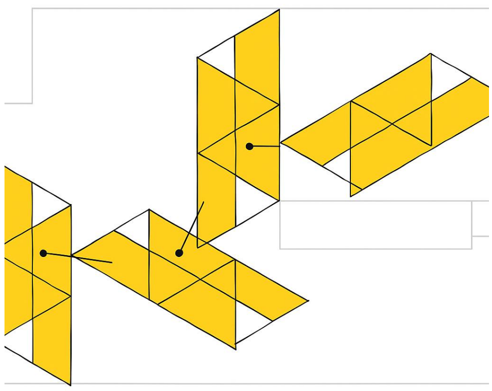

Figura 3.55: Construção do octaedro-passo 18

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

19. Junte as extremidades restantes para formar o corpo tridimensional do sólido.

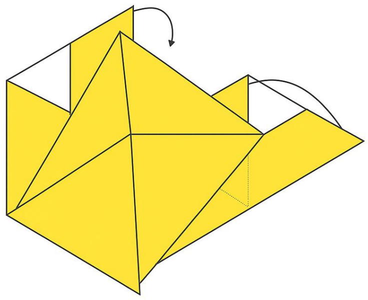

Figura 3.56: Construção do octaedro-passo 19

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

20. Seu octaedro está completo: um poliedro regular com oito faces triangulares congruentes.

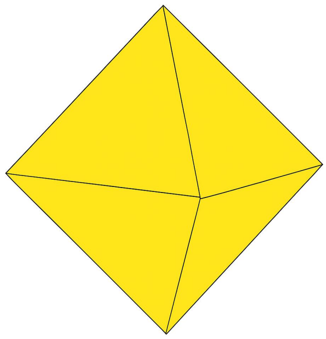

Figura 3.57: Construção do octaedro-passo 20

Fonte: Adaptado de Kawamura (2002).

Assim é possível compreender que construções de sólidos geométricos utilizando módulos de origami revela-se uma prática altamente significativa do ponto de vista didático e formativo. Por meio da montagem de figuras compostas, como cubos, tetraedros e octaedros, os estudantes puderam visualizar e manipular as propriedades dos poliedros de forma concreta, promovendo a compreensão de conceitos como vértices, arestas, faces, simetrias e relações espaciais. Além do desenvolvimento de habilidades geométricas, a atividade estimulou a concentração, a coordenação motora fina, o trabalho colaborativo e o senso estético. A repetição de módulos idênticos também reforça o entendimento das regularidades e proporções presentes nos sólidos de Platão, aproximando os alunos de fundamentos matemáticos muitas vezes tratados meramente de forma abstrata.

Capítulo 4

O ensino de geometria explorando origamis na educação básica: desafios e possibilidades

Como anteriormente exposto, o ensino de Geometria na educação básica representa um campo essencial da Matemática, por desenvolver a percepção espacial, o raciocínio lógico e a capacidade de interpretação do espaço. No entanto, sua presença nas práticas pedagógicas ainda é limitada, enfrentando dificuldades relacionadas à formação docente, ao currículo e às metodologias de ensino.

A Geometria está presente nas manifestações culturais, artísticas, arquitetônicas e tecnológicas. Seu estudo contribui para a compreensão das formas, simetrias e estruturas que compõem o mundo físico. Conforme Nacarato, Mengali e Passos (2009), a Geometria favorece o desenvolvimento de capacidades cognitivas e comunicativas dos estudantes, sendo fundamental para sua alfabetização matemática.

Entretanto, os currículos escolares frequentemente priorizam conteúdos numéricos e algébricos, em detrimento do desenvolvimento do pensamento geométrico, afirma Lopes e Silva (2021). Essa situação resulta em lacunas de aprendizagem e em desinteresse por parte dos alunos.

Embora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconheça a Geometria como um dos eixos estruturantes da Matemática, na prática, os conteúdos geométricos são frequentemente abordados de forma superficial. Bittar e Ferraz (2020), acrescenta que há um descompasso entre a prescrição curricular e a efetivação das propostas nas salas de aula. Outro fator que contribui para esse cenário é a influência das avaliações externas. Para Alves e Barbosa (2022), os exames padronizados tendem a valorizar habilidades algébricas, reduzindo a atenção dada à Geometria nas práticas pedagógicas cotidianas.

A seguir, serão apresentados alguns fatores que podem representar desafios para o ensino de geometria, bem como a utilização de dobraduras para o ensino do mesmo, além da apresentação das possibilidades de ensino de Geometria como forma de valorização e ampliação da aprendizagem matemática.

4.1 Análise de Livros Didáticos

Certamente, o livro didático continua sendo um dos principais recursos utilizados por professores da Educação Básica para o planejamento e desenvolvimento das aulas ministradas. No caso da Matemática, especialmente no que diz respeito ao ensino de Geometria, observa-se que o tratamento dado aos conceitos espaciais ainda é, muitas vezes, limitado a definições e atividades abstratas, com pouca ênfase na exploração concreta por meio de materiais manipuláveis, como dobraduras.

Segundo Lorenzato (2009), o livro didático, ao ser utilizado de forma acrítica, pode tornar-se um instrumento de reprodução de práticas tradicionais que não favorecem a construção significativa do conhecimento matemático. Ainda que as diretrizes curriculares apontem para a importância de uma abordagem mais investigativa e interativa no ensino da Geometria, como propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nem todos os livros didáticos incorporam propostas metodológicas que incluam recursos como o origami ou outras formas de dobraduras geométricas.

Uma análise de coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) revela que, embora haja avanços na inclusão de atividades que envolvem visualização e manipulação de formas geométricas, a abordagem com dobraduras ainda aparece de forma pontual e geralmente desvinculada de uma fundamentação matemática mais rigorosa. As propostas que envolvem origami, quando presentes, são tratadas mais como atividades lúdicas ou recreativas do que como uma ferramenta para o desenvolvimento de habilidades matemáticas específicas, como a visualização espacial, o raciocínio geométrico e a compreensão das propriedades dos sólidos.

Lira (2015) defende que a dobradura de papel pode e deve ser inserida de forma sistemática no ensino de Geometria, tanto como recurso de motivação quanto como linguagem matemática, possibilitando a construção de conceitos de maneira concreta e significativa. A ausência dessa abordagem nos livros didáticos pode, portanto, representar uma limitação para professores que não contam com outras fontes de formação ou recursos pedagógicos complementares.

Além disso, a escassez de referências aos axiomas de Huzita-Hatori nos materiais didáticos demonstra uma lacuna na articulação entre a prática de dobrar papel e os fundamentos matemáticos formais da Geometria Euclidiana. Esse descompasso pode dificultar a compreensão mais profunda das relações entre construções por dobraduras e propriedades geométricas rigorosas.

Dessa forma, evidencia-se a necessidade de uma revisão crítica na elaboração dos livros didáticos, especialmente no tocante ao ensino da Geometria Espacial no Ensino Fundamental, de modo que incorpore estratégias inovadoras e contextualizadas, como as dobraduras, não apenas como atividades ilustrativas, mas como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Aqui será apresentada a análise de alguns poucos livros didáticos do Ensino Fundamental e posteriormente, do Ensino Médio. Esses livros foram avaliados e aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático-PNLD.

Na análise aqui realizada foram considerados, principalmente, os aspectos relacionados à geometria e os instrumentos pedagógicos e metodológicos utilizados, bem como a presença ou não da abordagem da exploração de dobraduras e origamis como recursos pedagógicos.

