



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Influência de Geometrias BTZ Modificadas na
Termodinâmica e Estabilidade de GRAVASTARS**

Anderson Tiago Nascimento da Silva

São Cristóvão - SE

- 2025 -

Anderson Tiago Nascimento da Silva

Influência de Geometrias BTZ Modificadas na Termodinâmica e Estabilidade de GRAVASTARS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Sergipe,
como requisito parcial para obtenção do Grau
Doutor em Física.

Orientador: Luciano Casarini

Coorientador: Marcos A. Anacleto



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa-POSGRAP
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFI

Ata da sessão pública de defesa da tese de doutorado do aluno **Anderson Tiago Nascimento da Silva**, candidato ao título de doutor em Física na área de concentração em Física da Matéria Condensada.

Ao vigésimo nono dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte e cinco, às quatorze horas, reuniram-se na sala virtual **meet.google.com/jmf-mpba-oeo**, os membros da banca constituída para examinar o candidato **Anderson Tiago Nascimento da Silva**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores, Luciano Casarini, presidente da banca, Marcos Antonio Anacleto, Javier Ernesto Gonzalez Sanchez, Tiago Homero Mariz do Nascimento, Jean Paulo Spinelly da Silva e Francisco de Assis Brito. Dando início aos trabalhos, o professor Luciano Casarini comunicou aos presentes a finalidade da reunião, passando em seguida a palavra ao candidato. Este, então, expôs oralmente o trabalho da tese intitulado “**Influência de Geometrias BTZ Modificadas na Termodinâmica e Estabilidade de GRAVASTARS**” Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela banca examinadora, que considerou a tese APROVADA. Assim sendo, deve a Universidade Federal de Sergipe expedir o respectivo diploma de doutor em Física, na forma da lei. Para constar foi lavrada a presente ata, que foi assinada pelos membros da Banca Examinadora. Cidade Universitária “Professor José Aloísio de Campos”, 29 de maio de 2025.

Documento assinado digitalmente



LUCIANO CASARINI
Data: 30/05/2025 22:52:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luciano Casarini (DFI-UFS)

Documento assinado digitalmente



MARCOS ANTONIO ANACLETO
Data: 30/05/2025 21:33:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto (DF-UFCG)

Documento assinado digitalmente



JAVIER ERNESTO GONZALEZ SANCHEZ
Data: 30/05/2025 21:54:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Javier Ernesto Gonzalez Sanchez (DFI-UFS)

Documento assinado digitalmente



TIAGO HOMERO MARIZ DO NASCIMENTO
Data: 31/05/2025 07:23:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento (IF-UFAL)

Documento assinado digitalmente



JEAN PAULO SPINELLY DA SILVA
Data: 01/06/2025 18:48:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva (UEPB)

Documento assinado digitalmente



FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO
Data: 30/05/2025 21:10:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito (DF-UFCG)

*Dedico este trabalho à minha
madrinha, Maria de Lourdes
Gomes Cândido (**in**
memoriam)*

Agradecimentos

A Deus por ter me dado perseverança, paciência e sabedoria para a conclusão deste curso.

Ao meu orientador, prof. Dr. Luciano Casarini, pela sua atenção e ajuda durante essa minha caminhada.

Ao Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto, por aceitar a proposta para trabalharmos juntos novamente, pela sua paciência e frutífera colaboração. Se não fosse por sua ajuda, eu não teria conseguido concluir.

Aos pais, Paulo César da Silva e, especialmente, à minha mãe, Edeilza do Nascimento da Silva, pelo apoio e pelos esforços que possibilitaram a mim e aos meus irmãos o acesso à educação.

Aos meus irmãos Edson Diego Nascimento da Silva e Jessika Nascimento da Silva, por se fazerem presentes nos momentos mais difíceis.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro durante o doutorado.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao Wolfram Research e à equipe do Wolfram Mathematica pela concessão da licença acadêmica, cuja poderosa plataforma de cálculo simbólico e numérico foi fundamental para o desenvolvimento e a validação dos resultados apresentados nesta tese.

Agradeço a Gilvan de Jesus, cuja amizade e apoio, em momentos decisivos, foram

fundamentais para que eu não desistisse do doutorado.

Ao professor e amigo Dr. Jean Spinelly da UEPB, por acreditar em meu potencial na época de graduação e por seus conselhos que levarei para toda a vida.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFS, pela oportunidade da realização do doutorado em Física;

À minha redatora de texto, Ana Flávia dos Santos Américo, pela revisão cuidadosa e correção gramatical deste trabalho. Meu sincero agradecimento.

À banca examinadora, por aceitar o convite e compartilhar comigo este momento tão importante e esperado.

Sou grato até mesmo às vozes de descrença que encontrei no caminho, pois foram elas que, paradoxalmente, me deram ainda mais força para continuar e alcançar este objetivo.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao primeiro verme que há de comer minha carne putrefaria no túmulo.

“Por que você quer tanto isso?”

“Porque disseram que eu não iria conseguir.”

*(- Carl Brashear, em Homens de Honra
(interpretado por Cuba Gooding Jr.))*

Resumo

Na presente tese, estudamos duas abordagens complementares: (i) GRAVASTAR de casca fina em geometria BTZ não comutativa, implementada via métrica modificada por parâmetro θ ; (ii) GRAVASTAR em BTZ com comprimento mínimo, que incorpora efeitos quânticos por meio da densidade do estado fundamental do átomo de hidrogênio em duas dimensões e distribuição Lorentziana. Metodologicamente, as regiões internas anti-de Sitter foram conectadas a uma região externa descrita pela métrica BTZ tipo Schwarzschild por técnicas generalizadas de junção de casca fina, permitindo análise conjunta das equações de junção, densidade de energia e pressão de superfície. Verificamos que a densidade de energia e a pressão superficial geradas garantem a estabilidade da casca mesmo com constante cosmológica nula, para distribuições Lorentzianas e determinamos a entropia da casca no cenário de comprimento mínimo. Ademais, o estudo termodinâmico revelou capacidade térmica positiva e potencial formação de remanescente de buraco negro em baixa dimensão. Esses resultados sugerem que efeitos quânticos regularizam divergências e enriquecem a microestrutura do espaço-tempo, oferecendo novo arcabouço teórico para transições entre GRAVASTAR e buracos negros em gravitação de baixa dimensionalidade.

Palavras Chaves: GRAVASTAR; Geometria BTZ; Não Comutatividade; Comprimento Mínimo; Termodinâmica; Estabilidade.

Abstract

In the present thesis, we studied two complementary approaches: (i) a thin-shell GRAVASTAR in noncommutative BTZ geometry, implemented via a metric modified by the parameter θ ; (ii) a GRAVASTAR in BTZ spacetime with a minimal length, which incorporates quantum effects through the ground-state density of the two-dimensional hydrogen atom and a Lorentzian distribution. Methodologically, the internal anti-de Sitter regions were connected to an external region described by the Schwarzschild-type BTZ metric using generalized thin-shell junction techniques, allowing a combined analysis of the junction equations, energy density and surface pressure. We verified that the resulting energy density and surface pressure guarantee the stability of the shell even with a vanishing cosmological constant for Lorentzian distributions and we determine the shell's entropy in the minimal-length scenario. Moreover, the thermodynamic study revealed a positive heat capacity and the potential formation of a low-dimensional black-hole remnant. These results suggest that quantum effects regularize divergences and enrich the spacetime microstructure, offering a new theoretical framework for transitions between gravastars and black holes in lower-dimensional gravity.

Keywords: GRAVASTAR; BTZ Geometry; Noncommutativity; Minimal Length; Thermodynamics; Stability.

1	Introdução	1
2	Uma Revisão da Relatividade Geral	7
2.1	O Campo Gravitacional Relativístico	8
2.2	As Equações de Einstein	10
2.3	Soluções do tipo Buraco Negro	12
2.4	A métrica BTZ	15
2.5	Termodinâmica de um Buraco Negro	17
2.5.1	Termodinâmica para a métrica de Schwarzschild	23
2.5.2	Termodinâmica para a métrica BTZ	25
3	Correções Quânticas para Termodinâmica dos Buracos Negros	32
3.1	Aspectos Gerais	33
3.2	Interpretação Física e Implicações	34
3.3	A Geometria Não Comutativa	35
3.4	Soluções do Buraco Negro em Gravidade Não comutativa	35
3.4.1	A não comutatividade na métrica de Schwarzschild	36
3.4.2	A métrica BTZ no espaço não comutativo	38
3.5	Correções Quânticas para a métrica BTZ	
	tipo Schwarzschild	39
3.5.1	Métrica BTZ em uma geometria não comutativa	39
3.5.2	Distribuição do Tipo Exponencial	44
3.5.3	Distribuição do Tipo Lorentziana	51

4	GRAVASTAR: Uma Alternativa Regular aos Buracos Negros	55
4.1	Região Interna	58
4.2	Casca Fina	58
4.3	Região Externa	59
4.4	Condição de junção	61
4.5	Condição de Israel (Equação de Lanczos–Israel)	61
4.6	Condições de Energia	63
4.7	Exterior de Schwarzschild, interior de de Sitter	65
5	GRAVASTAR de Casca Fina em uma Geometria BTZ Não Comutativa	68
5.1	Equações de Estrutura das Gravastars BTZ Não Comutativos	69
5.1.1	Camada de Transição	71
5.1.2	Equações de Lanczos: Tensão Superficial	72
6	Gravastar de Casca Fina em uma Geometria BTZ de comprimento mínimo	82
6.1	Gravastar BTZ com distribuição exponencial	83
6.2	Gravastar BTZ com Distribuição Lorentziana	89
7	Conclusões	95
7.1	Perspectivas Futuras	97
7.1.1	Extensão para o Caso de Schwarzschild	97
7.1.2	Caso de Carga sem Rotação (Reissner–Nordström)	97
	Referências	99
	APÊNDICES	107
	Apêndice A Formalismo Matemático da GRAVASTAR - Equações Gerais	108
A.1	Camada de Transição	108
A.2	Equações de Lanczos	112
	Apêndice B Demonstração da curvatura extrínseca da GRAVASTAR	115
B.1	Curvatura extrínseca da GRAVASTAR	115

ANEXOS

120

Lista de Figuras

- 3.1 Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de não comutatividade: $\theta = 0$ (preto contínuo), representando o caso comutativo convencional; $\theta = 0.03$ (vermelho tracejado) e $\theta = 0.05$ (azul pontilhado), ilustrando como a não comutatividade regulariza o comportamento da temperatura para pequenos valores de r_h 42
- 3.2 Capacidade térmica $\mathcal{C}$ em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de não comutatividade: $\theta = 0$ (preto contínuo), representando o caso comutativo convencional; $\theta = 0.03$ (vermelho tracejado) e $\theta = 0.05$ (azul pontilhado). 44
- 3.3 Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\gamma = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\gamma = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\gamma = 0.05$ (azul, pontilhado), assumindo $l = 1$. Observa-se que a introdução do comprimento mínimo regulariza o comportamento divergente da temperatura para pequenos valores de r_h , resultando em uma temperatura máxima finita seguida de um decréscimo para zero. 47
- 3.4 Capacidade térmica $\mathcal{C}$ em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\gamma = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\gamma = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\gamma = 0.05$ (azul, pontilhado), assumindo $l = 1$. A região de estabilidade termodinâmica, caracterizada por $\mathcal{C} > 0$, ocorre para $0 < r_h < r_{min}$, demonstrando como o comprimento mínimo introduz uma fase estável na evolução final do buraco negro. 49

3.5	Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\gamma = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\gamma = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\gamma = 0.05$ (azul, pontilhado). Observa-se que a temperatura atinge um máximo finito antes de decrescer para zero, com o valor máximo e a posição do pico dependendo do parâmetro de comprimento mínimo.	50
3.6	Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\beta = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\beta = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\beta = 0.05$ (azul, pontilhado). Similar aos casos visto anteriormente, a distribuição Lorentziana também regulariza a temperatura em $r_h = 0$	53
3.7	Capacidade térmica específica $\mathcal{C}$ em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\beta = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\beta = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\beta = 0.05$ (azul, pontilhado). A região de estabilidade termodinâmica demonstra como o comprimento mínimo introduz uma fase estável na evolução final do buraco negro.	54
4.1	O modelo abaixo detalha as três regiões da GRAVASTAR, segundo Mazur e Mottola	57
5.1	Densidade de energia adimensional $\tilde{\sigma}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. Observa-se que a densidade de energia é negativa para todos os valores de Θ e $\tilde{\Lambda}$ considerados, característica distintiva dos modelos de GRAVASTAR.	79
5.2	Pressão superficial adimensional $\tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. A pressão superficial é positiva para todos os valores de Θ e $\tilde{\Lambda}$ considerados, contribuindo para a estabilidade da estrutura da GRAVASTAR.	79

- 5.3 Combinação $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. Esta combinação é relevante para a verificação da condição de energia nula (NEC), sendo positiva para valores suficientemente pequenos de Θ , independentemente do valor de $\tilde{\Lambda}$ 80
- 5.4 Combinação $\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. Esta combinação é relevante para a verificação da condição de energia forte (SEC), sendo positiva para valores suficientemente pequenos de Θ , independentemente do valor de $\tilde{\Lambda}$ 80
- 6.1 Comportamento da densidade de energia superficial $\tilde{\sigma} = a_0\sigma$ em função do parâmetro $\eta = \gamma/a_0$. As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica adimensionalizada $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa externa foi fixada em $M = 1$ 86
- 6.2 Comportamento da pressão superficial $\tilde{\mathcal{P}} = a_0\mathcal{P}$ em função do parâmetro $\eta = \gamma/a_0$. As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica adimensionalizada $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa externa foi fixada em $M = 1$. 87
- 6.3 Entropia da casca fina S_{shell} em função da espessura da casca ϵ . Os parâmetros fixos são a massa externa $M = 1$ e o raio da casca $a_0 = 0.001$. As curvas mostram o resultado para dois valores distintos do parâmetro de comprimento mínimo γ : $\gamma = 0.03$ (curva vermelha) e $\gamma = 0.05$ (curva azul). 88
- 6.4 Comportamento da densidade de energia superficial $\tilde{\sigma}$ em função do parâmetro α . As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa foi fixada em $M = 1$ 90

- 6.5 Comportamento da pressão superficial $\tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro α . As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica adimensionalizada $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa foi fixada em $M = 1$ 91
- 6.6 Entropia da casca fina S_{shell} em função da espessura da casca ϵ . Os parâmetros fixos são a massa externa $M = 1$, o raio da casca $a_0 = 1$ e o parâmetro de comprimento mínimo $\beta = 0.03$. As curvas mostram o resultado para dois valores distintos da constante cosmológica Λ : $\Lambda = -0.06$ (vermelha, tracejado) e $\Lambda = 0$ (azul, pontilhado). 93

A busca pela unificação entre a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica permanece como um dos maiores desafios da física contemporânea. Enquanto a Relatividade Geral, formulada por Einstein em 1915, descreve com precisão os fenômenos gravitacionais em escalas macroscópicas, a Mecânica Quântica é fundamental para compreender o comportamento das partículas em escalas microscópicas. A necessidade em conciliar essas teorias surge de cenários extremos, como no interior de buracos negros, onde a curvatura intensa do espaço-tempo se entrelaça com processos quânticos e evidencia a escala de Planck ($l_p \sim 10^{-33}$ cm), as previsões do Modelo Padrão, da teoria quântica de campos e da Relatividade Geral deixam de ser aplicáveis, exigindo o desenvolvimento de uma teoria de gravitação quântica capaz de descrever simultaneamente a curvatura intensa do espaço-tempo e os efeitos quânticos.

O trabalho de Hawking, em 1975, demonstrou que buracos negros emitem radiação térmica, o chamado *efeito Hawking*, implicando que esses objetos podem evaporar e levantando a questão da possível perda de informação quântica durante o processo de evaporação [1]. Essa limitação da descrição semiclássica, válida apenas quando a massa do buraco negro é muito superior à massa de Planck ($M_{BN} \gg M_p$), evidencia a urgência de uma teoria quântica da gravidade capaz de descrever o estágio final dessa evaporação sem inconsistências como singularidades e paradoxos de informação [2]. Neste contexto, os objetos compactos são cruciais, pois fornecem condições para testar ideias no regime de altas densidades.

Buracos negros, previstos pela teoria da Relatividade Geral, representam o estágio

final do colapso de estrelas massivas. Sua existência foi confirmada tanto pela detecção de ondas gravitacionais provenientes da fusão de buracos negros [3], quanto pela obtenção da imagem direta da sombra de um buraco negro pelo Event Horizon Telescope [4]. No entanto, problemas como singularidades e o paradoxo da informação [1] motivaram alternativas, como as *GRAVASTARS* (do inglês Gravitational Vacuum Stars), propostos por Mazur e Mottola [5, 6]. Esse modelo apresenta três zonas distintas, cada uma com diferentes equações de estado: uma região interna preenchida por energia escura em vácuo de Sitter isotrópico ($p = -\rho$), uma casca fina intermediária de fluido rígido ($p = \rho$) e uma região externa vazia, descrita pela geometria de Schwarzschild ($p = \rho = 0$). O interior do que seria um buraco negro é substituído por uma porção adequadamente escolhida do espaço-tempo de Sitter, com uma equação de estado $p = -\rho$ (energia escura), cercada por uma camada fina de matéria ultra-rígida com $p = +\rho$ [7].

A relevância desses modelos intensifica-se diante de descobertas cosmológicas recentes, como a aceleração da expansão do universo [8, 9, 10], que sugerem a existência de energia escura ($p = -\rho$), associada a uma constante cosmológica Λ [11, 12, 13]. Essa conexão entre micro e macroescala reforça a importância de explorar geometrias não comutativas, isto é, aquelas em que existe uma relação de comutação entre as coordenadas do espaço-tempo e, conseqüentemente, uma relação de incerteza associada às coordenadas, introduzindo um comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$, que regulariza singularidades [2, 14, 15]. Em particular, a métrica BTZ não comutativa (BTZNC), proposta por Banados et al. [16], e estudada em contextos como o efeito Aharonov-Bohm gravitacional [17] e termodinâmica [18], oferece um laboratório simplificado para investigar fenômenos quânticos em gravidade [19, 20].

Em (2+1)-dimensões, Bañados, Teitelboim e Zanelli obtiveram, ao incluir uma constante cosmológica negativa $\Lambda = -l^{-2}$ nas equações de Einstein, a solução BTZ para buraco negro, que se comporta assintoticamente como um espaço anti-de Sitter, em vez do espaço de Minkowski [19]. Essa simplicidade relativa faz do buraco negro BTZ um laboratório privilegiado para investigar propriedades quânticas e termodinâmicas de buracos negros e testar ideias da correspondência AdS/CFT [21, 22]. A não comutatividade, im-

plementada via distribuições gaussianas [14] ou lorentzianas [23], altera propriedades como emissão Hawking [24, 25], espalhamento quântico [26, 27] e modos quasinormais [28, 29]. Mais recentemente, Anacleto et al. consideraram uma distribuição lorentziana baseada na função de onda do estado fundamental do átomo de hidrogênio para incorporar o efeito de comprimento mínimo na métrica BTZ, investigando propriedades termodinâmicas e comportamento de partículas teste nesse cenário [18].

No âmbito das GRAVASTARS, Lobo e Garattini analisaram soluções em geometria não comutativa e estudaram suas características físicas [30], enquanto Övgün et al. propuseram um modelo de casca fina carregada em quatro dimensões dentro dessa mesma abordagem, avaliando sua estabilidade [31]. Em teorias modificadas de gravidade, trabalhos em $f(R, T)$, $f(\mathcal{G}, T)$ e $f(R, G)$ exploraram os efeitos de campos eletromagnéticos e simetrias de Noether na construção de GRAVASTARS isotrópicos e na determinação de suas propriedades físicas e na análise de sua estabilidade [32, 33, 34, 35, 36]. Em dimensões inferiores, Rahaman et al. desenvolveram modelos neutros e carregados de GRAVASTAR em espaço-tempo AdS (2+1), demonstrando a ausência de singularidades e a viabilidade de estabilidade mesmo em contextos como a gravidade arco-íris [37, 38, 39].

No entanto, estudos de GRAVASTARS em dimensões inferiores e em geometria não-comutativa têm sido pouco explorados. Assim, nesta tese focamos no modelo de GRAVASTAR na casca fina do buraco negro BTZ não comutativo, adotando uma distribuição de massa difusa Lorentziana. Introduzimos a não comutatividade no espaço-tempo como um ajuste da métrica da região interna da GRAVASTAR, por meio de uma distribuição lorentziana [25, 26, 28, 29, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. Também, de modo análogo, consideramos um GRAVASTAR em BTZ com comprimento mínimo, no qual os efeitos quânticos são incorporados por meio da densidade de estado fundamental do átomo de hidrogênio em duas dimensões e, em outro caso, por meio de uma distribuição Lorentziana. Em todos os casos, adotamos—no interior— a métrica BTZ não comutativa e, no exterior, a solução clássica BTZ, unindo-as em seus limites através de uma casca fina. Encontramos então a densidade de energia superficial σ e a pressão superficial $\mathcal{P}$, e mostramos que as equações de estado são satisfeitas mesmo na ausência de constante

cosmológica, com distribuições Lorentzianas.

Além disso, a entropia em sistemas gravitacionais segue a relação de Bekenstein–Hawking, segundo a qual a entropia de um buraco negro é proporcional à área de seu horizonte [50]. Embora as GRAVASTARS não possuam um horizonte de evento como os buracos negros, a casca fina que delimita a fronteira entre as regiões interna e externa desempenha um papel semelhante no cálculo da entropia. A superfície interna das GRAVASTARS pode ser interpretada como uma área onde ocorrem flutuações quânticas. Nessas circunstâncias, a entropia na camada simboliza a quantidade de informação “oculta” pela transição entre as regiões interna e externa. Como a métrica BTZ com comprimento mínimo altera a estrutura espacial, a entropia precisa levar essas configurações em conta. Portanto, ao verificarmos a entropia na casca fina das GRAVASTARS apresentadas aqui, também estamos analisando como o comprimento mínimo em seu interior afeta sua estabilidade.

Além disso, GRAVASTARS em geometrias não comutativas [30, 31] e teorias de gravidade modificada [32, 33, 34] têm sido investigadas para resolver paradoxos e testar estabilidade.

Esta tese está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, fazemos uma imersão na estrutura da Relatividade Geral, explorando em detalhe as soluções de buraco negro descritas pelas métricas de Schwarzschild e de BTZ. Embora o foco deste trabalho não seja obter resultados originais na métrica de Schwarzschild, sua compreensão é fundamental, pois ela serve de ponto de partida e referência histórica para qualquer estudo de gravitação em regimes de campo forte. Investigamos também, a termodinâmica desses objetos cósmicos, analisando tanto a métrica estática e esfericamente simétrica de Schwarzschild quanto a tridimensional anti-de Sitter do BTZ. Mostramos como, em cada caso, as leis da mecânica dos buracos negros se espelham de maneira surpreendente nos princípios da termodinâmica clássica.

No capítulo 3, fazemos uma pequena introdução do conceito de não comutatividade — isto é, a ideia de que, em escalas extremamente pequenas, as coordenadas do espaço-tempo deixam de “comutar” como na geometria clássica — e mostramos como essa nova

estrutura naturalmente introduz um comprimento mínimo, abaixo do qual a noção de ponto clássico perde sentido. Em seguida, estendemos essas ideias às métricas de buraco negro, revelando que a “granularidade” quântica do espaço-tempo corrige tanto a forma do horizonte quanto as propriedades termodinâmicas — modificando, por exemplo, a temperatura de Hawking e a entropia de Bekenstein–Hawking de acordo com o parâmetro de não comutatividade. Também calculamos as principais propriedades termodinâmicas — temperatura de Hawking, entropia e capacidade térmica — e verificamos que como as correções quânticas — Exponencial e Lorentzianas — atuam como um regulador natural, removendo singularidades no comportamento da temperatura e assegurando a existência de remanescentes estáveis após a evaporação.

No capítulo 4, analisamos a estrutura da GRAVASTAR — um objeto ultracompacto proposto como alternativa ao buraco negro clássico — e desvendamos cada uma de suas regiões com rigor físico. Começamos pela região interna de “falso vácuo”, onde a pressão negativa age como uma constante cosmológica local, estabilizando o núcleo contra o colapso gravitacional. Em seguida, investigamos a casca fina de matéria ultrarrígida, descrita por uma equação de estado específica, que funciona como um “casulo” capaz de impedir a formação de singularidades. Finalmente, mostramos que a região externa reproduz exatamente o espaço-tempo de Schwarzschild em $(3+1)$ - dimensões, de modo que, para observadores distantes, a GRAVASTAR se torna indistinguível de um buraco negro clássico até os arredores do horizonte. Demonstramos também como as condições de junção de Israel conectam suavemente essas três regiões, impondo limites precisos às tensões e descontinuidades de curvatura na casca — especialmente por meio da densidade superficial e da pressão tangencial, que previnem o colapso da estrutura. Por fim, discutimos as condições de energia fraca, forte e nula, evidenciando que, apesar de exótico, o modelo de GRAVASTAR permanece compatível com os limites aceitáveis da relatividade geral.

No capítulo 5, estendemos o modelo de GRAVASTAR de casca fina para o contexto de uma geometria BTZ não comutativa, gerada por uma distribuição Lorentziana no interior do objeto. Ao adotar essa distribuição, que espalha a massa em torno do cen-

tro numa escala mínima estabelecida pelo parâmetro de não comutatividade, descobrimos que as correções quânticas atuam como um regulador natural das divergências próximas à singularidade clássica. Além disso, examinamos cuidadosamente as condições de energia na casca fina e verificamos que o modelo satisfaz as condições de energia, garantindo consistência física mesmo diante do caráter exótico de uma distribuição Lorentziana. Essa análise revela que a casca suporta tensões e pressões de forma a impedir colapsos termodinâmicos, configurando um equilíbrio metaestável que persiste mesmo quando a constante cosmológica efetiva é nula.

No capítulo 6, estendemos nosso estudo de GRAVASTAR BTZ em geometria BTZ com comprimento mínimo, construindo dois modelos de casca fina que incorporam efeitos quânticos de forma distinta. Para o primeiro modelo, introduzimos o comprimento mínimo por meio de uma distribuição Exponencial, inspirada na densidade de probabilidade do estado fundamental do átomo de hidrogênio em duas dimensões — o que espalha a massa numa região finita ao redor do centro e regula as divergências clássicas próximas à singularidade. No segundo modelo, adotamos uma distribuição Lorentziana para a massa. Ao detalhar o modelo Exponencial, identificamos uma pequena região em que a pressão superficial torna-se negativa, sinalizando uma instabilidade local na casca fina; essa “bolha” de pressão negativa pode ser interpretada como um ponto de inflexão no equilíbrio estrutural da GRAVASTAR. Contrariamente, no modelo Lorentziano essa característica não aparece: a pressão mantém-se positiva em toda a espessura da casca, indicando um equilíbrio mais robusto frente a perturbações térmicas e gravitacionais. Além disso, examinamos como a entropia da casca varia com sua espessura, mostrando que, à medida que a camada se afina, a contribuição entrópica decresce de forma quase linear até um platô mínimo.

No capítulo 7, são apresentadas as conclusões e considerações finais.

Para os cálculos realizados nesta tese, adotamos o sistema natural de unidades.

Uma Revisão da Relatividade Geral

“Estamos na situação de uma criancinha que entra em uma imensa biblioteca, repleta de livros em muitas línguas. A criança sabe que alguém deve ter escrito aqueles livros, mas não sabe como. Não compreende as línguas em que foram escritos. Tem uma pálida suspeita de que a disposição dos livros obedece a uma ordem misteriosa, mas não sabe qual ela é.”

(*Albert Einstein*)

A Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein em 1915, redefiniu nossa compreensão do espaço-tempo e da gravitação, substituindo a ação instantânea da gravidade newtoniana por uma geometria dinâmica moldada pela matéria e energia. Este capítulo concentra-se em uma das previsões mais fascinantes dessa teoria: os buracos negros. Exploraremos as soluções estáticas das equações de campo de Einstein, começando pela métrica de Schwarzschild — a descrição mais simples de um buraco negro esfericamente simétrico em quatro dimensões — e avançando para o buraco negro BTZ, uma solução tridimensional em um universo com constante cosmológica negativa (anti-de Sitter). Além da estrutura geométrica desses objetos, discutiremos sua termodinâmica, um campo que emergiu nas décadas de 1970 e 1980 e revelou conexões profundas entre gravidade, mecânica estatística e teoria quântica. As leis da termodinâmica de buracos negros, incluindo o papel central da entropia de Bekenstein-Hawking e a radiação térmica associada ao horizonte de eventos, serão examinadas em detalhes. Por fim, abordaremos como o estudo desses sistemas, especialmente no contexto do buraco negro BTZ e da correspondência AdS/CFT, tem impulsionado avanços na compreensão da gravitação quântica e da holografia. Este capítulo visa não apenas apresentar as bases matemáticas

desses conceitos, mas também destacar seu significado teórico e suas implicações para a física moderna.

2.1 O Campo Gravitacional Relativístico

Uma característica fundamental dos campos gravitacionais é que todos os corpos se movem de maneira idêntica, independentemente de suas massas, desde que suas condições iniciais sejam as mesmas. Por exemplo, no campo gravitacional da Terra, dois corpos de massas diferentes, quando soltos simultaneamente, adquiririam a mesma aceleração, conforme descrito pela lei da queda livre. Essa propriedade é uma manifestação do Princípio da Equivalência, que estabelece a base conceitual para o entendimento relativístico da gravitação.

Esse comportamento uniforme dos corpos em um campo gravitacional possibilita estabelecer uma analogia entre o movimento de um corpo em um campo gravitacional e o de outro em um sistema de referencial não inercial. Em um sistema de referência inercial, os corpos movem-se livremente em trajetórias retilíneas e uniformes. Se suas velocidades iniciais forem iguais, elas o permanecerão assim para qualquer instante de tempo.

No entanto, ao considerar esse movimento em um sistema de referência não-inercial, todos os corpos movem-se de forma similar, como se estivessem sob a influência de um campo gravitacional. Assim, as propriedades de um sistema de referência não inercial podem ser consideradas equivalentes às de um sistema inercial na presença de um campo gravitacional uniforme. Essa equivalência fundamenta o Princípio de Equivalência, que foi formulado por Einstein e está no cerne da Relatividade Geral.

Para ilustrar, considere um corpo de massa arbitrária movendo-se livremente em um sistema de referência uniformemente acelerado. Em relação a esse sistema, o corpo apresentará uma aceleração constante de mesma intensidade e direção oposta. Esse cenário é análogo ao movimento em um campo gravitacional constante e uniforme, como o campo gravitacional terrestre em regiões suficientemente pequenas para que o campo seja considerado uniforme. Assim, um sistema de referência uniformemente acelerado é

equivalente a um campo gravitacional externo constante.

Embora sistemas de referência não inerciais possam reproduzir localmente os efeitos de campos gravitacionais, existem diferenças fundamentais entre ambos. Em grandes escalas, um campo gravitacional “real” (associado a uma fonte física, como a Terra) apresenta uma dependência inversa ao quadrado da distância em relação à fonte. Em contraste, os efeitos de sistemas de referência não inerciais, como um sistema rotacional, aumentam com a distância. Por exemplo, a força centrífuga em um carrossel aumenta à medida que nos afastamos do eixo de rotação. Além disso, os campos gravitacionais “reais” não podem ser eliminados por uma simples mudança de referencial. Eles refletem a curvatura intrínseca do espaço-tempo, uma propriedade que persiste independentemente do sistema de coordenadas utilizado.

