UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre Sistemas Lineares e Gonalidade de Curvas que são Interseções Completas.

José Jardel Rezende Carvalho

São Cristóvão-SE, Brasil
23 de Julho de 2025

Sobre Sistemas Lineares e Gonalidade de Curvas que são Interseções Completas.

José Jardel Rezende Carvalho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática-PROMAT, da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Aislan Leal Fontes

Co-orientador: Prof. Dr. Maxwell da Paixão Jesus Santos

São Cristóvão-SE, Brasil
23 de Julho de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

C331s

Carvalho, José Jardel Rezende

Sobre sistemas lineares e gonalidade de curvas que são interseções completas / José Jardel Rezende Carvalho ; orientador Aislan Leal Fontes. – São Cristóvão, 2025.

71 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Sistemas lineares. 2. Curvas. I. Fontes, Aislan Leal orient. II. Título.

CDU 519.852

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Sobre sistemas lineares e gonalidade de curvas que são interseções completas

por

José Jardel Rezende Carvalho

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
AISLAN LEAL FONTES
Data: 04/08/2025 16:31:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Aislan Leal Fontes - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
ZAQUEU ALVES RAMOS
Data: 14/08/2025 06:21:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALAN DO NASCIMENTO MUNIZ
Data: 14/08/2025 06:32:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alan do Nascimento Muniz - UFPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 23 de Julho de 2025

Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos” – Av. Marcelo Déda Chagas, s/n - Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887 CEP: 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat@academico.ufs.br

Dedico à minha mãe Gilza,
que sempre me apoiou ao longo da minha vida.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter iluminado a minha vida e fortalecido minha caminhada acadêmica sempre ouvindo minhas preces e me dando força para continuar e concluir os meus objetivos.

Agradeço também a minha família, em especial, a minha mãe Gilza e a minha namorada, Nívea, por sempre me apoiarem incondicionalmente e me ajudarem a passar por essa etapa da minha vida com mais leveza e felicidade. Além disso, agradeço também ao meu pai José, ao meu irmão Bismarck e a minha cunhada Juliane.

Gostaria de agradecer, em particular, ao meu orientador, o professor Aislan Leal Fontes, por todos os aprendizados que pude ter ao longo da graduação e do mestrado, sempre me auxiliando nas minhas dúvidas e acreditando na minha capacidade de evoluir.

Agradeço também a todos os professores que participaram da minha formação e a todos os amigos que conheci ao longo da vida.

Por fim, agradeço a FAPITEC-SE pelo apoio financeiro dado ao trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada ao PROMAT/UFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre (Me.)

Sobre Sistemas Lineares e Gonalidade de Curvas que são Interseções Completas

José Jardel Rezende Carvalho

25 de março de 2025

Orientador: Prof. Dr. Aislan Leal Fontes.
Co-orientador: Prof. Dr. Maxwell da Paixão Jesus Santos

O seguinte trabalho aborda questões sobre série de sistemas lineares de curvas sobre uma variedade suave. O objetivo deste texto é estudar o conceito de sistemas lineares e introduzir o conceito de gonalidade de uma curva, fornecendo uma classificação de curvas de gonalidade baixa < 3, além de estudar as condições impostas em sistemas lineares sobre curvas no plano projetivo com enfoque em algumas propriedades. Além disso, encontramos uma cota inferior para a gonalidade de curvas que são interseções completas em $\mathbb{P}^r, r > 1$.
Palavras-chaves: Sistemas Lineares, Gonalidade, Interseção Completa, curvas suaves, amplo, muito amplo.

Abstract of Dissertation presented to PROMAT/UFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master

On Linear Systems and Gonalities of Curves that are Complete Intersections

José Jardel Rezende Carvalho

25 de março de 2025

Advisor: Prof. Dr. Aislan Leal Fontes
Co-advisor: Prof. Dr. Maxwell da Paixão Jesus Santos

The following work addresses questions on the series of linear systems of curves on a smooth variety. The goal of this text is to study the concept of linear systems and introduce de concept of gonality of a curve providing a classification of low gonality curves < 3, in addition to studying the conditions imposed on linear systems on curves in the projective plane with a focus on some properties. Furthermore, we show a lower bound to the gonality of curves that are complete intersections in $\mathbb{P}^r, r > 1$.
Keywords: Linear Systems, Gonality, Complete Intersection, smooth curves, ample, very ample.

Sumário

Introdução

Um problema muito recorrente que surge na Matemática, em particular, na Geometria Algébrica, é o de classificar objetos. Quando nossos objetos são curvas suaves temos dois invariantes associados que são o gênero e a gonalidade. Nesse caso, definimos a gonalidade como o menor inteiro positivo d para o qual existe um recobrimento de grau d de C em $\mathbb{P}^1$ o que é comumente denotado por g_d^1. Tal definição é equivalente, utilizando conceitos de sistemas lineares, a termos um feixe invertível $\mathcal{L}$ de grau d sobre C tal que $h^0(C, \mathcal{L}) \geq 2$. Como veremos nas Seções 3 e 4 tal invariante nos permite por exemplo classificar curvas racionais como curvas que possuem g_1^1, curvas elípticas (hiperelíticas) que possuem g_2^1 com gênero igual a 1 (maior ou igual a 2). Dessa maneira, conseguimos solucionar o problema de classificação para essa classe de curvas que tem gênero baixo, e além disso, conseguimos obter uma para o caso de curvas que são interseções completas obtemos uma cota inferior para a gonalidade, o que também auxilia na classificação destas curvas. Ao longo do texto revisitamos resultados clássicos de Geometria algébrica como a relação existente entre divisores, feixes e fibrados, o Teorema de Riemann-Roch, o Teorema de Reider e o Teorema de Nakai-Moishezon.

O trabalho foi dividido em quatro partes. A primeira seção tem como foco a obtenção de requisitos preliminares como, por exemplo, o estudo da Topologia de Zariski e dos conceitos de Divisores, Fibrados, Feixes e Esquemas através de exemplos e algumas propriedades importantes. Finalizamos a seção com o teorema que correlaciona, sob algumas hipóteses, de maneira biunívoca Divisores, Fibrados e Feixes o que é bastante importante visto que nos possibilita transionar o nosso problema de um dos três para o outro facilitando assim a resolução de vários problemas que irão aparecer ao decorrer do trabalho.

A segunda seção, traz alguns conceitos clássicos da Geometria Algébrica sobre curvas, como o conceito de sistemas lineares e o Teorema de Riemann-Roch com algumas consquências do mesmo em sequência. Além disso, obtemos alguns resultados voltados para as condições impostas em sistemas lineares sobre $\mathbb{P}^2$ com foco em algumas propriedades específicas.

Na terceira seção, definimos o conceito de gonalidade de uma curva C suave, enunciamos o Teorema 7 que fornece uma cota superior para a gonalidade e classificamos as curvas de gonalidade baixa, isto é, curvas com gonalidade < 3. Além disso, enunciamos e provamos o teorema de Reider para Fibrados, o qual é muito importante, visto que sob certas hipóteses conseguimos classificar um Fibrado como globalmente gerado ou amplo. Por fim, na quarta seção estudamos a gonalidade de curvas interseções completas em $\mathbb{P}^r$ através do seguinte resultado

Teorema 1 (Gonalidade de curvas interseções completas)**.** *Seja $C \subset \mathbb{P}^r$ uma interseção completa suave de hipersuperfícies de grau $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{r-1}$. Seja A um fibrado de retas em C livre de ponto base, de grau d, com $h^0(C, A) \geq 2$. Então,* $\operatorname{gon}(C) \geq (a_1 - 1).a_2. \cdots .a_{r-1}$.

Obtendo assim uma cota inferior para a gonalidade. Dessa forma, nos permitindo concluir que para curvas suaves de interseção completas com gênero g temos que

$$(a_1 - 1).a_2.\cdots.a_{r-1} \leq \mathrm{gon}(C) \leq \lfloor \frac{g+3}{2} \rfloor.$$

Ao decorrer do trabalho assumiremos que k é um corpo algebricamente fechado, A um anel comutativo e com unidade $1 \neq 0$. e também que o leitor está familiarizado com conceitos da Álgebra Comutativa como módulos, k-algebras, sequências exatas etc. Bem como conceitos básicos de Topologia como os conceitos de base, de compacidade, de funções contínuas etc. Por fim, também com o básico da Teoria de Categorias como morfismos, functores, objetos, etc.

1 Resultados Preliminares

Nessa seção, introduziremos alguns conceitos preliminares com a finalidade de preparar o leitor para os capítulos mais adiante. Inicialmente, abordaremos através da definição e algumas propriedades a Topologia de Zariski e o processo de Localização. Em sequência, iremos introduzir as definições de fibrados, feixes e esquemas, além disso veremos alguns exemplos e algumas propriedades elementares desses objetos matemáticos. Por fim, demonstraremos o resultado principal dessa seção, isto é, mostraremos de qual maneira podemos associar de maneira biunívoca certas classes de fibrados, de divisores e de feixes.

1.1 Topologia de Zariski

Definição 1. Seja A um anel. $\operatorname{Spec} A$ é o conjunto formado por todos os ideais primos de A.

Exemplo 1. Seja k um corpo, então $\operatorname{Spec} k = \{(0)\}$. Considere o anel $\mathbb{Z}$, então o $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(p) \mid p \text{ primo } \} \cup \{(0)\}$. Com efeito, basta relembrar que o anel quociente $\mathbb{Z}_p$ é um domínio, se e somente se, (p) é um ideal primo ou é o ideal nulo.

Exemplo 2. Se A é um Domíno de Fatoração Única (DFU), então um ideal principal $(f), 0 \neq f \in A$, é primo se, e somente se, o polinômio f é irredutível. Com efeito, se f é irredutível sobre A, então (f) está contido propriamente em A e sendo esse anel um DFU tem-se,

$$ab \in (f) \iff f|ab \iff f|a \text{ ou } f|b \iff a \in (f) \text{ ou } b \in (f).$$

Logo o ideal (f) é primo em relação a A. Reciprocamente, se $f \neq 0$ então ou f é irredutível ou $f \in A^*$, mas nessa última opção teríamos que $(f) = A$ e daí (f) não é ideal primo de A. No caso de f não ser irredutível podemos escrever $f = ab$ com $a, b \notin A^*$ e observamos que $ab \in (f)$ enquanto $a \notin (f)$ e $b \notin (f)$. isso mostra que o ideal (f) não é primo.

Note, entretanto, que um DFU em geral possui ideais primos que não são principais, por exemplo, se k é corpo, temos que

$$(x_1, x_2), \cdots, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \operatorname{Spec} k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

são ideias primos pois os anéis quocientes

$$\frac{k[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{(x_1, x_2, \cdots, x_i)} \simeq k[x_{i+1}, \cdots, x_n]$$

são domínios mas esses ideias não principais.

Exemplo 3. Para A um Domínio de Ideias Principais (DIP) temos em particular que A é um DFU e pelo Exemplo 2 segue-se que

$$\operatorname{Spec} A = \{(0)\} \cup (f) \mid f \in A \text{ irredutível } \}.$$

Assim, em particular, todo ideal primo (f) não nulo em um DIP é também um ideal maximal, visto que para quaisquer dois irredutíveis $f_1, f_2 \in A$ temos que

$$(f_1) \subset (f_2) \iff f_1 | f_2 \iff (f_1) = (f_2).$$

Daí, do exemplo acima seguem-se os seguintes exemplos:

Exemplo 4. Seja $A = \mathbb{C}[t]$, então como A é DFU e é um corpo algebricamente fechado, segue-se que $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[t] = \{0\} \cup \{(t-a) \mid a \in \mathbb{C}\}$.

Exemplo 5. Seja $A = \mathbb{C}[X, Y]$, então como A é DFU, segue-se que pelo Exemplo 2 e o Teorema dos Zeros de Hilbert que

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y] = \{0\} \cup \{(f) \mid f \in A \text{ é irredutível } \} \cup \{(X-a, Y-b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Definição 2. Sejam A um anel e um ideal qualquer $\mathcal{I} \subset A$. Definimos

$$V(\mathcal{I}) = \{(p) \in \operatorname{Spec} A \mid \mathcal{I} \subset p\}$$

e para um elemento $h \in A$, consideramos o aberto básico

$$D(h) = \{(p) \in \operatorname{Spec} A \mid h \notin p\}.$$

Lema 1. *Seja A um anel. Então,*

- (1) $V((0)) = \operatorname{Spec} A$ *e* $V((1)) = \emptyset$;
- (2) $V(\mathcal{I}) \cup V(\mathcal{J}) = V(\mathcal{I}\mathcal{J}) = V(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$;
- (3) $\bigcap_{i \in I} V(\mathcal{I}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i)$. *Aqui* $\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i$ *denota o ideal gerado pela família de ideias* $\{\mathcal{I}_i\}_{i \in I}$.

Demonstração. Inicialmente, provaremos a seguinte observação: V reverte inclusões, ou seja, sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais em A tais que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ então $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I})$. Com efeito, se $(p) \in V(\mathcal{J})$ então como $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ e pela definição 2 segue-se que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset (p)$, logo $(p) \in V(\mathcal{I})$. Com essa observação provaremos os itens do lema.

Item (1): Veja que $(0) \subset (p)$ para todo ideal primo (p) e dessa forma, pela definição 2 $V((0)) = \operatorname{Spec} A$. Para $(1) \in (p)$ tem-se que $(p) = A$, logo (p) não é primo e desse modo segue que $V((1)) = \emptyset$.

Item (2): Note que $\mathcal{I}\mathcal{J} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ e assim tem-se $V(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I}\mathcal{J})$. Agora, se $(p) \in V(\mathcal{I}\mathcal{J})$ então $\mathcal{I}\mathcal{J} \subset (p)$ com (p) um ideal primo de A, seja então $t \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, daí $t^2 \in \mathcal{I}\mathcal{J} \subset (p)$ dessa forma, $t \in (p)$ pela definição de ideal primo. Portanto, temos que $V(\mathcal{I}\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$ e daí temos a igualdade $V(\mathcal{I}\mathcal{J}) = V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$.

Item (3): Naturalmente, temos que $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, e assim $V(\mathcal{I}) \subset V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$ e $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$, dessa forma segue-se que $V(\mathcal{I})\cup V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$. Por outro lado, se $(p) \in V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$ então $(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}) \subset (p)$ e como (p) é primo segue que $\mathcal{I} \subset (p)$ ou $\mathcal{J} \subset (p)$ então $(p) \in V(\mathcal{I})$ ou $(p) \in V(\mathcal{J})$. Logo, $V(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I})\cup V(\mathcal{J})$. E com as duas inclusões concluimos nossa afirmação. Por fim, note que,

$$(p) \in V(\bigcup_{i\in I}\mathcal{I}_i) \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I}\mathcal{I}_i \subset (p) \Leftrightarrow \mathcal{I}_i \subset (p), \forall i \in I \Leftrightarrow (p) \in V(\mathcal{I}_i), \forall i \in I$$

o que acontece se, e só se, $(p) \in \bigcap_{i\in I} V(\mathcal{I}_i)$. □

Com a notação do Lema 1 podemos definir a Topologia de Zariski.

Definição 3. A Topologia de Zariski é formada pela coleção de abertos da forma $V(\mathcal{I})^c$ onde ^{c} representa o complementar.

1.2 Localização

Definição 4. Seja A um anel. Um conjunto multiplicativo $S \subset A$ é um conjunto que é fechado para a operação de produto, em outras palavras, dados $s, t \in S$ então $s.t \in S$ e também que $1 \in S$.

Dado um anel A e um subconjunto S de A, a localização de A com respeito a S é o anel $S^{-1}A$ obtido "invertendo"os elementos de S; formalmente $S^{-1}A$ é construído através do quociente de $A \times S$ pela seguinte relação de equivalência:

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \iff \text{ existe } t \neq 0 \in S | t.(s_2a_1 - a_2s_1) = 0 \text{ em } A$$

As operações de soma e produto são definidos de maneira natural

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1s_2 + a_2s_1}{s_1s_2} \text{ e } \frac{a_1}{s_1}.\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2}$$

e estão bem definidas já que não dependem da escolha de representante. Com efeito, se

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{t_1} \text{ e } \frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{t_2}$$

então existem $u, v \in S$ tais que $u(t_1a_1 - s_1b_1) = 0$ e $v(t_2a_2 - s_2b_2) = 0$. Como

$$\frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2} = \frac{t_2b_1 + t_1b_2}{t_1t_2} \in S^{-1}A$$

se e só, se existe $w \in S$ tal que $w(t_1t_2(s_2a_1 + s_1a_2) - s_1s_2(t_2b_1 + t_1b_2)) = 0$ em A, mas isso é equivalente a dizer que existe $w \in S$ tal que

$$w(s_2t_2(t_1a_1 - s_1b_1) + (s_1t_1(t_2a_2 - s_2b_2)) = 0$$

em A. Daí, veja que basta tomar $w = u.v$ o qual pertence a S pela definição do conjunto. Para a outra operação veja que

$$\frac{a_1a_2}{s_1s_2} = \frac{b_1b_2}{t_1t_2} \in S^{-1}A.$$

se, e somente se, existe $m \in S$ tal que $m(a_1a_2t_1t_2 - b_1b_2s_1s_2) = 0$, veja que

$$\begin{aligned} m(a_1a_2t_1t_2 - b_1b_2s_1s_2) &= ma_1a_2t_1t_2 - mb_1b_2s_1s_2 - ma_2t_2b_1s_1 + ma_2t_2b_1s_1 \\ &= (a_1t_1 - b_1s_1)(ma_2t_2) + (a_2t_2 - b_2s_2).(m.b_1s_1) \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $m = u.v$ e daí temos que

$$(u)(a_1t_1 - b_1s_1)(va_2t_2) + (v)(a_2t_2 - b_2s_2).(u.b_1s_1) = 0$$

Logo, as duas operações estão bem definidas. Assim, veja que com essas operações $S^{-1}A$ é um anel com o elemento neutro de $S^{-1}A$ sendo representado por qualquer classe da forma $\frac{0}{t}$ com $t \in S$ e o elemento $\frac{t}{t}$ representa o elemento identidade em $S^{-1}A$.
Além disso, temos a seguinte aplicação natural de A em $S^{-1}A$ dada por

$$\begin{aligned} i : A &\to S^{-1}A \\ a &\mapsto \tfrac{a}{1} \end{aligned}$$

e observe que tal aplicação é um homomorfismo.

Proposição 1. *O mapa $i : A \to S^{-1}A$ é injetor se e somente se $S \cap Z(A) = \emptyset$, onde $Z(A)$ representa o conjunto dos divisores de zero de A.*

Demonstração. Suponha que $S \cap Z(A) \neq \emptyset$. Assim existe $u \in S \cap Z(A)$, e então existe algum $a \in A - \{0\}$ tal que $a.u = 0$ pela definição de $Z(A)$, isso implica que

$$u(1.a - 1.0) = 0$$

o que acontece se, e só se, $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$, o que implica que $i(a) = 0$ e assim $\ker(i) \neq \{0\}$, em outras palavras, o homomorfismo i não é injetor.

Agora suponha que i é não injetor. Então existe $a \in \ker(i)$ tal que $a \neq 0$, e assim $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ o que implica que existe $u \in S$ tal que $u.(a.1 - 0.1) = 0$, isto é $u.a = 0$ e como $a \neq 0$ segue que $u \in S \cap Z(A)$, o que nos diz que $S \cap Z(A) \neq \emptyset$. □

Observação 1. Dessa forma temos que se A é um domínio então temos que a aplicação i definida acima é injetora, visto que o conjunto dos divisores de zero de um domínio é vazio. Além disso, quando a aplicação i é injetora podemos identificar A como um subanel de $S^{-1}A$.

Exemplo 6. Se $A = \mathbb{Z}$, e $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então da definição tem-se $S^{-1}A = \mathbb{Q}$.

O exemplo anterior, é um caso particular do seguinte exemplo:

Exemplo 7. Se A é um domínio de integridade, e $S = A \setminus \{0\}$, então $S^{-1}A$ é o corpo de frações de A.

Exemplo 8. Se $p \in \operatorname{Spec} A$ e $S = A \setminus p$ então denotamos a localização por A_p e chamamos de localização de A em p., a qual é representada pelo seguinte conjunto

$$S^{-1}A = \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \notin p\}.$$

Proposição 2. *Seja A um domínio, então temos que $A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{m}}$ onde tal igualdade é vista dentro do corpo de frações de A.*

Demonstração. A inclusão $\subset$ é clara, pois dado $a \in A$ então temos que $a \in A_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$. Com efeito, podemos escrever $a = \frac{a}{1}$, já que pela maximalidade do ideal segue-se que $1 \notin \mathfrak{m}$.

Reciprocamente, seja $r \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)} A_{\mathfrak{m}}$ e considere o ideal $\mathcal{A}$ de A com a seguinte característica

$$\mathcal{A} = \{a \in A \mid ar \in A\}$$

queremos mostrar que $\mathcal{A} = A$ e para isto, basta mostrar que $\mathcal{A}$ não está contido em nenhum ideal maximal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$. O que de fato acontece, pois como $r \in A_{\mathfrak{m}}$ podemos escrever $r = \frac{a}{/}s$ para algum $a \in A$ e $s \in A - \mathfrak{m}$. Dessa forma, $s \in \mathcal{A}$ o que implica que $\mathcal{A}$ não está contido no ideal maximal $\mathfrak{m}$ como desejavamos. $\square$

1.3 Fibrados Vetoriais

Definição 5. Uma família de espaços vetoriais sobre X é um fibrado $p : E \to X$ tal que cada fibra $E_x = p^{-1}(x)$, para cada $x \in X$, é um espaço vetorial sobre o corpo residual $k(x)$ e a estrutura da variedade algébrica de E_x como espaço vetorial coincide com $E_x \subset E$ como imagem inversa x sobre p.

Um morfismo de uma família de espaços vetorias $p : E \to X$ em outra família $q : F \to X$ é um morfismo $f : E \to F$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & X \\ E \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "f"] & F \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

Exemplo 9. O produto fibrado $E = X \times V$, onde V é uma espaço vetorial sobre k, e $p = \pi_1$ é a projeção de $X \times V \to X$ fornece uma família de espaços vetoriais sobre X chamado de *fibrado trivial*.

Exemplo 10. Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão m e n, respectivamente. Determinaremos a forma geral do morfismo $f : X \times V \to X \times W$ entre essas duas *famílias triviais*. Para isso, sejam $e_1, \cdots, e_m$ e $u_1, \cdots, u_n$ bases de V e W respectivamente, e escreva $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m$ e $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ para as coordenadas correspondentes. Sejam as projeções $p : X \times V \to X$ e $q : X \times W \to X$ e defina os elementos $x_i = p^*(\epsilon_i)$ e $y_j = q^*(\gamma_j)$, utilizando o Pull-Back das projeções p e q . Além disso, temos que são pontos fechados se $\alpha \in X \times V$ e $\beta \in X \times W$ são unicamente determinados pelos valores dos elementos $x_i(\alpha)$ e $y_j(\beta) \in k$. Portanto, o morfismo f é unicamente determinado por especificamente os elementos da forma $f^*(y_j)$.

