Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação

O Teorema do Casamento de Hall e Aplicações no Ensino Básico

por

Andréa de Melo Narciso Santana

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão - SE

Julho de 2025

Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

O Teorema do Casamento de Hall e Aplicações no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Andréa de Melo Narciso Santana

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão - SE, 22 de Julho de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S232t

Santana, Andréa de Melo Narciso
O Teorema do Casamento de Hall e aplicações no ensino básico / Andréa de Melo Narciso Santana ; orientador André Vinicius Santos Dória. – São Cristóvão, 2025.
40 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Teoria dos grafos. 2. Análise combinatória. 3. Ensino médio. I. Dória, André Vinícius Santos orient. II. Título.

CDU 51:37

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O Teorema do Casamento de Hall e Aplicações no Ensino Básico

por

Andrea de Melo Narciso Santana

Aprovada pela Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
ANDRE VINICIUS SANTOS DORIA
Data: 28/07/2025 14:05:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
ANA CRISTINA SALVIANO VEIGA
Data: 28/07/2025 14:19:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
CRISLENE SANTOS DA PAIXAO
Data: 28/07/2025 15:44:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Crislene Santos da Paixão - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 22 de Julho de 2025.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887 E-mail:profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me permitir iniciar e concluir esta jornada acadêmica.

De forma especial, agradeço ao meu esposo, Andercleyson, e à minha filha, Júlia, pelo apoio incondicional durante todo o curso. Agradeço por compreenderem as madrugadas de estudo e os inúmeros finais de semana sem lazer.

À minha mãe, Marleide, minha maior inspiração, que me criou com coragem e amor. Sua força, dedicação e generosidade me sustentaram em todos os momentos.

Ao meu pai, Gilberto (in memoriam), que me ensinou valores fundamentais e deixou um legado que carrego comigo até hoje.

Às minhas irmãs, cunhados e sobrinhos, agradeço pelo incentivo constante e torcida animadora ao longo desse percurso.

Aos meus sogros, Rosa e José (in memoriam), que sempre me acolheram como filha e me apoiaram com carinho e generosidade.

Expresso minha sincera gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória, por sua paciência e por ser um profissional prestativo, organizado e coerente. Sua orientação foi essencial para a realização deste trabalho.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (ProfMat) da Universidade Federal de Sergipe, agradeço pela dedicação, pelo conhecimento compartilhado e pelo incentivo constante ao longo dessa trajetória.

Aos amigos do mestrado, Cinthia, Elaine, Carlos Roberto e Thiago, minha gratidão pela companhia constante, pelas valiosas trocas de conhecimento e por estarem sempre presentes nos momentos desafiadores.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a elaboração deste trabalho e para a concretização deste sonho.

”O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar o Teorema do Casamento de Hall, suas variações e metodologias, buscando combinar teoria e prática, estimulando o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a criatividade dos alunos. Em complemento à versão clássica do teorema, duas outras reformulações foram desenvolvidas e relacionadas, distinguindo-se do referencial teórico usual. Com o intuito de contribuir na construção de um ensino mais inclusivo, eficiente e motivador, atividades práticas foram propostas e parte delas foi aplicada em alunos do segundo ano do ensino médio. A prática, estruturada em três etapas, permitiu observar o progresso dos estudantes diante dos desafios matemáticos. Apesar das dificuldades, o engajamento dos alunos foi notável, impulsionado pela abordagem investigativa e pela contextualização do Teorema do Casamento de Hall em situações práticas e reais.

Palavras-chave: Teorema de Hall; Casamento; Combinatória; Ensino Médio.

Abstract

The purpose of this dissertation is to present Hall's Marriage Theorem, its variations and methodologies, aiming to combine theory and practice, stimulating students' logical reasoning, critical thinking and creativity. In addition to the classic version of the theorem, two other reformulations were developed and related, distinguishing themselves from the usual theoretical framework. In order to contribute to the construction of a more inclusive, efficient, and motivating education, practical activities were proposed, and part of them was applied to second-year high school students. The practice, structured in three stages, allowed to observe the students' progress in facing mathematical challenges. Despite the difficulties, the students' engagement was remarkable, driven by the investigative approach and by the contextualization of Hall's Marriage Theorem in practical and real situations.

Keywords: Hall's theorem; Marriage; Combinatorics; High School.

Sumário

Introdução

A educação no Brasil tem enfrentado desafios históricos e estruturais, tais como as desigualdades regionais, a falta de recursos em muitas escolas, baixos índices de aprendizado e defasagem na formação dos professores. Durante a pandemia da COVID-19, esses problemas se agravaram e o abismo entre escolas públicas e particulares, que sempre existiu, aumentou consideravelmente.

Na Matemática, o cenário se complica exponencialmente. O ensino focado em memorização, por meio de fórmulas e conceitos pré-definidos, faz com que o aluno que já tem dificuldade e não assimilou os conteúdos básicos dos anos iniciais, não use a criatividade e o pensamento crítico. Aprender vai muito além da capacidade de repetir um processo, pois exige a compreensão, o aprofundamento e aplicação do conhecimento em diferentes situações.

O aluno precisa perceber que, ao aprender matemática, ele pode utilizá-la no dia a dia. Evidentemente a Matemática vai muito além do cotidiano, e está profundamente ligada com a inovação tecnológica e o avanço científico, mostrando-se essencial para o entendimento e progresso de várias áreas do conhecimento. Dessa maneira, a busca por metodologias que integrem teoria e prática, estimulando o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a criatividade dos alunos, e a análise de diferentes abordagens didáticas, aliada ao uso de recursos interativos, visam contribuir para a construção de um ensino mais inclusivo, eficiente e motivador, que prepare os alunos não apenas para resolver problemas matemáticos, mas para usar a matemática de forma criativa e transformadora em sua vida cotidiana e profissional.

Nesse sentido, o Teorema do Casamento de Hall, resultado fundamental na área da Combinatória e da Teoria dos Grafos, pode ser usado como ferramenta eficaz para tal objetivo. O teorema responde a seguinte pergunta: dados dois conjuntos de elementos e uma lista de compatibilidade entre eles, é possível formar pares de forma que cada elemento de um conjunto seja ligado com um elemento compatível do outro conjunto, em que todos os elementos de um dos conjuntos sejam utilizados? Ele pode ser aplicado a uma vasta gama de problemas de alocação e correspondência em diferentes áreas do conhecimento. Embora o teorema não diga como encontrar o emparelhamento, ele serve como base teórica para o desenvolvimento de algoritmos eficientes, por exemplo o Algoritmo Húngaro, utilizado em sistemas computacionais para alocar tarefas, otimizar escalas de trabalho ou distribuir recursos de forma eficiente em ambientes corporativos, logísticos e educacionais. Além da versão clássica do teorema, apresentamos duas reformulações que foram desenvolvidas e interligadas, afastando-se do referencial teórico convencional.

Devido à simplicidade de seu enunciado, as situações se tornam facilmente visualizáveis e compreensíveis para alunos da Educação Básica, incentivando o pensamento sistemático e a análise de casos. Passando pela modelagem do problema, entendimento das relações entre os elementos, testes, investigações e à conclusão sobre a possibilidade ou não da solução, com a devida justificativa. Testamos algumas das propostas desta dissertação diretamente com alunos do segundo ano do ensino médio. Dividida em três fases, essa jornada prática nos permitiu testemunhar uma evolução notável na forma como esses estudantes enfrentam os desafios matemáticos. Apesar dos obstáculos, o entusiasmo e a participação foram contagiantes, tudo graças a uma abordagem investigativa que conectou o Teorema do Casamento de Hall a cenários da vida real.

A dissertação tem como base [1] e está estruturada em três capítulos. No Capítulo 1, somos introduzidos ao universo da Combinatória com a apresentação de problemas clássicos. O Capítulo 2 é dedicado ao Teorema do Casamento de Hall, sua relação com Teoria dos Grafos e uma reformulação, conhecida como Teorema Transversal, destacando suas aplicações em situações-problema que podem ser exploradas no ensino básico. O Capítulo 3 trata da aplicação do projeto em uma turma do ensino médio, descrevendo as estratégias metodológicas adotadas, as atividades desenvolvidas e a análise dos resultados obtidos. Os anexos incluem as questões da OBMEP utilizadas em sala de aula e os slides empregados na aula prática.