A tabela a seguir apresenta a análise de quatro livros didáticos de Matemática da segunda etapa do Ensino Fundamental:

Tabela 4.1: Análise de livros didáticos do Ensino Fundamental quanto ao ensino de Geometria e dobraduras

Livro / Autores	**Editora**	**Geometria**	**Dobraduras / Observações**
Matemática: Contexto & Aplicações Giovanni Jr. et al.	FTD	Sim, com abordagem formal	Não há uso de dobraduras; abordagem tradicional e teórica dos sólidos
Matemática na Vida Dante Luiz Roberto	Ática	Sim, com contextualização	Dobraduras aparecem como curiosidade, sem aprofundamento geométrico
Matemática e Realidade Iezzi, Dolce, Degenszajn	Atual	Sim, com exemplos gráficos	Algumas atividades com dobraduras, mas sem fundamentação teórica
Matemática em Movimento Lisboa e Zuccherato	Saraiva	Sim, com propostas interativas	Apresenta dobraduras em capítulos de Geometria Espacial, mas de forma pontual

Fonte: Elaboração própria.

A partir da análise realizada, percebe-se que a abordagem dos conhecimentos relativos à Geometria, é bastante tradicional e a abordagem do uso de origamis e dobraduras é ainda mais tímida, sendo apresentada de forma superficial ou meramente como passa tempo. Essa postura acaba por impossibilitar aos estudantes uma aprendizagem com recursos cada vez mais atrativos e dinâmicos, pois favorece apenas uma forma de possibilidade de aprendizagem, a tradicional.

Também foi realizada uma análise de obras didáticas aprovadas pelo PNLD do Ensino Médio. Nessa análise observou-se que apesar do ensino de Geometria ocupar um lugar relevante nas diretrizes curriculares e nos documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que preconiza o desenvolvimento de competências relacionadas à visualização, análise e representação de figuras geométricas em duas e três dimensões (BRASIL, 2018), a abordagem efetiva desses conteúdos nos livros didáticos nem sempre está em consonância com essas diretrizes.

Foram analisadas ainda obras didáticas aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do Ensino Médio e as mesmas mostram que, embora os temas de Geometria Plana e Espacial estejam presentes, eles são, por vezes, tratados de forma fragmentada, com ênfase excessiva em fórmulas e procedimentos algorítmicos. A construção de conhecimentos geométricos a partir de experiências concretas, como a utilização de dobraduras e construções com papel, é rara ou inexistente na maioria das coleções.

Por exemplo, na coleção *Matemática: Ciências e Aplicações*, de Giovanni Jr. et al., nota-se uma abordagem formal dos sólidos geométricos e de seus elementos, com forte foco em propriedades, relações métricas e resolução de problemas. No entanto, não há proposições de atividades com dobraduras ou construções geométricas com papel, o que limita o envolvimento dos estudantes com estratégias visuais e táteis de aprendizagem.

Por outro lado, algumas coleções mais recentes, como *Matemática e Realidade*, de Iezzi et al., apresentam seções dedicadas a atividades complementares, nas quais surgem, de forma pontual, propostas de construção de figuras planas e espaciais com papel. No entanto, essas atividades raramente são articuladas a uma fundamentação teórica mais rigorosa, como o uso de axiomas geométricos ou a exploração de propriedades matemáticas decorrentes da dobradura.

Assim, verifica-se que o uso de materiais manipuláveis, como dobraduras, pode enriquecer a aprendizagem da Geometria, pois possibilita ao estudante perceber propriedades e relações espaciais por meio da ação e da observação (LORENZATO, 2009). Ainda assim, sua aplicação nos livros didáticos é limitada, sendo mais frequente em materiais paradidáticos ou projetos experimentais. Além disso, a ausência de referência a teorias que fundamentam a construção geométrica por dobraduras, como os axiomas de Huzita-Hatori, indica uma lacuna significativa na articulação entre práticas intuitivas e fundamentação matemática formal. Esse hiato compromete a possibilidade de uma abordagem mais profunda e investigativa no ensino de Geometria no Ensino Médio.

A seguir será apresentada uma análise da apresentação e existência do uso de origamis no ensino de Geometria, em algumas obras aprovadas pelo PNLD do Ensino Médio:

Tabela 4.2: Análise da presença de Geometria e dobraduras nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio

Livro / Autores	**Editora**	**Geometria**	**Dobraduras / Observações**
Matemática: Ciências e Aplicações Giovanni Jr. et al.	FTD	Sim, formal e densa	Não apresenta atividades com dobraduras; abordagem teórica e tradicional
Matemática e Realidade Iezzi, Dolce, Machado, Evaristo	Atual	Sim, com exercícios variados	Algumas atividades de construção, mas dobraduras aparecem raramente e sem base teórica
Matemática: Contexto e Aplicações Dante Luiz Roberto	Ática	Sim, com contextualização	Não utiliza dobraduras; foco em resolução de problemas algorítmicos
Matemática: Ensino Médio em Ação Elmano Ferreira et al.	Moderna	Sim, organizada por unidades temáticas	Pouca ou nenhuma menção a dobraduras; ênfase em atividades visuais com softwares
Matemática: Uma Nova Abordagem Manoel Paiva	Scipione	Sim, com enfoque conceitual	Dobraduras ausentes; atividades geométricas são abordadas com desenhos e gráficos
Projeto Teláris – Matemática Giovanni Jr. et al.	Ática	Sim, com conexões interdisciplinares	Dobraduras citadas apenas em propostas complementares; sem aprofundamento
Matemática e Suas Tecnologias – Volume Único Cury, Euclydes; Souza, Edson Freguglia, Ricardo	Sim	Sim, com aplicações do ENEM.	Nenhuma proposta de dobradura; foco em gráficos, figuras e situações-problema
Matemática: Contexto, Interatividade e Aplicações Edmar de Souza	IBEP	Sim, com atividades diversificadas	Cita dobraduras em atividades de sala de aula, mas sem articulação com propriedades geométricas

Fonte: Elaboração própria.

Em suma, a análise dos livros didáticos, tanto entre as obras analisadas do Ensino Fundamental, quanto entre as obras analisadas do Ensino Médio, revela que, apesar da presença dos conteúdos de Geometria nos currículos, o uso de dobraduras como recurso pedagógico ainda é marginal. Para que se efetive uma prática de ensino mais significativa e alinhada aos princípios da BNCC, é necessário que os livros didáticos incorporem estratégias que articulem construção, manipulação e reflexão matemática de forma integrada.

4.2 Formação docente e metodologias pedagógicas

A formação do professor de Matemática tem enfrentado desafios significativos diante das transformações educacionais e das exigências contemporâneas de ensino. A busca por metodologias que tornem o processo de ensino-aprendizagem mais significativo tem levado educadores a refletirem sobre suas práticas pedagógicas, especialmente no ensino de Geometria, um dos eixos mais negligenciados na Educação Básica. Dentre as estratégias inovadoras, destaca-se o uso de dobraduras, como ferramenta didática que articula conceitos matemáticos com práticas lúdicas e construtivistas. Muitos docentes relatam dificuldades em planejar aulas que articulem teoria e prática, utilizando recursos diversificados. Monteiro e Curi (2015) observam que a escassez de experiências significativas com Geometria nos cursos de licenciatura reflete-se em práticas fragmentadas e descontextualizadas.

A formação inicial do professor de Matemática deve contemplar, para além dos conteúdos disciplinares, a articulação entre teoria e prática pedagógica. De acordo com Fiorentini, Nascimento e Lima (2014), uma formação comprometida com a qualidade da educação matemática deve promover a reflexão crítica sobre os saberes docentes, incluindo os conhecimentos pedagógicos, epistemológicos e curriculares.

Referente ao ensino de Geometria, diversos estudos apontam deficiências na formação dos professores, que muitas vezes reproduzem metodologias tradicionais e descontextualizadas. Segundo Cury (2004), a Geometria ainda é tratada de forma secundária nos currículos, o que contribui para um ensino fragmentado, focado em memorização de fórmulas e regras, sem conexão com a realidade dos estudantes.