Exemplo 11 (Fibrado Tautólogico)**.** Seja V um espaço vetorial $(n+1)$ dimensional e $\mathbb{P}^n$ o espaço vetorial de retas $l \in V$. Escreva l_x para uma reta correspondendo a um ponto $x \in \mathbb{P}^n$. Considere o subconjunto $E \subset \mathbb{P}^n \times V$ dos pares (x, v) tais que $x \in \mathbb{P}^n$ e $v \in V$ são pontos fechados, com $v \in l_x$. Assim, E é um conjunto de pontos fechados de alguma variedade quase projetiva de $\mathbb{P}^n \times V$, que continuaremos a denotar por E. A projeção $\mathbb{P}^n \times V \to \mathbb{P}^n$ define um morfismo $p : E \to \mathbb{P}^n$. Provemos que $p : E \to \mathbb{P}^n$ é um fibrado vetorial. Se V tem o seguinte sistema de coordenadas $(x_0 : \cdots : x_n)$, então a restrição de E a um conjunto aberto U_α dado por $y_\alpha \neq 0$ consiste nos pontos

$$\epsilon = (t_1, \cdots, t_n; y_0, \cdots, y_n) \text{ tais que } y_i = t_i y_\alpha,$$

onde $t_i = \frac{x_i}{x_\alpha}$, e os mapas $\epsilon \to ((t_1, \cdots, t_n), y_\alpha)$ definem um isomorfismo de $E|_{U_\alpha}$ com $U_\alpha \times k$., já que a aplicação é injetiva, graças ao sistema de coordenadas. Além disso, é sobrejetiva, pois é uma projeção considerando o aberto U_α ,e é um homomorfismo naturalmente.

Definição 6. Seja E um fibrado vetorial, dizemos que $\mathbb{P}(E_x)$ é o fibrado projetivo associado a E onde as fibras são espaços projetivos obtidos pela projetivização das fibras de E.

Sejam e_i vetores da base canônica , então a composição dos isomorfismos $X \to X \times e_i$ e do mergulho $X \times e_i \to X \times V$ define um morfismo $\phi_i : X \to X \times V$. Sejam $a_{ij} := \phi_i^*(f^*(y_j))$. Daí,

$$f^*(y_j) = \sum a_{ij} x_i \tag{1}$$

Além disso, veja que é suficiente a verificação da igualdade acima para todos os pontos fechados $\alpha \in X \times V$ e isso segue da definição de morfismos de uma família de espaços vetoriais, já que $f_x : E_x \to F_x$ é linear nesse caso. Reciprocamente, qualquer matriz (a_{ij}) com $a_{ij} \in X \times V$ define um morfismo $f : X \times V \to X \times W$ por (1). Temos um isomorfismo se, e só se, $m = n$ e o determinante da matriz (a_{ij}) é não nulo.

Se $p : E \to X$ é uma família de espaços vetoriais e $U \subset X$ é um conjunto aberto qualquer, o fibrado $p^{-1}(U) \to U$ é a família de espaços vetoriais sobre U. E é chamada de restrição de E para U e denotamos por $E|_U$.

Definição 7. A família de espaços vetoriais $P : E \to X$ é um fibrado vetorial se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U tal que a restrição $E|_U$ é trivial.

Observação 2. A dimensão da fibra E_x de um fibrado vetorial é uma função localmente constante em X, e, em particular, é constante se X é conexo. Nesses casos o número $\dim E_x$ é chamado de posto de E e denotado por $\operatorname{rank} E$.

Seja $X = \bigcup U_\alpha$ uma cobertura tal que o fibrado $p : E \to X$ é trivial em cada U_α. Assim, para cada U_α da coleção fixamos o isomorfismo

$$\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$$

sobre a interseção $U_\alpha \cap U_\beta$ e temos dois isomorfismos de

$$p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to (U_\alpha \cap U_\beta) \cap V,$$

definidos da seguinte maneira $\phi_\alpha|_{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$ e $\phi_\beta|_{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$.Dessa forma, tem-se que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ define um automorfismo do fibrado trivial $(U_\alpha \cap U_\beta) \times V$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.

Agora graças ao Exemplo 10 podemos escolher uma base de V e assim, podemos escrever os automorfismos $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ como uma matriz $C_{\alpha,\beta} = (a_{ij})_{\alpha,\beta}$ de ordem $n \times n$ satisfazendo as condições de colagem,

$$C_{\alpha,\alpha} = id \text{ e } C_{\alpha,\gamma} = C_{\alpha,\beta} \circ C_{\beta,\gamma} \text{ em } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \tag{2}$$

Reciprocamente, temos matrizes espefícias $C_{\alpha,\beta}$ definem um fibrado vetorial, de $C_{\alpha\beta}$ satisfazendo (2), logo temos que essa relação é bijetiva.

As matrizes $C_{\alpha\beta}$ são chamadas de matrizes de transição dos fibrados vetoriais e são de muita importância nas operações envolvendo esses objetos matemáticos.

Assuma que E e F são fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço M, dados, respectivamente, pelas seguintes funções de transição $g_{\alpha,\beta} \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $h_{\alpha,\beta} \in \mathrm{GL}_s(\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$. Então podemos definir os fibrados:

- A soma de fibrados também é um fibrado, assim $E \oplus F$ é o fibrado vetorial dado pelas funções de transição

$$k_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} g_{\alpha,\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{r+s}(\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$$

- O produto tensorial de fibrados também é um fibrado, assim $E \otimes F$ é o fibrado dado pelas funções de transição

$$k_{\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta} \otimes h_{\alpha,\beta} \in \mathrm{GL}_{r \otimes s}(\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$$

- A potência exterior de fibrados é também um fibrado, $\Lambda^p E$ é o fibrado vetorial dado pelas matrizes de transição

$$k_{\alpha,\beta} = \Lambda^p g_{\alpha,\beta} \in \mathrm{GL}_r(\Lambda^p \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  onde λ^p representa a $p-$pontência exterior.

- O dual $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_E)$ de fibrados também é um fibrado dado pelas funções de transição

$$k_{\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta}^T \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  onde o T significa a transposta.

1.4 Feixes e Esquemas

1.4.1 Pré-Feixes e Feixes

Definição 8. Seja X um espaço topológico.

1. Um pré-feixe de grupos abelianos sobre X é um functor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{O}(X)^{\circ} \to \text{Ab}$. Com as seguintes propriedades,

   (a) Dado $U \subset X$ aberto, tem-se que $\mathcal{F}(U)$ é um grupo abeliano,

   (b) Dados abertos $U, V \in X$, tais que $V \subset U$, tem-se um morfismo de grupos abelianos $\text{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, chamado de morfismo de restrição, o qual cumpre as duas propriedades elementares de morfismos para categorias

   $$\text{res}_{U,U} = id_{\mathcal{F}}(U) \text{ e } \text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V} = \text{res}_{U,W},$$

   para todos abertos $U, V, W \in X$ tais que $W \subset V \subset U$. Além disso, os elementos do grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ são chamados de seções de $\mathcal{F}$ sobre U.

2. Um feixe é um pré-feixe que satisfaz o axioma de colagem, ou seja, para cada aberto $U \subset X$ e qualquer cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U, dados seções $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ que se igualam na interseção, isto é,

   $$\text{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j); \forall i, j \in I$$

   tem-se a existência de uma única seção $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\text{res}_{U,U_i}(f) = f_i$ para cada $i \in I$.

Observação 3. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos, o qual para cada aberto U em X e cada cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U, consideremos a seguinte sequência

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\phi} \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j),$$

em que os mapas ψ e ϕ são definidos da seguinte forma

$$\psi(f) = (f|_{U_i})_{i \in I} \text{ e } \phi(f_i)_{i \in I} = (f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j \in I}.$$

Dessa maneira, temos que $\mathcal{F}$ é um feixe se, e somente se, as sequências definidas acima são exatas para todo aberto $U \subset X$ e toda coberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U. Com efeito, se $\mathcal{F}$ é um feixe então temos que $\ker(\phi) = Im(\psi)$ e que é exata a esquerda, isto é, ψ é injetivo já que o axioma de colagem da Definição 8 é satisfeito garantindo a unicidade das seções. Por outro lado, se a sequência for exata temos que a injetividade de ψ expressa a unicidade da colagem e $\ker(\phi) = Im(\psi)$ justifica a existência dela.

Definição 9. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ são dois pré-feixes sobre um mesmo espaço topológico X, um morfismo de pré-feixes $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de functores entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Em outras palavras, dado $U \subset X$ aberto temos o seguinte morfismo de grupos abelianos $\psi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ de maneira que dado outro aberto $V \subset X$ tal que $V \subset U$, então o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,V}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, um morfismo entre feixes é um morfismo entre pré-feixes que cumprem o item 2 da Definição 8.

Denotamos por $\mathrm{PSh}(X)$, a categoria de pré-feixes de grupos abelianos sobre X e $\mathrm{Sh}(X)$, a categoria de feixes de grupos abelianos sobre X.

Exemplo 12. Seja X um espaço topológico qualquer e para cada aberto U de X, defina o anel das funções contínuas reais em U, como sendo o seguinte conjunto

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua }\}.$$

Seja V um outro aberto de X tal que $V \subset U$ temos o morfismo restrição dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}(V) \\ g &\mapsto g|_V. \end{aligned}$$

Veja que os morfismos definidos acima satisfazem a condição 2 da Definição 8, uma vez que dados um aberto $U \subset X$, uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U e funções $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$ de maneira que elas concordem nas interseçoes no sentido da Definição 8, temos que existe uma única função $g \in \mathcal{F}(U)$ tal que esta função cumpre o axioma de colagem. Com efeito, se $x \in U$ então temos duas opções: a primeira é que x pertence a somente um aberto U_i da cobertura de U e a segunda opção, é que x pertence a uma subcoleção de abertos da cobertura de U. Dessa forma, em ambos os casos, basta definir $g(x) = g_i(x)$, o qual não depende de nenhum aberto da cobertura U que contém x já que por hipótese estamos assumindo que as funções são iguais nas interseções. Concluimos então que o anel das funções contínuas reais determinam um feixe como havíamos afirmado, o qual é comumente denominado de *feixe de funções contínuas.*

Exemplo 13. O Exemplo 12 pode ser visto de maneira mais geral, basta tomar $X = \mathbb{C}$ e dado $U \subset \mathbb{C}$ aberto, considere $\mathcal{G}(U)$ como $\mathcal{F}(U)$ na construção em 12 trocando o adjetivo contínua por holomorfa então de maneira análoga, tem-se que $\mathcal{G}$ define um feixe de anéis sobre X o qual é comumente denominado de *feixe de funções holomorfas.*

Além disso, considere o grupo de unidades de $\mathcal{G}(U)$, isto é, dado $x \in U$ defina

$$\mathcal{G}^{\times}(U) := \{g : U \to \mathbb{C} \mid g \text{ é holomorfa e } g(p) \neq 0 \ , \forall p \in U\}.$$

Temos que $U \mapsto \mathcal{G}^{\times}(U)$, define um feixe de grupos abelianos com os mapas de restrições usuais que denotamos por $\mathcal{G}^{\times}$. Veja ainda que a função exponencial em $\mathbb{C}$ define um morfismo entre os feixes $\mathcal{G}(U)$ e $\mathcal{G}^{\times}(U)$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \exp_U : \mathcal{G}(U) &\to \mathcal{G}^{\times}(U) \\ f &\mapsto e^f \end{aligned}$$

Exemplo 14 (Feixe Núcleo)**.** Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos. Para cada aberto U, defina

$$\mathcal{K}(U) := \ker(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U))$$

em que os mapas de restrição são induzidos pelos $\mathcal{F}$. Daí, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{K}}_{UV}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{UV}"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{K}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd} \tag{3}$$

Afirmamos que o item 2 da Definição 8 é satisfeito por $\mathcal{K}$. Na verdade, tal condição é herdada de $\mathcal{F}$. Com efeito, sejam $U \subset X$ um aberto e uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ do aberto U. Agora, seja s a seção global do pré-feixe Kernel tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. Como a restrição dos mapas são pré-feixes induzidos pelo feixe original, segue que $s|_{U_i} = 0$ como uma seção de $\mathcal{F}$, e então é nula, em virtude de $\mathcal{F}$ ser um feixe e, portanto, a unicidade das seções é válida.

Para o segundo axioma, suponha que temos elementos $s_i \in \ker(\phi(U_i))$ tal que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$. Escolha s no conjunto das seções de $\mathcal{F}$ em U tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Para isso precisamos mostrar que $s \in \ker(\phi(U_i))$, daí como ϕ comuta com a restrição dos mapas pelo diagrama, nós temos que

$$\phi(s_i)|_{U_i \cap U_j} = \phi(s_j)|_{U_i \cap U_j}.$$

Por fim, seja $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ tal que $t|U_i = \phi(s_i)$. Assim, pela comutativadade e unicidade das seções, obtemos que

$$\phi(s) = t = 0,$$

concluindo então que $\mathcal{K}$ satisfaz o axioma de cola, e assim temos que $\mathcal{K}$ é de fato um feixe com as propriedades herdadas de $\mathcal{F}$ como foi afirmado anteriormente.

Exemplo 15 (Pré-Feixe Imagem e Pré-feixe Conúcleo)**.** Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos. Para cada aberto U, defina

$$\mathcal{I}(U) := \mathrm{Im}(\mathcal{F}(U) \stackrel{\phi_U}{\to} \mathcal{G}(U))$$

Em que os mapas de restrição induzidos por $\mathcal{G}$. E de maneira análoga, definimos o pré-feixe conúcleo como

$$\mathcal{CK}(U) := \mathrm{coker}(\mathcal{F}(U) \stackrel{\phi_U}{\to} \mathcal{G}(U))$$

em que os mapas de restrição são induzidos por $\mathcal{G}$.

Observação 4. Em geral, temos que as construções feitas no Exemplo 15 são apenas pré-feixes, pois de maneira geral tais construções não satisfazem o axioma de colagem estabelecido na Definição 8. Por exemplo, Im(exp) não é um feixe.

Com efeito, se $U = \mathbb{C} - \{0\}$ com coberturas abertas dadas por $V = \mathbb{C} - \mathbb{R} \leq 0$ e $W = \mathbb{C} - \mathbb{R} \geq 0$, temos que as funções identidades em V e W pertecem a imagem da exponencial, para verificar isso é necessário somente tomar ramo do logarítmo adequado, mas função identidade em $U = V \cup W$ não pertence a imagem da exponencial.

De fato, se existisse $g \in \mathcal{G}(U)$ tal que $e^{g(Z)} = Z$ para todo $Z \in U$, aplicando a derivada em relação a Z teríamos que

$$g'(Z).e^{g(Z)} = 1.$$

Então, desde de que a função exponencial $e^{f(Z)}$ é não nula para todo $Z \in \mathbb{C}$, e em especial, em U segue-se que

$$g'(Z) = \frac{1}{e^{g(Z)}} = \frac{1}{Z}.$$

Daí,

$$2\pi i = \oint_{|Z|=1} \frac{dZ}{Z} = \oint_{|Z|=1} f'(Z)dZ = 0,$$

o que é uma contradição. O que mostra que a imagem nem sempre é um feixe como afirmamos anteriormente.

Veremos mais a frente na Definição 11 que há um processo formal denominado de feixificação donde através desta técnica podemos transformar pré-feixes em feixes. Com isso, embora os pré-feixes $\mathcal{I}$ e $\mathcal{CK}$ não sejam feixes de maneira geral como vimos na observação acima, aplicando a feixificação em ambos obtemos os feixes $(\mathcal{I})'$ e $(\mathcal{CK})'$. Por abuso de notação, ao decorrer do trabalho falaremos de feixe $\mathcal{I}$ e feixe $\mathcal{CK}$, mas sempre pensando em suas feixificações, que são obtidas através da Definição 11.

Exemplo 16 (Feixe estrutural de um domínio)**.** Seja A um domínio com corpo de frações $K = \operatorname{Frac} A$. Iremos definir o feixe estrutural de A caracterizado pela seguinte propriedade

$$\mathcal{O}_A(D(h)) = A_h.$$

Defimos para todo aberto não vazio $U \subset \operatorname{Spec} A$

$$\mathcal{O}_A(U) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \subset K.$$

Se $V \subset U$ então $\mathcal{O}_A(U) \subset \mathcal{O}_A(V)$ e definimos $\operatorname{res}_{U,V} : \mathcal{O}_A(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_A(V)$ com o mapa natural de inclusão. Além disso, como são injetores, dois elementos $f \in \mathcal{O}_A(U)$ e $g \in \mathcal{O}_A(V)$ concordam em $V \cap U$ se, e só se, $f = g$ dentro de $\operatorname{Frac}(A)$, dessa meneira temos que $\mathcal{O}_A$ satisfaz o axioma de colagem da Definição 8. Com efeito, seja $U \in \operatorname{Spec} A$ aberto e uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de U, com

$$\text{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j)(\forall i, j \in I).$$

Assim como U_i e U_j são subconjuntos abertos da cobertura de U e as funções concordam nas interções se, e só se, concordam no corpo de frações de A. Dessa maneira, existe uma única $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\text{res}_{U,U_i}(f) = f_i$ para cada $i \in I$ o que conclui a prova que a estrutura definida é um feixe.

Para verificar que $\mathcal{O}_A(D(h)) = A_h$, primeiro iremos analisar o caso de $h = 1$, o qual se resume à Proposição 2

$$\mathcal{O}_A(Spec(A)) = A \Longleftrightarrow \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(A)} A_{\mathfrak{p}} = A.$$

Como isto é válido para qualquer domínio então é válido para A_h, e temos que o caso geral é válido pela bijeção natural da definição do $D(h)$, $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}(h)$ entre $D(h)$ e $Spec(A_h)$ e da igualdade $(A_h)_{\mathfrak{p}_h} = A_{\mathfrak{p}}$:

$$\mathcal{O}_A(D(h)) = \bigcap_{h \notin \mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{p}_h \in \text{Spec}\, A_h} (A_h)_{\mathfrak{p}_h} = \mathcal{O}_{A_h}(\text{Spec}\, A_h) = A_h.$$

Exemplo 17 (Feixe Arranha-céu)**.** Sejam X um espaço topológico, $p \in X$ um ponto, U um aberto em X , $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de U e S um grupo abeliano. Denote

$$i_p S(U) = S, \text{ se } p \in U \text{ e } i_p S(U) = 0, \text{ se } p \notin U.$$

Agora, se $V \subset U$, então definimos como o mapa natural da restrição e tal construção é um pré-feixe. Para demonstrar o axioma de colagem, primeiro veja que, $i_p(S)$ tem a propriedade de que para toda $f : U \to S$ com $p \notin U$ então $f(u) = 0_S$. Agora, considere $f_i : U_i \to S$ uma família de seções de $i_p S$ que concordam nas interseções no sentido da Definição 8. Então, elas colam em uma única função sendo a identidade se p pertence a interseção e a função nula se p não pertence a interseção, e assim temos de fato a estrutura de feixe, a qual recebe esse nome por ser apoiada em um único ponto.

Na topologia geral para conhecer as características de um aberto U qualquer de um espaço topologico X só precisamos conhecer o que acontece na base de abertos de X. De certa forma, o mesmo se repete para o estudo dos feixes no sentido que, mostraremos abaixo que graças ao axioma de colagem é suficiente saber os valores do feixe em uma base para conhecê-lo completamente.

Exemplo 18. Sejam $\phi, \psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dois morfismos de feixes de grupos abelianos sobre X. Suponha que, para uma base β de abertos para o espaço topológico X, tal que $\phi|_V = \psi|_V$ para todo $V \in \beta$. **Afirmação**: $\phi = \psi$.

Com efeito, se U é um aberto de X, pela definição de β, podemos escrever $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ com $V_\lambda \in \beta$. Temos que,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(U)"] & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}(V_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\prod_{\lambda \in \Lambda} \phi(V_\lambda)"] & \prod_{\lambda, \gamma \in \Lambda} \mathcal{F}(V_\lambda \cap V_\gamma) \arrow[d, "\prod_{\lambda, \gamma \in \Lambda} \phi(V_\lambda \cap V_\gamma)"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}(V_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda, \gamma \in \Lambda} \mathcal{G}(V_\lambda \cap V_\gamma)
\end{tikzcd} \tag{4}$$

do diagrama acima, temos que ϕ_U está completamente determinado pelas duas fechas verticias da direita já que estamos supondo que $\phi|_V = \psi|_V$ para todo $V \subset \beta$ por hipótese.Além disso, realizando uma construção análoga para o morfismo ψ segue-se que $\psi(U)$ também está unicamente determinada pelas duas setas verticais a direita.Dessa maneira, temos que pelos diagramas $\phi = \psi$, assim conseguimos mostrar que para conhecer um feixe é necessário somente que se conheça o feixe na base do espaço topológico.

Exemplo 19. Sejam A um domínio e $\mathcal{O}_A$ o feixe estrutural de A. Como os conjuntos $D(h)$ formam uma base de $Spec(A)$ então pelo exemplo anterior tem-se que a propriedade

$$\mathcal{O}_A(D(h)) = A_h$$

determina completamente o $\mathcal{O}_A$. Por exemplo, se $A = \mathbb{C}[X,Y]$ e $U = \mathrm{Spec}(A) - \{(x,y)\}$. Para calcularmos $\mathcal{O}_A(U)$, note que $U = D(X) \cup D(Y)$ de modo que

$$0 \to \mathcal{O}_A(U) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_A(D(X)) \oplus \mathcal{O}_A(D(Y)) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_A(D(X) \cap D(Y)),$$

onde $\psi(f) = (f,f)$ e $\phi(f,g) = f - g$. Além disso, note que a sequência é isomorfa a

$$0 \to \mathcal{O}_A(U) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{X}] \oplus \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{Y}] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{XY}]$$

obtendo então que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_A(U) &= \{(f,g) \in \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{X}] \times \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{Y}] | f = g \ em\ \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{XY}]\} \\
&= \{(f,f) \in \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{X}] \times \mathbb{C}[X,Y,\frac{1}{Y}] | f \in \mathbb{C}[X,Y]\} \\
&= \mathbb{C}[X,Y].
\end{aligned}$$

Definição 10. Sejam $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos sobre X e $x \in X$. Considere o conjunto direcionado formado por todas as vizinhanças abertas de x, ordenado pela seguinte relação: $U \leq V$ se, e só se, $V \subset U$. Dizemos que o *talo* $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ em x é um grupo abeliano tal que

$$\mathcal{F}_x := \lim_{x \longrightarrow U} \mathcal{F}(U).$$

Isto é, temos que os elementos de $\mathcal{F}(x)$ são classes de equivâlencia $[(U,f)]$ de pares (U,f) com U sendo uma vizinhança aberta de x e uma seção $f \in \mathcal{F}(U)$. Com a relação de equivalência identifica seções que concordam em alguma vizinhança de x, isto é, $[(U,f)] = [(V,g)]$ se, e somente se, existe uma vizinhança W que contém x tal que $W \subset U \cap V$ e $f|_W = g|_W$. Além disso, a soma de duas classes $[(U,f)]$ e $[(V,g)]$ é definida restrigindo-se f e g a uma vizinhança comum de x, por exemplo seja $W = U \cap V$ e daí tem-se que

$$[(U,f)] + [(V,g)] = [W, f|_W + g|_W].$$

Exemplo 20. Seja $\mathcal{F}$ o *feixe das funções contínuas reais*, então para qualquer ponto $P \in \mathbb{R}$ temos que o talo $\mathcal{F}_P$ é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_P$, ou seja, o ideal das classes $[(U, f)]$ com $f(P) = 0$.

Com efeito, note que $[(U, f)] \notin \mathcal{M}_P$ se, e só se, $f(P) \neq 0$. Desse modo, utilizando a continuidade da função f, temos que existe uma vizinhança $V \subset U$ de P tal que f não se anula em nenhum ponto de V ,e portanto, temos que o elemento $\frac{1}{f_V} \in \mathcal{F}(V)$ está bem definido. E assim, tem-se que

$$[(U, f)] = [(V, f)] \in \mathcal{F}_P^* = \mathcal{F}_P \backslash \mathcal{M}_P,$$

Daí, obtemos que $\mathcal{F}_p$ é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_P$.