Capítulo 1

Combinatória

Na Matemática, um ramo rico em aplicabilidade é a Combinatória. Nela, o aluno começa a relacionar os conteúdos com situações do dia a dia, como calcular combinações de roupas, organizar convidados em mesas, calcular a probabilidade em jogos de azar e otimizar rotas de viagem. Por isso, a Combinatória é considerada um pilar fundamental para o entendimento de problemas em diversas áreas, como probabilidade, computação e até biologia.

Além disso, a Combinatória está intimamente relacionada à Teoria dos Grafos, outra área importante da Matemática que expande significativamente suas aplicações. Por exemplo, em grandes redes de computadores ou sistemas de transporte público, a combinatória é empregada para encontrar soluções eficientes em termos de caminhos e conexões. Um exemplo clássico é o problema do caixeiro-viajante, que busca encontrar o caminho mais curto para que um vendedor visite várias cidades. Apesar de fácil de entender, torna-se extremamente difícil de resolver em grande escala.

Portanto, a Combinatória é uma ferramenta poderosa que nos permite quantificar e entender as possibilidades em cenários onde a contagem direta é impraticável. Ela nos ajuda na tomada de decisão e na resolução de problemas complexos em uma vasta gama de campos do conhecimento.

1.1 Problemas Clássicos

Os problemas clássicos, sejam eles da antiguidade ou mais recentes, atuam como verdadeiros catalisadores para o avanço do conhecimento matemático e científico. Mesmo que pareçam simples à primeira vista, são incrivelmente difíceis de resolver e a busca por suas soluções impulsionou matemáticos a inventar novos conceitos, criar novas técnicas e formular novas perguntas. Entre os problemas clássicos da Combinatória, podemos citar:

- o cálculo da chance de um jackpot (prêmio acumulado) em jogos de azar;
- o problema dos aniversários, nele precisamos determinar quantas pessoas são necessárias para que haja mais de 50% de possibilidade que pelo menos duas pessoas compartilhem aniversário;
- o problema das torres não atacantes, visto também na Teoria dos Grafos. O problema consiste em determinar de quantas maneiras é possível posicionar um certo número de torres em um tabuleiro $n \times n$ de forma que nenhuma torre ataque a outra.

Diferente de problemas únicos e fixos como o do caixeiro-viajante, o "problema das 40 cartas"é uma categoria que engloba diversos desafios envolvendo um baralho de 40 cartas. A solução para cada um deles depende diretamente da tarefa proposta. Por exemplo, imagine um baralho com 40 cartas divididas em 4 grupos de 10, representados por cores diferentes e enumeradas de 1 a 10. Essas cartas serão embaralhadas e distribuídas a 10 grupos de 4 pessoas. Sempre é possível selecionar uma carta de cada grupo de tal forma que as 10 cartas escolhidas não tenham números repetidos? A resposta deste desafio é sim e pode ser justificada pelo Teorema do Casamento de Hall.

Figura 1.1: Philip Hall

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hall/

O Teorema do Casamento de Hall foi provado por Philip Hall no ano de 1935 e publicado em [2]. Embora a formulação original seja mais abstrata, o teorema surgiu como uma ferramenta do seu trabalho na Teoria dos Grupos, sua principal área de pesquisa. Ainda que o problema em si possa ser visualizado como uma situação de “casamento”, daí o nome pelo qual é amplamente conhecido.

O teorema apresenta formulação tanto na Combinatória quanto na Teoria dos Grafos. Em ambas áreas, determina uma condição necessária e suficiente para a existência de uma transversal, ou seja, dada uma coleção finita de conjuntos quando será possível escolher um elemento de cada conjunto sem repetição.

Apesar de sua origem em problemas combinatórios complexos, sua simplicidade permite que ele seja compreendido e utilizado no ensino médio, fornecendo uma excelente oportunidade para os estudantes desenvolverem habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas. Podendo ser aplicado diretamente em questões que envolvem afinidades ou preferências, pois dessa maneira o aluno é levado a analisar tamanho de conjuntos, relacionar subconjuntos e usar o raciocínio lógico para verificar condições de emparelhamento.

Capítulo 2

Emparelhamento e a Condição de Casamento

Considere o seguinte problema de alocação: um gestor precisa distribuir tarefas para sua equipe, naturalmente cada funcionário está apto a realizar um grupo de tarefas. A situação é descrita na Tabela 2.1, onde a primeira coluna representa os funcionários, a primeira linha representa as tarefas e o X marca a aptidão de um funcionário para uma determinada tarefa.

Tabela 2.1: Aptidão de funcionários por tarefa

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
F_1	X		X		X
F_2		X		X	
F_3	X	X			
F_4	X	X	X		
F_5				X	X

Fonte: Autoria própria.

Considerando que cada funcionário deve ser alocado a uma única tarefa, a decisão do gestor caracteriza um exemplo de problema de existência. A questão fundamental é: será que existe uma solução?

Um teorema que responde a esta pergunta será mostrado em breve. Contudo, se aparecerem mais de uma solução, teremos uma segunda questão: qual solução será mais vantajosa para a empresa? Típico exemplo de problema de otimização. Nesse trabalho, focaremos apenas na primeira pergunta.

2.1 Teorema do Casamento de Hall

Essa seção tem como idéia inicial a abordagem proposta em [3], adaptada ao contexto deste trabalho.

O problema de emparelhar dois conjuntos disjuntos, não obrigatoriamente de mesma cardinalidade, pode ser descrito de forma mais clara em termos de casamento, por isso é frequentemente conhecido como o problema do casamento. Essencialmente, é a mesma questão de alocar funcionários a tarefas. Em nosso estudo, adotaremos a regra de que uma pessoa não pode "se casar"com mais de um indivíduo.

Considere onze pessoas: I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 e J_6, onde suas amizades são detalhadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Círculo de amizades

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
I_1			X		X	
I_2			X	X		
I_3	X	X				X
I_4			X			
I_5				X	X	

Fonte: Autoria própria.

O objetivo é formar casais entre amigos, assumindo que cada individuo pode casar no máximo uma única vez e que todas as pessoas da primeira coluna encontrem um par. Mais precisamente, definir uma relação injetiva de pares ordenados

$$(a, b) \in I \times J$$

tais que a e b são amigos, sendo $I = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ e $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$. Ao analisar o círculo de amizades de I_1, I_2, I_4 e I_5, temos somente J_3, J_4 e J_5. Isso torna impossível formar um grupo de casais que inclua todas as pessoas de I. Consequentemente, o problema não possui solução.

Em geral, para que cada pessoa de I consiga casar-se com um amigo de J, é necessário que todo subgrupo [1] X de I tenha pelo menos $|X|$ amigos em J, onde $|X|$ representa a cardinalidade de X. Embora essa condição possa parecer óbvia, ela é, na verdade, necessária e suficiente para o problema ter solução.

Teorema 2.1. (Teorema do Casamento de Hall) *Sejam I e J dois grupos distintos de pessoas. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *O círculo de amizades de todo subgrupo X de I tenha pelo menos $|X|$ pessoas de J;*

(*b*) *É possível casar cada pessoa de I com um amigo em J.*

Prova.

(b) $\Rightarrow$ (a) Isso decorre das observações anteriores.
(a) $\Rightarrow$ (b) A demonstração será por indução sobre a cardinalidade de I. Se $|I| = 1$, como I é subgrupo dele mesmo, segue da hipótese, que o círculo de amizades de I tem pelo menos uma pessoa amigável em J. Logo, o resultado é verdadeiro neste caso.

Suponha, como hipótese indutiva, que a afirmação é válida para qualquer par de grupos distintos de pessoas I' e J', quando $|I'| < |I|$.