Além disso, as Diretrizes Curriculares Referenciais da Bahia e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destacam a importância do desenvolvimento do raciocínio geométrico, da visualização espacial e da capacidade de resolver problemas. Para isso, o professor precisa estar preparado para empregar metodologias que estimulem a participação ativa dos alunos, promovendo o pensamento crítico e a construção de conhecimentos.

Nesse contexto, percebe-se que a diversificação de metodologias pedagógicas corroboram para a melhoria da qualidade de ensino de Matemática e sobretudo de Geometria na Educação Básica. Nesse cenário, as metodologias ativas representam um conjunto de estratégias didáticas que colocam o aluno como protagonista do processo de aprendizagem. Dentre elas, destacam-se a aprendizagem baseada em problemas, a investigação matemática, os jogos, projetos interdisciplinares e o uso de materiais concretos. Tais metodologias têm ganhado espaço nas propostas pedagógicas por promoverem um ensino mais dinâmico, colaborativo e contextualizado (MIZUKAMI, 2008).

Além disso, as dobraduras, enquanto atividade prática e concreta, oferecem oportunidades únicas para a exploração de conceitos geométricos de forma lúdica e investigativa. Por meio do ato de dobrar o papel, os alunos podem observar, manipular e construir figuras planas e espaciais, desenvolvendo habilidades como percepção visual, análise de propriedades geométricas, simetria, transformações e relações entre formas. Essa metodologia, quando mediada por um professor preparado, pode gerar discussões ricas e favorecer o desenvolvimento de competências previstas nos currículos escolares.

De acordo com Furuia e Cavacami (2009), o uso do origami no ensino de Geometria contribui para tornar o aprendizado mais significativo, pois estimula a criatividade e o envolvimento ativo do estudante. Além disso, a dobradura favorece a articulação entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos conceitos que estão sendo introduzidos, promovendo uma aprendizagem por descobertas.

No ensino de Matemática, essas abordagens têm o potencial de romper com práticas tradicionais centradas na exposição oral e na repetição mecânica de exercícios. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o uso de metodologias ativas favorece a compreensão dos conceitos matemáticos, estimulando o raciocínio lógico, a autonomia e a capacidade de argumentação dos estudantes.

Para que o uso de dobraduras e outras metodologias ativas seja efetivo, é fundamental que os professores tenham acesso à formação continuada de qualidade. Essa formação deve proporcionar momentos de estudo, reflexão e experimentação de novas práticas pedagógicas, valorizando a pesquisa-ação e o compartilhamento de experiências entre pares.

Assim, a formação continuada deve ser parte integrante da profissionalização docente, constituindo-se em um processo permanente de aprimoramento das práticas de ensino. Nesse sentido, oficinas pedagógicas, grupos de estudo e projetos colaborativos que envolvam o uso de dobraduras podem ser formas eficazes de fortalecer as competências didáticas dos professores de Matemática (LIBâNEO, 2002).

Além disso, é necessário que, tanto os cursos de Licenciatura, quanto os cursos de formação continuada, incorporem atividades práticas com materiais manipuláveis e desenvolvam nos futuros docentes a capacidade de planejar, aplicar e avaliar estratégias que favoreçam o ensino investigativo da Geometria.

A formação do professor de Matemática então, deve estar pautada em princípios que promovam a reflexão crítica, o compromisso com a aprendizagem significativa e o domínio de diversas metodologias de ensino. O uso de dobraduras, nesse contexto, apresenta-se como uma prática pedagógica inovadora, que alia concretude, ludicidade e construção ativa do conhecimento.

Ao integrar dobraduras ao ensino de Geometria, o professor amplia as possibilidades de mediação da aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento espacial e da compreensão das propriedades geométricas. Para isso, é imprescindível que a formação docente — inicial e continuada — ofereça subsídios teóricos e práticos que possibilitem o uso intencional e criativo desse recurso no cotidiano escolar.

Nesse contexto, o uso de metodologias ativas e de materiais manipulativos pode contribuir para tornar a aprendizagem mais concreta. D'Ambrósio (2012) defende uma abordagem que valorize os contextos culturais e as experiências dos alunos, superando a visão tecnicista ainda presente no ensino da Matemática.

Além do exposto, é importante destacar que a efetivação de práticas pedagógicas mais significativas ainda esbarra em desigualdades estruturais nas redes de ensino. Em muitas escolas públicas, faltam materiais didáticos, espaços adequados e tempo para que os professores desenvolvam propostas que envolvam práticas mais criativas(ROCHA; GOMES, 2019).

Além disso, as políticas públicas de formação continuada raramente contemplam o ensino de Geometria de forma específica, o que contribui para a sua manutenção como um conteúdo secundário.

A superação dos desafios do ensino de Geometria exige uma articulação entre formação docente, currículo e metodologias. A valorização da Geometria nos processos de ensino-aprendizagem pode contribuir significativamente para uma educação matemática mais crítica, reflexiva e inclusiva, pois de acordo com ALVES: "O ensino de Geometria precisa ultrapassar os limites da abstração formal e tornar-se experiência concreta e significativa para os estudantes."(ALVES; BARBOSA, 2022).

4.3 O papel do professor

O uso de dobraduras no ensino de Matemática, particularmente na abordagem de conteúdos geométricos, demanda mais do que uma simples atividade lúdica: requer planejamento, intencionalidade pedagógica e uma mediação adequada por parte do professor. Nesse contexto, o professor desempenha um papel central na organização das atividades, na mediação das descobertas dos alunos e na articulação dos conceitos explorados com os conteúdos curriculares.

Ao propor uma atividade com dobraduras, é fundamental que o docente defina objetivos claros, considerando as habilidades que deseja desenvolver nos alunos. De acordo com Zamboni (2012), o origami pode ser um recurso potente para o ensino de Geometria, mas seu potencial só é plenamente explorado quando há intencionalidade didática e uma condução cuidadosa das atividades. Assim, cabe ao professor selecionar as dobraduras mais adequadas ao conteúdo, preparar materiais e orientar as etapas de construção de modo a favorecer a observação, a análise e a abstração dos conceitos envolvidos.

Durante a realização das atividades, o professor atua como mediador do conhecimento. Sua função não se limita à explicação técnica dos passos da dobradura, mas envolve a proposição de questionamentos que estimulem o raciocínio dos alunos, como: “Que figura foi formada após esta dobra?”, “Essa figura é simétrica?”, “Quantos lados possui?”, “Essa dobra representa uma reta? Um plano?”. Esses questionamentos são essenciais para que o aluno estabeleça relações entre o objeto manipulado e os conceitos matemáticos que se deseja trabalhar.

Além disso, o professor deve estar atento às dificuldades dos estudantes, incentivando o trabalho colaborativo e a construção coletiva do conhecimento. A abordagem com dobraduras permite ao docente desenvolver práticas que valorizem a aprendizagem ativa, na qual o aluno é protagonista da descoberta dos conceitos. Segundo Valente (2013), o papel do professor no ensino com recursos concretos é possibilitar a transição do concreto para o abstrato, garantindo que o material manipulado seja compreendido em seu valor conceitual e não apenas como um fim em si mesmo.

Mesmo diante de instrumentos pedagógicos que não favorecem a dinamização do ensino de Geometria, como apresentado a partir da análise dos livros didáticos, que não favorecem ou pouco fazem referência ao uso das dobraduras como instrumento alternativo de aprendizagem de aspectos geométricos, o professor tem a possibilidade de inserir na sua prática de ensino essas abordagens tão importantes, possibilitando assim que seus estudantes desfrute de uma vasta e rica experiêcia de aprendizagem a partir da manipulação, construção e análise de objetos concretos.

