Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação

O uso do conceito de séries para demonstrar a igualdade "$0,999\ldots = 1$"

por

Carlos Roberto Santos Dantas Junior

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jônison Lucas Dos Santos Carvalho

São Cristóvão - SE

Agosto de 2025

Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

O uso do conceito de séries para demonstrar a igualdade "$0,999\ldots = 1$"

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Carlos Roberto Santos Dantas Junior

Orientador: Prof. Dr. Jônison Lucas Dos Santos Carvalho

São Cristóvão - SE, Agosto de 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O uso do conceito de séries para demonstrar a igualdade ”0, 999 . . . = 1”

por

Carlos Roberto Santos Dantas Junior

Aprovada pela Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br JONISON LUCAS DOS SANTOS CARVALHO
Data: 21/08/2025 19:40:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br ANA CRISTINA SALVIANO VEIGA
Data: 21/08/2025 19:25:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br DIEGO ALVES DA COSTA
Data: 21/08/2025 19:06:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Diego Alves da Costa - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 21 de Agosto de 2025.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail:profmat@academico.ufs.br

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

D192u

Dantas Júnior, Carlos Roberto Santos.
O uso do conceito de séries para demonstrar a igualdade "0,999...=1" / Carlos Roberto Santos Dantas Batista; orientador Jônison Lucas dos Santos Carvalho. – São Cristóvão, SE, 2025.
75 f.: il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Números reais. 2. Séries (Matemática). 3. Séries geométricas. 4. Sequências (Matemática). 5. Cálculo. I. Carvalho, Jônison Lucas dos Santos, orient. II. Título.

CDU 511.11

Agradecimentos

Saí da minha graduação em Licenciatura em Matemática exausto, pois estudava enquanto trabalhava em um emprego que eu amava, mas que era extremamente desgastante fisicamente. Tempos depois, esse trabalho foi substituído por uma nova paixão: lecionar. Com essa paixão, veio também a necessidade de me aprimorar academicamente, e assim concluí três pós-graduações lato sensu. No entanto, isso ainda parecia pouco. Eu ansiava por uma pós-graduação *stricto sensu*, embora essa possibilidade me parecesse distante, já que até então eu só conhecia o mestrado acadêmico, o que, para professores da educação básica como eu, representa um desafio considerável em termos de acesso.

Foi então que ouvi falar no PROFMAT, o Programa de Mestrado Profissional ofertado pela SBM e pela CAPES onde faço aqui um adendo e aproveito para informar que: **"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"**, em parceria com diversas universidades, entre elas a Universidade Federal de Sergipe (UFS). Após três tentativas, consegui ser aprovado na seleção e, assim, estou realizando um sonho recente: especializar-me e conquistar o título de Mestre em Matemática pela UFS.

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus, mesmo não sendo uma pessoa muito religiosa, e também à minha família, minha esposa Juliana e a meus filhos Hian Carlos e Ana Júlia pelo apoio e paciência ao longo desses quase três anos de estudo. Agradeço também a meu pai Carlos Roberto "*in memoriam*", à minha mãe Altina e irmãos Adriana, Rodrigo e Andrezza Dantas.

Não poderia deixar de mencionar os colegas da turma, que mudaram, para mim, o significado da palavra "colega". Foi nessa turma que realmente me senti acolhido e apoiado, em diversos momentos e sentidos. O grupo foi muito unido e coeso, o que me ajudou a superar inúmeros desafios. Cito, com carinho, Cinthia Rodrigues, Andréa Santana, Elaine Michelle, Thiago Ferreira, Shirlei Souza, Thaís Menandra, Reinan Lima e Hélio Luíz. Foram muitos estudos e resenhas, momentos que deixarão saudade, inclusive dos colegas que, por motivos diversos, não puderam concluir o curso ao nosso lado.

Com certeza, não posso e acredito que ninguém poderá esquecer dos professores da UFS, especialmente do Departamento de Matemática, diretamente ligado ao PROFMAT. Eles sempre foram humanos e solícitos diante das nossas necessidades e angústias, nos acalmando e orientando em inúmeras ocasiões.

Deixo por último um agradecimento especial ao meu orientador, o Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho. Sinto-me imensamente e infinitamente feliz por tê-lo tido como orientador nesta dissertação. Aprendi a admirá-lo por sua postura serena, gentil, precisa e cirúrgica em cada orientação durante esta jornada. Ele desempenhou esse papel com verdadeira maestria.

Por fim, meus agradecimentos institucionais: à Secretaria de Estado da Educação (SEDUC/SE), que me concedeu uma licença de pouco mais de um ano para estudos, algo determinante para que eu pudesse dedicar tempo à formação; à SBM, por viabilizar este programa de mestrado voltado à valorização da educação básica; e à Universidade Federal de Sergipe, por seu compromisso histórico com a excelência no ensino superior em nosso estado.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo de apresentar com rigor uma justificativa para a igualdade "$0,999\ldots = 1$", que trata de uma igualdade que frequentemente causa estranhamento entre estudantes e entusiastas da matemática. Vale ressaltar que esta igualdade está relacionada à história da própria construção dos números reais e do conceito de infinito na matemática. Foi através de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897) que se consolidaram os fundamentos do cálculo e da análise real, permitindo tratar a igualdade "$0,999\ldots = 1$" de modo preciso. No século XX, com a formalização dos números reais por meio de sequências de Cauchy ou cortes de Dedekind, ficou claro que esta igualdade trata de uma sequência que converge (ou "se aproxima") de 1.

Palavras-chave: Sequências de números reais; Limite de sequência; Série convergente; Série Geométrica.

Abstract

This work aims to rigorously present a justification for the equality $0.999\ldots = 1$, which often causes confusion among students and mathematics enthusiasts. It is worth noting that this equality is related to the very history of the construction of the real numbers and the concept of infinity in mathematics. It was through the work of Augustin-Louis Cauchy (1789−1857) and Karl Weierstrass (1815−1897) that the foundations of calculus and real analysis were consolidated, allowing the equality $0.999\ldots = 1$ to be treated precisely. In the 20th century, with the formalization of the real numbers through Cauchy sequences or Dedekind cuts, it became clear that this equality refers to a sequence that converges (or "approaches") 1.

Keywords: Sequences of real numbers; Limit of a sequence; Convergent series; Geometric series.

Sumário

Introdução

A Matemática é repleta de resultados que, à primeira vista, parecem desafiar a lógica. Entre esses, destaca-se a igualdade “$0,999\ldots = 1$” que gera bastante dúvida e resistência entre estudantes do ensino básico. Essa dificuldade está, em grande parte, relacionada à compreensão intuitiva da noção de infinitude. É comum a aparição de justificativas informais nos livros didáticos (alguns serão citados), mas que são úteis para motivar o aluno.

As primeiras noções de frações decimais e expansões em base 10 foram abordadas na matemática árabe e indiana da Antiguidade. O matemático persa Al-Kashi (século XV), por exemplo, já fazia uso deste conceito. Em 1548-1620, houve avanço com frações decimais, por meio do matemático neerlandês Simon Stevin, que defendia a ideia de que todos os números poderiam ser representados por meio de frações decimais. Um avanço significativo para um maior rigor, ocorreu no século XIX, com o desenvolvimento da análise matemática. O francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) introduziu a definição de limite baseada em aproximações sucessivas, e o alemão Karl Weierstrass (1815-1897) formulou as bases do cálculo moderno com definições precisas para convergência e continuidade. Finalmente, a concretização da igualdade “$0,999\ldots = 1$” se completou com a construção formal dos números reais, realizada por meio dos cortes de Dedekind, propostos por Richard Dedekind (1831-1916), ou das sequências de Cauchy, como sugerido por Georg Cantor (1845-1918), entre outros.

A proposta principal deste trabalho é apresentar a demonstração formal da igualdade “$0,999\ldots = 1$”, utilizando o conceito de série convergente, tendo como ponto principal a série geométrica.

A seguir, apresentamos brevemente o que discutiremos em cada capítulo deste trabalho.

No **Capítulo 1**, **Preliminares** apresentaremos os conceitos fundamentais que servirão de base para a demonstração rigorosa da igualdade "$0,999\ldots = 1$". O capítulo está estruturado em três partes principais:

- Sequência de números reais: definição formal de sequência como uma função dos naturais nos reais, exemplos básicos, operações entre sequências, noções de limitação, monotonicidade e subsequências.

- Limites de sequências de números reais: definição formal de limite, exemplos intuitivos e formais de convergência, unicidade do limite, propriedades fundamentais como limitação das sequências convergentes e comportamento das subsequências. Também são tratados conceitos de supremo e ínfimo, culminando no teorema de que toda sequência monótona e limitada converge.

- Propriedades dos limites de sequências: teoremas sobre operações com limites (soma, produto, quociente), corolários e exemplos que ilustram a aplicação prática dessas propriedades no cálculo de limites.

Esse capítulo funciona como a fundamentação teórica para os capítulos seguintes, preparando o terreno para o estudo de séries e, finalmente, para a demonstração formal da igualdade "$0,999\ldots = 1$" por meio da série geométrica.

O **Capítulo 2** é iniciado com uma motivação que trata da demonstração de "$0,999\ldots = 1$" de maneira informal. Em seguida, é abordado o conceito de séries, que é essencial para uma demonstração rigorosa dessa igualdade. Posteriormente, há uma discussão, que aponta a relação entre a demonstração formal e informal. Finalmente, esse capítulo é encerrado com dois produtos educacionais, a saber uma sequência didática e um jogo da memória.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sequência de números reais

Nesta seção, abordaremos o conceito de sequências de números reais que é primordial para o desenvolvimento e compreensão do fato que "$0,999,\ldots = 1$". Apresentaremos definições, observações e exemplos para facilitar a compreensão.

Definição 1.1 (Sequência). *Uma sequência de números reais (ou simplesmente sequência) é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $x(n)$. Neste caso, o número real $x(n)$ é dito n-ésimo termo da sequência e é denotado por x_n.*

Observação 1.1 (Notação de sequência). *Denotaremos por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n), a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Observação 1.2 ("Sequência finita ou infinita"). *É importante não confundir o conjunto imagem $x(\mathbb{N}) = \{x(n) = x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ com a própria sequência (função) $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Por exemplo, dada a função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, com $x(n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência pode ser representada por $(x_n) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ e $x(\mathbb{N}) = \{1\}$. Neste caso, vale ressaltar que mesmo uma sequência possuindo infinitos termos, não necessariamente o conjunto imagem é infinito.*

Exemplo 1.1. *Segue alguns exemplos de sequências.*

1) $\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$;

2) $(n) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$;

3) $(\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

A seguir, serão apresentadas as operações envolvendo sequências.

Observação 1.3 (Operações com sequências). *Considere as sequências* (x_n) *e* (y_n). *Somar* (x_n) *e* (y_n), *significa considerar a sequência* (z_n), *em que* $z_n = x_n + y_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Mais precisamente, a sequência* (z_n) *pode ser representada pela função* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *em que* $z(n) = (x+y)(n) = x(n)+y(n)$. *De forma similar, podemos subtrair e multiplicar as sequências* (x_n) *e* (y_n), *que são dadas por* $(x_n - y_n)$ *e* $(x_n y_n)$. *Além disso, também temos a sequência* (x_n/y_n), *caso* $y_n \neq 0$, *que representa o quociente das sequências* (x_n) *e* (y_n).

Dando continuidade, veremos a definição de sequência limitada.

Definição 1.2 (Sequência limitada). *Uma sequência* (x_n) *é dita limitada, se existe* $c > 0$ *tal que*

$$|x_n| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quando uma sequência (x_n) *não é limitada, diz-se que ela é ilimitada. Mais precisamente, significa que dado* $c > 0$, *é possível obter* $n \in \mathbb{N}$, *tal que* $|x_n| > c$. *Neste caso,* $n = n(c)$, *ou seja,* n *depende de* c.

Exemplo 1.2. *A sequência* $(\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ *é limitada por 1. Já a sequência* $(n) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ *é ilimitada.*

Observação 1.4. *Uma consequência de uma sequência* (x_n) *ser limitada por* $c > 0$, *é que* $x_n \in [-c, c]$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *De fato, como* $|x_n| \leq c$, *então* $-x_n \leq c$ *e* $x_n \leq c$. *Dessa forma,* $-c \leq x_n \leq c$, *ou seja,* $x_n \in [-c, c]$.

No que segue, será abordado o conceito de monotonicidade de sequência.

Definição 1.3 (Sequência crescente ou não decrescente). *Uma sequência* (x_n) *é dita crescente quando,* $x_n < x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Isto é,*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$$

Por outro lado, (x_n) *é dita não decrescente quando,* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Sendo assim,*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$$

Exemplo 1.3. *A sequência* $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ *é crescente, pois*

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

Por outro lado, a sequência de Fibonacci, dada por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$*, não é crescente, uma vez que* $x_1 = 1 = x_2$*. Mas esta sequência é não decrescente, já que*

$$1 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 5 \leq 8 \leq 13 \leq 21 \leq \ldots$$

Definição 1.4 (**Sequência decrescente ou não crescente**). *Uma sequência* (x_n) *é dita decrescente se,* $x_{n+1} < x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Em outras palavras,*

$$\ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_3 < x_2 < x_1.$$

Além disso, (x_n) *é dita não crescente se,* $x_{n+1} \leq x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Ou seja,*

$$\ldots \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \ldots \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1.$$

Exemplo 1.4. *A sequência dada por* $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$ *é decrescente, visto que*

$$\ldots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Por outro lado, a sequência constante $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ *não é decrescente, pois* $x_2 = 1 = x_1$*. Porém é não crescente, devido ao fato que*

$$\ldots \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 1.$$

Em particular, toda sequência constante é não crescente e não decrescente.

Definição 1.5 (**Sequência monótona**). *As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de sequências monótonas.*

Observação 1.5. *A sequência* $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$ *é um exemplo de uma sequência que não é monótona. De fato,* $x_1 < x_2$*, mas* $x_2 > x_3$*.*

Finalizamos essa subseção com o conceito de subsequência.

Definição 1.6 (**Subsequência**). *Dada uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais, uma subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é a restrição da função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\} \subset \mathbb{N}$*. Denota-se a subsequência por* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$*, ou* $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\ x_{n_k}, \ldots)$*, ou ainda* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$*.*

Observação 1.6. *Toda subsequência de uma sequência também é uma sequência. De fato, seja* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma sequência. Dada uma subsequência* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$*, temos que ela pode ser vista como a composição da função* x *com uma função estritamente crescente*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(i) = n_i.$$

Assim, a subsequência é dada por

$$(x_{n_i}) = (x \circ f)(i), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Portanto, toda subsequência é, por si só, uma sequência, já que continua sendo uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$. A diferença é que seus termos são obtidos a partir de uma "seleção ordenada" da sequência original, preservando a sua estrutura funcional.

Exemplo 1.5. *Vamos considerar $\mathbb{N}_1 = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2 < 4 < 6 < \ldots < 2n < \ldots\}$. Dessa forma, a subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/2^n)$ é dada por*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots, \frac{1}{2^{2n}}, \ldots\right).$$

1.2 Limites de sequências de números reais

Nesta seção, será abordado o conceito de limite sequência, que desempenha um papel fundamental na análise matemática e na compreensão de diversos fenômenos relacionados aos números reais. Em alguns exemplos, faremos uso da intuição, mas também da formalização matemática.

Definição 1.7 (Limite de sequência). *Dizemos que uma sequência (x_n) é convergente, se existir $x \in \mathbb{R}$, tal que para qualquer $\varepsilon > 0$, é possível obter $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ satisfazendo*

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{1.1}$$

Neste caso, dizemos que (x_n) converge para x e denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Outras notações utilizadas são

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \quad e \quad x_n \to x.$$

Quando uma sequência não é convergente, ela é dita divergente.

Observação 1.7. *Note que por (1.1), os termos da sequência (x_n) com índice maior ou igual a n_0 pertencem ao intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. De fato, para $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Dessa maneira, $-(x_n - x) < \varepsilon$ e $(x_n - x) < \varepsilon$. Logo $x - \varepsilon < x_n$ e $x_n < x + \varepsilon$. Sendo assim $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$. Veja figura abaixo, para compreender a ideia geométrica.*

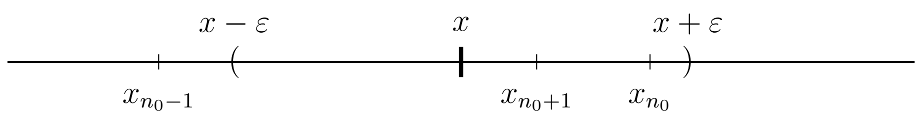


Figura 1.1:

Exemplo 1.6 (Convergência de sequência constante). *Considere a sequência constante* $(x_n) = (1, 1, 1, \ldots)$, *ou seja,* $x_n = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Obtendo a convergência da sequência de forma intuitiva: *Vamos atribuir alguns valores para* n *conforme a tabela a seguir.*

n	x_n
1	1
100	1
1000	1
1000000	1

Claramente, percebe-se que quanto maior o valor de n *o valor resultante da sequência é sempre 1, o que nos leva a intuir que esta sequência converge para 1.*

Vale ressaltar que a tabela acima não demonstra que esta convergência é verídica, sendo assim usaremos a Definição 1.7, com $x = 1$.

Demonstração da convergência, via definição: *Seja* $\varepsilon > 0$ *arbitrário. Devemos obter* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

ou seja,

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Como $|x_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$, *para todo* $n \geq 1$, *podemos considerar* $n_0 = 1$.

De forma geral, se $(x_n) = (c, c, c, \ldots)$, *em que* $c \in \mathbb{R}$, *tem-se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Exemplo 1.7. *Considere a sequência* $(x_n) = (1/n)$.

Obtendo a convergência da sequência de forma intuitiva: *Vamos atribuir alguns valores para* n *conforme a tabela a seguir.*

n	x_n
1	1
100	$0,01$
1000	$0,001$
1000000	$0,000001$

É possível perceber que conforme o valor de n aumenta x_n se aproxima de 0. Isto nos induz a afirmar que esta sequência converge para 0. Agora, usaremos a Definição 1.7, com $x = 0$.

Demonstração da convergência, via definição: *Seja $\varepsilon > 0$, devemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Com o intuito de obter o $n_0 \in \mathbb{N}$ adequado, faremos o cálculo "de trás para frente". Neste caso,

$$\left|\frac{1}{n_0} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n_0}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n_0} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n_0.$$

Tal $n_0 \in \mathbb{N}$ existe, uma vez que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente. Sendo assim, para este $n_0 \in \mathbb{N}$ escolhido, se $n \geq n_0$, tem-se

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemplo 1.8. *Considere agora a sequência $(z_n) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.*

Obtendo a convergência da sequência de forma intuitiva: *Atribuindo alguns valores para n, obtemos a tabela a seguir.*

n	z_n
1	0
100	$0,99$
1000	$0,999$
1000000	$0,999999$

É possível perceber que conforme o valor de n aumenta z_n se aproxima de 1. A tabela é uma estratégia bastante exaustiva, e por isso vamos executar uma forma mais simples e direta de perceber para qual valor a sequência se aproxima, caso ela convirja. Note que reescrevendo o termo z_n, tem-se

$$z_n = \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Pelos Exemplos 1.6 e 1.7, sabemos que as sequências (1) e $(1/n)$ convergem para 1 e 0, respectivamente. Logo, pela última igualdade é de se esperar que (z_n) convirja para $1 - 0 = 1$. Logo abaixo, verificaremos via definição que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Demonstração da convergência, via definição: *Tomando $\varepsilon > 0$, devemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|z_n - 1| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1\right| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Note que

$$\left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Este cálculo infere que tomando $n_0 > 1/\varepsilon$, temos a convergência. De fato, se $n \geq n_0$, então

$$\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

O próximo teorema, trata de um resultado bastante importante sobre a convergência de uma sequência, que é a unicidade.

Teorema 1.1 (Unicidade do limite de sequência). *Se existir um número real x tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então ele é único, ou seja, uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Demonstraremos este resultado por argumento de contradição. Sendo assim, suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, com $x \neq y$. Sem perda de generalidade, considere $x < y$. Vamos escolher um $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon = y - \varepsilon$, de acordo com a figura abaixo.

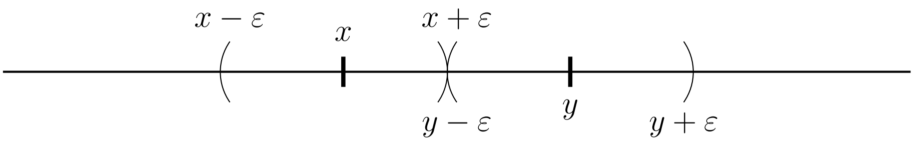


Figura 1.2: Ideia geométrica da escolha do ε.

Neste caso,

$$x+\varepsilon = y-\varepsilon \Longleftrightarrow 2\varepsilon = y-x \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0. \tag{1.2}$$

Utilizando a definição de limite (veja Definição 1.7), existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - x| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_1 \quad \text{e} \quad |x_n - y| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se $n_0 \geq n_1$ e $n_0 \geq n_2$. Dessa forma,

$$|x_{n_0} - x| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |x_{n_0} - y| < \varepsilon.$$

Pela Observação 1.7, conclui-se que $x_{n_0} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ e $x_{n_0} \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Pela figura abaixo fica claro que a contradição que chegaremos é $x_{n_0} < x_{n_0}$.

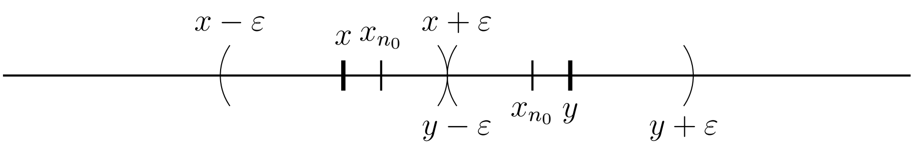


Figura 1.3: Contradição vista de forma geométrica.

De fato, note que por (1.2),

$$x_{n_0} < x+\varepsilon = y-\varepsilon < x_{n_0},$$

que é uma contradição, e assim o limite dever ser único, neste caso $x = y$. O resultado está demonstrado. $\square$

O próximo resultado traz uma propriedade herdada das sequências convergentes.

Teorema 1.2 (Limitação de sequência convergente). *Se a sequência (x_n) for convergente, então ela é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tomando um $\varepsilon = 1 > 0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| < 1, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Isto implica que

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Considerando $d = \max\{|x_1|, \ldots |x_{n_0-1}|\}$, tem-se

$$|x_n| \leq d, \quad \forall\, 1 \leq n \leq n_0 - 1.$$

Dessa maneira, $|x_n| \leq 1 + |x| + d$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $n \geq 1$ arbitrário. Se $1 \leq n \leq n_0 - 1$, então

$$|x_n| \leq d \leq 1 + |x| + d.$$

Por outro lado, caso $n \geq n_0$, tem-se

$$|x_n| \leq 1 + |x| \leq 1 + |x| + d.$$

Portanto, $|x_n| \leq 1 + |x| + d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o resultado está demonstrado. □

Exemplo 1.9. *Utilizando a contra positiva do Teorema 1.2, segue que a sequência* $(x_n) = (2n) = (2, 4, 6, \ldots)$ *não converge, pois não é limitada.*

É importante mencionar que a recíproca do Teorema 1.2 é falsa, ou seja, uma sequência limitada não é necessariamente convergente. Para isto, precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 1.3 (Limite de Subsequência). *Seja* (x_n) *uma sequência tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Então, toda subsequência de* (x_n) *converge para* x.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ uma subsequência de (x_n). Dado $\varepsilon > 0$, devemos obter $n_1 \in \mathbb{N}_1$ tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_1 \text{ com } n \in \mathbb{N}_1.$$

Para concluir isso, usando a convergência da sequência (x_n), sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Desde que $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito, existe $n_1 \in \mathbb{N}_1$ tal que $n_1 \geq n_0$. Dessa maneira, se $n \in \mathbb{N}_1$ for tal que $n \geq n_1 \geq n_0$, concluímos que $|x_n - x| < \varepsilon$. A prova está encerrada. □

A seguir, exibiremos um exemplo de uma sequência limitada que não converge, acarretando na falsidade da recíproca do Teorema 1.2.

Exemplo 1.10. *A sequência* $(x_n) = (3, 0, 3, 0, \ldots)$ *é limitada por 3, pois* $|x_n| = 0$ *ou* $|x_n| = 3$*, e em ambos os casos* $|x_n| \leq 3$*, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*. Notando que* $x_{2n-1} = 3$ *e* $x_{2n} = 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, pelo Exemplo 1.6, obtém-se*

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 3 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0.$$

Portanto, a sequência (x_n) *admite duas subsequências convergindo para valores distintos. Aplicando a contra positiva do Teorema 1.3, verifica-se que* (x_n) *não converge. Em outras palavras, apesar de ser limitada, esta sequência não converge.*

Vimos através do Exemplo 1.10, que o fato de uma sequência ser limitada não é suficiente para assegurar convergência, porém no resultado a seguir, se além da limitação adicionarmos monotonicidade, temos a convergência. Antes deste resultado, vamos precisar introduzir a definição de supremo e ínfimo.

Definição 1.8 (Supremo). *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é dito limitado superiormente quando existe* $b \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \leq b, \quad \forall x \in X. \tag{1.3}$$

Dizemos que b *é o supremo de* X *se satisfaz* (1.3) *juntamente com a seguinte propriedade:*

$$\text{Se } \ c \in \mathbb{R} \ \text{ é tal que } \ c < b, \ \text{ então existe } x = x(c) \in X \text{ satisfazendo } \ c < x \leq b. \tag{1.4}$$

Neste caso, denota-se $b = \sup X$.

Definição 1.9 (Ínfimo). *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é dito limitado inferiormente quando existe* $a \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$a \leq x, \quad \forall x \in X. \tag{1.5}$$

Dizemos que a *é o ínfimo de* X *se satisfaz* (1.5) *juntamente com a seguinte propriedade:*

$$\text{Se } \ d \in \mathbb{R} \ \text{ é tal que } \ a < d, \ \text{ então existe } x = x(d) \in X \text{ satisfazendo } \ a \leq x < d. \tag{1.6}$$

Neste caso, denota-se $a = \inf X$.

Para manter o foco do trabalho e evitar desvios desnecessários, daqui em diante será considerado que qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente admite supremo. Similarmente, qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente admite ínfimo.

No resultado abaixo, veremos que uma certa classe de sequências limitadas convergem.

Teorema 1.4. *Toda sequência monótona e limitada de números reais converge.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Suponha que (x_n) é não crescente. Sendo X limitado, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, ou seja, $-M \leq x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neste caso, (x_n) é limitado inferiormente e assim $a = \inf X$ existe, em que $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Afirmamos que a sequência (x_n) converge para $a = \inf X \in \mathbb{R}$. De fato, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $a < a+\varepsilon$, podemos aplicar (1.6), trocando d por $a+\varepsilon$, para obter $x \in X$ (neste caso $x = x_{n_0}$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$) tal que $a \leq x_{n_0} < a + \varepsilon$. Desde que (x_n) é não crescente, se $n \geq n_0$, então $x_n \leq x_{n_0}$. Dessa forma, quando $n \geq n_0$,

$$a - \varepsilon < a = \inf X = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq x_n \leq x_{n_0} < a + \varepsilon.$$

Portanto, pela Observação 1.7, segue que

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

o que mostra que (x_n) converge para $a = \inf X$. O caso em que (x_n) é decrescente é similar, e por isso omitiremos. Finalmente, se a sequência for não decrescente ou crescente é análogo ao caso anterior, porém com a sequência convergindo para $b = \sup X$. Sendo assim, a demostração está encerrada. □

1.3 Propriedades dos Limites de Sequências

Nesta seção, abordaremos as propriedades dos limites de sequências, que são ferramentas relevantes que proporcionam cálculos eficazes e mais simples no que diz respeito a análise do comportamento de sequências numéricas.

O primeiro resultado trata da soma e multiplicação de sequências convergentes.

Teorema 1.5 (**Operações com limites**). *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *então valem os seguintes itens.*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n + y_n] = x + y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *(Limite da soma é a soma dos limites);*

(ii) $\lim_{n\to\infty}[x_n \cdot y_n] = x \cdot y = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$ *(Limite do produto é o produto dos limites).*

Demonstração. Prova do item (i):

Seja $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{1.7}$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq n_1$$

e

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq n_2.$$

Agora, considerando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se $n \geq n_0$, tem-se

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

em que usamos a desigualdade triangular. Sendo assim, (1.7) está verificado, e isto finaliza a demonstração do item (i).

Prova do item (ii): Dado $\varepsilon > 0$, vamos em busca de um $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaça

$$|x_n y_n - xy| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Note que

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x_n y + x_n y - xy = x_n(y_n - y) + y(x_n - x),$$

donde

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)| \leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|.$$

É sabido ainda que existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois toda sequência convergente é limitada (veja Teorema 1.2). Consequentemente,

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)| \leq M|y_n - y| + |y||x_n - x|.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - x| < \delta, \quad \forall\, n \geq n_1$$

e

$$|y_n - y| < \delta, \quad \forall\, n \geq n_2,$$

com $\delta > 0$ arbitrário a ser escolhido. Dessa forma, pelas últimas três estimativas, se $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que

$$|x_n y_n - xy| < M\delta + |y|\delta = \delta(M + |y|).$$

Tomando $\delta = \varepsilon/(M + |y|) > 0$, se $n \geq n_0$, então

$$|x_n y_n - xy| < \frac{\varepsilon}{(M + |y|)}(M + |y|) = \varepsilon.$$

A demonstração está encerrada. □

No próximo exemplo, podemos perceber a eficácia das propriedades do teorema anterior.

Exemplo 1.11. *Como consequência do Teorema 1.5, podemos calcular de forma direta o seguinte limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$$

O corolário a seguir apresenta mais algumas operações com limites, as quais decorrem do Teorema 1.5.

Corolário 1.1. *Seja $c \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, então*

(a) $\lim_{n\to\infty} [c \cdot x_n] = c \cdot x = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$;

(b) $\lim_{n\to\infty} [x_n - y_n] = x - y = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.5 (item (ii)),

$$\lim_{n\to\infty} [c \cdot x_n] = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot x,$$

em que usamos o fato que a sequência constante com todos os termos iguais a c converge para c (veja Exemplo 1.6). Isto encerra o item (a).

Para provar o item (b), use o Teorema 1.5 e o que foi provado anteriormente com $c = -1$, para obter que

$$\lim_{n\to\infty} [x_n - y_n] = \lim_{n\to\infty} [x_n + (-1) \cdot y_n] = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} [(-1) \cdot y_n] = x + (-1) \cdot y = x - y.$$

Isso finaliza a demonstração deste corolário. □

Proposição 1.1 (Limite do quociente). *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, *com* $y_n \neq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $y \neq 0$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Demonstração. Desde que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - x| < \delta, \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{e} \quad |y_n - y| < \delta, \quad \forall n \geq n_2 \tag{1.8}$$

em que $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ é um valor que depende de ε a ser escolhido de maneira adequada. Note que

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_n y - x y_n}{y_n y}\right| = \left|\frac{x_n y - xy + xy - x y_n}{y_n y}\right| = \left|\frac{(x_n - x)y + x(y - y_n)}{y_n y}\right|.$$

Utilizando desigualdade triangular, segue que

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{|x_n - x||y|}{|y_n y|} + \frac{|x||y - y_n|}{|y_n y|} = \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{|x||y - y_n|}{|y_n||y|}. \tag{1.9}$$

Observe que, se $n \geq n_2$,

$$|y| - |y_n| \leq ||y| - |y_n|| \leq |y - y_n| < \delta,$$

ou seja

$$|y| - \delta < |y_n|.$$

Considerando $0 < \delta < |y|$, tem-se $0 < |y| - \delta < |y_n|$, e assim

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{|y| - \delta}, \quad \forall n \geq n_2.$$

Portanto, sendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, por (1.8) e (1.9), temos que

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \frac{\delta}{|y| - \delta} + \frac{|x|\delta}{(|y| - \delta)|y|} = \frac{\delta}{|y| - \delta}\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right), \quad \forall n \geq n_0.$$

Agora, tomemos $0 < \delta < |y|$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{|y| - \delta}\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right) < \varepsilon &\iff \delta < (|y| - \delta)\varepsilon\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right)^{-1} \\
&\iff \delta\left[1 + \varepsilon\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right)^{-1}\right] < |y|\varepsilon\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right)^{-1} \\
&\iff \delta < \frac{|y|\varepsilon\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right)^{-1}}{\left[1 + \varepsilon\left(1 + \frac{|x|}{|y|}\right)^{-1}\right]}.
\end{aligned}$$

Por fim, sendo $n \geq n_0$, tem-se
$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \varepsilon,$$
e assim a demonstração está completa. $\square$

Na observação a seguir, veremos que em certas situações, mesmo quando sequências divergem, podemos aplicar a regra do quociente, por meio de manipulação aritmética. Vale destacar que tal argumento nem sempre é possível.

Observação 1.8. *Considere as sequências $(x_n) = (2n+1)$ e $(y_n) = (3n)$. Note que (x_n) é ilimitada, pois do contrário existiria $c > 0$ tal que*

$$2n \leq 2n+1 = |2n+1| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donde, $n \leq c/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que significaria que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, o que é um absurdo. Uma vez que (x_n) é ilimitada, através da contra positiva do Teorema 1.2, (x_n) é divergente. De forma similar, (y_n) também é divergente. A priori não poderíamos aplicar a regra do quociente (veja Proposição 1.1) para obter o limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$
Porém, note que podemos escrever

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{2n+1}{3n} = \frac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{3n} = \frac{2+\dfrac{1}{n}}{3},$$

Neste caso, pelo que já foi visto, o numerador deste quociente converge para 2 e o denominador para 3. Pela Proposição 1.1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{2}{3}.$$

Capítulo 2

Um estudo de número decimal periódico através do conceito de séries

2.1 Motivação

Nesta seção, vamos abordar duas formas de se obter a igualdade $0,999\ldots = 1$, sem utilizar argumentos matemáticos formais e precisos.

Primeira forma:

1. Seja $x = 0,999\ldots$.

2. Multiplique ambos os lados da equação por 10:

$$10x = 9,999\ldots.$$

3. Subtraindo as igualdades dos itens acima, tem-se

$$10x - x = 9,999\ldots - 0,999\ldots,$$

ou seja

$$9x = 9.$$

4. Divida ambos os lados por 9:

$$x = 1.$$

Sendo $x = 0,999\ldots$, podemos concluir que $0,999\ldots = 1$.

Segunda forma:

1. Considere a representação fracionária

$$0,333\ldots = \frac{1}{3}. \tag{2.1}$$

2. Multiplicando ambos os lados por 3, obtemos:

$$3 \cdot 0,333\ldots = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

3. Como $0,999\ldots = 3 \cdot 0,333\ldots$, segue que $0,999\ldots = 1$.

Vale ressaltar que a igualdade $0,333\ldots = 1/3$, pode ser explicada de forma intuitiva usando divisão, analogamente ao que aparece em [4, página 19], como na figura abaixo.

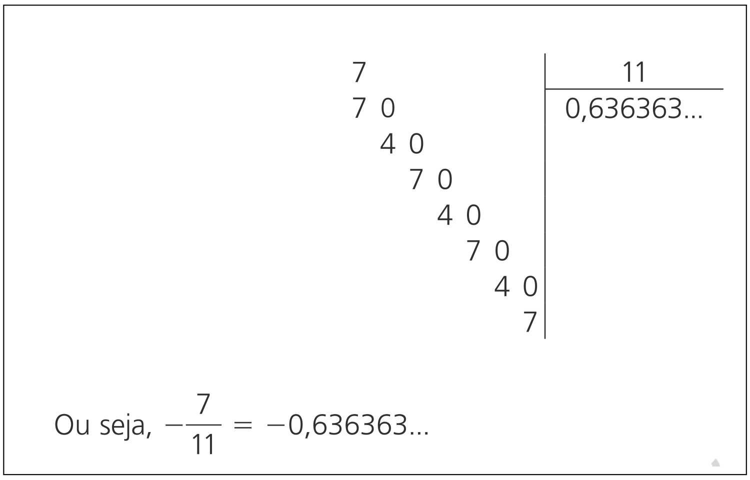


Figura 2.1:

Como mencionado acima, essas duas formas apresentadas de verificar que $0,999\ldots = 1$ não apresentam rigor matemático. O questionamento natural é qual conceito assegura a veracidade das etapas em cada uma das formas acima. Na seção posterior, vamos abordar o conceito de séries de números reais que é essencial para uma justificativa mais precisa.

Esse tipo de argumento pode ser visto em livros didáticos, como por exemplo no livro do ensino médio [5] (ver página 25), conforme figura abaixo.

Representação fracionária das dízimas periódicas

Vamos apresentar alguns exemplos de transformação de dízimas periódicas em frações.

EXEMPLO 2

Seja a dízima $x = 0{,}\overline{8} = 0{,}8888\ldots$ (1):

Fazemos $10x = 10 \cdot 0{,}8888\ldots = 8{,}888\ldots = 8{,}\overline{8}$ (2)

Subtraindo membro a membro (1) de (2), temos:

$$10x - x = 8{,}\overline{8} - 0{,}\overline{8}$$

$$9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

Figura 2.2:

Também é importante mencionar que argumento análogo se faz presente em livro de ensino fundamental (veja [1, página 156]), como na figura a seguir.

Queremos encontrar a fração x que representa a dízima 0,444...

$x = 0{,}4444\ldots$

Vamos obter outras igualdades a partir dessa:

$-x = -0{,}4444\ldots$ Multiplicamos ambos os membros por -1.

$10x = 4{,}4444\ldots$ Multiplicamos ambos os membros por 10.

Somando as duas igualdades membro a membro, chegamos a

$9x = 4$

$x = \dfrac{4}{9}$

Portanto, $0{,}4444\ldots = \dfrac{4}{9}$.

$-x + 10x = 9x$

$-0{,}4444\ldots + 4{,}4444\ldots = 4$

Figura 2.3:

2.2 Série de Números Reais

Nesta seção, abordaremos o conceito de série juntamente com exemplos e propriedades.

Considere (x_n) uma sequência de números reais. A partir desta sequência, é possível gerar uma outra sequência (s_n) da seguinte maneira:

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Esta sequência nos permite introduzir o conceito de séries na definição a seguir.

Definição 2.1 (Série de números reais). *Seja* (x_n) *uma sequência de números reais. Defini-se série como*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n,$$

em que $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. *Quando o limite existe, a série é dita convergente. Do contrário, a série é dita divergente. Também, denota-se série por*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \quad e \quad \sum x_n.$$

É bastante comum na literatura, o índice da série iniciar com $n = 0$, *a saber*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

A seguir, temos um exemplo de uma série convergente, mais precisamente a *série telescópica*, que recebe este nome devido ao comportamento das suas somas parciais: ao expandi-las, grande parte dos termos intermediários cancela-se, restando apenas alguns elementos iniciais e finais. Essa característica torna a análise de sua convergência mais simples, ao mesmo tempo em que fornece exemplos instrutivos para o estudo das séries numéricas.

Exemplo 2.1. *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

A soma dos primeiros n *termos é:*

$$s_n = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Expandindo os termos explicitamente, segue que

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Observa-se que ocorre um ***cancelamento telescópico****: os termos intermediários se eliminam, restando apenas o primeiro termo positivo e o último termo negativo. Assim, a soma parcial simplifica-se para:*

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Este comportamento de cancelamento é característico das séries telescópicas e facilita a análise da convergência.

Para verificar se a série converge, calculamos o limite das somas parciais:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$$

Portanto, a série é ***convergente****, e converge para* 1*. Este exemplo mostra claramente como uma série que, à primeira vista, poderia parecer complicada, torna-se simples de analisar graças à propriedade telescópica. O cancelamento de termos permite calcular diretamente as somas parciais e obter a soma da série infinita.*

O próximo resultado caracteriza o limite da sequência (x_n), quando a série $\sum x_n$ converge.

Teorema 2.1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge, então*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 0.$$

Demonstração. Desde que a série converge, temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

em que $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Como $(s_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pelo Teorema 1.3, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s.$$

Desde que

$$s_{n+1} - s_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_{n+1},$$

pode-se concluir que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

A demonstração encerra aqui. □

Uma das aplicações do Teorema 2.1 é obter algumas séries divergentes, como veremos nos exemplos abaixo.

Exemplo 2.2. *Aplicando a contra positiva do Teorema 2.1, a série* $\sum 2$ *diverge, pois* $\lim_{n\to\infty} 2 = 2 \neq 0$*.*

Exemplo 2.3. *Usando a contra positiva do Teorema 2.1, a série* $\sum n^2$ *diverge, pois* $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Um ponto que merece destaque é que a recíproca do Teorema 2.1 não é verdade, ou seja, mesmo que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 0$, não necessariamente a série $\sum x_n$ converge. Fato esse que será explorado na observação a seguir.

Observação 2.1 (Recíproca do Teorema 2.1 é falsa). *Considere a série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*, em que* $x_n = 1/n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Pelo Exemplo 1.7, vimos que a sequência* (x_n) *converge para 0. Veremos que a série dada é divergente.*

Primeiramente, vamos estimar os termos s_2, s_4 *e* s_8*.*

$$s_{2^1} = s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_{2^2} = s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$$

e

$$\begin{aligned} s_{2^3} = s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

De forma indutiva, pode-se concluir que

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Suponhamos por absurdo que a série converge. Então a sequência das somas parciais (s_n) *converge. Em particular,* (s_n) *é limitada (veja Teorema 1.2), isto é, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$s_n = |s_n| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Das duas últimas desigualdades, temos que

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{n}{2} \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, $n \leq 2c$*, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*, o que é um absurdo, pois* $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente. Portanto, a série harmônica diverge.*

A seguir apresentaremos um resultado sobre propriedades de séries convergentes.

Teorema 2.2. *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *séries convergentes e* $c \in \mathbb{R}$ *uma constante. Então as séries* $\sum(x_n + y_n)$ *e* $\sum cx_n$ *convergem e satisfazem:*

(*i*) $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$;

(*ii*) $\sum cx_n = c \sum x_n$.

Demonstração. Suponha que as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ convergem para x e y, respectivamente. Neste caso, considerando

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n \quad \text{e} \quad t_n = y_1 + \ldots y_n,$$

tem-se

$$\lim_{n\to\infty} s_n = x \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = y. \tag{2.2}$$

Agora, considere

$$z_n = (x_1 + y_1) + \ldots + (x_n + y_n).$$

Notando que

$$z_n = (x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_n) = s_n + t_n,$$

podemos combinar o Teorema 1.5 (item (*i*)) juntamente com (2.2) para obter

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = x + y = \sum x_n + \sum y_n.$$

Portanto, a série $\sum(x_n + y_n)$ converge e

$$\sum(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} z_n = \sum x_n + \sum y_n.$$

Isso completa a prova do item (*i*).

Utilizando o Corolário 1.1, prova-se o item (*ii*) de forma similar, e por isso omitiremos. □

Observação 2.2. *Combinando os itens* (*i*) *e* (*ii*) *pode ser mostrado sem dificuldades que o item* (*i*) *permanece válido quando se troca "+" por '−".*

2.2.1 Relação entre progressão e série geométrica

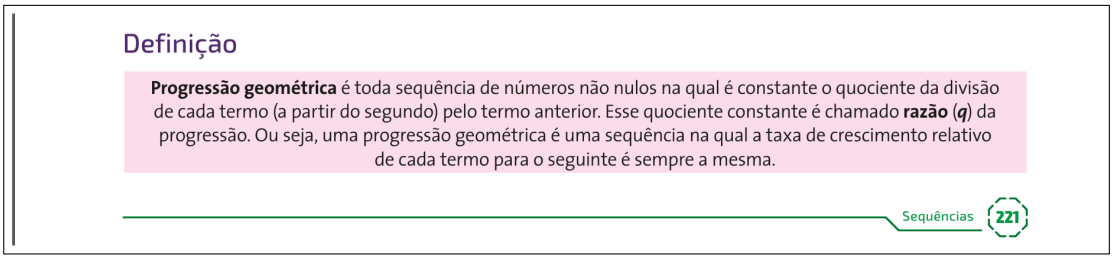
Esta subseção, tem como principal objetivo explorar a relação entre progressão geométrica e o conceito de série, principalmente para esclarecer a ideia de "soma dos termos de uma progressão infinita". Iniciaremos com um exemplo de série, crucial para estabelecer essa relação, que é conhecida na literatura como série geométrica.

Definição 2.2 (Série Geométrica). *Sejam $a, r \in \mathbb{R}$. A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots \tag{2.3}$$

é dita série geométrica de razão r e termo inicial a.

O conteúdo de Progressão Geométrica (PG) é abordado no ensino médio e possui relação com a Definição 2.2. No livro [3, página 221], tem-se a seguinte definição sobre (PG).



Definição

Progressão geométrica é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado **razão** (***q***) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Sequências 221

Figura 2.4:

De acordo com a definição presente na figura acima, PG (progressão geométrica) trata de uma sequência (x_n) em que

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De forma implícita estamos admitindo que $x_n \neq 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Denotando a razão (vamos usar r ao invés de q) por

$$r = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

segue que

$$x_2 = x_1 r.$$

Dessa maneira,

$$x_3 = x_2 r = (x_1 r)\, r = x_1 r^2.$$

De forma geral, podemos concluir que

$$x_n = x_1 r^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comparando esse termo x_n com o termo ar^{n-1} que aparece em (2.3), temos que $a = x_1$. Sendo assim, o termo $s_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$ da série (2.3) é na verdade a soma dos n-primeiros termos de uma (PG).

Agora, vamos explicitar o termo s_n. Note que

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= a + ar + \ldots + ar^{n-1} - r\left(a + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}\right) \\ &= a + (ar - ra) + \ldots + (ar^{n-1} - rar^{n-2}) - rar^{n-1} \\ &= a - ar^n. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$(1-r)s_n = a(1-r^n),$$

ou seja,

$$s_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)}, \tag{2.4}$$

se $r \neq 1$.

No próximo resultado, vamos determinar condições de r em que a série geométrica converge.

Proposição 2.1. *A série definida em* (2.3) *converge para* $a/(1-r)$, *quando* $0 < r < 1$.

Demonstração. Vamos verificar que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r},$$

com $s_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$. Por (2.4), temos que

$$s_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)}. \tag{2.5}$$

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. De fato, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Devemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$r^n = |r^n - 0| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Note que

$$\begin{aligned} r^n < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{r^n} \iff \frac{1}{\varepsilon} < \left(\frac{1}{r}\right)^n \iff \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < \ln\left(\frac{1}{r}\right)^n \\ \iff \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n\ln\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como $0 < r < 1$, segue que $1 < 1/r$, e assim $0 = \ln(1) < \ln(1/r)$. Sendo assim, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/r)},$$

se $n \geq n_0$, podemos usar (2.6) para obter

$$r^n < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

provando a convergência $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Aplicando o limite $n \to \infty$ em (2.5) e fazendo uso das propriedades de limites de sequências (veja Corolário 1.1 e Proposição 1.1), podemos garantir que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{(1-r^n)}{(1-r)} = a\frac{\lim_{n\to\infty}(1-r^n)}{\lim_{n\to\infty}(1-r)} = \frac{a}{1-r}.$$

Aqui encerra a demonstração. $\square$

A Proposição 2.1 é uma demonstração rigorosa da justificativa que aparece no livro [3, página 228] (veja figura 2.5).

De modo geral, nas progressões geométricas infinitas em que a razão q é, em valor absoluto, menor do que 1, a soma dos n primeiros termos tem um valor finito quando n é suficientemente grande. Nesse caso, $q^n = 0$. Escrevemos assim:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}, \text{ ou seja:}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ lê-se como limite de S_n quando n tende ao infinito.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$

Figura 2.5:

Também podemos citar [2, página 135] (veja figura 2.6), em que o argumento é similar, fazendo uso do conceito de sequência convergente, sem a formalidade e rigor matemático.

$n\to\infty$

Queremos calcular a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, com $-1 < q < 1$. Para isso, vamos analisar o que ocorre com a soma S_n dos n primeiros termos quando n tende ao infinito, ou seja, quando n se torna arbitrariamente grande.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\right)$$

Mas vimos que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Então, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Assim, em uma PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Portanto, dizemos que a soma dos termos da PG infinita, indicada por S, é:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

Figura 2.6:

2.3 $0,999\ldots = 1$

Nesta subseção, mostraremos de forma precisa a igualdade $0,999\ldots = 1$, indicando como os conceitos estudados até aqui estão relacionados com essa subseção. Vale lembrar que um número real x pode ser representado na base 10 da seguinte forma:

$$x = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \ldots,$$

sendo $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, para $i \geq 1$. Neste caso, podemos escrever a expressão $0,999\ldots$ da seguinte forma

$$0,999\ldots = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \frac{1}{10^n}. \tag{2.7}$$

Prosseguindo com o desenvolvimento dessa série, podemos concluir que

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10} \frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Pela expressão (2.3), segue que $0,999\ldots$ é uma série geométrica de razão $r = 1/10$ e termo inicial $a = 9/10$. Dessa forma, como $0 < 1/10 < 1$, é permitido aplicar a Proposição 2.1 para assegurar que

$$0,999\ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Com isso, conclui-se a demonstração da igualdade $0,999\ldots = 1$.

Por outro lado, sabendo que

$$0,333\ldots = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}, \tag{2.8}$$

desenvolvendo as contas, podemos concluir que

$$0,333\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10} \frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Novamente, podemos utilizar a Proposição 2.1, pois $0 < 3/10 < 1$, para obter que

$$0,333\ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}, \tag{2.9}$$

em que usamos $a = 3/10$ e $r = 1/10$.

2.4 Discussão e Conclusão

Esta seção tem como objetivo estabelecer uma relação entre os cálculos apresentados na Seção 2.1 e os conceitos de séries de números reais discutidos na Seção 2.2.

Logo abaixo vamos reescrever os passos da primeira e segunda forma presente na Seção 2.1, acompanhados das respectivas justificativas com base em séries de números reais.

Primeira forma:

1. Seja $x = 0,999\ldots$.

   Justificativa: Ao considerar $x \in \mathbb{R}$, implicitamente está sendo assumido que a série representada por $0,999\ldots$ converge, fato esse comprovado em Proposição 2.1.

2. Multiplique ambos os lados da equação por 10:

   $$10x = 9,999\ldots.$$

   Justificativa: Nesse passo está sendo utilizado uma propriedade de série (ver Teorema 2.2, item (ii), com $c = 10$).

3. Subtraindo as igualdades dos itens acima, tem-se

   $$10x - x = 9,999\ldots - 0,999\ldots,$$

   ou seja

   $$9x = 9.$$

   Justificativa: Novamente foi usado uma propriedade de série (ver Observação 2.2).

4. Divida ambos os lados por 9:

   $$x = 1.$$

Sendo $x = 0,999\ldots$, podemos concluir que $0,999\ldots = 1$.

Em resumo, essa primeira forma é uma maneira alternativa de verificar para qual valor a série geométrica converge, fazendo uso dos conceitos de séries.

Por fim, faremos uma análise da segunda forma presente na Seção 2.1.

Segunda forma:

1. Considere a representação fracionária

$$0,333\ldots = \frac{1}{3}. \tag{2.10}$$

<u>Justificativa:</u> Essa igualdade é válida por (2.9), em que foi utilizado a convergência de série geométrica.

2. Multiplicando ambos os lados por 3, obtemos:

$$3 \cdot 0,333\ldots = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

<u>Justificativa:</u> Nessa etapa foi aplicado uma propriedade de série (ver Teorema 2.2, item (ii), com $c = 3$).

3. Como $0,999\ldots = 3 \cdot 0,333\ldots$, segue que $0,999\ldots = 1$.

<u>Justificativa:</u> Combinando (2.7) com (2.8), tem-se

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{10^n} = 3\left(\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}\right) = 3 \cdot 0,333\ldots,$$

em que também foi usado Teorema 2.2, item (ii), com $c = 3$.

2.5 Produto Educacional

Neste seção serão apresentados dois produtos educacionais desenvolvidos com o intuito de enriquecer o processo de ensino e aprendizagem: uma sequência didática e um jogo da memória.

2.5.1 Sequência Didática

Nesta subseção, será discutida uma forma de aplicar os conceitos desse trabalho na sala de aula. A metodologia utilizada está descrita a seguir. A turma pode ser dividida em grupos, e podem fazer uso de papel, caneta e calculadora.

<u>1º momento:</u> Experimento com a sequência $(1/n)$:

Caberá ao professor, induzir os alunos a atribuir valores para n no termo $1/n$, e irem anotando. De forma semelhante ao Exemplo 1.7. É importante não sugerir valores inicialmente, para que o aluno explore esta sequência a sua maneira. O objetivo é que ao final desse momento haja a percepção de que cada vez que o valor de n aumenta, o termo $1/n$ se aproxima de 0. Dessa forma, será trabalhado a intuição do aluno e o entendimento do conceito de convergência de sequência.

2º momento: Experimento com a expressão $0,999\ldots$:

Esse momento é crucial, para que o aluno compreenda que o termo $0,999\ldots$ se trata de uma sequência, em que os termos são dados por:

Primeiro termo: $0,9 = 9/10$;

Segundo termo: $0,9 + 0,09 = 0,99 = 99/100$;

Terceiro termo: $0,9 + 0,09 + 0,009 = 0,999 = 999/1000$.

Os demais termos seguem de forma sucessiva. No momento da aplicação, o aluno pode ficar livre para escrever mais termos, até se convencer que está ocorrendo uma aproximação do número 1. Por exemplo, o segundo termo é mais próximo de 1 do que o primeiro, uma vez que

$$\frac{9}{10} < \frac{99}{100} < 1,$$

pois

$$\frac{9}{10} = \frac{90}{100} < \frac{99}{100} < 1.$$

Uma forma de como se abordar este tema em sala de aula é usar um experimento prático e visual que conecte esses números com algo que os alunos já conhecem. A ideia é mostrar que, apesar de parecerem muito próximos, há uma lógica clara por trás de sua ordem:

1) Preparação: Para começar, o professor pode desenhar uma **reta numérica** grande e clara no quadro ou em uma lousa interativa. Marque os pontos **0** e **1**, deixando um espaço generoso entre eles. A reta numérica será o nosso "mapa" para o experimento.

2) Passo a Passo da Discussão:

1. **Entendendo a Fração $\frac{9}{10}$**

   Comece com a fração $\frac{9}{10}$. Uma analogia simples e eficaz é a de uma **pizza**.

2. • Pergunte aos alunos: "Imaginem uma pizza que foi cortada em **10 pedaços** iguais. Se vocês comerem **9** desses pedaços, o que sobra?"

- A resposta natural é "um pedaço".
- Em seguida, desenhe essa pizza no quadro e mostre que a fração $\frac{9}{10}$ representa quase a pizza inteira, mas ainda falta um pedaço para completar o todo.
- Peça a um aluno para marcar o ponto correspondente a $\frac{9}{10}$ na reta numérica, um pouco antes do número 1.

3. **Entendendo a Fração $\frac{99}{100}$**

   Neste momento, será introduzida a fração $\frac{99}{100}$.

   - É importante que se continue com a analogia da pizza, mas desta vez mudando de cenário: "E se a nossa pizza fosse cortada em **100 pedaços** iguais? E se vocês comessem **99** desses pedaços?"
   - Sugere-se que o professor pergunte aos alunos: "Quantos pedaços faltam agora para termos a pizza inteira?"
   - A resposta, mais uma vez a resposta mais natural será "um pedaço".
   - Aqui está o ponto crucial: deve-se mostrar que, apesar de também faltar apenas um pedaço, a pizza de 100 pedaços está **mais perto** de ser completa do que a pizza de 10 pedaços. Um pedaço de 100 é muito menor que um pedaço de 10.
   - Peça a outro aluno para marcar o ponto de $\frac{99}{100}$ na reta numérica. Ele deve posicioná-lo entre $\frac{9}{10}$ e o 1, mas **muito mais perto** do 1.

4. **Conectando as Frações**

   Agora que as duas frações estão visualmente na reta numérica, fica mais fácil para os alunos entenderem a relação.

   - Desenhe o equivalente de $\frac{9}{10}$ como $\frac{90}{100}$. Explique que é a mesma coisa: "Se a pizza de 10 pedaços fosse cortada em pedaços menores, cada um desses pedaços se transformaria em 10, totalizando 100 pedaços. Os 9 pedaços que vocês comeram agora são 90 pedaços menores".
   - Pergunte: "Qual é a diferença entre $\frac{90}{100}$ e $\frac{99}{100}$?"
   - É esperado que os alunos vejam que a diferença é de $\frac{9}{100}$, o que reforça que $\frac{99}{100}$ é, de fato, maior do que $\frac{90}{100}$ (ou $\frac{9}{10}$).

5. **Conclusão**

- Finalizar o experimento com a lógica que **quanto maior o denominador, menor o pedaço que falta para chegar ao 1**. Isso significa que a fração está mais perto do número inteiro.
- Incentivar os alunos a pensarem em outras frações e a compará-las. Por exemplo: $\frac{999}{1000}$ e $\frac{99}{100}$. "Qual das duas está mais perto do 1?" Eles deverão rapidamente chegar à conclusão de que $\frac{999}{1000}$ está mais perto de 1, porque o "pedaço que falta" é ainda menor.

A intenção desta abordagem não é apenas de resolver o problema matemático, mas também construir uma **intuição visual** e **lógica** para a comparação de frações, algo essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

2.5.2 Jogo da Memória da Dízima Periódica

A presente subseção, tem como proposta apresentar um jogo da memória, cujo principal objetivo é auxiliar os estudantes na compreensão e fixação de conceitos matemáticos abordados neste trabalho.

A dinâmica do jogo consiste em associar pares de cartas que representam o mesmo valor numérico, mas em formas diferentes, como por exemplo $0,999\ldots$ deve ser associado a 1, assim como $0,333\ldots$ a $1/3$. A seguir, tem-se a descrição do funcionamento deste jogo.

1) Nome do jogo: Jogo da Memória da Dízima Periódica.

2) Confecção: O material utilizado, pode ser caixas de papelão reciclado (para uma maior durabilidade), tesoura e caneta ou pincel.

3) Jogabilidade: Os jogadores, em turnos, viram duas cartas por vez, tentando encontrar os pares corretos.

4) Discussão dos conceitos: Quando um par é encontrado, o professor ou mediador pode aproveitar para explicar o motivo daqueles valores serem equivalentes (por exemplo, demonstrando que 0,999... $= 1$ por meio de argumentos como a primeira forma apresentada

na Seção 2.1. No caso de $0,333\ldots$ corresponder a $1/3$, pode ser argumentado de forma similar a figura 2.1, frisando que não são argumentos com o devido rigor matemático).

5) Objetivos: Promover a fixação dos conceitos de forma lúdica e a interação entre os estudantes, permitindo discussões sobre o tema abordado.

A seguir, imagens para exemplificar como seria a confecção das cartas.

$0,999\ldots$	1
$0,333\ldots$	$\frac{1}{3}$

Referências Bibliográficas

[1] Andrini, A.; Vasconcelos, M. J. *Coleção Praticando a Matemática* 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[2] Bonjorno, J. R.; Giovanny Júnior, J. R.; Souza, P. R. C. *Prisma Matemática* 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

[3] Dante, L. R. *Matemática : contexto & aplicações* 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

[4] Giovanny Júnior, J. R. *A Conquista Matemática* 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

[5] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; De Almeida N. *Matemática ciência e aplicações* 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[6] Karunakaran, V. *Real Analysis* New Delhi: Dorling Kindersley, 2011.

[7] Lima, E. L. *Análise real volume 1. Funções de uma variável* 1 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.

[8] Liu, F. *Real Analysis* 1. ed. Croydon: Oxford University Press, 2016.

[9] Melo, W. G. *Análise na Reta* São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

[10] Muniz Neto, A. C. *Fundamentos de Cálculo* Rio de janeiro: SBM, 2015.

[11] Stewart, J.; Clegg, D.; Watson, S. *Cálculo, volume 2* 6 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2022.