Para simplificar a escrita, faremos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Denotaremos $\mathcal{C}_Y(X)$ como o conjunto das pessoas em Y que pertencem ao círculo de amizades de X. Mais formalmente:*

$$\mathcal{C}_Y(X) = \{y \in Y \mid y \text{ é amigo de algum } x \in X\}.$$

Já que, $I \neq \emptyset$, selecionamos um $i \in I$, segue do enunciado, que existe $j \in J$ tal que i e j são amigos. Defina os conjuntos $I' = I \backslash \{i\}$ e $J' = J \backslash \{j\}$. Se

$$|\mathcal{C}_{J'}(S)| \geqslant |S|$$

para todo o subgrupo S de I', então, por indução, é possível casar cada pessoa de I' com uma pessoa amigável de J'. Juntando o par i e j, isso nos permite casar cada pessoa de I com uma pessoa amigável de J.

Agora, vamos supor que existe S subgrupo de I' tal que

$$|\mathcal{C}_{J'}(S)| < |S|.$$

Devido a

[1] grupo que é parte de outro grupo

$$|\mathcal{C}_J(S)| \geqslant |S| \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_J(S) \subseteq \{j\} \cup \mathcal{C}_{J'}(S),$$

segue-se que

$$j \in \mathcal{C}_J(S) \quad \text{e} \quad |\mathcal{C}_J(S)| = |S|.$$

Considere os seguintes pares de conjuntos distintos: $\{S, D\}$ e $\{A, B\}$, sendo $D = \mathcal{C}_J(S)$, $A = I \backslash S$ e $B = J \backslash \mathcal{C}_J(S)$. Sabemos que $S \neq \emptyset$ e $S \neq I$, assim $|S| < I$ e $|A| < I$. Supondo que

$$|\mathcal{C}_D(X)| \geqslant |X|, \text{ para todo } X \text{ subgrupo de } S$$

e

$$|\mathcal{C}_B(X)| \geqslant |X|, \text{ para todo } X \text{ subgrupo de } A$$

segue, por indução, que é possível casar cada pessoa de S com uma pessoa amigável de D, analogamente, para o par $\{A, B\}$. Portanto, é possível casar cada pessoa de I com um amigo de J.

A conclusão da demonstração requer a verificação das duas afirmações precedentes.

- Seja X subgrupo de S. Por hipótese, $|\mathcal{C}_J(X)| \geqslant |X|$, e como $\mathcal{C}_J(X) = \mathcal{C}_D(X)$, temos que $|\mathcal{C}_D(X)| \geqslant |X|$;

- Caso X subgrupo de A. Note que, $\mathcal{C}_B(X) = \mathcal{C}_J(X) \backslash \mathcal{C}_J(S) = \mathcal{C}_J(X \cup S) \backslash \mathcal{C}_J(S)$, assim
$$|\mathcal{C}_B(X)| = |\mathcal{C}_J(X \cup S)| - |\mathcal{C}_J(S)|,$$
visto que $\mathcal{C}_J(S) \subseteq \mathcal{C}_J(X \cup S)$. Já que,
$$|\mathcal{C}_J(X \cup S)| \geqslant |X \cup S| = |X| + |S|,$$
segue que
$$|\mathcal{C}_B(X)| \geqslant |X| + |S| - |\mathcal{C}_J(S)| = |X| + |\mathcal{C}_J(S)| - |\mathcal{C}_J(S)| = |X|,$$
ou seja,
$$|\mathcal{C}_B(X)| \geqslant |X|.$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.1. *Voltemos a situação descrita na Tabela 2.2, o círculo de amizades do subgrupo* $\{I_1, I_2, I_4, I_5\}$ *tem menos de* 4 *pessoas, assim o problema não tem solução. É crucial notar que este é o único subconjunto de* I *que não satisfaz a condição do Teorema do Casamento de Hall. Assim, para que este problema tenha solução basta adicionar mais uma pessoa de* J *ao círculo de amizades do subgrupo* $\{I_1, I_2, I_4, I_5\}$*, por exemplo,* I_1 *se tornar amigo de* J_1*:*

Tabela 2.3: Novo círculo de amizades

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
I_1	X		X		X	
I_2			X	X		
I_3	X	X				X
I_4			X			
I_5				X	X	

Fonte: Autoria própria.

Assim, na nova situação (Tabela 2.3), uma solução seria

$$\{(I_1, J_1), (I_2, J_4), (I_3, J_2), (I_4, J_3), (I_5, J_5)\}.$$

Claramente, existem outras soluções, porém alguns cuidados precisam ser tomados. Olhando para I_1 *e esquecendo os outros de* I *por um momento, poderíamos casar* I_1 *com* J_1*,* J_3 *ou* J_5*. E caso escolhêssemos unir* I_1 *com* J_3*,* I_4 *não teria nenhuma opção de casamento.*

Estes exemplos a seguir demonstram a aplicabilidade do Teorema do Casamento de Hall em diferentes cenários, os quais serão explorados na prática do Capítulo 3.

Exemplo 2.2. Programa de Estágios - *Uma escola de ensino médio está organizando um programa de estágios para seus alunos. Há* 10 *alunos interessados e* 5 *professores responsáveis em acompanhar o desempenho deles. Cada aluno indicou suas preferências de professores (Tabela 2.4), e cada professor pode orientar até 2 estagiários. É possível alocar todos os 10 alunos aos professores, respeitando tanto as preferências dos alunos quanto a capacidade máxima de 2 estagiários por professor?*

Tabela 2.4: Preferências dos alunos

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
P_1	X		X		X		X		X	
P_2	X	X				X			X	
P_3		X		X			X			X
P_4			X			X		X		
P_5				X	X			X		X

Fonte: Autoria própria.

O problema apresentado deve considerar as preferências descritas na Tabela 2.4 e a capacidade máxima de 2 *estagiários por professor, caracterizando um caso clássico de alocação. O Teorema do Casamento de Hall é uma ferramenta útil para determinar se é possível alocar cada aluno a um professor, respeitando as preferências indicadas. No entanto, a formulação do teorema assume uma ligação de* 1 *para* 1*, o que é excedido pela nossa restrição de dois estagiários por professor.*

Para contornar essa limitação, duplicamos cada professor P_i *(representados como* P'_i*) na Tabela 2.5. Essa adaptação nos permite aplicar o Teorema do Casamento de Hall.*

Tabela 2.5: Professores duplicados

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
P_1	X		X		X		X		X	
P_2	X	X				X			X	
P_3		X		X			X			X
P_4			X			X		X		
P_5				X	X			X		X
P'_1	X		X		X		X		X	
P'_2	X	X				X			X	
P'_3		X		X			X			X
P'_4			X			X		X		
P'_5				X	X			X		X

Fonte: Autoria própria.

Ao analisar todos os subconjuntos possíveis (Teorema 2.1), confirmamos que o pro-

blema tem solução. Na próxima seção, aprofundaremos a análise deste problema sob a perspectiva da Teoria de Grafos (Figura 2.4), onde essa solução será apresentada.

Exemplo 2.3. Bingo - *Uma professora de matemática organizou um bingo para seus* 35 *alunos do segundo ano. Ela trouxe* 5 *prêmios diferentes e sorteará* 5 *estudantes. No entanto, a professora definiu algumas regras:*

1. *Cada aluno receberá, de forma aleatória, um papel com um número. Esse será o seu número da sorte para o sorteio;*

2. *No seu papel numerado, cada aluno deverá escrever os dois presentes que gostaria de ganhar;*

3. *Em seguida, serão sorteados* 5 *números.*

Agora, o desafio é saber se conseguiremos distribuir os prêmios sorteados de forma que as preferências de cada aluno sejam respeitadas. Para isso, podemos explorar o Teorema do Casamento de Hall de uma forma lúdica e acessível, investigando se é possível fazer essa combinação perfeita.

Se não for possível satisfazer as preferências de todos com o sorteio atual, faremos um novo sorteio e analisaremos a nova situação, repetindo o processo até que seja possível distribuir os prêmios respeitando as preferências de todos os sorteados.

2.2 Versão usando Grafos

Antes de enunciar a versão do Teorema do Casamento de Hall usando Grafos, se faz necessário uma sucinta introdução de alguns conceitos de Grafos. Para detalhes adicionais, ver [4].