Outro aspecto importante é a articulação das atividades com os objetivos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois ao propor dobraduras que exploram simetria, congruência, ângulos ou propriedades de sólidos, o professor pode desenvolver competências previstas nos componentes de Geometria, como a visualização espacial, o reconhecimento de formas geométricas e a construção de argumentos matemáticos. Conforme aponta a BNCC, o professor deve promover situações que favoreçam a resolução de problemas, a experimentação e a construção de modelos, o que se alinha diretamente à proposta do uso de dobraduras como recurso pedagógico.

É importante o professor de Matemática deixar claro que o uso dobraduras, como recurso didático, possibilitam a construção de conhecimentos geométricos por meio da manipulação de formas, favorecendo a visualização e a experimentação. Amaral e Barbosa (2020) argumentam que o uso de dobraduras estimula a compreensão de propriedades de figuras planas e espaciais, além de desenvolver habilidades motoras e cognitivas. Para eles a Geometria, ao ser ensinada com o apoio de dobraduras, permite a vivência concreta dos conceitos, tornando o aprendizado mais significativo e contextualizado para os alunos. (AMARAL; BARBOSA, 2020, 48). Esse tipo de atividade também favorece a interdisciplinaridade e permite a inclusão de alunos com diferentes estilos de aprendizagem.

Nesse contexto é imprescindível que o professor reflita continuamente sobre sua prática, avaliando os resultados das atividades e buscando estratégias para aprimorá-las. O ensino com dobraduras não deve ser visto como uma atividade isolada, mas como parte de um processo de ensino e aprendizagem que integra teoria, prática, criatividade e raciocínio lógico. Por isso, é importante esclarecer que:

> "O papel do professor é fundamental para mediar o processo de construção do conhecimento geométrico, criando situações de aprendizagem que estimulem a experimentação, a observação e a análise crítica. Ao propor atividades com dobraduras, o docente possibilita que os estudantes visualizem propriedades geométricas, desenvolvam habilidades manuais e compreendam conceitos como simetria, área, volume e planificação de sólidos. Essa abordagem favorece o aprendizado significativo, pois articula a experiência concreta com os conhecimentos matemáticos formais." (Secretaria da Educação do Estado da Bahia, 2022)

Dessa forma, o papel do professor na condução do ensino com dobraduras é o de um agente que promove a aprendizagem significativa, criando condições para que o estudante desenvolva conceitos geométricos de forma ativa, crítica e contextualizada, alinhando os novos conhecimentos às suas demandas cotidianas e acadêmicas.

Capítulo 5

Sequência didática e análise dos resultados

5.1 Sequência didática

As sequências didáticas constituem uma ferramenta essencial no planejamento e na organização do trabalho pedagógico na Educação Básica. Elas permitem ao professor estruturar as atividades de ensino de forma coerente e progressiva, considerando os objetivos de aprendizagem, os conteúdos curriculares e o desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes.

A sequência didática elaborada neste trabalho foi pensada com o objetivo de integrar conteúdos da Geometria Euclidiana e as práticas com dobraduras, sobretudo origamis, no contexto do Ensino Básico. A proposta metodológica visa promover uma aprendizagem significativa por meio da experimentação, observação e reflexão, valorizando o protagonismo dos estudantes no processo de construção do conhecimento.

As atividades foram organizadas em etapas progressivas, respeitando os níveis de complexidade geométrica e o grau de abstração exigido. A seguir, será apresentada a estrutura geral da sequência, os objetivos de cada etapa, os materiais utilizados e os principais resultados observados durante sua aplicação.

1. Os objetivos principais da sequência foram:

    - Desenvolver a compreensão dos conceitos de plano, reta, ângulo e figuras planas e espaciais;
    - Explorar as propriedades geométricas dos sólidos por meio da manipulação e construção de sólidos geométricos a partir de origamis;
    - Estimular o raciocínio espacial e a visualização tridimensional;
    - Promover a integração entre teoria e prática no ensino de geometria;
    - Favorecer a aprendizagem colaborativa, por meio do trabalho em grupo e da troca de experiências.

2. Materiais utilizados: as atividades foram desenvolvidas com materiais simples e de fácil acesso, como:
   - Papel sulfite (preferencialmente no formato quadrado ou retangular);
   - Material firme para realizar os vincos das dobras;
   - Recursos audiovisuais de apoio (vídeos curtos demonstrando as dobraduras);
   - Fichas de instrução com o passo a passo de cada atividade.
3. Estrutura das atividades: Cada atividade foi organizada segundo os seguintes momentos:
   - Exploração inicial: levantamento de conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito em foco;
   - Demonstração orientada: apresentação da dobradura e explicitação dos conceitos geométricos envolvidos;
   - Execução prática: os estudantes reproduzem as dobras, individualmente ou em duplas, com apoio das fichas e do professor;
   - Discussão coletiva: socialização das construções, observações sobre propriedades e formulação de conjecturas;
   - Registro: produção de esquemas e anotações em caderno ou portfólio individual.
4. Atividades desenvolvidas:

   Atividade 1: Realizando dobras simples

   - Objetivo: Compreender as propriedades das dobras e possibilitar a construção de linhas, pontos, retas paralelas, retas perpendiculares, entre outras ideias geométricas básicas..
   - Tempo estimado: 2 horas/aula.
   - Descrição: A partir de uma folha de papel comum, os alunos realizam dobras que produzem retas, paralelismo ou concorrência entre retas bem como a ideia de ângulos, tipos de ângulos, ângulos opostos pelo vértice, além de possibilitar traçar diagonais e verificam sua bissetriz comum.

   Atividade 2: Construção do cubo

   - Objetivo: Compreender a estrutura tridimensional do cubo.
   - Tempo estimado: 4 horas/aula.
   - Descrição:

1. No primeiro momento os estudantes assistiram a um vídeo curto, de autoria do professor de Matemática com o passo a passo da construção do cubo. Depois de ver o vídeo foi possível discutir e identificar os elementos do sólido geométrico a ser construído.
2. No segundo momento, a turma foi dividida em grupos. Cada grupo recebeu uma ficha de passo a passo da construção do cubo com dobraduras;
3. Os alunos montam o cubo e analisam suas arestas, vértices e faces;
4. Os estudantes são estimulados a relacionar a construção prática com o desenho técnico da planificação.

   Atividade 3: Construção do tetraedro

   - Objetivo: Compreender a estrutura tridimensional do tetraedro.
   - Tempo estimado: 4 horas/aula.

5. Descrição:
   (a) No primeiro momento os estudantes assistiram a um vídeo curto, de autorais do próprio professor com o passo a passo da construção do tetraedro. nesse momento foi possível discutir e identificar os elementos do sólido geométrico a ser construído.
   (b) No segundo momento, a turma foi dividida e grupos. Cada grupo recebeu uma ficha de passo a passo da construção do tetraedro com dobraduras;
   (c) Os alunos montam um tetraedro e analisam suas arestas, vértices e faces.
   (d) Os estudantes são estimulados a relacionar a construção prática com o desenho técnico da planificação.

   Atividade 4: Construção do octaedro

   Objetivo: Visualizar e compreender a simetria do octaedro. Tempo estimado:4 horas/aula.

   Descrição:

   (a) A princípio os estudantes assistiram ao vídeo curto, de autoria do próprio professor com o passo a passo da construção do octaedro. Esse momento é impostante pois possibilita a discussão e identificação dos elementos do sólido geométrico a ser construído.
   (b) No segundo momento, a turma foi dividida em grupos, onde cada grupo recebe uma ficha com o passo a passo da construção do octaedro a partir de dobraduras;
   (c) Os alunos devem montar o octaedro e analisando seus principais elementos: restas, vértices e faces;
   (d) Os estudantes são estimulados a relacionar a construção prática com o desenho técnico da planificação do octaedro.