Ao estender essas ideias para a mecânica relativista, consideremos o elemento de linha no espaço-tempo de um sistema inercial, dado em coordenadas cartesianas por [51]:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.1)$$

Sob transformações de Lorentz, que conectam sistemas inerciais, o intervalo ds^2 mantém a mesma forma. No entanto, em sistemas de referência não-inerciais, o elemento de linha ds^2 assume uma forma mais geral, como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas de espaço x^1, x^2, x^3 e do tempo x^0 . Esses coeficientes definem a métrica do espaço-tempo, determinando suas propriedades geométricas locais.

A Relatividade Geral assume que, assim como os campos de inércia, o campo gravitacional real também será descrito pelo mesmo tensor $g_{\mu\nu}$ e que, como não há nenhuma mudança de coordenadas que transforme esse tensor no de Minkowski, o espaço tempo que ele representa é curvo. As quantidades $g_{\mu\nu}$, que determinam a métrica, variam em função da presença de matéria e energia e não podem, em geral, ser transformadas para

seus valores galileanos ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski) em todo o espaço.

Essa impossibilidade caracteriza o espaço-tempo como curvo, em contraste com o espaço-tempo plano da Relatividade Restrita. A curvatura do espaço-tempo é descrita matematicamente pelo tensor de Riemann e está diretamente relacionada à densidade de energia e momento, através das equações de campo de Einstein.

O conceito de que a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo implica que as propriedades geométricas do espaço-tempo são determinadas por fenômenos físicos, como a distribuição de matéria e energia. Assim, o espaço-tempo deixa de ser um pano de fundo fixo e imutável e passa a ser dinâmico, influenciado e influenciador dos processos físicos.

A métrica $g_{\mu\nu}$ encapsula essas informações, permitindo não apenas descrever os campos gravitacionais, mas também prever fenômenos relativísticos como a deflexão da luz por campos gravitacionais, o avanço do periélio de Mercúrio e a existência de ondas gravitacionais. Esses aspectos deixam claro que a Relatividade Geral, ao reformular a compreensão da gravidade como geometria, fornece uma descrição abrangente e unificada dos fenômenos gravitacionais, tanto em escalas locais quanto em escala cosmológica.

2.2 As Equações de Einstein

Na Relatividade Geral, a gravitação deixa de ser vista como uma força que age à distância e passa a ser entendida como a curvatura do espaço-tempo induzida pela presença de matéria e energia. Essa teoria, desenvolvida por Einstein em 1915, generaliza a Relatividade Restrita para referenciais não inerciais e recupera a mecânica newtoniana em campos fracos e velocidades baixas.

O ponto de partida para as Equações de Campo de Einstein é o tensor de Riemann que descreve a curvatura do espaço-tempo. Para obtermos um tensor simétrico apropriado ao lado esquerdo das equações de campo, contraímos o tensor de Riemann com o tensor

métrico, definindo primeiro o tensor de Ricci[52]:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\alpha\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}, \quad (2.3)$$

e o escalar de Ricci R , por meio de nova contração com o tensor métrico:

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

É prática comum usar o mesmo símbolo R para o tensor de curvatura de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, diferenciando-os pelo número de índices. Além disso, o tensor de curvatura satisfaz uma importante restrição diferencial, chamada identidade de Bianchi:

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\lambda} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0. \quad (2.5)$$

Aplicando múltiplas contrações da identidade de Bianchi com o tensor métrico e usando as Eqs. (2.3) e (2.4) chega-se à identidade crucial:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (8.19)$$

onde o tensor de Einstein simétrico $G^{\mu\nu}$ é definido por

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (2.6)$$

Essa identidade, às vezes chamada de identidade de Bianchi contraída, indica que o tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ possui divergência covariante nula, assegurando a conservação covariante do tensor de energia-momento e a coerência interna da teoria. Assim, a teoria covariante da gravitação pode ser expressa em termos das chamadas equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

ou, escrita de outra forma em unidades geometrizadas ($c = G = 1$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

No limite newtoniano, as equações de Einstein reduzem-se à equação de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho, \quad (2.9)$$

onde ρ é a densidade de massa [53], garantindo coerência com a gravitação clássica. Em regiões sem matéria ($T_{\mu\nu} = 0$), obtemos $R_{\mu\nu} = 0$. Ainda assim, o espaço-tempo vazio pode não ser plano; sua curvatura residual é descrita pelo tensor de Weylⁱ, que encapsula efeitos gravitacionais em escalas globais sem fontes locais de matéria ou energia. Apenas quando todas as componentes do tensor de Riemann são nulas o espaço-tempo é considerado plano. Dessa forma, a Relatividade Geral fornece um arcabouço unificado capaz de explicar desde a órbita dos planetas até o interior de buracos negros e a evolução do Universo.

Esse formalismo da TRG não apenas revolucionou a física gravitacional, mas também abriu caminho para avanços significativos em cosmologia, astrofísica e física de buracos negros, consolidando-se como um dos pilares da física moderna.

2.3 Soluções do tipo Buraco Negro

O termo “buraco negro” foi introduzido em 1969 pelo físico americano John Wheeler. Esse fenômeno ocorre quando uma região do espaço-tempo apresenta uma atração gravitacional tão intensa, devido ao acúmulo extremo de matéria e energia, que impede até mesmo a luz de escapar, tornando-a “invisível” para o infinito. A superfície que delimita essa região, embora puramente imaginária, é chamada de Horizonte de Eventos.

Compreender as soluções relativísticas que descrevem os buracos negros é essencial para o desenvolvimento do entendimento da gravitação em regimes extremos. As equações

ⁱ Em um espaço-tempo de vácuo (ou seja, quando o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = 0$), o tensor de Riemann reduz-se ao tensor de Weyl, que é a parte livre de traço, invariante por transformações conformes, e responsável pelas forças de maré e pela propagação de ondas gravitacionais. Esse tensor deforma apenas a forma dos feixes geodésicos, sem alterar o volume. Em dimensões $n \geq 4$, o tensor de Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ é nulo se, e somente se, o espaço-tempo for localmente conforme plano.

de Einstein e suas implicações para essas soluções fornecem percepções fundamentais sobre a curvatura do espaço-tempo e as condições físicas em áreas de altíssima densidade. Este capítulo se dedica a explorar alguns conceitos essenciais do campo gravitacional relativístico, preparando o terreno para discussões mais aprofundadas sobre o buraco negro de Schwarzschild e o modelo de Buracos Negros em espaço-tempo BTZ.

O buraco negro é formado quando um corpo de massa M se contrai para um tamanho menor do que o chamado raio de Schwarzschild, $r_{sch} = 2M$. Conclui-se que, para distribuições de massa esfericamente simétrica e estática, nem sinais nem partículas podem fugir da região dentro do buraco negro, uma vez que a velocidade da luz é a velocidade de propagação limitante para os sinais físicos. Esta natureza é absoluta na teoria da gravitação de Einstein, pois a interação gravitacional é universal. O papel da carga gravitacional é desempenhado por massa, cujo valor é proporcional à energia total do sistema. Assim, todos os objetos com energia diferente de zero participam da interação gravitacional[54].

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) em conjunto com a solução de Schwarzschild, são empregadas ao máximo na descrição dos buracos negros (embora no contexto da Gravitação Newtoniana já existisse remotas especulações sobre as chamadas “Estrelas Negras”). Descobriu-se que, depois de sua formação, qualquer buraco negro fica estacionário e seu campo é determinado de maneira única por um pequeno número de parâmetros. A razão física para essa propriedade impressionante dos buracos negros está no fato de que, no campo extremamente forte de um buraco negro em espaço vazio, apenas tipos muito especiais de configuração de campos físicos são possíveis (incluindo o campo gravitacional). Os físicos que atuam nesta área de pesquisa se dedicam a retirar o máximo de informações sobre efeitos que possam ocorrer ao seu redor, e assim, criar novas maneiras de tentar detectá-lo.

Após a formulação das equações de campo da Relatividade Geral por Albert Einstein, o físico alemão Karl Schwarzschild apresentou, em 1916, a primeira solução exata dessas equações, descrevendo o campo gravitacional externo de uma massa esfericamente simétrica em vácuo. Essa solução, frequentemente chamada de métrica de Schwarzschild,

é uma das mais simples e fundamentais da teoria da gravitação, sendo amplamente utilizada para descrever buracos negros e objetos compactos. A métrica tem a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.10)$$

onde M representa a massa total da origem do campo gravitacional.

A métrica de Schwarzschild apresenta algumas propriedades notáveis. Primeiramente, ela é estática, ou seja, independe da coordenada temporal t , refletindo a simetria temporal do sistema. Além disso, a solução é caracterizada por um único parâmetro físico, M , que corresponde à massa gravitacional total da fonte do campo. Essa interpretação de M decorre diretamente do comportamento assintótico da métrica: para grandes distâncias do centro de gravidade ($r \rightarrow \infty$), o espaço-tempo se aproxima do espaço-tempo plano de Minkowski, e o campo gravitacional pode ser descrito pela aproximação de campo fraco, compatível com a lei de gravitação de Newton [55].

Uma característica marcante desta solução é a existência de uma superfície esférica definida pelo raio $r_{sch} = 2M$, conhecida como horizonte de eventos ou raio de Schwarzschild. Nesse limite, o coeficiente da componente temporal da métrica, g_{tt} , torna-se zero, enquanto g_{rr} diverge. Este comportamento indica que, para $r < r_{sch}$, nada pode escapar do interior dessa região, nem mesmo a luz. Isso implica que o horizonte de eventos atua como uma fronteira causal, além da qual informações não podem ser transmitidas a observadores externos [54].

Schwarzschild demonstrou que, em uma distribuição de massa pontual, o raio r_{sch} marca o limiar onde a deformação do espaço-tempo é extrema. Qualquer partícula ou fóton que atravesse o horizonte ficará confinado ao interior do buraco negro e, para um observador distante, essa partícula torna-se irremediavelmente inacessível. Esta propriedade central da métrica de Schwarzschild fundamenta o conceito de buracos negros, que representam regiões do espaço-tempo onde a curvatura gravitacional é tão intensa que nada, nem mesmo a luz, consegue escapar. Essa característica é explicada pela análise das geodésicas, que descrevem o caminho seguido por partículas e fótons no espaço-tempo

curvo.

No caso de partículas massivas e fótons, as equações geodésicas derivadas da métrica de Schwarzschild indicam que, ao cruzar o horizonte de eventos, localizado em $r = 2M$, todos os trajetos futuros inevitavelmente convergem para a singularidade em $r = 0$. O horizonte de eventos, portanto, age como uma superfície causal: uma vez ultrapassado, não existe trajetória que permita à partícula ou ao fóton retornar para $r > 2M$.

A métrica também prevê que o intervalo temporal medido por um observador distante diverge para infinito à medida que um objeto se aproxima do horizonte de eventos. Esse fenômeno, conhecido como congelamento gravitacional, torna impossível observar diretamente o colapso de um corpo até $r = 2M$. Essas propriedades físicas e geométricas da métrica de Schwarzschild são fundamentais para a compreensão moderna de buracos negros.

2.4 A métrica BTZ

No contexto da Relatividade Geral, a métrica de Schwarzschild em (3+1)-dimensões desempenhou um papel crucial na descrição de fenômenos como movimentos planetários e lentes gravitacionais [56]. Entretanto, em dimensões mais baixas, como (2+1)-dimensões, a solução de buracos negros só foi obtida por meio dos estudos de Bañados, Teitelboim e Zanelli [57], que exploraram identificações no subgrupo $SO(2, 2)$ do espaço anti-de Sitter (AdS).

A principal característica do espaço AdS é sua curvatura negativa, o que implica que ele é localmente semelhante ao espaço anti-de Sitter, mas possui propriedades globais distintas. Para que buracos negros sejam formados nesse cenário, é essencial uma constante cosmológica negativa, pois esta fornece a escala de comprimento necessária para a formação de um horizonte de eventos em uma teoria na qual a massa é adimensional [?].

A ação para este sistema, conforme apresentada em [?], é dada por:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}] d^2x dt + B, \quad (2.11)$$

onde B representa o termo de superfície, e o raio de curvatura l está relacionado à constante cosmológica negativa por:

$$\frac{1}{l^2} = -\Lambda, \quad (2.12)$$

onde l deve apresentar a medida de comprimento necessária para obter um raio de horizonte de eventos. Resolvendo as equações de Einstein derivadas da ação (2.11), obtém-se a seguinte métrica para o espaço-tempo BTZ [58]:

$$ds^2 = -N^2(r) dt^2 + N^{-2}(r) dr^2 + r^2 (N^\phi(r) dt + d\phi)^2, \quad (2.13)$$

onde as funções $N^2(r)$ e $N^\phi(r)$ são definidas como:

$$N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (2.14)$$

$$N^\phi(r) = -\frac{J}{2r^2}. \quad (2.15)$$

Aqui, M e J são constantes que representam, respectivamente, a massa e o momento angular do buraco negro BTZ, associados às simetrias de translação temporal e rotação [57]. As coordenadas t , r e ϕ possuem os intervalos $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$ e $0 \leq \phi < 2\pi$, respeitando a simetria angular.

Horizonte de eventos e condições extremas

O horizonte de eventos deste buraco negro ocorre quando a função de lapso $N^2(r)$ se anula. Isso acontece para dois valores de r , dados por:

$$r_{\pm} = l \sqrt{\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2}{M^2 l^2}} \right)}. \quad (2.16)$$

O maior valor, r_+ , é identificado como o horizonte de eventos externo, enquanto r_- é o horizonte interno. Para que esses horizontes existam, as condições $M > 0$ e $|J| \leq Ml$ devem ser satisfeitas.

No caso extremo, onde $|J| = Ml$, as duas raízes coincidem ($r_+ = r_-$), resultando

em um horizonte degenerado.

Limites e estados especiais

Para recuperar o espaço vazio, ou estado de vácuo, é necessário que o buraco negro desapareça, o que ocorre quando $M \rightarrow 0$ e $J \rightarrow 0$. Neste limite, a métrica (2.13) assume a forma:

$$ds_{\text{vac}}^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{l}{r}\right)^2 dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.17)$$

Por outro lado, para recuperar o espaço anti-de Sitter puro ⁱⁱ, é necessário definir $M = -1$ e $J = 0$. Nesse caso, a métrica torna-se:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.18)$$

Isso mostra que o espaço AdS funciona como um estado estável e isolado, com uma massa específica que o separa de um conjunto contínuo de buracos negros. Essa separação, conforme visto em (2.17), é tão fundamental (uma “diferença unitária de massa”) que não é possível transformar o espaço AdS no vácuo comum de forma suave. Qualquer tentativa de fazer isso exigiria passar por configurações com singularidades (como buracos negros), as quais não são permitidas no modelo físico considerado.

2.5 Termodinâmica de um Buraco Negro

A conexão entre buracos negros e termodinâmica surgiu na década de 1970 e, desde então, tem sido uma área central de investigação na física teórica, especialmente por sua relação com a gravitação quântica e o princípio holográfico ⁱⁱⁱ. A ideia inicial provém da descoberta — por meio de formalismos matemáticos — de que a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca diminui em processos clássicos. Por exemplo, quando dois buracos negros se fundem, a área do horizonte do buraco resultante é maior do que

ⁱⁱ uma versão quadrimensional de um espaço-tempo, de uma esfera no espaço euclidiano

ⁱⁱⁱ Princípio holográfico: postula que toda a informação contida em um volume de espaço pode ser descrita por graus de liberdade definidos em sua fronteira, de dimensão inferior, de modo análogo a um holograma.

a soma das áreas originais. Essa propriedade remete à segunda lei da termodinâmica, segundo a qual a entropia de um sistema isolado não diminui em processos irreversíveis.

A primeira lei da termodinâmica estabelece que uma leve alteração na entropia de um sistema resulta em uma variação proporcional na energia correspondente, sendo essa proporcionalidade determinada pela temperatura. No estudo apresentado em [59], observa-se uma relação análoga: a variação da massa de um buraco negro está relacionada à mudança na área do horizonte de eventos. Nessa relação, o fator de proporcionalidade está associado a uma quantidade conhecida como gravidade de superfície, que mede a intensidade do campo gravitacional no horizonte de eventos. Se considerarmos a área do horizonte de eventos como equivalente à entropia, podemos sugerir que a gravidade de superfície se assemelha à temperatura. Essa analogia é reforçada pelo fato de que a gravidade de superfície permanece constante em todos os pontos do horizonte de eventos, assim como a temperatura é uniforme em um corpo em equilíbrio térmico. A percepção dessa correspondência entre as leis pode oferecer uma chave para uma compreensão mais profunda.

Quando um buraco negro se forma a partir de um colapso gravitacional, ele rapidamente atinge um estado estacionário, definido por três parâmetros principais: massa, momento angular e carga elétrica. Para além dessas três características, o buraco negro não retém nenhuma outra informação sobre o objeto que sofreu o colapso. Esse conceito ficou conhecido como o teorema dos “buracos negros sem cabelos” [60].

Quando um buraco negro consome um corpo quente que carrega uma determinada quantidade de entropia, um observador externo percebe uma redução na entropia total da região do universo que pode ser examinado. Embora seja possível, de modo formal, atribuir a entropia perdida à área interna do buraco negro, essa solução se mostra inadequada, pois qualquer tentativa de mensurar a entropia absorvida falha. Isso ocorre porque, logo após a ingestão, o buraco negro alcança um estado estacionário e, em virtude do teorema da “calvície”, perde toda a informação detalhada, como a estrutura e a entropia do corpo consumido [54].

Visto que não estamos inclinados a abandonar a lei da entropia apenas porque

um buraco negro se formou em algum lugar do Universo, devemos concluir que qualquer buraco negro, por si só, possui uma certa quantidade de entropia e que um corpo quente que cai nele não só transfere sua massa, momento angular e carga elétrica para o buraco negro, mas também sua entropia S . Foi inicialmente apontado por [61] que uma relação próxima poderia existir entre certas leis satisfeitas pelos buracos negros na relatividade geral clássica e as leis comuns da termodinâmica. O teorema da área da relatividade geral clássica afirma que a área, A , de um buraco negro nunca pode diminuir em qualquer processo:

$$\Delta A \geq 0. \quad (2.19)$$

De fato, o teorema da área de Hawking implica que a área A não diminui em nenhum processo clássico; ou seja, comporta-se como a entropia faz[60]. Verificou-se que a analogia entre a física dos buracos negros e a termodinâmica.

Esse resultado é muito análogo à afirmação da segunda lei ordinária da termodinâmica: a entropia total, S , de um sistema fechado nunca diminui em nenhum processo:

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.20)$$

Pouco tempo depois, a analogia entre certas leis da física dos buracos negros na relatividade geral clássica e as leis da termodinâmica foi desenvolvida sistematicamente por [59]. Os autores demonstraram que, na relatividade geral, a gravidade superficial, k , de um buraco negro estacionário deve ser constante no horizonte de eventos. Eles observaram que esse resultado é análogo à lei zero da termodinâmica, segundo a qual a temperatura T , deve ser uniforme em um corpo em equilíbrio térmico. Com isso, Bardeen, Carter e Hawking provaram o que vinha a ser a “primeira lei da mecânica do buraco negro”. No caso do vácuo, esta lei afirma que as diferenças em massa M , área A e momento angular J , de dois buracos negros estacionários próximos devem ser relacionados por [62]:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} k \delta A + \Omega \delta J, \quad (2.21)$$

onde Ω indica a velocidade angular do horizonte do evento. Os termos adicionais podem aparecer no lado direito da eq. (2.21) quando campos de matéria estão presentes. Eles observaram que esta lei é intimamente análoga à primeira lei ordinária da termodinâmica, que afirma que as diferenças de energia E , entropia e outros parâmetros de estado de dois estados de equilíbrio térmico próximos de um sistema são dadas por:

$$\delta E = T\delta S + \xi \quad (2.22)$$

ξ são os “termos de trabalho”

Se compararmos as Leis zero, primeira e segunda da termodinâmica, seus correspondentes nas “Leis da mecânica do buraco negro”, percebemos a analogia das quantidades:

$$E \leftrightarrow M \quad (2.23)$$

$$T \leftrightarrow \alpha k \quad (2.24)$$

$$S \leftrightarrow \frac{A}{8\pi\alpha} \quad (2.25)$$

α é uma constante indeterminada

Essa relação é de tamanha importância, porque decorre do fato de que E e M representam a mesma quantidade física, ou seja, a energia total do sistema. No entanto, na relatividade geral clássica, a temperatura física de um buraco negro é zero absoluto, isso nos leva a pensar que não pode haver relação física entre T e k . Consequentemente, também seria inconsistente assumir uma relação física entre S e A . Por esse motivo, no momento em que apareceu em [59], a maioria dos pesquisadores viu a analogia entre os buracos negros e as leis termodinâmicas como uma curiosidade matemática, sem qualquer significado físico.

Por fim, considerando a terceira lei da termodinâmica, que impede a obtenção de uma temperatura igual a zero, conclui-se que a gravidade de superfície de um buraco negro nunca poderá ser nula [63]. Para que essa condição se mantenha de maneira consistente, é necessário que o buraco negro emita radiação térmica com uma temperatura determinada

por uma relação específica [64]. Essa interpretação, contudo, sofreu uma transformação com a descoberta de Hawking, que mostrou que, em razão dos efeitos quânticos de criação de partículas, o buraco negro irradia um número infinito de espécies com um espectro de corpo negro perfeito, à temperatura dada pela seguinte relação:

$$T_H = \frac{k}{2\pi}, \quad (2.26)$$

Assim, a temperatura física de um buraco negro não é apenas uma quantidade que desempenha um papel unicamente matemático, mas sim algo análogo à temperatura nas leis da mecânica dos buracos negros. Desse modo, o cálculo de Hawking da criação de partículas forneceu uma resposta ressonantemente positiva à questão de saber se existe algum significado físico para a relação matemática entre as leis da mecânica dos buracos negros e as leis da termodinâmica.

Podemos encontrar a entropia pela seguinte expressão:

$$S = \int \frac{dM}{T_H}. \quad (2.27)$$

Podemos compreender como a entropia de um buraco negro se relaciona diretamente com sua massa e, indiretamente, com a área do horizonte de eventos. Essa expressão decorre da aplicação do primeiro princípio da termodinâmica aos buracos negros, onde a variação de energia dM (ou, equivalentemente, variação de massa) está associada à emissão de radiação térmica com temperatura T_H .

Na Termodinâmica Clássica, um sistema pode manter-se em equilíbrio térmico ao ser colocado em contato com um grande reservatório de energia, cuja temperatura permanece praticamente constante. Se o sistema estiver mais frio que o reservatório, ele absorve calor até atingir o equilíbrio; se estiver mais quente, cede energia ao reservatório até que as temperaturas se igualem. Entretanto, ao analisamos um buraco negro, o cenário se torna radicalmente distinto [65, 66].

Devido à radiação de Hawking, a massa do buraco negro não é uma quantidade

estática: ela varia ao longo do tempo e, com ela, a temperatura do buraco negro também muda. Esse comportamento dinâmico torna inviável a manutenção de um equilíbrio térmico estável com o ambiente por períodos prolongados, pois a troca de energia resulta em variações contínuas da massa e da temperatura do buraco negro. Essa peculiaridade evidencia a diferença fundamental entre os buracos negros e os sistemas tradicionais estudados na Termodinâmica Clássica.

Um aspecto surpreendente surge ao se considerar o comportamento da capacidade térmica dos buracos negros. Em modelos nos quais se observa que a temperatura varia inversamente com a massa, isto é, $T \propto \frac{1}{M}$, a adição de energia pode, de forma contraintuitiva, reduzir a temperatura. Essa característica reflete em uma capacidade térmica negativa: para sistemas com essa propriedade, a absorção de calor conduz ao resfriamento, em contraste com o aquecimento usual de sistemas com capacidade térmica positiva. Esse efeito tem implicações importantes para a estabilidade termodinâmica do buraco negro, dificultando o estabelecimento de um equilíbrio estável com o ambiente externo.

Além disso, conforme o buraco negro irradia energia e sua massa diminui, seu horizonte, ou raio, também se reduz. Quando esse raio se aproxima da escala de Planck (da ordem de $\sim 10^{-33}$ cm), os efeitos da gravidade quântica passam a predominar, e o formalismo clássico da Relatividade Geral deixa de ser aplicável. Nesse estágio final, pode ocorrer a estabilização do buraco negro na forma de um “remanescente” microscópico que não irradia. Uma hipótese sugerida é que a área do horizonte seja quantizada em níveis discretos, de forma que o buraco negro se estabilize ao atingir a menor área permitida, conduzindo à emissão de quanta de radiação de Hawking.

No caso de buracos negros rotativos, isto é, aqueles que possuem um momento angular J não nulo, o sistema apresenta graus de liberdade adicionais associados à rotação. Dessa forma, além da energia relacionada à massa, pode-se realizar trabalho variando J , e a primeira lei da termodinâmica é modificada para incluir os termos de trabalho correspondentes.

Para se obter uma descrição termodinâmica completa, é comum associar a energia

do buraco negro de Schwarzschild à sua temperatura por meio da relação

$$E(T) = M = \frac{1}{8\pi T}, \quad (2.28)$$

a partir da qual se deduz que a capacidade térmica do buraco negro é

$$C_{BH} = \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{8\pi T^2} < 0. \quad (2.29)$$

Esse resultado confirma a peculiaridade dos buracos negros: ao absorverem energia, eles esfriam, evidenciando uma capacidade térmica negativa.

Nas próximas seções, veremos como se aplica essas equações da termodinâmica para buracos negros estacionários, como o de Schwarzschild e na métrica BTZ.

2.5.1 Termodinâmica para a métrica de Schwarzschild

Para uma métrica estática, a gravidade de superfície pode ser obtida a partir do componente temporal $g_{00}(r)$ da métrica. Assim, da equação (2.26) temos:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_H}. \quad (2.30)$$

Na situação que a métrica é diagonal, com

$$g_{00} = \frac{1}{g_{11}}, \quad (2.31)$$

a gravidade de superfície é dada por:

$$T_H = \frac{1}{2} \left. \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_H}. \quad (2.32)$$

Considerando que, para a métrica (2.10), temos:

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2.33)$$

primeiramente, calculamos sua derivada:

$$\frac{dg_{00}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{2M}{r^2}. \quad (2.34)$$

Avaliamos então a derivada no horizonte $r_H = 2M$:

$$\left. \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=2M} = \frac{2M}{(2M)^2} = \frac{2M}{4M^2} = \frac{1}{2M}. \quad (2.35)$$

Substituindo este resultado na equação (2.30), obtemos:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2M} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (2.36)$$

Este resultado demonstra que a temperatura Hawking é inversamente proporcional à massa M do buraco negro. Assim, quanto maior a massa, menor é a radiação de Hawking e, conseqüentemente, menos intensa é a emissão de radiação.

Com o Resultado obtido acima, podemos encontrar a entropia, através da equação (3.47), que nos dá:

$$S = \int \frac{dM}{T_H} \quad (2.37)$$

$$S = \int 3\pi M dM = 4\pi M^2 = \pi r_h^2, \quad (2.38)$$

onde r_h é o raio do horizonte de Schwarzschild. Ao reescrever este resultado em termos da área de uma esfera:

$$S = \frac{A}{4}. \quad (2.39)$$

Esta equação mostra que a entropia não é uma quantidade volumétrica, mas sim proporcional à área do horizonte de eventos, reforçando a ideia de que a informação (ou o conteúdo termodinâmico) de um BN estáticos está associada à sua “superfície” e não ao seu volume interno. Essa conclusão foi inicialmente sugerida por Bekenstein e posteriormente corroborada pelo cálculo de Hawking e ficou conhecida como fórmula de

Bekeinstein-Hawking.

Podemos demonstrar a capacidade térmica C do buraco negro, definida por

$$C \equiv \frac{dE}{dT} = \frac{dM}{dT}. \quad (2.40)$$

Primeiro, diferenciamos a relação da temperatura em função da massa:

$$T(M) = \frac{1}{8\pi M} \implies \frac{dT}{dM} = -\frac{1}{8\pi M^2}, \quad (2.41)$$

em seguida, utilizando a regra de inversão para derivadas, obtemos:

$$\frac{dM}{dT} = \left(\frac{dT}{dM} \right)^{-1} = -8\pi M^2. \quad (2.42)$$

Portanto, a capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild é

$$C = \frac{dM}{dT} = -8\pi M^2. \quad (2.43)$$

O sinal negativo indica que o buraco negro possui capacidade térmica negativa, ou seja, quando ele absorve energia (aumenta sua massa), sua temperatura diminui, e quando perde energia (evapora), sua temperatura aumenta. Este comportamento é uma das características peculiares dos buracos negros de Schwarzschild.

Essa relação é um dos resultados mais intrigantes da termodinâmica dos buracos negros e sugere uma conexão profunda entre gravitação, termodinâmica e teoria da informação.

2.5.2 Termodinâmica para a métrica BTZ

Nesta seção, analisaremos as propriedades termodinâmicas do buraco negro BTZ a partir da métrica dada por (2.13). A abordagem aqui apresentada destaca como a termodinâmica do buraco negro surge a partir da estrutura geométrica da métrica.

Inicialmente, a temperatura Hawking T_H pode ser obtida pela derivada do potencial gravitacional associado à componente temporal do métrico. Para a métrica BTZ, essa derivada leva em conta os termos que dependem de r na função [67, 68, 69, 70]:

$$-g_{00}(r) = - \left[-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right]. \quad (2.44)$$

Para determinar a temperatura de Hawking aplicamos a equação[18]:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.45)$$

onde

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \chi_\nu \nabla^\mu \chi^\nu \Big|_{r=r_+}, \quad (2.46)$$

é a gravidade de superfície, sendo $\chi^\mu = (1, 0, \Omega)$ o campo de Killing, com

$$\Omega \equiv - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_{r=r_+}, \quad (2.47)$$

a velocidade angular no horizonte de eventos, r_+ .

Assim, podemos calcular a temperatura de Hawking utilizando a seguinte fórmula:

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{h}{4fr^2 + J^2} \left[r^2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - 2J\Omega r \frac{df}{dr} - 4\Omega^2 r^2 f \right] \right\}_{r=r_+}^{1/2}, \quad (2.48)$$

onde $\Omega = J/2r_+^2$.

Em resumo, a análise termodinâmica do buraco negro BTZ fundamenta-se na obtenção da temperatura por meio da derivada do potencial gravitacional da métrica, seguida pela integração dos termos correspondentes à variação do horizonte para obtenção da entropia. Esses passos evidenciam a profunda conexão entre a geometria do espaço-tempo e as propriedades termodinâmicas, reforçando a visão de que as características do horizonte (por exemplo, sua área ou extensão) carregam a informação termodinâmica do buraco negro.

Uma vez determinada a temperatura Hawking para a métrica BTZ, podemos utilizá-la na expressão termodinâmica para calcular a entropia do buraco negro. Nesse procedimento, partimos da relação geral (definida na equação (2.27)) que integra a variação da entropia em função da massa do buraco negro, dM . No entanto, para o caso do BTZ é conveniente reparametrizar essa integral em termos do raio do horizonte r_+ . Essa mudança é possível devido à relação diferencial estabelecida na equação (2.16), que conecta dM a dr_+ .

A integral para a entropia passa a ser escrita da seguinte forma:

$$S = \int 2\pi r_+ \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right)^{-1} \left(\frac{2r_+}{l^2} - \frac{J^2}{2r_+^3} \right) dr_+. \quad (2.49)$$

Nesta expressão, os fatores resultam da combinação entre a derivada do potencial (relacionada à temperatura) e a reparametrização de dM em dr_+ . Observando atentamente, nota-se que os termos dependentes de r_+ , tanto no integrando quanto no denominador da fração, cancelam-se, simplificando a integral:

$$2\pi r_+ \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right)^{-1} \left(\frac{2r_+}{l^2} - \frac{J^2}{2r_+^3} \right) = 4\pi. \quad (2.50)$$

Assim, a integral se reduz a

$$S = \int 4\pi dr_+. \quad (2.51)$$

Integrando, obtemos:

$$S = 4\pi r_+ + \text{constante}, \quad (2.52)$$

e, ao escolher a constante de integração nula para garantir que a entropia desapareça quando o horizonte é reduzido a zero, resulta-se em [19]:

$$S = 4\pi r_+. \quad (2.53)$$

Considerando que, em $(2+1)$ -dimensões, o “elemento de área” do buraco negro é proporcional à circunferência do horizonte, definimos a área (ou melhor, a medida geométrica

associada ao horizonte) como:

$$A = 4\pi r_+. \quad (2.54)$$

Portanto, a entropia do buraco negro BTZ é expressa, de forma elegante, como

$$S = A. \quad (2.55)$$

Essa derivação evidencia de maneira clara como os aspectos termodinâmicos do buraco negro, em particular a entropia, estão diretamente relacionados às propriedades geométricas do horizonte de eventos. O fato de a entropia ser proporcional à “área” do horizonte em (2+1) dimensões reforça a ideia de que, mesmo em dimensões inferiores, a informação termodinâmica está intimamente conectada à geometria do espaço-tempo.

O buraco negro BTZ em $(2 + 1)$ -dimensões é definido pela métrica que, para o caso sem rotação ($J = 0$), pode ser escrita de modo que a massa total do sistema seja dependente do raio do horizonte r_+ . Neste contexto, a temperatura de Hawking T e a massa M do buraco negro estão relacionadas por expressões derivadas das condições de regularidade no horizonte de eventos.

A capacidade térmica de um buraco negro é definida como a taxa de variação da massa (energia) em relação à temperatura:

$$C = \frac{\partial M}{\partial T}. \quad (2.56)$$

Contudo, muitas vezes é mais conveniente expressar tanto M quanto T em função do raio do horizonte r_+ . Nesses casos, recorre-se à relação de cadeia [64]:

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial r_+} \left(\frac{\partial T}{\partial r_+} \right)^{-1}. \quad (2.57)$$

Para o buraco negro BTZ sem rotação ($J = 0$), a massa $M(r_+)$ e a temperatura $T(r_+)$ podem ser obtidas a partir da solução da métrica correspondente. Após a devida análise, encontra-se, de modo esquemático, que:

1. A massa do buraco negro é proporcional a r_+^2 ;
2. A temperatura de Hawking depende linearmente de r_+ .

Dessa forma, a aplicação direta de (2.57) fornece

$$C = 4\pi r_+. \quad (2.58)$$

É imediato observar que

$$C > 0 \quad \text{para } r_+ > 0, \quad (2.59)$$

indicando uma capacidade térmica *positiva*.

O fato de $C = 4\pi r_+$ ser positivo implica que, quando o buraco negro BTZ recebe energia (aumentando sua massa), sua temperatura se eleva de maneira compatível com sistemas termodinamicamente estáveis. Isso contrasta com o caso dos buracos negros de Schwarzschild em (3+1)-dimensões, cuja capacidade térmica é negativa. Assim, no contexto do buraco negro BTZ sem rotação, podemos concluir que ele apresenta um comportamento termodinâmico estável, ao menos no que diz respeito à capacidade de trocar calor com o ambiente.

Em (2+1)-dimensões, a “área” do horizonte de eventos de um buraco negro é dada, na realidade, pela circunferência do horizonte:

$$A = 2\pi \times (2r_+) = 4\pi r_+. \quad (2.60)$$

Portanto, a igualdade $C = 4\pi r_+$ mostra que, para o caso BTZ ($J = 0$), a capacidade térmica coincide exatamente com a área do horizonte:

$$C = A. \quad (2.61)$$

A partir da interpretação de Bekenstein-Hawking, a entropia de um buraco negro é proporcional à área de seu horizonte de eventos. No caso de (2 + 1)-dimensões, pode-se

demonstrar que

$$S \propto A = 4\pi r_+. \quad (2.62)$$

Isso reforça a íntima relação entre a estrutura geométrica do buraco negro e as quantidades termodinâmicas: a área atua como um análogo da “superfície termodinâmica”, enquanto o valor de C reflete a maneira como o buraco negro responde a trocas de energia.

O cálculo da capacidade térmica para o buraco negro BTZ com $J = 0$ ilustra como métricas de gravitação em baixa dimensão podem exibir comportamentos termodinâmicos notavelmente diferentes de suas contrapartes em $(3 + 1)$ -dimensões. A positividade de C implica que o buraco negro é, de certa forma, mais semelhante a um fluido térmico estável, pois aumenta sua temperatura à medida que ganha energia. Além disso, a equivalência entre C e a *área* do horizonte neste cenário particular salienta mais uma vez a profunda conexão entre os aspectos geométricos e termodinâmicos do espaço-tempo.

Implicações e Perspectivas Futuras

A termodinâmica dos buracos negros tem implicações que vão muito além da simples analogia com sistemas termodinâmicos usuais:

Princípio Holográfico:

A proporcionalidade entre a entropia e a área (e não o volume) do horizonte de eventos inspirou o desenvolvimento do princípio holográfico, que postula que toda a informação contida em uma região do espaço pode ser representada por uma teoria que vive na fronteira dessa região. Essa ideia tem sido fundamental no desenvolvimento da correspondência AdS/CFT e na busca por uma teoria unificada da gravidade e mecânica quântica [71, 72, 73].

Contagem de Microestados:

A dificuldade de se associar um grande número de microestados aos buracos negros — inicialmente sugerida pelos teoremas “sem cabelos” — levou a intensos esforços para explicar a entropia de Bekenstein–Hawking. Em 1995, cálculos em teorias de cordas, como os de Strominger e Vafa, conseguiram reproduzir essa entropia para certos buracos negros

extremais, abrindo caminho para uma interpretação estatística da entropia. Abordagens em gravitação quântica em loop também oferecem perspectivas interessantes, associando os microestados a configurações quânticas da geometria do horizonte [74, 75].

Estabilidade Termodinâmica e Fases:

A capacidade térmica negativa dos buracos negros (em particular, os não rotativos) indica que eles não podem ser estabilizados em um ensemble canônico simples, mas podem ser tratados adequadamente em um ensemble microcanônico. Além disso, estudos em contextos anti-de Sitter sugerem a existência de transições de fase (como a transição Hawking–Page), que podem ter implicações importantes para a termodinâmica de sistemas gravitacionais e para a dualidade AdS/CFT [76].

Observações e Analogias Experimentais:

Embora a radiação de Hawking seja extremamente fraca para buracos negros astrofísicos, experimentos em laboratório utilizando sistemas análogos — como buracos negros acústicos — têm sido propostos para investigar os fundamentos da termodinâmica dos buracos negros. Esses sistemas simulados podem reproduzir, em regimes controlados, aspectos da radiação de Hawking e da termodinâmica associada, contribuindo para a validação experimental dessas teorias [77, 78].

Correções Quânticas para Termodinâmica dos Buracos Negros

A unificação da mecânica quântica com a gravidade representa um dos desafios mais profundos da física teórica, especialmente em escalas nas quais as descrições clássicas da gravidade deixam de ser válidas, como ocorre nas singularidades gravitacionais. Nesses regimes extremos, próximos à escala de Planck ($l_p \sim 10^{-35}m$), os efeitos quântico-gravitacionais tornam-se predominantes, exigindo uma reformulação da noção convencional de espaço-tempo.

Uma das abordagens promissoras para descrever essa nova estrutura é a introdução da não comutatividade, que modifica a geometria do espaço-tempo ao incorporar relações de incerteza generalizadas. Essa ideia está intimamente ligada ao conceito de um comprimento mínimo universal, um limite fundamental para a precisão com que podemos sondar distâncias microscópicas. A existência desse comprimento mínimo pode atuar como um mecanismo natural de regularização da física em regimes de altas energias, evitando singularidades e oferecendo novos insights sobre a estrutura quântica do espaço-tempo.

Neste capítulo, examinaremos em detalhes a conexão entre a geometria não comutativa e o comprimento mínimo, mostrando como a deformação das relações de comutação das coordenadas implicam a existência de uma escala fundamental na estrutura do espaço-tempo. Em seguida, investigaremos as consequências físicas desse limite, com ênfase nas correções quânticas que afetam a temperatura de Hawking de buracos negros de Schwarzschild e BTZ em cenários não comutativos. Por fim, apresentaremos o cálculo das correções provenientes do comprimento mínimo em um buraco negro BTZ, avaliando como esses parâmetros modificam sua termodinâmica e estabilidade térmica em regimes

de altas energias.

3.1 Aspectos Gerais

A ideia de não comutatividade teve origem nos estudos de Werner Heisenberg sobre os problemas de divergência ultravioleta na eletrodinâmica quântica. No entanto, foi H. S. Snyder [79] quem formalizou essa ideia, propondo um modelo de espaço-tempo no qual as coordenadas não comutam, introduzindo, assim, um comprimento mínimo universal $\sqrt{\theta}$. Esse comprimento mínimo está intimamente ligado à escala de Planck, uma barreira que limita a nossa capacidade de observação em pequenas distâncias [80].

Essa proposta estabelece uma nova maneira de abordar a estrutura do espaço-tempo, especialmente em energias muito altas, como as associadas às singularidades gravitacionais. No contexto da gravidade quântica, a escala de comprimento mínimo desempenha um papel crucial, pois regula os efeitos divergentes que surgem quando tentamos aplicar teorias clássicas em regimes ultravioleta.

Embora o comprimento de Planck ($l_p \sim 10^{-35}$, m) seja geralmente inacessível para experimentos diretos, existem teorias que sugerem alternativas observacionais. Por exemplo, em cenários com grandes dimensões extras, como os propostos por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [81], as energias associadas à gravidade quântica podem ser reduzidas a escalas acessíveis em aceleradores de partículas como o LHC.

Essa possibilidade abriu uma janela para testar experimentalmente os efeitos da não comutatividade e da gravidade quântica, como a produção de mini buracos negros em colisões hadrônicas de alta energia [82, 83]. A detecção desses buracos negros e a análise de seus produtos de decaimento seriam evidências inequívocas da gravidade quântica TeV. Contudo, a fase final de evaporação desses buracos negros permanece um tema de debate, especialmente porque as correções quânticas ao modelo semi-clássico de Hawking ainda não são totalmente compreendidas.

3.2 Interpretação Física e Implicações

A incorporação de um comprimento mínimo na descrição do espaço-tempo tem implicações profundas e abrangentes na física teórica, oferecendo soluções naturais para diversos problemas fundamentais. Em teorias de campo quântico, essa escala atua como um regulador ultravioleta, eliminando as divergências que emergem da suposição de um espaço-tempo infinitamente contínuo [84]. No âmbito dos buracos negros, a existência de um comprimento mínimo é crucial para evitar a formação de singularidades gravitacionais, possibilitando uma nova interpretação da estrutura interna desses objetos extremos [2].

No contexto da teoria de cordas, a não comutatividade das coordenadas espaço-temporais surge de forma natural como consequência da extensão finita das cordas fundamentais. Essa característica implica que, abaixo da escala de Planck ℓ_p , a definição precisa do espaço-tempo torna-se inviável, exigindo uma reformulação da álgebra canônica e da própria geometria que o descreve [85]. Tal perspectiva reforça a necessidade de repensar a estrutura do espaço-tempo em regimes de energias extremamente elevadas.

Além disso, a geometria não comutativa desponta como uma abordagem matemática promissora para a unificação da mecânica quântica com a gravidade. Ao regularizar os problemas ultravioleta e impor limites naturais ao colapso gravitacional, essa estrutura abre novas possibilidades para a exploração da física em escalas microscópicas, oferecendo insights valiosos sobre a gravidade quântica, o comportamento do espaço-tempo em altas energias e a origem da própria estrutura do universo [86, 87, 88].

A existência de um comprimento mínimo, da ordem de ℓ_p , é uma conclusão amplamente aceita, derivada da combinação dos princípios da mecânica quântica e da relatividade geral clássica. Nesse cenário, não há qualquer procedimento operacional capaz de mensurar distâncias inferiores à ordem de ℓ_p , pois os efeitos do princípio da incerteza e do colapso gravitacional (por meio da formação de buracos negros) se tornam inevitáveis. Utilizando o modelo de dispersão de massa em buracos negros, estudamos a termodinâmica desses objetos em dois contextos distintos: o buraco negro Schwarzschild-AdS autorregulado, cuja densidade de massa se assemelha às distribuições de probabilidade

dos estados atômicos do hidrogênio, e modelos em diferentes dimensões espaço-temporais, incluindo abordagens em $(2+1)$ dimensões. Tais estudos revelam não apenas a existência de uma massa mínima para os buracos negros, mas também como as relações de dispersão modificadas influenciam o decaimento de Hawking, enriquecendo nossa compreensão dos fenômenos quânticos associados à gravidade.

3.3 A Geometria Não Comutativa

A geometria não comutativa é uma extensão natural da mecânica quântica, onde o espaço de fases — composto por posições generalizadas x^μ e seus momentos conjugados p_ν — é promovido a um espaço de operadores $\hat{x}^\mu$ e $\hat{p}_\nu$. Esses operadores obedecem à relação de comutação de Heisenberg:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta_\nu^\mu. \quad (3.1)$$

No entanto, na geometria não comutativa, as próprias coordenadas do espaço-tempo x^μ não comutam entre si, passam a ser operadores hermitianos, obtendo-se a relação de comutação [28]:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $\Theta^{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica que caracteriza a extensão da não comutatividade do espaço-tempo e com dimensão de comprimento ao quadrado [89].

3.4 Soluções do Buraco Negro em Gravidade Não comutativa

A formulação de uma versão completa e não comutativa da Relatividade Geral é um negócio de interesse primário e atualmente é objeto de uma vasta literatura. No momento, apesar do trabalho promissor neste campo, ainda estamos longe de uma teoria amplamente reconhecida de Gravidade não comutativa, que, em algum sentido, é esperado para fornecer a transição do diferencial suave para o fibroso (ou loopy) do espaço-tempo.

Nesta seção não discutiremos a precisão dos modelos propostos de gravidade não comutativa na literatura, mas apresentaremos a formulação que concretamente conduziu a novas métricas, obtidas por meio da resolução, exatamente ou aproximadamente, da versão não comutativa das equações de Einstein, a fim de estudar os efeitos fisicamente confiáveis na física dos buracos negros resultantes, definindo o elemento de linha equivalente a formulação não comutativa e observando se há algum tipo de mudança nas singularidades que ocorrem no espaço-tempo convencional.

3.4.1 A não comutatividade na métrica de Schwarzschild

Em [89] seus autores mostraram que os restos finais de um Buraco Negro, no plano de fundo não comutativo, constituem um objeto termodinâmico estável. Este foi o primeiro trabalho que abordou os estudos de Buraco Negro de Schwarzschild não comutativo.

A não comutatividade elimina estruturas semelhantes a pontos em favor de objetos manchados em espaço-espaço plano. O efeito de “mancha” é implementado substituindo a função delta de Dirac pela distribuição Gaussiana da largura $\sqrt{\theta}$ [89].

Felizmente, não se faz necessário modificar o tensor de Einstein presente nas equações de campo gravitacionais, uma vez que os efeitos da não comutatividade podem ser incorporados diretamente na descrição da fonte de matéria. O que sabemos com certeza, é que a não comutatividade é uma propriedade intrínseca próprio da dimensão, enquanto a curvatura mede a força do campo métrico, isto é, a resposta à presença de uma distribuição em massa de energia. Inspirado por este resultado, a não comutatividade no buraco negro de Schwarzschild, tomando a densidade de massa para ser uma distribuição Gaussiana é dado por [89]:

$$\rho_{\theta}(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{(-r^2/4\theta)}. \quad (3.3)$$

A massa M da partícula, em vez de ser perfeitamente localizada no ponto, é distribuída através da região de tamanho linear $\sqrt{\theta}$. Isso ocorre devido à incerteza generalizada do comutador de coordenadas.

Usando a eq. (3.3) podemos escrever a massa do buraco negro de Schwarzschild

não comutativo de raio r da seguinte maneira [90]:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_\theta(r) dr = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (3.4)$$

onde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \equiv \int_0^{r^2/4\theta} x^{1/2} e^{-x} dx, \quad (3.5)$$

é a função γ e θ é o parâmetro de não comutatividade.

A métrica do Buraco Negro de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = -f_\theta(r) dt^2 + f_\theta(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.6)$$

onde

$$f_\theta(r) = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (3.7)$$

e

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2. \quad (3.8)$$

O raio do horizonte de evento é encontrado quando a componente g_{11} diverge, o que é análogo a fazer $f_\theta(r) = 0$. Desta forma temos:

$$\hat{r}_H = 2M \left[1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi}\theta} e^{-M^2/\theta} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right]. \quad (3.9)$$

O efeito da não comutatividade é exponencialmente pequeno, o que é razoável esperar, pois em grandes distâncias o espaço-tempo recupera o regime clássico. Ou seja, a equação acima se reduz ao horizonte de eventos para o caso comutativo, $\hat{r}_h = 2M$.

Nestas condições, a temperatura Hawking toma a seguinte forma:

$$T = \frac{1}{4\pi r_H} \left(1 - \frac{r_H^3}{4\theta^{3/2} \gamma(3/2, r_H^2/4\theta)} e^{-r_H^2/4\theta} \right), \quad (3.10)$$

ou

$$T = \frac{1}{8\pi M} - \frac{M}{2\sqrt{\pi^3\theta}} e^{-M^2/\theta} \left(\frac{M}{\sqrt{\theta}} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right). \quad (3.11)$$

Quando $\frac{M}{\sqrt{\theta}} \gg 1$ a equação (3.11) retornará ao caso convencional para a métrica de Schwarzschild, ou seja $T = \frac{1}{8\pi M}$.

Assim, a entropia é dada por:

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_H^2 \quad (3.12)$$

$$S = 4\pi M^2 - 16\sqrt{\pi}M^2 e^{-M^2/\theta} \left(\frac{M}{\sqrt{\theta}} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right). \quad (3.13)$$

Esta equação tem mesma função para o caso da Lei da área de Benkenstein-Hawking no espaço comutativo.

3.4.2 A métrica BTZ no espaço não comutativo

Para $(2 + 1)$ -dimensões, a fonte de energia localizada em uma distribuição estática e esfericamente simétrica com um perfil Gaussiano mínimo é tomada como:

$$\rho = \frac{M}{4\pi\theta} e^{-r^2/4\theta}, \quad (3.14)$$

sua distribuição de massa é dada por

$$m(r) = M \int_0^{r^2/4\theta} e^t dt = M \left(1 - e^{-r^2/4\theta} \right). \quad (3.15)$$

Considere que,

$$r_H^2 = \frac{M}{\Lambda} \left(2e^{-r_H^2/4\theta} \right). \quad (3.16)$$

Ao resolver as equações de Einstein, levando em consideração a métrica BTZ não comutativa, encontramos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\varphi + N^\varphi dt)^2, \quad (3.17)$$

em que,

$$f(r) = -8M(1 - e^{-r^2/4\theta}) + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad (3.18)$$

e

$$N^\varphi = -\frac{J}{2r^2}. \quad (3.19)$$

Para essas condições, a temperatura Hawking se dá pela seguinte equação[91]:

$$T_H = -\frac{r_H/\sqrt{\theta}}{4\pi} \left(2\Lambda\sqrt{\theta} + \frac{M}{\theta} e^{-r_H^2/4\theta} \right). \quad (3.20)$$

A equação acima a temperatura Hawking para o caso não comutativo, ou seja, levando em consideração a correção do parâmetro θ .

O próximo passo é encontrar as correções θ da entropia de Bekenstein-Hawking (S) do buraco negro de BTZ:

$$S = 4\pi r_H \approx 4\pi\sqrt{Ml} - 4\pi\sqrt{Ml} e^{-Ml^2/4\theta}, \quad (3.21)$$

onde o primeiro termo se diz respeito a entropia de Benkenstein-Hawking para o Buraco Negro BTZ e o segundo termo é a correção para a não comutatividade θ .

3.5 Correções Quânticas para a métrica BTZ tipo Schwarzschild

3.5.1 Métrica BTZ em uma geometria não comutativa

A seguir, adotamos a métrica BTZ em (2+1)-dimensões no contexto não comutativo por meio de uma distribuição de massa “espalhada” segundo uma função lorentziana centrada em uma esfera de raio r , dada por [24, 25]:

$$\rho_\theta = \frac{M_0\sqrt{\theta}}{2\pi(r^2 + \theta)^{3/2}}, \quad (3.22)$$

onde θ é o parâmetro não comutativo com dimensão de comprimento ao quadrado e M_0 é a massa total distribuída sobre a região de tamanho linear $\sqrt{\theta}$. Essa escolha garante que, mesmo no limite $r \rightarrow 0$, ρ_θ permaneça finito, evitando singularidades violentas e

alterando suavemente o tensor energia-momento.

Neste caso, a massa “manchada” é distribuída da seguinte forma [25]:

$$\mathcal{M} = \int_0^r \rho(r) 2\pi r dr = M_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r^2 + \theta}} \right). \quad (3.23)$$

Note que, quando $r \rightarrow \infty$, o parâmetro não comutativo desaparece, tornando-se assim uma massa pontual com valor M_0 , perdendo sua característica não comutativa.

Agora, utilizando a distribuição de massa $\mathcal{M}$, temos a métrica do buraco negro BTZ não comutativo e não rotativo, que é dada por [25]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (3.24)$$

onde a função métrica é dada por

$$f(r) = -\mathcal{M} + \frac{r^2}{l^2} = -M_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r^2 + \theta}} \right) + \frac{r^2}{l^2}. \quad (3.25)$$

Aqui, l é o raio de curvatura e fornece a escala de comprimento necessária para que haja um raio de horizonte de eventos.

Para $\theta \ll 1$, podemos escrever a função métrica da seguinte forma [25]:

$$f(r) = -M_0 + \frac{M_0\sqrt{\theta}}{r} + \frac{r^2}{l^2} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}). \quad (3.26)$$

Nesta aproximação, um termo do tipo Schwarzschild, $M_0\sqrt{\theta}/r$, é gerado com o efeito da não comutatividade. O impacto desse termo na termodinâmica do buraco negro BTZ foi investigado em [25], mostrando que um termo de correção logarítmica para a entropia é obtido. Além disso, ao se calcular a capacidade térmica, verificou-se a análise de estabilidade. Como resultado, torna-se um remanescente de buraco negro com uma massa mínima dependente do parâmetro θ .

Ao se definir $f(r) = 0$, o horizonte de eventos é dado por [25]

$$\tilde{r}_h \approx r_h - \frac{\sqrt{\theta}}{2}, \quad \text{ou} \quad \tilde{M} \approx \frac{r_h^2}{l^2} \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{r_h} \right) = M_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\theta}{l^2 M_0}} \right), \quad (3.27)$$

onde $r_h = \sqrt{l^2 M_0}$ é o horizonte de eventos do buraco negro BTZ usual.

Para a temperatura de Hawking, temos [25]:

$$\tilde{T}_H = \frac{\tilde{r}_h}{2\pi l^2} - \frac{M_0 \sqrt{\theta}}{4\pi \tilde{r}_h^2}. \quad (3.28)$$

Em termos de r_h , obtemos

$$\tilde{T}_H = \frac{r_h}{2\pi l^2} - \frac{\sqrt{\theta}}{4\pi l^2} - \frac{M_0 \sqrt{\theta}}{4\pi \left(r_h - \sqrt{\theta}/2 \right)^2}. \quad (3.29)$$

O resultado pode ser expresso em forma do tipo Schwarzschild da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_H = \frac{\tilde{T}_H}{M_0} = \frac{1}{2\pi \left[r_h + \sqrt{\theta} + \frac{\theta}{2r_h} \right]}. \quad (3.30)$$

Na Fig. 3.3, temos a temperatura de Hawking em função do raio do horizonte, r_h . Como mostrado no gráfico, obtemos a temperatura de Hawking para $\theta = 0$, $\theta = 0.03$ e $\theta = 0.05$.

A análise da derivada da temperatura, $d\mathcal{T}_H/dr_h = 0$, nos permite determinar o raio mínimo $r_{min} = \sqrt{\theta/2}$, correspondente à temperatura máxima. Note que a temperatura de Hawking atinge um ponto máximo antes de ir a zero quando o raio do horizonte, r_h , tende a zero, como mostrado na Fig. 3.3. Portanto, a não comutatividade tem o efeito de remover a singularidade da temperatura de Hawking.

Para este raio mínimo, a temperatura máxima é dada por:

$$\mathcal{T}_{max} = \frac{\mathcal{T}_H}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi(2 + \sqrt{2})r_{min}} = \frac{1}{2\pi(1 + \sqrt{2})\sqrt{\theta}}. \quad (3.31)$$

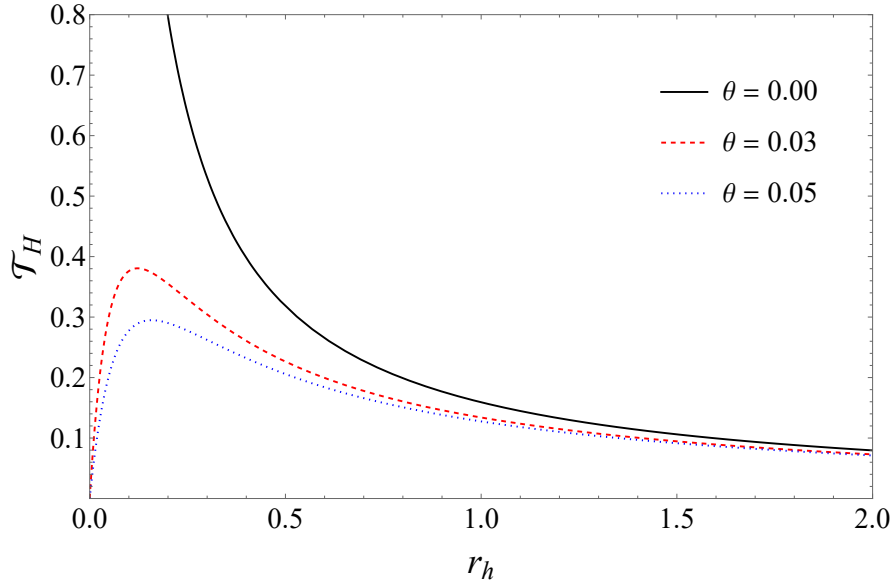


Figura 3.1: Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de não comutatividade: $\theta = 0$ (preto contínuo), representando o caso comutativo convencional; $\theta = 0.03$ (vermelho tracejado) e $\theta = 0.05$ (azul pontilhado), ilustrando como a não comutatividade regulariza o comportamento da temperatura para pequenos valores de r_h .

A título de ilustração, ao fixarmos o parâmetro de não comutatividade em $\theta = 0.03$, encontramos um raio mínimo $r_{min} = 0.122474$ e uma temperatura máxima $\mathcal{T}_{max} = 0.380613$. Aumentando ligeiramente a não comutatividade para $\theta = 0.05$, esses valores se ajustam para $r_{min} = 0.158114$ e $\mathcal{T}_{max} = 0.294822$. Essas mudanças, podem ser confirmadas de maneira intuitiva graficamente.

A entropia do buraco negro BTZ não comutativo pode ser determinada através da relação termodinâmica:

$$S = \int \frac{1}{\mathcal{T}_H} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} dr_h, \quad (3.32)$$

onde, a partir da Eq. 3.27, temos

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} \approx \frac{2r_h}{l^2} - \frac{\sqrt{\theta}}{l^2} = \frac{2M_0}{r_h} \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{2r_h} \right). \quad (3.33)$$

Assim, obtemos

$$\mathcal{S} = \frac{S}{M_0} = \int \frac{2}{r_h \mathcal{T}_H} \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{2r_h} \right) dr_h = 4\pi \int \left[1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2r_h} \right] dr_h, \quad (3.34)$$

$$= 4\pi r_h + 2\pi\sqrt{\theta} \ln r_h. \quad (3.35)$$

Este resultado revela uma característica fundamental: a não comutatividade introduz um termo de correção logarítmica na entropia do buraco negro BTZ. Esta correção logarítmica é consistente com resultados obtidos em diversas abordagens à gravidade quântica, sugerindo uma universalidade deste tipo de correção para a entropia de buracos negros quando efeitos quânticos são considerados[25, 92]. No limite $\theta = 0$, recuperamos a entropia do buraco negro BTZ convencional, $\mathcal{S} = 4\pi r_h$, confirmando a consistência do modelo.

A capacidade térmica, propriedade termodinâmica crucial para a análise de estabilidade, pode ser determinada através da relação:

$$C = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_H}{\partial r_h} \right)^{-1}. \quad (3.36)$$

Logo, encontramos

$$\mathcal{C} = \frac{C}{M_0} = -4\pi r_h \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\theta}}{r_h} \right) \left(1 + \frac{1}{r_h} \sqrt{\frac{\theta}{2}} \right) \left(1 - \frac{1}{r_h} \sqrt{\frac{\theta}{2}} \right). \quad (3.37)$$

Uma análise detalhada desta expressão revela um comportamento crítico: quando $r_{min} = \sqrt{\theta/2}$, a capacidade térmica se anula, indicando que o buraco negro BTZ não comutativo cessa sua evaporação, tornando-se um remanescente estável. Este fenômeno de “evaporação incompleta” representa uma modificação profunda do paradigma de Hawking, onde buracos negros convencionais evaporam completamente.

$$M_{min} = \frac{r_{min}^2}{l^2} = \frac{\theta}{2l^2} = -\frac{\Lambda\theta}{2}. \quad (3.38)$$

Esta expressão impõe uma restrição física importante: para que a massa mínima

seja positiva ($M_{min} > 0$), a constante cosmológica deve ser necessariamente negativa ($\Lambda < 0$), consistente com a geometria anti-de Sitter subjacente ao modelo BTZ.

No limite comutativo $\theta = 0$, a capacidade térmica reduz-se a $\mathcal{C} = -4\pi r_h$, correspondendo à capacidade térmica do buraco negro Schwarzschild projetado em três dimensões. O sinal negativo indica instabilidade termodinâmica, característica dos buracos negros Schwarzschild convencionais.

A Figura 3.2 ilustra o comportamento da capacidade térmica em função do raio do horizonte para diferentes valores do parâmetro de não comutatividade. Uma característica notável é a existência de uma região de estabilidade termodinâmica ($\mathcal{C} > 0$) para $0 < r_h \leq r_{min} = \sqrt{\theta/2}$, ausente no caso comutativo. Esta região de estabilidade é uma consequência direta da não comutatividade e tem profundas implicações para a evolução final dos buracos negros.