Seja V um conjunto qualquer. Denotamos por V^2 o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de V, ou seja, V^2 denota o conjunto de todos os subconjuntos de V com dois elementos

Definição 2.2. *Uma grafo G é um par (V, A), onde V é um conjunto qualquer e A é um subconjunto de V^2.*

Os elementos de V são chamados de vértices e os de A de arestas. Cada aresta pode ser denotada por vu ou uv, onde u e v são os vértices que a compõem. Note que, por definição, uu não pode ser uma aresta de G. Além disso, os vértices u e v são ditos adjacentes.

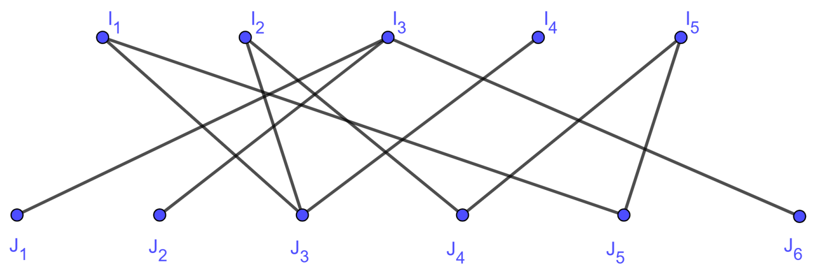
Similarmente, arestas são consideradas adjacentes se possuírem um vértice em comum.

Exemplo 2.4. *A situação descrita na Tabela 2.2 pode ser naturalmente representada pelo seguinte grafo $G = (V, A)$:*

- $V = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$;
- $A = \{I_1J_3, I_1J_5, I_2J_3, I_2J_4, I_3J_1, I_3J_2, I_3J_6, I_4J_3, I_5J_4, I_5J_5\}$.

Visualmente representado pela Figura 2.1, onde os vértices são pontos e as arestas são linhas.

Figura 2.1: Grafo Amizades

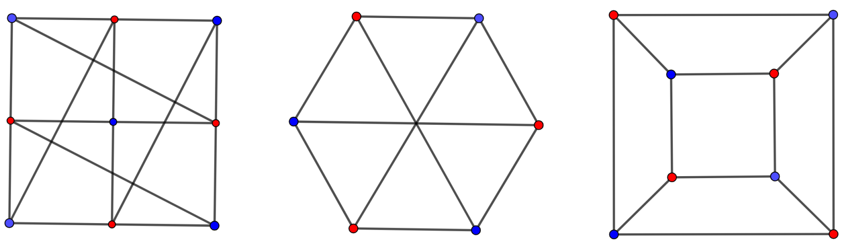


Fonte: Autoria própria.

Vale notar que o grafo possui uma característica de bipartição no conjunto dos vértices, que é uma propriedade comum aos grafos associados aos problemas de emparelhar dois conjuntos disjuntos.

Definição 2.3. *Um grafo é bipartido quando os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos, de forma que cada aresta conecte um vértice de um conjunto a um vértice do outro.*

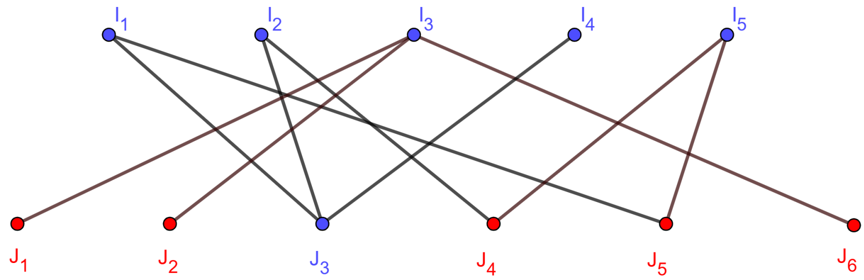
Figura 2.2: Exemplos de grafos bipartidos



Fonte: Autoria própria.

Definição 2.4. *Seja X um subconjunto de vértices de um grafo G. Denotamos por $N(X)$ o conjunto dos vértices de G que são adjacentes a algum $v \in X$.*

Figura 2.3: Representação do conjunto $N(I_3, I_5)$ em vermelho



Fonte: Autoria própria.

Seja G o grafo associado ao problema de emparelhar dois conjuntos disjuntos, como visto no Teorema 2.1. Isso nos permite utilizar a notação da Seção 2.1. Visto que o grafo é bipartido, com bipartição $\{I, J\}$, temos que:

$$\mathcal{C}_J(X) = N(X),$$

para todo $X \subseteq I$. Convém lembrar que $\mathcal{C}_J(X)$ representa as pessoas de J que pertencem ao círculo de amizades de X (Definição 2.1). Portanto, o item (a) do Teorema 2.1 é equivalente a

$$|N(X)| \geqslant |X| \text{ para todo subconjunto } X \text{ de } I.$$

Para entender o item (b) do teorema do ponto de vista da Teoria dos Grafos, será necessário mais duas definições:

Definição 2.5. *Um conjunto A de arestas de um grafo G cobre um conjunto I de vértices de G, quando cada vértice de I incide em pelo menos uma aresta de A.*

Definição 2.6. *Um conjunto A de arestas de um grafo G é um emparelhamento quando não houver duas arestas em A que incidam no mesmo vértice.*

O item (b) do Teorema 2.1 diz que

é possível casar cada pessoa de I com um amigo em J.

No grafo associado G, cada aresta representa o vínculo de amizade entre uma pessoa de I com outra de J. "Assim, o item (b) é equivalente a existe um conjunto de aresta de G

que não possui arestas adjacentes e cada vértices de I incide em pelo menos uma aresta do conjunto". Em outras palavras, existe um emparelhamento que cobre I.

Ao aplicar o Teorema 2.1, podemos reformular o Teorema do Casamento de Hall da seguinte maneira:

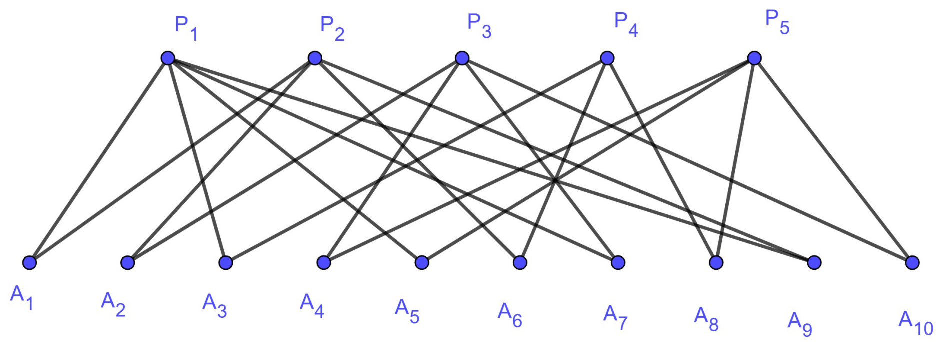
Proposição 2.1. *Seja G um grafo bipartido, com bipartição $\{I, J\}$. Os itens abaixo são equivalentes.*

(a) $|N(X)| \geqslant |X|$ para todo subconjunto X de I;

(b) Existe um emparelhamento que cobre I.

Exemplo 2.5. Programa de Estágios - *Consideremos novamente o Exemplo 2.2, representado pelo grafo da Figura 2.4.*

Figura 2.4: Grafo Estágios

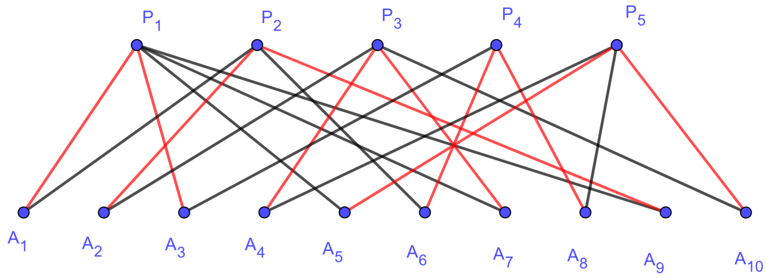


Fonte: Autoria própria.

A figura representa graficamente as relações de preferência entre os alunos e os professores, com base na Tabela 2.4. Essa visualização é útil para compreender o problema do Programa de Estágios.

O grafo facilita a resolução do problema ao permitir que a situação seja modelada. Com essa representação, os alunos podem explorar estratégias de resolução por tentativa e erro ou simulações práticas, compreendendo o problema mesmo sem dominar toda a teoria envolvida. Essa abordagem oferece uma maneira concreta e visual de lidar com o problema, estimulando o raciocínio lógico e a organização de dados sem a necessidade de ferramentas formais. Um recurso pedagógico valioso para tornar acessível um problema de emparelhamento mais complexo.

Figura 2.5: Uma solução do Exemplo 2.2



Fonte: Autoria própria.

A determinação de um emparelhamento máximo em grafos bipartidos é uma tarefa fundamental em diversas aplicações práticas, como o alocamento de recursos, agendamento de tarefas e o próprio casamento de elementos entre dois conjuntos. Embora o Teorema de Hall forneça uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito (ou que cobre um dos lados da bipartição), ele não indica como construir esse emparelhamento.

Para isso, são empregados algoritmos como o Algoritmo de Hopcroft-Karp, que busca iterativamente aumentar o tamanho do emparelhamento existente, identificando e utilizando caminhos aumentantes disjuntos no grafo. Outra abordagem comum envolve a transformação do problema de emparelhamento em um problema de fluxo máximo em redes, onde algoritmos como Ford-Fulkerson ou Edmonds-Karp podem ser aplicados para encontrar o fluxo máximo, que por sua vez corresponde ao emparelhamento máximo.

No entanto, para os objetivos deste trabalho, aprofundar a discussão sobre os algoritmos específicos para encontrar o emparelhamento máximo desviaria do foco principal. Nosso objetivo é a compreensão conceitual do Teorema de Hall e suas implicações teóricas e práticas para a existência de emparelhamentos, e não a parte computacional de sua descoberta.

2.3 Teorema Transversal de Hall

A transversal é um conceito fundamental na combinatória, útil para resolver diversos problemas ao permitir a seleção de elementos distintos de diferentes conjuntos. Essa ideia é a base para aplicar o Teorema do Casamento de Hall em outros contextos. A seguir, formalizaremos esse conceito.

Seja $\mathcal{F}$ uma família finita de conjuntos, que podemos representar por

$$\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}.$$

Definição 2.7. *Dizemos que $\mathcal{F}$ admite uma transversal quando existem elementos distintos $a_1, \ldots, a_n$ tais que $a_i \in S_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Antes de apresentarmos um exemplo, destacamos duas ferramentas matemáticas frequentemente associadas ao Teorema de Hall e ao conceito de transversal: a *função piso* e o *Princípio da Casa dos Pombos*. Ambas são úteis em demonstrações e interpretações envolvendo contagem e alocação de elementos.

Definição 2.8 (Função Piso)**.** *A função* ***menor inteiro****, também chamada de* ***função piso****, associa a cada número real o maior número inteiro menor ou igual a ele. Sua notação usual é:*

$$\lfloor x \rfloor$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ satisfazem:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Por exemplo:

$$\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3 \quad e \quad \lfloor -2{,}1 \rfloor = -3.$$

Definição 2.9 (Princípio da Casa dos Pombos - Versão Generalizada)**.** *Se n objetos são distribuídos em k recipientes, então existe pelo menos um recipiente que contém ao menos:*

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$$

objetos, onde $\lceil \cdot \rceil$ representa a ***função teto****, isto é, o menor número inteiro maior ou igual ao valor indicado.*

Esse princípio é uma generalização do caso clássico, que garante que, se $n > k$, então ao menos um recipiente contém dois ou mais objetos.

Definição 2.10. *Dizemos que $\mathcal{F}$ admite uma transversal quando existem elementos distintos $a_1, \ldots, a_n$ tais que $a_i \in S_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Exemplo 2.6. *Uma escola está organizando grupos de estudo e deseja garantir que cada grupo tenha um representante de cada uma das quatro áreas do conhecimento: Matemática*

(M), Física (F), Biologia (B) e História (H). Para isso, quatro alunos foram selecionados, e cada um tem interesse em múltiplas áreas, conforme a Tabela 2.6. A escola precisa saber se esses alunos podem formar um grupo onde cada área seja representada por um aluno diferente.

Tabela 2.6: Área de conhecimento I

	M	F	B	H
A_1	X	X		
A_2		X	X	
A_3			X	X
A_4	X			X

Fonte: Autoria própria.

Considerando as áreas como conjuntos de alunos interessados, temos: $M = \{A_1, A_4\}$, $F = \{A_1, A_2\}$, $B = \{A_2, A_3\}$ *e* $H = \{A_3, A_4\}$. *O problema se resume a verificar se essa família de conjuntos admite uma transversal, ou seja, um conjunto de elementos distintos (alunos) que represente cada um dos conjuntos de áreas. Neste caso, a transversal existe e é dada por* $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Agora, vamos considerar um novo grupo de alunos com interesses diferentes, apresentados na Tabela 2.7. De forma análoga, os conjuntos de áreas seriam:

$$M = \{A_3\},\ F = \{A_1, A_2, A_4\},\ B = \{A_3\} \text{ e } H = \{A_1, A_2, A_4\}.$$

Neste segundo caso, não é possível formar uma transversal. A razão é que a união dos conjuntos M *e* B *resulta em apenas um aluno:* $|M \cup B| = |\{A_3\}| = 1$. *Isso implica que o aluno* A_3 *teria que representar tanto a área de Matemática quanto a de Biologia, o que viola a condição de que cada área deve ser representada por um aluno diferente (elementos distintos na transversal).*

Vale destacar que, assim como nesta situação, em qualquer outra em que uma transversal exista, ela nem sempre é única. No exemplo representado pela tabela 2.6, embora o conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ seja uma transversal válida, também seria possível formar outras combinações, desde que cada área seja representada por um aluno diferente. Isso reflete a flexibilidade do conceito de transversal, que admite múltiplas soluções quando as condições do Teorema de Hall são satisfeitas.

Tabela 2.7: Área de conhecimento II

	M	F	B	H
A_1		X		X
A_2		X		X
A_3	X		X	
A_4		X		X

Fonte: Autoria própria.

Definição 2.11. *Dizemos que $\mathcal{F}$ satisfaz a condição de casamento quando para todo inteiro positivo $k \leqslant n$ e toda escolha de k inteiros $i_1, \ldots, i_k$, com $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, temos que*

$$|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| \geqslant k.$$

Teorema 2.2. (Teorema Transversal de Hall) *$\mathcal{F}$ admite uma transversal se, e somente se, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição de casamento.*

Prova. Como usaremos a Proposição 2.1, precisamos definir um grafo bipartido G, com bipartição $\{I, J\}$. Sejam $I = \{S_1, \ldots, S_n\}$ e $J = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, onde $S_i u$, com $u \in J$, será uma aresta de G quando $u \in S_i$. Claramente, G é um grafo bipartido.

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma transversal. Isso significa que existem elementos distintos $a_1, \ldots, a_n$ tais que $a_i \in S_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, o conjunto de arestas $\{S_1 a_1, \ldots, S_n a_n\}$ é um emparelhamento que cobre I. Aplicando a Proposição 2.1, temos que

$$|N(X)| \geqslant |X|$$

para todo subconjunto X de I. Seja k inteiro positivo menor ou igual a n e k inteiros, $i_1, \ldots, i_k$, com $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$. Defina $X = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}\}$, como $X \subseteq I$, segue que

$$|N(X)| \geqslant |X| \;\Rightarrow\; |N(X)| \geqslant k.$$

Pela construção de G, temos que $N(X) = S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}$, logo

$$|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| \geqslant k,$$

ou seja, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição de casamento.

Agora faremos a recíproca. Suponha que $\mathcal{F}$ satisfaz a condição de casamento, isto é, para todo inteiro positivo $k \leqslant n$ e toda escolha de k inteiros, $i_1, \ldots, i_k$, com $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, temos que

$$|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| \geqslant k.$$

Seja X um subconjunto qualquer de I, podemos assumir que existe t, inteiro positivo menor ou igual a n, tal que $X = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_t}\}$ com $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_t \leqslant n$. Já sabemos que $N(X) = S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_t}$, consequentemente

$$|N(X)| = |S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_t}| \geqslant t = |X| \;\;\Rightarrow\;\; |N(X)| \geqslant |X|.$$

Novamente, pela Proposição 2.1, existe um emparelhamento em G que cobre I, que podemos expressar por $\{S_1a_1, \ldots, S_na_n\}$. Portanto, existem $a_1, \ldots, a_n$ elementos distintos tais que $a_i \in S_i$, ou seja, $\mathcal{F}$ admite uma transversal. ■

Vale notar que, a Proposição 2.1 e Teorema 2.2 são de fato uma reformulação de um mesmo resultado, o Teorema do Casamento de Hall. Sendo que cada versão possui sua própria peculiaridade e aplicabilidade.

Exemplo 2.7. *Imagine um baralho com* 40 *cartas, dividido em 4 naipes (Ouros, Copas, Espadas, Paus), e cada naipe contém cartas numeradas de* 1 *a* 10*. Após um embaralhamento, essas* 40 *cartas são separadas em* 10 *grupos, com* 4 *cartas em cada.*

A pergunta que surge é: seria possível escolher uma carta de cada grupo de modo que as 10 *cartas selecionadas incluam exatamente uma carta de cada número de* 1 *a* 10*, independentemente dos naipes?*

A resposta a essa pergunta é sim. Para demonstrar isso, represente por $G_1, G_2, \ldots, G_{10}$ os 10 *grupos de cartas. Seja $\mathcal{F}$ a família de conjuntos*

$$\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{10}\},$$

onde S_i é o conjunto dos inteiros distintos que aparecem nas cartas de G_i. Nossa questão se resume a verificarmos que $\mathcal{F}$ admite uma transversal. Conforme o Teorema 2.2, podemos averiguar se $\mathcal{F}$ atende a condição de casamento.

Suponha que $\mathcal{F}$ não satisfaz a condição de casamento, ou seja, existe um inteiro positivo $k \leqslant 10$ e inteiros $i_1, \ldots, i_k$, tais que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 10$ e

$$|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| < k.$$

Já que, todo S_j é um conjunto não-vazio, segue que

$$1 \leqslant |S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| < k \quad \Rightarrow \quad k \geqslant 2.$$

Isso significa que há no máximo $k-1$ inteiros distintos representados entre as $4k$ cartas da união $G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_k}$. Mas isso implicaria, pela forma generalizada do princípio da casa dos pombos [2]*, que pelo menos um desses inteiros ocorre em pelo menos*

$$\left\lceil \frac{4k}{k-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{4(k-1)+4}{k-1} \right\rceil = \left\lceil 4 + \frac{4}{k-1} \right\rceil \geqslant 5$$

das cartas, contrariando o que nos foi dado.

Portanto, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição de casamento.

[2]Se n itens são colocados em m recipientes, então pelo menos um recipiente deve conter pelo menos $\lceil n/m \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ representa a função "teto", que arredonda x para o menor inteiro maior ou igual a x.

Capítulo 3

Na prática

Este capítulo detalha a experiência prática conduzida com alunos do ensino médio, uma etapa crucial para a validação das metodologias deste trabalho. Avaliamos o impacto dessas abordagens na compreensão dos estudantes, utilizando observação direta, coleta de dados e investigação. O objetivo foi discernir como os alunos assimilam e aplicam conceitos abstratos quando apresentados em contextos lúdicos, desafiadores ou próximos à realidade.

Além disso, as atividades desenvolvidas desempenham um papel relevante na formação do professor, permitindo que ele reflita sobre suas práticas, adapte intervenções pedagógicas, avalie resultados e aprimore sua atuação. Assim, este capítulo não só documenta os procedimentos adotados, mas também evidencia o potencial transformador da matemática quando trabalhada de forma investigativa, contextualizada e interativa.

3.1 Execução e Estratégias

O presente trabalho foi desenvolvido no Colégio Estadual Arabela Ribeiro, localizado na cidade de Estância, no estado de Sergipe, tendo como público-alvo 22 estudantes das segundas séries do ensino médio. A execução da pesquisa foi dividida em três etapas:

1. Os alunos foram expostos a três exemplos do Capítulo 2 sem a apresentação formal do conteúdo;

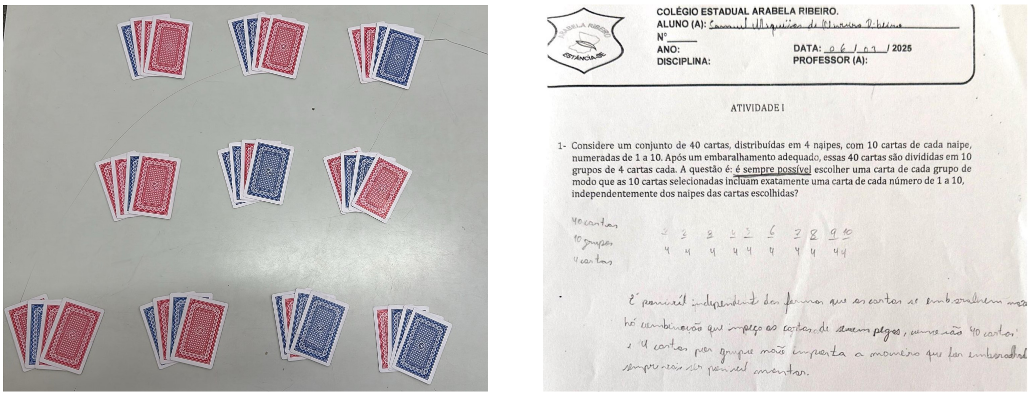
2. Realizou-se uma aula expositiva do tema, seguida pela correção das questões previamente aplicadas;

3. A etapa final consistiu em uma atividade com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Primeira Etapa: Exploração Inicial

Em 6 de março de 2025, os estudantes responderam por escrito o Exemplo 2.7. Para auxiliar a investigação dos alunos, foram distribuídas 40 cartas de baralho, divididas em 4 naipes, com cada naipe contendo cartas numeradas de 1 a 10 (Figura 3.1).

Figura 3.1: Distribuição das cartas



Fonte: Acervo da autora.

Constatou-se que grande parte dos discentes apresentou dificuldades tanto no desenvolvimento do raciocínio lógico quanto na interpretação do enunciado da atividade. O percentual de acertos registrado foi de 36%.

Em 13 de março de 2025, aplicamos o Exemplo 2.2. O objetivo foi abordar problemas de alocação, incentivando os alunos a aplicar conceitos matemáticos em busca de soluções práticas e viáveis. Por se tratar de um problema concreto e mais simples que o anterior, a taxa de acertos subiu para aproximadamente 45%.

E para finalizar, os alunos participaram da dinâmica do Exemplo 2.3. Após a coleta das respostas, o exemplo foi executado na prática em sala de aula. Em relação às respostas dos alunos, este foi o exemplo com a maior taxa de acerto, totalizando 90%. Durante a execução do problema, 10% dos alunos que não acertaram tiveram a oportunidade de compreender melhor as condições propostas pela atividade.

Na execução prática do Exemplo 2.3, foram apresentados aos alunos cinco brindes e distribuídos cartões numerados de maneira aleatória. Em seguida, os alunos escreveram no cartão o nome de dois brindes que gostariam de ganhar entre os cinco prêmios disponíveis. Realizado o sorteio, os cinco alunos sorteados mostraram suas escolhas e os demais estudantes passaram a analisar se seria possível distribuir os prêmios de forma que todos ficassem satisfeitos.

Após algumas tentativas de distribuição, os alunos perceberam que um dos participantes não havia escrito as opções corretamente, o que resultou na necessidade de sua substituição. Com a troca do estudante, foi possível observar que um dos prêmios (a caixa de som pequena) não havia sido escolhido por nenhum dos alunos, o que levou à desclassificação de todos os participantes e à realização de um novo sorteio com cinco novos números.