5.2 Atividades de verificação das aprendizagens

O questionário aplicado foi composto por questões objetivas e discursivas, visando diagnosticar e aprofundar a compreensão dos alunos sobre conceitos fundamentais da Geometria, explorados por meio de dobraduras. A seguir, discute-se a relevância de cada item no desenvolvimento da aprendizagem geométrica.

- Questão 1 – Representação de um ponto

  A primeira questão aborda o conceito de ponto, que é uma das noções primitivas da Geometria Euclidiana. Ao pedir que o aluno identifique qual das opções representa um ponto, a atividade exige que ele reconheça a definição formal de ponto como um local exato no espaço, sem dimensão. Essa distinção é fundamental para a construção de todo o raciocínio geométrico subsequente.

- Questão 2 – Entidade representada por uma dobra

  Neste item, o aluno deve reconhecer que uma dobra simples em uma folha de papel representa uma **reta**, uma vez que esta é o traço mais básico produzido por uma única dobra. A questão trabalha a transição do plano concreto (a folha dobrada) para a representação abstrata da geometria, essencial no desenvolvimento da visualização espacial.

- Questão 3 – Interseção entre dobras

  Aqui se explora o conceito de **vértice** ou ponto de interseção entre duas retas. Quando duas dobras se cruzam, o ponto comum entre elas corresponde a um vértice. Esta associação entre a manipulação do papel e os elementos geométricos formais contribui para a compreensão da estrutura de figuras planas e sólidas.

- Questão 4 – Classificação de retas

  A quarta questão trata da classificação de retas quanto à sua posição relativa: paralelas, concorrentes ou perpendiculares. Essa habilidade é importante não apenas para o reconhecimento de figuras, mas também para o entendimento das propriedades das formas e sua construção por dobradura, como no caso de ângulos e simetrias.

- Questão 5 – Retas paralelas

  Este item reforça o conceito de **paralelismo**, uma relação fundamental em geometria plana. O exercício propõe que o aluno produza duas dobras que não se cruzem, levando-o a compreender, por manipulação direta, a definição de retas paralelas e sua representação no plano.

- Questão 6 – Triângulo retângulo por dobradura

  Neste item, o aluno é levado a refletir se é possível formar um triângulo retângulo ao dobrar uma folha ao meio na diagonal. A construção de um triângulo retângulo a partir de um quadrado revela como as propriedades das figuras podem ser exploradas de forma empírica, incentivando a observação de ângulos e lados congruentes.

- Questão 7 – Faces triangulares da pirâmide de base quadrada

  Esta questão testa o conhecimento dos alunos sobre sólidos geométricos, em especial sobre pirâmides. Ao identificar que uma pirâmide de base quadrada possui quatro faces triangulares (além da base), o aluno demonstra compreensão da composição e da estrutura tridimensional dos sólidos.

- Questão 8 – Arestas de um tetraedro

  Este item exige que o aluno conheça o número de arestas do tetraedro, um dos cinco Sólidos de Platão. Tal reconhecimento é fundamental para a classificação e análise de sólidos regulares, e sua construção por dobradura pode fortalecer esse aprendizado por meio da manipulação concreta.

- Questão 9 – Base de um prisma triangular

  A nona questão trata da identificação da base de um prisma triangular, reforçando a habilidade de diferenciar prismas de pirâmides. A associação entre o nome do sólido e o formato da base contribui para o reconhecimento das famílias dos poliedros.

- Questão 10 – Vértices de um cubo

  Neste item, ao se perguntar quantos vértices tem um cubo construído por dobradura, o aluno é convidado a visualizar mentalmente (ou lembrar da manipulação concreta) a estrutura do cubo. A questão trabalha com contagem, abstração espacial e a consolidação do conhecimento sobre elementos dos poliedros.

- Questão 11 – Vértices da pirâmide triangular

  Similar à questão anterior, esta busca reforçar a associação entre a base do sólido e a estrutura resultante. Uma pirâmide com base triangular tem quatro vértices, e a compreensão dessa informação ajuda o aluno a identificar corretamente os elementos do sólido.

- Questão 12 – Faces do octaedro

  O octaedro é outro Sólido de Platão, e o reconhecimento de suas 8 faces triangulares é um dos conceitos esperados para alunos em níveis mais avançados do Ensino Fundamental ou Ensino Médio. A construção por dobradura torna mais tangível o entendimento dessa figura regular.

- Questão 13 – Justificativa sobre o uso da dobradura

  Esta questão discursiva permite ao aluno refletir sobre a própria aprendizagem. Muitos alunos relataram que o uso das dobraduras facilitou a identificação de formas geométricas e contribuiu para a compreensão de propriedades espaciais, revelando o valor pedagógico dessa abordagem prática.

- Questão 14 – Características do sólido construído

  Ao descrever o sólido construído pelo grupo, o aluno é instigado a utilizar vocabulário geométrico como "faces", "arestas" e "vértices". Essa questão permite observar o grau de apropriação da linguagem matemática e a capacidade de transpor a experiência prática para a descrição formal do objeto estudado.

A análise das quatorze questões revela uma progressão na complexidade dos conteúdos abordados, partindo de conceitos básicos até chegar à análise de sólidos regulares. O uso das dobraduras como estratégia metodológica possibilitou uma abordagem concreta e investigativa da geometria, favorecendo a aprendizagem ativa e significativa. A articulação entre a prática manual e o raciocínio abstrato demonstrou-se eficaz para o desenvolvimento do pensamento geométrico, especialmente no contexto da recomposição das aprendizagens no Ensino Básico.

A Tabela a seguir apresenta um resumo dos conteúdos e habilidades avaliados no questionário.

Tabela 5.1: Resumo dos objetivos avaliados no questionário

Conteúdo	**Objetivo Avaliado**
Ponto, reta e plano	Reconhecer entidades geométricas básicas a partir de observações e dobraduras
Dobras e ângulos	Identificar e nomear ângulos e interseções entre retas geradas por dobraduras
Relações entre retas	Distinguir retas paralelas, concorrentes e perpendiculares a partir da observação das dobras
Triângulos	Compreender propriedades de triângulos formados por dobraduras
Sólidos geométricos	Reconhecer e classificar sólidos (faces, arestas e vértices) construídos com dobraduras
Expressão matemática	Justificar respostas por meio de descrições orais ou escritas com uso de linguagem geométrica

Fonte: Elaboração própria.

As atividades desenvolvidas e avaliadas por meio do questionário estão diretamente alinhadas à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em especial ao componente curricular de Matemática no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Destacam-se, entre outras, as seguintes habilidades:

- **EF06MA18** (6º ano): Reconhecer, nomear e representar ângulos, identificando-os em diferentes contextos e classificando-os.
- **EF07MA19** (7º ano): Identificar e classificar figuras planas e espaciais em contextos diversos.
- **EF09MA12** (9º ano): Resolver e elaborar problemas envolvendo planificação de só-

lidos e cálculo de área lateral e total.

- **EM13MAT401** (Ensino Médio): Resolver problemas geométricos utilizando propriedades das figuras planas e espaciais, com ênfase na visualização e construção.

Essas habilidades evidenciam que a proposta desenvolvida não só favorece a aprendizagem significativa como também contribui para o cumprimento dos objetivos propostos pela BNCC, promovendo uma matemática contextualizada, investigativa e conectada à prática pedagógica.

5.3 Atividade de autoavaliação

A autoavaliação constitui uma prática pedagógica fundamental para o desenvolvimento da autonomia e da autorreflexão dos estudantes no processo de aprendizagem. Quando integrada a propostas didáticas com origamis e dobraduras, essa prática se mostra ainda mais relevante, pois favorece a consciência sobre o próprio percurso formativo e a valorização das experiências vivenciadas.