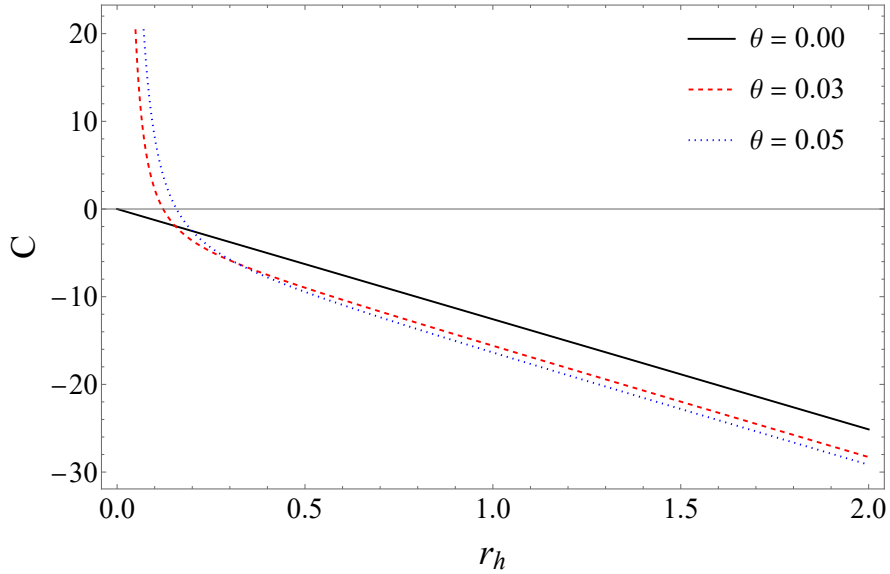


Figura 3.2: Capacidade térmica $\mathcal{C}$ em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de não comutatividade: $\theta = 0$ (preto contínuo), representando o caso comutativo convencional; $\theta = 0.03$ (vermelho tracejado) e $\theta = 0.05$ (azul pontilhado).

3.5.2 Distribuição do Tipo Exponencial

A introdução de um comprimento mínimo na geometria BTZ pode ser implementada por meio de uma modificação na distribuição de massa, substituindo a distribuição pontual convencional por uma distribuição suavizada que incorpora os efeitos da dis-

cretização do espaço-tempo em escalas próximas ao comprimento de Planck. Seguindo abordagens desenvolvidas em contextos de gravidade quântica, adotamos uma densidade de massa exponencialmente distribuída da seguinte forma [18, 93, 94]:

$$\rho(r) = \frac{M_0}{\gamma^2 \pi} e^{-4r/\gamma}, \quad (3.39)$$

onde M_0 representa a massa total distribuída sobre uma região de tamanho característico $\sqrt{\gamma}$, e γ é o parâmetro de comprimento mínimo, com dimensão de comprimento². Esta distribuição exponencial garante uma regularização natural da densidade de massa, evitando divergências mesmo no limite $r \rightarrow 0$.

A massa “manchada” resultante desta distribuição é obtida através da integração [18]:

$$\mathcal{M} = \int_0^r \rho(r) 2\pi r dr = M_0 \left[1 - \frac{(4r + \gamma)}{\gamma} e^{-4r/\gamma} \right]. \quad (3.40)$$

Esta expressão revela um comportamento assintótico importante: para $r \gg \gamma$, a massa efetiva aproxima-se do valor M_0 , recuperando o limite clássico onde os efeitos do comprimento mínimo são negligenciáveis. Contudo, para $r \sim \gamma$ ou menor, a distribuição de massa difere significativamente do caso pontual, modificando fundamentalmente a geometria do espaço-tempo nesta região.

O elemento de linha do espaço-tempo resultante é dado por:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.41)$$

onde a função métrica incorpora os efeitos do comprimento mínimo:

$$f(r) = -M_0 + \left[\frac{(8M_0 r + 2\gamma)}{\gamma} e^{-4r/\gamma} \right] + \frac{r^2}{l^2}. \quad (3.42)$$

Nesta expressão, l representa o raio de curvatura do espaço-tempo, relacionado à constante cosmológica negativa por $\Lambda = -1/l^2$. No limite $r/\gamma \rightarrow \infty$, a função métrica

converge para a expressão do buraco negro BTZ convencional, $f(r) = -M_0 + r^2/l^2$, demonstrando a consistência do modelo com a relatividade geral em escalas macroscópicas.

O raio do horizonte de eventos para esta métrica modificada (3.42) pode ser determinado resolvendo a equação $f(r) = 0$, resultando em:

$$r_H = r_h \left[1 - \left(\frac{l^2}{r_h^2} + \frac{4r_h}{\gamma} \right) e^{-4r_h/\gamma} \right] + \mathcal{O} \left(e^{-4r_h/\gamma} \right)^2, \quad (3.43)$$

onde $r_h = \sqrt{M_0 l^2}$ representa o horizonte de eventos do buraco negro BTZ não rotante convencional. Esta expressão demonstra como o comprimento mínimo modifica a localização do horizonte, tipicamente deslocando-o para um raio menor em comparação com o caso convencional.

A temperatura de Hawking, propriedade termodinâmica fundamental dos buracos negros, é calculada através da derivada da função métrica no horizonte:

$$T_H = \frac{f'(r_H)}{4\pi} = \frac{r_h}{2\pi l^2} - \frac{r_h}{2\pi l^2} \left[\frac{l^2}{r_h^2} + \frac{4r_h}{\gamma} + \frac{16r_h^2}{\gamma^2} \right] e^{-4r_h/\gamma}. \quad (3.44)$$

O resultado pode ser expresso em forma tipo Schwarzschild, dado por:

$$\mathcal{T}_H = \frac{T_H}{M_0} = \frac{1}{2\pi \left[r_h + \left(\frac{l^2}{r_h} + \frac{4r_h^2}{\gamma} + \frac{16r_h^3}{\gamma^2} \right) e^{-4r_h/\gamma} \right]}. \quad (3.45)$$

Uma característica notável desta equação é que, diferentemente do caso convencional onde a temperatura diverge para $r_h \rightarrow 0$, no caso modificado pelo comprimento mínimo a temperatura atinge um valor máximo finito antes de decrescer para zero quando o raio do horizonte tende a zero. Este comportamento, ilustrado na Figura 3.3, representa uma regularização física significativa, eliminando a singularidade térmica presente no modelo convencional.

A massa do buraco negro, considerando os efeitos do comprimento mínimo, pode

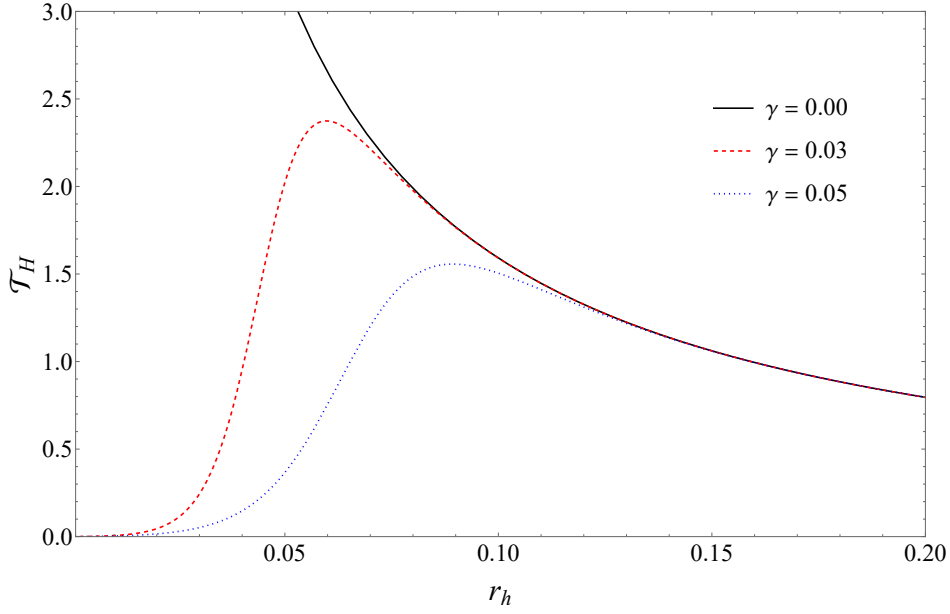


Figura 3.3: Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\gamma = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\gamma = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\gamma = 0.05$ (azul, pontilhado), assumindo $l = 1$. Observa-se que a introdução do comprimento mínimo regulariza o comportamento divergente da temperatura para pequenos valores de r_h , resultando em uma temperatura máxima finita seguida de um decréscimo para zero.

ser expressa como:

$$\tilde{M} = \frac{r_H^2}{l^2} \left[1 - 2 \left(\frac{l^2}{r_h^2} + \frac{4r_H}{\gamma} \right) e^{-4r_H/\gamma} \right]^{-1} = \frac{r_h^2}{l^2} + \left(e^{-4r_h/\gamma} \right)^2. \quad (3.46)$$

Esta expressão converge para a massa do buraco negro BTZ convencional, $M = r_h^2/l^2$, no limite $\gamma \rightarrow 0$ ou $r_h \gg \gamma$, demonstrando a consistência deste modelo com a relatividade geral.

A entropia do buraco negro BTZ com comprimento mínimo pode ser determinada através da relação termodinâmica:

$$S = \int \frac{1}{T_H} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} dr_h, \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} = \frac{2r_h}{l^2} = \frac{2M_0}{r_h}. \quad (3.47)$$

Substituindo a equação para a temperatura de Hawking (3.45) em (3.47), obtemos:

$$S = \int 2\pi r_h \left[1 + \left(\frac{l^2}{r_h^2} + \frac{4r_h}{\gamma} + \frac{16r_h^2}{\gamma^2} \right) e^{-4r_h/\gamma} + \dots \right] \left(\frac{2M_0}{r_h} \right) dr_h. \quad (3.48)$$

Assim, obtemos

$$\mathcal{S} = \frac{S}{M_0} = 4\pi r_h - 4\pi \left[\frac{3\gamma}{4} + \frac{\gamma l^2}{4r_h^2} + 3r_h + \frac{4r_h^2}{\gamma} \right] e^{-4r_h/\gamma} + \dots \quad (3.49)$$

Este resultado revela uma modificação significativa na entropia do buraco negro BTZ devido à introdução do comprimento mínimo. No limite $\gamma \rightarrow 0$, recuperamos a entropia do buraco negro BTZ convencional, $\mathcal{S} = 4\pi r_h$, confirmando a consistência do modelo.

A capacidade térmica, propriedade crucial para a análise de estabilidade termodinâmica, pode ser calculada através da relação:

$$C = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \mathcal{T}_H} = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_H}{\partial r_h} \right)^{-1}. \quad (3.50)$$

Então, encontramos

$$\mathcal{C} = \frac{C}{M_0} = -4\pi r_h \left[1 - \left(\frac{3l^2}{r_h^2} + \frac{4l^2}{\gamma r_h} + \frac{64r_h^3}{\gamma^3} \right) e^{-4r_h/\gamma} \right]. \quad (3.51)$$

Para o regime de comprimento mínimo pequeno, $\gamma \ll 1$, e considerando o termo dominante nesta expressão, obtemos:

$$\mathcal{C} \approx -4\pi r_h \left[1 - \frac{64r_h^3}{\gamma^3} e^{-4r_h/\gamma} \right]. \quad (3.52)$$

Uma análise detalhada desta equação revela um comportamento crítico: a capacidade térmica se anula quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\frac{r_h^3}{e^{4r_h/\gamma}} = \left(\frac{\gamma}{4} \right)^3. \quad (3.53)$$

Essa condição define um raio mínimo abaixo do qual o buraco negro cessa sua evaporação, tornando-se um remanescente estável. Este fenômeno de “evaporação incompleta” representa uma modificação profunda do paradigma de Hawking, segundo o qual buracos negros convencionais evaporam completamente.

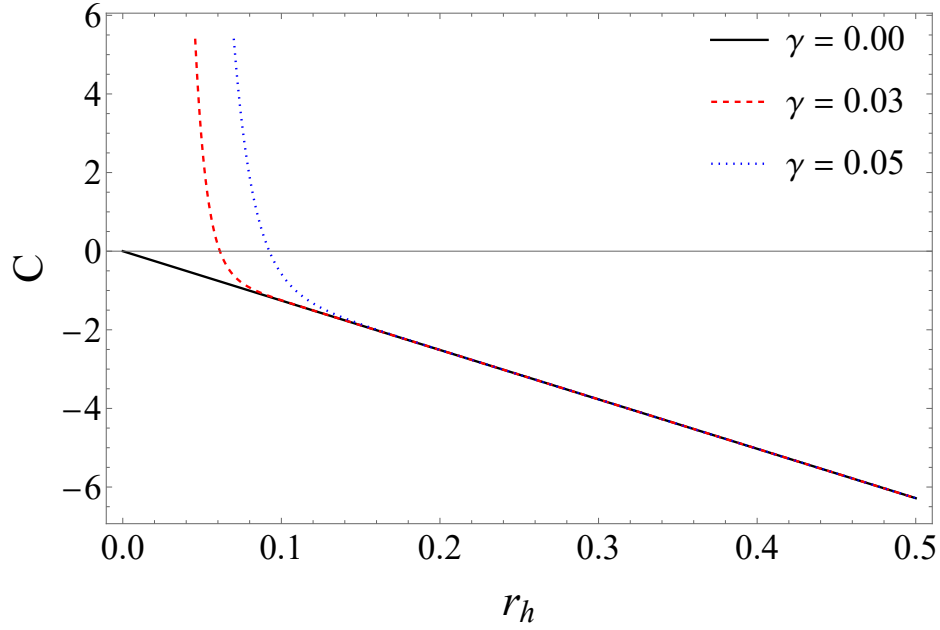


Figura 3.4: Capacidade térmica $\mathcal{C}$ em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\gamma = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\gamma = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\gamma = 0.05$ (azul, pontilhado), assumindo $l = 1$. A região de estabilidade termodinâmica, caracterizada por $\mathcal{C} > 0$, ocorre para $0 < r_h < r_{min}$, demonstrando como o comprimento mínimo introduz uma fase estável na evolução final do buraco negro.

A Figura 3.4 ilustra o comportamento da capacidade térmica em função do raio do horizonte para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo. Uma característica notável é a existência de uma região de estabilidade termodinâmica ($\mathcal{C} > 0$) para $0 < r_h < r_{min}$, ausente no caso convencional. Esta região de estabilidade é uma consequência direta da introdução do comprimento mínimo e tem profundas implicações para a evolução final dos buracos negros.

Assim, aplicando a condição (3.53), a temperatura de Hawking assume a forma

$$\mathcal{T}_H = \frac{1}{2\pi \left(r_h + \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma^2}{16r_h} \right)}. \quad (3.54)$$

Esta equação simplificada para a temperatura de Hawking, válida na região de transição para o remanescente estável, é ilustrada na Figura 3.5. No limite $\gamma \rightarrow 0$, recuperamos a temperatura do buraco negro BTZ convencional, $\mathcal{T}_H = 1/(2\pi r_h)$.

Para $\gamma = 0$, recupera-se a temperatura do buraco negro BTZ em forma tipo Schwarzschild. Similarmente ao caso não comutativo (Cap. 5), também é possível identi-

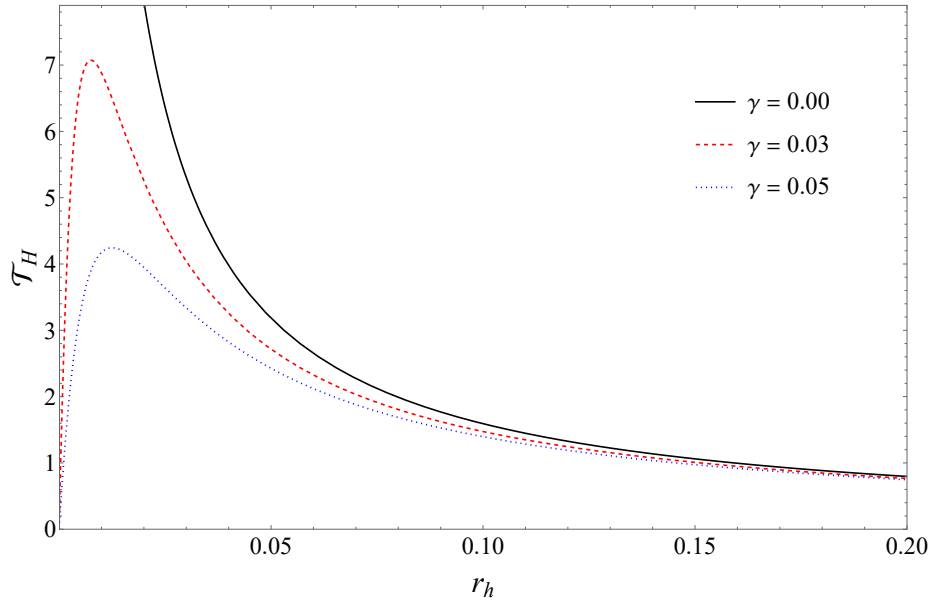


Figura 3.5: Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\gamma = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\gamma = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\gamma = 0.05$ (azul, pontilhado). Observa-se que a temperatura atinge um máximo finito antes de decrescer para zero, com o valor máximo e a posição do pico dependendo do parâmetro de comprimento mínimo.

car um remanescente estável. Da equação (3.53) encontramos um raio mínimo $r_{min} \approx \gamma/4$ e uma massa mínima $M_{min} = r_{min}^2/l^2 = \gamma^2/16l^2 = -\Lambda\gamma^2/16$. Substituindo esses valores na equação anterior, obtemos uma temperatura máxima dada por

$$\mathcal{T}_{Hmax} = \frac{1}{6\pi r_{min}} = \frac{2}{3\pi\gamma}. \quad (3.55)$$

Assim, para $\gamma = 0.03$ e $\gamma = 0.05$, temos as seguintes temperaturas máximas, respectivamente: $\mathcal{T}_{Hmax} = 7.07355$ e $\mathcal{T}_{Hmax} = 4.24413$, em acordo com os gráficos da Fig. 3.5.

Agora, considerando a temperatura de Hawking da equação (3.54), obtemos o seguinte resultado para a entropia:

$$\mathcal{S} = 4\pi r_h + \pi\gamma \ln r_h - \frac{\pi\gamma^2}{4r_h}. \quad (3.56)$$

Nesse caso, obtém-se um termo de correção logarítmica para a entropia do buraco negro BTZ modificado. A presença dessa correção, também observada no modelo não comutativo, sugere uma característica potencialmente universal de modificações quânticas na termodinâmica de buracos negros.

3.5.3 Distribuição do Tipo Lorentziana

Uma abordagem alternativa para a introdução do comprimento mínimo na geometria BTZ consiste em adotar uma distribuição de massa do tipo Lorentziana, que também regulariza a singularidade central, mas apresenta propriedades matemáticas distintas da distribuição exponencial analisada anteriormente. Essa distribuição é expressa por [18]:

$$\rho(r) = \frac{16M_0\beta}{\pi(4r + \beta)^3}, \quad (3.57)$$

onde β é o parâmetro de comprimento mínimo. Assim, encontramos que a massa é dada por

$$\mathcal{M}_\beta(r) = \int_0^r \rho(r) 2\pi r dr = \frac{16M_0r^2}{(\beta + 4r)^2}, \quad (3.58)$$

$$= M_0 - \frac{M_0\beta}{2r} + \frac{3M_0\beta^2}{16r^2} + \mathcal{O}(\beta^3). \quad (3.59)$$

Então, o elemento de linha torna-se [18]

$$ds^2 = -g(r) dt^2 + g(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.60)$$

onde a função de métrica é escrita como

$$g(r) = -M_0 + \frac{M_0\beta}{2r} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{3M_0\beta^2}{16r^2}. \quad (3.61)$$

Esta expressão revela aspectos fundamentais da modificação introduzida pela distribuição Lorentziana: o primeiro termo de correção, $\frac{M_0\beta}{2r}$, é do tipo Schwarzschild, enquanto o último termo, $\frac{3M_0\beta^2}{16r^2}$, aparece como uma contribuição análoga a um momento angular efetivo. Embora o espaço-tempo não apresente rotação intrínseca, como no caso do buraco negro BTZ rotante, esse termo modifica o potencial efetivo próximo à origem, alterando o comportamento das geodésicas e contribuindo para a regularização da singularidade central.

Assim, os horizontes são dados por [18]

$$r_+ = r_h - \frac{\beta}{4} + \frac{3\beta^2}{32r_h}, \quad (3.62)$$

$$r_- = \frac{\beta}{4} - \frac{3\beta^2}{32r_h}, \quad (3.63)$$

onde $r_h = \sqrt{l^2 M_0}$ é o horizonte de eventos do buraco negro BTZ não rotante.

A temperatura de Hawking do buraco negro BTZ não rotante com comprimento mínimo é

$$T_H = \frac{g'(r_+)}{4\pi} = \frac{r_h}{2\pi l^2} \left[1 - \frac{\beta}{2r_h} + \frac{5\beta^2}{32r_h^2} \right]. \quad (3.64)$$

O resultado pode ser expresso em forma tipo Schwarzschild como:

$$\mathcal{T}_H = \frac{T_H}{M_0} = \frac{1}{2\pi \left[r_h + \frac{\beta}{2} + \frac{3\beta^2}{32r_h} + \dots \right]}. \quad (3.65)$$

Assim como no caso da distribuição não comutativa do capítulo anterior e na distribuição exponencial, a temperatura de Hawking atinge um ponto máximo antes de ir a zero quando o raio do horizonte, r_h , tende a zero. Portanto, como vemos na Fig. 3.6, o parâmetro de comprimento mínimo β atua como um regulador removendo a singularidade da temperatura de Hawking do buraco negro BTZ em forma tipo Schwarzschild.

Para calcular a entropia do buraco negro BTZ, expressamos a massa como

$$\tilde{M} = \frac{r_h^2}{l^2} - \frac{\beta^2}{16l^2} + \dots. \quad (3.66)$$

Em seguida, determinamos a entropia aplicando a equação

$$S = \int \frac{1}{\mathcal{T}_H} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} dr_h, \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} = \frac{2r_h}{l^2} = \frac{2M_0}{r_h}. \quad (3.67)$$

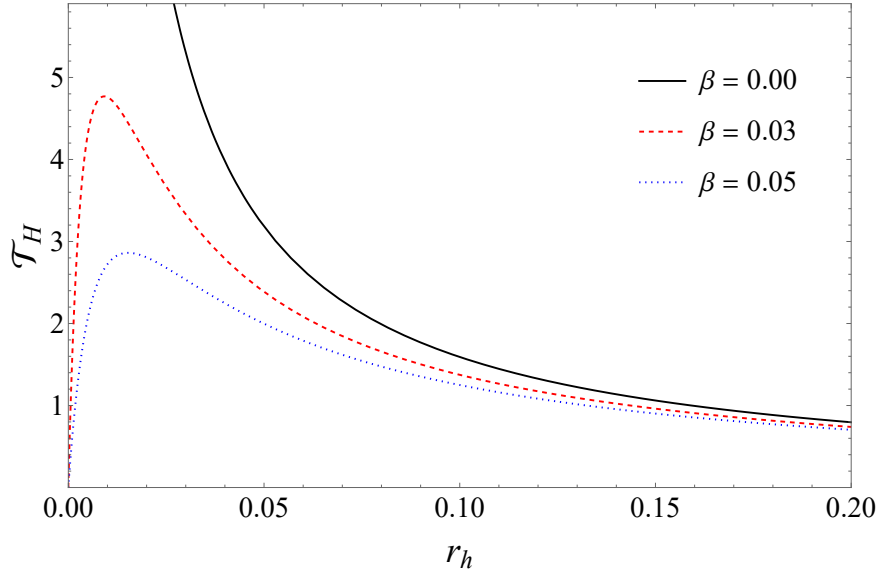


Figura 3.6: Temperatura de Hawking em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\beta = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\beta = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\beta = 0.05$ (azul, pontilhado). Similar aos casos visto anteriormente, a distribuição Lorentziana também regulariza a temperatura em $r_h = 0$.

Então, para a entropia encontramos

$$\mathcal{S} = \frac{S}{M_0} = \int \frac{2}{r_h \mathcal{T}_H} dr_h = 4\pi r_h + \frac{\pi\beta}{2} \ln r_h - \frac{3\pi\beta^2}{32r_h}. \quad (3.68)$$

Este resultado revela uma estrutura similar à obtida para a distribuição exponencial: um termo principal proporcional ao raio do horizonte, um termo de correção logarítmica, e um termo inversamente proporcional ao raio. A presença do termo logarítmico é particularmente significativa.

Para a capacidade térmica, temos

$$C = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \mathcal{T}_H} = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial r_h} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_H}{\partial r_h} \right)^{-1}. \quad (3.69)$$

Assim, obtemos a correção para a capacidade térmica

$$\mathcal{C} = \frac{C}{M_0} \approx -4\pi r_h \left(1 + \frac{\beta}{r_h} + \frac{6\beta^2}{32r_h^2} \right)^2 \left(1 - \frac{3\beta^2}{32r_h^2} \right). \quad (3.70)$$

Para $r_h = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\beta$, temos $\mathcal{C} = 0$ e, assim, verificamos que o buraco negro BTZ em forma

tipo Schwarzschild cessa de evaporar completamente, tornando-se um remanescente. Isso pode ser visto na Fig. 3.7. Assim, no caso $\beta = 0$ temos $\mathcal{C} = -4\pi r_h$ (a capacidade térmica do buraco negro BTZ em forma tipo Schwarzschild) e para $0 < r_h < r_{min} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\beta$ as curvas entram na região de estabilidade com $\mathcal{C} > 0$.

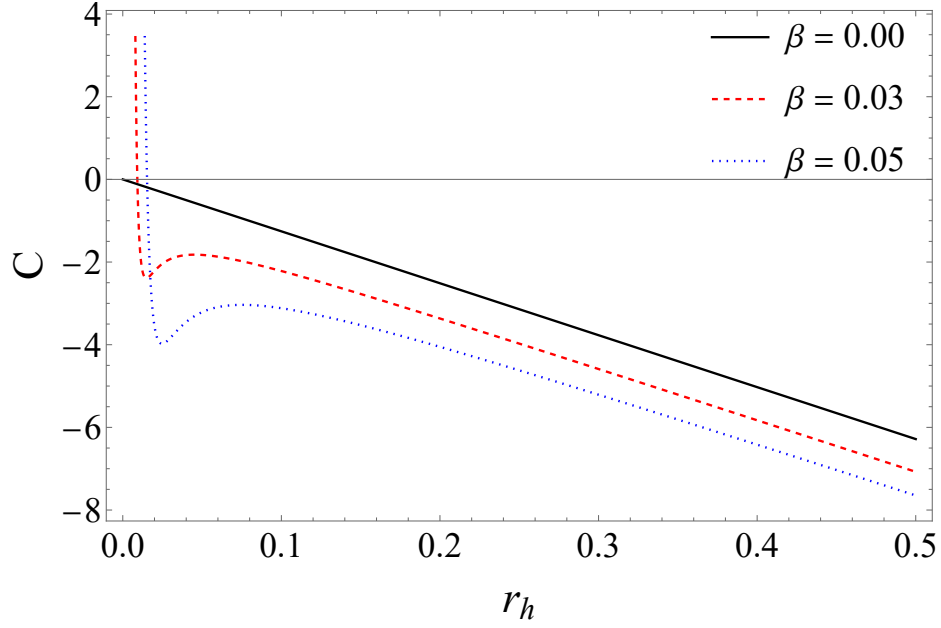


Figura 3.7: Capacidade térmica específica $\mathcal{C}$ em função do raio do horizonte r_h para diferentes valores do parâmetro de comprimento mínimo: $\beta = 0$ (preto), representando o caso convencional; $\beta = 0.03$ (vermelho, tracejado) e $\beta = 0.05$ (azul, pontilhado). A região de estabilidade termodinâmica demonstra como o comprimento mínimo introduz uma fase estável na evolução final do buraco negro.

Ambas as implementações do comprimento mínimo (exponencial e Lorentziana) conduzem a conclusões qualitativamente semelhantes: regularização da temperatura de Hawking, correções logarítmicas à entropia e formação de remanescentes estáveis devido a uma fase final de evaporação com capacidade térmica positiva.

GRAVASTAR: Uma Alternativa Regular aos Buracos Negros

Nos últimos anos, tanto a cosmologia quanto a astrofísica têm sido objeto de intenso interesse científico com o objetivo de explorar questões fundamentais sobre a natureza do universo. Em decorrência disso, os avanços nas observações e o desenvolvimento de novas teorias permitiram uma compreensão mais profunda das estruturas cósmicas e dos processos astrofísicos que moldam nosso universo. Esse contínuo foco decorre de descobertas que desafiam os modelos convencionais e abrem caminho para novos modelos e conceitos ainda não totalmente compreendidos.

Por essa razão, os objetos compactos constituem uma fonte crucial, pois fornecem as condições necessárias para testar diversas ideias pertinentes no domínio de alta densidade. Um dos problemas mais interessantes e desafiadores da astrofísica moderna envolve esses objetos compactos. Os buracos negros, por exemplo, representam o desfecho do colapso de estrelas massivas – fenômeno que pode ser descrito pela teoria da relatividade de Einstein – e sua existência pode ser confirmada por meio da observação de ondas gravitacionais [3], visto que o evento catastrófico que as gerou apresenta as características esperadas de um sistema binário de buracos negros em fusão.

Entretanto, outras possibilidades permanecem para explicar o destino final do colapso gravitacional. Por esse motivo, ao longo das últimas décadas, surgiu um vasto corpo de literatura acerca de objetos compactos com propriedades semelhantes às dos buracos negros (veja, por exemplo, [95]). É dentro desse extenso conjunto de estudos que se destaca a engenhosa solução proposta por Mazur e Mottola [5, 6] em 2001, a qual introduziu

o modelo *GRAVASTAR* (gravitational vacuum star) como uma alternativa aos buracos negros como desfecho do colapso gravitacional, em substituição à solução de Schwarzschild [96].

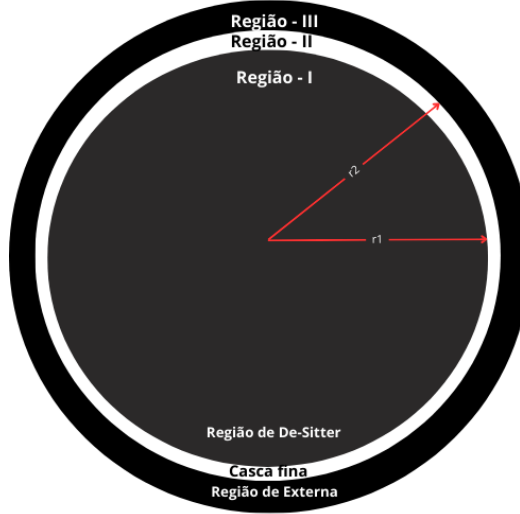
De acordo com esse modelo, o gravastar é composto por três zonas distintas com diferentes equações de estado (EoS): uma região interna preenchida por energia escura, caracterizada por um vácuo de de Sitter isotrópico (onde $p = -\rho$); uma camada intermediária fina constituída por matéria em estado de fluido rígido (onde $p = \rho$); e uma região externa vazia, representada pela geometria de Schwarzschild (onde $p = \rho = 0$).