Figura 3.2: Bingo

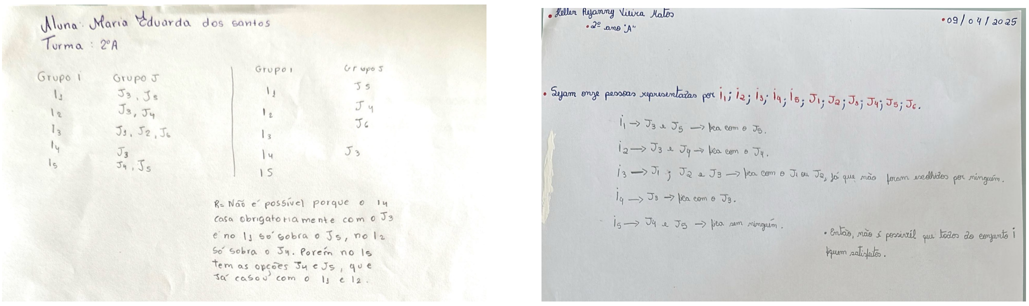
Ao verificar as escolhas dos alunos, foi identificado que outro estudante também não havia registrado suas opções corretamente, o que resultou na sua substituição. Dessa vez, todos os presentes foram devidamente escolhidos, permitindo que a distribuição seguisse as preferências de cada aluno sorteado, conforme as regras estabelecidas.

Segunda Etapa: Instrução e Feedback

No dia 9 de abril de 2025, foi realizada uma aula expositiva aprofundando os conteúdos abordados nos exemplos da primeira etapa. A aula contou com o apoio de slides (detalhes no Apêndice B) e atividades práticas em grupo. O objetivo principal foi promover a compreensão dos conceitos envolvidos nos problemas, bem como estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade argumentativa dos estudantes.

Antes da apresentação formal do teorema, foi exibida aos alunos a Tabela 2.2, sendo proposto que resolvessem a questão correspondente. Após alguns minutos de tentativa, os alunos concluíram que o problema não tinha solução. A partir dessa constatação, o teorema foi introduzido e, com base nos conceitos de conjuntos e subconjuntos, foi realizada a verificação formal de que o exemplo inicial, de fato, não possuía solução. Em seguida, a Tabela 2.3 foi apresentada como uma alternativa metodológica, revelando que um pequeno ajuste na situação anterior tornava o problema solúvel.

Figura 3.3: Atividade amizades



Fonte: Acervo da autora.

Durante a aula, os Exemplos 2.2, 2.3 e 2.7 foram retomados em detalhes. Os alunos participaram ativamente da resolução coletiva das questões, discutindo estratégias, identificando dados relevantes, analisando as condições e construindo argumentos lógicos e coerentes. Eles foram incentivados a questionar, refletir criticamente e propor diferentes abordagens para os desafios propostos.

Terceira Etapa: Aplicação Desafiadora

A etapa final consistiu em uma avaliação escrita com questões de edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A escolha por esse tipo de questão teve como objetivo não apenas verificar os conhecimentos adquiridos, mas também desafiar os alunos com problemas complexos proporcionando o contato com um exame de grande relevância no contexto educacional brasileiro.

Durante a aplicação, observou-se que, embora a maioria dos alunos tenha demonstrado compreensão dos conceitos teóricos trabalhados, muitos apresentaram dificuldades na elaboração de tabelas e na interpretação precisa dos enunciados.

Apesar dessas dificuldades, aproximadamente 40% dos alunos resolveram a atividade corretamente. No entanto, foi notável que as resoluções corretas ocorreram por meio de estratégias variadas, evidenciando diferentes caminhos de pensamento e abordagens para a resolução dos problemas.

3.2 Analíse de Resultados

A análise dos dados obtidos ao longo do projeto no Colégio Estadual Arabela Ribeiro evidencia como a exploração de técnicas diferenciadas de ensino pode contribuir para o engajamento e a aprendizagem dos estudantes, especialmente no que se refere à resolução de problemas.

Na primeira etapa, que teve como objetivo diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos, foi possível observar um desempenho inicial limitado. As taxas de acerto variaram de 36% a 90%, revelando que a familiaridade com o tipo de problema proposto influenciou diretamente o desempenho dos estudantes. A atividade prática do Exemplo 2.3 proporcionou um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e colaborativo. Além disso, as falhas cometidas durante a execução da tarefa foram transformadas em oportunidades de discussão, reforçando a compreensão dos conceitos envolvidos.

A segunda etapa, marcada pela realização de uma aula expositiva, teve um papel central na sistematização do conteúdo. A revisão dos exemplos já trabalhados, aliada à introdução teórica dos conceitos e à análise coletiva das resoluções, permitiu que os alunos revisitassem suas estratégias iniciais, confrontando-as com novas formas de pensar. O uso da Tabela 2.3 como ferramenta metodológica também se mostrou eficaz para a organização dos dados e para a visualização das relações lógicas entre os elementos dos problemas.

Na terceira etapa, a aplicação de questões da OBMEP funcionou como um momento de consolidação e verificação das habilidades desenvolvidas. A taxa de acerto de aproximadamente 40% indica que, embora muitos alunos ainda apresentem dificuldades, principalmente na elaboração de tabelas e na interpretação precisa dos enunciados, houve um progresso notável em relação à etapa diagnóstica inicial.

No geral, os resultados demonstram que a exploração de técnicas variadas, desde a prática em sala, passando pela exposição teórica até a aplicação de avaliações desafiadoras, pode ser uma aliada valiosa no processo de ensino-aprendizagem da matemática. A combinação entre prática, teoria e desafio permitiu a construção de uma postura mais investigativa diante dos problemas propostos.

3.3 Conclusão

Este trabalho demonstra claramente o impacto positivo das metodologias empregadas, especialmente o uso do Teorema do Casamento de Hall. Ao aplicar esse conceito abstrato a situações concretas e contextualizadas, os alunos puderam explorar ideias matemáticas complexas de forma mais eficaz.

A estruturação em três etapas permitiu observar avanços significativos na forma como os estudantes se posicionam diante dos desafios matemáticos. Notou-se também que, mesmo compreendendo os conceitos envolvidos, alguns alunos apresentaram dificuldades em aplicá-los na resolução de determinadas questões, o que reforça a importância de continuar investindo em estratégias didáticas que promovam não apenas a compreensão teórica, mas também a familiaridade com a estrutura lógica dos problemas.

A etapa diagnóstica revelou um cenário inicial de dificuldades, mas também apontou que o engajamento dos alunos aumenta quando são propostas atividades com maior grau de dificuldade. A sistematização teórica, por sua vez, desempenhou um papel fundamental na reorganização do pensamento matemático dos estudantes, permitindo a reflexão crítica sobre suas próprias estratégias de resolução. Já a etapa final, ao propor desafios alinhados à OBMEP, revelou uma maior autonomia dos alunos na construção de soluções, ainda que persistam obstáculos no uso de representações adequadas e na interpretação dos enunciados.

Concluindo, a combinação de prática, teoria e desafio constitui um caminho promissor para tornar o ensino da Matemática mais significativo. Ao favorecer a construção de uma postura investigativa e a valorização do processo e não apenas do resultado o projeto demonstrou que é possível promover avanços concretos no desempenho e no interesse dos estudantes, contribuindo efetivamente para a formação de sujeitos mais críticos, autônomos e capazes de aplicar o conhecimento matemático em diferentes contextos.

Referências Bibliográficas

[1] ALLENBY, Reginald Braithwaite John Trevor and SLOMSON, Alan. **How to Count: An Introduction to Combinatorics**. 2nd ed. In: ROSEN, K. H. (Org.). Discrete Mathematics and Its Applications, 2011.

[2] HALL, Philip. **On Representatives of Subsets**. Journal of the London Mathematical Society, 10, 1935, pp. 26 - 30.

[3] HALMOS, Paul Richard and VAUGHAN, Herbert Edward. **The Marriage Problem**. American Journal of Mathematics, 72, 1950, pp. 214 - 215.

[4] NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura e JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos: Introdução e Prática**. Editora Blucher, 2011.

[5] OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). **Banco de Questões da OBMEP.** [S.d.]. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em: 15 jan. 2025.

Apêndice A

OBMEP

Mesmo não sendo abordado no ensino médio, o Teorema do Casamento de Hall pode ser uma ferramenta valiosa na resolução de problemas de combinatória. A OBMEP, especialmente em seus níveis mais avançados (Nível 3), frequentemente apresenta problemas de combinatória e teoria dos grafos que exigem raciocínio lógico e a aplicação de princípios como o que o teorema de Hall descreve. É importante lembrar que a OBMEP foca no raciocínio lógico e na criatividade, e nem sempre espera que o aluno conheça teoremas formais.