Exemplo 21. Sejam A um domínio e $\mathcal{O}_A$ seu feixe estrutural. Veja que, utilizando a propriedade de caracterização do feixe estrutural do exemplo 16 e o fato que os conjuntos $D(h)$ formam uma base para $\operatorname{Spec} A$, temos que o talo de $\mathcal{O}_A$ em $p \in \operatorname{Spec} A$ é dado por

$$O_{A,p} := \lim_{p \longrightarrow U} \mathcal{O}_A(U) = \lim_{p \longrightarrow D(h)} \mathcal{O}_A(D(h)) = \lim_{p \longrightarrow D(h)} A_h = A_p$$

onde $h \notin p$.

Exemplo 22. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos sobre um espaço X. Dados um aberto $U \subset X$ e uma seção $f \in \mathcal{F}(U)$, denotamos por $f_x = [(U, f)] \in \mathcal{F}_X$ a imagem de f no talo em $x \in U$. Então, o mapa

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

$$f \to (f_x)_{x \in U}$$

é injetor.

Com efeito, se $f_x = 0$ então existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de X para a qual f restrita a tal vizinhança é identicamente nula.Dessa forma, f pertence ao núcleo do mapa acima. Daí, existe uma cobertura aberta de U na qual f é identicamente nula em cada aberto desta cobertura. E assim, pela unicidade do axioma de colagem para feixes, temos que $f = 0$ e daí o mapa é injetor.

Exemplo 23. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes de grupos abelianos em X. Denotamos por ϕ_x o mapa de grupos abelianos entre os talos induzido por ϕ, ou seja,

$$\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

$$[(U, f)] \mapsto [(\phi_x(U), \phi_U(f))]$$

Em particular, observe que se $\mathcal{P}$ é um pré-feixe e temos dois morfismos de pré-feixes $\phi, \psi : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ tais que $\phi_x = \psi_x$ para todo $x \in X$ então $\phi = \psi$. Dessa forma, temos que um morfismo de pré-feixes é completamente determinado pelos valores nos talos.

Definição 11. Seja $\mathcal{F}'$ um pré-feixe no espaço topológico X. A feixificação de $\mathcal{F}'$, ou feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{F}'$, é definido como o feixe $\mathcal{F}$ tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U) := \{\phi = (\phi_p)_{p\in U}, \phi_p \in \mathcal{F}'_p \textit{ para todo } p \in U \textit{ tal que para todo } P \in U \\ \textit{existe uma vizinhança } V \textit{ em } U \textit{ e uma seção } \phi' \in \mathcal{F}'(V) \\ \textit{com } \phi_Q = \phi'_Q \in \mathcal{F}'_Q \textit{ para todo } Q \in V\}\end{aligned} \tag{5}$$

Lema 2. *Seja $\mathcal{F}'$ o pré-feixe em um espaço topológico X, e seja $\mathcal{F}$ sua feixificação. Então*

1. *Os talos $\mathcal{F}'_p$ e $\mathcal{F}_p$ concordam em todos os pontos $P \in X$*

2. *Se $\mathcal{F}'$ é um feixe, então $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.*

Demonstração. (1) O isomorfismo entre os talos é dado por construção:

- Um elemento de $\mathcal{F}_P$ é por definição representado por $[(U, \phi)]$, onde U é uma vizinhança aberto de P e $\phi = (\phi_Q)_{Q\in U}$ é a seção de $\mathcal{F}$ sobre U. Então, nós podemos associar a um elemento $\phi_p \in \mathcal{F}'_p$.

- Um elemento de $\mathcal{F}'_P$ é por definição representado por $[(U, \phi)]$, onde $\phi \in \mathcal{F}'(U)$. Daí, podemos associar a um elemento $(\phi)_{Q\in U} \in \mathcal{F}(U)$, o qual define um elemento em $\mathcal{F}_P$.

(2) Inicialmente, note que sempre existe um morfismo de pré-feixes de $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ dado por $\phi \mapsto (\phi_p)_{p\in U}$.

Agora, assuma que $\mathcal{F}'$ é um feixe; precisaremos então construir o morfismo inverso $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$. Para isso, sejam $U \subset X$ um aberto e $\phi = (\phi_p)_{p\in U} \in \mathcal{F}(U)$ uma seção de $\mathcal{F}$. Para todo $P \in U$, o talo $\phi_p \in \mathcal{F}'_p$ é representando por algum (V, ϕ) com $\phi \in \mathcal{F}'(V)$. Como isto é válido para todo $p \in U$, nós tomamos seções de $\mathcal{F}'$ em uma cobertura aberta de U que concordam nas interseções. Como $\mathcal{F}'$ é um feixe, nós podemos colar essas seções e iremos obter uma seção global em $\mathcal{F}'(U)$, obtendo assim que caso nosso $\mathcal{F}'$ seja um feixe a feixificação age como a identidade. □

Assim, como comentado anteriormente podemos transformar pré-feixes em feixes o que é uma ferramenta muito útil, pois em vários casos é essencial trabalhar com alguns pré-feixes que em geral não são feixes como, por exemplo, o pré-feixe Imagem denotado por $\mathcal{I}$.

1.4.2 Espaços Localmente Anelados

Definição 12. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre dois espaços topológicos e seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos sobre X. A imagem direta $f_*\mathcal{F}$ é o pré-feixe sobre Y dado por

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

para $V \subset Y$ um aberto e sendo os mapas de restrição os de $\mathcal{F}$. Além disso, se $\mathcal{F}$ é um feixe sobre X, então o axioma de cola é satisfeito e pela definição de imagem direta temos que $f_*\mathcal{F}$ também é um feixe sobre Y.

Além disso, se $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes sobre X então temos um morfismo de feixes sobre Y:

$$f_*\phi : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$$

dado por $(f_*\phi)_V =: \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{G}(f^{-1}(V))$ para $V \subset Y$ aberto. Assim, temos que a imagem direta f_* é um functor entre as categorias abaixo

$$f_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y).$$

Definição 13.

- 1. Um espaço localmente anelados é um par ordenado $(X, \mathcal{O}_X)$ formado por um espaço topológico X e um feixe de anéis $\mathcal{O}_X$ sobre X com a propriedade que para todo $x \in X$, o talo $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_{X,x}$;

- 2. Um morfismo de espaços localmente anelados é um par ordenado $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ em que $f : X \to Y$ é uma função contínua e $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes sobre Y tal que, para todo ponto $x \in X$, o morfismo induzido nos talos

$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

$$[(V, f)] \mapsto [f^{-1}(V), f_V^{\#}(f)]$$

é um morfismo local, de maneira prática tem-se que $f_x^{\#}(\mathcal{M}_{y,f(x)}) \subset \mathcal{M}_{X,x}$.

O ideal maximal $\mathcal{M}_{X,x}$ é o ideal das funções que se anulam no ponto x. Além disso, a necessidade pela qual pedimos que f_x seja um morfismo local é para que seja preservado a característica das funções que se anulam em um ponto.

Outrossim, morfismos de espaços localmente anelados podem ser compostos: dados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ e $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ sua composição é dada por

$$(g \circ f, g_*f^{\#} \circ g^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$$

onde $g_*f^{\#} \circ g^{\#}$ é a composição de mapas de feixes em Z

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^{\#}} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*f^{\#}} g_*f_*\mathcal{O}_X = (g \circ f)_*\mathcal{O}_X.$$

Dessa forma, concluímos que a coleção dos Espaços localmente anelados definem assim uma categoria a qual denotaremos por LRS.

Exemplo 24. Sejam X uma variedade diferencial e $\mathcal{O}_X$ o feixe das funções reais diferenciáveis sobre X, isto é,

$$\mathcal{O}_X(U) : \{\phi : U \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ é diferenciável } \},$$

com $U \subset X$ aberto. Então, tem-se que $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço localmente anelado.

Com efeito, para cada $x \in X$, o talo $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_{X.x}$ dado pelas classes de funções que se anulam em x como foi demonstrado no Exemplo 20 já que toda função contínua é, em particular, uma função diferenciável.

Se $f : X \to Y$ é um morfismo de variedades diferenciáveis, então temos um morfismo correspondente $(f, f^\#)$ em LRS em que $f^\#$ é induzido pela composição com f: para cada $V \subset Y$ aberto, tem-se que

$$f_V^\# : O_Y(V) \to (f_* O_X)(V)$$
$$\phi \mapsto \phi \circ f$$

Naturalmente, como $f_V^\#$ é um morfismo local pela definição segue que ele leva funções que se anulam em $f(x)$ em funções que se anulam em x. Dessa maneira, a categoria de variedades diferenciáveis pode ser vista como uma categoria contida em LRS e de modo análogo definindo o feixe $\mathcal{O}_X$ como o feixe das funções complexas analíticas sobre X podemos pensar que a categoria das variedades analíticas está contida em LRS.

Exemplo 25. Seja A um domínio, já vimos que $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_A)$ é um espaço localmente anelado, o qual denominamos por esquema afim de A. Seja $\psi : A \to A'$ um morfismo entre domínios, sabemos associar ao morfismo ψ, uma função contínua $f = \operatorname{Spec}(\psi) : \operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ e agora mostraremos que ψ determina também um morfismo entre os feixes $\mathcal{O}_A \to f_* \mathcal{O}_{A'}$ sobre $\operatorname{Spec} A$, com a seguinte propriedade

$$f_{D(h)}^\# : \mathcal{O}_A(D(h)) \to f_* \mathcal{O}_{A'}(D(h)) = \mathcal{O}_{A'}(D(\psi(h))),$$

o qual pode ser visto como a localização de ψ em relação a f dada por

$$\psi_h : A_h \to A'_{\psi(h)}.$$

Para ver isso, seja $\gamma = \frac{a}{s} \in \mathcal{O}_A(U) \subset \operatorname{Frac} A$ com $a, s \in A$. Defina

$$f^\#(\gamma) = \frac{\phi(a)}{\phi(s)} \in f_* \mathcal{O}_{A'}(U) \subset \operatorname{Spec} B$$

o que é válido já que dado $\mathfrak{i} \in f^{-1}(U)$, temos $\mathfrak{j} = f(\mathfrak{i}) = \phi^{-1}(\mathfrak{i}) \in U$, concluímos então que $\gamma \in A_\mathfrak{j}$, e dessa maneira podemos supor sem perda de generalidade que $s \notin \mathfrak{j}$ se, e só se, $\psi(s) \notin \mathfrak{i}$. E assim, $\frac{\phi(a)}{\phi(s)} \in A'_\mathfrak{i}$. Particularmente, temos que

$$f_\mathfrak{i}^\# : \mathcal{O}_{A, f(\mathfrak{i})} \to \mathcal{O}_{A', \mathfrak{j}}$$

pode ser visto como a localização de ϕ em relação a $\mathfrak{i}$ utilizando a construção feita acima e dessa forma obtemos que $(f, f^\#) : (\operatorname{Spec} A', \mathcal{O}_{A'}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_A)$ é um morfismo de espaços localmente anelados. Assim, como no caso do exemplo anterior a categoria de domínios pode ser vista dentro da categoria de espaços localmente anulares.

Definição 14. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço localmente anelado e seja $U \subset X$ um aberto.

- A *imersão aberta* associada a U é o morfismo em LRS

$$(g, g^{\#}) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

em que $g : U \to X$ é a inclusão natural já que $U \subset X$ e $\mathcal{O}_X|_U$ é a restrição do feixe $\mathcal{O}_X$ ao aberto U, em outras palavras, é o feixe sobre U que pode ser visto por $\mathcal{O}_X|_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$ para todo $V \subset U$, e $g^{\#} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X|_U$ é dado pelo mapa de restrição

$$g^{\#} = \mathrm{res}_{V, V\cap U} : \mathcal{O}_X(V) \to f_*(\mathcal{O}_X|_U)(V) = \mathcal{O}_X(U \cap V).$$

- Se $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ é um morfismo entre os espaços localmente anulares, a restrição de $(f, f^{\#})$ a U é um morfismo em LRS dado pela composição com a imersão associada a U.

$$(f, f^{\#}) := (f, f^{\#}) \circ (g, g^{\#})$$

Lema 3. *(Fatoração Aberta). Seja $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ um morfismo de espaços localmente anelados. Suponha que a imagem de f esteja contida em um aberto $V \subset Y$. Então $(f, f^{\#})$ se fatora unicamente como uma composição*

$$(X, \mathcal{O}_X) \overset{(h,h^{\#})}{\to} (V, \mathcal{O}_X|_V) \overset{(g,g^{\#})}{\to} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

Em que $(g, g^{\#})$ denota a imersão aberta associada a V.

Demonstração. Seja o mapa entre espaços topólogicos $h : X \to V$ é unicamente obtido restrigindo-se $f : X \to Y$ a V o que faz sentido uma vez que V é um aberto em Y que contém a imagem de f por hipótese. Por outro lado, o mapa de feixes $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ em Y se restringe a um mapa de feixes $h^{\#} : O_Y|_V \to h_*\mathcal{O}_X$ em V utilizando a imersão aberta e concluímos então que pela composição de morfismos

$$f^{\#} = g_* h^{\#} \circ g^{\#}$$

como queríamos. □

1.4.3 Feixe Estrutural de um Anel

A próxima etapa é definir de maneira formal um esquema afim considerando um anel qualquer (o caso em que o anel A é domínio o esquema afim foi construído no Exemplo 25) é construir um feixe $\mathcal{O}_A$ de anéis sobre $\operatorname{Spec} A$ generalizando o Exemplo 16. Assim,o Corolário 4.4.2 de [11], nos diz que

$$D(h) \subset D(g) \iff h \in \sqrt{(g)}.$$

Dessa forma, o mapa $A \to A_h$ leva g em uma unidade de A_h. Logo, pela propriedade universal da localização (ver Teorema 4.1.4 de [11]) temos um morfismo canônico

$$\rho_{g,h} : A_g \to A_h.$$

Isto é, se $h^n = g\gamma$ então $\rho_{g,h} = (\frac{a}{g^m}) = \frac{a\gamma^m}{h^{mn}}$, onde este m é tal que $g^m = \frac{h^{nm}}{\gamma^m}$ e $a \in A$. Caso, tenhamos a seguinte cadeia de inclusões de abertos básicos $D(j) \subset D(h) \subset D(g)$ então temos o seguinte diagrama comutativo obtido através da composição dos mapas de localização, isto é,

$$A_g \overset{\rho_{g,h}}{\to} A_h \overset{\rho_{h,j}}{\to} A_j$$

onde $\rho_{g,j} = \rho_{h,j} \circ \rho_{g,h}$.

Teorema 2 (Feixe estrutural)**.** *Seja A um anel. Existe um feixe $\mathcal{O}_A$ de anéis sobre* $\operatorname{Spec} A$ *e isomorfismos*

$$\phi_h : A_h \to \mathcal{O}_A(D(h)), (h \in A)$$

tais que se $D(h) \subset D(g)$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A_g \arrow[r, "\phi_g"] \arrow[d, "\rho_{g,h}"] & \mathcal{O}_A(D(g)) \arrow[d, "\text{res}"] \\
A_h \arrow[r, "\phi_h"] & \mathcal{O}_A(D(h))
\end{tikzcd}$$

Além disso, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, os mapas ϕ_h induzem um isomorfismo

$$\mathcal{O}_{A,\mathfrak{p}} = \lim_{\mathfrak{p} \to \operatorname{Spec} A} \mathcal{O}_A(D(h)) \simeq \lim_{\mathfrak{p} \to \operatorname{Spec} A} A_h = A_{\mathfrak{p}}.$$

Demonstração. Para um domínio D, todas as localizações estão contidas no corpo de frações de D, $\operatorname{Frac} D$. E assim, podemos construir o feixe como subfeixe do feixe constante associado a este corpo de frações, tal construção coincide com a do Exemplo 21.

Agora, para um anel geral A iremos construir $\mathcal{O}_A$ de tal forma que para qualquer $U \subset \operatorname{Spec} A$ aberto, $\mathcal{O}_A(U)$ esteja contido no produto de todas as localizações de A; definimos $\mathcal{O}_A(U)$ como

$$\mathcal{O}_A(U) := \left\{ (s_h) \in \prod_{h \in A, D(h) \subset U} A_h \mid \rho_{g,h}(s_g) = s_h \text{ sempre que } D(h) \subset D(g) \right\},$$

com os mapas de restrição dados pelas projeções como definido no conjunto acima. Assim, obtemos um pré-feixe sobre $\operatorname{Spec} A$ e para todo $g \in A$, isomorfismos

$$\phi_g : A_g \to \mathcal{O}_A(D(g))$$
$$s \mapsto (\rho_{g,h}(s))_{h \in A, D(h) \subset D(g)}$$

que fazem o diagrama do enunciado comutar e assim, para terminar a prova, só é necessário demonstrar que $\mathcal{O}_A$ da maneira como foi construído acima satisfaz o axioma de colagem da Definição 8.Antes de verificar que tal axioma é válido com a finalidade de facilitar o problema, faremos uma série de reduções sobre os abertos para que seja possível provar o axioma de colagem e assim provar que tal construção é de fato um feixe sobre $\operatorname{Spec} A$.

Começaremos então com $U \subset \operatorname{Spec} A$ um aberto, $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta de U e seções $f_i \in \mathcal{O}_A(U_i)$ concordando nas interseções, então com essas ferramentas em mãos devemos garantir a existência de uma única seção $f \in \mathcal{O}_A(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$. Para isso, caso seja necessário refine a cobertura no sentido topológico e substitua as f_i por suas restrições como na definição do conjunto para que haja sentido. E dessa forma, sem perda de generalidade, graças ao refinamento da cobertura podemos supor que $U_i = D(h_i), (h_i \in A)$ é um aberto básico.

Além disso, note que é suficiente provar o caso em que U também é um aberto básico, pois se isso é válido neste caso particular, para um aberto U qualquer e abertos básicos $D(h) \subset D(g) \subset U$, haverá elementos $\gamma_g \in \mathcal{O}_A(D(g))$ e $\gamma_h \in \mathcal{O}_A(D(h))$, unicamente determinados pelas seguintes condições

$$\gamma_g|_{D(g)\cap U_i} = f_i|_{U_i\cap D(g)} \text{ e } \gamma_h|_{D(h)\cap U_i} = f_i|_{D(h)\cap U_i}$$

para todo $i \in I$. Assim, como $D(h) \subset D(g)$ temos que $\gamma_g|_{D(h)}$ satisfaz as mesmas condições que γ_h. Daí, segue que $a_g|_{D(h)} = \gamma_h$, e pela comutatividade do diagrama segue-se que $\rho_{g,h}(s_g) = s_h$. E assim, $f = (s_g) \in \mathcal{O}_A(U)$ com $D(g) \subset U$ definirá de maneira única dos $f_i's$.

Assim, pelo parágrafo anterior, já podemos supor que $U = D(h)$ e $U_i = D(h_i)$, como o mapa de localização $A \to A_h$ induz um homeomorfismo $\operatorname{Spec} A_h = D(h)$ e isomorfismos canônicos

$$A_{h_i} = A_h\left[\frac{1}{h_i}\right],$$

substituindo A por A_h e $D(h_i)$ por suas correspondentes pré-imagens em $\operatorname{Spec} A_h$ e relembrando que os abertos básicos $D(h_i)_{i\in I}$ formam uma cobertura aberta de $\operatorname{Spec} A$. Com isso, desde de que $\operatorname{Spec} A$ é compacto(Teorema 3.3.3 de [11]) podemos supor que o conjunto de índices I é um conjunto finito. E utilizando os isomorfismos de ϕ_h, finalmente temos a seguinte cobertura aberta

$$\bigcup_{1\leq i\leq r} D(h_i) = \operatorname{Spec} A$$

e elementos $s_i \in A_{hi}(1 \leq i \leq r)$ os quais concordam nas interseções $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_ih_j)$, ou seja,

$$\rho_{h_i,h_ih_j}(s_i) = \rho_{hj,h_ih_j}(s_j) \in A_{h_ih_j}, (1 \leq i, j \leq r),$$

e queremos mostrar a existência de um único $a \in A$ tal que

$$s_i = \frac{a}{1} \in A_{hi} \text{ para todo } i, (1 \leq i \leq r).$$

Inicialmente, provaremos a existência do elemento, para isso escreva

$$s_i = \frac{a_i}{h_i^n}, (a_i \in A \text{ e } N \in \mathbb{N}),$$

onde n é um expoente comum, o qual pode ser obtido já que há uma quantidade finita de elementos na nossa cobertura. Além disso, o fato dos $s_i' s$ concordarem nas interseções pode ser reescrito como

$$s_i = s_j \iff \frac{a_i}{h_i^n} = \frac{a_j}{h_j^n} \iff (h_i h_j)^t (a_i h_j^n - a_j h_i^n) = 0 \tag{6}$$

e essa última igualdade acontece se, e só se,

$$a_i h_i^t h_j^{n+t} = a_j h_i^{n+t} h_j^t \in A$$

para algum $t \in \mathbb{N}$ suficientemente grande que pode ser obtido utilizando a finitude do conjunto de índices da cobertura. Além disso, utilizando o Teorema 3.3.3 de [11] obtemos que

$$\bigcup_{1 \le j \le r} D(h_j^{n+t}) = \bigcup_{1 \le j \le r} D(h_j) = \operatorname{Spec} A \longrightarrow \sum_{1 \le j \le r} h_j^{n+t} t_j = 1 \tag{7}$$

com $t_j \in A$,. Portanto,

$$a = \sum_{1 \le j \le r} (a h_j^{n+t} . t_j)$$

para qualquer $a \in A$. Como queremos encontrar $a \in A$ tal que $\frac{a}{1} = \frac{a_j}{h_j^n} = \frac{a_j h_j^t}{h_j^{t+n}}$ em A_{hj} para todo j, um candidato natural é

$$a := \sum_{1 \le j \le r} a_j h_j^t t_j.$$

Mostremos então que o candidato acima é válido. Para isso, fixe i e utilze as equações 6 e 7, obtemos então que

$$\begin{aligned} a h_i^{n+t} =& h_i^{n+t} \sum_{1 \le j \le r} a_j h_j^t t_j \\ & \sum_{1 \le j \le r} a_j h_i^{n+t} h_j^t t_j \\ &= \sum_{1 \le j \le r} a_i h_i^t h_j^{n+t} t_j \\ &= a_i h_i^t \sum_{1 \le j \le r} h_j^{n+t} t_j \\ &= a_i h_i^t. \end{aligned}$$

Conclui-se então da igualdade acima e da definição de localização que

$$a h_i^{n+t} - a_i h_i^t = 0 \iff h_i^t (a h_i^n - a_i) = 0 \iff \frac{a}{1} = \frac{a_i}{h_i^n} = s_i \text{ em } A_{h_i},$$

como queríamos.

Agora resta provar a unicidade do a construído acima, para isso considere a seguinte sequência exata de $A-$módulos

$$0 \to K \to A \xrightarrow{\beta} \prod_{1 \leq i \leq r} A_{hi}$$

em que β é o produto dos mapas de localização e K é definido como o núcleo de β para a sequência ser exata. Note que, mostrar que $K = 0$ é suficiente para demonstrar a unicidade uma vez que assim teriamos que o mapa β é injetivo, e para isso pelo princípio local-global (Ver Teorema 4.2.3 de [11]) , é necessário somente que dado $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ qualquer que verifiquemos que $K_{\mathfrak{p}} = 0$.

Com isso em mente, sabemos que existe um aberto básico da nossa cobertura final que contém este primo $\mathfrak{p}$ já que esta cobertura cobre todo conjunto $\operatorname{Spec} A$. Daí, podemos assumir que $p \in D(h_k)$, com $1 \leq k \leq r$. Além disso, temos que por propriedades de localização $(A_{h_k})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ e a localização de $A \to A_{h_k}$ com respeito a $\mathfrak{p}$ é a identidade em $A_{\mathfrak{p}}$ já que $\mathfrak{p} \in D(h_k)$, logo localizando a sequência exata acima temos que $\beta_{\mathfrak{p}}$ é injetor e assim temos que $K_{\mathfrak{p}} = 0$ como queríamos e assim garantimos a unicidade do elemento s_i como desejávamos.