A autoavaliação aplicada aos estudantes, após a realização de atividades práticas e teórica com origamis e dobraduras, foi estruturada com o objetivo de estimular a reflexão crítica e a metacognição, valorizando o processo de aprendizagem e não apenas o produto final.

A primeira parte da autoavaliação foi composta por quatro questões objetivas, nas quais o estudante deveria marcar a alternativa que mais se aproxima de sua vivência. Esses itens abordaram aspectos fundamentais do processo educativo: o nível de participação e interesse, a compreensão das instruções, a capacidade de relacionar a prática com os conteúdos geométricos e a colaboração com os colegas. As opções de resposta foram organizadas em uma escala simples (sempre, às vezes, raramente), o que facilita o preenchimento e permite uma análise mais sistematizada por parte do professor.

A segunda parte contemplou três questões abertas, que promoveram uma autoanálise mais aprofundada. Nelas, os estudantes são convidados a refletir sobre o que mais gostaram de aprender, quais foram suas dificuldades e o que pretendem melhorar em futuras atividades. Essa etapa favorece a expressão pessoal e o reconhecimento de estratégias e desafios enfrentados durante a realização das dobraduras.

Essa atividade foi pensada para atender aos princípios da avaliação formativa, na medida em que possibilita o acompanhamento contínuo da aprendizagem, o desenvolvimento da autonomia e a valorização da trajetória individual de cada estudante. Os dados obtidos por meio dessa atividade também subsidiam o planejamento docente, possibilitando ajustes e intervenções pedagógicas mais eficazes.

Assim, ao se autoavaliarem, os estudantes tiveram a oportunidade de identificar suas dificuldades, avanços e estratégias utilizadas durante a realização das atividades, reconhecendo aspectos que vão além do resultado final, como o raciocínio lógico, a organização espacial, a precisão nos movimentos e o cuidado com os materiais.

Nas atividades com dobraduras, o processo de autoavaliação deve ser orientado por critérios definidos em conjunto com a turma, como compreensão das instruções, execução das etapas, cooperação com os colegas e relação entre a prática e os conceitos geométricos explorados. Tais elementos fortalecem a aprendizagem significativa e contribuem para uma abordagem mais formativa da avaliação.

Assim, ao serem estimulados a refletir sobre suas próprias produções e estratégias, os estudantes desenvolvem competências metacognitivas que ampliam seu engajamento, senso crítico e responsabilidade diante das atividades escolares.

5.4 Relato dos estudantes

A aplicação das sequências didáticas com o uso de dobraduras possibilitou uma aproximação significativa entre os alunos e os conteúdos geométricos. A prática revelou-se envolvente, despertando curiosidade e promovendo a participação ativa dos estudantes durante as aulas.

Aqui será apresenta uma análise qualitativa dos relatos e observações colhidos ao longo das atividades pelos estudantes. As informações foram obtidas por meio de conversas informais, anotações de campo, registros dos alunos e depoimentos espontâneos.

5.4.1 Percepções sobre o uso das dobraduras

De modo geral, os estudantes demonstraram surpresa ao perceberem que conceitos geométricos, muitas vezes tratados de maneira abstrata, podiam ser explorados concretamente por meio do papel. Essa experiência revela-se de extrema importância, pois possibilita que, a partir da construção dos objetos geométricos, os estudantes consigam assimilar conceitos abstratos e muitas vezes distantes da sua percepção.

Alguns relatos destacaram:

> "Eu nunca imaginei que dava pra aprender geometria assim. A gente dobra o papel e já vê o ângulo certinho."
> *(Estudante A)*

> "Achei mais fácil entender o que é um sólido depois de montar ele. A pirâmide ficou perfeita!"
> *(Estudante B)*

> "Gostei muito da aula. Nunca tinha feito origami, mas agora entendi porque é matemática também."

(Estudante C)

Esses comentários indicam que a abordagem com dobraduras permitiu uma ressignificação do conteúdo matemático, tornando-o mais acessível e atrativo.

5.4.2 Dificuldades encontradas

Apesar do envolvimento geral, alguns alunos apresentaram dificuldades, sobretudo nas etapas iniciais das dobraduras, exigindo atenção às instruções e coordenação motora fina.

Outro ponto observado foi a tendência de alguns estudantes em focar apenas no aspecto artístico do origami, sem inicialmente perceber as relações geométricas envolvidas. Nessas situações, a mediação do professor foi essencial para conduzir a reflexão matemática sobre as construções.

Nesse sentido é importante esclarecer a diferença entre o fazer artístico e o fazer matemático no que se refere ao uso de dobraduras, pois muitos estudantes entendem as dobraduras como simples construções artísticas. Essa postura exige do professor um planejamento bem elaborado com objetivos muito bem definidos, de modo que os estudantes compreendam de fato aquilo que estão construindo e o que se pretende aprender a partir da realização das atividades.

5.4.3 Resultados observados

Entre os principais resultados observados ao final das sequências, destacam-se:

- Maior interesse e participação nas aulas de Matemática e construções geométricas;
- Compreensão mais clara dos conceitos espaciais;
- Desenvolvimento de habilidades de visualização e raciocínio geométrico;
- Estímulo à cooperação e ao trabalho em grupo;
- Ampliação do repertório didático dos próprios estudantes, que passaram a sugerir outras formas de construção.

Esses relatos reforçam a ideia de que as dobraduras podem ser uma estratégia eficaz para o ensino da geometria, especialmente quando integradas a um planejamento pedagógico bem estruturado.

5.5 Análise dos resultados

A aplicação da proposta metodológica deste trabalho ocorreu em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, etapa II, de uma escola da rede municipal situada em contexto urbano, com estudantes entre 13 e 14 anos. O objetivo foi investigar a contribuição do uso de dobraduras na construção de conhecimentos geométricos, sobretudo no que se refere à compreensão de sólidos espaciais e seus elementos constituintes.

A sequência didática foi planejada considerando os pressupostos da BNCC e os princípios da aprendizagem significativa. As atividades envolveram inicialmente a retomada de conceitos geométricos fundamentais, como ponto, reta, plano e ângulos, passando pela introdução aos axiomas de Huzita-Hatori e culminando na construção de sólidos geométricos por meio de dobraduras e origamis.

Ao longo das atividades, os estudantes realizaram construções dos seguintes sólidos: cubo, paralelepípedo, pirâmide de base quadrada, tetraedro e octaedro. Cada figura foi precedida por discussões sobre suas propriedades, como número de faces, vértices, arestas, simetrias e planificações. A construção manual foi sempre acompanhada de reflexões geométricas, estimuladas por questionamentos do tipo:

"Qual o formato das faces desse sólido?"

“Quantas faces esse sólido possui?”;

“Quaís elementos geométricos podemos identificar nos sólidos”;

"Existe simetria nesta construção?”

Esses momentos de mediação revelaram-se de fundamental importância para a articulação entre o fazer concreto e os conceitos matemáticos abstratos. Além disso, a partir daí foi possível identificar as dificuldades dos estudantes bem como as possibilidades positivas de aprendizagem.

Durante as aulas, observou-se um aumento significativo na participação e no interesse dos estudantes. Muitos deles, que geralmente apresentavam dificuldades nas aulas tradicionais de Matemática, demonstraram entusiasmo em manusear os materiais e realizar as construções. A abordagem lúdica e interativa proporcionou um ambiente mais acolhedor e colaborativo, em que os alunos se sentiam à vontade para explorar, errar e tentar novamente.