A ideia central é evitar a formação de horizontes de eventos (e, conseqüentemente, de singularidades), de modo a impedir o colapso da matéria nas imediações ou exatamente no local onde se formaria o horizonte de eventos. Em outras palavras, uma estrutura alternativa à do buraco negro pode emergir do colapso gravitacional de uma estrela massiva.

Estudos recentes sobre o brilho de supernovas distantes do tipo Ia [8, 9, 10, 97] sugerem que a expansão do universo é mais acelerada do que se acreditava. Isso indica que a pressão cósmica p e a densidade de energia ρ devem violar a condição de energia forte, ou seja, $\rho + 3p < 0$. A chamada *energia escura* é o componente que permite satisfazer essa exigência em uma etapa específica da evolução cósmica [11, 12, 13]. Diversas substâncias podem determinar a condição de energia escura, sendo a proposta mais conhecida aquela que envolve uma constante cosmológica não nula, equivalente a um fluido cuja equação de estado é $p = -\rho$ [98].

As GRAVASTARS surgem como uma solução teórica elegante para as paradoxais singularidades e aos horizontes de eventos preditos pelos buracos negros clássicos. Essas estruturas hipotéticas substituem a singularidade central por um núcleo de vácuo quântico estável e eliminam o horizonte de eventos, substituindo-o por uma casca de matéria exótica. Nesse modelo, o interior da GRAVASTAR é composto por um vácuo quântico com pressão negativa, análoga à constante cosmológica, enquanto uma casca fina de matéria exótica impede que o colapso gravitacional progrida indefinidamente [38, 99]. Assim, em vez de formar uma singularidade, o colapso é interrompido por um mecanismo de sustentação baseado na pressão do vácuo quântico, garantindo uma configuração estável.

Figura 4.1: O modelo abaixo detalha as três regiões da GRAVASTAR, segundo Mazur e Mottola



Fonte: Feita pelo autor, inspirada em 100, p.4

A falta de um horizonte de eventos [5, 6, 38, 99, 101], um elemento fundamental dos buracos negros, é um atributo significativo deste modelo. Em contrapartida, a casca, camada de matéria exótica é encontrada e atua como uma transição entre o interior e o exterior da GRAVASTAR, proporcionando uma solução para a questão da perda de informação, uma vez que não há um horizonte de eventos capaz de aprisionar a informação de maneira irreversível.

$$\begin{aligned}
 \text{I. de Sitter Interior :} & \quad 0 \leq r < r_1, \rho = -p, \\
 \text{II. Casca Fina :} & \quad r_1 < r < r_2, \rho = +p, \\
 \text{III. Schwarzschild Exterior :} & \quad r_2 < r, \rho = p = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como afirmado anteriormente, as GRAVASTARS não possuem singularidade central nem horizonte de eventos e são constituídas por três regiões: um espaço interno, uma casca fina, onde deveria ser formado o horizonte de eventos e uma região externa de vácuo, cada uma caracterizada por equações de estado (EoS) exclusivas [33, 102], que serão detalhadas ao longo deste capítulo.

4.1 Região Interna

Diferentemente dos buracos negros, a GRAVASTAR não possui um ponto central singular. A singularidade em um buraco negro representa uma região onde a curvatura do espaço-tempo se torna infinita e as leis físicas conhecidas deixam de ser aplicáveis. A ausência dessa singularidade é uma das características principais que motivam a investigação desses objetos, uma vez que eles oferecem uma solução regular para o colapso gravitacional, sem as dificuldades teóricas associadas às singularidades. Contudo, em uma GRAVASTAR, a pressão interna negativa na região interna age como uma força de repulsão gravitacional [5, 103]. Essa repulsão contrabalança a gravidade que atua sobre a casca fina, permitindo que o GRAVASTAR mantenha uma estrutura estável. Este comportamento é diferente do que ocorre em um buraco negro, onde a gravidade em direção à singularidade é atrativa e leva ao colapso de qualquer matéria próxima. A região interna da GRAVASTAR, que varia $0 \leq r \leq r_1$, há um segmento da geometria de Sitter, tem um vácuo descrito pela equação de estado (EoS) da energia escura $p = -\rho$, indicando uma pressão externa repulsiva que neutraliza o colapso gravitacional [37, 38, 100].

4.2 Casca Fina

A casca fina de uma GRAVASTAR representa a área de transição que liga o interior, que é preenchido por um vácuo quântico de pressão negativa, à parte externa, que pode ser o vácuo ou uma solução semelhante à de Schwarzschild, a depender da métrica adotada [5, 103, 104]. A casca fina é constituída por matéria exótica e desempenha o papel crucial de manter o equilíbrio entre a pressão interna (gerada pela área preenchida por vácuo com pressão negativa) e a gravidade externa. Sem a casca, a pressão interna negativa provocaria o vácuo. Vamos analisar minuciosamente as propriedades físicas e matemáticas desta casca fina, levando em conta sua função de manter o equilíbrio entre a pressão interna e a força gravitacional externa. O comportamento físico da casca é governado pelas equações de Israel, que descrevem a dinâmica de superfícies de junção entre soluções diferentes na relatividade geral [104, 105]. As funções de forma delimitam a casca: $b_-(r)$

ilustra a curvatura da parte interna do GRAVASTAR (vinculada à solução de Sitter). $b_+(r)$ que especifica a curvatura da área externa, que pode ser, por exemplo, uma solução de Schwarzschild. Essas funções formativas estabelecem a descontinuidade no tensor de curvatura na casca, o que, conseqüentemente, determina a densidade superficial. σ , bem como a pressão P na superfície. O equilíbrio na casca fina requer que o comportamento, $b_-(r)$ e $b_+(r)$ deve ser tal que a descontinuidade em determinados elementos do tensor de curvatura possa ser estabilizada pela existência de matéria exótica na casca.

O modelo gravastar oferece uma abordagem inovadora para contornar os desafios teóricos dos buracos negros, como a formação de singularidades e o problema da perda irreversível de informação. Ao dividir o objeto em três regiões com características físicas distintas – uma região interna de vácuo com pressão negativa, uma casca fina de matéria exótica e uma região externa de vácuo – o modelo demonstra, de forma consistente e rigorosa, como é possível obter uma configuração estável e regular para o colapso gravitacional.

Embora os detalhes matemáticos e a análise de estabilidade sejam aprofundados nos capítulos seguintes, este capítulo apresenta uma visão abrangente dos fundamentos físicos do modelo. A clareza na definição das regiões, a discussão sobre o papel da casca fina na mediação do equilíbrio e a integração com a solução de Schwarzschild no exterior compõem uma base sólida que justifica a investigação dos gravastars como alternativas viáveis aos buracos negros clássicos.

Dessa forma, o estudo dos gravastars não apenas contribui para a compreensão dos fenômenos extremos do universo, mas também abre novas perspectivas na interface entre a relatividade geral e a física quântica, mantendo-se plenamente ancorado no rigor das ciências exatas.

4.3 Região Externa

A região externa da GRAVASTAR, que compreende o domínio radial $r > r_2$, é descrita por uma solução de vácuo da Relatividade Geral, comumente assumida como a

métrica de Schwarzschild. Nesse domínio, tanto a densidade de energia quanto a pressão são nulas, isto é, $\rho = p = 0$, caracterizando um espaço-tempo assintoticamente plano, livre de matéria e radiação. A forma geral da métrica estática e esfericamente simétrica para essa região é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

onde M representa a massa total da configuração gravitacional conforme percebida por um observador em repouso no infinito.

É importante destacar que, diferentemente de um buraco negro clássico, o parâmetro r_2 — que delimita a fronteira entre a casca fina e o exterior — é sempre escolhido de forma a não coincidir com o raio do horizonte de eventos correspondente à massa M , ou seja,

$$r_2 > r_s = 2GM. \quad (4.3)$$

Essa condição assegura que a solução GRAVASTAR **não possui um horizonte de eventos real**, preservando a estrutura causal do espaço-tempo e permitindo que sinais e informações escapem para o infinito.

A ausência de um horizonte de eventos implica consequências significativas, tanto em nível conceitual quanto fenomenológico. Do ponto de vista teórico, essa característica resolve o chamado *paradoxo da perda de informação*, uma vez que a evolução temporal da configuração permanece unitária. Já do ponto de vista observacional, a ausência de horizonte sugere que, sob determinadas condições, a GRAVASTAR pode produzir assinaturas astrofísicas distintas das de um buraco negro, como ecos tardios em ondas gravitacionais [106].

Adicionalmente, a métrica externa é conectada à casca por meio das condições de contorno estabelecidas pelas equações de junção de Israel. Apesar de o espaço externo ser formalmente idêntico ao de Schwarzschild para $r > r_2$, a presença da casca fina e do interior de de Sitter altera significativamente a estrutura global da solução, isso torna necessária a análise conjunta das três regiões para avaliar estabilidade e dinâmica.

4.4 Condição de junção

As condições de junção em relatividade geral permitem conectar duas regiões do espaço-tempo, cada uma resolvendo as equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

de forma consistente ao longo de uma hipersuperfície Σ que carrega uma densidade superficial de energia-momento S_{ij} .

Em muitas aplicações da relatividade geral—como no projeto de buracos de minhoca de casca fina, no modelo de colapso estelar “cut-and-paste”, ou, como neste trabalho, GRAVASTAR de casca fina, tornam-se imprescindíveis condições que permitam “casar” de forma física e matemática dois espaço-tempos distintos ao longo de uma superfície singular Σ . Essas condições garantem que a métrica permaneça bem definida, que não surjam fontes não-físicas e que eventuais descontinuidades na curvatura extrínseca sejam associadas a um tensor de energia-momento superficial S_{ij} . Duas abordagens são clássicas: as condições de *Darmois*, que exigem continuidade da primeira e segunda formas fundamentais, e a fórmula de *Israel–Lanczos*, que relaciona o salto na curvatura extrínseca ao tensor S_{ij} [107]. Essas equações expressam essa relação e formam o pilar para qualquer transição consistente entre dois bulks, assegurando a conservação local de energia e momento na superfície de junção. A seguir apresentamos essa última condição, pois é de interesse para esta tese.

4.5 Condição de Israel (Equação de Lanczos–Israel)

A junção de dois espaços-tempos distintos ao longo de uma hipersuperfície Σ é fundamental em várias aplicações da relatividade geral, tais como a construção de GRAVASTAR de casca fina, distribuidores de massa em estrelas e cenários de brana-mundo [108, 109]. Nesses contextos, a superfície Σ hospeda um depósito concentrado de energia e momento descrito por um tensor superficial S_{ij} , cujas propriedades geométricas e físicas

são relacionadas pela condição de Israel.

Seja Σ definida pela função $\Phi(x^\mu) = 0$. O vetor normal unitário pode ser escrito da seguinte forma:

$$n_\mu = \epsilon \frac{\partial_\mu \Phi}{\sqrt{|\partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi|}}, \quad (4.5)$$

com $\epsilon = \pm 1$ indicando a orientação de “-” a parte interna e para “+” para a parte externa [110, 111].

A métrica induzida

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j, \quad (4.6)$$

que deve ser contínua em Σ para garantir a integridade da primeira forma fundamental [112, 113]. A curvatura extrínseca

$$K_{ij} = -e_i^\mu e_j^\nu \nabla_\mu n_\nu, \quad (4.7)$$

cujas primeiras formas de descontinuidade define o salto

$$[K_{ij}] = K_{ij}^+ - K_{ij}^-. \quad (4.8)$$

Esses objetos capturam como Σ se curva no espaço-tempo ambiente [114, 115].

Quando o salto $[K_{ij}]$ não se anula, a presença de matéria concentrada em Σ é descrita por um tensor superficial S_{ij} . A relação exata entre esses saltos e o conteúdo de energia-momento sobre a casca é dada por:

$$[K_{ij}] - h_{ij} [K] = -8\pi S_{ij}, \quad [K] \equiv h^{ij} [K_{ij}], \quad (4.9)$$

que é conhecida como *Equação de Lanczos-Israel* [110, 116].

A consistência das condições de junção é crucial nesta tese, pois trabalhamos com o emparelhamento de soluções das equações de Einstein em superfícies de descontinuidade. Essa exigência assegura que, em cada ponto da casca onde as métricas internas e externas

se encontram, as leis locais de conservação de energia e momento sejam respeitadas.

Detalhes adicionais sobre o formalismo matemático utilizado na construção do gravastar de casca fina podem ser encontrados em [A](#).

4.6 Condições de Energia

As condições de energia são conjuntos de desigualdades impostas ao tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, obtidas ao contrair $T_{\mu\nu}$ com vetores tipo-tempo (u^μ) ou nulos (ℓ^μ), de modo a assegurar densidade de energia não-negativa e pressões fisicamente aceitáveis, evitando comportamentos não-físicos da matéria em Relatividade Geral [63].

Considerando que ainda não se conhece exatamente o processo físico que faz o vácuo se comportar de forma distinta dentro da casca da GRAVASTAR, as condições de energia da Relatividade Geral oferecem a estrutura mais amplamente reconhecida de limitações independentes do modelo de matéria que podem ser aplicadas à ‘matéria exótica’ que compõe essa casca. Assim, é fundamental explorar de forma abrangente as limitações sobre o modelo da GRAVASTAR que são determinadas por estas condições [99]. Nesta seção discutiremos as condições de energia clássicas da Relatividade Geral (WEC, NEC e SEC), discutindo seu significado físico, formulações matemáticas e implicações específicas para o modelo da GRAVASTAR de casca fina [110, 117, 118], base necessária para esta tese.

As quantidades centrais desta casca são a densidade superficial de energia σ e a pressão superficial isotrópica $\mathcal{P}$, definidas por:

- **Condição de Energia Fraca (WEC):**

Requer que qualquer observador com quatro-velocidade u^i meça densidade de energia não negativa:

$$T_{ij} u^i u^j \geq 0. \quad (4.10)$$

Na casca da GRAVASTAR:

$$\sigma \geq 0, \quad \sigma + \mathcal{P} \geq 0. \quad (4.11)$$

- **Condição de Energia Nula (NEC):**

Garante que feixes de luz não sejam “desfocados” pela matéria, mas mantidos ou focados pela atração gravitacional. Exige que para todo vetor nulo k^i :

$$T_{ij} k^i k^j \geq 0. \quad (4.12)$$

Na casca:

$$\sigma + \mathcal{P} \geq 0, \quad (4.13)$$

- **Condição de Energia Forte (SEC):**

Impõe não apenas positividade local de energia, mas requer que o “efeito gravitacional” da matéria seja sempre atrativo:

$$\left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij}\right) u^i u^j \geq 0, \quad (4.14)$$

ou, equivalentemente na casca:

$$\sigma + \mathcal{P} \geq 0, \quad \sigma + 2\mathcal{P} \geq 0. \quad (4.15)$$

Como o interior da GRAVASTAR envolve “energia escura” (pressão negativa $p = -\rho$), a SEC já é violada automaticamente; portanto, no próximo capítulo, além de construirmos um modelo de GRAVASTAR de casca fina em uma geometria BTZ não comutativa, observamos as WEC e NEC, que garante causalidade local do fluxo de energia e estabilidade desse objeto.

4.7 Exterior de Schwarzschild, interior de de Sitter

A GRAVASTAR tradicional, primeiro considerado em [5] e [119], tem um exterior de Schwarzschild com

No exterior ($r > a$), a geometria é a de Schwarzschild, caracterizada por:

$$b_+(r) = 2M, \quad \Phi_+(r) = 0 \quad (4.16)$$

onde M representa a massa total do objeto. Esta região descreve o espaço-tempo vazio fora da estrela.

No interior ($r < a$), assume-se um espaço-tempo de de Sitter, com:

$$b_-(r) = \frac{r^3}{R^2}, \quad \Phi_-(r) = 0 \quad (4.17)$$

onde R é um parâmetro relacionado ao raio de de Sitter, associado à constante cosmológica efetiva $\Lambda = 3/R^2$ que permeia o interior. A ausência de $\Phi_-(r)$ indica que não há potencial gravitacional adicional além do efeito da constante cosmológica nesta região.

A junção entre essas duas geometrias distintas ocorre em uma casca de transição esférica, extremamente fina, localizada em um raio a . A localização desta casca é um parâmetro crucial do modelo, restrito a $2M < a < R$. Essa condição garante que a casca resida fora do raio de Schwarzschild ($2M$), onde um horizonte de eventos se formaria em um buraco negro tradicional, mas dentro do horizonte cosmológico do espaço de de Sitter interno (R). A natureza física detalhada desta casca de transição é frequentemente deixada em aberto nos modelos mais simplificados, mas sua existência e propriedades são fundamentais para a viabilidade da GRAVASTAR. Assume-se que seja composta por uma forma exótica de matéria ou energia, capaz de sustentar a diferença de pressão entre o interior e o exterior.

As propriedades mecânicas desta casca fina de transição são descritas por suas tensões superficiais. A densidade de energia superficial, σ , e a pressão superficial, $\mathcal{P}$, são

quantidades chave que determinam a dinâmica e a estabilidade da casca. Para o modelo Schwarzschild-de Sitter em questão, estas são dadas por expressões que dependem do raio a , sua velocidade radial $\dot{a}$ e aceleração radial $\ddot{a}$, bem como dos parâmetros M e R . As expressões gerais, adaptadas do texto original, podem ser escritas como:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a} \left[\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} + \dot{a}^2} \right], \quad (4.18)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi a} \left[\frac{1 + \dot{a}^2 + a\ddot{a} - \frac{M}{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}} - \frac{1 + \dot{a}^2 + a\ddot{a} - \frac{2a^2}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} + \dot{a}^2}} \right]. \quad (4.19)$$

Um aspecto crucial para a viabilidade física das GRAVASTARS é a sua estabilidade. Para uma configuração estática, na qual a camada de transição permanece em um raio constante a_0 (ou seja, $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$), as condições de equilíbrio exigem cisalhamento, o que é satisfeito pois $\Phi_{\pm} = 0$ e que as tensões superficiais assumam valores específicos. A densidade de energia superficial estática torna-se:

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} - \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{R^2}} \right] \quad (4.20)$$

A pressão superficial estática correspondente é:

$$\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{1 - \frac{M}{a_0}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} - \frac{1 - \frac{2a_0^2}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{a_0^2}{R^2}}} \right] \quad (4.21)$$

Observa-se que a densidade de energia superficial σ muda de sinal dentro do intervalo permitido $2M < a_0 < R$, sendo positiva na parte interna do intervalo e negativa na externa. A pressão superficial $\mathcal{P}$, por outro lado, exibe um comportamento mais complexo: diverge para $+\infty$ quando a_0 se aproxima dos limites do intervalo ($2M$ pela direita e R pela esquerda). Investigações mostram que $\mathcal{P}$ não se anula dentro do intervalo $2M < a_0 < R$ e possui um mínimo positivo, indicando uma pressão sempre presente na casca.

A existência de um mínimo de pressão não nulo é crucial, pois indica que a casca pode, potencialmente, encontrar um ponto de equilíbrio estável contra perturbações, ainda

que a análise completa da estabilidade dinâmica seja consideravelmente mais complexa.

Este modelo de GRAVASTAR oferece uma alternativa intrigante aos buracos negros, substituindo a singularidade e o horizonte de eventos por uma estrutura de múltiplas camadas com física não trivial na interface. A exploração de suas propriedades e estabilidade permanece sendo uma área ativa de pesquisa em gravitação e cosmologia.

GRAVASTAR de Casca Fina em uma Geometria BTZ Não Comutativa

Neste capítulo, estudaremos um modelo de GRAVASTAR de casca fina (“thin-shell”) dentro de uma geometria BTZ não comutativa. Para isso, consideramos uma métrica BTZ não comutativa na região interna e a geometria de uma solução BTZ na região externa, unidas pela técnica de junção generalizada. Após investigar o espaço-tempo interno, a casca e o espaço-tempo externo, observamos que há presença de densidade de energia superficial e de pressão superficial que conferem estabilidade ao gravastar — efeito que persiste mesmo quando a constante cosmológica se anula. Além disso, encontramos um limite para o parâmetro de não comutatividade.

5.1 Equações de Estrutura das Gravastars BTZ Não Comutativos

Agora, iniciaremos a construção do modelo de GRAVASTAR BTZ não comutativo propriamente dito. Nossa abordagem consiste em distinguir duas regiões do espaço-tempo: uma região externa, denotada por M_+ geometria BTZ convencional, e uma região interna, denotada por M_- com uma geometria BTZ não comutativa, discutida em 3.4.2.

A conexão entre estas regiões é realizada através do método de junção generalizada, implementado em uma camada superficial que denominaremos Σ . Esta técnica, desenvolvida no contexto da relatividade geral, permite unir diferentes soluções das equações de Einstein de forma consistente, respeitando as condições de continuidade e diferenciabilidade necessárias.

Para a região externa, adotamos a métrica do espaço-tempo anti-de Sitter em (2+1)-dimensões, conforme proposta por Bañados, Teitelboim e Zanelli. Esta solução, livre de singularidades, é expressa por:

$$ds^2 = -f(r)_+ dt_+^2 + f(r)_+^{-1} dr_+^2 + r_+^2 d\phi_+^2, \quad (5.1)$$

onde t representa o tempo físico na região externa, e a função métrica $f(r)_+$ é dada por:

$$f(r)_+ = -M_0 + \frac{r^2}{l^2} = M - \Lambda r^2. \quad (5.2)$$

Aqui, definimos $M = -M_0$ e $\Lambda = -1/l^2$ como a constante cosmológica negativa, característica de espaços anti-de Sitter.

Para facilitar comparações com a geometria de Schwarzschild, podemos reescrever a função métrica $f(r)_+$ na forma:

$$f(r)_+ = 1 - \frac{b_+}{r}, \quad (5.3)$$

sendo

$$b_+ = -r (M - \Lambda r^2) + r. \quad (5.4)$$

Esta representação permite interpretar o GRAVASTAR BTZ como um análogo tridimensional da geometria Schwarzschild-AdS, estabelecendo conexões conceituais com modelos em quatro dimensões.

Para a região interna, adotamos a geometria BTZ não comutativa desenvolvida em 3.5.1. Assim, temos:

$$ds^2 = -g(r)_- dt_-^2 + f(r)_-^{-1} dr_-^2 + r_-^2 d\phi_-^2, \quad (5.5)$$

onde as funções métricas incorporam os efeitos da não comutatividade:

$$g(r)_- = M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r^2 + \theta}} \right) - \Lambda r^2, \quad (5.6)$$

e

$$f(r)_- = 1 - \frac{b_-}{r}, \quad (5.7)$$

com:

$$b_- = -r M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r^2 + \theta}} \right) + r. \quad (5.8)$$

As funções $g(r)_-$ e $f(r)_-$ carregam as características da distribuição de massa Lorentziana não comutativa. Um aspecto notável dessas funções $g(r)_-$ e $f(r)_-$ é que elas nunca divergem, mesmo para $r \rightarrow 0$, graças ao parâmetro de não comutatividade θ . Esta regularização elimina a singularidade central característica dos buracos negros convencionais, representando uma das motivações fundamentais para o estudo de GRAVASTARS como alternativas aos buracos negros.

5.1.1 Camada de Transição

As distribuições, tanto interna quanto externa, são delimitadas por hipersuperfícies isométricas Σ_+ e Σ_- . Nosso objetivo é unir M_+ e M_- em seus limites para obter uma única variedade M tal que $M = M_+ \cup M_-$, de forma que, nos limites, $\Sigma = \Sigma_+ = \Sigma_-$. Assim, para calcular os componentes do tensor energia-momento, usaremos a métrica intrínseca da seguinte forma [105]:

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.9)$$

onde τ representa o tempo próprio na superfície de junção. Como estamos trabalhando em um espaço-tempo (2+1)-dimensional, simplificamos a expressão assumindo $d\phi^2 = 0$.

A superfície de junção é dada por $x^\nu(\tau, \vartheta, \phi) = (t(\tau), a(\tau), \vartheta)$, onde os vetores normais unitários em relação a essa superfície são os seguintes [119]:

$$n_+^\mu = \left(\frac{1}{M - \Lambda a^2} \dot{a}, \sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}, 0 \right), \quad (5.10)$$

para a região externa, e

$$n_-^\mu = \left(\frac{1}{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right)} \dot{a}, \sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2}, 0 \right), \quad (5.11)$$

para a região interna. Nestas expressões, o ponto sobre a representa a derivada em relação ao tempo próprio τ .

As curvaturas extrínsecas são calculadas pela seguinte equação [120]:

$$K_{\psi}^{\psi\pm} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a} + \dot{a}^2}, \quad (5.12)$$

e

$$K_{\tau}^{\tau\pm} = \left\{ \frac{\ddot{a} + \frac{b_{\pm}(a) - b'_{\pm}(a)a}{2a^2}}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a} + \dot{a}^2}} \right\}. \quad (5.13)$$

Aplicando estas equações gerais ao nosso modelo específico, obtemos as curvaturas extrínsecas na região externa:

$$K_{\psi}^{\psi+} = \frac{1}{a} \sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}, \quad (5.14)$$

$$K_{\tau}^{\tau+} = \left\{ \frac{\ddot{a} - \Lambda a^2}{\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}} \right\}, \quad (5.15)$$

e na região interna:

$$K_{\psi}^{\psi-} = \frac{1}{a} \sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2}, \quad (5.16)$$

$$K_{\tau}^{\tau-} = \left\{ \frac{\ddot{a} - \frac{a^2 M \sqrt{\theta}}{2(a^2 + \theta)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2}} \right\}. \quad (5.17)$$

Estas equações para as curvaturas extrínsecas serão fundamentais para a análise subsequente das condições de energia e estabilidade da GRAVBASTAR na camada de transição.

A seguir, aplicaremos essas equações para analisar as condições de energia para a estabilidade do gravastar na camada fina utilizando as equações de Lanczos.

5.1.2 Equações de Lanczos: Tensão Superficial

Para determinar as propriedades físicas da camada de transição e analisar sua estabilidade, recorreremos às equações de Lanczos. Essas equações, derivadas das equações de Einstein aplicadas à hipersuperfície de junção, relacionam a descontinuidade das

curvaturas extrínsecas com o tensor energia-momento superficial [105]:

$$S_j^i = -\frac{1}{8\pi} (k_j^i - \delta_j^i k_k^k), \quad (5.18)$$

onde S_j^i representa o tensor energia-momento superficial na hipersuperfície Σ , e $k_j^i = K_j^{i+} - K_j^{i-}$ denota a descontinuidade das curvaturas extrínsecas.

No contexto do espaço-tempo (2+1)-dimensional, o tensor energia-momento de tensão superficial assume a forma diagonal $S_j^i = \text{diag}(-\sigma, \mathcal{P})$, onde σ representa a densidade de energia superficial e $\mathcal{P}$ a pressão superficial [121]. Essas quantidades são expressas explicitamente por:

$$\sigma = -\frac{K^\psi_\psi}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi a} \left[\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2} - \sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2} \right], \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{K^\tau_\tau + K^\psi_\psi}{8\pi} \\ &= \frac{1}{8\pi a} \left[\frac{M + \dot{a}^2 + \ddot{a} - 2\Lambda a^2}{\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}} - \frac{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2 + \ddot{a} - \frac{a^2 M \sqrt{\theta}}{2(a^2 + \theta)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Combinando as equações (5.19) e (5.20), obtemos:

$$\sigma + 2\mathcal{P} = \frac{K^\tau_\tau}{4\pi} = \frac{1}{4\pi a} \left[\frac{\ddot{a} - \Lambda a^2}{\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}} - \frac{\ddot{a} - \frac{a^2 M \sqrt{\theta}}{2(a^2 + \theta)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a^2 + \theta}} \right) + \dot{a}^2}} \right]. \quad (5.21)$$

Para uma análise mais detalhada, consideramos uma solução estática em que o raio da camada de transição a_0 está compreendido no intervalo (r_-, r_+) , correspondendo aos horizontes interno e externo, respectivamente. Nesse caso, as expressões para a densidade

de energia e pressão superficial simplificam-se para:

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{M - \Lambda a_0^2} - \sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a_0^2 + \theta}} \right)} \right], \quad (5.22)$$

$$\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{M - 2\Lambda a_0^2}{\sqrt{M - \Lambda a_0^2}} - \frac{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a_0^2 + \theta}} \right) - \frac{a_0^2 M \sqrt{\theta}}{2(a_0^2 + \theta)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a_0^2 + \theta}} \right)}} \right], \quad (5.23)$$

$$\sigma(a_0) + 2\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{4\pi a_0} \left[\frac{-\Lambda a_0^2}{\sqrt{M - \Lambda a_0^2}} + \frac{\frac{a_0^2 M \sqrt{\theta}}{2(a_0^2 + \theta)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{a_0^2 + \theta}} \right)}} \right]. \quad (5.24)$$

Para facilitar a análise dimensional e identificar os parâmetros físicos relevantes, introduzimos as quantidades adimensionais $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$ e $\Theta = \sqrt{\theta}/a_0$, reescrevendo as equações anteriores como:

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{M - \tilde{\Lambda}} - \sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right)} \right], \quad (5.25)$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{M - 2\tilde{\Lambda}}{\sqrt{M - \tilde{\Lambda}}} - \frac{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right) - \frac{\Theta M}{2(1 + \Theta^2)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right)}} \right], \quad (5.26)$$

$$\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{-M}{\sqrt{M - \tilde{\Lambda}}} + \frac{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right) + \frac{\Theta M}{2(1 + \Theta^2)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right)}} \right], \quad (5.27)$$

$$\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-\tilde{\Lambda}}{\sqrt{M - \tilde{\Lambda}}} + \frac{\frac{\Theta M}{2(1 + \Theta^2)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right)}} \right]. \quad (5.28)$$

É importante destacar que a equação (5.27) não surge de forma independente, mas resulta diretamente da soma algébrica das expressões (5.25) e (5.26), após a aplicação de ajustes criteriosos, de modo a garantir a coerência e a integridade do modelo final.

Nessas equações, definimos $\tilde{\sigma} = a_0\sigma(a_0)$ e $\tilde{\mathcal{P}} = a_0\mathcal{P}(a_0)$ como a densidade de energia e pressão superficial adimensionais, respectivamente. Uma análise detalhada, que será feita na sequência, nos revela propriedades físicas fundamentais da camada de transição: a densidade de energia $\tilde{\sigma}$ é negativa, enquanto a pressão $\tilde{\mathcal{P}}$ é positiva. Essa combinação de densidade de energia negativa e pressão positiva é característica de modelos de GRAVASTAR, diferenciando-os de objetos astrofísicos convencionais. Adicionalmente, na camada infinitamente fina, a pressão radial é nula, consistente com a estrutura de casca fina adotada.

Uma propriedade notável é que as combinações $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}}$ e $\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}}$ são positivas para valores suficientemente pequenos do parâmetro Θ , característica essencial para a estabilidade da transição entre a camada fina e a região externa [38].

Um resultado particularmente significativo é que, mesmo quando a constante cosmológica se anula ($\Lambda = 0$ ou $l \rightarrow \infty$), a condição de estabilidade continua satisfeita, com $\tilde{\sigma} < 0$ e $\tilde{\mathcal{P}} > 0$, devido exclusivamente ao efeito da não comutatividade. Esse comportamento demonstra que o parâmetro de não comutatividade θ pode efetivamente desempenhar o papel da constante cosmológica na formação e estabilidade da GRAVASTAR, representando uma “energia escura efetiva” de origem puramente quântica.

Para evitar problemas com unidades, também resolvemos nossas equações em forma adimensional. Assim, para $\tilde{\Lambda} = 0$, as equações (5.25), (5.26), (5.27) e (5.28) são, respectivamente, dadas por:

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{M} - \sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1 + \Theta^2}} \right)} \right], \quad (5.29)$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{M}{\sqrt{M}} - \frac{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} \right) - \frac{\Theta M}{2(1+\Theta^2)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} \right)}} \right], \quad (5.30)$$

$$\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{-M}{\sqrt{M}} + \frac{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} \right) + \frac{\Theta M}{2(1+\Theta^2)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} \right)}} \right], \quad (5.31)$$

$$\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\frac{\Theta M}{2(1+\Theta^2)^{3/2}}}{\sqrt{M \left(1 - \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} \right)}} \right]. \quad (5.32)$$

No regime de pequena não comutatividade, onde $\Theta \ll 1$ (ou equivalentemente, $\theta \ll a_0^2$), podemos aproximar essas equações para:

$$\sigma \approx -\frac{\sqrt{M}\Theta}{8\pi a_0} = -\frac{\sqrt{M}\theta}{8\pi a_0^2}, \quad (5.33)$$

$$\mathcal{P} \approx \frac{\sqrt{M}\Theta}{8\pi a_0} = \frac{\sqrt{M}\theta}{8\pi a_0^2}, \quad (5.34)$$

$$\sigma + 2\mathcal{P} \approx \frac{\sqrt{M}\Theta}{8\pi a_0} = \frac{\sqrt{M}\theta}{8\pi a_0^2}. \quad (5.35)$$

No entanto, a partir das equações acima, temos a seguinte equação de estado

$$\sigma + \mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{P} = -\sigma = \rho. \quad (5.36)$$

Como $\sigma < 0$, temos $p = \rho$ na camada fina, um efeito diretamente atribuível à não comutatividade. Esse comportamento contrasta com o interior da camada, onde a equação de estado é $p = -\rho$, com $\rho = \sigma \sim \sqrt{\theta}/M_0 r^3 > 0$, representando uma pressão repulsiva. No contexto cosmológico, essa equação de estado $p = -\rho$ está associada à energia escura, sugerindo que a não comutatividade pode gerar um efeito similar à energia escura (“energia escura θ ”) mesmo na ausência de uma constante cosmológica explícita.

Por outro lado, ao se considerar $\tilde{\Lambda}$ muito grande, podemos escrever as equações

para $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\mathcal{P}}$ da seguinte forma:

$$\sigma \approx -\frac{\sqrt{-\tilde{\Lambda}}}{4\pi a_0} = -\frac{\sqrt{-\Lambda a_0^2}}{4\pi a_0}, \quad (5.37)$$

$$\mathcal{P} \approx \frac{\sqrt{-\tilde{\Lambda}}}{4\pi a_0} = \frac{\sqrt{-\Lambda a_0^2}}{4\pi a_0}. \quad (5.38)$$

Para esse caso, com $\Lambda < 0$, obtemos a seguinte equação de estado

$$\mathcal{P} = -\sigma. \quad (5.39)$$

Ao comparar os resultados acima, encontramos uma relação entre Λ e θ dada por

$$\sqrt{-\Lambda a_0^2} = \frac{\sqrt{M}\Theta}{2} = \frac{\sqrt{-M_0\theta}}{2a_0}, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{4a_0^4\Lambda}{M_0}. \quad (5.40)$$

A partir do resultado acima, também podemos escrever uma relação entre Θ e $\tilde{\Lambda}$, isto é, $\Theta = (4\tilde{\Lambda}/M_0)^{1/2}$ (o que também pode ser obtido a partir da equação (5.31) para $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}} = 0$, considerando $\tilde{\Lambda}$ e Θ pequenos).

Agora, admitindo $M_0 = M_{BH}/M_\odot$, onde M_{BH} é a massa do buraco negro e $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg é a massa solar, então, para $M_{BH} = 10M_\odot$, $a_0 \approx 29.5 \times 10^3$ m (raio do buraco negro) e constante cosmológica $\Lambda = 1.088 \times 10^{-58} \text{ m}^{-2}$, obtemos o seguinte valor para o parâmetro θ :

$$\theta \approx 3.296 \times 10^{-41} \text{ m}^2 = [3.4371 \times 10^4 \text{ GeV}]^{-2} = [3.4371 \times 10 \text{ TeV}]^{-2}. \quad (5.41)$$

Portanto, encontramos um valor de $\theta \sim [10 \text{ TeV}]^{-2}$ ou $\sqrt{\theta} \sim [10 \text{ TeV}]^{-1}$, e uma escala de energia $\Lambda_{NC} = 1/\sqrt{\theta} \sim 10 \text{ TeV}$, de acordo com os resultados obtidos na literatura [122, 123, 124, 125, 126] (veja também Ref. [127] para outros limites de θ e [128] utilizando as observações do Telescópio de Horizonte de Eventos (EHT) de Sagittarius A*).

Aqui é oportuno mencionar que a não comutatividade desempenha um papel vital na física de buracos negros. Alguns efeitos que desaparecem no caso usual podem ser observados devido à não comutatividade. Por exemplo, em [129] foi constatado que, quando

o parâmetro de circulação é zero, a seção de choque diferencial vai a zero, e assim não há efeito análogo de Aharonov-Bohm. Por outro lado, devido à não comutatividade, o efeito análogo de Aharonov-Bohm persiste mesmo quando o parâmetro de circulação é definido como zero. Ao considerar o buraco negro BTZ não comutativo, Anacleto e colaboradores [130] demonstraram que, devido à não comutatividade, o efeito gravitacional de Aharonov-Bohm é observado quando o parâmetro de circulação vai a zero. Além disso, em [26, 28, 44] o efeito da não comutatividade também foi explorado no cálculo da seção de choque diferencial, absorção, modos quasinormais e raio da sombra, e foi verificado que essas quantidades são proporcionais ao parâmetro de não comutatividade quando a massa vai a zero. Adicionalmente, a condição de estabilidade e os remanescentes para o buraco negro BTZ não comutativo e para o buraco negro Schwarzschild não comutativo, via cálculo da capacidade térmica, foram examinados em [25, 42].

Na Fig. 5.1, utilizamos a equação (5.25) mostrar a densidade de energia e na Fig. 5.2, a equação (5.26) para a pressão, ambas em função do parâmetro de não comutatividade Θ para $\tilde{\Lambda} < 0$ e $\tilde{\Lambda} = 0$. Observa-se que, em ambos os casos, a densidade de energia $\tilde{\sigma}$ assume valores negativos, enquanto a pressão permanece positiva.

Na Fig. 5.3 e na Fig. 5.4, empregamos as equações (5.27) e (5.28) para plotar as quantidades $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}}$ e $\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}}$, respectivamente, em função de Θ , comparando os cenários $\tilde{\Lambda} = 0$ e $\tilde{\Lambda} < 0$. Essas combinações permitem concluir de forma completa sobre o atendimento das condições de energia necessárias à estabilidade da GRAVASTAR.

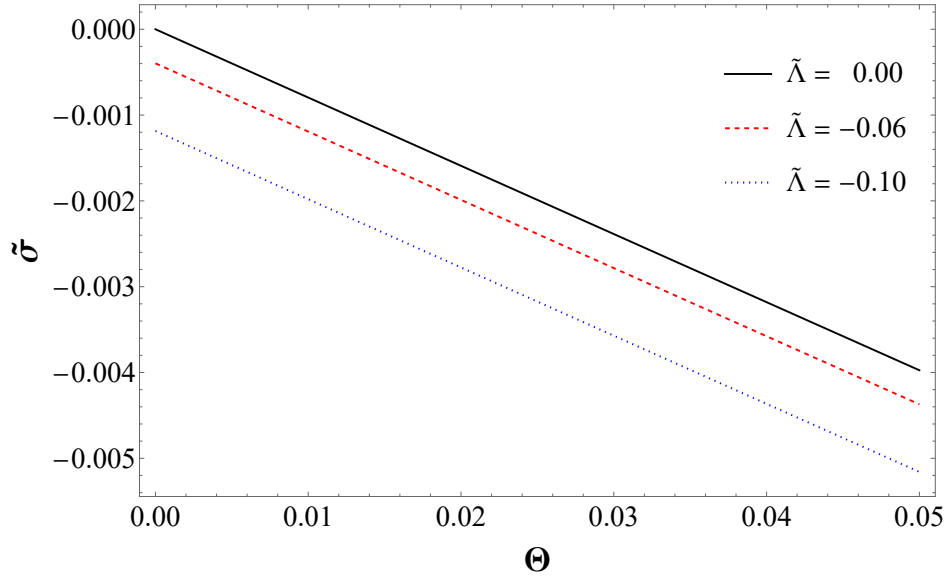


Figura 5.1: Densidade de energia adimensional $\tilde{\sigma}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. Observa-se que a densidade de energia é negativa para todos os valores de Θ e $\tilde{\Lambda}$ considerados, característica distintiva dos modelos de GRAVASTAR.

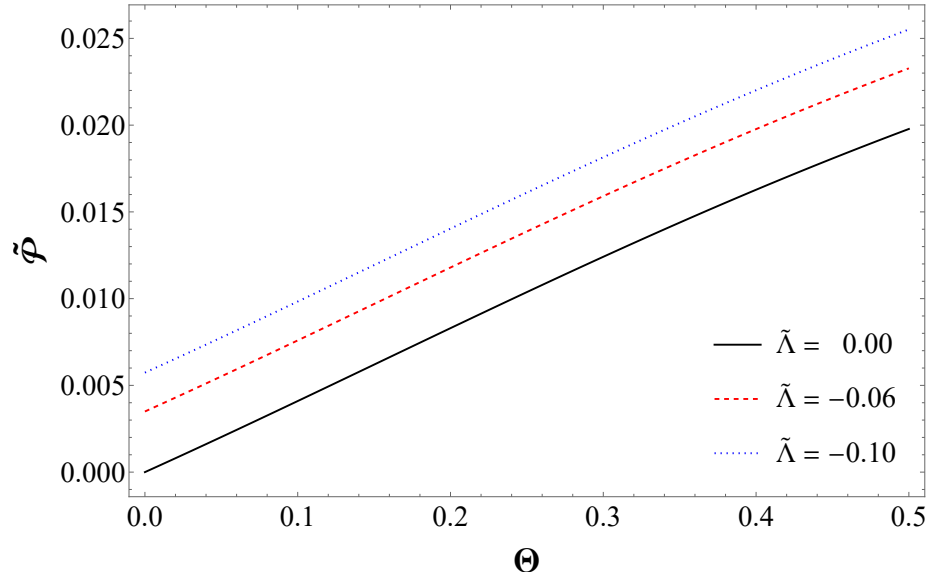


Figura 5.2: Pressão superficial adimensional $\tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. A pressão superficial é positiva para todos os valores de Θ e $\tilde{\Lambda}$ considerados, contribuindo para a estabilidade da estrutura da GRAVASTAR.

As condições de energia exigem que, se $\sigma \geq 0$ e $\sigma + \mathcal{P} \geq 0$ são satisfeitas, então a condição de energia fraca (WEC) é válida. Temos, por continuidade, a condição de energia nula (NEC) válida, pois $\sigma + \mathcal{P} \geq 0$. Para que a condição de energia forte (SEC) seja satisfeita, é necessário que $\sigma + \mathcal{P} \geq 0$ e $\sigma + 2\mathcal{P} \geq 0$ [99, 131]. Em nossos cálculos,

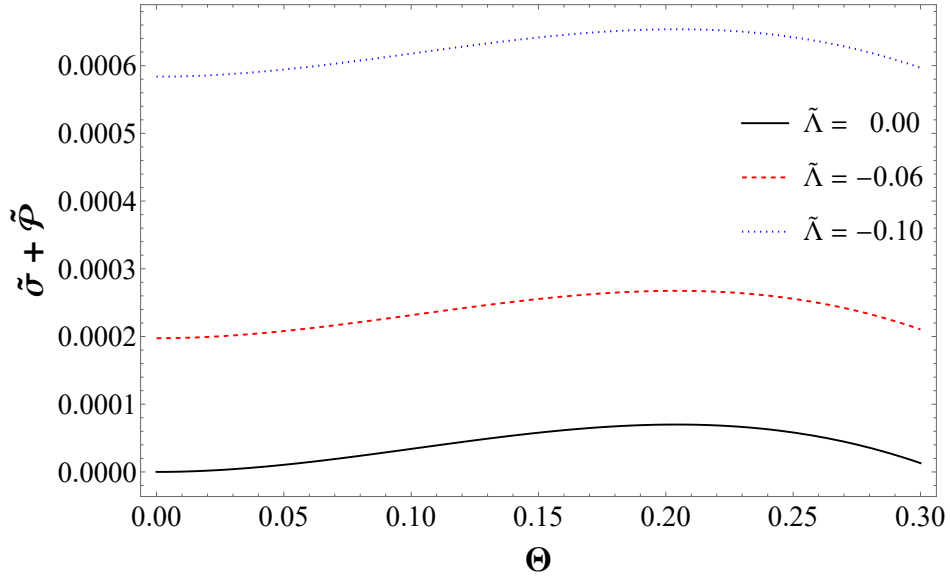


Figura 5.3: Combinação $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. Esta combinação é relevante para a verificação da condição de energia nula (NEC), sendo positiva para valores suficientemente pequenos de Θ , independentemente do valor de $\tilde{\Lambda}$.

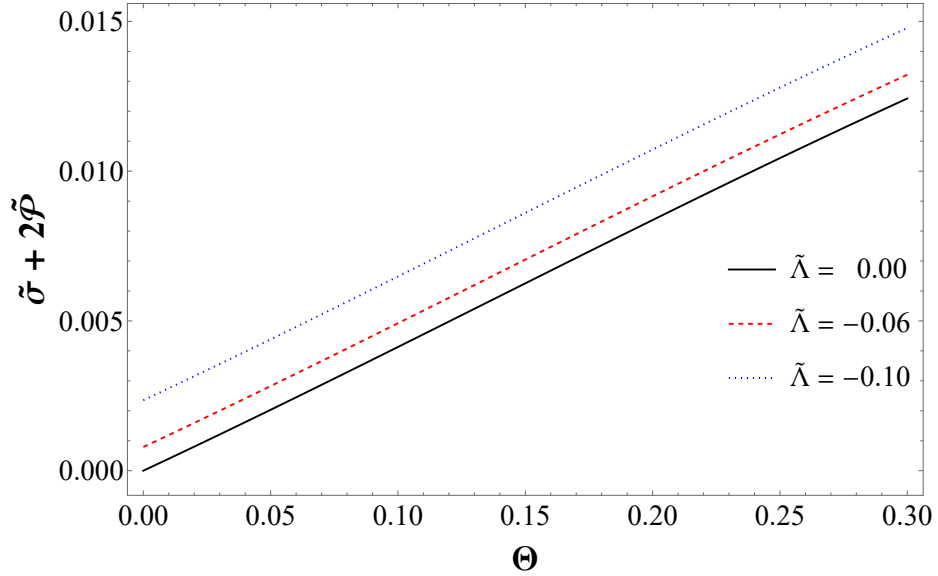


Figura 5.4: Combinação $\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}}$ em função do parâmetro de não comutatividade Θ para diferentes valores da constante cosmológica adimensional: $\tilde{\Lambda} = 0$ (preto contínuo), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (vermelho tracejado) e $\tilde{\Lambda} = -0.12$ (azul pontilhado), assumindo $M = 1$. Esta combinação é relevante para a verificação da condição de energia forte (SEC), sendo positiva para valores suficientemente pequenos de Θ , independentemente do valor de $\tilde{\Lambda}$.

mostramos que σ é negativa, entretanto, a pressão $\mathcal{P}$ é positiva, como podemos ver em (Fig. 5.1) e (Fig. 5.2). A pressão positiva contribui para manter $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}} \geq 0$ para Θ suficientemente pequeno (Fig. 5.3), assim como $\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}} \geq 0$ (Fig. 5.4). Portanto, a

camada contém matéria que viola apenas a condição de energia fraca (WEC) e obedece às condições de energia nula e forte quando Θ é pequeno o suficiente.

Gravastar de Casca Fina em uma Geometria BTZ de comprimento mínimo

Prosseguindo a investigação de modelos alternativos aos buracos negros clássicos iniciado no capítulo anterior, avançamos agora para a construção de duas versões da GRAVASTAR de casca fina em geometria BTZ, cada uma moldada por uma distinta distribuição de comprimento mínimo: um lado, exploraremos o perfil exponencial; de outro, adotaremos o perfil lorentziano. Esta abordagem representa uma contribuição significativa para a compreensão de objetos compactos alternativos aos buracos negros tradicionais, incorporando princípios de gravidade quântica que emergem naturalmente em teorias que buscam unificar a mecânica quântica e a relatividade geral.

O conceito de comprimento mínimo surge em diversas abordagens à gravidade quântica, incluindo teoria de cordas, gravidade quântica em loop e geometria não comutativa, sugerindo a existência de uma escala fundamental abaixo da qual a própria noção de espaço-tempo perde sua natureza contínua. Esta discretização natural do espaço-tempo tem profundas implicações para a física de objetos compactos, potencialmente eliminando singularidades e modificando propriedades termodinâmicas fundamentais.

Nossa análise se desenvolverá em duas frentes principais. Primeiramente, investigaremos como a introdução do comprimento mínimo, através de diferentes distribuições de massa modificadas (exponencial e Lorentziana), afeta as propriedades termodinâmicas do buraco negro BTZ subjacente. Calcularemos a temperatura de Hawking, a entropia e a capacidade térmica, focando nas divergências em relação ao caso clássico e ao cenário não comutativo previamente estudado. Em seguida, construiremos o modelo de GRAVASTAR de casca fina, utilizando a geometria BTZ modificada pelo comprimento mínimo, e anali-

saremos sua estabilidade, contrastando os resultados com os obtidos no capítulo anterior. Esperamos demonstrar que, assim como a não comutatividade, o comprimento mínimo oferece uma rota promissora para resolver paradoxos associados aos buracos negros, como a singularidade central e a evaporação completa, levando à formação de remanescentes estáveis e potencialmente lançando luz sobre a natureza quântica da gravidade.

6.1 Gravastar BTZ com distribuição exponencial

Com base na análise termodinâmica apresentada em (3.5.2) - que utiliza a distribuição de densidade de probabilidade do tipo exponencial na métrica BTZ modificada, procedemos à construção de um modelo de GRAVASTAR seguindo a metodologia de junção de casca fina apresentada no Capítulo 5. Utilizamos a geometria BTZ modificada pela introdução do comprimento mínimo γ através da distribuição exponencial. A estrutura consiste em uma região interna descrita por esta geometria modificada, uma região externa descrita pela métrica BTZ padrão e uma casca fina na interface.

Assim, para a métrica externa, temos [19]

$$ds^2 = -f(r)_+ dt_+^2 + f(r)_+^{-1} dr_+^2 + r_+^2 d\phi_+^2, \quad (6.1)$$

onde a função de métrica $f(r)_+$ na região externa é

$$f(r)_+ = -M_0 + \frac{r^2}{l^2} = M - \Lambda r^2, \quad (6.2)$$

sendo $M = -M_0$ e $\Lambda = -1/l^2$ a constante cosmológica.

Agora expressamos $f(r)_+$ em forma tipo Schwarzschild:

$$f(r)_+ = 1 - \frac{b_+}{r}, \quad (6.3)$$

$$b_+ = -r(M - \Lambda r^2) + r. \quad (6.4)$$

Para a região interna, o elemento de linha é

$$ds^2 = -g(r)_- dt_-^2 + f(r)_-^{-1} dr_-^2 + r_-^2 d\phi_-^2, \quad (6.5)$$

onde as funções de métrica $g(r)_-$ e $f(r)_-$ são

$$g(r)_- = M + \left[\frac{(-8Mr + 2\gamma)}{\gamma} \exp\left(\frac{-4r}{\gamma}\right) \right] - \Lambda r^2, \quad (6.6)$$

$$f(r)_- = 1 - \frac{b_-}{r}, \quad (6.7)$$

sendo

$$b_- = -rM \left[1 - \frac{(4r + \gamma)}{\gamma} \exp\left(\frac{-4r}{\gamma}\right) \right] + r, \quad (6.8)$$

e $\pm$ representam as geometrias externa e interna, respectivamente.

A junção ocorre em uma hipersuperfície Σ em $r = a(\tau)$, onde τ é o tempo próprio na casca. A métrica induzida em Σ métrica intrínseca em (2+1)-dimensões [105]:

$$ds_\Sigma^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 d\theta^2. \quad (6.9)$$

Os vetores normais às regiões externa (n_+^μ) e interna (n_-^μ) são calculados como anteriormente [119]:

$$n_+^\mu = \left(\frac{\dot{a}}{M + \frac{a^2}{l^2}}, \sqrt{M + \frac{a^2}{l^2} + \dot{a}^2}, 0 \right), \quad (6.10)$$

$$n_-^\mu = \left(\frac{\dot{a}}{M - \left[\frac{M(4a + \gamma)}{\gamma} e^{-4a/\gamma} \right]}, \sqrt{M - \left[\frac{M(4a + \gamma)}{\gamma} e^{-4a/\gamma} \right] + \dot{a}^2}, 0 \right), \quad (6.11)$$

onde $\dot{a} = da/d\tau$.

Para as curvaturas extrínsecas usamos [120]:

$$K_\psi^{\psi\pm} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_\pm(a)}{a} + \dot{a}^2}, \quad (6.12)$$

$$K_{\tau}^{\tau\pm} = \frac{\ddot{a} + \frac{b_{\pm}(a) - b'_{\pm}(a)a}{2a^2}}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a} + \dot{a}^2}} + \Phi'_{\pm}(a) \sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a} + \dot{a}^2}. \quad (6.13)$$

Pelas equações de Lanczos, o tensor energia-momento de superfície é [105]:

$$S_j^i = -\frac{1}{8\pi}(k_j^i - \delta_j^i k_l^l), \quad (6.14)$$

onde $k_j^i = K_j^{i+} - K_j^{i-}$ e $S_j^i = \text{diag}(-\sigma, \mathcal{P})$.

Isso leva à densidade de energia superficial σ e à pressão superficial $\mathcal{P}$:

$$\sigma = -\frac{K_{\psi}^{\psi}}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi a} \left[\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2} - \sqrt{M - \frac{M(4a + \gamma)}{\gamma} e^{-4a/\gamma} + \dot{a}^2} \right], \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \frac{K_{\tau}^{\tau} + K_{\psi}^{\psi}}{8\pi} = \frac{1}{8\pi a} & \left\{ \frac{M + \dot{a}^2 + \ddot{a} - 2\Lambda a^2}{\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}} \right. \\ & \left. - \frac{M + \dot{a}^2 + \ddot{a} + M e^{-4a/\gamma} \left[\frac{4a^2}{\gamma^2} - \frac{4a}{\gamma} - 1 \right]}{\sqrt{M - \frac{M(4a + \gamma)}{\gamma} e^{-4a/\gamma} + \dot{a}^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Para uma solução estática, $a = a_0$ (constante), $\dot{a} = \ddot{a} = 0$. As equações simplificam para:

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{M - \Lambda a_0^2} - \sqrt{M - \frac{M(4a_0 + \gamma)}{\gamma} e^{-4a_0/\gamma}} \right], \quad (6.17)$$

$$\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{M - 2\Lambda a_0^2}{\sqrt{M - \Lambda a_0^2}} - \frac{M + M e^{-4a_0/\gamma} \left[\frac{4a_0^2}{\gamma^2} - \frac{4a_0}{\gamma} - 1 \right]}{\sqrt{M - \frac{M(4a_0 + \gamma)}{\gamma} e^{-4a_0/\gamma}}} \right]. \quad (6.18)$$

Introduzindo $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$ e $\eta = \gamma/a_0$, definimos $\tilde{\sigma} = a_0 \sigma(a_0)$ e $\tilde{\mathcal{P}} = a_0 \mathcal{P}(a_0)$, resultando em

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{M - \tilde{\Lambda}} - \sqrt{M - M \left(\frac{4}{\eta} + 1 \right) e^{-4/\eta}} \right], \quad (6.19)$$

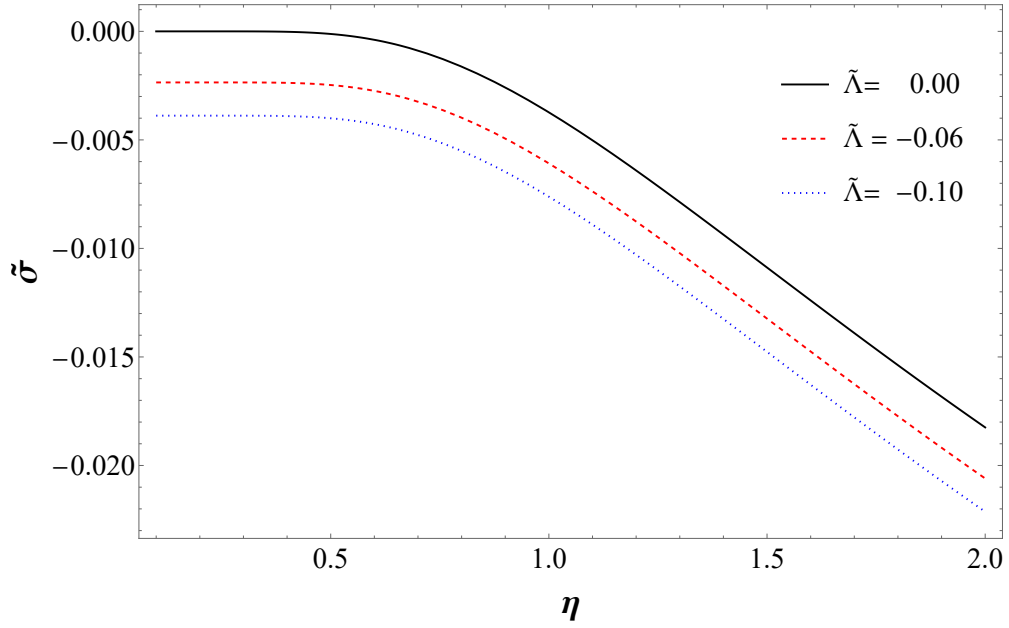


Figura 6.1: Comportamento da densidade de energia superficial $\tilde{\sigma} = a_0\sigma$ em função do parâmetro $\eta = \gamma/a_0$. As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica adimensionalizada $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa externa foi fixada em $M = 1$.

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{M - 2\tilde{\Lambda}}{\sqrt{M - \tilde{\Lambda}}} - \frac{M + M e^{-4/\eta} \left(\frac{4}{\eta^2} - \frac{4}{\eta} + 1 \right)}{\sqrt{M - M \left(\frac{4}{\eta} - 1 \right) e^{-4/\eta}}} \right\}. \quad (6.20)$$

Para $\Lambda = 0$ e $\eta \rightarrow 0$ ($\gamma \ll 1$), seja $b = e^{-4/\eta} \ll 1$. Então

$$\tilde{\sigma} \approx -\frac{\sqrt{M}b}{2\pi\eta} = -\frac{\sqrt{M}}{2\pi\eta} e^{-4/\eta}, \quad (6.21)$$

$$\mathcal{P} \approx -\frac{\sqrt{M}}{2\pi a_0 \eta^2} e^{-4/\eta} = -\frac{a_0 \sqrt{M}}{2\pi \gamma^2} e^{-4a_0/\gamma}. \quad (6.22)$$

Portanto, nessa aproximação encontramos a seguinte relação:

$$\mathcal{P} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (6.23)$$

na casca fina.

Na Fig. 6.1, mostramos o comportamento da densidade de energia em função do parâmetro η . Observa-se que a densidade de energia é negativa tanto para $\tilde{\Lambda} < 0$ como para $\tilde{\Lambda} = 0$.

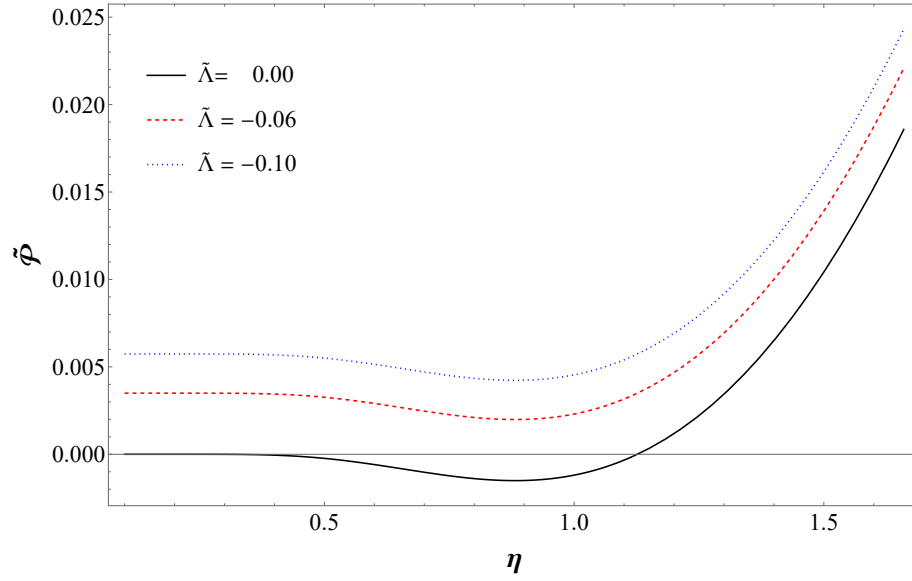


Figura 6.2: Comportamento da pressão superficial $\tilde{\mathcal{P}} = a_0 \mathcal{P}$ em função do parâmetro $\eta = \gamma/a_0$. As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica adimensionalizada $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa externa foi fixada em $M = 1$.

Na Fig. 6.2, mostramos o comportamento da pressão em função de η . Como observado, a pressão é positiva para $\tilde{\Lambda} < 0$. No entanto, para $\tilde{\Lambda} = 0$ há região em que $\mathcal{P} < 0$, o que implica que a equação de estado $\mathcal{P} = -\sigma = \rho$ não é satisfeita, conforme (6.22) e os resultados exibidos na Fig. 6.2. Além disso, para $\tilde{\Lambda} = 0$ o parâmetro de comprimento mínimo γ não desempenha o papel de constante cosmológica na formação e estabilidade do gravastar.

No caso de sistemas mecânicos, a desordem é quantificada pela entropia. Na casca fina, na região delimitada entre $r_1 = a_0$ e $r_2 = a_0 + \epsilon$ com $0 < \epsilon \ll 1$, conforme o modelo de Mazur–Mottola [5, 6]. Com base na função de entropia

$$S_{shell} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{s}(r) r \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}, \quad (6.24)$$

avalia-se: $\mathfrak{s}(r) = \frac{\omega^2 k_B^2 T(r)}{4\pi \hbar^2} = \frac{\omega k_B}{\hbar} \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$ é a densidade de entropia para temperatura local $T(r)$, ω adimensional (tomamos $\omega = 1$), k_B de Boltzmann e $\hbar = h/(2\pi)$.

Usando (6.6) e (6.22) em (6.24), obtemos em unidades de Planck ($\hbar = k_B = 1$):

$$S_{shell} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-\frac{r\sqrt{M} e^{-4r/\gamma}}{4\pi^2\gamma^2}} \frac{r}{\sqrt{M[1 - \frac{(4r+\gamma)}{\gamma} e^{-4r/\gamma}]}} dr. \quad (6.25)$$

Para $\epsilon \ll 1$,

$$S_{shell} \approx \sqrt{\frac{1}{4\gamma\sqrt{M}}} \int_{r_1}^{r_2} r dr \approx \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{1}{4\gamma\sqrt{M}}} (2a_0 + \epsilon). \quad (6.26)$$

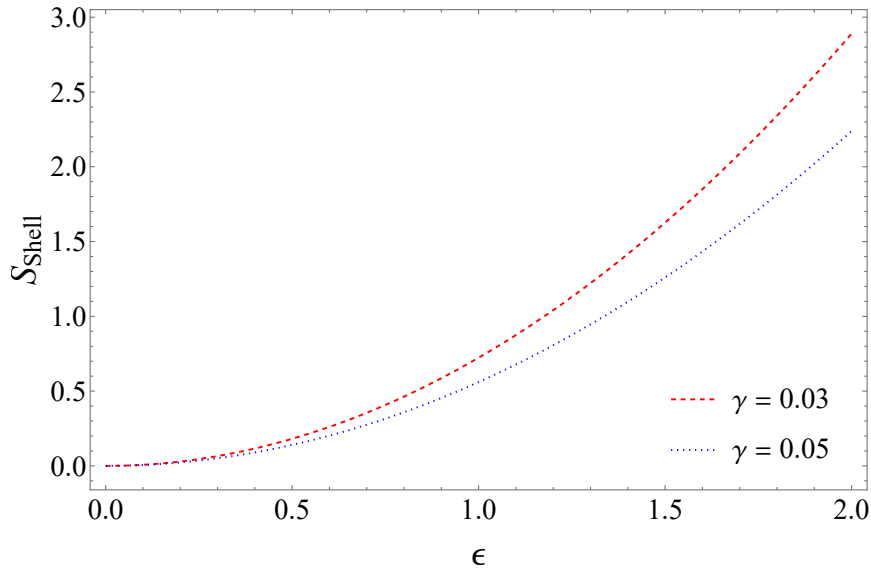


Figura 6.3: Entropia da casca fina S_{shell} em função da espessura da casca ϵ . Os parâmetros fixos são a massa externa $M = 1$ e o raio da casca $a_0 = 0.001$. As curvas mostram o resultado para dois valores distintos do parâmetro de comprimento mínimo γ : $\gamma = 0.03$ (curva vermelha) e $\gamma = 0.05$ (curva azul).

Ao examinar (6.25) e a Fig. 6.3, destaca-se a importância do parâmetro de comprimento mínimo γ na entropia da casca do gravastar. Nota-se que, quando $\gamma \rightarrow 0$, a entropia diverge, evidenciando a impossibilidade física desse limite. Essa divergência enfatiza a necessidade de um parâmetro de correção para manter a integridade termodinâmica e a estabilidade estrutural do gravastar na ausência da constante cosmológica. Esse resultado conecta-se com o apresentado na Fig. 6.2 para $\Lambda = 0$, indicando que, em região de γ pequeno, a condição $\mathcal{P} = \rho$ não é satisfeita e, portanto, γ não substitui a constante cosmológica na formação e estabilidade do gravastar.

6.2 Gravastar BTZ com Distribuição Lorentziana

Nesta seção, seguimos os mesmos passos, mas com distribuição lorentziana interna [18]:

$$ds^2 = -g(r)_- dt_-^2 + f(r)_-^{-1} dr_-^2 + r_-^2 d\phi_-^2, \quad (6.27)$$

$$g(r)_- = -\frac{16Mr^2}{(\beta + 4r)^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (6.28)$$

$$f(r)_- = 1 - \frac{b_-}{r}, \quad b_- = -r \frac{16Mr^2}{(\beta + 4r)^2} + r. \quad (6.29)$$

Agora, usando a equação de Lanczos e realizando algumas manipulações algébricas, podemos obter a densidade de energia e as pressões de superfície dadas por

$$\sigma = -\frac{K^\psi_\psi}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi a} \left[\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2} - \sqrt{\frac{16Ma^2}{(\beta + 4a)^2} + \dot{a}^2} \right], \quad (6.30)$$

$$\mathcal{P} = \frac{K^\tau_\tau + K^\psi_\psi}{8\pi} = \frac{1}{8\pi a} \left[\frac{M + \dot{a}^2 + \ddot{a} - 2\Lambda a^2}{\sqrt{M - \Lambda a^2 + \dot{a}^2}} - \frac{\frac{32Ma^2}{(4a + \beta)^2} + \dot{a}^2 + \ddot{a} - \frac{64Ma^3}{(4a + \beta)^3}}{\sqrt{\frac{16Ma^2}{(\beta + 4a)^2} + \dot{a}^2}} \right]. \quad (6.31)$$

A solução estática é:

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{M - \Lambda a_0^2} - \sqrt{\frac{16Ma_0^2}{(\beta + 4a_0)^2}} \right], \quad (6.32)$$

$$\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{M - 2\Lambda a_0^2}{\sqrt{M - \Lambda a_0^2}} - \frac{\frac{32Ma_0^2}{(4a_0 + \beta)^2} - \frac{64Ma_0^3}{(4a_0 + \beta)^3}}{\sqrt{\frac{16Ma_0^2}{(\beta + 4a_0)^2}}} \right]. \quad (6.33)$$

Podemos reescrever a equação (6.33):

$$\mathcal{P}(a_0) \approx \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{M - 2\Lambda a_0^2}{\sqrt{M - \Lambda a_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\frac{8Ma_0}{4a_0 + \beta} - M \right) \right]. \quad (6.34)$$

Em termos de $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$, $\alpha = \beta/a_0$ e definindo $\tilde{\sigma} = a_0\sigma$, $\tilde{\mathcal{P}} = a_0\mathcal{P}$:

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{M - \tilde{\Lambda}} - \frac{\sqrt{M}}{1 + \alpha/4} \right], \quad (6.35)$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{M - 2\tilde{\Lambda}}{\sqrt{M - \tilde{\Lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\frac{2M}{1 + \alpha/4} - M \right) \right]. \quad (6.36)$$

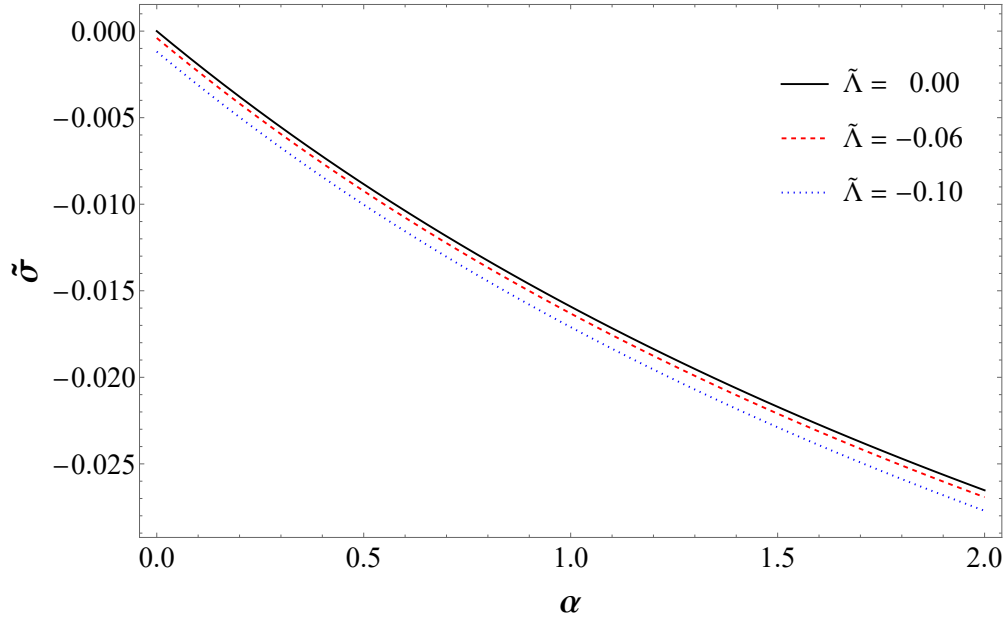


Figura 6.4: Comportamento da densidade de energia superficial $\tilde{\sigma}$ em função do parâmetro α . As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa foi fixada em $M = 1$.

Neste ponto, vamos analisar o caso em que $\Lambda = 0$ e, portanto, as equações acima para densidade de energia e pressão tornam-se

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{M} - \sqrt{\frac{M}{(1 + \frac{\alpha}{4})^2}} \right], \quad (6.37)$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{M}{\sqrt{M}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\frac{2M}{1 + \frac{\alpha}{4}} - M \right) \right]. \quad (6.38)$$

Para $\alpha \ll 1$ ($\beta \ll 1$) encontramos

$$\sigma \approx -\frac{\sqrt{M} \alpha}{16\pi a_0} = -\frac{\sqrt{M} \beta}{16\pi a_0^2}, \quad (6.39)$$

$$\mathcal{P} \approx \frac{\sqrt{M} \alpha}{16\pi a_0} = \frac{\sqrt{M} \beta}{16\pi a_0^2}. \quad (6.40)$$

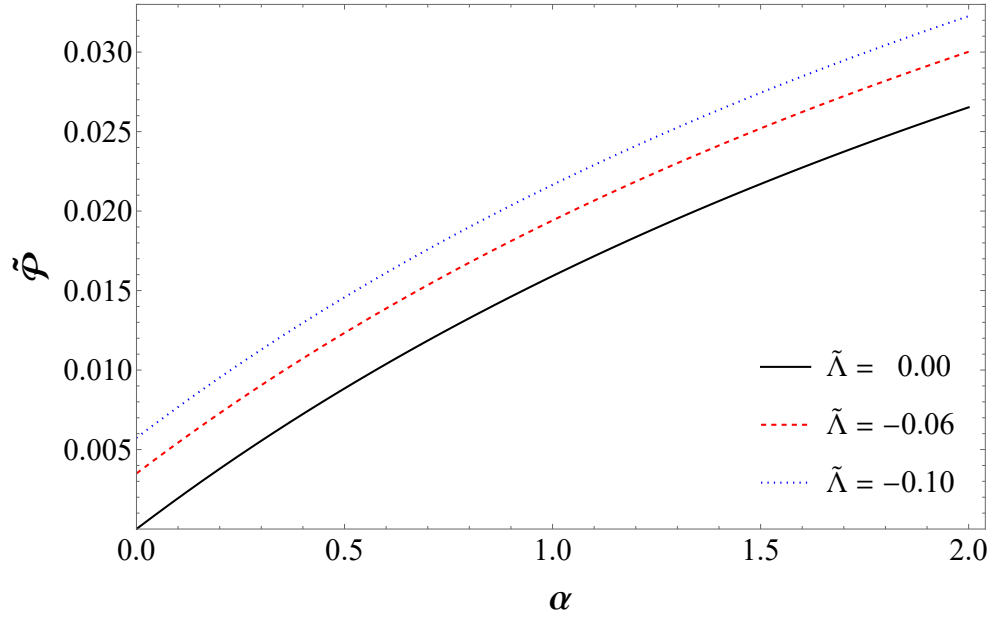


Figura 6.5: Comportamento da pressão superficial $\mathcal{P}$ em função do parâmetro α . As curvas representam diferentes valores da constante cosmológica adimensionalizada $\tilde{\Lambda} = \Lambda a_0^2$: $\tilde{\Lambda} = 0$ (curva preta), $\tilde{\Lambda} = -0.06$ (curva vermelha) e $\tilde{\Lambda} = -0.10$ (curva azul). A massa foi fixada em $M = 1$.

Além disso, obtemos a equação de estado na casca fina:

$$\sigma + \mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{P} = -\sigma = \rho. \quad (6.41)$$

Note que a equação de estado $\mathcal{P} = \rho$ surge apenas quando $\beta \neq 0$. No entanto, para $\Lambda = 0$, dentro da casca temos $\mathcal{P} = -\rho$ com $\rho \approx \beta/(M_0 r^3)$ atuando como uma pressão repulsiva. Além disso, isso estaria relacionado à energia escura surgindo devido ao efeito do comprimento mínimo (β -energia escura). Aqui mostramos que, ao definir $\Lambda = 0$, o parâmetro de comprimento mínimo β desempenha o papel da constante cosmológica para a formação e estabilidade do gravastar.

Por outro lado, ao considerar $\tilde{\Lambda}$ muito grande, podemos escrever as equações para $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\mathcal{P}}$ da seguinte forma:

$$\sigma \approx -\frac{\sqrt{-\tilde{\Lambda}}}{4\pi a_0} = -\frac{\sqrt{-\Lambda a_0^2}}{4\pi a_0}, \quad (6.42)$$

$$\mathcal{P} \approx \frac{\sqrt{-\tilde{\Lambda}}}{4\pi a_0} = \frac{\sqrt{-\Lambda a_0^2}}{4\pi a_0}. \quad (6.43)$$

Para este caso, com $\Lambda < 0$, obtemos a seguinte equação de estado:

$$\mathcal{P} = -\sigma. \quad (6.44)$$

Comparando os resultados acima, encontramos uma relação entre Λ e β dada por

$$\sqrt{-\Lambda} a_0^2 = \frac{\sqrt{M} \alpha}{4} = \frac{\sqrt{-M_0} \beta}{4 a_0} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{16 a_0^4 \Lambda}{M_0}}. \quad (6.45)$$

Para obter um valor para o parâmetro β , consideramos $M_0 = M_{BH}/M_\odot$, sendo M_{BH} a massa do buraco negro e $M_\odot = 1,989 \times 10^{30}$ kg a massa solar. Assim, para $M_{BH} = 10 M_\odot$, $a_0 \approx 29,5 \times 10^3$ m (raio do buraco negro) e $\Lambda = 1,088 \times 10^{-58} \text{ m}^{-2}$ (constante cosmológica), encontramos:

$$\beta \approx 1,15 \times 10^{-20} \text{ m} = [0,583 \times 10^4 \text{ GeV}]^{-2} = [0,583 \times 10 \text{ TeV}]^{-2}. \quad (6.46)$$

Assim, obtivemos $\beta \sim [10 \text{ TeV}]^{-2}$ ou $\sqrt{\beta} \sim [10 \text{ TeV}]^{-1}$, com escala de energia $\Lambda_{ml} = 1/\sqrt{\beta} \sim 10 \text{ TeV}$. O resultado está de acordo com a literatura [122, 126, 128] e também no contexto do modelo de gravastar de casca fina em geometria BTZ não comutativa [132].

Agora, podemos encontrar a entropia dentro da casca, por

$$S_{shell} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{s}(r) r \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}. \quad (6.47)$$

Usando as expressões anteriores, obtemos a entropia total em unidades de Planck ($\hbar = k_B = 1$) como:

$$S_{shell} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\sqrt{M}}{M}} \int_{r_1}^{r_2} (\beta + 4r) \sqrt{\frac{1 - 2\Lambda r^2/M}{r\sqrt{1 - \Lambda r^2/M}} - \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2r^2}} dr, \quad (6.48)$$

$$\approx \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\sqrt{M}}{M}} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{4\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda\sqrt{\beta} r^2}{M\sqrt{2}} - \frac{4\Lambda r^3}{M\sqrt{2\beta}} \right] dr, \quad (6.49)$$

$$= \frac{\epsilon\sqrt{\beta M}}{2M\sqrt{2}} - \frac{\epsilon\Lambda}{M} \left(\frac{a_0^2\sqrt{M\beta}}{8M\sqrt{2}} + \frac{a_0^3\sqrt{M}}{2M\sqrt{2\beta}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.50)$$

A equação acima demonstra claramente a relação matemática que existe entre a entropia da casca S_{shell} e a espessura ϵ . Podemos ver que a constante cosmológica Λ desempenha um papel fundamental na entropia. Entretanto, no caso em que $\Lambda = 0$, o parâmetro β torna-se essencial para caracterizar as propriedades termodinâmicas e a estabilidade da casca. Isso sugere que variações nesses parâmetros podem impactar significativamente o comportamento do modelo.

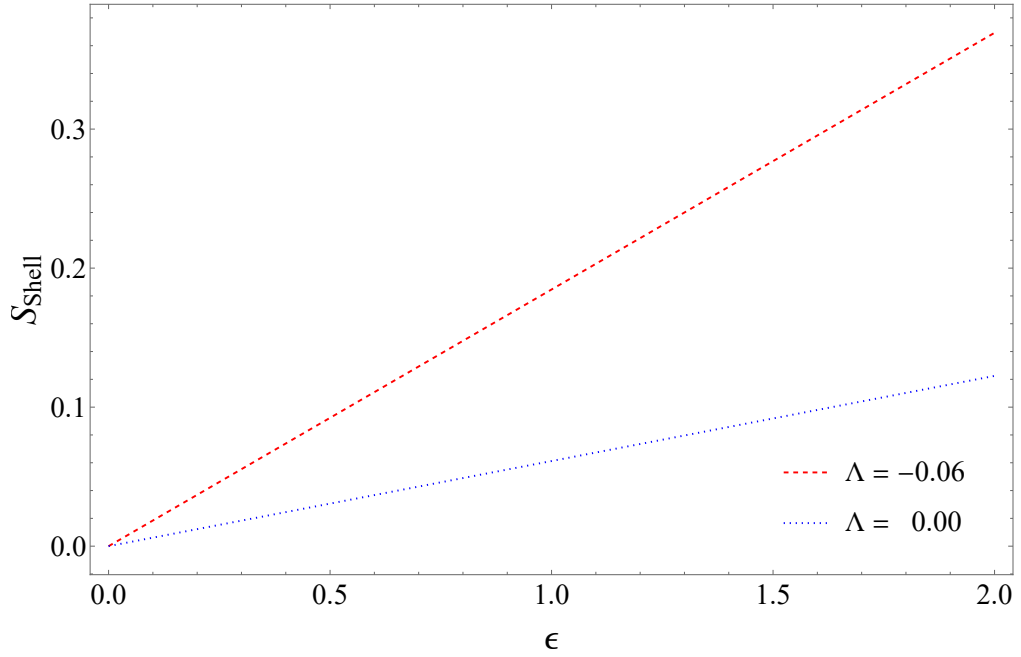


Figura 6.6: Entropia da casca fina S_{shell} em função da espessura da casca ϵ . Os parâmetros fixos são a massa externa $M = 1$, o raio da casca $a_0 = 1$ e o parâmetro de comprimento mínimo $\beta = 0.03$. As curvas mostram o resultado para dois valores distintos da constante cosmológica Λ : $\Lambda = -0.06$ (vermelha, tracejada) e $\Lambda = 0$ (azul, pontilhado).

Em suma, este capítulo demonstra que a introdução de um comprimento mínimo fundamental na geometria BTZ oferece um mecanismo robusto para regularizar as propriedades termodinâmicas dos buracos negros e para construir modelos estáveis de GRAVASTARS. Os resultados obtidos complementam aqueles derivados no contexto da não comutatividade, sugerindo que diferentes abordagens à gravidade quântica podem convergir em suas previsões para a física de objetos compactos, notavelmente na eliminação de singularidades e na formação de remanescentes estáveis.

Neste trabalho, investigamos o buraco negro BTZ não comutativo, com a não comutatividade introduzida por meio de uma distribuição Lorentziana, e realizamos uma análise comparativa entre dois tipos de GRAVASTAR em uma métrica BTZ caracterizada por $\Lambda < 0$, ambos inseridos em um contexto geométrico com comprimento mínimo. Nossa investigação abrangeu tanto a análise termodinâmica da região interna, quanto a construção do modelo de GRAVASTAR de casca fina, revelando importantes propriedades físicas e matemáticas desses objetos.

Demonstramos que a não comutatividade e o comprimento mínimo desempenham um papel fundamental na regularização da temperatura do buraco negro Schwarzschild anti-de Sitter tridimensional. Ao calcular a entropia, identificamos um termo de correção logarítmica, além de outros termos de correção presentes nas equações de entropia para as distribuições estudadas. A análise da capacidade térmica revelou aspectos cruciais sobre a estabilidade do buraco negro, indicando que, para um raio mínimo dependente da correção quântica, a capacidade térmica tende a zero, sinalizando a formação de um remanescente de buraco negro como estágio final.

Ao analisar o modelo de GRAVASTAR de casca fina do buraco negro BTZ não comutativo, verificamos que a densidade de energia σ é negativa e a pressão $\mathcal{P}$ é positiva. Confirmamos também que os estados $\tilde{\sigma} + \tilde{\mathcal{P}}$ e $\tilde{\sigma} + 2\tilde{\mathcal{P}}$ são positivos para valores relativamente pequenos de Θ . Notavelmente, mesmo na ausência da constante cosmológica ($\Lambda = 0$), esses resultados se mantêm, demonstrando que o parâmetro de não comutatividade θ assume o papel da constante cosmológica para a condição de estabilidade energética

do GRAVASTAR. Além disso, mesmo na ausência da constante cosmológica, obtivemos que a condição $p = \rho$ na casca fina é satisfeita com $\rho \approx \sqrt{M\theta}/(8\pi a_0^2)$ (para pequenos valores de θ), e na região interna, a equação de estado $p = -\rho$ ($\rho \sim \sqrt{\theta}/M_0 r^3$) também é satisfeita, evidenciando o efeito da não comutatividade para pressão repulsiva e energia escura.

Nossa análise comparativa entre as distribuições Exponencial e Lorentziana revelou diferenças significativas no comportamento da pressão na casca. Na distribuição Exponencial, identificamos uma pequena região onde a pressão assume valores negativos quando $\tilde{\Lambda} = 0$, sugerindo uma instabilidade local. Embora o sistema seja termodinamicamente estável em seu interior, o parâmetro de comprimento mínimo para esse tipo de distribuição não é suficiente para estabilizá-lo em sua casca em regiões de pequena escala. Em contraste, na distribuição Lorentziana, não identificamos qualquer instabilidade local associada à pressão ao considerar $\tilde{\Lambda} = 0$, e verificamos que essa distribuição satisfaz a equação de estado.

Quanto à entropia na casca, observamos que ela aumenta tanto com a espessura quanto com o parâmetro de comprimento mínimo, atingindo seu valor máximo na fronteira da casca, resultado consistente com estudos anteriores.

Através de nossas análises, estabelecemos uma relação entre o parâmetro de não comutatividade e a constante cosmológica, estimando um valor da ordem de $\theta \sim [10 \text{ TeV}]^{-2}$ para o parâmetro de não comutatividade. Esta estimativa fornece uma importante referência para futuras investigações.

Concluimos que a presença do comprimento mínimo e da não comutatividade em GRAVASTAR numa geometria BTZ não apenas desempenha um papel fundamental na estabilidade desses objetos, mas também ressalta a importância de efeitos quânticos para a compreensão relativística em escalas reduzidas.

7.1 Perspectivas Futuras

Nosso trabalho abre diversas possibilidades para investigações futuras, particularmente no que diz respeito à extensão para o caso de Schwarzschild e no caso de carga sem rotação. Destacamos a seguir algumas lacunas onde a não comutatividade pode ser aplicada para estes buracos negros:

7.1.1 Extensão para o Caso de Schwarzschild

Ao estender nosso formalismo de $(2+1)$ para o espaço-tempo de Schwarzschild em $(3+1)$ dimensões, pretendemos explorar como os parâmetros da correção quântica altera a estrutura do horizonte e a regularização da singularidade central. Propomos esses ajustes com o intuito de evitar a divergência na radiação Hawking, assim como também analisar como a capacidade térmica se comporta na presença de tais correções, pois este é fundamental para sua estabilidade. Para a GRAVASTAR em Schwarzschild com correções quânticas, investigaremos como esses efeitos modificam a estrutura e estabilidade nas cascas das GRAVASTARS, focando em suas densidades de energia, pressão e entropia. Outro ponto também importante será observar as regiões de estabilidade. Resolvendo questões como a instabilidade da casca fina em modelos padrão.

7.1.2 Caso de Carga sem Rotação (Reissner–Nordström)

Ao incorporar carga elétrica em nosso modelo, buscamos investigar como os efeitos quânticos suavizam as divergências características do modelo padrão. Assim, como também, estudar as relações termodinâmicas (temperatura, entropia, capacidade térmica) em buracos negros carregados, avaliando a resolução de divergências próximas à casos extremos.

Ao analisar como a estrutura da GRAVASTAR pode ser alterada na casca carregada e sob efeitos quânticos, investigaremos em que medida a combinação de carga e correções quânticas podem violar ou preservar as condições de energia na casca, estendendo as condições de Israel ao contexto de geometria modificada, comparando-as com o

caso não carregado.

Essas investigações não apenas expandem nossa compreensão teórica dos buracos negros e GRAVASTARS, mas também fornecem insights para o avanço da física em regimes de alta energia e gravidade.

Referências

- [1] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199, 1975. Erratum: *Commun. Math. Phys.* 46, 206 (1976).
- [2] P. Nicolini. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: A review. *Int. J. Mod. Phys. A*, 24:1229, 2009.
- [3] B. P. Abbott et al. Properties of the binary black hole merger gw150914. *Phys. Rev. Lett.*, 116:241102, 2016.
- [4] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L1, 2019.
- [5] P. O. Mazur and E. Mottola. Gravitational condensate stars: An alternative to black holes. *Universe*, 9:88, 2023.
- [6] P. O. Mazur and E. Mottola. Gravitational vacuum condensate stars. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 101:9545, 2004.
- [7] Cecilia B. M. H. Chirenti and Luciano Rezzolla. How to tell a gravastar from a black hole. *Class. Quant. Grav.*, 24:4191–4206, 2007.
- [8] A. G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009, 1998.
- [9] S. Perlmutter et al. Measurements of ω and λ from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565, 1999.
- [10] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020. Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021).
- [11] V. Sahni and A. A. Starobinsky. The case for a positive cosmological lambda term. *Int. J. Mod. Phys. D*, 9:373, 2000.
- [12] P. J. E. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559, 2003.
- [13] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235, 2003.
- [14] P. Nicolini, A. Smailagic, and E. Spallucci. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Phys. Lett. B*, 632:547–551, 2006.

- [15] R. J. Szabo. Symmetry, gravity and noncommutativity. *Class. Quant. Grav.*, 23:R199–R242, 2006.
- [16] M. Bañados, O. Chandía, N. Grandi, F. A. Schaposnik, and G. A. Silva. Chernsimons formulation of noncommutative gravity in three dimensions. *Phys. Rev. D*, 64:084012, Sep 2001.
- [17] M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos. Gravitational aharonov-bohm effect due to noncommutative btz black hole. *Phys. Lett. B*, 743:184, 2015.
- [18] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos, J. L. Paulino, A. T. N. Silva, and J. Spinelly. Hawking radiation and entropy of a btz black hole with minimum length. *Mod. Phys. Lett. A*, 37:2250215, 2022.
- [19] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851, 1992.
- [20] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.
- [21] A. Ashtekar, J. Wisniewski, and O. Dreyer. Isolated horizons in $(2+1)$ gravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 6:507–555, 2003.
- [22] A. T. N. Silva. Termodinâmica de um buraco negro btz com um comprimento mínimo. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil, 2018.
- [23] K. Nozari and S. H. Mehdipour. Hawking radiation as quantum tunneling from noncommutative schwarzschild black hole. *Class. Quant. Grav.*, 25:175015, 2008.
- [24] J. Liang and B. Liu. Thermodynamics of noncommutative geometry inspired btz black hole based on lorentzian smeared mass distribution. *EPL*, 100:30001, 2012.
- [25] M. A. Anacleto, F. A. Brito, B. R. Carvalho, and E. Passos. Noncommutative correction to the entropy of btz black hole with gup. *Adv. High Energy Phys.*, 2021:6633684, 2021.
- [26] M. A. Anacleto, F. A. Brito, J. A. V. Campos, and E. Passos. Absorption and scattering of a noncommutative black hole. *Phys. Lett. B*, 803:135334, 2020.
- [27] S. K. Jha and A. Rahaman. Superradiance scattering off rotating simpson-visser black hole and its shadow in the noncommutative setting, 2022. Preprint.
- [28] J. A. V. Campos, M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos. Quasinormal modes and shadow of noncommutative black hole. *Sci. Rep.*, 12:8516, 2022.
- [29] S. K. Jha and A. Rahaman. Superradiance scattering off kerr-like black hole and its shadow in the bumblebee gravity with noncommutative spacetime. *Eur. Phys. J. C*, 82(8):728, 2022.
- [30] F. S. N. Lobo and R. Garattini. Linearized stability analysis of gravastars in noncommutative geometry. *JHEP*, 12:065, 2013.

- [31] Ali Övgün, Ayan Banerjee, and Kimet Jusufi. Charged Thin-shell Gravastars in Noncommutative Geometry. *Eur. Phys. J. C*, 77(8):566, 2017.
- [32] Z. Yousaf, K. Bamba, M. Z. Bhatti, and U. Ghafoor. Charged gravastars in modified gravity. *Phys. Rev. D*, 100(2):024062, 2019.
- [33] M. F. Shamir and M. Ahmad. Gravastars in $f(\mathcal{G}, t)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 97:104031, 2018.
- [34] M. F. Shamir and S. Zia. Gravastars in $f(r, g)$ gravity. *Can. J. Phys.*, 98(9):849–852, 2020.
- [35] M. F. Shamir. Massive compact bardeen stars with conformal motion. *Phys. Lett. B*, 811:135927, 2020.
- [36] M. F. Shamir and T. Naz. Stellar structures in $f(g)$ gravity admitting noether symmetries. *Phys. Lett. B*, 806:135519, 2020.
- [37] Farook Rahaman, Saibal Ray, A. A. Usmani, and Safiqul Islam. The (2+1)-dimensional gravastars. *Phys. Lett. B*, 707:319–322, 2012.
- [38] Farook Rahaman, A. A. Usmani, Saibal Ray, and Safiqul Islam. The (2+1)-dimensional charged gravastars. *Phys. Lett. B*, 717:1–5, 2012.
- [39] H. Barzegar, M. Bigdeli, G. H. Bordbar, and B. Eslam Panah. Stable three-dimensional (un)charged ads gravastars in gravity’s rainbow. *Eur. Phys. J. C*, 83(2):151, 2023.
- [40] X. X. Zeng, G. P. Li, and K. J. He. The shadows and observational appearance of a noncommutative black hole surrounded by various profiles of accretions. *Nucl. Phys. B*, 974:115639, 2022.
- [41] X. X. Zeng, M. I. Aslam, and R. Saleem. The optical appearance of charged four-dimensional gauss–bonnet black hole with strings cloud and non-commutative geometry surrounded by various accretions profiles. *Eur. Phys. J. C*, 83(2):129, 2023.
- [42] M. A. Anacleto, F. A. Brito, S. S. Cruz, and E. Passos. Noncommutative correction to the entropy of schwarzschild black hole with gup. *Int. J. Mod. Phys. A*, 36(03):2150028, 2021.
- [43] X. Y. Hu, X. X. Zeng, L. F. Li, and P. Xu. Holographic einstein rings of non-commutative black holes. *Eur. Phys. J. C*, 84(2):199, 2024.
- [44] M. A. Anacleto, F. A. Brito, J. A. V. Campos, and E. Passos. Absorption, scattering and shadow by a noncommutative black hole with global monopole, 2022. Preprint.
- [45] R. Saleem and M. I. Aslam. Observable features of charged kiselev black hole with non-commutative geometry under various accretion flow. *Eur. Phys. J. C*, 83(3):257, 2023.
- [46] A. A. Araújo Filho, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, P. J. Porfírio, and A. Övgün. Properties of an axisymmetric lorentzian non-commutative black hole. *Phys. Dark Univ.*, 47:101796, 2025.

- [47] B. Hamil and B. C. Lütfüoğlu. Noncommutative schwarzschild black hole surrounded by quintessence: Thermodynamics, shadows and quasinormal modes. *Phys. Dark Univ.*, 44:101484, 2024.
- [48] R. B. Wang, S. J. Ma, J. B. Deng, and X. R. Hu. Estimating the strength of lorentzian distribution in non-commutative geometry by solar system tests.
- [49] S. K. Jha. Superradiance scattering of electromagnetic and gravitational fields and thin accretion disk around non-commutating kerr black hole. *Eur. Phys. J. C*, 84(11):1194, 2024.
- [50] N. Bodendorfer. A note on entanglement entropy and quantum geometry. *Class. Quant. Grav.*, 31(21):214004, 2014.
- [51] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Classical Theory of Fields*. Pergamon, 1971.
- [52] Mike Guidry. *Modern General Relativity: Black Holes, Gravitational Waves, and Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [53] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, and Paolo Pani. *General Relativity and its Applications*. CRC Press, 12 2020.
- [54] V. P. Frolov and I. D. Novikov. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Springer, 1998.
- [55] *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. John Wiley and Sons, 1982.
- [56] N. Cruz, C. Mart’inez, and L. Pe na. Geodesic structure of the (2+1)-dimensional btz black hole. *Class. Quant. Grav.*, 11:2731, 1994.
- [57] M. Ba nados et al. Geometry of the 2+1 black hole. *Phys. Rev. D*, 48:1506, 1993.
- [58] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Geometry of the (2+1) black hole. *Phys. Rev. D*, 48:1506, 1993. Erratum: *Phys. Rev. D* 88, 069902 (2013).
- [59] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161, 1973.
- [60] S. W. Hawking. Black holes and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 13:191, 1976.
- [61] J. D. Bekenstein et al. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333, 1973.
- [62] R. M. Wald. *Black Holes and Relativistic Stars*. University of Chicago Press, 1998.
- [63] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [64] B. R. Carvalho. *Correção não-comutativa para a termodinâmica do buraco negro BTZ*. Dissertaç ao (mestrado), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil, 2021.
- [65] V. Mukhanov and S. Winitzki. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.

- [66] N. S. M. de Santi. *Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild*. Dissertação ao (mestrado), Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos, Brasil, 2018.
- [67] Robert M. Wald. The thermodynamics of black holes. *Living Rev. Rel.*, 4:6, 2001.
- [68] J. David Brown, J. Creighton, and Robert B. Mann. Temperature, energy and heat capacity of asymptotically anti-de Sitter black holes. *Phys. Rev. D*, 50:6394–6403, 1994.
- [69] O. B. Zaslavsky. Thermodynamics of (2+1) black holes. *Class. Quant. Grav.*, 11:L33–L38, 1994.
- [70] L. Ortiz. Hawking effect in the eternal BTZ black hole: an example of Holography in AdS spacetime. *Gen. Rel. Grav.*, 45:427–448, 2013.
- [71] J. Maldacena. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231, 1998.
- [72] L. Susskind. The world as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377, 1995.
- [73] R. Bousso. The holographic principle. *Rev. Mod. Phys.*, 74:825, 2002.
- [74] A. Strominger and C. Vafa. Microscopic origin of the bekenstein-hawking entropy. *Phys. Lett. B*, 379:99, 1996.
- [75] A. Ashtekar, J. C. Baez, and K. Krasnov. Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 4:1, 2000.
- [76] S. W. Hawking and D. N. Page. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Commun. Math. Phys.*, 87:577, 1983.
- [77] W. G. Unruh. Experimental black-hole evaporation? *Phys. Rev. Lett.*, 46:1351, 1981.
- [78] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser. Analogue gravity. *Living Rev. Relativity*, 8:12, 2005.
- [79] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, Jan 1947.
- [80] E. Spallucci et al. Noncommutative geometry inspired higher-dimensional charged black holes. *Phys. Lett. B*, 670:449, 2009.
- [81] N. Arkani-Hamed et al. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett. B*, 429:263, 1998.
- [82] G. L. Alberghi et al. Probing quantum gravity effects in black holes at lhc. *J. Phys. G*, 34:767, 2007.
- [83] A. Casanova and E. Spallucci. Tev mini black hole decay at future colliders. *Class. Quant. Grav.*, 23:45, 2006.
- [84] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, 73:977, 2001.

- [85] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 09:032, 1999.
- [86] L. Smolin. *Three Roads to Quantum Gravity*. Basic Books, 2001.
- [87] G. Amelino-Camelia. Testable scenario for relativity with minimum length. *Phys. Lett. B*, 510:255, 2001.
- [88] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts. The quantum structure of spacetime at the planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, 172:187, 1995.
- [89] P. Nicolini, A. Smailagic, and E. Spallucci. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Phys. Lett. B*, 632:547, 2006.
- [90] Shao-Wen Wei, Yu-Xiao Liu, Zhen-Hua Zhao, and Chun-E Fu. Area spectrum of Schwarzschild black hole inspired by noncommutative geometry. 4 2010.
- [91] S. Rahaman et al. Btz black holes inspired by noncommutative geometry. Preprint, 2013.
- [92] M. A. Anacleto, F. A. Brito, A. G. Cavalcanti, E. Passos, and J. Spinelly. Quantum correction to the entropy of noncommutative BTZ black hole. *Gen. Rel. Grav.*, 50(2):23, 2018.
- [93] Yang XL, Guo SH, Chan FT, Wong KW, and Ching WY. Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. i. nonrelativistic theory. *Phys. Rev. A*, 43(3):1186–1196, 1991.
- [94] Y. G. Miao and Y. M. Wu. Thermodynamics of the schwarzschild-ads black hole with a minimal length. *Adv. High Energy Phys.*, 2017:1095217, 2017.
- [95] V. Cardoso and P. Pani. Testing the nature of dark compact objects: A status report. *Living Rev. Relativ.*, 22:4, 2019.
- [96] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189, 1916.
- [97] N. A. Bahcall, J. P. Ostriker, S. Perlmutter, and P. J. Steinhardt. The cosmic triangle: Assessing the state of the universe. *Science*, 284:1481, 1999.
- [98] S. Pradhan, D. Mohanty, and P. K. Sahoo. Thin-shell gravastar model in $f(q, t)$ gravity. *Chin. Phys. C*, 47:095104, 2023.
- [99] Dubravko Horvat and Sasa Ilijic. Gravastar energy conditions revisited. *Class. Quant. Grav.*, 24:5637–5649, 2007.
- [100] D. Bhattacharjee, P. K. Chattopadhyay, and B. C. Paul. New gravastar model in generalised cylindrically symmetric space-time and prediction of mass limit. *Phys. Dark Univ.*, 43:101411, 2024.
- [101] Pawel O. Mazur and Emil Mottola. Dark energy and condensate stars: Casimir energy in the large. In *6th Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions (QFEXT03)*, pages 350–357, 5 2004.

- [102] M. Visser and D. L. Wiltshire. Stable gravastars: An alternative to black holes? *Class. Quant. Grav.*, 21:1135, 2004.
- [103] Debadri Bhattacharjee and Pradip Kumar Chattopadhyay. Charged gravastar model in Rastall theory of gravity. *JHEAp*, 43:248–257, 2024.
- [104] Francisco S. N. Lobo. Stable dark energy stars. *Class. Quant. Grav.*, 23:1525–1541, 2006.
- [105] F. S. N. Lobo, P. Martín-Moruno, N. Montelongo-García, and M. Visser. Novel stability approach of thin-shell gravastars, 2015. Preprint.
- [106] Paolo Pani, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Yanbei Chen, and Richard Norte. Gravitational wave signatures of the absence of an event horizon. I. Nonradial oscillations of a thin-shell gravastar. *Phys. Rev. D*, 80:124047, 2009.
- [107] Helda.fi. Junction conditions in general relativity. <https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/xxx/JunctionConditions.pdf>. Accessed: 2025-04-19.
- [108] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [109] Matt Visser. *Lorentzian wormholes: From einstein to hawking*, 1995.
- [110] Werner Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento B*, 44:1–14, July 1966.
- [111] W. B. Bonnor and P. A. Vickers. Junction conditions in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 13:29–36, 1981.
- [112] Georges Darmon. *Mémoires des Sciences Mathématiques, Fasc. 25*. Gauthier-Villars, 1927.
- [113] J. L. Synge. *Relativity: The General Theory*. North-Holland, 1960.
- [114] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [115] André Lichnerowicz. *Théories Relativistes de la Gravitation et de l’Électromagnétisme*. Masson, 1955.
- [116] Carlos Barceló and Matt Visser. Moduli fields and brane tensions: generalizing the junction conditions. *Classical and Quantum Gravity*, 17(16):3843–3873, 2000.
- [117] Dubravko Horvat and Saša Ilijić. Gravastar energy conditions revisited. *arXiv preprint arXiv:0707.1636v2*, 2007.
- [118] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [119] P. Martin Moruno, N. Montelongo Garcia, F. S. N. Lobo, and M. Visser. Generic thin-shell gravastars. *JCAP*, 03:034, 2012.
- [120] Matt Visser. *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*. 1995.

-
- [121] G. P. Perry and R. B. Mann. Traversable wormholes in (2+1)-dimensions. *Gen. Rel. Grav.*, 24:305, 1992.
- [122] I. Mocioiu, M. Pospelov, and R. Roiban. Low-energy limits on the antisymmetric tensor field background on the brane and on the noncommutative scale. *Phys. Lett. B*, 489:390, 2000.
- [123] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative qed. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2716, 2001.
- [124] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Non-commutativity of space-time and the hydrogen atom spectrum. *Eur. Phys. J. C*, 36:251, 2004.
- [125] I. Hinchliffe, N. Kersting, and Y. L. Ma. Review of the phenomenology of noncommutative geometry. *Int. J. Mod. Phys. A*, 19:179, 2004.
- [126] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. M'endez, and J. C. Rojas. Testing spatial noncommutativity via the aharonov-bohm effect. *Phys. Rev. D*, 66:045018, 2002.
- [127] V. O. Rivelles. A review of noncommutative field theories. *J. Phys. Conf. Ser.*, 287:012012, 2011.
- [128] S. Vagnozzi et al. Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the event horizon telescope image of sagittarius a*. *Class. Quant. Grav.*, 40:165007, 2023.
- [129] M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos. Noncommutative analogue aharonov-bohm effect and superresonance. *Phys. Rev. D*, 87:125015, 2013.
- [130] M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos. Gravitational Aharonov–Bohm effect due to noncommutative BTZ black hole. *Phys. Lett. B*, 743:184–188, 2015.
- [131] Ayan Banerjee. Stability of Charged Thin-Shell Wormholes in (2+1) Dimensions. *Int. J. Theor. Phys.*, 52:2943–2958, 2013.
- [132] A. T. N. Silva, M. A. Anacleto, and L. Casarini. Thin-shell gravastar in a noncommutative btz geometry. *Phys. Dark Univ.*, 44:101479, 2024.
- [133] A. E. Broderick and R. Narayan. Where are all the gravastars? limits upon the gravastar model from accreting black holes. *Class. Quant. Grav.*, 24:659, 2007.
- [134] W. Israel. Erratum-ibid. *Nuovo Cim. B*, 48:463, 1967.
- [135] M. Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. American Institute of Physics, New York, 1995.

APÊNDICES

Formalismo Matemático da GRAVASTAR - Equações Gerais

Neste apêndice, apresentamos o formalismo matemático que fundamenta o modelo GRAVASTAR, um conceito inovador no campo da física teórica. Todo o desenvolvimento exposto a seguir foi extraído do artigo que, devidamente citado, oferece uma abordagem detalhada e rigorosa das equações e pressupostos que regem a proposta desta tese. O objetivo deste apêndice é fornecer uma base conceitual sólida para a compreensão da construção da GRAVASTAR, contribuindo para o aprofundamento das discussões teóricas e para possíveis avanços nas investigações sobre objetos compactos alternativos aos buracos negros.

A.1 Camada de Transição

As partes interna e externa são delimitadas por hipersuperfícies isométricas Σ_+ e Σ_- , contendo métricas g_{ij}^+ e g_{ij}^- induzidas. Por pressuposto, $g_{ij}^+(\xi) = g_{ij}^-(\xi) = g_{ij}(\xi)$, utilizando as coordenadas naturais da hipersuperfície $\xi^i = (\tau, \theta, \phi)$. A forma M única é formada pela junção entre M_+ e M_- em suas margens. Desta forma, $M = M_+ \cup M_-$, com a fronteira $\Sigma = \Sigma_+ = \Sigma_-$. A métrica intrínseca em Σ é [119]:

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.1})$$

A localização da interface de junção é representada por $x^\mu(\tau, \theta, \phi) = (t(\tau), a(\tau), \theta, \phi)$, e as velocidades 4-dimensionais correspondentes (avaliadas nos sistemas de coordenadas

fixos em ambos os lados da interface de da junção) são:

$$U_{\pm}^{\mu} = \left(e^{-\Phi_{\pm}(a)} \sqrt{\frac{1 - b_{\pm}(a)/a + \dot{a}^2}{1 - b_{\pm}(a)/a}}, \dot{a}, 0, 0 \right). \quad (\text{A.2})$$

O ponto acima do a denota uma derivada em relação a τ , o tempo próprio de um observador comoviente com a superfície de junção. O formalismo de Israel exige que os vetores normais apontem de M_- para M_+ [[133]–[134]]. As normais unitárias à superfície de junção são:

$$n_{\pm}^{\mu} = \left(e^{-\Phi_{\pm}(a)} \sqrt{\frac{1 - b_{\pm}(a)/a}{1 - b_{\pm}(a)/a + \dot{a}^2}}, \dot{a}, 0, 0 \right). \quad (\text{A.3})$$

Considerando a simetria esférica, é possível deduzir esses resultados a partir das contrações $U_{\mu}U^{\mu} = -1$, $U_{\mu}n^{\mu} = 0$ e $n_{\mu}n^{\mu} = +1$. A curvatura extrínseca, também conhecida como segunda forma fundamental, é expressa como $K_{ij} = n_{\nu}^{\mu}; e_{(i)}^{\mu} e_{(j)}^{\nu}$. Ao diferenciar $n_{\mu}e_{(i)}^{\mu} = 0$ em relação a ξ^j , obtemos:

$$n_{\mu} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = -n_{\mu, \nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^j}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que a curvatura extrínseca geral é dada por

$$K_{ij}^{\pm} = -n_{\mu} \left(\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^j} \right). \quad (\text{A.5})$$

Em se tratando de uma casca delgada, a continuidade do tensor K_{ij} não se mantém ao longo de Σ . Para facilitar a notação, define-se a descontinuidade na segunda forma

fundamental como $\kappa_{ij} = K_{ij}^+ - K_{ij}^-$. Os componentes não triviais da curvatura extrínseca podem ser calculados de maneira simples como.

$$K_\theta^\theta = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_\pm(a)}{a} + \dot{a}^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$K_\tau^\tau = \frac{\ddot{a} + \frac{b_\pm(a) - ab'_\pm(a)}{2a^2}}{\sqrt{1 - \frac{b_\pm(a)}{a} + \dot{a}^2}} + \Phi'_\pm(a) \sqrt{1 - \frac{b_\pm(a)}{a} + \dot{a}^2}. \quad (\text{A.7})$$

onde o apóstrofo agora denota uma derivada com respeito à coordenada a .

Observe que K_θ^θ não depende das quantidades $\Phi_\pm$. Essa independência se torna mais clara ao considerar que, em termos da distância normal ℓ em relação à casca Σ , a curvatura extrínseca pode ser expressa como $K_{ij} = \frac{1}{2} \partial_\ell g_{ij} = \frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu g_{ij} = \frac{1}{2} n^r \partial_r g_{ij}$. O último passo se baseia no fato de que os espaços-tempos do bulk são estáticos. Portanto, dado que $g_{\theta\theta} = r^2$, ao derivar e realizar a substituição $r \rightarrow a$, temos $K_{\theta\theta} = \frac{n^r}{a}$. Assim,

$$K_\theta^\theta = \frac{n^r}{a}, \quad (\text{A.8})$$

o que é uma fórmula particularmente simples em termos do componente radial do vetor normal, e que facilmente nos permite verificar [A.6](#).

- Para $K_{\tau\tau}$, há um argumento (facilmente extensível no Apêndice [B](#), inspirado na referência [\[135\]](#))

$$K_\tau^\tau = g_\pm = (\text{magnitude da 4-aceleração física da camada de transição}). \quad (\text{A.9})$$

Isso dá uma interpretação física clara para K_τ^τ e permite verificar rapidamente [A.7](#).

• Há também uma importante relação diferencial entre esses componentes da curvatura extrínseca

$$\frac{d}{d\tau} (ae^{\Phi_{\pm}} K_{\theta}^{\theta}) = e^{\Phi_{\pm}} K_{\tau}^{\tau} \dot{a}. \quad (\text{A.10})$$

A maneira mais direta de verificar isso é simplesmente diferenciando, usando A.6 e A.7 acima. Geometricamente, a existência dessas relações entre os componentes da curvatura extrínseca deve-se, em última análise, ao fato de que os espaços-tempos de bulk foram escolhidos como estáticos. Notando que

$$\frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} \dot{a}^2 \right) = \frac{d}{da} (\dot{a}) \dot{a} = \ddot{a}, \quad (\text{A.11})$$

também podemos escrever essa relação diferencial como

$$\frac{d}{da} (ae^{\Phi_{\pm}} K_{\theta}^{\theta}) = e^{\Phi_{\pm}} K_{\tau}^{\tau}. \quad (\text{A.12})$$

O que foi apresentado anteriormente demonstra claramente como as alterações na geometria da casca — expressas pelos componentes K_{θ}^{θ} e K_{τ}^{τ} da curvatura extrínseca — estão interconectadas. Essa conexão resulta diretamente da seleção de espaços-tempos de bulk estáticos, que impõem limitações estruturais que associam a dinâmica da casca à sua geometria interna. Portanto, esse achado não apenas confirma a coerência dos cálculos realizados, mas também se revela uma ferramenta valiosa para investigar a estabilidade dinâmica do GRAVASTAR, facilitando uma compreensão mais aprofundada de como as flutuações na aceleração da casca estão fundamentalmente relacionadas à sua configuração geométrica.

Assim, mesmo em contextos variáveis, os requisitos dos espaços de bulk estáticos

asseguram uma base diferencial sólida, essencial para a análise detalhada da evolução e da estabilidade desses objetos compactos.

A.2 Equações de Lanczos

As equações de Lanczos derivam das equações de Einstein aplicadas à superfície que conecta os espaços-tempos de bulk ⁱ, e são dadas por[110, 116]:

$$S_{ij} = -\frac{1}{8\pi} (\kappa_j^i - \delta_j^i \kappa_k^k). \quad (\text{A.13})$$

Aqui S_{ij} é o tensor energia-momento da superfície Σ . Devido à simetria esférica, simplificações consideráveis ocorrem, especificamente, $\kappa_j^i = \text{diag}(\kappa_\tau^\tau, \kappa_\theta^\theta, \kappa_\theta^\theta)$. O tensor de energia-momento da superfície pode ser escrito em termos da densidade de energia superficial σ e da pressão superficial P como:

$$S_{ij} = \text{diag}(-\sigma, P, P). \quad (\text{A.14})$$

As equações de Lanczos, então, se reduzem a:

$$\sigma = -\frac{\kappa_\theta^\theta}{4\pi}, \quad (\text{A.15})$$

$$P = \frac{\kappa_\tau^\tau + \kappa_\theta^\theta}{8\pi}, \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma + 2P = \frac{\kappa_\tau^\tau}{4\pi}. \quad (\text{A.17})$$

A densidade de energia superficial e a pressão superficial podem ser expressas em termos das funções $b^\pm(a)$ e outras variáveis da seguinte forma:

ⁱ As equações de Lanczos aparecem na descrição de superfícies de junção na relatividade geral, onde dois espaços-tempos distintos ("bulk") se encontram conectados por uma camada delgada (como superfícies de cascas). Essas equações representam uma maneira de aplicar as equações de Einstein na interface entre esses dois espaçotempos e são originadas pela chamada "condição de Israel", que trata da descontinuidade na curvatura extrínseca ao atravessar essa superfície.

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a} \left[\sqrt{1 - \frac{b_+(a)}{a} + \dot{a}^2} - \sqrt{1 - \frac{b_-(a)}{a} + \dot{a}^2} \right], \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi a} \left[\frac{1 + \dot{a}^2 + a\ddot{a} - \frac{b_+(a)ab'_+}{2a}}{\sqrt{1 - \frac{b_+(a)}{a} + \dot{a}^2}} - \frac{1 + \dot{a}^2 + a\ddot{a} - \frac{b_-(a)ab'_-}{2a}}{\sqrt{1 - \frac{b_-(a)}{a} + \dot{a}^2}} \right], \quad (\text{A.20})$$

$$(\text{A.21})$$

$$\sigma + 2P = \frac{[g]}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\ddot{a} + \frac{+(a)-ab'_+(a)}{2a}}{\sqrt{1 - \frac{b_+(a)}{a} + \dot{a}^2}} - \frac{\ddot{a} + \frac{+(a)-ab'_-(a)}{2a}}{\sqrt{1 - \frac{b_-(a)}{a} + \dot{a}^2}} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Note que a massa superficial da camada fina pode ser encontrada por $m_s = 4\pi a^2 \sigma$, $\sigma + 2P$ tem uma interpretação física particularmente simples em termos de $[g]$, a descontinuidade na 4-aceleração.

Independentemente do estado de movimento da casca fina, temos $\sigma(a) > 0$ sempre que $b_+(a) > b_-(a)$ e $\sigma(a) < 0$ sempre que $b_+(a) < b_-(a)$. A situação onde $\sigma = 0$ corresponde a $b_-(a) = b_+(a)$, e é precisamente o caso onde todas as descontinuidades estão concentradas em K_τ^τ , enquanto K_θ^θ é contínuo. Este fenômeno, o desaparecimento de σ em algum raio particular da camada dada por $b_-(a) = b_+(a)$, é geral para gravastars, mas (devido a algumas inversões de sinais importantes) é improvável para os buracos de minhoca de casca fina considerados em outras referências. Esta é uma das características que distinguem gravastars de buracos de minhoca que podem ser atravessados por uma camada fina, embora buracos de minhoca rodeados por camadas finas também tenham sido analisados na literatura.

Assumimos, para fins de discussão, uma solução estática em algum $a_0 \in (R_-, R_+)$.

Então:

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{1 - \frac{b_+(a_0)}{a_0}} - \sqrt{1 - \frac{b_-(a_0)}{a_0}} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$P(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{1 - b_+(a_0) + a_0 b'_+(a_0)}{\sqrt{1 - \frac{b_+(a_0)}{a_0}}} - \frac{1 - b_-(a_0) + a_0 b'_-(a_0)}{\sqrt{1 - \frac{b_-(a_0)}{a_0}}} \right], \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma(a_0) + 2P(a_0) = \frac{[g_0]}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\frac{b_+(a_0) - a_0 b'_+(a_0)}{2a_0}}{\sqrt{1 - \frac{b_+(a_0)}{a_0}}} - \frac{\frac{b_-(a_0) - a_0 b'_-(a_0)}{2a_0}}{\sqrt{1 - \frac{b_-(a_0)}{a_0}}} \right]. \quad (\text{A.25})$$

Quando assumimos uma solução estática para o sistema, estamos essencialmente assumindo que ela não se modifica com o passar do tempo. Isto implica que, para um determinado raio a_0 , variáveis relevantes como a densidade superficial $\sigma(a_0)$ e pressão $P(a_0)$ permanecem inalteradas ao longo do tempo. Tal suposição é frequentemente válida no contexto onde a GRAVASTAR atingiu um estado de equilíbrio estático, no qual a casca fina e as regiões interna e externa estão em equilíbrio estático.

Escolhendo uma solução estática, conseguimos isolar efeitos puramente espaciais na casca fina, ignorando as complicações derivadas de elementos dinâmicos, como expansão ou contração. Esta abordagem simplifica a análise da geometria da casca e permite um estudo mais direto de suas propriedades e das relações entre seus limites internos e externos.

Demonstração da curvatura extrínseca da GRAVASTAR

Neste anexo, apresentamos de forma detalhada a demonstração da curvatura extrínseca que caracteriza o modelo GRAVASTAR. A derivação e os fundamentos teóricos expostos foram integralmente retirados do livro de referência [135], o qual consolida os métodos matemáticos aplicados para a análise dos aspectos geométricos deste modelo. Ao seguir os procedimentos descritos nessa obra, buscamos evidenciar a consistência e a robustez do formalismo empregado, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada dos mecanismos envolvidos na definição dos objetos compactos alternativos aos buracos negros.

B.1 Curvatura extrínseca da GRAVASTAR

Para analisar a dinâmica da GRAVASTAR, permitimos que o raio da casca se torne uma função do tempo, ou seja, $a \mapsto a(\tau)$. O símbolo τ representa o tempo próprio, conforme medido por um observador comóvel na casca da GRAVASTAR [135].

Pela aplicação do teorema de Birkhoff, podemos afirmar que, para qualquer $r > a(\tau)$, a geometria permanecerá como a de um pedaço do espaço-tempo de Schwarzschild (ou Reissner-Nordström, ou, no nosso caso, BTZ). Em particular, a simetria esférica impõe que não há radiação gravitacional, independentemente do comportamento de $a(\tau)$.

Seja a posição da casca descrita por $x^\mu(\tau, \theta, \varphi) \equiv (t(\tau), a(\tau), \theta, \varphi)$, de modo que a quadrivelocidade de um elemento da casca seja:

$$V^\mu \equiv \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{da}{d\tau}, 0, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}} + \dot{a}^2}{1 - \frac{2M}{a}}, \dot{a}, 0, 0 \right). \quad (\text{B.1})$$

Onde um ponto superior indica derivada em relação a τ . O vetor normal unitário à casca é dado por:

$$n^\mu = \left(\frac{\dot{a}}{1 - \frac{2M}{a}}, \sqrt{1 - \frac{2M}{a}} + \dot{a}^2, 0, 0 \right). \quad (\text{B.2})$$

Neste contexto dinâmico, $\eta(x)$ é definida como a menor distância entre o ponto x e a casca da GRAVASTAR, funcionando como uma coordenada normal para a casca. Na própria casca, o vetor normal é dado por $n^\mu = \nabla^\mu \eta(x)$.

O cálculo das componentes $\hat{\theta}\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}\hat{\varphi}$ da segunda forma são :

$$K_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^\pm \equiv K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^\pm = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \Big|_{r=a} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{2M}{a}} + \dot{a}^2. \quad (\text{B.3})$$

A avaliação da componente $\tau\tau$ de K é mais trabalhosa. Naturalmente, pode-se proceder por meio da força bruta. No entanto, é mais instrutivo apresentar uma breve digressão. Note que:

$$K_{\tau\tau}^\pm \equiv K_{\mu\nu}^\pm V^\mu V^\nu = +\nabla_\mu^\pm n_\nu V^\mu V^\nu = -V^\mu n_\nu \nabla_\mu^\pm V^\nu = -n_\nu (V^\mu \nabla_\mu^\pm V^\nu) = -n_\nu A_\pm^\nu. \quad (\text{B.4})$$

Aqui, $A_\pm^\mu$ representa a quatro-aceleração da casca. (Este é um caso simplificado de uma análise geral anterior). Pela simetria esférica do problema, a quatro-aceleração é proporcional ao vetor normal unitário:

$$A_\pm^\mu \equiv A_\pm \cdot n^\mu. \quad (\text{B.5})$$

Pela simetria na troca entre os universos, tem-se que $A_\pm = \pm A$. Assim,

$$K_{\tau\tau}^\pm = \pm A \equiv \pm (\text{magnitude da quadri-aceleração}). \quad (\text{B.6})$$

Para avaliar explicitamente a quatro-aceleração, utilizamos o fato de que a geometria de Schwarzschild subjacente possui um vetor de Killing:

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu \equiv (1, 0, 0, 0). \quad (\text{B.7})$$

Note que, na casca, temos:

$$k_\mu = (-[1 - 2M/a], 0, 0, 0), \quad (\text{B.8})$$

de modo que:

$$k_\mu n^\mu = -\dot{a} \quad \text{e} \quad k_\mu V^\mu = -\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}. \quad (\text{B.9})$$

Retrospectivamente, é interessante avaliar:

$$\frac{d}{d\tau}(k_\mu V^\mu) = k_{\mu;\nu} V^\nu V^\mu + k_\mu \frac{dV^\mu}{d\tau}. \quad (\text{B.10})$$

Como

$$k_{\mu;\nu} V^\nu V^\mu = k_\mu A n^\mu, \quad (\text{B.11})$$

segue que:

$$\frac{d}{d\tau}(k_\mu V^\mu) = -A\dot{a}. \quad (\text{B.12})$$

Por outro lado, temos que:

$$\frac{d}{d\tau}(k_\mu V^\mu) = -\frac{d}{d\tau} \sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}} \cdot \left(\frac{M}{a^2} + \ddot{a} \right) \cdot \dot{a}. \quad (\text{B.14})$$

Comparando os dois cálculos, encontramos que a quatro-aceleração da garganta é:

$$A = \frac{\left(\ddot{a} + \frac{M}{a^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}}. \quad (\text{B.15})$$

Note que, quando $M \rightarrow 0$, recuperamos a fórmula relativística especial correta para a quatro-aceleração,

$$A \rightarrow \frac{\ddot{a}}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}}, \quad (\text{B.16})$$

com os devidos fatores de dilatação temporal.

Quando $\dot{a} \rightarrow 0$, obtemos:

$$A \rightarrow \frac{(M/a^2)}{\sqrt{1 - 2M/a}}. \quad (\text{B.17})$$

Esse é o resultado correto para a pseudoforça gravitacional experimentada por um observador mantido em repouso em uma geometria de Schwarzschild.

As equações de campo de Einstein para a casca dinâmica da GRAVASTAR fornecem:

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}, \quad (\text{B.18})$$

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi a} \frac{\left(1 - \frac{M}{a} + \dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}}. \quad (\text{B.19})$$

A conservação da energia do tensor de estresse segue como:

$$\dot{\sigma} = -2(\sigma - \vartheta)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{B.20})$$

ou equivalentemente:

$$\frac{d}{d\tau}(\sigma a^2) = \vartheta \cdot \frac{d}{d\tau}(a^2). \quad (\text{B.21})$$

Como é comum, há uma redundância entre as equações de campo de Einstein e a conservação covariante do tensor energia-momento. Com estas equações, a análise da

estabilidade dinâmica da GRAVASTAR se torna direta.

ANEXOS

Artigos publicados e associados ao presente trabalho:

1. M.A. Anacleto; F. A. Brito; E. Passos; L. Paulino; **A.T. N. Silva**; J. Spinnelly. **Hawking radiation and entropy of a BTZ black hole with minimum length.** *Modern Physics Letters A* Vol. 37 No. 32, 2023
2. **A.T. N. Silva**; M.A. Anacleto; L. Casarini. **Thin-shell gravastar in a noncommutative BTZ geometry.** *Phys. Dark Univ.* Vol.44 No. 101479, 2024

Artigo ainda em análise para publicação e associado ao presente trabalho:

1. M.A. Anacleto; **A.T. N. Silva**; L. Casarini. **Thin-shell gravastar model in a BTZ geometry with minimum length.** Preprint [arXiv:2301.05970v1](https://arxiv.org/abs/2301.05970v1) [*hep-th*]