□

Observação 5. O Teorema acima, embora seja muito técnico, tem grande importância no estudo de feixes, visto que através dele podemos generalizar o conceito de feixe estrutural, já que antes só poderiamos definir para um anel A sendo ele domínio de integridade. Então, ao decorrer do trabalho podemos utilizar o conceito de feixe estrutural para todo anel A. O talo irá nos permitir construir estruturas bem gerais como os esquemas como veremos abaixo.

Definição 15 (Esquemas afins)**.** O esquema afim associado ao anel A é o espaço localmente anelado $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_A)$.

Definição 16. Um esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço localmente anelado para o qual existe uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X e anéis A_λ com $\lambda \in \Lambda$ de modo que

$$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda}) \simeq (\operatorname{Spec} A_\lambda, \mathcal{O}_{A_\lambda}), (\lambda \in \Lambda)$$

Um isomorfismo na categoria de espaços localmente anelado.

Um morfismo de esquemas é um morfismo em LRS. Assim, a categoria de esquemas Sch é uma subcategoria plena de LRS. Por abuso de notação escreveremos $(X, \mathcal{O}_X) = X$ e o morfismo $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ simplesmente por $f : X \to Y$.

Observação 6. Assim, pela definição de esquemas vemos que o conceito é uma generalização de variedades afins/projetivas.

Exemplo 26. Considere os esquemas afins

$$X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(x^2) \text{ e } Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(x)$$

Note que, embora os dois espaços topológicos sejam homeomorfos, estes dois esquemas não são isomorfos como espaços localmente anulares: $\mathcal{O}_X$ contém elementos nilpotentes enquanto que $\mathcal{O}_Y$ não possui. De maneira geométrica, pensamos Y como a reta $x = 0$ enquanto que em X somente a dupla reta $x^2 = 0$. Observe que o morfismo de inclusão $f : Y \to X$ correspondente ao morfismo sobrejetivo de $\mathbb{Q}-$álgebras de $\mathbb{Q}[x, y]/(x^2) \longrightarrow \mathbb{Q}[x, y]/(x)$ que leva a função nilpotente não nula $\overline{x} \in \mathcal{O}_X(X)$ na função zero em $\mathcal{O}_Y(Y)$.

Observação 7. O último exemplo ilustra uma das características únicas de esquemas dentre os diversos objetos matemáticos, a presença de funções nilpotentes. Está é a razão pela qual em um morfismo de esquemas o mapa entre feixes não é automaticamente determinado pelo mapa de espaços topológicos e precisa ser dado explicitamente, ao contrário do caso de variedades diferénciais por exemplo.

Agora, sejam $X = \operatorname{Spec} A$ e $U \subset X$ um aberto qualquer. O espaço localmente anelado $(U, \mathcal{O}_A|_U)$ é um esquema, entretanto em geral não é afim, isto segue do seguinte lema e do fato que os abertos básicos principais $D(h)$ fornecem uma base para a topologia de Zariski.

Lema 4. *(Subesquema Aberto Principal).Sejam A um anel e $h \in A$. Temos um isomorfismo de espaços localmente anelados*

$$(\operatorname{Spec} A_h, O_{A_h}) \simeq (D(h), \mathcal{O}_A|_{D(h)})$$

induzido pelo mapa de localização $\rho : A \to A_h$

Demonstração. Denote por $(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} A_h, O_{A_h}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_A)$ o morfismo de espaços localmente anelados correspondente ao morfismo de localização $\rho : A \to A_h$. Temos assim que f induz um homeomorfismo entre $\operatorname{Spec} A_h$ e $D(h) \subset \operatorname{Spec} A$. Portanto, restringindo f e $f^{\#} : \mathcal{O}_A \to f_* O_{A_h}$ a $D(h)$ obtemos um morfismo de espaços localmente anelados $(\operatorname{Spec} A_h, O_{A_h}) \to (D(h), \mathcal{O}_A|_{D(h)})$. Agora, precisamos apenas verificar que esse morfismo de feixes construído acima é de fato um isomorfismo e para isso é suficiente verificar nos abertos básicos, com isso em mente, se $D(g) \subset D(h)$, o mapa $f^{\#}_{D(g)} : \mathcal{O}_A(D(g)) \to (f_* O_{A_h}(D(g)) = O_{A_h}(D(\rho(g)))$ é um isomorfismo já que $A_g \simeq (A_h)_{\rho(g)}$. □

Exemplo 27. Seja $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]$ e seja $U = X - \{(x, y)\}$. Como $U = D(x) \cup D(y)$, o esquema $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ pode ser coberto por um atlas com duas cartas coordenadas sendo elas

$$V := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, \frac{1}{x}] \text{ e } W := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, \frac{1}{y}].$$

Sejam $g : V \to X$ e $h : W \to X$ os morfismos de esquemas induzidos pelas localizações da indeterminada x e da indertimidade y, respectivamente $\mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[x, y, \frac{1}{x}]$ e $\mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[x, y, \frac{1}{y}]$. Através das restrições, de g e de h temos os seguintes isomorfismos

$$(V, \mathcal{O}_V) \simeq (D(x), \mathcal{O}_X|_{D(x)}) \text{ e } (W, \mathcal{O}_W) \simeq (D(y), \mathcal{O}_X|_{D(y)}).$$

E além disso, restrigindo-se os esquemas acimas a interseção, isto é, $D(x) \cap D(y) = D(xy)$ ambos se tornam isomorfos ao esquema $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, \frac{1}{xy}]$, assim podemos analisar U como a colagem dos abertos V e W ao longo do subesquema da interseção.

1.5 Explosão

Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade afim, e sejam $f_0, \cdots, f_s \in k[x_0, \cdots, x_n]$ funções polinômiais que não se anulem simultaneamente em X. Então, $U = X \backslash Z(f_0, \cdots, f_s)$ é um aberto não vazio de X, e existe um morfismo bem definido

$$\begin{array}{cccc} f: & U & \rightarrow & \mathbb{P}^s \\ & P & \mapsto & (f_0(P) : \cdots : f_s(P)) \end{array}$$

Agora considere o gráfico

$$\Gamma = \{(P, f(P)); P \in U\} \subset X \times \mathbb{P}^s.$$

Note que, em geral Γ não é fechado em $X \times \mathbb{P}^s$, pois os pontos em $X \backslash U$ onde $(f_0 : \cdots : f_s)$ irão definir pontos em $\mathbb{P}^s$ que estão "faltando"pela nossa construção.

Sendo assim, dizemos que $\overline{\Gamma}$ em $X \times \mathbb{P}^s$ é a **explosão** de X em $I = (f_0, \cdots, f_s)$ que denotaremos por $\widetilde{X}$ o qual é um conjunto fechado em $X \times \mathbb{P}^s$ e irredutível uma vez que Γ também é irredutível. Então, é uma variedade fechada em $X \times \mathbb{P}^s$. E em particular, existem morfismos de projeção $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ e $p : \widetilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^s$ e note que X e $\widetilde{X}$ ambos contém U como um subconjunto aberto denso, e também que a explosão $\widetilde{X}$ tem a mesma dimensão.

Exemplo 28. Construiremos a explosão de $X = \mathbb{A}^n$ em relação ao ponto seja I o ideal associado ao ponto $O = (0, \cdots, 0)$. Considere o produto $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Se $x_1, \cdots, x_n$ são as coordenadas afins de $\mathbb{A}^n$ e se $y_1, \cdots, y_n$ são as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^{n-1}$, então os subespaços fechados de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ são definidos por polinômios nas variáveis x_i, y_j que são homogêneos com respeito a variável y_j.

Definimos a explosão de $X = \mathbb{A}^n$ sobre o ponto O para ser o subconjunto fechado $\overline{X} = \mathcal{X}$ de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definido pelas equações $\{x_i y_j = x_j y_i \mid i, j = 1, \cdots, n\}$. Além disso, temos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"] & \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{8}$$

Dessa forma, temos um morfismo natural $\phi : \overline{X} \rightarrow X$ obtido por projetar o morfismo i nas n primeiras variáveis.Agora, estudaremos agora algumas propriedades do subconjunto $\overline{X}$.

- Se $P \in X$ com $P \neq 0$, então $\phi^{-1}(P)$ consiste de um único ponto. Na verdade, temos que ϕ é um isomorfismo de $\overline{X} - \phi^{-1}(O)$ em $X - O$. Com efeito, seja $P = (a_1, \cdots, a_n)$ com algum $a_i \neq 0$. Agora, se $P \times (y_1, \cdots, y_n) \in \phi^{-1}(P)$, então para cada j, tem-se que $y_j = \frac{a_j}{a_i} y_i$ então $(y_1, \cdots, y_n)$ é unicamente determinado como um ponto em $\mathbb{P}^{n-1}$. Na verdade, definindo $a_i = y_i$, podemos tomar $(y_1, \cdots, y_n) = (a_i, \cdots, a_n)$. Então, $\phi^{-1}(P)$ cosiste de um único ponto. Além disso, para cada $P \in X - O$, definindo $\psi(P) = (a_1, \cdots, a_n) \times (a_1, \cdots, a_n)$ define um morfismo inverso de ϕ mostrando que $\overline{X} - \phi^{-1}(O)$ é um isomorfismo com $X - O$.

- $\phi^{-1}(O) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$. Na verdade, $\phi^{-1}(O)$ consiste em todos os pontos $O \times Q$, com $Q = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$ sem restrição.

Exemplo 29. Sejam $X = \mathbb{A}^2$ com coordenadas x_0, x_1 e sejam $f_0 = x_0$ e $f_1 = x_1$. Então a explosão de X em (f_0, f_1) é uma subvariedade de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. O morfismo $(x_0, x_1) \mapsto (x_0 : x_1)$ está bem definido em $U = X - \{(0,0)\}$. Então neste conjunto aberto temos o seguinte gráfico

$$\Gamma = \{((x_0, x_1), (y_0, y_1)) \mid y_0 x_1 = y_1 x_0\} \subset U \times \mathbb{P}^1.$$

O fecho do gráfico acima é dado por

$$\overline{X} = \{((x_0, x_1), (y_0, y_1)) \mid y_0 x_1 = y_1 x_0\} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$$

Os morfismos de projeção para $X = \mathbb{A}^2$ e $\mathbb{P}^1$ são evidentes. Note que como no exemplo anterior a imagem inversa do ponto $P = (x_0, x_1) \in X - \{0, 0\}$ sobre π é um único ponto. Além disso, a imagem inversa de $(0,0) \in X$ é $\mathbb{P}^1$, já que a equação $y_1 x_0 = y_0 x_1$ não impõe condições a y_0 e y_1 se $(x_0, x_1) = (0,0)$.

Exemplo 30. Seja $Y \subset X$ uma subvariedade fechada que não possua interseção vazia com U. Como U é também um subconjunto de $\overline{X}$, podemos considerar o fecho de $Y \subset U$ em $\overline{X}$. Chamamos tal fecho de **transformada estrita** de Y. Veja que por definição, a transformada estrita de Y é apenas a explosão de Y em $(f_0, f_1, \cdots, f_r)$; a qual denotaremos por $\overline{Y}$. Agora, seja $C \subset X = \mathbb{A}^2$ uma curva, dada pela equação

$$h(x_0, x_1) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_0^i x_1^j,$$

Assuma que $a_{0,0} = 0$, ou seja, C passa pela origem de $\mathbb{A}^2$, e que $(a_{1,0}, a_{0,1}) \neq (0,0)$, de modo que C tem uma reta tangente bem definida na origem, dada pela linearização $a_{1,0} x_0 + a_{0,1} x_1 = 0$ de h. Vamos exibir a transformada estrita $\overline{C}$. Como os pontos $((x_0, x_1), (y_0 : y_1))$ de $\overline{C}$ que satisfazem a equação então temos que

$$a_{1,0} x_0 + a_{0,1} x_1 + a_{1,1} x_1 x_0 + a_{2,0} x_0^2 + a_{0,2} x_1^2 + \cdots = 0. \tag{9}$$

Mas não é verdade que $\overline{C}$ é apenas o lugar geométrico nulo comum em $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ da equação acima juntamente com $x_0 y_1 = x_1 y_0$, porque este lugar geométrico nulo contém toda fibra $\pi^{-1}(0,0) \simeq \mathbb{P}^1$. Entretanto, $\overline{C}$ tem que ser irredutível de dimensão 1, então não pode conter $\mathbb{P}^1$. Isso acontece, pois no conjunto aberto onde $x_0 \neq 0$ e $x_1 \neq 0$ podemos multiplicar (9) por $\frac{y_0}{x_0}$ e usando a relação $\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1}{x_1}$, nós obtemos que

$$a_{1,0}y_0 + a_{0,1}y_1 + a_{1,1}y_0x_1 + a_{2,0}x_0y_0 + a_{0,2}x_1y_1 + \cdots = 0.$$

Esta equação deve ser satisfeita pelo fecho de C também. Restrigindo-a à origem, conseguimos que $a_{1,0}y_0 + a_{0,1}y_1 = 0$ que é justamente a equação da reta tangente de C em $(0,0)$. Em outras palavras, a trasformada estrita $\overline{C}$ de C intersecta a fibra $\pi^{-1}(0,0)$ em um ponto de $\mathbb{P}^1$ correspondendo a reta tangente de C em relação à origem. Dessa forma, podemos dizer que os pontos de $\pi^{-1}(0,0)$ corresponde as direções tangentes de X na origem.

Agora, introduziremos o caso da **Explosão** de $\mathbb{P}^3$ ao longe de uma curva C. Para isso, é necessário o conhecimento de alguns resultados da Teoria de Interseção, como por exemplo, o conceito de Anel de Chow. Assim, para melhor compreensão dos resultados a seguir é recomendado ao leitor a leitura do Apêndice 5.1.

Sejam $C \subset \mathbb{P}^3$ uma curva suave de grau d e de gênero g (Veja a Definição 24) e $\pi : Y \to \mathbb{P}^3$ a explosão de $\mathbb{P}^3$ ao longo de C. Então temos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi_E"] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ C \arrow[r, "i"] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd} \tag{10}$$

onde i, j são morfismos de inclusão e E é o divisor excepcional associado a C obtido através da explosão. Além disso, escreveremos h a classe de um hiperplano em $\mathbb{P}^3$ e $H := \pi^*h \in Y$.

Lema 5. *Se Y é a explosão sobre $\mathbb{P}^3$ ao longo de uma curva C, então temos que*

- $A^0(Y) = \mathbb{Z}$ *gerado pela classe de Y;*
- $A^1(Y) = \mathbb{Z}^2$ *gerado por E e H;*
- $A^2(Y)$ *é gerado por E^2 e H^2;*
- $A^3(Y) = \mathbb{Z}$ *gerado pela classe de um ponto.*

onde $A^i(Y)$ é a i-ésima componente do anel de Chow da explosão Y. Além disso, outros produtos entre classes são:

$$\deg(H^3) = 1, \qquad \deg(H^2.E) = 0,$$
$$\deg(H.E^2) = -d, \qquad \deg(E^3) = -4d - 2g + 2 = -\deg(\mathcal{N}_{C/X})$$

Demonstração. Sabemos que para qualquer variedade, a componente $A^0(Y)$ é irredutível a $\mathbb{Z}$, gerado pela classe fundamental $[Y]$ de Y. Como Y é racional, temos que $A^3(Y) \simeq \mathbb{Z}$ que é gerada pela classe de um ponto P. Na Proposição 13.12 de [3] é mostrado que $A^1(Y)$ é gerado pelas classes de H e $E := [E]$ e além disso, já sabemos que o mapa π_* envia H para h e $[E]$ para 0, então temos a seguinte sequência exata

$$A^0(E) \xrightarrow{j_*} A^1(Y) \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}.h \simeq \mathbb{Z} \to 0$$

e novamente da Proposição 13.12 temos que $j^*(E) = j^*j_*(E) = -\zeta$ e pelo Teorema 9.6 de [3], ζ é gerado por um subgrupo de $A^1(E)$ que é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e então o mapa de $A^0(E) \xrightarrow{j_*} A^1(Y)$ é um monomorfismo, e assim $A^1(Y) \simeq \mathbb{Z}^2$, gerado por H e E.

Por fim, denote $L = \pi^*(l) \in A^2(Y)$ o pullback de uma reta. Como $A^2(\mathbb{P}^3)$ é gerado por l, novamente pela Proposição 13.12 e o Teorema 9.6 de [3] nos diz que $A^2(Y)$ é gerado por L,$j_*\zeta$ e j_*F_D para um divisor D em $A^1(C)$.

$\square$

Com a notação e as hipóteses do Lema 5, podemos calcular algumas interseções dos divisores que serão de grande importância para provar o Teorema 13. Nossa estratégia para o calculo dessas interseções consitirá em utilizar a teoria de interseção em $\mathbb{P}^3$ e depois tomar o pull-back para obter tais produtos em Y. Dessa forma, afirmamos que

$$\deg(H^3) = 1, \deg(H^2.E) = 0, \deg(H.E^2) = d \text{ e } \deg(E^3) = -4d - 2g + 2$$

De fato, $\deg(H^3) = 1$ já que h^2 é uma reta e, portanto, $h^2.h$ é um ponto e dessa forma tomando o pull-back para Y obtemos o que queriamos.

Para $\deg(H^2.E) = 0$, sem perda de generalidade, podemos tomar um hiperplano H que não contém a curva, dessa forma $h^2.C = 0$, pois h^2 irá cortar C em no máximo d pontos digamos $\{p_1, \cdots, p_d\}$ basta tomar uma reta em $\mathbb{P}^3$ evitando esse conjunto de pontos e assim tomando o pull back temos o que queríamos.

Para $\deg(H.E^2) = -d$ temos que a interseção é o grau da curva, isto é, d e o sinal de negativo é por causa da autointerseção do divisor excepcional E.

Por fim, é possível provar que

- $\deg(\mathcal{N}_{C|X}) = -4d - 2g + 2$,
- $\deg(E^3) = -\deg(\mathcal{N}_{C|X})$.

Nesse trabalho assumíremos as duas últimas igualdades acima.

1.6 Relação entre Feixes, Fibrados e Divisores

Definição 17. Uma *seção* de um fibrado vetorial $p : E \to X$ é um morfismo $s : X \to E$ tal que $p \circ s = 1$ em X. Denotaremos o conjunto de todas as seções de um fibrado vetorial E por $\mathcal{L}(E)$.

Exemplo 31. Sejam k um corpo e uma seção f do fibrado trivial de posto $1, \pi : X \times k \to X$ é simplismente um morfismo de X para $\mathbb{A}^1$, isto é, um elemento $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Então

$$\mathcal{L}(X \times k) = \mathcal{O}_X(X).$$

Em particular, $\mathcal{L}(\mathbb{P}^n \times k) = k$ e similarmente, $\mathcal{L}(\mathbb{P}^n \times V) = V$.

Exemplo 32. Considere E, o fibrado tautológico sobre $\mathbb{P}^n$. Então, toda seção $s : \mathbb{P}^n \to E$ determina em geral, uma seção $s : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n \times V$, pois $E \subset \mathbb{P}^n \times V$. Portanto, temos que $s(x) = (x, v)$ para algum $v \in V$ fixo. Mas como $s(x) \in E$, temos que este $v \in l_x$ para todo $x \in \mathbb{P}^n$, e consequentemente temos que $v = 0$. Então $\mathcal{L}(E) = 0$, assim E não é em geral um fibrado trivial. O fibrado tautólógico é comumente denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

Se s_1 e s_2 são seções de E então existe uma seção $s_1 + s_2$ tal que

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x),$$

para qualquer ponto $x \in X$. Onde a soma do lado direito é significativa desde que $s_1(x), s_2(x) \in E_x$ e E_x possui estrutura de espaço vetorial. Similarmente, temos que

$$(fs)(x) = f(x)s(x),$$

determina a mutiplicação de uma seção s por um elemento $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dessa maneira, como essas duas propriedades são satisfeitas temos que $\mathcal{L}(E)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{O}_X(X)$. Além disso, associaremos com qualquer conjunto aberto $U \subset X$ um conjunto $\mathcal{L}(E, U)$ das seções do fibrado E restrito a U. Temos um feixe que denotaremos por $\mathcal{L}_E$, de grupos abelianos com uma estrutura extra, a qual definiremos de forma mais geral.

Definição 18. Seja X um espaço topológico, e sejam $\mathcal{G}$ um feixe de anéis e $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos, tal que para cada $U \subset X, \mathcal{F}(U)$ tem estrutura de módulo sobre $\mathcal{G}(U)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe de $\mathcal{G}$-módulos se o mapa multiplicativo $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ é compatível com a restrição do homomorfismo ρ_U^V, isto é, o seguinte diagrama comuta para cada $U \subset V$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{G}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^V_{U,\mathcal{F}} \otimes \rho^V_{U,\mathcal{G}}"] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\rho^V_{U,\mathcal{F}}"] \\
\mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

Nestas circunstâncias, cada talo $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ é um módulo sobre $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{G}$.

Um homomorfismo $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ de feixes de $\mathcal{G}-$módulos é um sistema de homomorfismos $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ de $\mathcal{G}(U)$-módulos tal que o seguinte diagrama comute para todo $U \subset V$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "\rho^V_{U,\mathcal{F}}"] & \mathcal{F}'(V) \arrow[d, "\rho^V_{U,\mathcal{F}'}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{F}'(U)
\end{tikzcd}$$

Dessa maneira, o feixe $\mathcal{L}_E$ correspondente a um fibrado vetorial E é um feixe de módulos $\mathcal{O}_X$. E assim, as operações

$$M \oplus M', M \otimes_A M', M^* = Hom(M, A)$$

são válidas para M, M' módulos e pela construção acima podem ser aplicadas para os feixes sobre $\mathcal{G}(U)$.

O feixe de seções de um fibrado trivial de posto n é determinado por $\mathcal{L}_E(U) = \mathcal{O}_X(U)^n$, ou seja, $\mathcal{L}_E$ é a soma direta de n cópias de $\mathcal{O}_X$. Este feixe é chamado livre de posto n. Agora, seja $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se para todo ponto existir uma vizinhança U tal que $\mathcal{F}_U$ é livre e de posto finito então dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe localmente livre de posto finito. Além disso, o feixe $\mathcal{L}_E$ correspondente a qualquer fibrado vetorial E é localmente livre de posto finito, desde de que E é localmente isomorfo a um fibrado trivial.

Teorema 3. *Seja X suave, então a correspondência $E \to \mathcal{L}_E$ estabelece uma correspondência injetiva entre classes de fibrados vetoriais e feixes localmente livres de posto finito.*

Demonstração. Note que acima já realizamos a construção de um feixe localmente livre associado a um fibrado vetorial E sendo esse o feixe $\mathcal{L}_E$. Então, basta mostrar como "recuperar"um fibrado vetorial de um feixe localmente livre $\mathcal{F}$. Para isso, assuma sem perda de generalidade, que X é conexo, pois poderíamos escrever X como a união de suas componentes conexas e proceder da mesma maneira. Suponha que,

$$X = \bigcup U_\alpha,$$

é uma cobertura tal que $\mathcal{F}_{U_\alpha}$ é um feixe localmente livre e seja o isomorfismo correspondente

$$\Phi_\alpha : \mathcal{F}_{U_\alpha} \to \mathcal{O}^{n_\alpha}_{U_\alpha}.$$

Então

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \mathcal{O}^{n_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta} \to \mathcal{O}^{n_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta} \tag{11}$$

é um isomorfismo de feixes de módulos. Como X é conexo, temos que todos os números n_α são iguais, isto é, podemos escrever $n_\alpha = n$. Além disso, qualquer endomorfismo de feixes de módulos $\mathcal{O}^n_U$ é dado pela matriz $c = (c_{ij})$ com $c_{ij} \in \mathcal{O}_X(U)$ e então o isomorfismo em (11) define uma coleção de matrizes $C_{\alpha,\beta}$ e que satisfazem as relações de colagem, ou seja,

$$C_{\alpha,\alpha} = id \text{ e } C_{\alpha,\gamma} = C_{\alpha,\beta} C_{\beta,\gamma}$$

em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, e portanto, elas definem um fibrado vetorial E de posto n. □

Definição 19. Seja X um esquema. Para um conjunto aberto U, considere $s(U)$ como o conjunto de elementos s em $\mathcal{O}_X(U)$, tais que para todo $p \in U$, tem-se que $s|_p$ não é um divisor de zero em $\mathcal{O}_{X,p}$. Seja $\mathcal{M}$ o pré-feixe $U \to S^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ com as restrições usuais. Considere $\mathcal{N}$ a feixificação do pré-feixe $\mathcal{M}$. Um Divisor de Cartier é definido como uma seção global do feixe $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{O}_X^*$.

Agora, seja D um divisor de Cartier de uma variedade X, então correspondendo a cada divisor D temos o espaço vetorial $\mathcal{L}(D)$, esta correspondência nos dá um feixe em X. Para ver isso, note que o divisor D em X também define um divisor em qualquer aberto $U \subset X$, por restringir a U a equação local de D. Escrevemos D_U os divisores obtidos e o conjunto

$$\mathcal{L}_D(U) = \mathcal{L}(U, D_U).$$

Onde $\mathcal{L}(U, D_U)$ é um espaço vetorial correspondendo aos divisores de D_U em U. Veja que $\mathcal{L}_D(V) \subset \mathcal{L}_D(U)$ se $U \subset V$. Daí, podemos escrever $\rho_U^V : \mathcal{L}_D(V) \to \mathcal{L}_D(U)$ o mapa de inclusão. Dessa forma o sistema $\{\mathcal{L}_D(U), \rho_U^V\}$ é um pré-feixe e podemos ver que é um feixe o qual denotaremos por $\mathcal{L}_D$.

Dessa maneira, veja que ao multiplicarmos $f \in \mathcal{L}_D(U)$ por $h \in \mathcal{O}_X(U)$, podemos identificar $\mathcal{L}_D$ dentro de um feixe de $\mathcal{O}_X$, o qual é localmente livre. De fato, se D é define um conjunto aberto U_α pela equação local f_α então os elementos $g \in \mathcal{L}_D(U_\alpha)$ são caracterizados pela condição de que $gf_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$. Daí, temos o seguinte isomorfismo

$$\Phi_\alpha : \mathcal{L}_D|_{U_\alpha} \to \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}. \tag{12}$$

Já vimos nesta seção que tal feixe determina o fibrado vetorial E_D e do isomorfismo acima temos que posto E_D é igual a um. Denominamos fibrados vetoriais de posto 1 de fibrados em retas. Como suas fibras são retas, podemos escrever as funções de transição de E_D. Como o isomorfismo sobre U_α em (12) é dado pela multiplicação por f_α, o automorfismo $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ é dado pela multiplicação de $\frac{f_\beta}{f_\alpha}$. Note que $\frac{f_\beta}{f_\alpha} \in O_X(U_\alpha \cap U_\beta)$ pela compatilidade de f_α. Similarmente, $(\frac{f_\beta}{f_\alpha})^{-1} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in O_X(U_\alpha \cap U_\beta)$ neste caso a matriz de transição é de ordem 1×1 é dado por $\phi_{\alpha\beta} = \frac{f_\beta}{f_\alpha}$. Se trocarmos o divisor D por um disisor linearmente equivalente $D' = D + \operatorname{div} f$ com $f \in K(X)$ então a multiplicação por f define um isomorfismo de módulos

$$\mathcal{L}(U, D_U) \to \mathcal{L}(U, D'_U)$$

$$g \mapsto \frac{g}{f}$$

e dessa forma obtemos o isomorfismos de feixes $\mathcal{L}_D \to \mathcal{L}_{D'}$. Além disso, os dois fibrados em retas E_D e $E_{D'}$ possuem a mesma matriz de transição. Então, o feixe $\mathcal{L}_D$ e o fibrado linear E_D ambos correspondem a classe do divisor.

Teorema 4. *O mapa $D \to \mathcal{D} \to E_D$ define uma correspondência injetiva entre* (1) *equivalência linear das classes de divisores,* (2) *isomorfismo das classes de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente livres e* (3) *isomorfismos de classes de fibrados vetoriais de posto 1.*

Demonstração. A correspondência entre os conjuntos (2) e (3) foram estabelecidas no Teorema 3. Então basta provar que $D \mapsto E_D$ define uma correspondência injetiva entre os conjuntos (1) e (3).

Com esse objetivo, construiremos o mapa inverso, isto é, suponha que E é um fibrado em retas definido em uma cobertura $X = \bigcup U_\alpha$ por matrizes de transição $\phi_{\alpha,\beta}$ de ordem 1 por 1 com $\phi_{\alpha,\beta}$ e $\phi_{\alpha,\beta}^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$. Das condições de colagem temos que

$$\phi_{\beta,\alpha} = \phi_{\alpha,\beta}^{-1}$$

e

$$\phi_{\alpha,\beta} = \phi_{\gamma,\alpha}^{-1} \circ \phi_{\gamma,\beta} \text{ sobre } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \tag{13}$$

Dessa forma, da inclusão $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta) \to k(X)$ podemos considerar $\phi_{\alpha,\beta}$ como um elemento em $k(X)$ e (3) funciona da mesma maneira.

Agora, fixe algum γ, digamos $\gamma = 0$. Substituindo $\gamma = 0$ em (13) e o conjunto $f_\alpha = \phi \circ \alpha$. Então, o sistema de elementos $f_\alpha \in U_\alpha$ é compatível, desde de que

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha} = \phi_{\alpha,\beta}. \tag{14}$$

Portanto, eles definem um divisor de Cartier D. E dessa maneira, comparando as equações (2) e (14) temos que $E = E_D$.

Provaremos agora que a equivalência linear da classe dos divisores D depende somente do fibrado em retas E e não da escolha de cobertura ou da matriz de transição. Para isso, sejam dois sistemas $\{U_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}\}$ e $\{U'_\lambda, \phi'_{\lambda,\omega}\}$ podem ser comparados na cobertura $\{U_\alpha \cap U'_\lambda\}$ por

$$\phi_{\alpha,\beta,\lambda,\omega} = \phi_{\alpha,\beta} \text{ e } \phi_{\alpha,\beta,\lambda,\omega} = \phi'_{\lambda,\omega} \text{ em } U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\lambda \cap U'_\omega.$$

Portanto, podemos assumir desde do princípio que as duas coberturas são as mesmas, ou seja, $X = \bigcup U_\alpha$. Então utilizando mudança de base, obtemos que

$$\phi'_{\alpha,\beta} = \psi_\alpha^{-1} \phi_{\alpha\beta} \psi_\beta \text{ com } \psi_\alpha \text{ e } \psi_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha). \tag{15}$$

Por definição de f_α e f'_α, tem-se que

$$f'_\alpha = \psi_\alpha^{-1} \circ \phi \circ \alpha \circ \psi_\alpha = \psi_\alpha^{-1} \circ f_\alpha \circ \psi_\alpha,$$

então de (15) temos que $D' = D - \operatorname{div}(\psi_0)$. E dessa forma, construímos um mapa bem definido do conjunto (3) para o conjunto (1). Assim, obtemos as relações entre esses três objetos matemáticos. $\square$

2 Geometria Algébrica Sobre Curvas

Começaremos a seção introduzindo conceitos elementares da teoria de curvas. Além disso, também introduziremos o conceito de sistema linear sobre uma variedade suave, o qual será fundamental para estudaremos algumas condições impostas por sistemas lineares em $\mathbb{P}^2$.

Uma *curva algébrica* é um esquema irredutível de dimensão 1 sobre um corpo algebricamente fechado. Além disso, o grau da curva é definido pelo termo de maior grau do polinômio de Hilbert que a representa.

Definição 20. Um sistema linear completo em uma variedade projetiva não singular X é definido com o conjunto (talvez vazio) de todos os divisores efetivos linearmente equivalentes a algum divisor dado D e será denotado por $|D|$. De modo natural, dizemos que um sistema linear, que é denotado por g_d^r, em X é um subespaço vetorial de $H^0(X, D)$ de dimensão r e com $\deg D = d$ de um sistema linear completo $|D|$.

Definição 21. Um ponto $P \in X$ é um ponto base de um sistema linear g_d^r se $P \in \operatorname{Supp} g_d^r$ para todo $D \in g_d^r$. $\operatorname{Supp} D$ é a união de todos os divisores primos de D.

Definição 22. Seja D um divisor de Cartier, entao os divisores primos de D são as componentes irredutíveis do divisor D.

Definição 23. g_d^r separa pontos, isto é, para dois pontos fechados e distintos $P, Q \in X$, existe um $D \in g_d^r$ tal que $P \in \operatorname{Supp} D$ e $Q \notin \operatorname{Supp} D$.

Definição 24. Seja X uma curva no espaço projetivo, definimos o gênero aritmético $p_a(X)$, como $1 - P_X(0)$ onde P_X é o polinômio de Hilbert de X. Por outro lado, definimos o gênero geometrico $p_g(X)$, como $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{K}_X)$, onde $\mathcal{K}_X$ é o feixe canônico.

Proposição 3. *Se X é uma curva conexa e suave, então*

$$p_a(X) = p_g(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

Dessa forma, nesse caso denominados este número como simplismente gênero de X, e o denotamos por g.

Demonstração. Ver[[5],Proposição 4.1.1]. □

Lema 6. *Seja D um divisor em uma curva X. Então, se $l(D) \neq 0$, temos que $\deg D \geq 0$. Além disso, se $l(D) \neq 0$ e $\deg D = 0$, então $D \sim 0$, isto é, $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$.*

Demonstração. Se $l(D) \neq 0$ então o sistema linear completo $|D|$ é não vazio. Portanto, D é linearmente equivalente a algum divisor efetivo. Como o grau depende somente da classe de equivalência, e o grau do divisor efetivo é não negativo, temos que $\deg D \geq 0$. Caso $\deg D = 0$, então D é linearmente equivalente a um divisor efetivo de grau zero, mas nesse caso a única opção possível é 0, o divisor nulo. □

Definição 25. Dizemos que uma curva C é racional se $C \simeq \mathbb{P}^1$, que uma curva C' é elíptica se o gênero de C' é igual a 1 e que uma curva $C^{''}$ é hiperelíptica se existe um recobrimento $f : C^{''} \to \mathbb{P}^1$ de grau mínimo 2 com gênero de $C^{''}$ maior que 1.

Definição 26. O grau de um feixe coerente $\mathcal{F}$ é dado por $\deg \mathcal{F} = \chi(\mathcal{F}) - \operatorname{rank}(\mathcal{F})\chi(\mathcal{O})$.

Teorema 5 (Riemann-Roch)**.** *Seja D um divisor de uma curva projetiva X de gênero g então*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

onde K o divisor canônico da curva.

Demonstração. O divisor $K - D$ corresponde ao feixe invertível $\omega_X \otimes \mathcal{L}(D)^\vee$. Como X é projetivo, podemos aplicar a dualidade de Serre para concluir que o espaço vetorial $H^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}(D)^\vee)$ é dual ao $H^1(X, \mathcal{L}(D))$. Assim, precisamos mostrar que para qualquer D, a seguinte relação é satisfeita

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g,$$

onde para qualquer feixe coerente $\mathcal{F}$ em X, $\chi(\mathcal{F})$ é a característica de Euler. Daí,

$$\chi(\mathcal{F}) = \dim H^0(X, \mathcal{F}) - \dim H^1(X, \mathcal{F}).$$

Primeiro, considere o caso $D = 0$. Então, nossa fórmula nos diz que

$$\dim H^0(X, \mathcal{F}) - \dim H^1(X, \mathcal{F}) = 0 + 1 - g,$$

que é válida, já que $\dim H^0(X, \mathcal{F}) = 1$ para qualquer variedade quase projetiva e $\dim H^1(X, \mathcal{F}) = g$.

Agora, seja D um divisor qualquer, e seja P um ponto qualquer. Mostraremos que a fórmula é verdade para D se, e somente se, é válida para $D + P$. Como qualquer divisor da forma $D + P_1 + P_2 + ... + P_k - P_{k-1} - ... - P_n$ pode ser obtido com um número finito de passos ao adicionar ou subtrair um ponto de cada vez, o resultado será válido para todo D.

Consideremos P um subesquema fechado de X. Sendo assim, tal subesquema possui uma estrutura de feixe arranha-céu $\mathcal{F}$ apoiado no ponto P. Denotaremos por $\mathcal{F}(P)$, e o ideal desse feixe é $\mathcal{L}(-P)$. Portanto, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{L}(-P) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(P) \to 0,$$

torcendo a sequência exata acima por $\mathcal{L}(D + P)$, a sequência continua exata, já que $\mathcal{L}(D + P)$ é livre e de posto 1, assim teremos que

$$0 \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}(D + P) \to \mathcal{F}(P) \to 0.$$

Como $\mathcal{L}(D + P)$ é um feixe localmente livre de posto 1, torcer a sequência exata por $\mathcal{L}(D + P)$ não afeta o feixe $\mathcal{F}(P)$. Agora, como a característica de Euler é aditiva em sequências exatas curtas e $\chi(\mathcal{F}(P)) = 1$,

$$\chi(\mathcal{L}(D + P)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + \chi(\mathcal{F}(P)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + 1$$

Por outro lado, $\deg(D+P) = \deg D + 1$, então nossa fórmula é válida,para D se, e somente se, é válida para $D+P$, como queríamos. $\square$

Exemplo 33. Seja X uma curva de gênero g, o divisor canônico K tem grau $2g-2$; e $l(K) = g$. Com efeito, aplicando o Teorema 5 para $D = 0$ segue-se que

$$l(0) - l(K) = \deg 0 + 1 - g.$$

Daí, como $l(0) = 1$, segue que $l(K) = g$. Aplicando o teorema 5 para o caso $D = K_C$, temos que

$$\begin{aligned} \deg K &= l(K) - l(0) - 1 + g \\ &= g - 1 - 1 + g \\ &= 2g - 2. \end{aligned}$$

Exemplo 34. Seja C uma curva elíptica. Então, para uma curva elíptica , o divisor canônico K tem grau 0, já que

$$\deg(K) = 2.g - 2 = 2.1 - 2 = 0$$

Por outro lado, $l(K) = g = 1$. Concluimos através do Lema 6 que $K \sim 0.$, isto é, $\mathcal{L}(K) = \mathcal{O}_X$.

Exemplo 35. Seja C uma curva elíptica, seja P_0 um ponto em C, e seja G denotando o subgrupo de $\operatorname{Pic} C$ correspondendo aos divisores de grau 0. Então o mapa $P \to \mathcal{L}(P - P_0)$ nos fornece uma correspondência injetiva entre os pontos de C e os elementos do grupo G. Então, nós conseguimos uma estrutura de grupo com P_0 como elemento neutro no conjunto dos pontos de C.

Com efeito, para concluir a afirmação acima é necessário apenas mostrar que se D é um disivor de grau 0, então existe um único ponto $P \in C$, tal que $D \sim P - P_0$. Com essa finalidade, apliquemos o Teorema 5 para $D + P_0$, e então

$$l(D + P_0) - l(K - D - P_0) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Agora, como $\deg K = 0$, já que C é uma curva eliptica, então $\deg(K - D - P_0) = -1$, e portanto $l(K - D - P_0) = 0$ e dessa maneira, tem-se que $l(D + P_0) = 1$. Em outras palavras, $\dim |D + P_0| = 0$. O que significa que existe um único divisor linearmente equivalente a $D + P_0$. Como o grau é 1, temos que é necessariamente um único ponto P de C. Assim, mostramos então que existe um único ponto $P \sim D + P_0$, ou seja, $D \sim P - P_0$.

Teorema 6 (Teorema do índice de Clifford)**.** *Se $l(D) > 0$ e $l(K - D) > 0$, então*

$$l(D) \leq \frac{1}{2}\deg(D) + 1$$

Demonstração. Ver[[5],Teorema 5.4] $\square$

2.1 Fatos clássicos sobre curvas planas

Falaremos sobre alguns fatos clássicos sobre curvas planas sobre um corpo k algebricamente fechado. Além disso, os resultados desta seção continuam válidos sobre um corpo de característica arbitrária, mesmo que normalmente tenhamos a hipótese de característica zero sobre o corpo.

Definição 27. Seja k um corpo algebricamente fechado. Um subesquema S de dimensão 0 de $\mathbb{P}^2$ é dito impor condições indepentes em curvas de grau n se

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_S(n)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}}(n)) - d,$$

onde $\mathcal{J}_S \subset \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}}$ é o feixe de ideais de S.

Definição 28. Um g^r_d sobre uma curva suave C é um fibrado linear $\mathcal{L}$ de grau d com $h^0(C, \mathcal{L}) \geq r + 1$

2.1.1 Existência e unicidade do g^2_d

Começaremos com um Lema de caracterização em relação aos subesquemas de $\mathbb{P}^2$, tais que sejam finitos, reduzidos e suportam $\geq n + 2$ pontos que impoem condições independentes a curvas de grau n.

Lema 7. *Seja S um subesquema reduzido qualquer de $\mathbb{P}^2$ cujo suporte consiste de $n + 1$ pontos. Então, S impõe condições independentes em curvas de grau n. Além disso, se $S \subset \mathbb{P}^2$ é um subesquema reduzido cujo suporte consiste de $n + 2$ pontos, então S falha em impor condições de independência sobre curvas de grau n se, e somente se, S está contida em alguma reta.*

Demonstração. Como S tem grau d e da seguinte sequência exata

$$\mathcal{J}_S(n) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(n) \to \mathcal{O}_S$$

onde $\mathcal{J}_S \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}$ é o ideal do feixe S, segue que

$$h^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{J}_S(n)) \geq h^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(n)) - d$$

Então, é suficiente verificar a desigualdade reversa. Para isso, por indução no grau de S, é suficiente mostrar que para qualquer $d \leq n + 1$ nós podemos encontrar alguma curva plana de grau n passando por todos os pontos de S com exceção de um. Veja que isso é suficiente, pois pela abordagem de Cayley-Bacharach, tem-se que se toda curva plana de grau n passando por n-1 pontos também passasse pelo último ponto, então teríamos que o último ponto seria "combinação linear dos outros". Além disso, no caso $d = n + 2$ é suficiente encontrar tal curva passando por todos os pontos de S com exceção de um ponto, provando que os $n + 2$ pontos não estão sobre uma mesma reta.

No caso $d \leq n + 1$, para ver isso, seja P_d denotando um ponto de S e para qualquer outro ponto seja $P_i \in S$ tal que $P_i \neq P_d$, em seguida escolha uma reta l_i passando por P_i mas não passando por P_d. Então, basta tomar $C = \bigcup_{i \neq d} l_i$.

Dessa forma, C é a curva de grau menor ou igual a n que passa por todos os pontos de S com exceção de P_d. Tomando a união de C com uma curva F de grau $n-d+1$ tal que $P_d \notin F$. Assim temos que $C \cup F$ é a curva pretendida de grau n. Daí, tem-se que

$$h^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{J}_S(n)) \leq h^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(n)) - d,$$

e assim S impõe condições independentes em curvas de grau n.

Para concluir, nós precisamos verificar somente que se o suporte consiste de $n+2$ pontos não colineares, então existe alguma curva passando por todos os pontos de S com exceção de um único ponto. Para isso, escolha três pontos não colineares no suporte de S, digamos P_1, P_2, P_3. Sem perda de generalidade, é suficiente então mostrar que existe uma curva passando por todos os pontos com exceção de P_3. Então, seja l_1 a reta determinada pelos pontos P_1 e P_2 e para $2 \leq i \leq n$, seja l_i a reta passando por P_{i+2} mas não não passando por P_3. Daí, tome $\bigcup_{i=1}^n l_i$ é uma curva de grau n que não contém P_3 como queríamos. $\square$

Lema 8. *Seja C uma curva plana suave de grau d sobre um corpo algebricamente fechado k. Sejam $P_1, ..., P_m$ pontos distintos e $\mathcal{L} := \mathcal{O}_C(P_1 + ... + P_m)$. Então se $m \leq d-2$, temos que $H^0(C, \mathcal{L}) = 1$. Se $m = d-1$, então $h^0(C, \mathcal{L}) = 1$ a menos que $P_1, ..., P_m$ sejam colineares, neste caso temos que $h^0(C, \mathcal{L}) = 2$ e $h^0(C, \mathcal{O}_C(l \cap C)) = 3$.*

Demonstração. Seja $S := \bigcup_{i=1}^m V(P_i)$, pelo lema 7 aplicando no caso $n = d-3$ observe que nós temos a seguinte sequência exata de comologia

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3) \otimes \mathcal{J}_S) \to H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3)) \to H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_S) \to 0$$

Obtemos um mapa correspondente de sequências exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3) \otimes \mathcal{J}_S) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_S) \arrow[d, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & H^0(C, \mathcal{O}_C(d-3) \otimes \mathcal{L}^V) \arrow[r] & H^0(C, \mathcal{O}_C(d-3)) \arrow[r] & H^0(C, \mathcal{O}_S)
\end{tikzcd} \tag{16}$$

obtido pela restrição natural dos feixes a C e usando o fato que $\mathcal{J}_S$ restrito a C é isomorfo a $\mathcal{L}^\vee$.

Daí, observe que os mapas β e γ de (16) são isomorfismos, tal fato segue das sequência exata em comologia associada a

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(\alpha - d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(\alpha) \to \mathcal{O}_C(\alpha) \to 0$$

aplicada no caso $\alpha = 0$, temos que

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(0) \to \mathcal{O}_C(0) \to 0$$

tem-se que γ é um isomorfismo e aplicando ao caso $\alpha = d-3$, tem-se que

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3) \to \mathcal{O}_C(d-3) \to 0$$

e assim temos que β é um isomorfismo. Portanto, o mapa α de (16) é também um isomorfismo pelo lema dos cinco.

Afirmação: $h^0(C,\mathcal{L}) = 1$ se S não está contido em uma reta.

Com efeito, se S não está contido em uma reta pelo Lema 7 e os isomorifismos de (16) então segue-se que,

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(d-3) \otimes \mathcal{L}^\vee) = h^0(\mathcal{O}_C(d-3)) - m$$

Note que, neste caso

$$h^0(\mathcal{O}_C(d-3)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)) = \binom{d-3}{2} = \frac{(d-1).(d-2)}{2} = g.$$

Usando o teorema 5, obtemos que

$$\begin{aligned}
\deg \mathcal{O}_C(d-3) &= h^0(\mathcal{O}_C(d-3)) - h^0(\mathcal{O}_C) - 1 + g \\
&= g - 1 - 1 + g \\
&= 2g - 2.
\end{aligned}$$

Concluimos então que o fibrado canônico de C denotado por $\mathcal{K}_C$ é o feixe $\mathcal{O}_C(d-3)$, desde de que este fibrado possui grau $2g-2$ com dimensão da seção global igual a g. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
h^0(C,\mathcal{L}) &= h^0(C, \mathcal{K}_C \otimes \mathcal{L}^\vee) + m - g + 1 \\
&= h^0(C, \mathcal{O}_C(d-3) \otimes \mathcal{L}^V) + m - g + 1 \\
&= h^0(C, \mathcal{O}_C(d-3)) - m + m - g + 1 \\
&= \binom{d-3}{2} - g + 1 \\
&= g - g + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Para concluir, resta provar a segunda parte do lema. Para isso, suponha que $m = d-1$ e que $P_1, ..., P_m$ são colineares, sabemos que

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_1 + ... + P_{m-1}) = 1$$

pela argumentação acima. Portanto, $H^0(C, \mathcal{O}_C(P_1 + ... + P_{m-1} + P_m) \leq 2$. Entretanto, se os pontos pertencem a uma reta l, então nós temos que

$$H^0(C, C \cap l) \geq 3$$

Como $C \cap l - (P_1 + ... + P_m)$ é um divisor efetivo de grau 1, obtemos que essas duas desigualdades precisam ser igualdades, então

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_1 + ... + P_{m-1} + P_m) = 2 \text{ e } H^0(C, C \cap l) = 3.$$

□

Lema 9. *Seja $C \subset \mathbb{P}_k^2$ uma curva plana suave de grau $d \geq 4$, com k um corpo algebricamente fechado. Então,*

- *C não tem um g_m^1 para $m \leq d-2$,*
- *Qualquer g_{d-1}^1 é da forma $D-p$ para $p \in C$ e D em um sistema linear $H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$.*

Demonstração. Primeio mostraremos que C não possui um g_m^1 para $m \leq d-2$. Para isso, suponha, por contradição, que C tem um g_m^1 para $m \leq d-2$. Como um fibrado linear determina um mapa de $C \to \mathbb{P}^1$ de grau no máximo m, possivelmente depois de remover os pontos bases do fibrado linear por torção, já que se supormos que D tem um g_m^1 então $h^0(C, D) > 1$. Daí, sejam f, g seções globais linearmente indepentes em D, assim temos um mapa natural de um ponto x em C para $[f(x) : g(x)]$ em $\mathbb{P}^1$. Portanto, é suficiente mostrar que C não tem mapas dominantes de grau m para $\mathbb{P}_k^1$ para $m \leq d-2$. Isto , é suficiente, mostrar que C não tem pontos bases para fibrados lineares livres de grau m para $m \leq d-2$.

Então, suponha que C tenha algum ponto base do fibrado linear livre de grau $m \leq d-2$ correspondendo a um mapa dominante de $C \to \mathbb{P}_k^1$. Dessa forma, nosso problema se reduz a mostrar que C não tem fibrado linear correspondendo a mapas genéricos, separáveis e dominantes $C \to \mathbb{P}_k^1$. O que é imediato se k tem característica zero. Agora, se k tem característica prima igual a p, e $C \to \mathbb{P}_k^1$ é genérico, inseparável e dominante, então $C \to \mathbb{P}_k^1$ fatora-se na composição de algum mapa de C para $\mathbb{P}_k^1$ de tal forma que o mapa seja dominante, genérico e separável com alguma potência de Frobenius. Portanto, é suficiente mostrar que C não tem mapa genérico, separável e dominante para $\mathbb{P}_k^1$.

Agora, mostraremos que não há mapas separáveis genéricos $C \to \mathbb{P}_k^1$. Então, como um mapa tem fibra geral dado pela coleção de m pontos distintos de C. Então, resta mostrar que não existe fibrado linear

$$\mathcal{L} = O_C(p_1 + \cdots + p_n) \text{ com } h^0(C, \mathcal{L}) \geq 2.$$

Esta é a razão para a redução para morfismos separáveis e genéricos, pois nesse caso podemos assumir que os pontos que definem o fibrado linear são distintos, e assim podemos aplicar o lema (8) e pela primeira consquência desse resultado segue-se que C não tem g_m^1's.

Verfiquemos agora, o item (2) do lema, isto é, os únicos g_{d-1}^1's em C são dados por divisores da forma $D-P$ com $p \in C$ e D um sistema linear com $H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$. Para isso seja, $\mathcal{L}$ algum g_{d-1}^1. Note que $\mathcal{L}$ é livre de ponto base, do contrário torcendo $\mathcal{L}$ pelos pontos bases, nós obteríamos que existe um g_m^1 para algum $m \leq d-2$, contradizendo a primeira parte do lema.

Então, $\mathcal{L}$ determina um mapa $C \to \mathbb{P}_k^1$. Este mapa é necessariamente separável, do contrário nós poderiamos fatorá-lo como uma composição de mapas separáveis e genéricos de grau baixo com Frobenius.Mas, não existem mapas sepáraveis e genéricos de $\mathbb{P}_k^1$ de grau baixo, porque não existem g_m^1's para

$m \leq d-2$. Portanto, sabemos que $\mathcal{L}$ determina um morfismo separável, dominante e genérico de $C \to \mathbb{P}_k^1$. Portanto, podemos assumir que

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C(p_1 + \cdots + p_{d-1})$$

com $p_1, \cdots, p_{d-1}$ distintos e novamente utilizando o lema (8), tem-se que $h^0(C, \mathcal{L}) = 1$ a menos que os pontos estejam em uma reta l. Neste caso, os pontos $p_1, \cdots, p_{d-1}$ são colineares, daí seja D a interseção de C com l, obtemos que

$$p_1 + \cdots + p_{d-1} = D - q,$$

onde $q := D - (p_1 + \cdots + p_{d-1})$. □

Proposição 4. *Seja $C \subset P_k^2$ uma curva plana suave de grau $d \geq 4$, com k um corpo algebricamente fechado. Então, C tem exatamente um g_d^2 e este g_d^2 é uma série linear completa.*

Demonstração. Primeiro, suponha que C é uma curva suave com um g_d^2. Isto é, C tem um feixe invertível $\mathcal{L}$ com $h^0(C, \mathcal{L}) \geq 3$. Nós afirmamos que $h^0(C, \mathcal{L}) = 3$. Para ver isso, seja D um divisor efetivo associado ao sistema linear $H^0(C, \mathcal{L})$. Sejam p_1 e p_2 dois pontos em D, os quais podemos assumir que a dimensão pode cair no máximo a esperada, digamos $h^0(D) > 3$ implica em $h^0(D - p - q) > 1$. Então se $h^0(C, \mathcal{L}) > 3$, então $D - p_1 - p_2$ é um g_{d-2}^1, o qual não existe pelo lema (9).

Para completar a prova, nós precisamos somente verificar que C tem um único g_d^2. Para isso, seja $\mathcal{M}$ um g_d^2 qualquer. Então, para qualquer D no sistema linear $H^0(C, \mathcal{M})$ e $p \in \text{Supp}(D)$, então nós temos que $\mathcal{O}_C(D - p)$ é um g_{d-1}^1. Pelo Lema (9), $D - p$ consiste de $d-1$ pontos colinares e portanto, temos que existe algum ponto q tal que $\mathcal{M}(-p) \simeq \mathcal{O}_C(1)(-q)$. Considere o seguinte feixe invertível,

$$\mathcal{L} := \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_C(1).$$

Já sabemos que $\mathcal{M}(-p) \simeq \mathcal{O}_C(1)(-q)^*$, daí tensorizando a igualdade anterior por $\mathcal{M}(-p)^*$, obtemos que

$$\mathcal{M}(-p) \otimes \mathcal{M}(-p)^* \simeq \mathcal{O}_C(1)(-q) \otimes \mathcal{M}(-p)^*$$

Assim,

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_C(1)(-q + p).$$

Por fim, tensorizando pelo dual do feixe $\mathcal{O}_C(1)$ temos que

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_C(1)^* \simeq \mathcal{O}_C(1)(-q + p) \otimes \mathcal{O}_C(1)^* = \mathcal{O}_C(-q + p).$$

Dessa forma, concluímos então que

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C(-q + p).$$

Para concluir o prova do resultado, é suficiente mostrar que $p = q$. Para isso, note que $\mathcal{M}^{\otimes(d-3)} \simeq \mathcal{K}_C \simeq \mathcal{L}^{\otimes(d-3)}$ onde $\mathcal{K}_C$ corresponde ao feixe canônico da curva C.

Com efeito, para concluir tais isomorfismos precisamos somente verificar que $\mathcal{M}^{\otimes(d-3)}$ e $\mathcal{L}^{\otimes(d-3)}$ tem grau $2g-2$ e tem dimensão das seções globais igual a g. Veja que isso é válido, desde de que aplicando a definição (26) sucessivamente para $\mathcal{M}$ e suas potências, temos que

$$\deg \mathcal{M}^{(\otimes i)} = \chi(\mathcal{M}) - \operatorname{rank}(\mathcal{M})\chi(\mathcal{O})$$

Com $1 \leq i \leq d-3$, como $\mathcal{M}$ é um feixe associado a um fibrado em retas tem-se que $\operatorname{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Então, em particular para $i = 1$, temos que

$$\deg \mathcal{M} = \chi(\mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O})$$

Além disso, temos a seguinte sequência exata associada ao feixe $\mathcal{M}$

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{M} \to \mathcal{Y} \to 0,$$

onde $\mathcal{Y}$ é o feixe arranha-céu associado a um conjunto de d pontos da curva C. Assim, utilizando o fato do caractere de Euler ser um invariante aditivo em sequências exatas,obtemos que

$$\deg \mathcal{M} = \chi(\mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O}) = \chi(\mathcal{Y}) = d.$$

Fazendo a mesma construção para o feixe $\mathcal{M}^{\otimes 2}$, temos de maneira análoga a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\otimes 2} \to \mathcal{Y} \to 0$$

então, utilizando os mesmos argumentos temos que

$$\chi(\mathcal{M}^{\otimes 2}) - \chi(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{Y}) = \chi(\mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O}) = \deg \mathcal{M} = d.$$

Fazendo isso sucessivamente até a potência $\otimes(d-3)$ otemos que

$$\chi(\mathcal{M}^{\otimes(d-3)}) - \chi(\mathcal{M}^{\otimes(d-4)}) = \chi(\mathcal{Y}) = d.$$

Assim, somando todas as relações obtidas com as sequências exatas, tem-se que

$$\deg(\mathcal{M}^{\otimes(d-3)}) = \chi(\mathcal{M}^{\otimes(d-3)}) - \chi(\mathcal{O}) = d.(d-3).$$

Por outro lado, veja que

$$2g-2 = 2\Big(\frac{(d-1)(d-2)}{2}\Big) - 2 = d^3 - 3d + 2 - 2 = d(d-3).$$

Obtemos então, que $\deg(\mathcal{M}^{\otimes(d-3)}) = 2g-2$. Por fim, note que pelo Teorema do Índice de Clifford, segue-se que

$$2(l(D)-1) \leq d$$

o que é equivalente a dizer que

$$2(h^0(\mathcal{L}^{\otimes(d-3)}) - 1) \leq 2g - 2$$

e daí, tem-se que $h^0(\mathcal{L}^{\otimes(d-3)}) \leq g$. Dessa maneira, temos que

$$0 \leq (h^0(\mathcal{K}_C \otimes \mathcal{L}^{\otimes(d-3)^*}) \leq 1$$

Daí, como sabemos que a dimensão é positiva segue que

$$h^0(\mathcal{K}_C \otimes \mathcal{L}^{\otimes(d-3)^*}) = 1$$

e daí temos que a dimensão das seções globais de $\mathcal{L}^{\otimes(d-3)}$ é igual a g.

De maneira, análoga provamos que $\mathcal{L}^{\otimes(d-3)}$ é isomorfo ao feixe canônico de C. Concluimos assim que $\mathcal{L}^{\otimes(d-3)} \simeq \mathcal{O}_C$, o que implica que

$$\mathcal{O}_C((d-3)p) \otimes \mathcal{O}_C(-(d-3)q) \simeq \mathcal{O}_C$$

Usando o lema (9), obtemos que $H^0(C, \mathcal{O}_C((d-3)p)) = 1$. O que implica que a única seção existente do feixe $\mathcal{O}_C((d-3)p))$ é a seção trivial, e então $\mathcal{O}_C((d-3)p) \otimes \mathcal{O}_C(-(d-3)q)$ não possui seções a não ser que $p = q$. Portanto, concluimos que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_C(1)$, como queriamos inicialmente. □

Lema 10. *Seja k um corpo. Qualquer curva plana suave $C \subset \mathbb{P}^2_k$ é projetivamente normal, isto é, para todo $n > 0$, o mapa $H^0(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(n)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(n))$ é sobrejetivo.*

Demonstração. Pela seguinte sequência exata longa associada

$$0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

para verificar a projetividade normal, precisamos apenas verificar que

$$H^1(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{J}_C(n)) = 0$$

para todo $n \geq 0$, por causa, da sequência de cohomologia associada. Digamos então que C possua grau d. Então,

$$\mathcal{J}_C(n) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(n-d).$$

Portanto, $H^1(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{J}_C(n)) = H^1(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(n-d)) = 0$, já que estamos sobre $\mathbb{P}^2$. □

Definição 29. Seja C uma curva suave, definimos o conjunto $\mathcal{G}^r_d(C)$ sendo aquele que parametriza os sistemas lineares de grau d e dimensão exatamente r em C:

$$\mathcal{G}^r_d(C) = \{g^r_d\text{'s} \ \ em\ C\}$$

Proposição 5. *Seja C uma curva de grau $d \geq 4$, suave e plana sobre k um corpo algebricamente fechado. Então, $\mathcal{G}^2_d(p : C \to \operatorname{Spec} k)$ é um isomorfismo para um ponto reduzido.*

Demonstração. Como o conjunto $\mathcal{G}^2_d(p)$ é o conjunto dos g^2_d's em C, com o espaço das seções globais de dimensão 3. Pela proposição (4), sabemos que existe um único g^2_d em C e daí $\mathcal{G}^2_d(p)$ é suportado em um único ponto.

Resta mostrar então que este ponto é reduzido. Para isso utilizaremos o a Proposição 4.1(III) de [1]. o espaço tangente será $0-$dimensional se o mapa multiplicativo

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(1)) \otimes H^0(C, \mathcal{K}_C \otimes \mathcal{O}_C(-1)) \to H^0(C, \mathcal{K}_C)$$

é sobrejetivo. Além disso, como sabemos que $\mathcal{K}_C \simeq \mathcal{O}_C(d-3)$, queremos então mostrar que

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(1)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(d-4)) \overset{\omega_0}{\twoheadrightarrow} H^0(C, \mathcal{O}_C(d-3))$$

é sobrejetivo. Com efeito, veja que se o mapa for sobrejetivo, então pelo Teorema dos Isomorfismos temos que

$$\dim(H^0(C, \mathcal{O}_C(1)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(d-4))) - \dim\ker\omega_0 = \dim(H^0(C, \mathcal{O}_C(d-3))$$

Daí, segue-se que

$$g = \dim(\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_C(1) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(d-4))) - \dim\ker\omega_0$$

Então,

$$g = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - \frac{(d-1).(d-2) - 2d + 4}{2}$$

$$g = \frac{d^2 - 2d - 3d + 6}{2} - \frac{d^2 - 2d - d + 2 - 2d + 4}{2} = 0$$

logo o espaço tangente será de fato, 0-dimensional. Para mostrar a sobrejetividade considere o seguinte quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-4)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3)) \arrow[d] \\
H^0(C, \mathcal{O}_C(1)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(d-4)) \arrow[r] & H^0(C, \mathcal{O}_C(d-3))
\end{tikzcd}$$

Sabemos que os dois mapas verticais são sobrejetivos pela projetividade normal de C, como demonstrado no lema (10). Além disso, o mapa horizontal do topo é sobrejetivo, desde de que todo polinômio de grau $d-3$ é uma combinação linear de produtos de polinômios de grau 1 e de grau $d-4$ em 3 variáveis. Portanto, o mapa inferior horizontal também é sobrejetivo como queríamos. □

Além disso, é importante notar que $\mathcal{G}^r_d$ denota um esquema (ou mais geralmente, um functor representável) que parametriza sistemas lineares g^r_d sobre uma família de curvas suaves de gênero g. Dessa forma, dado uma família de curvas $p : C \to S$, onde C é uma curva (ou uma família de curvas) sobre um parâmetro S e assim, podemos estudar variações dos sistemas lineares em famílias de curvas, generalizando o conceito de g^r_d.

3 Gonalidade

Definição 30. Seja C uma curva suave. Se existe um g^1_d sobre C tal que d seja mínimo então d é a gonalidade de C.

Utilizamos a notação $\operatorname{gon}(C)$ para indicar a gonalidade de uma curva suave C. Além disso, a definição de gonalidade de uma curva é equivalente a existir um recobrimento $f : C \to \mathbb{P}^1$ de grau mínimo igual a d. Suponha um g^1_d em C e nesse caso existe um feixe invertível $\mathcal{L}$ de grau d sobre C tal que $h^0(C, \mathcal{L}) \geq 2$. Defina então, $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ dada por $\phi(P) = (g(P), f(P))$ onde $f, g \in H^0(C, \mathcal{L})$ são independentes , então dado um g^1_d temos um morfismo de C em $\mathbb{P}^1$ o qual será de grau mínimo.

Teorema 7. *Seja C uma curva suave de gênero g, então tem-se que*

$$\operatorname{gon}(C) \leq \lfloor \frac{g+3}{2} \rfloor.$$

Demonstração. Ver [[6],Theorem A]. $\square$

Relembremos aqui que, uma curva C é **racional** se C é isomorfa à $\mathbb{P}^1$, que uma curva C' é **elíptica** se o gênero de C' é igual a 1 e que uma curva C'' é **hiperelíptica** se existe um recobrimento $f : C'' \to \mathbb{P}^1$ de grau mínimo 2 com gênero de C'' maior que 1.

Proposição 6. *C é uma curva racional se, e somente se,* $\operatorname{gon}(C) = 1$.

Demonstração. Suponha que C é uma curva racional, ou seja, existe um isomorfismo $C \to \mathbb{P}^1$ e como o gênero aritmético é definido como o polinômio de Hilbert de C, temos que o gênero é dado por

$$p_a(C) = (-1)^r(p_C(0) - 1).$$

Mas como C é isomorfo a $\mathbb{P}^1$ podemos olhar tal polinômio em relação a $\mathbb{P}^1$ e obtemos $p_a(\mathbb{P}^1) = 0$. Dessa maneira, temos que se C é racional então a curva possui gênero zero e usando o Teorema 7 segue que $\operatorname{gon}(C) \leq 1$ mas sendo a gonalidade um inteiro positivo temos $\operatorname{gon}(C) = 1$.

Agora, suponha que $\operatorname{gon}(C) = 1$, daí existe um morfismo $f : C \to \mathbb{P}^1$ de grau 1. Dessa forma, temos que f é um isomorfismo e assim temos que C é racional. $\square$

Proposição 7. *C é elíptica ou hiperlítica se, e somente se,* $\operatorname{gon}(C) = 2$.

Demonstração. Suponha que $\operatorname{gon}(C) = 2$, então existe um recobrimento $f : C \to \mathbb{P}^1$ de grau mínimo 2 com gênero de C maior ou igual a 1. Assim, temos que se $g = 1$ então por definição segue que C é uma curva elíptica e se $g \geq 2$ por definição temos que C é hiperlítica.

Suponha que C é elíptica, então por definição, gênero de C é igual a 1, assim pelo Teorema 7 tem-se que $\operatorname{gon}(C) = 1$ ou $\operatorname{gon}(C) = 2$, mas já vimos que pela Proposição 6 que a única opção válida é $\operatorname{gon}(C) = 2$. Agora seja C uma curva hiperlítica, então existe um recobrimento $f : C \to \mathbb{P}^1$ de grau mínimo 2 com gênero de C maior que 1, mas isso é equivalente a dizer que $\operatorname{gon}(C) = 2$. $\square$

3.1 Teorema de Reider e Aplicações

Nessa seção abordaremos alguns resultados de [10]. Começaremos introduzindo o conceito de Instabilidade de Bogomolov e em sequência utilizaremos esse conceito para provar o Teorema de Reider e, por fim abordaremos algumas consquências do próprio.

Definição 31. Seja E um fibrado de posto 2 sobre uma superfície suave X. Dizemos que E é *instável segundo Bogomolov* se existe um subesquema finito $Z \subset X$ (possilvemente vazio), mais A e B dois fibrados lineares em X na seguinte sequência exata

$$0 \to A \to E \to B \otimes I_Z \to 0, \tag{17}$$

A última condição da defnição acima é equivalente a $(A-B)^2 > 0$ e $(A-B).H > 0$ para todo divisor amplo H. É sugestivo então pensar"o fibrado A é mais positivo que o fibrado B".

Teorema 8 (Teorema da Instabilidade de Bogomolov)**.** *Seja E um fibrado vetorial de posto 2 em uma superfície projetiva suave X. Se*

$$(c_1(E)^2 - 4c_2(E)) > 0, \tag{18}$$

então, E é insatável por Bogolomov.

Demonstração. Ver [10, Teorema 6.20] □

Definição 32. Seja A um anel comutativo e $s : A^r \to A$ um mapa $A-$linear. Seu Complexo de Koszul (K_s) é

$$\wedge^r A^r \to \wedge^{r-1} A^r \to \cdots \to \wedge^1 A^r \to \wedge^0 A^r \simeq A,$$

para onde os mapas enviam

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \mapsto \sum_1^k (-1)^{i+1} s(\alpha_i)\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_i^* \cdots \wedge \alpha_k,$$

onde * indica o termo que foi omitido.

Lema 11. *Seja E um fibrado de posto 2 em uma sequência exata como em (17), então as classes de Chern de E são dadas por*

$$c_1(E) = c_1(A) + c_1(B) \text{ e } c_2(E) = c_1(A).c_1(B) + \text{length}(Z)$$

.

Demonstração. Com efeito, torcendo a sequência exata em (17) por A^*, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_X \to A^* \otimes E \to (A^* \otimes B) \otimes I_Z \to 0.$$

Lembre-se de que isto vem de um complexo de Koszul

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & A^* \otimes E \arrow[r] \arrow[d] & \det(A^* \otimes E) \\
& & \det(A^* \otimes E) \otimes I_Z \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& & 0 &
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Então, $\det(A^* \otimes E) \simeq A^* \otimes B$ o que implica em $(A^*)^{\otimes 2} \otimes \det(E) \simeq A^* \otimes B$ e assim $\det(E) \simeq A \otimes B$, então $c_1(E) = c_1(A) + c_1(B)$. Agora, por um lado, como posto de E é dois, tem-se que $c_2(A^* \otimes E)$ é igual ao comprimento de anulamento da seção de $\mathcal{O}_X \to E$, ou seja, length Z. Por outro lado, pelo princípio da cisão, tem-se que

$$\begin{aligned}
c_2(A^* \otimes E) &= c_2((A^* \otimes e_1) \oplus (A^* \otimes e_2)) \\
&= c_1(A^* \otimes e_1).c_1(A^* \otimes e_2) \\
&= c_1(A^*)^2 + c_1(E).c_1(A^*) + c_2(E)
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
c_2(E) &= \text{length}(Z) - c_1(A^*)^2 - c_1(E).c_1(A^*) \\
&= \text{length}(Z) - c_1(A^*)^2 - (c_1(A) + c_1(B)).c_1(A^*) \\
&= \text{length}(Z) - c_1(A)^2 + c_1(A)^2 + c_1(B).c_1(A) \\
&= \text{length}(Z) + c_1(B).c_1(A).
\end{aligned}$$

□

Definição 33. Dizemos que um fibrado em retas L em uma variedade projetiva é nef se tiver grau não negativo em todas as curvas irredutíveis da variedade, isto é, para qualquer curva irredutível C, tem-se que $L.C \geq 0$.

Teorema 9 (Teorema do índice de Hodge)**.** *Seja H um divisor amplo em uma superfície X, e suponha que D é um disivor, tal que D não é equivalente ao divisor nulo, com $D.H = 0$. Então tem-se que $D^2 < 0$.*

Demonstração. Ver[[5], Teorema 1.9]. □

Teorema 10 (Teorema de Reider)**.** *Seja X uma superfície projetiva e suave, L um fibrado em retas nef em X.*

- *Assuma que $L^2 \geq 5$ e que a série adjunta $|K_X + L|$ tenha um ponto base $x \in X$. Então, existe um divisor efetivo $D \subset X$ passando por x tal que*

$$D.L = 0 \text{ e } D^2 = -1 \text{ ou } D.L = 1 \text{ e } D^2 = 0.$$

- *Asssuma que $L^2 \geq 10$ e Z é um subesquema de comprimento 2 que falha em ser separado por $|K_X + L|$ (no sentido da Definição 23), então existe algum divisor efetivo $D \subset X$ passando por Z tal que*

$$D.L = 0 \ \textit{e} \ D^2 = -1 \ \textit{ou} \ -2; \ \textit{ou}$$

$$D.L = 1 \ \textit{e} \ D^2 = 0 \ \textit{ou} \ -1; \ \textit{ou}$$

$$D.L = 2 \ \textit{e} \ D^2 = 0.$$

Demonstração. Para o primeiro item do Teorema, fixe o ponto $x \in X$, e suponha que L é um fibrado em retas nef em X, com $L^2 \geq 5$ tal que $O_X(K_X + L)$ tem ponto base x. Então, temos que existe um fibrado vetorial E de posto 2 (ver o capítulo 3 de [10]) e a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_X \to E \to L \otimes I_x \to 0. \tag{20}$$

Note que,

$$c_1(E) = c_1(\mathcal{O}_X) + c_1(L) = 0 + [L] = [L]$$

e

$$c_2(E) = c_1(\mathcal{O}_X).c_1(L) + \text{length}(I_x) = 1$$

e portanto, segue-se que

$$c_1(E)^2 - 4C_2(E) = L^2 - 4.1 = L^2 - 4 > 0.$$

Daí, pelo Teorema 8 temos a seguinte sequência exata,

$$0 \to A \to E \to B \otimes I_Z \to 0 \tag{21}$$

onde Z é um subesquema finito de X com A, B fibrados em retas. E sendo válido que

$$(2A - L)^2 > 0 \text{ e } (2A - L).H > 0, \forall \text{ divisor amplo } H. \tag{22}$$

Agora, o método será analisar (20) e (21). Tomando determinantes, encontramos em primeiro lugar que $A \otimes B = L$. Daí, tensorizando pelos duais obtemos que $A \otimes L^* = B^*$, e consquentemente $A \otimes B^* = 2A \otimes L^*$. Dessa forma, $2AH > LH \geq 0$ e assim, tomando o dual temos que $A^*H < 0$ e então $H^0(A^*) = 0$ o que implica por definição que $\text{Hom}(A, \mathcal{O}_X) = 0$.
Afirmação: O morfismo $\alpha : A \to L \otimes I_x$ definido pela composição

$$A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow L \otimes I_x$$

é não nulo. Com efeito, por (20) e (21) é suficiente mostrar que $\text{Hom}(A, \mathcal{O}_X)$ é nulo, pois caso existisse um morfismo $\alpha \in \text{Hom}(A, \mathcal{O}_X)$ diferente do nulo, teríamos o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B \otimes I_Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\phi"] & E \arrow[r, "\psi"] & L \otimes I_x \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{23}
$$

e nesse caso pela sequência exata inferior, temos que $\ker \psi = \operatorname{Im} \phi$ e daí temos que α seria nulo. Mas veja que $\alpha \neq 0$ já que A não é mapeado para $\mathcal{O}_X$, então por definição, $H^0(\mathcal{O}_X(L \otimes A^*) \otimes I_x) \neq 0$ daí existe alguma seção global de $\mathcal{O}_X(L \otimes A)$ que é nula em x. Defina, $L \otimes A^* = \mathcal{O}_X(D)$ um divisor efetivo tal que $x \in D$.

Resta então mostrar que D satisfaz as condições númericas da primeira parte do Teorema. Para isso, primeiro veja que

$$(L \otimes \mathcal{O}_X(2D^*)).L > 0 \tag{24}$$

Com efeito, veja que como

$$A = L \otimes \mathcal{O}_X(D^*) \Rightarrow A \otimes L^* = \mathcal{O}_X(D^*) \Rightarrow 2A \otimes L^* = \mathcal{O}_X(D^*) \otimes A$$

o que impica em $2A \otimes L^* = L \otimes 2\mathcal{O}_X(D^*)$.

Como L é nef, por (22) e pela relação acima, tem-se que em qualquer caso

$$(L \otimes \mathcal{O}_X(2D^*)).L \geq 0.$$

Mas se $(L \otimes \mathcal{O}_X(2D^*)).L = 0$, então pelo teorema 9 teríamos que $(L \otimes \mathcal{O}_X(2D^*))^2 < 0$ o que é uma contradição com (22). Agora, veja que

$$(L^2).(D^2) \leq (L.D)^2 \tag{25}$$

e

$$(L \otimes \mathcal{O}(D^*)).D \leq 1. \tag{26}$$

De fato, temos que (25) é consequência direta de 9 e em relação a (26), é computado através de (21) e para isso, temos que

$$c_2(E) = (L \otimes \mathcal{O}_X(D^*)).D + \operatorname{length} Z.$$

Mas, como já vimos $c_2(E) = 1$ e também, por definição,$\operatorname{length} Z \geq 0$ e daí segue que

$$(L \otimes \mathcal{O}_X(D^*)).D \leq 1,$$

finalmente, afirmamos que

$$2D^2 < L.D. \tag{27}$$

Aqui argumentaremos por casos:

Caso 1: Se $D^2 > 0$, então $L.D \neq 0$, pois como $D \neq 0$ então temos que $L.D \neq 0$, já que do contrário pelo teorema 9 teriamos que $D^2 < 0$ o que é uma contradição com a hipótese. Além disso, veja que utilizando (22) e (25) respectivamente, obtemos que

$$2(L.D)(D^2) < (L^2)(D^2) \leq (L.D)^2$$

e assim, (27) é válida.
Caso 2 Se $D^2 = 0$, então pelo teorema do índice de Hodge temos que $(L.D) \neq 0$ e portanto segue-se que $L.D > 0$ e novamente (27) é verificada.
Caso 3 Se $D^2 < 0$, então (27) é trivial uma vez que $L.D \geq 0$. Por fim, veja que de (26) e (27), encontramos que

$$L.D - 1 \leq D^2 \leq \frac{L.D}{2} \tag{28}$$

Mas isso só é possível se

$$L.D = 0 \text{ e } D^2 = -1 \text{ ou } L.D = 1 \text{ e } D^2 = 0.$$

o que completa a prova da primeira parte do teorema.

Para a segunda parte do teorema, fixe um subesquema Z com length $Z = 2$ em X, $x \in X$, e suponha que L é um fibrado em retas nef em X, com $L^2 \geq 10$ tal que Z falha em ser separado por $\mathcal{O}_X(K_x + K)$. Então, de maneira análoga, ao caso anterior, existe um fibrado vetorial E de posto 2 e a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_X \to E \to L \otimes I_Z \to O \tag{29}$$

Assim, note que

$$c_1(E) = c_1(\mathcal{O}_X) + c_1(L) = 0 + [L] = [L]$$

e

$$c_2(E) = c_1(\mathcal{O}_X).c_1(L) + \text{length}\, Z = 2$$

e portanto, tem-se que

$$c_1(E)^2 - 4c_2(E) = L^2 - 4.2 = L^2 - 8 > 0$$

Dessa forma, pelo Teorema 8 existe a seguinte sequência exata,

$$0 \to A \to E \to B \otimes I_Y \to 0 \tag{30}$$

onde Y é um subesquema finito de X e A, B fibrados em retas. De maneira semelhante, ao caso anterior o método será analisar (29) e (30).Tomando determinantes, encontramos que $A \otimes L^* = B^*$, e assim, $A \otimes B^* = 2A \otimes L^*$. Além disso, da definição de cone positivo, tem-se que

$$(2A - L) > 2 \text{ e } (2A - L).H > 0, \forall \text{ divisor amplo } H \tag{31}$$

Dessa forma, $2AH > LH \geq 0$ e dessa forma, tomando o dual de A obtemos que $A^*H < 0$ e assim $H^0(A^*) = 0$ o que implica por definição que $\text{Hom}(A, \mathcal{O}_X) = 0$.

Afirmação: O morfismo $\beta : A \to L \otimes I_Z$ definido pela composição

$$A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow L \otimes I_Z$$

é não nulo. Com efeito, pelas sequências exatas (*) e (**) é suficiente mostrar que $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_X)$ é nulo, já que se existisse um morfismo $\beta \in \mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_X)$ não nulo teriamos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "id"] & L \otimes I_Y \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\phi'"] & E \arrow[r, "\psi'"] & L \otimes I_Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{32}$$

E pela exatidão da sequência inferior, temos que $\ker \psi' = \mathrm{Im}\, \phi'$ e dessa forma, $\beta = 0$. Mas isso não acontece, já que A não é mapeado para $\mathcal{O}_X$ e dessa forma, por definição, $H^0(\mathcal{O}_X(L \otimes A^*) \otimes I_Z) \neq 0$ e dessa forma existe alguma seção global em $\mathcal{O}_X(L \otimes A)$ que não se anula no subesquema Z. Defina, $D = L \otimes A^*$ como divisor efetivo tal que D passe por Z.

Resta então verificar que D satisfaz as condições númericas do teorema. Para isso, inicialmente veja que como no caso anterior $(L \otimes 2D^*).L > 0$ e $(L^2).(D^2) \leq (L.D)^2$. Agora, veja que

$$(L \otimes D^*).D \geq 2. \tag{33}$$

De fato, como $A = L \otimes D^*$ e $B = L \otimes A^* = D$, temos que

$$\begin{aligned} 2 = c_2(E) &= A.B + \mathrm{length}\, Y \\ &= (L \otimes D^*).(D) + \mathrm{length}\, Y. \end{aligned}$$

Como por definição, o comprimento do subesquema Y é maior ou igual a 0, segue que

$$(L \otimes D^*).D \leq 2.$$

Por fim, de forma análoga ao caso anterior, tem-se que $2D^2 < L.D$. Dessa forma, obtemos que de maneira semelhante ao caso (1)

$$L.D - 2 \leq D^2 < \frac{L.D}{2}.$$

Mas isso, só é possível se

$$D.L = 0 \text{ e } D^2 = -1 \text{ ou } -2; \text{ ou}$$

$$D.L = 1 \text{ e } D^2 = 0 \text{ ou } -1; \text{ ou}$$

$$D.L = 2 \text{ e } D^2 = 0.$$

e com isso finalizamos o teorema. □

Esse teorema, é de suma importância para teoria visto que atráves dele temos condições para classificar fibrados como globalmente gerados ou amplos. Através do seguinte Corolário.

Corolário 1. *Seja L amplo em X com $L^2 \geq 5$ e $L.C \geq 2$ para todas curvas irredutíveis C em X, então $\mathcal{O}_X(K_X + L)$ é globalmente gerado. Se $L^2 \geq 10$ e $L.C \geq 3$ para todas curvas irredutíveis C em X, então $\mathcal{O}_X(K_X + L)$ é muito amplo.*

Para $n = 2$ temos que a conjectura de Fujita é válida.

Corolário 2 (Conjectura de Fujita)**.** *Seja A um fibrado amplo em X. Então $|K_X + 3A|$ é globalmente gerado e $|K_X + 4A|$ é amplo.*

Demonstração. Tome $L = 3A$. Então temos que $L^2 = 9A^2 \geq 9$ e $L.C = 3A.C \geq 3$ para qualquer curva irredutível C em X já que, por hipótese A é um fibrado amplo. Então, pelo Corolário 1 temos que $\mathcal{O}_X(K_X + 3A)$ é globalmente gerado. Para o outro caso tome $L = 4A$, e então $L^2 = 16A^2 \geq 10$ e $L.C = 4.A.C \geq 4$ para toda curva irredutível $C \subset X$. Novamente, pelo Corolário 1 temos que $\mathcal{O}_X(K_X + 4A)$ é amplo. □

4 Gonalidade de Curvas de Interseção Completa

Inicialmente, começaremos essa seção enunciando teoremas chave da Teoria de Interseção com o intuito de deixar o texto autocontido, os quais irão nos auxiliar na prova do Teorema principal desta seção.

Teorema 11 (Critério de Nakai-Moishezon)**.** *Seja D um divisor de Cartier em um esquema X que é próprio sobre um corpo algebricamente fechado k. Então D é amplo em X se, e somente se, para todo subesquema integral fechado Y de X (incluindo o caso que $Y = X$ se X é integral), nós temos que $D^r.Y > 0$ onde $r = \dim Y$.*

Demonstração. Ver [Teorema 5.1 do Apêndice A][5]. □

Teorema 12 (Teorema de Miyaoka)**.** *Seja F um fibrado de posto 2 em uma variedade algébrica de dimensão 3. Fixe D globalmente gerado e D' amplo. Se*

$$(c_1(F) - 4c_2(F)) \cdot D' > 0,$$

então existe um subfeixe L de F de posto 1 tal que

$$(2c_1(L) - c_1(F)) \cdot D' \cdot D > 0.$$

Demonstração. Ver [8]. □

Lema 12. *Seja X superfície suave, $C \subset X$ curva suave, T um fibrado de posto t sobre X e A um fibrado em retas sobre C de grau d tal que existe uma sobrejeção $T|_C \to A$. Se $\mathcal{A}$ é A visto como feixe de torção sobre X, então*

$$T \to T|_C \to \mathcal{A} \to 0$$

e para $F := \ker(T \xrightarrow{\nu} \mathcal{A})$ *temos a sequência exata*

$$0 \to F \to T \to \mathcal{A} \to 0 \tag{34}$$

onde $\mathcal{F}$ *é um fibrado localmente livre de posto* t *sobre* X *tal que*

$$c_1(F) = c_1(T) - [C] \text{ e } c_2(F) = c_2(T) - c_1(T)[C] + d. \tag{35}$$

O fibrado F *é chamado transformação elementar de* T *correspondente a* $T \to \mathcal{A}$*.*

Demonstração. Considere a sequência exata (34) nos talos para $y \in C$

$$0 \to F_y \to T_y \to \mathcal{A}_y \to 0$$

e tensorizando por $\mathcal{O}_y$ e tomando o funtor Tor_1 na sequência exata acima obtemos a seguinte sequência

$$\mathrm{Tor}_1(T_y, \mathcal{O}_y) \to \mathrm{Tor}_1(\mathcal{A}_y, \mathcal{O}_y) \to F_y \otimes \mathcal{O}_y \to T_y \otimes \mathcal{O}_y \to \mathcal{A}_y \otimes \mathcal{O}_y \to 0.$$

Desde que o feixe T_y é livre de posto t segue que $\mathrm{Tor}_1(T_y, \mathcal{O}_y) = 0$ e como $\mathcal{O}_{Y,y}$ é um anel local em y temos a seguinte resolução livre onde $d = \deg f$

$$0 \to \mathcal{O}_{Y,y}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{A}_y \to 0.$$

Novamente tensorizando por $\mathcal{O}_y$ e aplicando o funtor Tor_1 temos

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(\mathcal{A}_y, \mathcal{O}_y) \to \mathcal{O}_y(-d) \otimes \mathcal{O}_y \xrightarrow{f \otimes 1} \mathcal{O}_y \otimes \mathcal{O}_y \to \mathcal{A}_y \otimes \mathcal{O}_y \to 0,$$

como $\mathcal{O}_y \otimes \mathcal{O}_y \simeq \mathcal{O}_y$ e $\mathcal{A}_y \otimes \mathcal{O}_y = \mathcal{A}_y$. Concluímos que $\mathrm{Tor}_1(\mathcal{A}_y, \mathcal{O}_y) \simeq \mathcal{O}_y$ e desde de que T_y é livre e de posto t, podemos reescreve-lo como $(\mathcal{O}_Y)^2_y$ e retomando a primeira sequência com o funtor Tor_1

$$0 \to \mathcal{O}_y \to F_y \otimes \mathcal{O}_y \to (\mathcal{O}_Y)^t_y \otimes \mathcal{O}_y \to \mathcal{A}_y \to 0.$$

Além disso, como $\mathcal{A}_y$ pode ser visto como um conjunto de retas, temos que $\dim \mathcal{A}_y = 1$. Então, segue-se que

$$1 - \dim(F \otimes \mathcal{O}_y) + t - 1 = 0 \Longleftrightarrow \dim(F \otimes \mathcal{O}_y) = t + 1 - 1 = t$$

e portanto, F é um fibrado de posto t sobre X. Para o cálculo de suas classes de Chern relembremos que F é definido de modo que

$$0 \to F \to T \to \mathcal{A} \to 0.$$

Desde que $c_1(F) = c_1(\det \mathcal{F})$ podemos tomar a segunda potência exterior $\wedge^2$ na sequência exata acima obtemos

$$\det F = (\det T)(-C) \Rightarrow c_1(\mathcal{F}) = c_1(T) - c_1(\mathcal{A}) = c_1(T) - [C].$$

No cálculo da segunda classe de Chern usamos a relação $c_2(T) = c_1(F)c_1(\mathcal{A}) + c_2(F) + c_2(\mathcal{A})$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_2(\mathcal{F}) = & \quad c_2(T) - c_1(F)c_1(\mathcal{A}) - c_2(\mathcal{A}) \\ = & \quad c_2(T) - c_1(T)[C] + [C]^2 - c_2(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

□

Teorema 13 (Gonalidade de curvas interseção completa)**.** *Seja $C \subset \mathbb{P}^r$ uma interseção completa suave de hipersuperfícies de grau $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{r-1}$. Seja A um fibrado em retas em C livre de ponto base, de grau d, com $h^0(C, A) \geq 2$. Então,* $\operatorname{gon}(C) \geq (a_1 - 1).a_2.\cdots.a_{r-1}$.

Demonstração. Defina $\gamma = a_3.a_4.\cdots.a_{r-1}$ e seja $X \supset C$ uma interseção completa geral do tipo $(a_3, \cdots, a_{r-1})$. Caso $r = 3$, basta tomar $X = \mathbb{P}^3$ e $\gamma = 1$. Agora, seja $f : Y \to X$ a explosão de X ao longo da curva C, $E \subset Y$ o divisor excepcional e $\pi : E \to C$ o mapa natural. Defina $\mathcal{A} = \pi^* A$, onde A é um g^1_d sobre C em X. Note que, $\mathcal{A}$ também é globalmente gerado, pois A também é por hipótese e como é o pull-back vindo de C podemos encontrar um pencil livre de ponto das seções $\mathcal{O}_Y^2 \twoheadrightarrow \mathcal{A}$, seja $\mathcal{A} = \mathcal{O}(B_E)$, onde B_E é um divisor efetivo, daí temos a seguinte sequência exata em Y,

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y \to \mathcal{A} \to 0$$

onde $\mathcal{F} = \ker(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y \to \mathcal{A})$.

Etapa 1: Pelo Lema 34 com $T = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y$ segue que $\mathcal{F}$ é um fibrado de posto 2 satisfazendo $c_1(\mathcal{F}) = -[E]$ e para o cálculo de $c_2(\mathcal{F})$ veja que

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-E) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_E \to 0$$

o que implica

$$c_2(\mathcal{O}_Y) = c_2(\mathcal{O}_Y(-E)) + c_2(\mathcal{O}_E) + c_1(\mathcal{O}_Y(-E)).c_1(\mathcal{O}_E).$$

Como $\mathcal{O}_Y(-E)$ tem posto 1 temos $c_2(\mathcal{O}_Y(-E)) = 0$ e $c_2(\mathcal{O}_Y) = 0$, assim

$$c_2(\mathcal{O}_E) = -c_1(\mathcal{O}_Y(-E)).c_1(\mathcal{O}_E) = -[-E].[E] = [E]^2.$$

Realizando um push foward na seguinte sequência de ideais em X

$$0 \to \mathcal{O}_C \to A \to \mathcal{O}_{B_A}(A) \to 0$$

obtemos a seguinte sequência de ideais em Y

$$0 \to \mathcal{O}_E \to \mathcal{A} \to \mathcal{O}_{B_A}(\mathcal{A}) \to 0.$$

Daí, por definição do polinômio de Chern, segue-se que

$$c_t(\mathcal{A}) = (1 + Et + E^2t^2 + \cdots).(1 - B_At^2 + \cdots) = 1 + Et + (E^2 - B_A)t^2 + \cdots$$

donde segue que $c_2(\mathcal{A}) = E^2 - B_A$. Então, retomando a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_Y^2 \to \mathcal{A} \to 0$$

temos que

$$\begin{aligned} c_2(\mathcal{F}) &= -c_1(\mathcal{A}).c_1(\mathcal{F}) - c_2(\mathcal{A}) - c_2(\mathcal{O}_Y^2) \\ &= -[E].[-E] - [E^2 - B_A] - 0 \\ &= [B_A]. \end{aligned}$$

Etapa 2: Vamos aplicar o teorema de instabilidade de Bogomolov generalizado para $\mathcal{F}$, isto é, aplicar o teorema de Miyaoka. Para isso, seja H o pullback para Y de uma seção de um hiperplano em X. Para $0 \leq \epsilon \in \mathbb{Q}$ suficientemente pequeno, defina

$$D_\epsilon = (a_2 + \epsilon)H - E$$

e $D = D_0 = a_2H - E$. Nossa estratégia consistirá em usar D e D_ϵ no Teorema de Miyaoka.

Afirmação: D é globalmente gerado.

Com efeito, veja que D corresponde a uma hipersfuperfície de grau a_2 em X contendo C, em outras palavras temos que $\mathcal{O}_Y(a_2H - E) = f^*\mathcal{I}_C(a_2)$, no qual $\mathcal{I}_C$ é o feixe de ideais de C em X, dessa maneira basta mostrar que $\mathcal{I}_C(a_2)$ é globalmente gerado, temos a seguinte resolução abaixo (Complexo de Koszul):

$$0 \to \mathcal{O}_X(-a_1 - a_2) \to \mathcal{O}_X(-a_1) \oplus \mathcal{O}_X(-a_2) \to \mathcal{I}_C \to 0$$

torcendo a resolução acima por $\mathcal{O}_X(a_2)$ temos que $\mathcal{I}_C(a_2)$ é o quociente de um feixe livre, e em particular é gerado por suas seções globais.

Afirmação: D_ϵ é amplo para $\epsilon > 0$.

A prova da afirmação acima será feita utilizando o teorema de Nakai-Moishezon e para isso é suficiente verificar que $D_\epsilon^{\dim(V)}.V > 0$, para todo V subsequema fechado de Y. Podemos escolher, sem perda de generalidade, um representante efetivo $S \in |D|$. Como S é uma transformada estrita de uma interseção completa do tipo $(a_2, \cdots, a_{r-1})$ contendo C, e visto que $D = a_2H - E$ segue-se que

$$D_\epsilon = (a_2 + \epsilon)H - E = a_2H - E + \epsilon H = D + \epsilon H = S + \epsilon H,$$

onde a última passagem é verdadeira, pois S é linearmente equivalente a D. Seja $C' \subset Y$ uma curva irredutível, então temos dois casos:

Caso 1: Se $C' \nsubseteq E$, então podemos escolher uma seção de um hiperplano em X que intersecta a imagem de C' em X fora de E. Então, $\epsilon H \cdot C' > 0$ e como $|D|$ é globalmente gerado podemos escolher $S \nsupseteq C'$, o que implica $S \cdot C' \geq 0$ onde o caso que a interseção é nula acontece quando S e C' não se intersectarem e é maior que zero do contrário, pois

$$C' \cdot S = C' \cdot D = a_2 \cdot C' \cdot H - E \cdot C' > 0$$

já que os pontos da interseção aparecem em ambos os termos e $a_2 > 1$, e assim, temos que $D_\epsilon \cdot C' > 0$.