Para analisar os efeitos da intervenção, foi aplicado um questionário com questões abertas. Entre as respostas, destacam-se as seguintes:

> Estudante A: *“Foi mais fácil aprender geometria com as dobraduras. Eu consegui ver o que é uma aresta, um vértice. Antes eu só via no desenho do livro.”*
>
> Estudante B: *“Eu gostei porque consegui montar o cubo sozinha. Depois fiquei pensando como os lados se juntam e percebi que todos os lados são formados por quadrados eram iguais.”*
>
> Estudante C: *“Aprendi mais dobrando o papel do que com a lousa ou fazendo atividades do livro. A gente consegue tocar na forma, ver como ela é de verdade, identificar seus elementos...”*

Além dos relatos espontâneos, os registros fotográficos das atividades revelaram o engajamento dos estudantes e a evolução das construções. Notou-se uma melhora na precisão das dobras, na organização das etapas e no vocabulário geométrico empregado pelos discentes.

Os resultados também indicam que a utilização dos Axiomas de Huzita-Hatori contribuiu para o entendimento dos fundamentos geométricos de maneira não convencional. Alunos que antes não se sentiam confiantes em reconhecer propriedades geométricas passaram a aplicar conceitos como mediatriz, bissetriz e perpendicularidade de forma intuitiva.

A atividade que mais despertou interesse foi a construção do tetraedro por dobradura modular. Muitos estudantes se desafiaram a reproduzi-lo em casa com outros papéis e até trouxeram versões coloridas na aula seguinte. Isso revela não apenas a apropriação do conteúdo, mas também a valorização da matemática em um contexto lúdico e prazeroso.

Portanto, os dados coletados reforçam que a metodologia baseada em dobraduras favorece a aprendizagem significativa de conceitos geométricos, especialmente por permitir que os estudantes estabeleçam conexões entre a abstração matemática e a realidade concreta. O uso do origami não apenas promove o desenvolvimento cognitivo, mas também habilidades socioemocionais como paciência, persistência e cooperação.

Capítulo 6

Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo primordial investigar o uso de dobraduras e especialmente a técnica do origami, como estratégia didática no ensino de Geometria através da exploração dos sólidos geométricos no contexto da Educação Básica.

Através das atividades práticas desenvolvidas, em sala de aula, com estudantes do Ensino Fundamental, foi possível observar que as dobraduras contribuíram significativamente para o entendimento dos conceitos geométricos, especialmente no que se refere à visualização espacial, identificação de vértices, arestas e faces, além da compreensão de planificações e propriedades métricas como área e volume.

Os resultados obtidos ao longo da pesquisa e das atividades práticas reforçam a ideia de que o ensino de Matemática pode ser ressignificado quando apoiado por recursos que tornam os conceitos mais acessíveis e visíveis ao estudante. Conforme destaca Fiorentini e Lorenzato (2006), é fundamental que o ensino de Matemática esteja articulado com práticas que valorizem a construção do conhecimento por meio da experimentação e da reflexão. Nesse sentido, as dobraduras se mostraram um recurso potente para favorecer a aprendizagem ativa e significativa dos alunos.

Lorenzato (2009) também salienta que o uso de materiais concretos no ensino da Matemática auxilia no processo de abstração, tornando-se um elo entre o pensamento empírico e o pensamento formal. As dobraduras, ao permitir a manipulação e construção de figuras tridimensionais, ajudam a consolidar esse processo, especialmente quando o conteúdo abordado envolve sólidos geométricos, muitas vezes tratados de forma puramente teórica nas aulas tradicionais.

Além disso, a fundamentação matemática trazida pelos axiomas de Huzita-Hatori ampliou a compreensão da dobradura como construção geométrica rigorosa, o que fortalece a legitimidade dessa abordagem dentro do campo da Matemática. Como afirma Lira (2015), a dobradura não é apenas um recurso artístico ou lúdico, mas pode ser entendida como uma linguagem matemática com regras próprias e com potencial formativo significativo.

Por fim, a patir dos depoimentos coletados dos estudantes, por meio de questionário discursivo, foi possível evidenciar uma maior motivação e interesse nas aulas de Geometria, assim como a percepção de que o aprendizado ocorreu de forma mais clara e concreta. Isso dialoga com o exposto nas diretrizes da BNCC (BRASIL, 2018), que enfatizam a importância de metodologias ativas, experimentação e o protagonismo do aluno no processo de aprendizagem.

Além disso, a aplicação prática da proposta na turma do 8º ano, onde a pesquisa se desenvolveu, demonstrou que a inclusão de recursos manipulativos e estratégias visuais pode transformar positivamente a experiência dos estudantes com a Matemática. Alunos que antes demonstravam desinteresse ou dificuldade passaram a se envolver com as atividades, compreender os conceitos e valorizar a geometria em seu cotidiano.

A análise dos dados revelou ganhos significativos na compreensão dos sólidos geométricos, na capacidade de abstração e no desenvolvimento da linguagem matemática. O relato dos estudantes apontou para uma mudança positiva na forma como percebem e aprendem a matemática, destacando o papel fundamental da mediação do professor, da ludicidade e da experimentação.

Entretanto, apesar das potencialidades evidentes, diversos desafios ainda se impõem à implementação efetiva dessa metodologia em sala de aula. Entre eles, destacam-se a formação inicial e continuada dos professores, muitas vezes carente de abordagens que integrem práticas concretas e lúdicas ao conteúdo matemático; a limitação de tempo nos planejamentos curriculares; e a escassez de materiais didáticos específicos ou orientações metodológicas que subsidiem o uso do origami de forma sistemática.

Espera-se que este trabalho possa auxiliar outros educadores a explorarem metodologias concretas, sensíveis e inovadoras no ensino da matemática. Acredita-se que, ao dobrar o papel, estar-se também desdobrando possibilidades: de ensinar com sentido, de aprender com prazer e de transformar a sala de aula em um espaço de descoberta, criação e encantamento.

Dessa forma, conclui-se que o uso de dobraduras e dos origamis enquanto ferramenta pedagógica no ensino de Geometria não apenas favorece a compreensão dos conteúdos, mas também torna o ambiente escolar mais dinâmico, interativo e significativo. Recomenda-se, portanto, a ampliação dessa prática no currículo da Educação Básica e a formação continuada de professores que contemple o uso de recursos não convencionais, como o origami, no ensino da Matemática, possibilitando assim a importância de práticas pedagógicas que considerem a ludicidade, a experimentação e o raciocínio geométrico como elementos fundamentais para o ensino e a aprendizagem da matemática no contexto da Educação Básica.

Referências

ALVES, L. R.; BARBOSA, J. C. A geometria e os desafios da prática docente. *Revista Educação Matemática Debate*, v. 14, n. 2, p. 89–106, 2022. páginas 65, 72

AMARAL, T. A.; BARBOSA, M. R. Dobraduras no ensino de geometria: uma abordagem prática. *Revista de Ensino de Matemática e Tecnologia*, v. 4, n. 1, p. 43–52, 2020. páginas 73

BITTAR, M.; FERRAZ, C. Geometria e currículo: entre prescrições e práticas. *Educação Matemática em Revista*, v. 26, n. 66, p. 11–29, 2020. páginas 65

BORIN, J. *Matemática: o lúdico e o concreto no ensino e na aprendizagem*. [S.l.]: Meditação, 2010. páginas 37

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1996. páginas 13, 33

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2021. páginas 38

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. [S.l.]: Ministério da Educação, 1998. Secretaria de Educação Fundamental. páginas 19

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 15 jun. 2025. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. páginas 20, 35, 36, 45, 54, 55, 86

CURY, H. R. d. C. *Geometria: conteúdos e metodologia*. São Paulo: Ática, 2004. páginas 70

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2005. v. 2. páginas 36

DOLCE, O.; POMPEO, D. *Geometria Plana e Espacial*. São Paulo: Editora Saraiva, 2003. páginas 38

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento matemático. In: . [S.l.]: Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1999. p. 9–38. páginas 37

D'AMBRóSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Autêntica, 2012. páginas 71