Outro ponto de destaque é que o Teorema de Hall é excelente para responder "é possível?". Ele não é uma ferramenta de contagem direta para "de quantos modos?", que é o tipo de pergunta nas questões de combinatória da OBMEP. Ainda assim, a lógica por trás do teorema está diretamente relacionada aos princípios de atribuição e existência explorados nessas provas.

A seguir, listaremos as questões utilizadas na terceira etapa prática, a Aplicação Desafiadora. As resoluções podem ser encontradas em [5].

Conceitos Básicos de Combinatória

Porém, antes de apresentar as questões, é essencial relembrar alguns conceitos fundamentais de Combinatória, que servem como base para a resolução dos problemas propostos.

A Combinatória é o ramo da Matemática que estuda as diferentes maneiras de contar, organizar, agrupar ou selecionar elementos de um conjunto, obedecendo a determinadas regras ou restrições. Ela se divide, principalmente, em três áreas básicas: o princípio multiplicativo e aditivo, permutações, arranjos e combinações.

- **Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo):** Se uma tarefa pode ser realizada em duas etapas, sendo a primeira de m maneiras e a segunda de n maneiras, então há $m \times n$ maneiras de realizar ambas. Esse princípio se estende a mais etapas e é essencial em problemas de contagem.

- **Princípio Aditivo:** Se uma tarefa pode ser realizada de m maneiras ou de n maneiras, e essas possibilidades são mutuamente exclusivas (não simultâneas), então existem $m + n$ maneiras de realizá-la.

- **Permutações:** São as diferentes maneiras de ordenar todos os elementos de um conjunto. Por exemplo, a permutação de n elementos distintos é dada por $n!$ (fatorial de n).

- **Arranjos:** São formas de escolher e ordenar uma parte dos elementos de um conjunto. O número de arranjos de p elementos entre n disponíveis (com $p \leq n$) é dado por $A(n,p) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

- **Combinações:** Diferente dos arranjos, aqui a ordem dos elementos não importa. O número de combinações de p elementos entre n disponíveis é $C(n,p) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Com base nesses conceitos, apresentamos a seguir algumas questões da OBMEP que dialogam com essas ideias e que permitem, com a devida modelagem, enxergar a utilidade do raciocínio presente no Teorema de Hall, mesmo sem sua aplicação direta.

Exemplo A.1. QUESTÃO 17 - OBMEP 2010 (NÍVEL 3) *Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?*

A) 20 *B)* 32 *C)* 60 *D)* 72 *E)* 120

Resposta: *C.*

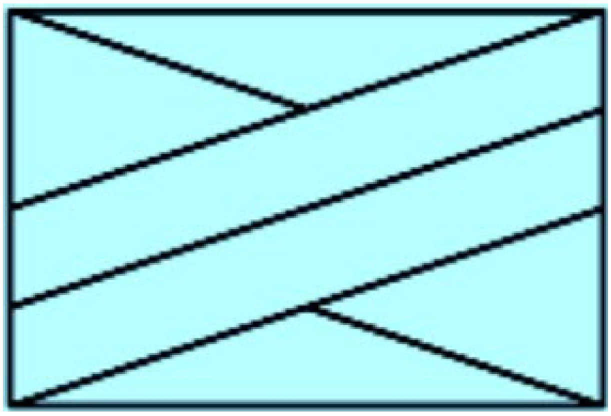
Exemplo A.2. QUESTÃO 12 - OBMEP 2011 (NÍVEL 3) *Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher* *ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?*

A) $\frac{1}{9}$ *B)* $\frac{1}{8}$ *C)* $\frac{2}{9}$ *D)* $\frac{3}{8}$ *E)* $\frac{3}{4}$

Resposta: *C.*

Exemplo A.3. QUESTÃO 17 - OBMEP 2013 (NÍVEL 3) *Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?*

Figura A.1: Bandeira



Fonte: OBMEP 2013.

A) 336 *B)* 420 *C)* 576 *D)* 86 *E)* 972

Resposta: *A.*

Exemplo A.4. QUESTÃO 18 - OBMEP 2015 (NÍVEL 2) *Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?*

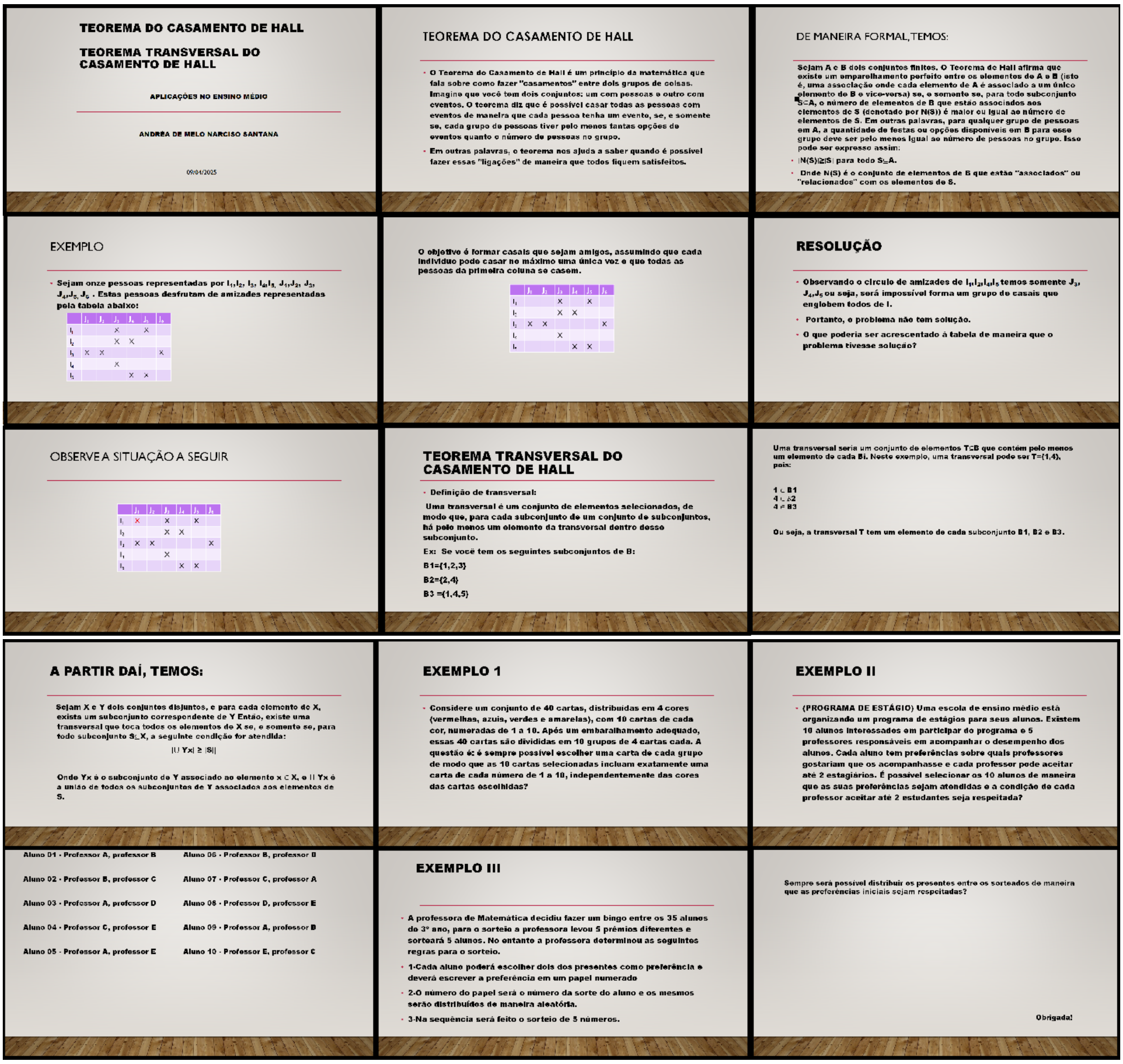
A) 20 *B)* 30 *C)* 60 *D)* 90 *E)* 120

Resposta: *D.*

Apêndice B

Slides da Aula Prática

Figura B.1: aula



Fonte: Acervo da autora.