Caso 2: Se $C' \subseteq E$, então podemos escolher S de modo que não está contido em C' já que $|D|$ é globalmente gerado. Daí, caso $S.C' > 0$ não há o que ser feito, caso $S.C' = 0$, então C' precisa intersectar cada fibra de E (como superfície regrada). Nesse caso, escolha uma seção de um hiperplano em X intersectando C' transversalemente, então o pull-back será a união de fibras e daí temos que $\epsilon \cdot H.C' > 0$ e nesse caso também temos que $D_\epsilon.C' > 0$.

Verifiquemos agora que $D_\epsilon^3 > 0$, para isso veja que

$$\begin{aligned} D_\epsilon^3 &= ((a_2+\epsilon)H - E)^3 \\ &= (a_2+\epsilon)^3 H^3 - 3.(a_2+\epsilon)^2 H^2 E + 3(a_2+\epsilon) H E^2 - E^3, \end{aligned}$$

onde $H^3 = 1, H^2E = 0, HE^2 = -d, E^3 = -4d - 2g + 2$, e assim

$$\begin{aligned} D_\epsilon^3 &= (a_2+\epsilon)^3 + 3.(a_2+\epsilon).(-d) - (-4d - 2g + 2) \\ &= a_2^3 - 3a_2 d + 4d + 2g - 2 + \epsilon(3a_2^2 + 3a_2\epsilon + \epsilon^2 - 3da_2) \\ &= a_2^3 - 3a_2 d + 4d + 2g - 2 + \epsilon.k \end{aligned}$$

onde $k = 3a_2^2 + 3a_2\epsilon + \epsilon^2 - 3da_2$. Além disso, supondo que o grau de C é igual a d e utilizando o fato que

$$g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{d^2 - 3d + 2}{2}.$$

Com isso observe que, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $4d + 2g - 2 > a_2^3 - 3a_2 d$ tendo em vista que

$$-a_2^3 + 3a_2 d > -4d - 2g + 2 \geq -4d - d^2 + 3d + 2 - 2 = -d^2 - d$$

e a desigualdade acima é válida, visto que o lado direito é sempre negativo e o lado direito é sempre positivo já que $3a_2 d > -a_2^3$. Assim, a prova se resume a mostrar que $4d + 2g - 2$ é positivo, e para isso veja que

$$4d + 2g - 2 > 0 \Longleftrightarrow d > \frac{1-g}{2},$$

mas como $\frac{1-g}{2} > \frac{2}{4} + \frac{(-d^2+3d-2)}{4} = \frac{-d^2+3d}{4}$, segue-se que

$$d > \frac{1-g}{2} > \frac{-d^2+3d}{4} \Longleftrightarrow -4d - d^2 + 3d < 0 \Longleftrightarrow -d^2 - d < 0,$$

e então temos que de fato $4d + 2g - 2 > 0$, com isso concluimos que $D_\epsilon^3 > 0$.

Por fim, precisamos verificar que $D_\epsilon^2.V > 0$ para toda V superfície em Y. Com efeito,

$$\begin{aligned} D_\epsilon^2.V &= ((a_2+\epsilon)H - E)^2.V \\ &= ((a_2+\epsilon)^2 H^2 - 2(a_2+\epsilon)H.E + E^2).V \end{aligned}$$

Além disso, o Teorema do Hiperplano de Lefschetz implica que o Pic de uma Interseção Completa é isomorfo ao do $\mathbb{P}^n$ que é $\mathbb{Z}$ e assim, em particular temos que

$$\mathrm{Pic}(Y) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

e isso significa que podemos escrever $V = tH + uE$ com $t, u \in \mathbb{Z}$ satisfazendo sem perda de generalidade $t \leq u$ e assim temos as seguintes possibilidades: $t > 0$ e $u > 0$ ou $t < 0$ e $u < 0$ ou $t < 0$ e $u \geq 0$.

$$\begin{aligned} D_\epsilon^2.V &= ((a_2+\epsilon)^2 H^2 - 2(a_2+\epsilon)H.E + E^2).(tH + uE) \\ &= (a_2+\epsilon)^2.t + 2ud(a_2+\epsilon) - dt + u.(-4d - 2g + 2) \\ &= t.((a_2+\epsilon)^2 - d) + u[2d(a_2+\epsilon) - 4d - 2g + 2]. \end{aligned}$$

Assim, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que o caso $t > 0$ e $u > 0$ é inválido, já que por construção D_ϵ é um contra-exemplo. Além disso, os casos $t < 0$ e $u < 0$ ou $t < 0$ e $u = 0$ são satisfeitos, já que os termos multiplicados por t e u são negativos para todo d. Resta então, analisar o caso $t < 0$ e $u > 0$ Relembrando que,

$$-2g \geq -(d-1)(d-2) = -d^2 + 3d - 2$$

e assim,

$$\begin{aligned} D_\epsilon^2.V &\geq t((a_2+\epsilon)^2 - d) + u[2d(a_2+\epsilon) - 4d - d^2 + 3d - 2 + 2] \\ &\geq t(a_2^2 + 2\epsilon a_2 + \epsilon^2 - d) + u(2a_2 d + 2d\epsilon - d - d^2) \\ &> t.(a_2^2 + 2\epsilon a_2 + \epsilon^2 - d) + t(2a_2 d + 2d\epsilon - d - d^2) \\ &> t.(a_2^2 + 2\epsilon a_2 + \epsilon^2 - 2d + 2a_2 d + 2d\epsilon - d^2). \end{aligned}$$

Assim, temos que também nesse caso, $D_\epsilon^2.V > 0$ e dessa forma, concluimos que $D_\epsilon^2.V > 0$ para toda V superfície em Y. Esses últimos fatos mostraram que

$$D_\epsilon^2.V > 0, D_\epsilon.C > 0, D_\epsilon^3 > 0.$$

Aplicando o Teorema de Nakai-Moinshezon temos que D_ϵ é um divisor amplo em Y. Como D e D_ϵ são, respectivamente, globalmente gerado e amplo, resta mostrar que

$$(c_1(\mathcal{F})^2 - 4c_2(\mathcal{F})).D' > 0.$$

Para isso veja que, pelo passo 1 e pela definição do D_ϵ tem-se

$$\begin{aligned} (c_1(\mathcal{F})^2 - 4c_2(\mathcal{F})).D' &= ((-E)^2 - 4B_A)((a_2+\epsilon)H - E) \\ &= (E^2 - 4B_A).(a_2 H - E + \epsilon H) \\ &= (E^2 - 4B_A).(D + \epsilon H) \\ &= (E^2 - 4B_A).(S + \epsilon H) \\ &= E^2 S + E^2 \epsilon H - 4B_A S - 4B_A \epsilon H. \end{aligned}$$

Note que, podemos escolher H para evitar finitas fibras de E de modo que $B_A \cdot H = 0, S$ intersecta E em uma seção logo $B_A \cdot S = d$, $E^2H = -d$ então resta calcular $E^2 \cdot S$ para isso veja que

$$E^2 \cdot S = E^2 \cdot (a_2H - E) = a_2E^2.H - E^3 = -a_2d - E^3,$$

e já vimos que $E^3 = 4d + 2g - 2$, então $E^3 = -\deg \mathcal{N}_{C/X}$. Daí, considere a seguinte sequência exata de fibrados vetoriais tangentes

$$0 \to \mathcal{T}_{C/X} \to \mathcal{T}_{X/\mathbb{P}^r} \to \mathcal{T}_{X/\mathbb{P}^r|C} \to 0.$$

que dualizando se torna

$$0 \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^r|C} \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^r} \to \mathcal{N}_{C/X} \to 0$$

e sendo C uma interseção completa em X segue que

$$\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^r|C} = \bigoplus_{i=3}^{i=r-1} \mathcal{O}_C(a_i) \text{ e } \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^r} = \bigoplus_{i=1}^{i=r-1} \mathcal{O}_C(a_i).$$

Assim, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \bigoplus_{i=3}^{i=r-1} \mathcal{O}_C(a_i) \to \bigoplus_{i=1}^{i=r-1} \mathcal{O}_C(a_i) \to \mathcal{N}_{C/X} \to 0,$$

então, $\det \mathcal{N}_{C/X} = \mathcal{O}_C(a_1 + a_2)$, donde segue que

$$\deg \mathcal{N}_{C/X} = (a_1 + a_2). \deg \mathcal{O}_C = (a_1 + a_2).d = (a_1 + a_2).a_1a_2\gamma = a_1^2a_2\gamma + a_1a_2^2\gamma.$$

Dessa forma,

$$E^3 = -(a_1^2a_2\gamma + a_1a_2^2\gamma) = -a_1^2a_2\gamma - a_1a_2^2\gamma,$$

e assim

$$E^2.S = -a_1a_2^2\gamma + a_1^2a_2\gamma + a_1a_2^2\gamma = a_1^2a_2\gamma.$$

Daí, substituindo os valores encontrados temos que

$$(c_1(\mathcal{F})^2 - 4c_2(\mathcal{F})).D' = -\epsilon a_1a_2\gamma + a_1^2a_2\gamma - 4d = a_1a_2\gamma = a_1a_2\gamma(a_1 - \epsilon) - 4d.$$

Agora, como estamos assumindo, por contradição, que $d < (a_1 - 1)a_2\gamma$ temos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a seguinte desigualdade é verdade, $d < (a_1 - \epsilon)a_2\gamma$ e então note que, usando a hipótese de que $a_1 \geq 2$

$$d < (a_1 - 1)a_2\gamma \iff \frac{d}{a_1 - 1}a_2\gamma < a_2\gamma \iff \frac{(a_1^2)d}{a_1 - 1} < a_1^2a_2\gamma,$$

assim, se $a_1 = 2$, então segue-se que $\frac{(a_1^2)}{a_1 - 1} = 4$ e para todo $a_1 > 2$ temos que $\frac{(a_1^2)}{a_1 - 1}$ é crescente, concluímos então que

$$4d \leq \frac{(a_1^2)d}{a_1 - 1} < a_1^2a_2\gamma.$$

Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $4d < (a_1 - \epsilon)a_1 a_2 \gamma$. Logo, $(c_1(\mathcal{F})^2 - 4c_2(\mathcal{F})).D' > 0$ então para um ϵ que a desigualdade seja verdadeira, o teorema de Miyaoka pode ser aplicado e assim conseguimos um subfeixe $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ de posto 1 tal que

$$(2c_1(\mathcal{L}) - c_1(\mathcal{F})) \cdot D_\epsilon \cdot D > 0.$$

Etapa 3: Investigar as características de $\mathcal{L}$

Note que, podemos assumir que $\mathcal{L}$ em retas, pois do contrário teríamos que $\mathcal{L}^{**} \subset \mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$. Além disso, utilizaremos o seguinte fato: feixes reflexivos ($\mathcal{F}$ é isomorfo a $\mathcal{F}^{**}$) de posto 1 em variedades suaves são invertíveis, daí temos que $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}$ é um isomorfismo fora de um lugar geométrico de codimensão 2, donde segue que $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}^{**})$, então podemos tranquilamente trocar $\mathcal{L}$ com $\mathcal{L}^{**}$.

Afirmação: Podemos assumir que $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{F}$ diminui o posto (se for o caso) em um subconjunto $Z \subset Y$ de codimensão 2.

Com efeito, como posto de $\mathcal{F}$ é 2, então $\operatorname{codim} Z$ não pode ser 3, pois como estamos sobre uma 3-fold então Z seria um conjunto de pontos o que é uma contradição.Assuma agora que $\mathcal{L}$ diminui o posto ao longo de um divisor efetivo B (contando a multiplicidade), então temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \\ \mathcal{L} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{L}(B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

então $\mathcal{L}(B) \to \mathcal{F}$ não diminui o posto ao longe de nenhum divisor e $c_1(\mathcal{L}(B)) = c_1(\mathcal{L}) + B$, então ele irá intersectar somente D e D_ϵ como eles são nef e amplo, respectivamente segue-se que irá intersectar de maneira mais positivamente. Então, podemos trocar $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}(B)$.E novamente, utilizando o Teorema de Lefschetz temos que $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, então

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(-tH - uE)$$

com $t, u \in \mathbb{Z}$.

Etapa 4: Restringir a superfície S e conseguir a contradição.

Relembremos que S é um divisor efetivo linearmente equivalente a D, daí S é isomorfa a uma superfície interseção completa do tipo $(a_2, a_3, \cdots, a_{r-1})$ que contém C. Defina $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_S$ e assim temos que

$$\mathcal{L}|_S = \mathcal{O}_S(-tH - uC) = \mathcal{O}_S(-tH - ua_1 H) = \mathcal{O}_S(-(a_1 u + t)H)$$

defina $\alpha = a_1 u + t$ como $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{F}$ diminui o posto(se for o caso) em Z de $\operatorname{codim} 2$, então a restrição a S irá preservar a inclusão, e nós conseguimos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_S(-\alpha H) \to \mathcal{F}' \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{I}_W \to 0$$

onde $\mathcal{M}$ é um fibrado linear e $W \subset S$ finito. Além disso,

$$c_1(\mathcal{F}') = c_1(\mathcal{F})|_S = [-E]|_S = -C = -a_1 H$$

o que implica que

$$c_1(\mathcal{M}) = c_1(\mathcal{F}') - c_1(\mathcal{O}_S(-\alpha H)) = -a_1 H + \alpha H$$

então podemos escrever $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S(-a_1 H + \alpha H) = \mathcal{O}_S(H(-a_1 + \alpha))$. Então a sequência exata é reescrita da seguinte maneira,

$$0 \to \mathcal{O}_S(-\alpha H) \to \mathcal{F}' \to \mathcal{O}_S(H(-a_1 + \alpha)) \otimes \mathcal{I}_W \to 0$$

Pela instabilidade,

$$(2c_1(\mathcal{L}) - c_1(\mathcal{F})).D_\epsilon.D > 0$$

onde D é linearmente equivalente a S, o qual é efetivo e então temos que

$$\begin{aligned}
(2c_1(\mathcal{L}) - c_1(\mathcal{F}))|_S.D_\epsilon|_S &> 0\\
(-2\alpha H - (-a_1 H)).((a_2 + \epsilon)H - C)) &> 0\\
(-2\alpha H + a_1 H).(a_2 H + \epsilon H - a_1 H) &> 0\\
H^2.(-2\alpha + a_1).(a_2 + \epsilon - a_1) &> 0
\end{aligned}$$

Como $H^2 = \deg S = a_2\gamma$ e, por hipótese, $a_2 \geq a_1$ temos que o primeiro e o último terno da desigualdade acima são positivos o que implica que $-2\alpha + a_1 > 0$, isto é, $a_1 > 2\alpha$.

Agora, podemos calcular $c_2(\mathcal{F})$ de duas maneiras, por um lado

$$c_2(\mathcal{F}') = c_2(\mathcal{F})|_S = [B_A] = d,$$

e por outro lado,

$$c_2(\mathcal{F}) = (-\alpha H)((\alpha - a_1)H) + \mathrm{length}(W),$$

já sabemos que $H^2 = a_2\gamma$, daí segue-se que

$$c_2(\mathcal{F}) = (a_1\alpha - \alpha^2)a_2\gamma + \mathrm{length}(W)$$

o que implica que pelos cálculos do $c_2(\mathcal{F})$ e pelo que foi suposto por contradição na etapa 2

$$(\alpha a_1 - \alpha^2)a_2\gamma \leq d < (a_1 - 1)a_2\gamma,$$

e assim, verificamos que $\alpha a_1 - \alpha^2 < (a_1 - 1)a_2\gamma$, isto é,

$$a_1(\alpha - 1) < (\alpha - 1)(\alpha + 1).$$

Afirmação: $h^0(\mathcal{F}') = 0$.

Com efeito, relembremos que em Y, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_Y^2 \to \mathcal{A} \to 0$$

assim, por construção, $\mathcal{O}_Y^2 \to \mathcal{A}$ é injetivo nas seções globais então $h^0(\mathcal{F}) = 0$.

Além disso, como $\mathcal{F} \to \mathcal{O}_Y^2$ diminui o posto ao longo de E que não contém S. Então, a restrição de $\mathcal{F}' \to \mathcal{O}_S^2$ permanece injetiva e nós conseguimos que

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{O}_S^2 \to A \to 0,$$

onde $\mathcal{O}_S^2 \to A$ é injetiva nas seções globais e então segue que $h^0(\mathcal{F}') = 0$. Daí, pela afirmação, temos que $\alpha > 0$ e como $a_1(\alpha - 1) < (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ segue que $\alpha \neq 1$ e dessa forma, $a_1 < \alpha + 1$. Além disso, como $a_1 > 2\alpha$ e pelo fato que $a_1 \geq 2$ temos que

$$2\alpha < a_1 < \alpha + 1 \Longleftrightarrow 2\alpha < 2 \leq a_1 < \alpha + 1$$

donde por um lado, $\alpha < 1$ mas por outro lado, $1 < \alpha$ e assim temos a contradição. Logo, tem-se que $d \geq (a_1 - 1)a_2\gamma$ e como A é fibrado linear em C livre de ponto base de grau d com $h^0(C, A) \geq 2$, temos que, por definição, $\operatorname{gon}(C)$ é no mínimo d e assim concluímos que

$$\operatorname{gon}(C) \geq (a_1 - 1).a_2.\cdots.a_{r-1}$$

concluindo o teorema e obtendo uma cota inferior para a gonalidade sob essas hipóteses. $\square$

5 Apêndice

5.1 Teoria de Interseção

Definição 34. Seja X uma variedade sobre k. Um ciclo de codimensão r em X é um elemento do grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades irredutíveis e fechadas de X de codimensão r. Com isso, podemos escrever um ciclo como $Y = \sum n_i Y_i$ onde Y_i são as subvariedades irredutíveis e fechadas em X e $n_i \in \mathbb{Z}$.

Definição 35. Seja X uma variedade sobre k de dimensão n. Dizemos que o anel graduado $A(X) = \bigoplus_{r=0}^{n} A^r(X)$ é chamado de anel de Chow, onde para cada r, temos que $A^r(X)$ é o grupo dos ciclos de codimensão r em X módulo a equivalência racional cujas operações de soma e produto são dadas, com $i \leq j$, respectivamente por:

$$\begin{array}{cccc} + : & A^i \times A^j & \longrightarrow & A^j \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{k_1} a_i Y_i + \sum_{i=1}^{k_2} b_j Y_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\eta=1}^{k} (a_\eta + b_\eta) Y_\eta, \end{array}$$

sendo $k = \max\{k_1, k_2\}$ e

$$\begin{array}{cccc} . : & A^i \times A^j & \longrightarrow & A^{i+j} \\ & [Y_i] \cdot [Y_j] & \longmapsto & [Y_i \cap Y_j]. \end{array}$$

Agora, listaremos algumas propriedades sobre o anel definido acima.

- $A^0(X) = \mathbb{Z}$ e $A^r(X) = 0$ para todo $r > \dim X$.
- Como os ciclos de codimensão 1 são apenas divisores de Weil, e X é não singular então tem-se que $A^1(X) \simeq \text{Pic}(X)$.

Exemplo 36. Sejam $\mathcal{F}$ um feixe localmente livre de posto r em X e $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ para ser o fibrado projetivo associado conforme definição 6. e seja $\xi \in A^1(\mathbb{P}(\mathcal{F})$ a classe de um divisor correspondendo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}))}(1)$. Seja $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to X$ a projeção. Daí,π^* faz com que $A(\mathbb{P}(\mathcal{F}))$ dentro de um $A(X)-$módulo livre gerado por $1, \xi, \xi^2, \cdots, \xi^{r-1}$.

Definição 36. Seja $\mathcal{F}$ um feixe localmente livre de posto r em uma variedade suave e quasi projetiva X. Para cada $i = 0, 1, \cdots, r$. Definimos a i-ésima classe de Chern $c_i(\mathcal{F}) \in A^i(X)$ com a condição de $c_0(\mathcal{F}) = 1$ e

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{F}).\xi^{r-1} = 0,$$

em $A^r(\mathbb{P}(\mathcal{F}))$ como na última propriedade listada.

Por conveniência definiremos a classe de Chern total como

$$c(\mathcal{F}) = c_0(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) + \cdots + c_r(\mathcal{F})$$

e o polinômio de Chern dado por

$$c_t(\mathcal{F}) = c_0(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F})t + \cdots + c_r(\mathcal{F})t^r.$$

A seguir, listamos algumas propriedades da classe de Chern utilizadas no trabalho.

1. Se $\mathcal{F} \simeq \mathcal{L}(D)$ para algum divisor D, então temos que

$$c_t(\mathcal{F}) = 1 + Dt.$$

2. Se $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ é uma sequência exata de feixes localmente livres em X, então

$$c_t(\mathcal{F}) = c_t(\mathcal{F}').c_t(\mathcal{F}'')$$

3. Sejam $\mathcal{F}$ de posto r e $\mathcal{G}$ de posto s. Podemos escrever

$$c_t(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^{r}(1 + a_i t) \text{ e } c_t(\mathcal{G}) = \prod_{i=1}^{s}(1 + b_i t)$$

onde cada $a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s$ são símbolos formais e então, temos as seguintes fórmulas para as classes de Chern do produto tensorial e para o dual, respectivamente:

$$c_t(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = \prod_{i,j}(1 + (a_i + b_j)t) \text{ e } c_t(\mathcal{F}^\vee) = c_{-t}(\mathcal{F}).$$

6 Referências

[1] Arbarello, Enrico; Cornalba, Maurizio; Griffiths, Phillip e Harris, Joseph. *Geometry of Algebraic Curves.* Vol I, volume 267 *of Grundlenhren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*.Springer-Verlag, New York,1985.

[2] Arbarello, Enciro; Cornalba, Maurizio e Griffiths, Phillip. *Geometry of Algebraic Curves.*Vol II, volume 268 *of Grundlenhren der Mathematischen Wissenschaften*[*Fundamental Principles of Mathematical Sciences*].Springer, Heidelberg, 2011. Com contribuição de Jospeh Daniel Harris.

[3] Eisenbud, David e Harris, Joe. *3264 and All That: A Second Course in Algebric Geometry.*Vol I. Cambridge: Cambridge University Press,2016.

[4] Gathamann, Andreas. *Algeraic Geometry: Notes*. 2002/2003. Disponível em:agag-gathmann.math.rptu.de/class/alggeom-2022/alggeom-2022-pdf. Acesso em 30 jul. 2025.

[5] Hartshorne, Robin. *Algebric Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York,1997.

[6] Jensen, David e Ranganathan, Dhruv. *Brill-Noether theory for curves of a fixed gonality*. 35. 2017.

[7] Landesman, Aaron. *The Locus of Plane Curves In The Moduli Stack Of Curves*. 26. 2015.

[8] Miyaoka,Y. *The Chern Classes and Kodaria Dimension of a Minimal Variety*, Algebric Geometry, Sendai, Adv.Std. Pure Math. Vol 10, T. Oda (ed), 1987, 449-476.

[9] Perrin, D. *Algebraic Geometry: An Introduction*. Springer, Berlin, 2008.

[10] Lazarsfeld, Robert. *Lectures on Linear Series*. Vol 3 of *IAS/Park City Mathematics Series for American Mathematical Society*. 57. 1997. Com contribuição de Guillermo Fernández del Busto.

[11] Tengan, Eduardo e Borges, Herivelto. *Álgebra comutativa em 4 movimentos*. Blucher, São Paulo, 2014.

[12] Ullery, Brooke. *Notes from Math 252-Linear Systems and Positivity of Vector Bundles*. Spring, Massachusetts, 2017. Disponível em: people.math.Havard.edu/ bullery/math252notes/.Acesso em: 30 Jul. 2025.