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigando a prática docente: uma metodologia de formação e de pesquisa*. 6. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. páginas 85

FIORENTINI, D.; NASCIMENTO, M. M.; LIMA, R. d. C. N. *Saberes docentes e desenvolvimento profissional: práticas de formação continuada*. Campinas: Mercado de Letras, 2014. páginas 70

FREITAG, K. *Origami e Educação Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2012. páginas 37, 39

FUKUCHI, N. *Origami e Matemática: dobrando papéis, desdobrando ideias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. páginas 33

FURUIA, K. C.; CAVACAMI, M. I. D. *Explorando Geometria com Origami*. São Paulo: Escrituras Editora, 2009. páginas 27, 38, 70

GERETSCHLäGER, R. Euclidean constructions and the geometry of origami. *Mathematics Magazine*, v. 68, n. 5, p. 357–371, 1995. páginas 34

HUZITA, H. *The Geometry of Origami*. [S.l.: s.n.], 1989. páginas 21, 22, 23, 24

IBRAIM, L.; PIRES, M. *Fundamentos de Geometria Espacial*. São Paulo: Editora Contexto, 2022. páginas 46

JUNIOR, O. Origami: introdução aos sete axiomas de huzita-hatori e contribuições no ensino da matemática. *V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, p. 36, 2013. páginas 15

JúNIOR, C. A. G. *Geometria: Fundamentos e Aplicações*. São Paulo: FTD, 2000. páginas 15

KAWAMURA, M. *Polyhedron Origami for Beginners*. Tokyo: Nihon Vogue Co., 2002. páginas 37, 38

LIBâNEO, J. C. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2002. páginas 71

LIRA, S. M. B. *Matemática e dobraduras de papel: um diálogo entre arte, ciência e educação*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015. páginas 66, 85

LOPES, E. M.; SILVA, A. P. Desafios no ensino de geometria: uma leitura a partir da prática docente. *Cadernos de Matemática*, v. 20, n. 3, p. 65–77, 2021. páginas 65

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2009. páginas 19, 25, 66, 68, 85

LORENZATO, S. *O conhecimento matemático na perspectiva do professor: estudo sobre saberes docentes*. [S.l.]: Autores Associados, 2010. páginas 19

MAIORINO, J. E. *Geometria Euclidiana Plana: Uma Abordagem Axiomática*. São Paulo: Livraria da Física, 2011. páginas 16, 26

MIZUKAMI, M. d. G. N. *Ensinando a ensinar: didática para a escola fundamental e média*. São Paulo: Cortez, 2008. páginas 70

MONTEIRO, A. R.; CURI, E. A formação do professor de matemática e o ensino de geometria. *Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 54, p. 839–858, 2015. páginas 69

MOYSéS, M. A. *Inclusão escolar: o que é? Por quê? Como fazer?* [S.l.]: Autores Associados, 2003. páginas 11

NACARATO, A. M.; MENGALI, L. B.; PASSOS, C. L. B. *Elementos da geometria no ensino fundamental: reflexões e propostas*. Campinas: Mercado de Letras, 2009. páginas 65

PONTE, J. P. d.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigar para ensinar Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. páginas 71

ROCHA, D. S.; GOMES, M. E. Infraestrutura e ensino de matemática: implicações para a prática docente. *Revista Diálogos Educacionais*, v. 15, n. 45, p. 201–218, 2019. páginas 71

Secretaria da Educação do Estado da Bahia. *Documento Curricular Referencial da Bahia: Matemática*. Salvador: Secretaria da Educação do Estado da Bahia, 2022. Acesso em: 31 maio 2025. Disponível em: <https://dcrb.educacao.ba.gov.br/wp-content/uploads/2022/10/caderno_matematica.pdf>. páginas 33, 34, 37, 73

VALENTE, W. R. O ensino de matemática e os materiais concretos: possibilidades e limites. In: *Educação Matemática: temas e desafios*. [S.l.]: Autêntica, 2013. p. 55–72. páginas 72

ZAMBONI, E. M. S. *Origami e Geometria: dobrando conceitos*. São Paulo: Autêntica, 2012. páginas 72

Apêndice A

Apêndices

A.1 Apêndice A: Atividade complementar

Atividade Complementar – Matemática
8º Ano do Ensino Fundamental
Professora: Thaís Matos
Escola Municipal Josapha Carlos Borges
Data: 00/11/2024

Nome do(a) aluno(a): ____

Leia as questões com atenção e responda conforme solicitado:

1. Qual das opções representa um ponto em geometria?
   (a) Um local exato sem dimensões.
   (b) Um segmento de linha.
   (c) Uma superfície plana.

2. Você tem uma folha de papel e a dobra ao meio. Qual entidade geométrica é representada por essa dobra?
   (a) Um ponto.
   (b) Um plano.
   (c) Uma reta.

3. Uma folha de papel é dobrada ao meio, horizontalmente, e depois verticalmente. Essas duas dobras se cruzam. Qual é o ponto formado?
   (a) Um vértice.
   (b) Um ponto de interseção.
   (c) Um ângulo obtuso.

4. As “linhas” formadas pelas dobras da folha podem ser:
   (a) Concorrentes
   (b) Paralelas
   (c) Perpendiculares

5. Numa folha de papel, faça duas dobras de modo que não se cruzem. Essas retas são:
   (a) Paralelas
   (b) Concorrentes
   (c) Perpendiculares

6. **(V ou F)** Um triângulo retângulo pode ser formado ao dobrar um papel quadrado ao meio na diagonal. Explique sua resposta.

   ____

   ____

7. Uma pirâmide de base quadrada possui quantas faces triangulares?
   (a) 4
   (b) 5
   (c) 6

8. Quantas arestas possui um tetraedro?
   (a) 4
   (b) 6
   (c) 8

9. Qual é a forma geométrica da base de um prisma triangular?
   (a) Triângulo
   (b) Quadrado
   (c) Círculo

10. Se dobrarmos uma folha para criar um cubo, quantos vértices ele terá?
    (a) 4
    (b) 6
    (c) 8

11. Uma pirâmide triangular possui quantos vértices?
    (a) 4

(b) 5

(c) 6

12. Quantas faces possui um octaedro construído por dobradura?

    (a) 6

    (b) 7

    (c) 8

13. As atividades aqui apresentadas foram respondidas a partir de dobraduras e origamis. Você acha que a utilização destes recursos ajudou no processo de aprendizagem? Justifique.

    ____

    ____

14. Considerando o sólido geométrico construído pelo grupo, cite suas principais características.

    ____

    ____

A.2 Apêndice B: Autoavaliação – Atividades com Origamis e Dobraduras

Atividade Complementar – Matemática
8º Ano do Ensino Fundamental
Professora: Thaís Matos
Escola Municipal Josapha Carlos Borges
Data: 00/12/2024

Nome do(a) aluno(a): ____

Leia com atenção cada item abaixo e faça uma reflexão sincera sobre sua participação e aprendizagem durante as atividades com origamis e dobraduras. Marque a alternativa que melhor representa sua experiência.

1. Eu participei das atividades com atenção e interesse:

   ( ) Sempre ( ) Às vezes ( ) Raramente

2. Compreendi as instruções para realizar as dobraduras propostas:

   ( ) Com facilidade ( ) Com alguma dificuldade ( ) Tive muita dificuldade

3. Relacionei as dobraduras com os conceitos geométricos estudados (formas, vértices, arestas, planificações):

   ( ) Sim ( ) Em parte ( ) Ainda não

4. Colaborei com os colegas durante as atividades:

   ( ) Sempre ( ) Às vezes ( ) Não colaborei

5. O que mais gostei de aprender com as dobraduras foi:

   ____

   ____

6. Uma dificuldade que encontrei foi:

   ____

7. O que posso melhorar em mim nas próximas atividades: