Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Problema de Fronteira Livre para Equações Elípticas na Forma Divergente

Samorane de Jesus Ramos

São Cristóvão – SE
31 de julho de 2025

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Problema de Fronteira Livre para Equações Elípticas na Forma Divergente

por

Samorane de Jesus Ramos

sob a orientação do

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Cristóvão – SE
31 de julho de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Ramos, Samorane de Jesus

J58p

Um problema de fronteira livre para equações elípticas na forma divergente / Samorane de Jesus Ramos ; orientador José Anderson Valença Cardoso. – São Cristóvão, 2025.
70 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Sobolev, Espaço de. 3. Equações diferenciais elípticas. 4. Topologia diferencial. I. Cardoso, José Anderson Valença orient. II. Título.

CDU 517.9

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Um Problema de Fronteira Livre para Equações Elípticas na Forma Divergente

por

Samorane de Jesus Ramos

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSE ANDERSON VALENCA CARDOSO
Data: 11/08/2025 06:31:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
DISSON SOARES DOS PRAZERES
Data: 13/08/2025 10:46:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres - UFS
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br
JEFFERSON ABRANTES DOS SANTOS
Data: 11/08/2025 09:29:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG
Segundo Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br
EDCARLOS DOMINGOS DA SILVA
Data: 11/08/2025 10:42:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Julho de 2025

Agradecimentos

Reservo este espaço para expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para que eu alcançasse este novo degrau da minha vida. Gostaria de ressaltar que, mais do que figurar em uma simples página de agradecimentos de um trabalho acadêmico, o papel e as contribuições de cada pessoa com quem convivemos permanecem, em sua essência, guardados em nossos corações.

Primeiramente, agradeço a Deus por nunca me desamparar. Mesmo nos momentos difíceis, não me deixou faltar resiliência e coragem para superar as adversidades.

Agradeço aos meus pais, Telma e Erisvaldo, que, embora não tenham tido a oportunidade de ter acesso ao ensino superior, sempre lutaram para que meu irmão e eu tivéssemos acesso à educação e, por meio dela, pudéssemos alcançar nossos objetivos. Agradeço, de modo especial, à minha mãe por não medir esforços para estar ao meu lado nos momentos bons e ruins, por depositar seu imenso carinho e apoio, e por fazer o impossível para que meus sonhos se tornem realidade. Te amo infinitamente!

Agradeço ao Prof. Anderson, meu orientador, por ser um exemplo de ser humano e professor, e por tantos ensinamentos. Certamente, sem suas orientações nos estudos e na vida, eu não teria vivenciado e conquistado tudo o que conquistei como estudante de graduação e pós-graduação na UFS. Muito obrigado pelo carinho, pela paciência e pelo apoio incondicional!

Agradeço ao Prof. Disson pela grande contribuição à minha formação acadêmica e, principalmente, pelo suporte e atenção durante a elaboração desta dissertação. Suas contribuições foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Jonison, professor e amigo, pelas conversas, por compartilhar experiências de vida, pelas contribuições acadêmicas e por estar presente em momentos de grande importância para mim.

Agradeço aos professores Edcarlos Domingos e Jefferson Abrantes, avaliadores externos da banca examinadora desta dissertação, por prontamente terem aceito participar da avaliação do trabalho e pelas valiosas observações e contribuições apresentadas durante a defesa.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROMAT) por proporcionar aos seus estudantes um ambiente acolhedor e de muito aprendizado. Em especial, agradeço aos professores Almir, Angelo e Zaqueu pelos excelentes cursos ministrados. Agradeço também a Neto, Igor e Marilene, funcionários exemplares, sempre dispostos a atender as solicitações dos alunos e a auxiliá-los no que for necessário.

Agradeço a Angelina, Dalton, Edivangel, Jamisson, Jeverson, Lays, Poliano e demais colegas pelo companheirismo no mestrado. Em especial, agradeço a Adriana, Jardel e Júnior por, além de compartilharmos uma sala de estudos, dividimos também momentos de aprendizado e de desafios na vida de cada um. Sempre lembrarei do quão importante foi compartilhar esta fase da minha vida com vocês.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Com base no artigo *Cavity Problems in Discontinuous Media*, investigamos propriedades de regularidade ao longo da fronteira livre para minimizantes do funcional associado ao problema de cavidade. Nosso principal objetivo é demonstrar que tais funções são Lipschitz contínuas nesse conjunto. A abordagem adotada consiste em estabelecer essa propriedade para limites uniformes de sequências de minimizantes de funcionais regularizados, de modo que o resultado para minimizantes arbitrários decorra de um argumento análogo. Para isso, obtemos uma estimativa de regularidade que implica também propriedades geométricas da fronteira livre das funções limite.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais; Fronteira Livre; Regularidade Lipschitz; Minimização.

Abstract

Based on the article Cavity Problems in Discontinuous Media, we investigate regularity properties along the free boundary for minimizers of the functional associated with the cavity problem. Our main goal is to show that such functions are Lipschitz continuous on this set. The approach adopted consists in establishing this property for uniform limits of sequences of minimizers of regularized functionals, so that the result for arbitrary minimizers follows from an analogous argument. To this end, we obtain a regularity estimate that also implies geometric properties of the free boundary of the limit functions.

Keywords: Partial Differential Equations; Free Boundary; Lipschitz Regularity; Minimization.

Sumário

Lista de Notações

Símbolo	**Descrição**
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\Subset$	Subconjunto compactamente contido.
dist	Distância.
supp A	Suporte do conjunto A.
$\lvert A\rvert$	Medida de Lebesgue do conjunto A.
$B_r(x)$	Bola com centro em x e raio r.
B_r	Bola com centro na origem e raio r.
$\alpha(N)$	Volume da bola N-dimensional.
Id	Matriz identidade.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Produto interno em $\mathbb{R}^N$.
$\to$	Convergência usual.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
$\hookrightarrow$	Imersão.
u^+, u^-	Parte positiva e parte negativa da função u.
∇u	Gradiente da função u.
Δu	Laplaciano da função u.
$\operatorname{div}(F)$	Divergente do campo F.
$\partial\Omega$	Fronteira do domínio Ω.
χ_A	Função característica do conjunto A.
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Espaços de Hölder no domínio Ω.
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue de funções p-integráveis no domínio Ω.
$W^{k,p}, H^k(\Omega)$	Espaços de Sobolev no domínio Ω.
$W_0^{k,p}, H_0^k(\Omega)$	Espaços de Sobolev no domínio Ω.
$\lvert\cdot\rvert$	Norma no espaço $\mathbb{R}^N$.
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norma no espaço normado X.

Introdução

As Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são equações que envolvem uma função desconhecida de duas ou mais variáveis e algumas de suas derivadas parciais. As EDPs modelam diversos fenômenos do mundo real que surgem em diversas áreas da ciência, como na Física, Química, Biologia, Economia, entre outras. Devido à sua ampla aplicabilidade a problemas práticos, as EDPs vêm sendo extensivamente estudadas de maneira qualitativa e quantitativa ao longo dos anos.

As classes de EDPs são diversas, o que naturalmente evidencia a complexidade do estudo de existência e propriedades de soluções para problemas genéricos. De fato, em muitos casos é inviável obter uma função que possua a classe de diferenciabilidade exigida na formulação clássica do problema e que resolva a EDP pontualmente. Para contornar essa dificuldade, o que se faz é definir um tipo de solução para a qual seja exigida menor regularidade. Como consequência disso, a probabilidade de encontrar uma solução nesse sentido acaba se tornando maior.

Nesse contexto, é de grande interesse matemático e prático estudar propriedades de soluções, em especial, a regularidade que elas devem possuir. Por esse motivo, os resultados obtidos na Teoria de Regularidade desempenham um papel fundamental em Equações Diferenciais Parciais.

De particular importância na Teoria de Regularidade, encontra-se o estudo de problemas de fronteira livre. Em linhas gerais, um problema de fronteira livre consiste em determinar um conjunto Ω e uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de modo que sejam verificadas as seguintes condições:

(i) u resolve uma EDP em Ω;

(ii) u satisfaz uma condição de fronteira com relação à qual a EDP fica bem posta em $\partial\Omega$;

(iii) u satisfaz uma condição extra em $\partial\Omega$, que torna o problema sobredeterminado. Esta última condição é chamada *condição de fronteira livre.*

Este tipo de problema surge tanto na própria Matemática quanto em outras ciências no geral. Por exemplo, em problemas de otimização de formas (menor área para um volume fixado), transições de fase (derretimento de um sólido), dinâmica dos fluidos etc.

Uma forma de tratar problemas de fronteira livre, e que vem trazendo importantes resultados, é a partir de uma abordagem variacional. Em outra palavras, associa-se um funcional ao problema dado, de tal forma que minimizantes do funcional sejam soluções para o problema. Esta será basicamente a abordagem que será utilizada na dissertação, como discutiremos a seguir.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio Lipschitz limitado, $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ uma função não negativa e (a^{ij}) uma matriz simétrica e mensurável satisfazendo a condição de (λ, Λ)-elipticidade

$$\lambda \mathrm{Id} \leq (a^{ij}) \leq \Lambda \mathrm{Id},$$

para certas constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$, isto é,

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda |\xi|^2,$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. A motivação para o artigo [9], principal referência desta dissertação, é o estudo de propriedades de minimizantes locais para o funcional

$$\mathscr{F}(u) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle + \chi_{\{u>0\}} \right\} dx \tag{1}$$

sobre conjunto $H^1_\varphi(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid T(u) = \varphi\}$, onde $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ denota o Operador Traço relativo ao domínio Ω.

O problema variacional (1) surge em diversas formulações matemáticas de problemas aplicados como, por exemplo, *cavity problems*, problemas de Bernoulli, problemas de transmissão livre e designs ótimos. A abordagem matemática desse tipo de problema tem sido amplamente desenvolvida desde o notável trabalho de Alt e Cafarelli [2].

A existência de minimizantes para funcionais descontínuos do tipo (1), cuja prova pode ser consultada em [2, Teorema 1.3] ou [12, Teorema 2.1], segue a partir de argumentos clássicos. Verifica-se que um tal minimizante satisfaz, no sentido de distribuições, a equação de Euler-Lagrange

$$\mathrm{div}(a^{ij}(x)\nabla u) = \mu,$$

onde μ é uma medida suportada ao longo da fronteira livre $\partial\{u > 0\}$. Em particular, minimizantes satisfazem

$$\mathrm{div}\left(a^{ij}(x)\nabla u\right) = 0 \qquad \text{em } \{u > 0\} \cap \Omega,$$

no sentido de distribuições.

A análise desenvolvida em [9] consiste em considerar problemas regularizados, de modo que contemple o problema singular (1). A ideia é obter estimativas uniformes para minimizantes do problema regularizado, de tal forma que a função limite, candidata a ser minimizante de (1), herde as mesmas propriedades. Tal abordagem será o principal objeto de estudo desta dissertação.

Especificamente, iremos considerar $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ uma função positiva com suporte contido em $[0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 \beta(t)\, dt = 1.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos o potencial ε-perturbado

$$\beta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

que tem suporte contido no intervalo $[0,\varepsilon]$. Esta sequência de funcionais converge, no sentido de distribuições, para

$$\left(\int \beta(s)\ ds\right)\cdot \delta_0,$$

onde δ_0 denota a medida de Dirac concentrada em 0 (ver Lema A.0.8). Consideraremos ainda

$$B_\varepsilon(\xi) := \int_0^\xi \beta_\varepsilon(t)\ dt,$$

que converge, no sentido de distribuições, para

$$\left(\int \beta(s)\ ds\right)\cdot \chi_{\{\xi>0\}}.$$

Com isso, definimos o funcional regularizado

$$\mathscr{F}_\varepsilon(u) := \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle + B_\varepsilon(u)\right\} dx. \tag{2}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, minimizantes do funcional $\mathscr{F}_\varepsilon$ estão relacionados com uma ampla classe de outros problemas físicos, tais como ativações de altas energias e propagação de chamas. Existe uma ampla gama de trabalhos que abordam classes de problemas singularmente perturbados similares a (2). Para citar alguns nesse sentido, destacamos, por exemplo, [4] e [20].

No decorrer da dissertação, estudaremos propriedades de minimizantes do funcional (2) restrito ao conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$. O nosso principal objetivo é demonstrar que limites uniformes de sequências de minimizantes são Lipschitz contínuas ao longo da fronteira livre. Essa é uma propriedade de destaque no artigo estudado, dada a condição mínima de regularidade imposta sobre os coeficientes a^{ij}. De fato, se nenhuma hipótese extra é dada aos coeficientes, mesmo funções satisfazendo a equação homogênea

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla h\right) = 0$$

falham em ser Lipschitz contínuas. Isto significa que o expoente α garantido pela teoria de regularidade de De Giorgi é estritamente menor que 1.

Para obter a regularidade Lipschitz ao longo da fronteira livre, nos valeremos de uma estimativa uniforme para os minimizantes dos funcionais regularizados (2). Tal estimativa é forte o suficiente para que seja possível inferir propriedades geométricas da fronteira livre da função limite. Isto pode ser obtido ao combinar a estimativa de regularidade com as propriedades de não degenerescência e crescimento linear, que também serão demonstradas nesta dissertação.

A dissertação está organizada em três capítulos principais. O Capítulo 1 é destinado apenas à apresentação de conceitos e resultados preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. O conteúdo que se encontra neste capítulo percorre definições e teoremas clássicos da teoria de Equações Diferenciais Parciais Elípticas, resultados do Cálculo das Variações e Espaços de Morrey e Campanato, entre outros.

No Capítulo 2, nos preocupamos em estabelecer os resultados que fundamentam a teoria desenvolvida em [9]. Em essência, demonstramos três principais resultados. O primeiro diz respeito à existência de minimizante do funcional (2). Em seguida, demonstramos que tais minimizantes são localmente Hölder contínuos, e que a norma Hölder é estimada uniformemente por uma constante que não depende do parâmetro ε. Isto nos permite obter uma subsequência de minimizantes convergindo localmente uniformemente para uma função limite. Por fim, obtemos uma propriedade de crescimento linear para os minimizantes de (2).

Finalmente, no Capítulo 3, nos concentramos em demonstrar a continuidade Lipschitz ao longo da fronteira livre para limites uniformes de sequências de minimizantes. Paralelamente, apresentamos uma abordagem de como a mesma propriedade pode ser obtida ao considerar diretamente o problema de minimização (1). Somado a isso, demonstramos um resultado de não degenerescência que implica na obtenção de estimativas geométricas da fronteira livre da função limite.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados fundamentais de Medida e Integração, dos espaços de Sobolev, da teoria das Equações Diferenciais Parciais Elípticas e do Cálculo das Variações, os quais são utilizados como ferramentas na obtenção dos principais resultados desta dissertação. As respectivas demonstrações podem ser consultadas nas referências indicadas.

1.1 Medida e Integração

Nesta breve seção, consideramos X um conjunto e μ uma medida definida em alguma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Teorema 1.1.1 (Convergência Dominada de Lebesgue). [3, p. 44] *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então g é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.1.2 (Egoroff). [3, p. 74] *Suponha que $\mu(X) < +\infty$ e que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis que converge em quase topo ponto em X para uma função mensurável f. Então, a sequência $\{f_n\}$ converge quase uniformemente e em medida para f.*

Teorema 1.1.3 (Vitali). [3, p. 76] *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Então, as seguintes condições são necessárias e suficientes para a convergência em L^p de $\{f_n\}$ para f:*

(i) $\{f_n\}$ converge para f em medida;

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável E_ε, com $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$, tal que, se F é mensurável e $F \cap E_\varepsilon = \emptyset$, então

$$\int_F |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon^p, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

(iii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se E é mensurável e $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$, então

$$\int_E |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon^p, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Espaços de Sobolev

Alguns dos principais resultados da teoria dos espaços de Sobolev são listados a seguir.

Teorema 1.2.1. [10, p. 153] *Seja $1 \leq p < +\infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\nabla u^+(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & q.t.p. \text{ em } \{u > 0\} \\ 0, & q.t.p. \text{ em } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^-(x) = \begin{cases} 0, & q.t.p. \text{ em } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u(x), & q.t.p. \text{ em } \{u < 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla |u|(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & q.t.p. \text{ em } \{u > 0\} \\ 0, & q.t.p. \text{ em } \{u = 0\} \\ -\nabla u(x), & q.t.p. \text{ em } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Teorema 1.2.2 (Rellich-Kondrachov)**.** [6, p. 285] *Suponha que Ω é limitado e de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{array}{llr} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^\star), \quad \text{onde } \dfrac{1}{p^\star} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, & & \text{se } p < N; \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty), & & \text{se } p = N; \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), & & \text{se } p > N. \end{array}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente para todo p (e todo N).

Embora na referência indicada no teorema anterior seja exigido que Ω seja de classe C^1, esta hipótese pode ser enfraquecida de modo que Ω pode ser apenas Lipschitz. Essa versão mais geral pode ser consultada em [1, Teorema 6.2].

Teorema 1.2.3 (Teorema de Imersão de Sobolev). [21, p. 265] *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira Lipschitz, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) Se $kp < N$, então

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $1 \leq q \leq np/(n - kp)$; a imersão é compacta se $q < np/(n - kp)$.

(ii) Se $0 \leq m < k - n/p < m + 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

para $0 \leq \alpha \leq k - m - n/p$; a imersão é compacta se $\alpha < k - m - n/p$.

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Poincaré). [6, p. 290] *Seja $1 \leq p < +\infty$ e seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.3 Equações Elípticas de Segunda Ordem

Ao longo do texto, iremos nos deparar com equações envolvendo operadores elípticos na forma divergente. Naturalmente, será necessário recorrer a resultados clássicos relacionados a esse tipo de operador. Para tornar o texto mais completo, esta seção é dedicada à apresentação dos principais resultados utilizados.

Definição 1.3.1. *Seja L um operador diferencial de segunda ordem. Dizemos que L está na **Forma Divergente** quando*

$$Lu = D_i(a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u)) + c^i(x)D_iu + d(x)u, \tag{1.1}$$

*para certas funções reais a^{ij}, b^i, c^i, d $(i, j = 1, \ldots, N)$ definidas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Além disso, dizemos que L é **Estritamente Elíptico** quando existe um número positivo λ tal que*

$$\langle a^{ij}(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

A um operador elíptico L fica associada uma forma bilinear descrita por

$$\mathcal{L}(u, v) := \int_\Omega \left\{(a^{ij}D_ju + b^iu)D_iv - (c^iD_iu + du)v\right\} dx,$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$. Isto nos permite introduzir o conceito de solução fraca para equações envolvendo tais operadores.

Definição 1.3.2. *Sejam f^i, g $(i = 1, \ldots, N)$ funções localmente integráveis em Ω. Dizemos que uma função fracamente diferenciável u é uma **Solução Fraca** da equação*

$$Lu = g + D_if^i, \qquad \text{em } \Omega,$$

quando

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega (f^iD_iv - gv)\, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Além da condição de o operador L ser estritamente elíptico, deve-se assumir também que os coeficientes de L são limitados. Mais precisamente, existem constantes $\Lambda, \nu \geq 0$ tais que

$$\sum |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2}\sum\left(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2\right) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2, \tag{1.3}$$

para todo $x \in \Omega$.

Sob certas condições, o seguinte resultado assegura a existência e unicidade de solução para uma classe de problemas de Dirichlet envolvendo um operadores elípticos da forma (1.1).

Teorema 1.3.3. [14, p. 181] *Seja L um operador da forma* (1.1) *satisfazendo as condições* (1.2) *e* (1.3), *e assuma que L satisfaz a condição*

$$\int_\Omega \big(dv - b^i D_i v\big)\, dx \leq 0, \qquad \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Então, dados $\varphi \in H^1(\Omega)$ e $g, f^i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$, o problema de Dirichlet generalizado

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma solução, e esta solução é única.

Ainda no que diz respeito à existência e unicidade da solução, destacamos o seguinte resultado, que também assegura certa regularidade para a solução fraca da equação.

Teorema 1.3.4. [14, p. 206] *Seja L um operador satisfazendo as condições* (1.2), (1.3) *e* (1.4), *com $f^i \in L^q(\Omega)$ e $g \in L^{q/2}(\Omega)$ para algum $q > N$. Além disso, suponha que Ω satisfaz uma condição de cone exterior em cada ponto de $\partial\Omega$. Então, para $\varphi \in C(\partial\Omega)$, existe uma única função $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Um outro resultado que será fundamental nesta dissertação é o Princípio do Máximo. Apresentamos aqui a versão com hipóteses mais fracas que se encontra em [14, p. 179].

Teorema 1.3.5 (Princípio do Máximo). [14, p. 179] *Seja $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $Lu \geq 0$ (respectivamente, $Lu \leq 0$) em Ω. Então,*

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \qquad \Big(\textit{respectivamente, } \inf_\Omega u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-\Big).$$

Para finalizar a seção, indicamos mias um resultado essencial: a desigualdade de Harnack.

Teorema 1.3.6 (Desigualdade de Harnack). [14, p. 199] *Seja L um operador satisfazendo as condições* (1.2) *e* (1.3), *e seja $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega \\ u \geq 0, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Então, para todo subconjunto aberto $\Omega' \Subset \Omega$, tem-se

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u,$$

onde $C = C(N, \lambda, \Lambda, \nu, \Omega', \Omega)$.

1.4 Minimização

O estudo de propriedades de funções que minimizam os funcionais (1) e (2) desempenha um papel fundamental nesta dissertação. Nesse sentido, para torná-lo consistente, é necessário garantir que estes minimizantes existem. A prova da existência é estabelecida no Teorema 2.1.1, e nela lançamos mão dos seguintes resultados.

Teorema 1.4.1. [8, p. 9] *Seja E um espaço de Hilbert (ou, mais geralmente, um espaço de Banach reflexivo), e seja $C \subset E$ um subconjunto fechado e convexo. Suponha que o funcional $\psi : E \to \mathbb{R}$ é*

(i) fracamente semicontínuo inferiormente e

(ii) coercivo em C (isto é, $\psi(u) \to \infty$ quando $\|u\|_E \to \infty$).

Então, existe $\hat{u} \in C$ tal que $\psi(\hat{u}) = \inf_C \psi$.

Proposição 1.4.2. [8, p. 10] *Se $\psi : E \to \mathbb{R}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em um espaço de Banach reflexivo E, então ψ é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Proposição 1.4.3. [8, p. 11] *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições*[1]

(i) $F(\cdot, s)$ é mensurável em Ω para todo $s \in \mathbb{R}$ fixado;

(ii) $F(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para q.t.p. $x \in \Omega$.

Além disso, assuma que existem $a, b > 0$, $1 \leq \alpha < 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$, $1 \leq \alpha < \infty$ se $N = 1, 2$, tais que

$$|F(x, s)| \leq a|s|^\alpha + b.$$

Então, o funcional definido por

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x)) \, dx$$

está bem definido e é fracamente contínuo no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

1.5 Os Espaços de Morrey e Campanato

Esta breve seção é dedicada à apresentação dos espaços de Morrey e Campanato. Tais espaços possuem propriedades interessantes que vão além do objetivo deste trabalho. Desse modo, indicaremos apenas um resultado que foi fundamental no decorrer da dissertação. Em linhas gerais, sob certas condições, este resultado garante regularidade Hölder para funções em espaços de Sobolev, cujo gradiente deve pertencer a algum espaço de Morrey adequado.

[1] As condições (i) e (ii) são comumente chamadas condições de Carathéodory.

Definição 1.5.1. *Seja* $\rho < \operatorname{diam} \Omega$. *Para cada* $x_0 \in \Omega$, *denote*

$$\Omega(x_0, \rho) := \Omega \cap B_\rho(x_0).$$

Dados $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $\lambda > 0$, *o* ***Espaço de Morrey*** $L^{p,\lambda}(\Omega)$ *é definido como*

$$L^{p,\lambda}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \sup_{x_0 \in \Omega, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p \, dx < +\infty \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x_0 \in \Omega, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p \, dx.$$

Define-se também o ***Espaço de Campanato*** $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ *por*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \sup_{x_0 \in \Omega, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u - (u)_{x_0,\rho}|^p \, dx < +\infty \right\},$$

onde

$$(u)_{x_0,\rho} := \fint_{\Omega(x_0,\rho)} u \, dx.$$

Neste espaço, considera-se a seminorma

$$[u]^p_{p,\lambda} := \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u - u_{x_0,\rho}|^p \, dx$$

e a norma

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := [u]_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Em um caso particular, como mostra a proposição a seguir, os espaços de Morrey e Campananato são isomorfos, isto significando que as respectivas normas são equivalentes.

Proposição 1.5.2. [13, p. 76] *Para* $0 \leq \lambda < N$, *tem-se que* $L^{p,\lambda}(\Omega) \cong \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Na sequência, indicamos o principal resultado desta subseção, que estabelece uma condição necessária para que funções em $W^{1,p}(\Omega)$ sejam Hölder contínuas.

Teorema 1.5.3 (Morrey). [13, p. 80] *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $\nabla u \in L^{p,N-p+\varepsilon}_{\text{loc}}(\Omega)$ *para algum* $\varepsilon > 0$. *Então,* $u \in C^{0,\frac{\varepsilon}{p}}_{\text{loc}}(\Omega)$.

1.6 Resultados da Teoria de Regularidade de De Giorgi

Inicialmente estabelecida para solucionar o décimo nono problema de Hilbert, a teoria de regularidade de De Giorgi assegura Hölder continuidade para soluções de equações elípticas na forma do divergente sem hipóteses adicionais de suavidade dos coeficientes. Os dois principais resultados estão indicados a seguir.

Teorema 1.6.1 (De Giorgi). [22, p. 43] *Seja (a^{ij}) uma matriz uniformemente elíptica, isto é, existem constantes $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$ tais que $\lambda \mathrm{Id} \leq (a^{ij}) \leq \Lambda \mathrm{Id}$, e seja u uma solução, no sentido de distribuições, da equação*

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla u\right) = 0 \qquad \text{em } B_1.$$

Então, existe um expoente universal $0 < \alpha < 1$ tal que $u \in C^{0,\alpha}(B_{1/2})$. Além disso,

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^2(B_1)},$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas da dimensão e das constantes de elipticidade.

Teorema 1.6.2. [22, p. 51] *Seja $u \in H^1(B_1)$ uma solução fraca da equação não homogênea*

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla u\right) = f(x),$$

com $\lambda \mathrm{Id} \leq (a^{ij}) \leq \Lambda \mathrm{Id}$, $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$. Suponha que, para algum $1 < \mu < 2$, tem-se que $f \in L^{\mu \frac{N}{2}}(B_1)$. Então, $u \in C^{0,\alpha}(B_{1/2})$, para algum $0 < \alpha < 1$ dependendo apenas da dimensão, constantes de elipticidade e μ. Ademais,

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(N, \lambda, \Lambda, \alpha)\left(\|f\|_{L^{\mu\frac{N}{2}}(B_1)} + \|u\|_{L^2(B_1)}\right).$$

1.7 A Desigualdade de Caccioppoli

O teorema apresentado nesta seção fornece uma estimativa para o gradiente de soluções fracas de problemas elípticos do tipo abordado nesta dissertação. Por simplicidade, apresentamos uma adaptação de um resultado mais geral que pode ser consultado em [13].

Teorema 1.7.1 (Desigualdade de Caccioppoli). *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$-\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u) = f(x) \qquad \text{em } \Omega,$$

isto é,

$$\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla\varphi\rangle \, dx = \int_\Omega f \, dx, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{1.5}$$

com $f \in L^2(\Omega)$. Então, para cada $x_0 \in \Omega$, $0 < \rho < R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, tem-se

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \leq C\left\{\frac{1}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2 \, dx + \int_{B_R(x_0)} f^2 \, dx\right\},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$, onde $C > 0$ é uma constante dependendo de λ, Λ e Ω.

Demonstração. Considere uma função *cut-off* $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

- $0 \leq \eta \leq 1$;
- $\eta \equiv 1$ em $B_\rho(x_0)$ e $\eta \equiv 0$ em $B_R(x_0) \setminus B_\rho(x_0)$;

- $|\nabla \eta| \leq 2/(R-\rho)$.

Usando $(u-\xi)\eta^2$ como função teste em (1.5), obtemos

$$\int_{B_R(x_0)} \left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla\left((u-\xi)\eta^2\right)\right\rangle \, dx = \int_{B_R(x_0)} (u-\xi)\eta^2 f \, dx.$$

Consequentemente, como

$$\nabla\left((u-\xi)\eta^2\right) = (u-\xi)2\eta\nabla\eta + \eta^2\nabla u,$$

temos

$$\int_{B_R(x_0)} 2(u-\xi)\eta\left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla\eta\right\rangle + \int_{B_R(x_0)} \eta^2\left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\right\rangle = \int_{B_R(x_0)} (u-\xi)\eta^2 f.$$

Com isso, pela condição de elipticidade da matriz $a^{ij}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{B_R(x_0)} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx &\leq \int_{B_R(x_0)} \eta^2 \left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\right\rangle \, dx \\
&= \int_{B_R(x_0)} (u-\xi)\eta^2 f \, dx - \int_{B_R(x_0)} 2(u-\xi)\eta\left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla\eta\right\rangle \, dx \\
&=: (I) + (II). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Observe que, pelo Lema A.0.5,

$$(II) \leq 2\int_{B_R(x_0)} |u-\xi||\eta||\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla\eta\rangle| \, dx \leq 2\Lambda \int_{B_R(x_0)} |u-\xi||\eta||\nabla u||\nabla\eta| \, dx.$$

Assim, usando a Desigualdade de Cauchy com ε (Lema A.0.4), obtemos

$$\begin{aligned}
(II) &\leq 2\varepsilon\Lambda \int_{B_R(x_0)} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\Lambda}{2\varepsilon}\int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2 |\nabla\eta|^2 \, dx \\
&\leq 2\varepsilon\Lambda \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{2\Lambda}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2 \, dx. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, usando o Lema A.0.4 com $\varepsilon = 1$, estimamos

$$(I) \leq \int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2\eta^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{B_R(x_0)} \eta^2 f^2 \, dx \leq \int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2 \, dx + \frac{1}{4}\int_{B_R(x_0)} f^2 \, dx. \qquad (1.8)$$

Portanto, usando as propriedades de η e combinando (1.6), (1.7) e (1.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq \lambda \int_{B_R(x_0)} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx \\
&\leq 2\varepsilon\Lambda \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx + \left[1 + \frac{2\Lambda}{(R-\rho)^2}\right]\int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2 \, dx \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{B_R(x_0)} f^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, chegamos à desigualdade

$$(\lambda - 2\varepsilon\Lambda)\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \left[1 + \frac{2\Lambda}{(R-\rho)^2}\right]\int_{B_R(x_0)} (u-\xi)^2 \, dx + \frac{1}{4}\int_{B_R(x_0)} f^2 \, dx.$$

Logo, escolhendo $\varepsilon \leq \lambda/(4\Lambda)$, o resultado segue. $\square$

1.8 Quase-mínimos

Seja $F(x,u,z)$ uma função real definida em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$|z|^p - b(x)|u|^\gamma - a(x) \leq |F(x,u,z)| \leq L|z|^p + b(x)|u|^\gamma + a(x), \tag{1.9}$$

onde $1 < p \leq \gamma < p^* = pN/(N-p)$, $a \in L^s(\Omega)$ e $b \in L^\sigma(\Omega)$, com $s > N/p$ e $\sigma > p^*/(p^* - \gamma)$. Consideraremos, nesta breve seção, o funcional

$$\mathcal{F}(u,\Omega) := \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx. \tag{1.10}$$

Além disso, faremos uso das seguintes notações

$$A(k,R) = \{x \in B_R : u(x) > k\},$$
$$B(k,R) = \{x \in B_R : u(x) < k\}.$$

Definição 1.8.1. *Uma função $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ é dito um* ***Quase-mínimo*** *do funcional $\mathcal{F}$, com constante $Q \geq 1$, ou simplesmente* ***Q-mínimo****, quando, para todo $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ com $K := \operatorname{supp}(v-u) \Subset \Omega$, tem-se*

$$\mathcal{F}(u,K) \leq Q\mathcal{F}(v,K). \tag{1.11}$$

No caso em que a desigualdade (1.11) é verificada para todo $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, com $v \leq u$ e $K := \operatorname{supp}(u-v) \Subset \Omega$, dizemos que u é um ***Sub-quase-mínimo*** *do funcional $\mathcal{F}$. Analogamente, dizemos que u é um* ***Super-quase-mínimo*** *quando verifica-se (1.11) para $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, com $v \geq u$ e $K := \operatorname{supp}(u-v) \Subset \Omega$.*

O seguinte resultado fornece uma estimativa para sub-quase-mínimos do funcional (1.10), similar à Desigualdade de Caccioppoli obtida na Seção 1.7. De fato, tal estimativa é uma variação de uma Desigualdade de Caccioppoli mais geral, demonstrada em [15, p. 190].

Teorema 1.8.2. [15, p. 214] *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ um sub-quase-mínimo do funcional (1.10). Então, existe $R_0 > 0$, dependendo de $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ e $\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}$, tal que, para todo $x_0 \in \Omega$, todos ρ, R com $0 < \rho < R < \min(R_0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$, e todo $k \geq 0$, tem-se*

$$\begin{aligned}\int_{A(k,\rho)} |\nabla u|^p\,dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^p} &\int_{A(k,\rho)} (u-k)^p\,dx \\ &+ C\left(\|a\|_{L^s(\Omega)} + k^p R^{-N\varepsilon}\right)|A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Na situação em que u é um super-quase-mínimo para o funcional (1.10), observa-se que $-u$ é um sub-quase-mínimo para o funcional

$$\tilde{\mathcal{F}}(v,\Omega) := \int_\Omega \tilde{F}(x,v,\nabla v)\,dx,$$

onde $\tilde{F}(x,v,z) := F(x,-u,-z)$. Desse modo, desde que $\tilde{F}$ satisfaz as condições (1.9), podemos aplicar o Teorema 1.8.2 à função $-u$, com $-k$ ao invés de k, e obter a desigualdade (1.12) para $k \leq 0$:

Esta breve discussão motiva a seguinte definição:

Definição 1.8.3. *Dizemos que uma função u pertence à* ***Classe de De Giorgi*** DGO_p^+ *quando, para quaisquer bolas $B_\rho \subset B_R \Subset \Omega$, com $R < R_0$, e, para todo $k \geq 0$, tem-se*

$$\int_{A(k,\rho)} |\nabla u|^p \, dx \leq \frac{H}{(R-\rho)^p} \int_{A(k,R)} (u-k)^p \, dx.$$

Similarmente, define-se DGO_p^- como sendo a classe de funções u tais que $-u \in DGO_p^+$. Mais explicitamente, são as funções u em $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tais que, para todos $\rho < R \leq R_0$ e $k \leq 0$, tem-se

$$\int_{B(k,\rho)} |\nabla u|^p \, dx \leq \frac{H}{(R-\rho)^p} \int_{B(k,R)} (k-u)^p \, dx.$$

Finalmente, denotamos por DGO_p a classe das funções pertencentes a ambas as classes DGO_p^+ e DGO_p^-, isto é,

$$DGO_p := DGO_p^+ \cap DGO_p^-.$$

Como consequência do Teorema 1.8.2, observa-se que quase-mínimos do funcional (1.10), com $F(x,u,z)$ satisfazendo

$$|z|^p \leq F(x,u,z) \leq L|z|^p,$$

pertencem à classe de De Giorgi DGO_p. Esta observação nos permitirá aplicar o seguinte resultado posteriormente.

Teorema 1.8.4 (Princípio do Máximo Forte). [15, p. 244] *Seja Ω um conjunto conexo, e seja u uma função pertencente à classe de De Giorgi DGO_p^-. Se u atinge seu valor mínimo em um ponto interior, então u é constante em Ω.*

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

Este capítulo é dedicado à obtenção de resultados auxiliares que serão utilizados nos capítulos subsequentes. Inicialmente, fazendo uso de técnicas do Cálculo Variacional, demonstraremos a existência de minimizante para o funcional (2). Em seguida, obtemos estimativas uniformes para a norma Hölder desses minimizantes, o que nos permite garantir convergência localmente uniforme para alguma subsequência. Finalizaremos o capítulo demonstrando uma propriedade de crescimento linear, que será utilizada no capítulo seguinte.

2.1 Existência de Minimizantes

Teorema 2.1.1 (Existência de Minimizante). *Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, existe pelo menos um minimizante $u_\varepsilon \in H^1_\varphi(\Omega)$ para o funcional* (2). *Além disso, u_ε satisfaz*

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \qquad \text{em } \Omega, \tag{2.1}$$

no sentido de distribuições, e $u_\varepsilon \geq 0$ em Ω.

Demonstração. Inicialmente, observe que o conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$ é fechado e convexo. Desse modo, para provar a existência de uma função $u_\varepsilon \in H^1_\varphi(\Omega)$ que minimize o funcional $\mathscr{F}_\varepsilon$ sobre o conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$, basta verificar que $\mathscr{F}_\varepsilon$ satisfaz as condições do Teorema 1.4.1. Primeiramente, mostraremos que $\mathscr{F}_\varepsilon$ é fracamente semicontínuo inferiormente em $H^1(\Omega)$. Para tanto, escreva $\mathscr{F}_\varepsilon = \psi_1 + \psi_2$, onde

$$\psi_1(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle \, dx \qquad \text{e} \qquad \psi_2(u) := \int_\Omega B_\varepsilon(u)\, dx.$$

Devido à linearidade do produto interno e à condição de elipticidade da matriz de coeficientes (a^{ij}), verifica-se que o funcional ψ_1 é convexo. Além disso, note que ψ_1 é contínuo em $H^1(\Omega)$. De fato, seja $u \in H^1(\Omega)$ fixado. Pela condição de elipticidade da matriz (a^{ij}), o Lema A.0.5 implica que, para todo $h \in H^1(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\psi_1(u+h) - \psi_1(u)| &= \left| \frac{1}{2} \int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla(u+h), \nabla(u+h)\rangle dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla h\rangle \; dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla h\rangle| \; dx \\
&\leq \Lambda \int_\Omega |\nabla u||\nabla h| \; dx \\
&\leq \Lambda \|u\|_{H^1(\Omega)} \|h\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0} |\psi_1(u+h) - \psi_1(u)| = 0,$$

o que prova a continuidade de ψ_1 em u. Como u é arbitrário, concluímos que ψ_1 é contínuo em $H^1(\Omega)$. Em particular, ψ_1 é semicontínuo inferiormente em $H^1(\Omega)$. Desse modo, segue da Proposição 1.4.2 que ψ_1 é fracamente semicontínuo inferiormente. Agora, como B_ε é suave, a função $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,s) = B_\varepsilon(s)$$

satisfaz as condições (i) e (ii) da Proposição 1.4.3. Além disso,

$$|F(x,s)| = \left| \int_0^s \beta_\varepsilon(t) \; dt \right| \leq \max_{\mathbb{R}} \beta_\varepsilon |s|.$$

Assim, pela Proposição 1.4.3, temos que

$$\psi_2(u) = \int_\Omega F(x,u) \; dx$$

define um funcional fracamente contínuo em $H^1(\Omega)$. Portanto, podemos concluir que $\mathscr{F}_\varepsilon = \psi_1 + \psi_2$ é fracamente semicontínuo inferiormente em $H^1(\Omega)$. Mostraremos agora que $\mathscr{F}$ é coercivo no conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$. Como B_ε é uma função não negativa, temos que

$$\int_\Omega B_\varepsilon(u) \; dx \geq 0,$$

para todo $u \in H^1_\varphi(\Omega)$. Adicionalmente, pela condição de elipticidade e usando a desigualdade de Poincaré com traço (Teorema A.0.2), temos

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle \; dx \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx \geq C\lambda \int_\Omega u^2 \; dx - \lambda \int_{\partial\Omega} T^2(u) \; dx,$$

para alguma constante $C > 0$. Uma vez que $T(u) = \varphi$ para todo $u \in H^1_\varphi(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle \; dx \geq C\lambda \int_\Omega u^2 \; dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \varphi^2 \; dx.$$

Com isso, temos

$$\mathscr{F}_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u\rangle + B_\varepsilon(u) \right\} dx \geq C\lambda \int_\Omega u^2 \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \varphi^2 \, dx.$$

Consequentemente, $\mathscr{F}_\varepsilon(u) \to \infty$ quando $\|u\|_{H^1(\Omega)} \to \infty$, o que mostra que $\mathscr{F}_\varepsilon$ é coercivo em $H^1_\varphi(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 1.4.1, existe $u_\varepsilon \in H^1_\varphi(\Omega)$ tal que

$$\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{H^1_\varphi(\Omega)} \mathscr{F}_\varepsilon.$$

Mostraremos que u_ε satisfaz a equção de Euler-Lagrange

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \qquad \text{em } \Omega,$$

no sentido de distribuições. Primeiramente, mostraremos que, para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\mathscr{F}_\varepsilon'(u_\varepsilon)\cdot\phi := \lim_{t\to 0} \frac{\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon + t\phi) - \mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)}{t} = \int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle \, dx + \int_\Omega \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi \, dx. \tag{2.2}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon + t\phi) - \mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)}{t} &= \frac{1}{t}\left[\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla(u_\varepsilon + t\phi), \nabla(u_\varepsilon + t\phi)\rangle + B_\varepsilon(u_\varepsilon + t\phi) \right\} dx \right. \\
&\qquad \left. - \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\rangle + B_\varepsilon(u_\varepsilon) \right\} dx \right] \\
&= \frac{1}{t}\left[t\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle \, dx + t^2 \int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla\phi, \nabla\phi\rangle \, dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_\Omega (B_\varepsilon(u_\varepsilon + t\phi) - B_\varepsilon(u_\varepsilon))\, dx \right] \\
&= \int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle \, dx + t\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla\phi, \nabla\phi\rangle \, dx \\
&\qquad + \frac{1}{t}\int_\Omega (B_\varepsilon(u_\varepsilon + t\phi) - B_\varepsilon(u_\varepsilon))\, dx.
\end{aligned}$$

Certamente,

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle \, dx + t\int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla\phi, \nabla\phi\rangle \, dx \right) = \int_\Omega \langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle \, dx.$$

Além disso, como

$$B_\varepsilon(\xi) = \int_0^\xi \beta_\varepsilon(t) \, dt$$

e β_ε é uma função contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que

$$B_\varepsilon'(\xi) = \beta_\varepsilon(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Com isso, temos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[B_\varepsilon(u_\varepsilon + t\phi) - B_\varepsilon(u_\varepsilon) \right] = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega (B_\varepsilon(u_\varepsilon+t\phi)-B_\varepsilon(u_\varepsilon))\,dx=\int_\Omega \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi\,dx.$$

Portanto, combinando as igualdades acima, obtemos (2.2), como queríamos. Por outro lado, afirmamos que

$$\mathscr{F}_\varepsilon'(u_\varepsilon)\cdot\phi=0,$$

para todo $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$. De fato, observe que, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$T(u_\varepsilon+t\phi)=T(u_\varepsilon)+tT(\phi)=T(u_\varepsilon)=\varphi.$$

Desse modo, $u+t\phi\in H^1_\varphi(\Omega)$. Consequentemente, desde que u_ε é um mínimo de $\mathscr{F}_\varepsilon$ sobre o conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$, devemos ter

$$\frac{\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon+t\phi)-\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)}{t}\geq 0 \qquad (\text{para}\ \ t\geq 0)$$

e

$$\frac{\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon+t\phi)-\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)}{t}\leq 0 \qquad (\text{para}\ \ t\leq 0).$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\mathscr{F}_\varepsilon'(u_\varepsilon)\cdot\phi=\lim_{t\to 0}\frac{\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon+t\phi)-\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)}{t}=0.$$

Segue, então, que

$$0=\lim_{t\to 0}\frac{\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon+t\phi)-\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)}{t}=\int_\Omega\langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon,\nabla\phi\rangle\,dx+\int_\Omega\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi\,dx,$$

ou seja,

$$-\int_\Omega\langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon,\nabla\phi\rangle\,dx=\int_\Omega\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi\,dx.$$

Isto mostra que u_ε satisfaz a equação (2.1) no sentido de distribuições. Finalmente, mostraremos que $u_\varepsilon\geq 0$ em Ω. Suponha, por contradição, que o conjunto $\{u_\varepsilon<0\}$ é não vazio. Como u_ε é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases}\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u)=0, & \text{em}\ \ \Omega\\ u=\varphi, & \text{sobre}\ \ \partial\Omega\end{cases}$$

e $\varphi\in C(\overline{\Omega})$, segue do Teorema 1.3.4 que $u_\varepsilon\in C(\overline{\Omega})$. Desse modo,

$$\varphi=T(u_\varepsilon)=u_\varepsilon|_{\partial\Omega}.$$

Consequentemente, desde que $\varphi\geq 0$ em $\partial\Omega$, podemos observar através de um argumento de contrapostividade que

$$\partial\{u_\varepsilon<0\}\subset\{u_\varepsilon=0\}\cap\Omega.$$

Uma vez que o suporte de β_ε está contido no intervalo $[0,\varepsilon]$, observa-se que u_ε satisfaz a equação

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon)=0$$

no conjunto $\{u_\varepsilon<0\}$. Portanto, pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.3.5), concluímos que $u_\varepsilon=0$ em $\{u_\varepsilon<0\}$, o que é uma contradição. Logo, $u_\varepsilon\geq 0$ em Ω. □

2.2 Regularidade de Minimizantes

O segundo resultado preliminar consiste em uma estimativa uniforme para a norma Hölder do minimizante u_ε. Para demonstrá-lo, precisaremos nos valer de alguns resultados prévios.

Lema 2.2.1. *Suponha que* (a^{ij}) *é uma matriz constante satisfazendo a condição de elipticidade*

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

para constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$. *Além disso, suponha que* $u \in C^1(B_R)$ *satisfaz*

$$\int_{B_r} \langle a^{ij}\nabla u, \nabla \phi\rangle\, dx = 0, \qquad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(B_R). \tag{2.3}$$

Então, para qualquer $0 < r \leq R$, *vale*

$$\int_{B_r} |u|^2\, dx \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R} |u|^2\, dx \tag{2.4}$$

e

$$\int_{B_r} |u-(u)_r|^2\, dx \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u-(u)_r|^2\, dx, \tag{2.5}$$

onde $C = C(N,\lambda,\Lambda)$ *é uma constante positiva.*

Demonstração. Por dilatação, podemos considerar $R = 1$. Além disso, observe que, para $r \in (1/2, 1)$, o resultado é imediato. De fato, neste caso, temos

$$\int_{B_r} |u|^2\, dx \leq \int_{B_1} |u|^2\, dx \leq 2^N r^N \int_{B_1} |u|^2\, dx$$

e, pelo Lema A.0.1,

$$\int_{B_r} |u-(u)_r|^2\, dx \leq \int_{B_1} |u-(u)_1|^2\, dx \leq 2^{N+2} r^{N+2} \int_{B_1} |u-(u)_1|^2\, dx.$$

Isto verifica as desigualdades (2.4) e (2.5). Mostraremos agora que

$$\|u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C(N,\lambda,\Lambda) \int_{B_1} |u|^2\, dx, \tag{2.6}$$

o que nos permitirá obter (2.4) e (2.5) para $r \in (0, 1/2]$. Para isso, observe que, se u satisfaz (2.3), o mesmo ocorre para suas derivadas. Assim, aplicando a desigualdade de Caccioppoli (Teorema 1.7.1) recursivamente para as derivadas de u, obtemos

$$\|u\|_{H^k(B_{1/2})} \leq C(k,\lambda,\Lambda)\|u\|_{L^2(B_1)},$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Fixado um k suficientemente grande, podemos usar o Teorema de Imersão de Sobolev para mergulhar $H^k(B_{1/2})$ continuamente em $C^1(\overline{B_{1/2}})$. Com isso, devemos ter

$$\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} + \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C(N,\lambda,\Lambda)\|u\|_{L^2(B_1)},$$

de onde obtemos (2.6). Finalmente, usaremos esse resultado para concluir a demonstração. De imediato, temos

$$\int_{B_r} |u|^2\,dx \le \alpha(N) r^N \|u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \le C(N,\lambda,\Lambda) r^N \int_{B_1} |u|^2\,dx,$$

onde $\alpha(N)$ denota o volume da bola unitária N-dimensional. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u-(u)_r|^2\,dx &= \frac{1}{|B_r|^2}\int_{B_r}\left|\int_{B_r}(u(x)-u(y))\,dy\right|^2 dx\\
&= \frac{1}{|B_r|^2}\int_{B_r}\left|\int_{B_r}\int_0^1 \frac{d}{dt}u(t(x-y)+y)\,dt\,dy\right|^2 dx\\
&= \frac{1}{|B_r|^2}\int_{B_r}\left|\int_{B_r}\int_0^1 \nabla u(t(x-y)+y)\cdot(x-y)\,dt\,dy\right|^2 dx\\
&\le \frac{1}{|B_r|^2}\int_{B_r}\left|\int_{B_r}\int_0^1 \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{1/2})} 2r\,dt\,dy\right|^2 dx\\
&= \alpha(N)4r^{N+2}\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{1/2})}\\
&\le C(N,\lambda,\Lambda) r^{N+2}\int_{B_1}|u|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Como $u-(u)_1$ também satisfaz (2.3), trocando u por $u-(u)_1$ na desigualdade acima, obtemos

$$\int_{B_r} |u-(u)_r|^2\,dx \le C(N,\lambda,\Lambda) r^{N+2}\int_{B_1}|u-(u)_1|^2\,dx,$$

como desejado. □

Lema 2.2.2 (Estimativas Básicas para Funções Harmônicas). *Seja (a^{ij}) uma matriz constante satisfazendo a condição de elipticidade*

$$\lambda|\xi|^2 \le a^{ij}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \qquad \text{para todo } \xi\in\mathbb{R}^N,$$

para constantes $0<\lambda\le\Lambda$. Suponha que $h\in H^1(B_R(x_0))$ é uma solução fraca de

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}\nabla h\right) = 0 \qquad \text{em } B_R(x_0). \tag{2.7}$$

Então, para qualquer $0<r\le R$, vale

$$\int_{B_r}|\nabla h|^2\,dx \le C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R}|\nabla h|^2\,dx \tag{2.8}$$

e

$$\int_{B_r}|\nabla h-(\nabla h)_r|^2\,dx \le C\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|\nabla h-(\nabla h)_r|^2\,dx, \tag{2.9}$$

onde $C=C(N,\lambda,\Lambda)$ é uma constante positiva.

Demonstração. Uma vez que h satisfaz (2.7), o mesmo vale para qualquer uma de suas derivadas. Assim, aplicando o Lema 2.2.1 a ∇h, obtém-se as desigualdades desejadas. □

Corolário 2.2.3 (Comparação com Funções Harmônicas). *Seja h uma função como no Lema 2.2.2, e seja $u \in H^1(B_R(x_0))$. Então, para qualquer $0 < r \leq R$, tem-se*

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx + C\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla h|^2\, dx \tag{2.10}$$

e

$$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2\ dx \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2\ dx + C\int_{B_R} |\nabla u - \nabla h|^2\ dx, \tag{2.11}$$

onde C é uma constante positiva dependendo apenas de N, λ e Λ.

Demonstração. Provaremos primeiramente (2.10). Para isso, usando a desigualdade

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \qquad \forall a, b \geq 0, \tag{2.12}$$

temos

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq 2\int_{B_r(x_0)} |\nabla h|^2\, dx + 2\int_{B_r(x_0)} |\nabla u - \nabla h|^2\, dx.$$

Consequentemente, segue do Lema 2.2.2 que existe uma constante positiva $C = C(N, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx &\leq 2C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |\nabla h|^2 dx + 2\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla h|^2 dx \\ &\leq 4C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 dx + \left[4C\left(\frac{r}{R}\right)^N + 2\right]\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla h|^2 dx.\end{aligned}$$

Como $r/R \leq 1$, concluímos que

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx + C\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla h|^2\, dx,$$

para alguma constante apropriada $C > 0$ dependendo apenas de N, λ e Λ. Demonstraremos agora a desigualdade (2.11). Mais uma vez, usando (2.12), temos

$$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2\ dx \leq 2\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla h)_r|^2\ dx + 2\int_{B_r} |(\nabla u)_r - (\nabla h)_r|^2\ dx. \tag{2.13}$$

Analogamente,

$$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla h)_r|^2\ dx \leq 2\int_{B_r} |\nabla u - \nabla h|^2\ dx + 2\int_{B_r} |\nabla h - (\nabla h)_r|^2\ dx. \tag{2.14}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |(\nabla u)_r - (\nabla h)_r|^2 \, dx &= |(\nabla u)_r - (\nabla h)_r|^2 \int_{B_r} dx \\ &= \frac{1}{|B_r|} \left| \int_{B_r} (\nabla u - \nabla h) \, dx \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{|B_r|} \left(\int_{B_r} |\nabla u - \nabla h| \, dx \right)^2 .\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |(\nabla u)_r - (\nabla h)_r|^2 \, dx &\leq \frac{1}{|B_r|} \left[|B_r|^{1/2} \left(\int_{B_r} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx \right)^{1/2} \right]^2 \\ &= \int_{B_r} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Consequentemente, combinando (2.13), (2.14) e (2.15), temos

$$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx \leq 4 \int_{B_r} |\nabla h - (\nabla h)_r|^2 \, dx + 6 \int_{B_r} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx. \tag{2.16}$$

Da mesma forma, trocando os papéis de u e h e considerando a integração sobre a bola B_R, obtemos também

$$\int_{B_R} |\nabla h - (\nabla h)_R|^2 \, dx \leq 4 \int_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx + 6 \int_{B_R} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx. \tag{2.17}$$

Pelo Lema 2.2.2, temos que

$$\int_{B_r} |\nabla h - (\nabla h)_r|^2 \, dx \leq C \left(\frac{r}{R} \right)^{N+2} \int_{B_R} |\nabla h - (\nabla h)_R|^2 \, dx,$$

para alguma constante $C = C(N, \lambda, \Lambda) > 0$. Além disso, como $B_r \subset B_R$, observa-se que

$$\int_{B_r} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx \leq \int_{B_R} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx.$$

Assim, aplicando essas estimativas em (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx \leq 4\, C(N, \lambda, \Lambda) \left(\frac{r}{R} \right)^{N+2} &\int_{B_R} |\nabla h - (\nabla h)_R|^2 \, dx \\ &+ 6 \int_{B_R} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto, combinando (2.17) e (2.18), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx &\leq 16\, C(N, \lambda, \Lambda) \left(\frac{r}{R} \right)^{N+2} \int_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx \\ &\quad + \left[4\, C(N, \lambda, \Lambda) \left(\frac{r}{R} \right)^{N+2} + 1 \right] 6 \int_{B_r} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Como $0 < r \leq R$, isto implica que

$$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx \leq C(N,\lambda,\Lambda) \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx + C(N,\lambda,\Lambda) \int_{B_R} |\nabla u - \nabla h|^2 \, dx,$$

como queríamos demonstrar. □

O último resultado prévio que precisamos é um lema clássico, com notável utilidade para a obtenção de desigualdades variacionais e regularidade Hölder.

Lema 2.2.4. *Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função não negativa e não decrescente. Suponha que, para todo $r \leq R \leq R_0$, tem-se*

$$\phi(r) \leq C_1 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} + \mu\right] \phi(R) + C_2 R^{\beta},$$

com C_1, α, β constantes positivas, C_2, μ constantes não negativas, e $\beta < \alpha$. Então, existe uma constante $\mu_0 = \mu_0(C_1, \alpha, \beta, \sigma)$ tal que se $\mu < \mu_0$, então, para todo $r \leq R \leq R_0$, tem-se

$$\phi(r) \leq C_3 \left(\frac{r}{R}\right)^{\beta} \left(\phi(R) + C_2 R^{\beta}\right), \tag{2.19}$$

onde $C_3 = C_3(C_1, \sigma - \beta)$ é uma constante positiva. Por consequência, tem-se

$$\phi(r) \leq C_4 r^{\beta}, \tag{2.20}$$

onde $C_4 = C_4(C_2, C_3, R_0, \phi, \sigma)$ é uma constante positiva.

Demonstração. Inicialmente, observe que, para $0 < \theta < 1$ e $R \leq R_0$, temos

$$\begin{aligned} \phi(\theta R) &\leq C_1 \left[\left(\frac{\theta R}{R}\right)^{\alpha} + \mu\right] \phi(R) + C_2 R^{\beta} \\ &= \theta^{\alpha} C_1 \left[1 + \mu \theta^{-\alpha}\right] \phi(R) + C_2 R^{\beta}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Considere $\gamma := (\alpha+\beta)/2$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $2C_1 > 1$, de modo que podemos escolher $0 < \theta < 1$ satisfazendo

$$2C_1 \theta^{\alpha} = \theta^{\gamma}.$$

Escolha $\mu_0 > 0$ tal que $\mu_0 \theta^{-\alpha} < 1$. Assim, devido a (2.21), para $R \leq R_0$, temos

$$\phi(\theta R) \leq \theta^{\gamma} \phi(R) + C_2 R^{\beta}. \tag{2.22}$$

Indutivamente, para $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(\theta^k R) &= \phi(\theta(\theta^{k-1} R)) \\ &\leq \theta^{\gamma} \phi(\theta^{k-1} R) + C_2 \theta^{(k-1)\beta} R^{\beta} \\ &\leq \theta^{k\gamma} \phi(R) + C_2 \theta^{(k-1)\beta} R^{\beta} \sum_{j=0}^{k-1} \theta^{j(\gamma-\beta)} \\ &\leq \left[\theta^{-\beta} + \theta^{-2\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \theta^{j(\gamma-\beta)}\right] \theta^{(k+1)\beta} \left(\phi(R) + C_2 R^{\beta}\right) \\ &= C_3 \theta^{(k+1)\beta} \left(\phi(R) + C_2 R^{\beta}\right). \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\theta^{k+1}R \leq r \leq \theta^k R$, segue que

$$\phi(r) \leq \phi(\theta^k R) \leq C_3\theta^{(k+1)\beta}\left(\phi(R) + C_2R^\beta\right) \leq C_3\left(\frac{r}{R}\right)^\beta\left(\phi(R) + C_2R^\beta\right),$$

como desejado. Em particular, temos

$$\phi(r) \leq C_3\left(\frac{r}{R_0}\right)^\beta\left(\phi(R_0) + C_2R_0^\beta\right),$$

o que implica (2.20). □

Finalmente, estamos aptos a demonstrar o principal teorema desta seção.

Teorema 2.2.5 (**Regularidade Hölder Uniforme de Minimizantes**). *Fixado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante $C > 0$ dependendo da dimensão e constantes de elipticidade, mas independente de ε, tal que*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} < C,$$

onde $0 < \alpha < 1$ é uma constante universal.

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega$ fixado, e considere $R > 0$ tal que $R < \min\{1, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$. Uma vez que u_ε satisfaz

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \qquad \text{em } B_R(x_0),$$

temos, para qualquer $\phi \in H_0^1(B_R(x_0))$,

$$\int_{B_R(x_0)} \langle a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle\, dx = -\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi\, dx,$$

que podemos reescrever como

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} \langle a^{ij}(x_0)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle\, dx = &-\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi\, dx \\ &+ \int_{B_R(x_0)} \left\langle\left(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)\right)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\right\rangle\, dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3.3, o problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}\,(a^{ij}(x_0)\nabla h) = 0, & \text{em } \ B_R(x_0) \\ h = u_\varepsilon, & \text{sobre } \ \partial B_R(x_0) \end{cases}$$

admite uma única solução $h \in H^1(B_R(x_0))$. Certamente, a função $v = u_\varepsilon - h \in H_0^1(B_R(x_0))$ satisfaz

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} \langle a^{ij}(x_0)\nabla v, \nabla\phi\rangle\, dx = &-\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi\, dx \\ &+ \int_{B_R(x_0)} \left\langle\left(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)\right)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\right\rangle\, dx,\end{aligned}$$

para qualquer $\phi \in H_0^1(B_R(x_0))$. Escolhendo $\phi = v$, temos

$$\int_{B_R(x_0)} \langle a^{ij}(x_0)\nabla v, \nabla v\rangle \, dx = -\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) v \, dx + \int_{B_R(x_0)} \left\langle \left(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)\right) \nabla u_\varepsilon, \nabla v\right\rangle \, dx. \tag{2.23}$$

Pela condição de (λ, Λ)-elipticidade, temos

$$\int_{B_R(x_0)} \langle a^{ij}(x_0)\nabla v, \nabla v\rangle \, dx \geq \lambda \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx. \tag{2.24}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Cauchy com ε (Lema A.0.4) e a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) v \, dx &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon) \, dx + \varepsilon \int_{B_R(x_0)} v^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon) \, dx + C(N)\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Além disso, usando o Lema A.0.5, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} \left\langle \left(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)\right) \nabla u_\varepsilon, \nabla v\right\rangle \, dx &\leq 2\Lambda \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon||\nabla v| dx \\ &\leq \frac{\Lambda}{2\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + 2\Lambda\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Combinando (2.23)−(2.26), obtemos

$$\lambda \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx \leq \frac{\Lambda}{2\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon) \, dx + (C(N) + 2\Lambda)\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx, \tag{2.27}$$

ou ainda

$$[\lambda - (C(N) + 2\Lambda)\varepsilon] \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx \leq \frac{\Lambda}{2\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon) \, dx.$$

Consequentemente, escolhendo $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\frac{\lambda}{2} > (C(N) + \Lambda)\varepsilon,$$

obtemos

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx \leq \frac{\Lambda}{\lambda\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{2\lambda\varepsilon} \int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon) \, dx.$$

Finalmente, combinando essa estimativa com o Corolário 2.2.3, temos, para qualquer $0 < r \le R$,

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx &\le C\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + C\frac{\Lambda}{\lambda\varepsilon}\int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \\ &\quad + C\frac{1}{2\lambda\varepsilon}\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon)\,dx \\ &= C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^N + \frac{\Lambda}{\lambda\varepsilon}\right]\int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + C\frac{1}{2\lambda\varepsilon}\int_{B_R(x_0)} \beta_\varepsilon^2(u_\varepsilon)\,dx \\ &\le C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^N + \frac{\Lambda}{\lambda\varepsilon}\right]\int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + CR^N,\end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas da dimensão e das contantes de elipticidade. Fixado $0 < \alpha < 1$, desde que $R < 1$, isto implica que

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \le C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^N + \frac{\Lambda}{\lambda\varepsilon}\right]\int_{B_R(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + CR^{N-2+2\alpha}.$$

Com isso, observando que a função $\phi : (0, R] \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\phi(r) := \int_{B_r(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx$$

satisfaz as hipóteses do Lema 2.2.4 (ver Lema A.0.1), temos que

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \le Cr^{N-2+2\alpha}.$$

Isto significa que $\nabla u_\varepsilon \in L^{2,N-2+2\alpha}(\Omega')$. Logo, pelo Teorema 1.5.3, concluímos que $u_\varepsilon \in C^{0,\alpha}(\Omega')$. Além disso,

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \le C,$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de ε. □

Como consequência do Teorema 2.2.5, obteremos uma subsequência $\{u_{\varepsilon_k}\}$ que converge localmente uniformemente para uma função u_0.

Corolário 2.2.6. *Existe uma subsequência $\{u_{\varepsilon_k}\}$ tal que*

$$u_{\varepsilon_k} \to u_0 \qquad \textit{localmente uniforme em } \Omega,$$

para alguma função $u_0 \in C(\Omega)$.

Demonstração. Seja $\Omega' \Subset \Omega$. Pelo Teorema 2.2.5, existem $0 < \alpha < 1$ e $C > 0$ tais que

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \le C,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Mostraremos que as hipóteses do Teorema de Arzelà-Ascoli são verificadas.

(i) (Limitação Pontual) Seja $x \in \overline{\Omega}$ um ponto fixado. Para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \|u_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C.$$

Isto mostra que a coleção de funções $\{u_\varepsilon\}$ é pontualmente limitada.

(ii) (Equicontinuidade) Dado $\theta > 0$, seja $\delta = (\theta/C)^{1/\alpha}$. Então, para quaisquer $x, y \in \overline{\Omega}$ com $|x - y| < \delta$, temos

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq C|x - y|^\alpha \leq C\delta^\alpha = \theta,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Isto nos diz que coleção $\{u_\varepsilon\}$ é equicontínua.

Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência u_{ε_k} e uma função $u_0 \in C(\Omega)$ tais que

$$u_{\varepsilon_k} \to u_0 \qquad \text{uniformemente em } \Omega'.$$

Vamos mostrar que a função u_0 está definida e é contínua em todo o domínio Ω. Para isso, considere uma exaustão de Ω por conjuntos compactos, isto é, uma sequência de compactos $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ tais que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \qquad \text{e} \qquad K_i \subseteq \text{Int } K_{i+1} \quad \text{para cada } i.$$

Aplicando o nosso argumento inicial ao conjunto K_1, obtemos uma sequência $\{u_{\varepsilon_{k_1}}\}$ e uma função $u_1 \in C(K_1)$, com

$$u_{\varepsilon_{k_1}} \to u_1 \qquad \text{uniformemente em } K_1.$$

Prosseguindo com o mesmo argumento inicial, desta vez aplicado à sequência $\{u_{\varepsilon_{k_1}}\}$ e o conjunto K_2, obtemos uma subsequência $\{u_{\varepsilon_{k_2}}\}$ de $\{u_{\varepsilon_{k_1}}\}$ e uma função $u_2 \in C(K_2)$ tais que

$$u_{\varepsilon_{k_2}} \to u_2 \qquad \text{uniformemente em } K_2.$$

Continuando esse processo, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma subsequência $\{u_{\varepsilon_{k_n}}\}$ e uma função u_n, de modo que

$$u_{\varepsilon_{k_n}} \to u_n \qquad \text{uniformemente em } K_n.$$

Desse modo, considerando a sequência diagonal $\{u_{\varepsilon_{k_k}}\}$ e definindo a função $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$u_0(x) = u_n(x), \qquad \text{se } x \in K_n,$$

temos que u_0 está bem definida, pertence a $C(\Omega)$ e

$$u_{\varepsilon_{k_k}} \to u_0 \qquad \text{localmente uniforme em } \Omega.$$

Renomeando a subsequência $\{u_{\varepsilon_{k_k}}\}$ por $\{u_{\varepsilon_k}\}$, o corolário segue. □

Ainda como consequência do Teorema 2.2.5, podemos obter mais uma convergência importante para a sequência $\{u_{\varepsilon_k}\}$.

Corolário 2.2.7. *A menos de subsequência, $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\Omega' \Subset \Omega$. Usando o o resultado do Teorema 2.2.5 temos

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega')} \leq C,$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de k. Além disso, combinando o Teorema 2.2.5 com a desigualdade de Caccioppoli (Teorema 1.7.1), obtemos

$$\|\nabla u_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega')} \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ que também não depende de k. Com isso, temos que u_{ε_k} é uniformemente limitada em $H^1(\Omega')$. Consequentemente, segue da reflexividade de $H^1(\Omega')$ que existe $v \in H^1(\Omega')$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup v \qquad \text{em } H^1(\Omega').$$

Precisamos mostrar que $v = u_0$. Para isso, seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega')$ e considere $\Phi \in C_0^\infty(\Omega')$ tal que

$$D_l\Phi = \phi,$$

onde $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Usando a convergência localmente uniforme garantida pelo Corolário 2.2.7 e a convergência fraca inicialmente obtida, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} (u_0 - v)\phi \, dx &= \int_{\Omega'} u_0\phi \, dx - \int_{\Omega'} v\phi \, dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k}\phi \, dx - \int_{\Omega'} v\phi \, dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k} D_l\Phi \, dx - \int_{\Omega'} vD_l\Phi \, dx \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \phi D_l u_{\varepsilon_k} \, dx + \int_{\Omega'} \phi D_l v \, dx \\
&= -\int_{\Omega'} \phi D_l v \, dx + \int_{\Omega'} \phi D_l v \, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, desde que a igualdade acima vale para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega')$, segue do Lema Fundamental do Cálculo das Variações que $u_0 = v$ em quase todo ponto de Ω', como queríamos demonstrar. □

Os resultados obtidos até aqui nos permitem demonstrar que a função limite u_0 satisfaz a equação homogênea longe da fronteira livre, conforme estabelece a proposição a seguir. É esperado que isto realmente ocorra, uma vez que, como verificaremos mais adiante, u_0 é um minimizante associado ao problema de cavidade e, conforme discutido na Introdução, tais minimizantes possuem essa propriedade.

Proposição 2.2.8. *Seja $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid u_0(x) > 0\}$. Então,*

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla u_0\right) = 0 \qquad \text{em } \Omega_0.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega_0$. Pela continuidade de u_0, existe uma bola $B_\rho(x_0) \subset \Omega_0$ tal que

$$u_0 \geq \theta \qquad \text{em } B_\rho(x_0),$$

para algum $\theta > 0$. Como $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ uniformemente em $B_\rho(x_0)$, isto implica que existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ satisfazendo

$$u_{\varepsilon_k} \geq \delta \qquad \text{em } B_\rho(x_0),$$

para $k \geq k_0$. Além disso, como $\varepsilon_k \to 0$ quando $k \to \infty$, podemos assumir que $\delta > \varepsilon_k$ para $k \geq k_0$, de modo que

$$\beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) = 0.$$

Assim, para todo $\phi \in C_0^\infty(B_\rho(x_0))$, desde que $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0$ em $H^1(B_\rho(x_0))$, temos

$$\begin{aligned} 0 = -\lim_{k\to\infty} \int_{B_\rho(x_0)} \beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})\phi \, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{B_\rho(x_0)} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle \, dx \\ &= \int_{B_\rho(x_0)} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle \, dx. \end{aligned}$$

Isto demonstra que

$$\operatorname{div}\big(a^{ij}(x)\nabla u_0\big) = 0 \qquad \text{em } B_\rho(x_0).$$

Portanto, desde que $B_\rho(x_0)$ é uma bola arbitrária, u_0 satisfaz a equação em Ω_0. $\square$

2.3 Uma Caracterização para a Função Limite

Conforme mencionado em momentos anteriores, espera-se que a função limite u_0 seja um mínimo local do funcional (1). Demonstrar esse fato será o nosso objetivo nesta seção. Para isso, precisaremos fazer uso de convergência em $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ para a sequência do gradientes das funções u_{ε_k}, que é o resultado a ser demonstrado na proposição a seguir.

Proposição 2.3.1. *Seja $\Omega' \Subset \Omega$ um subdomínio. Então, a menos de subsequência, $\nabla u_{\varepsilon_k} \to \nabla u_0$ em $L^2(\Omega')$.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega')$, com $\phi \geq 0$, e seja $\delta > 0$. Pela Proposição 2.2.8, sabemos que

$$\operatorname{div}\big(a^{ij}(x)\nabla u_0\big) = 0 \qquad \text{em } \Omega_0.$$

Desse modo, escolhendo $\eta_0 = (u_0 - \delta)^+\phi \in H_0^1(\Omega') \cap H_0^1(\Omega_0)$ como função teste, temos

$$\int_{\Omega_0} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\eta_0\rangle \, dx = 0.$$

Assim, usando o fato que

$$\nabla\eta_0 = (u_0 - \delta)^+\nabla\phi + \phi\nabla(u_0 - \delta)^+$$

e

$$\nabla(u_0-\delta)^+ = \begin{cases} \nabla(u_0-\delta), & \text{q.t.p. em } \{u_0-\delta>0\} \\ 0, & \text{q.t.p. em } \{u_0-\delta<0\}, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla \eta_0\rangle\, dx \\ &= \int_{\{u_0>\delta\}\cap\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx - \delta\int_{\{u_0>\delta\}\cap\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx \\ &\quad + \int_{\{u_0>\delta\}\cap\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi\, dx. \end{aligned}$$

Com isso, fazendo $\delta \to 0$, concluímos que

$$\int_{\{u_0>0\}\cap\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\phi\, dx = -\int_{\{u_0>0\}\cap\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx.$$

Como $u_0 \geq 0$ em Ω e $\nabla u_0(x) = 0$ em quase todo ponto $x \in \{u_0 = 0\}$, isto implica que

$$\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\phi\, dx = -\int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx. \tag{2.28}$$

Por outro lado, desde que u_{ε_k} é uma solução fraca da equação

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}) = \beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \qquad \text{em } \Omega,$$

usando $u_{\varepsilon_k}\phi$ como função teste, temos

$$\int_{\Omega'} u_k\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx + \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\phi\, dx = -\int_{\Omega'} \beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})u_{\varepsilon_k}\phi\, dx \leq 0,$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\phi\, dx \leq -\int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k}\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx. \tag{2.29}$$

Agora, considere o espaço $\mathcal{H} = (L^2(\Omega'))^N$ munido com o produto interno

$$(\xi,\eta)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\xi, \eta\rangle\, dx,$$

para quaisquer $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N), \eta = (\eta_1,\ldots,\eta_N) \in \mathcal{H}$. Observe que, por elipticidade, tal produto interno é equivalente ao produto interno usual. Dessa forma, temos que

$$\nabla u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nabla u_0 \qquad \text{fracamente em } \mathcal{H}.$$

Assim, desde que $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ uniformemente em Ω', e observando que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k}\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx - \int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx\right| \\
&\qquad\le \left|\int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k}\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx - \int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx\right| \\
&\qquad\quad + \left|\int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx - \int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx\right| \\
&\qquad\le \sup_{\Omega'} |u_{\varepsilon_k} - u_0| \int_{\Omega'} |\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle|\, dx \\
&\qquad\quad + \left|\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, u_0\nabla\phi\rangle\, dx - \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, u_0\nabla\phi\rangle\, dx\right| \\
&\qquad\le \Lambda \sup_{\Omega'} |u_{\varepsilon_k} - u_0| \|\nabla u_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega')} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega')} \\
&\qquad\quad + \left|\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, u_0\nabla\phi\rangle\, dx - \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, u_0\nabla\phi\rangle\, dx\right|,
\end{aligned}
$$

obtemos a convergência

$$
\int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k}\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx \to \int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx.
$$

Consequentemente, combinando (2.28) e (2.29), temos

$$
\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \phi\, dx &\le \limsup_{k\to\infty} - \int_{\Omega'} u_{\varepsilon_k}\langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\phi\rangle\, dx \\
&= -\int_{\Omega'} u_0\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla\phi\rangle\, dx \\
&= \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi\, dx.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, sabemos que

$$
\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi\, dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \phi\, dx.
$$

Com isso, concluímos que

$$
\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \phi\, dx = \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi\, dx.
$$

Vamos mostrar que isto implica na seguinte igualdade

$$
\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\, dx = \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\, dx, \tag{2.30}
$$

isto é,

$$
\lim_{k\to\infty} (\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k})_{\mathcal{H}} = (\nabla u_0, \nabla u_0)_{\mathcal{H}}.
$$

Primeiramente, note que

$$\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx \leq \Lambda \int_{\Omega'} |\nabla u_{\varepsilon_k}|^2 \, dx.$$

Pela desigualdade de Caccioppoli (Teorema 1.7.1), isto implica que a sequência formada pelas integrais do lado esquerdo da desigualdade acima é limita. Desse modo, existe uma subsequência, cuja notação será mantida a mesma, que converge. Em particular, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx = \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx.$$

Considere $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma exaustão por abertos de Ω', ou seja, uma coleção de conjuntos abertos satisfazendo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega' \qquad \text{e} \qquad \Omega_n \Subset \Omega_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx = \liminf_{k\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx \right).$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar a definição de limite inferior de uma sequência para obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx, \tag{2.31}$$

para todo $k \geq k_0$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, considere $\phi \in C_0^\infty(\Omega_{n+1})$ satisfazendo

$$0 \leq \phi \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \phi \equiv 1 \quad \text{em } \Omega_n.$$

Por (2.3), temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_{n+1}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \phi \, dx = \int_{\Omega_{n+1}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi \, dx.$$

Assim, podemos encontrar $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{n+1}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \phi \, dx &\leq \int_{\Omega_{n+1}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi \, dx + \varepsilon \\
&\leq \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \phi \, dx + \varepsilon \\
&\leq \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx + \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $k \geq k_1$. Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \phi \, dx \leq \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx + \varepsilon. \tag{2.32}$$

Combinando (2.31) e (2.32), obtemos

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx \leq \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx + 2\varepsilon.$$

Como a desigualdade vale para qualquer $\varepsilon > 0$, devemos ter

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx \leq \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx.$$

Por outro lado, desde que $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H^1(\Omega')$, temos

$$\int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx.$$

Disto, segue que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx = \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx,$$

de onde concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle \, dx = \int_{\Omega'} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \, dx,$$

como desejado. Portanto, desde que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, temos que

$$\nabla u_{\varepsilon_k} \to \nabla u_0 \qquad \text{em } \mathcal{H}.$$

Logo, usando a condição de elipticidade, concluímos que

$$\nabla u_{\varepsilon_k} \to \nabla u_0 \qquad \text{em } L^2(\Omega'),$$

como queríamos demonstrar. □

Na sequência, baseado nos argumentos apresentados em [20, Teorema 4.4], obteremos uma caracterização variacional para a função limite u_0. Especificamente, mostraremos que u_0 é um mínimo local para o funcional (1), ou seja,

$$\int_{B_{r_0}} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0 \right\rangle + \chi_{\{u_0>0\}} \right\} dx \leq \int_{B_{r_0}} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle a^{ij}(x)\nabla \xi, \nabla \xi \right\rangle + \chi_{\{\xi>0\}} \right\} dx,$$

para toda bola $B_{r_0} \Subset \Omega$ e toda função $\xi \in H^1(\Omega)$ com $\xi = u_0$ em ∂B_{r_0}. Para facilitar a visualização dos cálculos, estabeleceremos a seguinte notação.

Notação 2.3.2. *Para cada aberto $\mathcal{O} \subseteq \Omega$, denotaremos*

$$\mathscr{F}(\xi, \mathcal{O}) := \int_{\mathcal{O}} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u \right\rangle + \chi_{\{u>0\}} \right\} dx, \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Introduziremos também

$$\mathscr{F}_\varepsilon(u, \mathcal{O}) := \int_{\mathcal{O}} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle a^{ij}(x)\nabla u, \nabla u \right\rangle + B_{\varepsilon_k}(u) \right\} dx,$$

e, para simplificar a notação, denotaremos $\mathscr{F}_{\varepsilon_k}(u, \mathcal{O}) = \mathscr{F}_k(u, \mathcal{O})$.

Teorema 2.3.3 (**Caracterização Variacional de** u_0). *A função* u_0 *é um mínimo local para o funcional* (1) *sobre* $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja $B_{r_0} \Subset \Omega$, e considere uma função $\xi \in H^1(\Omega)$ com $\xi = u_0$ em ∂B_{r_0}. Precisamos mostrar que

$$E_0(B_{r_0}, u_0) \leq E_0(B_{r_0}, \xi).$$

Para tanto, para $h > 0$ suficientemente pequeno, defina

$$\xi_k^h := \begin{cases} u_0 + \dfrac{|x| - r_0}{h}(u_{\varepsilon_k} - u_0), & \text{em } \ B_{r_0+h} \setminus B_{r_0} \\ \xi, & \text{em } \ B_{r_0} \setminus B_{1/2}. \end{cases}$$

Observe que, em $B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}$, temos

$$\nabla \xi_k^h = \nabla u_0 + \frac{|x| - r_0}{h}(\nabla u_{\varepsilon_k} - \nabla u_0) + \frac{(u_{\varepsilon_k} - u_0)x}{|x|h},$$

de onde obtemos

$$|\nabla \xi_k^h| \leq |\nabla u_0| + |\nabla u_{\varepsilon_k} - \nabla u_0| + \frac{|u_{\varepsilon_k} - u_0|}{h}.$$

Usando a desigualdade

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \qquad a, b \geq 0,$$

isto implica que

$$|\nabla \xi_k^h|^2 \leq 4|\nabla u_0|^2 + 4|\nabla u_{\varepsilon_k} - \nabla u_0|^2 + 2\frac{|u_{\varepsilon_k} - u_0|^2}{h^2}.$$

Assim, desde que $B_{\varepsilon_k} \leq \chi_{\{0,\infty\}}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^k_{r_0+h,h} :&= \int_{B_{r_0+h}} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle a^{ij}(x) \nabla \xi_k^h, \nabla \xi_k^h \right\rangle + B_{\varepsilon_k}(\xi_k^h) \right\} dx \\ &\leq \left(\frac{\Lambda}{2} + 1 \right) \int_{B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}} \left\{ |\nabla \xi_k^h|^2 + B_{\varepsilon_k}(\xi_k^h) \right\} dx + \mathscr{F}_k(\xi, B_{r_0}) \\ &\leq \left(\frac{\Lambda}{2} + 1 \right) \Bigg\{ C_0 |B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}| + 4 \int_{B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}} |\nabla u_{\varepsilon_k} - \nabla u_0|^2 \, dx \\ &\qquad + \frac{2}{h} \int_{B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}} |u_{\varepsilon_k} - u_0|^2 \, dx \Bigg\} + \mathscr{F}(\xi, B_{r_0}). \end{aligned}$$

Como $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ localmente uniforme em Ω e $\nabla u_{\varepsilon_k} \to \nabla u_0$ em $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, obtemos

$$\mathcal{J}^k_{r_0+h,h} \leq C r^{N-1} h + o_k(1) + \mathscr{F}(\xi, B_{r_0}),$$

onde $o_k(1)$ significa $o(1)$ com respeito a k. Aplicando [20, Teorema 4.1] com $\Omega' = B_{r_0}$, temos, para $h >> \varepsilon_k$,

$$\int_{B_{r_0}} \chi_{\{u_0>0\}}\, dx \leq |\Omega_0 \cap B_{r_0}| \leq \overline{C} h r_0^{N-1}$$

e, desde que $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1(B_{r_0})$,

$$\int_{B_{r_0}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{B_{r_0}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\, dx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(u_0, B_{r_0}) &= \int_{B_{r_0}} \left\{ \frac{1}{2}\left\langle a^{ij}(x)\nabla u_0, \nabla u_0\right\rangle + \chi_{\{\xi>0\}} \right\} dx \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{B_{r_0}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\, dx + \overline{C} h r_0^{N-1} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_{B_{r_0}} \langle a^{ij}(x)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\, dx + \int_{B_{r_0}} B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})\, dx \right) + \overline{C} h r_0^{N-1} \\
&= \liminf_{k\to\infty} \mathscr{F}_k(u_{\varepsilon_k}, B_{r_0}) + \overline{C} h r_0^{N-1}.
\end{aligned}$$

Além disso, como u_k é um minimizante de $\mathscr{F}_k$, temos

$$\mathcal{J}^k_{r_0+h,h} \geq \mathcal{J}^k_{r_0,h} \geq \mathscr{F}_k(u_{\varepsilon_k}, B_{r_0}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(u_0, B_{r_0}) &\leq \liminf_{k\to\infty} \mathscr{F}_k(u_{\varepsilon_k}, B_{r_0}) + C h r_0^{N-1} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{J}^k_{r_0+h,h} + C h r_0^{N-1} \\
&\leq \left(C + \overline{C}\right) h r_0^{N-1} + \mathscr{F}(\xi, B_{r_0}).
\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$, o resultado segue. $\square$

2.4 Crescimento Linear

Para finalizar este capítulo, apresentaremos um resultado que nos dá uma limitação inferior para o crescimento da função u_ε longe do conjunto de nível $\{u_\varepsilon = \varepsilon\}$.

Teorema 2.4.1 (Crescimento Linear). *Seja $\Omega' \Subset \Omega$ um subdomínio, e seja $x_0 \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon \geq \varepsilon\}$. Então,*

$$u_\varepsilon(x_0) \geq C \cdot \operatorname{dist}(x_0, \partial\{u_\varepsilon \geq \varepsilon\}), \tag{2.33}$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende da dimensão e constantes de elipticidade, mas não depende de ε.

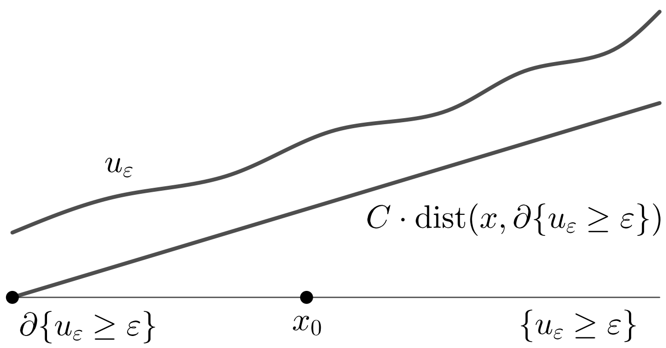

Figura 2.1: Crescimento Linear

Demonstração. Denote $\rho = \operatorname{dist}(x_0, \partial\{u_\varepsilon \geq \varepsilon\})$ e escreva $u_\varepsilon(x_0) = \alpha\rho$, para algum $\alpha > 0$. Além disso, defina $v : B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \frac{u_\varepsilon(x_0 + \rho x)}{\rho}.$$

Observe que, para todo $x \in B_1$,

$$|(x_0 + \rho x) - x_0| = \rho|x| < \rho.$$

Assim, $x_0 + \rho x \in \{u_\varepsilon \geq \varepsilon\}$. Consequentemente, como supp $\beta_\varepsilon \subset [0, \varepsilon]$ e u_ε satisfaz (2.1), temos que

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla v) = 0, \qquad \text{em } B_1.$$

Desse modo, pela desigualdade de Harnack, existe uma constante M, independente de ε, tal que

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq M \inf_{B_{1/2}} v.$$

Em particular, como $v(0) = \alpha$, temos

$$\underline{M}\alpha \leq v(x) \leq M\alpha, \tag{2.34}$$

para todo $x \in B_{1/2}$, onde $\underline{M} = 1/M$. Agora, considere uma função suave ψ satisfazendo

$$0 < \psi < 1, \qquad \psi = 0 \text{ em } B_{1/8} \qquad \text{e} \qquad \psi = 1 \text{ em } B_1 \setminus B_{1/2}.$$

Com isso, defina $g : B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \min\{v, M\alpha\psi\}, & \text{em } \ B_{1/2} \\ v(x), & \text{em } \ B_1 \setminus B_{1/2}. \end{cases}$$

Devido à desigualdade (2.34) e ao fato que $\psi = 1$ em $B_1 \setminus B_{1/2}$, podemos observar que $g = v$ em $\partial B_{1/2}$. Vamos mostrar que, como consequência da minimalidade de u_ε, temos

$$\int_{B_1} \frac{1}{2} \big(\langle a^{ij}(x_0 + \rho x)\nabla g(x), \nabla g(x)\rangle - \langle a^{ij}(x_0 + \rho x)\nabla v(x), \nabla v(x)\rangle\big)\, dx$$
$$\geq \int_{B_1} (B_\varepsilon(\rho v) - B_\varepsilon(\rho g))\, dx. \tag{2.35}$$

Primeiramente, note que, fazendo a mudança de variável $y = x_0 + \rho x$, temos

$$\int_{B_1} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x_0 + \rho x) \nabla v, \nabla v \rangle + B_\varepsilon(\rho v) \right\} dx$$
$$= \int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle a^{ij}(y) \nabla v \left(\frac{y - x_0}{\rho} \right), \nabla v \left(\frac{y - x_0}{\rho} \right) \right\rangle + B_\varepsilon \left(\rho v \left(\frac{y - x_0}{\rho} \right) \right) \right\} \frac{1}{\rho^N}\, dy.$$

Observando que

$$\nabla v(x) = \nabla u_\varepsilon(x_0 + \rho x), \qquad \forall x \in B_1,$$

e

$$\rho v \left(\frac{y - x_0}{\rho} \right) = u_\varepsilon(y), \qquad \forall y \in B_\rho(x_0),$$

temos

$$\int_{B_1} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x_0 + \rho x) \nabla v, \nabla v \rangle + B_\varepsilon(\rho v) \right\} dx$$
$$= \int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(y) \nabla u_\varepsilon(y), \nabla u_\varepsilon(y) \rangle + B_\varepsilon(u_\varepsilon) \right\} \frac{1}{\rho^N}\, dy. \tag{2.36}$$

Por outro lado, seja $\tilde{g} : B_\rho(x_0) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{g}(y) = \rho g \left(\frac{y - x_0}{\rho} \right),$$

de modo que $\tilde{g} = u_\varepsilon$ em $\partial B_\rho(x_0)$. Considerando $h : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x), & \text{em } B_\rho(x_0) \\ u_\varepsilon(x), & \text{em } \Omega \setminus B_\rho(x_0), \end{cases}$$

observa-se que h está bem definida e pertence a $H^1_\varphi(\Omega)$ (veja o Lema A.0.3). Desse modo, como u_ε é um mínimo do funcional $\mathscr{F}_\varepsilon$ sobre o conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$, temos que $\mathscr{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathscr{F}_\varepsilon(h)$, ou seja,

$$\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon \rangle + B_\varepsilon(u_\varepsilon) \right\} dx \leq \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla h, \nabla h \rangle + B_\varepsilon(h) \right\} dx.$$

Consequentemente, desde que $h = u_\varepsilon$ em $\Omega \setminus B_\rho(x_0)$, obtemos

$$\int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon \rangle + B_\varepsilon(u_\varepsilon) \right\} dx \leq \int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla h, \nabla h \rangle + B_\varepsilon(h) \right\} dx,$$

de onde segue

$$\int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(y) \nabla u_\varepsilon(y), \nabla u_\varepsilon(y) \rangle + B_\varepsilon(u_\varepsilon) \right\} \frac{1}{\rho^N}\, dy$$
$$\leq \int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(y) \nabla h(y), \nabla h(y) \rangle + B_\varepsilon(h) \right\} \frac{1}{\rho^N}\, dy$$
$$= \int_{B_1} \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x_0 + \rho x) \nabla g(x), \nabla g(x) \rangle + B_\varepsilon(\rho g) \right\} dx. \tag{2.37}$$

Portanto, combinando (2.36) e (2.37), obtemos (2.35), como queríamos. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} \frac{1}{2}\left(\langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla g(x), \nabla g(x)\rangle - \langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla v(x), \nabla v(x)\rangle\right) dx \\
&= \int_{B_{1/2}\cap\{M\alpha\psi\leq v\}} \frac{1}{2}\left(\langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla g(x), \nabla g(x)\rangle - \langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla v(x), \nabla v(x)\rangle\right) dx \\
&= \int_{B_{1/2}\cap\{M\alpha\psi\leq v\}} \frac{1}{2}\left(M^2\alpha^2\langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla \psi, \nabla \psi\rangle - \langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla v, \nabla v\rangle\right) dx \\
&\leq \int_{B_{1/2}\cap\{M\alpha\psi\leq v\}} \frac{1}{2}M^2\alpha^2\langle a^{ij}(x_0+\rho x)\nabla \psi, \nabla \psi\rangle \; dx \\
&\leq \frac{1}{2}M^2\alpha^2\Lambda\|\nabla\psi\|^2_{L^2(B_1)}. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $v \geq g$ e B_ε é não decrescente, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} (B_\varepsilon(\rho v) - B_\varepsilon(\rho g))\, dx &\geq \int_{B_{1/8}} (B_\varepsilon(\rho v) - B_\varepsilon(\rho g))\, dx \\
&= \int_{B_{1/8}} B_\varepsilon(\rho v)\; dx \\
&\geq |B_{1/8}|B_\varepsilon(\rho \underline{M}\alpha) \\
&= |B_{1/8}|B_\varepsilon(\underline{M}u_\varepsilon(x_0)) \\
&\geq |B_{1/8}|B_\varepsilon(\underline{M}\varepsilon) \\
&= |B_{1/8}|B_1(\underline{M}). \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Portanto, combinando as desigualdades (2.35), (2.38) e (2.39), concluímos que $\alpha \geq C$ para alguma constante $C > 0$ que não depende de ε. Disto, segue o resultado. $\square$

Capítulo 3

Regularidade Lipschitz

Neste capítulo, nosso objetivo é obter uma melhor regularidade, tanto para limites uniformes de soluções da equação (2.1) quanto para minimizantes do funcional (1). Pela teoria de De Giorgi, sabemos que tais funções são apenas localmente Hölder contínuas, longe da fronteira livre. Nesse contexto, o trabalho [9] busca estabelecer regularidade Lipschitz ao longo da fronteira livre.

3.1 Regularidade Lipschitz ao Longo da Fronteira Livre

Esta seção é dedicada à demonstração do teorema apresentado a seguir. Destacamos que os argumentos utilizados em sua prova baseiam-se apenas na equação satisfeita pelos minimizantes locais, o que permite sua aplicação em outros contextos, sejam eles variacionais ou não variacionais.

Teorema 3.1.1 (Regularidade Lipschitz). *Seja u_0 um limite uniforme de soluções da equação*

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon) = \beta(u_\varepsilon) \qquad \text{em } \Omega,$$

e assuma que $u_0(\xi) = 0$. Então, existe uma constante universal $C > 0$, dependendo apenas da dimensão, constantes de elipticidade, $\operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega)$ e cotas L^∞ da família de soluções, tal que

$$|u_0(x)| \leq C|x - \xi|,$$

para todo $x \in \Omega$.

A prova do Teorema 3.1.1 baseia-se essencialmente no seguinte lema:

Lema 3.1.2. *Seja $B_r(y) \Subset \Omega$ uma bola fixada. Dado $\theta > 0$, existe $\delta > 0$, dependendo apenas de $B_r(y)$, da dimensão e constantes de elipticidade, com a seguinte propriedade: se*

$$\operatorname{div}(a^{ij}(x)\nabla u) = \delta \cdot \beta_\varepsilon(u) \qquad \text{e} \qquad \max\left\{\varepsilon, \inf_{B_r(y)} u\right\} \leq \delta,$$

então

$$\sup_{B_{r/2}(y)} u \leq \theta.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema é falso. Então, é possível obter uma sequência de funções $\{u_k\}$ satisfazendo

(*i*) $$\operatorname{div}\left(a_k^{ij}(x)\nabla u_k\right) = \delta_k \cdot \beta_{\varepsilon_k}(u_k) \qquad \text{em } \Omega,$$

onde (a_k^{ij}) é um matriz com constantes de elipticidade (λ, Λ) e $\delta_k = o(1)$ quando $k \to \infty$;

(*ii*) $$\max\left\{\varepsilon_k, \inf_{B_r(y)} u_k\right\} =: \eta_k = o(1) \qquad \text{quando } k \to \infty,$$

mas
$$\sup_{B_{r/2}(y)} u_k \geq \theta_0 > 0, \tag{3.1}$$
para algum $\theta_0 > 0$ fixado. Seja x_k um ponto onde u_k atinge seu valor mínimo em $B_{r/2}(y)$, e denote
$$\sigma := \operatorname{dist}(B_r(y), \partial\Omega) > 0.$$
Defina também a função $v_k : B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}} \to \mathbb{R}$ por
$$v_k(x) := \frac{u_k(x_k + \varepsilon_k x)}{\eta_k}.$$
Observe que v_k resolve, no sentido de distribuições, a equação
$$\operatorname{div}\left(a_k^{ij}(x_k + \varepsilon_k x)\nabla v_k\right) = \delta_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\beta\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon_k}v_k\right)\right) \qquad \text{em } B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}}. \tag{3.2}$$
De fato, seja $\phi \in C_0^\infty(B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}})$. Note que
$$\int_{B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}}} \langle a_k^{ij}(x_k + \varepsilon_k x)\nabla v_k, \nabla\phi\rangle dx = \frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\int_{B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}}} \langle a_k^{ij}(x_k + \varepsilon_k x)\nabla u_k(x_k + \varepsilon_k x), \nabla\phi\rangle dx.$$
Fazendo a mudança de variável $y = x_k + \varepsilon_k x$, obtemos
$$\int_{B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}}} \langle a_k^{ij}(x_k + \varepsilon_k x)\nabla v_k, \nabla\phi\rangle dx = \frac{\varepsilon_k^{1-N}}{\eta_k}\int_{B_\sigma(x_k)} \left\langle a_k^{ij}(y)\nabla u_k, \nabla\phi\left(\frac{y - x_k}{\varepsilon_k}\right)\right\rangle dy.$$
Considerando
$$\tilde{\phi}(y) := \phi\left(\frac{y - x_k}{\varepsilon_k}\right),$$
temos
$$\nabla\tilde{\phi}(y) = \frac{1}{\varepsilon_k}\nabla\phi\left(\frac{y - x_k}{\varepsilon_k}\right)$$
e, consequentemente,
$$\begin{aligned}
\int_{B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}}} \langle a_k^{ij}(x_k + \varepsilon_k x)\nabla v_k, \nabla\phi\rangle\, dx &= \frac{\varepsilon_k^{2-N}}{\eta_k}\int_{B_\sigma(x_k)} \left\langle a_k^{ij}(y)\nabla u_k(y), \nabla\tilde{\phi}(y)\right\rangle dy \\
&= -\frac{\varepsilon_k^{2-N}}{\eta_k}\int_{B_\sigma(x_k)} \delta_k\beta_{\varepsilon_k}(u_k)\tilde{\phi}\, dy \\
&= -\frac{\varepsilon_k^{2-N}}{\eta_k}\int_{B_\sigma(x_k)} \delta_k\beta_{\varepsilon_k}(u_k)\phi\left(\frac{y - x_k}{\varepsilon_k}\right)\, dy.
\end{aligned}$$

Retornando para a varável original, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}}} \langle a_k^{ij}(x_k+\varepsilon_k x)\nabla v_k, \nabla\phi\rangle \, dx &= -\frac{\varepsilon_k^2}{\eta_k}\int_{B_{\sigma\varepsilon^{-1}}} \delta_k\beta_{\varepsilon_k}(u_k(x_k+\varepsilon_k x))\phi(x)\, dx \\ &= -\frac{\varepsilon_k^2}{\eta_k}\int_{B_{\sigma\varepsilon^{-1}}} \delta_k\beta_{\varepsilon_k}(\eta_k v_k(x))\phi(x)\, dx \\ &= -\int_{B_{\sigma\varepsilon^{-1}}} \delta_k\frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\beta\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon_k}v_k(x)\right)\phi(x)\, dx,\end{aligned}$$

como queríamos. Agora, vamos mostrar que existe uma função v_∞ definida em todo o espaço $\mathbb{R}^N$ tal que, para todo subconjunto aberto e limitado $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$, é possível obter uma sequência $\{v_k\}$ para a qual vale as seguintes convergências:

$$v_k \to v_\infty \qquad \text{uniforme em } \Omega', \tag{3.3}$$

$$v_k \rightharpoonup v_\infty \qquad \text{fracamente em } H^1(\Omega'), \tag{3.4}$$

$$\nabla v_k(x) \to \nabla v_\infty(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Omega'. \tag{3.5}$$

Para tanto, seja $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$ um tal subconjunto. Como

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}} = \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}} \subset B_{\sigma\varepsilon_{k+1}^{-1}} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Omega' \subset B_{\sigma\varepsilon_{k_0}^{-1}} \qquad \text{e} \qquad B_{\sigma\varepsilon_{k_0}^{-1}} \subset B_{\sigma\varepsilon_k^{-1}} \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Sendo assim, considere a subsequência $\{v_k\}$ para $k \geq k_0$. Uma vez que, para $k \geq k_0$, v_k resolve a equação

$$\operatorname{div}\left(a_k^{ij}(x_k+\varepsilon_k x)\nabla v_k\right) = \delta_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\beta\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon_k}v_k\right)\right) \qquad \text{em } \Omega' \tag{3.6}$$

e

$$\delta_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\beta\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon_k}v_k\right)\right) = o(1) \qquad \text{quando } k \to \infty, \tag{3.7}$$

podemos aplicar o Teorema 1.6.2 para obter uma constante $C > 0$ tal que

$$\|v_k\|_{C^\alpha(\Omega')} \leq C, \tag{3.8}$$

para algum $0 < \alpha < 1$. Consequentemente, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{v_k\}$, e $v_\infty \in C(\Omega')$ com

$$v_k \to v_\infty \qquad \text{uniformemente em } B_{\sigma\varepsilon_{k_0}^{-1}}.$$

Isto verifica (3.3). Observe que (3.8) também implica que $\{v_k\}$ é limitada em Ω'. Consequentemente, pela Desigualdade de Caccioppoli (Teorema 1.7.1), obtemos que

$\{\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega')}\}$ é limitada. Assim, $\{v_k\}$ é limitada em $H^1(\Omega')$. Como $H^1(\Omega')$ é reflexivo, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{v_k\}$, tal que

$$v_k \rightharpoonup v_\infty \qquad \text{em } H^1(\Omega').$$

Em particular, por [5, Teorema 2.1], temos também que

$$\nabla v_k(x) \to \nabla v_\infty(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Omega'.$$

Com isso, estão verificadas as convergências (3.4) e (3.5). Ademais, considerando a elipticidade das matrizes (a_k^{ij}), podemos utilizar o Lema A.0.7 para obter uma subsequência, ainda denotada por (a_k^{ij}), e uma matriz (λ, Λ)-elíptica (b^{ij}) tais que

$$(a_k^{ij}) \rightharpoonup (b^{ij}) \qquad \text{fracamente em } \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega'). \tag{3.9}$$

Agora, com o intuito de chegar em uma contradição, iremos mostrar que

$$\operatorname{div}(b^{ij}(x)\nabla v_\infty) = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Para tanto, seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e considere $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\sigma\varepsilon_{k_0}} \supset \operatorname{supp}\phi := K$. Para $k \geq k_0$, defina as integrais

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_k^1 &:= \int_K \langle a_k^{ij}(x)\nabla v_k, \nabla\phi\rangle\, dx,\\
\mathscr{I}_k^2 &:= \int_K \langle a_k^{ij}(x)(\nabla v_\infty - \nabla v_k), \nabla\phi\rangle\, dx,\\
\mathscr{I}_k^3 &:= \int_K \langle (b^{ij} - a_k^{ij})(x)\nabla v_\infty, \nabla\phi\rangle\, dx,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle b^{ij}(x)\nabla v_\infty, \nabla\phi\rangle\, dx = \mathscr{I}_k^1 + \mathscr{I}_k^2 + \mathscr{I}_k^3. \tag{3.10}$$

Devemos mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{I}_k^1 + \mathscr{I}_k^2 + \mathscr{I}_k^3 = 0.$$

De (3.2), temos

$$|\mathscr{I}_k^1| = \left| -\delta_k \int_K \frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\beta\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon_k}v_k\right)\phi\, dx \right| \leq \delta_k \frac{\varepsilon_k}{\eta_k}|K| \max_{\mathbb{R}} \beta \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Como $\varepsilon_k \leq \eta_k$ e $\delta_k = o(1)$ quando $k \to \infty$, isto imediatamente implica que

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{I}_k^1 = 0.$$

Para verificar que

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{I}_k^3 = 0, \tag{3.11}$$

observe que

$$\psi\left((c^{ij})\right) := \int_K \langle c^{ij}(x)\nabla v_\infty, \nabla\phi\rangle\, dx$$

define um funcional linear contínuo em $\mathcal{M}(\Omega)$. Desse modo, desde que $(a_k^{ij}) \rightharpoonup (b^{ij})$ fracamente em $\mathcal{M}(\Omega)$, obtemos (3.11). Resta, então, analisar a convergência de $\mathscr{I}_k^2$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\nabla\phi \in L^2(K)$, o Teorema de Vitali garante a existência de um número $\delta > 0$ tal que, para todo subconjunto mensurável $E \subset K$ com $|E| < \delta$, tem-se

$$\left(\int_E |\nabla\phi|^2 \, dx\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2\Lambda \sup\limits_k \|\nabla v_k - \nabla v_\infty\|_{L^2(K)}}.$$

Além disso, devido a (3.5), o Teorema de Egoroff implica que existe um subconjunto mensurável $\tilde{K} \subset K$, com $|\tilde{K}| < \delta$, tal que

$$\nabla v_k \to \nabla v_\infty \qquad \text{uniformemente em } K \setminus \tilde{K}.$$

Consequentemente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in K\setminus\tilde{K}} |\nabla v_k(x) - \nabla v_\infty(x)| < \frac{\varepsilon}{2\Lambda \|\nabla\phi\|_{L^2(K)}|K|},$$

para todo $k \geq k_0$. Com isso, para $k \geq k_0$, temos

$$\begin{aligned}
|\mathscr{I}_k^2| &= \left|\int_K \langle a_k^{ij}(x)(\nabla v_\infty - \nabla v_k), \nabla\phi\rangle \, dx\right| \\
&\leq \int_K |a_k^{ij}||\nabla v_\infty - \nabla v_k||\nabla\phi| \, dx \\
&\leq \Lambda \left[\int_{\tilde{K}} |\nabla v_\infty - \nabla v_k||\nabla\phi| \, dx + \int_{K\setminus\tilde{K}} |\nabla v_\infty - \nabla v_k||\nabla\phi| \, dx\right] \\
&< \Lambda \left[\|\nabla v_\infty - \nabla v_k\|_{L^2(\tilde{K})}\|\nabla\phi\|_{L^2(\tilde{K})} + \frac{\varepsilon}{2\Lambda\|\nabla\phi\|_{L^2(K)}|K|}\int_{K\setminus\tilde{K}} |\nabla\phi| \, dx\right] \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{I}_k^3 = 0.$$

Portanto, fazendo $k \to \infty$ em(3.10), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle b^{ij}(x)\nabla v_\infty, \nabla\phi\rangle \, dx = 0,$$

de onde segue que

$$\operatorname{div}(b^{ij}(x)\nabla v_\infty) = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Uma vez que v_∞ é limitada inferiormente por 0, aplicando o Teorema de Liouville (ver [16, Corolário 4.20]), concluímos que v_∞ é constante em $\mathbb{R}^N$, digamos

$$v_\infty \equiv C \qquad \text{em } \ \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente, como $v_k \to v_\infty$ localmente uniforme em $\mathbb{R}^N$ e $\eta_k = o(1)$ quando $k \to \infty$, temos que

$$\eta_k v_k(x) \to 0 \qquad \text{quando } k \to \infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por outro lado,

$$\eta_k v_k(0) = u_k(x_k) \geq \theta_0 > 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, fazendo $k \to \infty$, chegamos a uma contradição. $\square$

Tendo em vista o Lema 3.1.2, estamos aptos a demonstrar o Teorema 3.1.1.

Demonstração do Teorema 3.1.1. Inicialmente, observe que podemos assumir $\xi = 0$. De fato, suponha que vale o teorema neste caso. Então, para $\tilde{\xi} \in \Omega$ com $u_0(\tilde{\xi}) = 0$, defina a função

$$\tilde{u}_0(y) := u_0(\tilde{\xi} - y), \qquad \forall y \in \tilde{\Omega} := \{y \in \mathbb{R}^N \mid \tilde{\xi} - y \in \Omega\},$$

de modo que

$$\tilde{u}_0(0) = u_0(\tilde{\xi}) = 0.$$

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\tilde{u}_0(y)| \leq C|y|,$$

para todo $y \in \tilde{\Omega}$. Consequentemente,

$$|u_0(x)| = |\tilde{u}_0(\tilde{\xi} - x)| \leq C|\tilde{\xi} - x|,$$

para todo $x \in \Omega$, o que verifica nossa afirmação. Observe também que, se u_ε é uma solução de (2.1) e $\delta > 0$ é um número fixado, então, procedendo da mesma forma que no Lema 3.1.2, mostra-se que a função

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(\sqrt{\delta}x)$$

satisfaz a equação

$$\operatorname{div}\left(\tilde{a}^{ij}(x)\nabla\tilde{u}_\varepsilon\right) = \delta\beta_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon),$$

onde $\tilde{a}^{ij}(x) := a^{ij}(\sqrt{\delta}x)$ é uma outra matriz $(\lambda, \Lambda)-$elíptica. Escolhendo $\theta = 1/2$ no Lema 3.1.2, considere o número $\delta_\star > 0$ com a propriedade demonstrada nesse mesmo lema. De modo análogo ao que verificamos inicialmente, podemos assumir que $B_{\sqrt{\delta_\star}} \Subset \Omega$. Dessa forma, para cada $\varepsilon > 0$, a função $\tilde{u}_\varepsilon : B_1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(\sqrt{\delta_\star}x)$$

está bem definida e satisfaz a equação

$$\operatorname{div}\left(\tilde{a}^{ij}(x)\nabla\tilde{u}_\varepsilon\right) = \delta_\star\beta_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon),$$

onde $\tilde{a}^{ij}(x) := a^{ij}(\sqrt{\delta_\star}x)$. Além disso, como $u_\varepsilon(0) \to u_0(0) = 0$ quando $\varepsilon \to 0$, temos que

$$\max\left\{\varepsilon, \inf_{B_1}\tilde{u}_\varepsilon\right\} \leq \delta_\star,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim, pelo Lema 3.1.2, devemos ter

$$\sup_{B_{1/2}} \tilde{u}_\varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\sup_{B_{\sqrt{\delta_\star}/2}} u_\varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Consequentemente, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\sup_{B_{\sqrt{\delta_\star}/2}} u_0 \leq \frac{1}{2}.$$

Agora, defina a função

$$v_\varepsilon^1(x) := 2u_\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\delta_\star}}{2}x\right)$$

Novamente, de maneira análoga ao que demonstramos no Lema 3.1.2, verifica-se que v^1 satisfaz a equação

$$\operatorname{div}\left(a_1^{ij}(x)\nabla v_\varepsilon^1\right) = \delta_\star \beta_{2\varepsilon}(v_\varepsilon^1),$$

onde $a_1^{ij}(x) := a_{ij}(\sqrt{\delta_\star}x/2)$ é uma outra matriz $(\lambda, \Lambda)-$elíptica. Como $v_\varepsilon^1(0) \to u_0(0) = 0$ quando $\varepsilon \to 0$, temos que

$$\max\left\{\varepsilon, \inf_{B_1} v_\varepsilon^1\right\} \leq \delta_\star,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Com isso, pelo Lema 3.1.2, obtemos

$$\sup_{B_{1/2}} v_\varepsilon^1 \leq \frac{1}{2},$$

o que implica em

$$\sup_{B_{\sqrt{\delta_\star}/4}} u_\varepsilon \leq \frac{1}{4}.$$

Passando ao limite quando $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\sup_{B_{\sqrt{\delta_\star}/4}} u_0 \leq \frac{1}{4}.$$

Continuando esse processo indutivamente, obtemos

$$\sup_{B_{\sqrt{\delta_\star}/2^k}} u_0 \leq \frac{1}{2^k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, dado $x \in B_{\sqrt{\delta_\star}/2}$, considere $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\sqrt{\delta_\star}}{2^{k+1}} < |x| \leq \frac{\sqrt{\delta_\star}}{2^k}.$$

Assim,

$$u_0(x) \leq \sup_{B_{\sqrt{\delta_\star}/2^k}} u_0 \leq \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^{k+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{\delta_\star}}|x|.$$

E, para $x \in \Omega \setminus B_{\sqrt{\delta_\star}/2}$, basta notar que

$$u_0(x) \leq C = C\frac{|x|}{|x|} \leq \frac{2C}{\sqrt{\delta_\star}}|x|.$$

Isto implica o resultado do teorema. □

Por razões já discutidas anteriormente, a estimativa de regularidade garantida pelo Teorema 3.1.1 vale apenas ao longo da fronteira livre. De fato, para qualquer ponto $z \in \{u_0 > 0\}$, a regularidade cai para $C^{0,\alpha}$, com algum $\alpha > 0$ estritamente menor que 1. Nesse contexto, é natural questionar quais são as condições mínimas necessárias para garantir regularidade Lipschitz até a fronteira livre. Uma hipótese que assegura isso é que a matriz (a^{ij}) satisfaça a Propriedade (K-Lip).

Definição 3.1.3. *Seja $K > 0$ uma constante. Dizemos que uma matriz uniformemente elíptica (a^{ij}) satisfaz a **Propriedade (K-Lip)** quando, para quaisquer $0 < d < 1$ e qualquer $h \in H^1(B_d)$ resolvendo*

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla h\right) = 0 \qquad \text{em } B_d,$$

no sentido de distribuições, vale

$$\|\nabla h\|_{L^\infty(B_{d/2})} \leq \frac{K}{d}\|h\|_{L^\infty(B_d)}.$$

Corolário 3.1.4. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1.1, assuma também que (a^{ij}) satisfaz a propriedade (K-Lip) para algum $K > 0$. Então, dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, tem-se que*

$$|\nabla u_0(x)| \leq C, \qquad \forall x \in \Omega',$$

para uma constante $C > 0$ que depende apenas da dimensão, constantes de elipticidade, $\operatorname{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega)$, *$K$ e das cotas L^∞ da família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \Omega'$ um ponto que não pertence à fronteira livre $\partial\{u_0 > 0\}$, e considere $y \in \partial\{u_0 > 0\}$ tal que

$$|y - \xi| =: d = \operatorname{dist}\left(\xi, \partial\{u_0 > 0\}\right).$$

Pelo Teorema 3.1.1, podemos estimar

$$\sup_{B_d(\xi)} u_0 \leq \sup_{B_{2d}(y)} u_0 \leq C \sup_{B_{2d}(y)} |x - y| \leq C \cdot 2d.$$

Como u_0 satisfaz

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla u_0\right) = 0 \qquad \text{em } B_d(\xi),$$

segue da propriedade (K-Lip) que

$$|\nabla u_0(\xi)| \leq \|\nabla u_0\|_{L^\infty(B_{d/2}(\xi))} \leq \frac{K}{d}\|u_0\|_{L^\infty(B_d(\xi))} \leq \frac{K}{d}C \cdot 2d = 2KC.$$

□

3.2 Estimativas Lipschitz para o Problema de Minimização

Na seção anterior, obtivemos a estimativa desejada para a função limite u_0 a partir de argumentos baseados na equação satisfeita pelos minimizantes u_ε. Entretanto, como já mencionado anteriormente, tal estimativa também pode ser obtida para qualquer mínimo do funcional (1). Neste contexto, é importante compreender como essa outra abordagem pode ser realizada, e esse será o principal objetivo desta seção. Especificamente, demonstraremos o resultado apresentado a seguir.

Teorema 3.2.1. *Seja $u_0 \geq 0$ um mínimo para o funcional*

$$\mathscr{F}(u) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla u, \nabla u \rangle + \chi_{\{u>0\}} \right\} dx,$$

sobre o conjunto $H^1_\varphi(\Omega)$, e assuma que $u_0(\xi) = 0$ para algum $\xi \in \Omega$. Então, existe uma constante universal $C > 0$, dependendo da dimensão, constantes de elipticidade, $\mathrm{dist}(\xi, \partial\Omega)$ *e norma L^∞ de u_0, tal que*

$$u_0(x) \leq C|x - \xi|,$$

para todo ponto $x \in \Omega$.

Similarmente à abordagem utilizada na seção anterior, precisamos nos valer de um resultado análogo ao Lema 3.1.2.

Lema 3.2.2. *Fixada uma bola $B_r(y) \Subset \Omega$ e dado $\theta > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, se u_0 é um mínimo não negativo de*

$$\mathscr{F}^\delta(u) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla u, \nabla u \rangle + \delta \cdot \chi_{\{u>0\}} \right\} dx$$

sobre $H^1_\varphi(\Omega)$ e $u_0(y) = 0$, então

$$\sup_{B_{r/2}(y)} u_0 \leq \theta.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema é falso. Então, é possível obter uma sequência de matrizes (λ, Λ)-elípticas (a^{ij}_k), uma sequência de números positivos δ_k com $\delta_k = o(1)$ quando $k \to \infty$, e uma sequência de minimizantes u_k para

$$\mathscr{F}^k(u) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \langle a^{ij}(x) \nabla u, \nabla u \rangle + \delta_k \cdot \chi_{\{u>0\}} \right\} dx$$

de modo que

$$\sup_{B_{r/2}(y)} u_k \geq \theta_0, \tag{3.12}$$

para algum $\theta_0 > 0$ fixado. Pela teoria de De Giorgi, a sequência $\{u_k\}$ é localmente uniformemente limitada na norma C^α para algum $0 < \alpha < 1$. Desse modo, por Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência $\{u_k\}$ e uma função $u_0 \in C(\Omega)$ com

$$u_k \to u_0 \qquad \text{localmente uniforme em } \Omega.$$

Observe que a sequência $\{\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}\}$ é limitada. De fato, considere uma função $w \in H^1_\varphi(\Omega)$ fixada. Como u_k é um mínimo de $\mathscr{F}^k$, temos

$$\mathscr{F}^k(u_k) \leq \mathscr{F}(w),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, pela condição de elipticidade, temos

$$\mathscr{F}^k(u_k) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u_k, \nabla u_k\rangle + \delta_k \cdot \chi_{\{u_k>0\}} \right\} dx \geq \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e, por outro lado,

$$\mathscr{F}^k(w) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla w, \nabla w\rangle + \delta_k \cdot \chi_{\{w>0\}} \right\} dx \leq \frac{\Lambda}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta_k|\Omega|.$$

Assim, desde que $\delta_k \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \limsup_{k\to\infty} \mathscr{F}^k(u_k) &\leq \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\Lambda}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta_k|\Omega|\right)\\ &= \frac{\Lambda}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

o que verifica que a sequência $\{\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}\}$ é limitada. Consequentemente, pela reflexividade de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, obtemos uma subsequência $\{u_k\}$ satisfazendo

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u_0 \qquad \text{fracamente em } L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Mostraremos que u_0 é um Λ/λ-mínimo do funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Para isso, seja $v \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ com $K = \operatorname{supp}(u - v) \Subset \Omega$. Pela minimalidade de u_k, podemos obter

$$\begin{aligned}&\int_K \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla u_k, \nabla u_k\rangle + \delta_k \cdot \chi_{\{u_k>0\}} \right\} dx\\ &\qquad\qquad \leq \int_K \left\{ \frac{1}{2}\langle a^{ij}(x)\nabla v, \nabla v\rangle + \delta_k \cdot \chi_{\{v>0\}} \right\} dx.\end{aligned}$$

Consequentemente, por elipticidade, temos

$$\int_K \left\{ \frac{\lambda}{2}|\nabla u_k|^2 + \delta_k \cdot \chi_{\{u_k>0\}} \right\} dx \leq \int_K \left\{ \frac{\Lambda}{2}|\nabla v|^2 + \delta_k \cdot \chi_{\{v>0\}} \right\} dx.$$

Portanto, usando a semicontinuidade inferior do funcional

$$u \in H^1(\Omega) \longmapsto \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \in \mathbb{R}$$

e o fato que $\delta_k = o(1)$ quando $k \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_K \frac{\lambda}{2}|\nabla u_0|^2\, dx &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_K \left\{ \frac{\lambda}{2}|\nabla u_k|^2 + \delta_k \cdot \chi_{\{u_k>0\}} \right\} dx \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_K \left\{ \frac{\Lambda}{2}|\nabla v|^2 + \delta_k \cdot \chi_{\{v>0\}} \right\} dx \\
&= \int_K \frac{\Lambda}{2}|\nabla v|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Isto implica em

$$\mathcal{F}(u) \leq \frac{\Lambda}{\lambda}\mathcal{F}(v),$$

o que demonstra que u é um Λ/λ-mínimo de $\mathcal{F}$. Logo, desde que $u_0 \geq 0$ e

$$u_0(y) = \lim_{k\to\infty} u_k(y) = 0,$$

segue do Princípio do Máximo Forte que u_0 é constante igual a zero em Ω, o que contradiz (3.12). $\square$

Estando demonstrado o Lema 3.2.2, o Teorema 3.2.1 é obtido a partir dos mesmos argumentos utilizados no final da demonstração do Teorema 3.1.1.

3.3 Estimativas Geométricas da Fronteira Livre

Nesta seção final, mostraremos como a estimativa obtida no Teorema 3.1.1 implica em propriedades geométricas da fronteira livre da função limite u_0. Para isso, será necessário utilizar um resultado de não degenerescência, estabelecido no teorema a seguir.

Teorema 3.3.1 (Não Degenerescência). *Seja $\Omega' \Subset \Omega$ um subdomínio dado, e seja $y \in \Omega' \cap \overline{\{u_0 > 0\}}$. Então,*

$$\sup_{B_r(y)} u_0 \geq C \cdot r,$$

para $r < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$, seja

$$d_\varepsilon(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\{u_\varepsilon \geq \varepsilon\}).$$

Afirmamos que existe uma constante universal $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup_{B_{d_\varepsilon(x)}(x)} u_\varepsilon \geq (1+\delta_0)u_\varepsilon(x), \tag{3.13}$$

para $x \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon \geq 2\varepsilon\}$. Suponha que a afirmação não é verdadeira. Então, podemos obter uma sequência de funções u_{ε_k}, uma sequência de pontos $x_k \in \Omega' \cap \{u_{\varepsilon_k} \geq 2\varepsilon_k\}$

e uma sequência de números positivos δ_k, com $\delta_k = o(1)$ quando $k \to \infty$, de modo que

$$\sup_{B_{d_{\varepsilon_k}(x_k)}(x_k)} u_{\varepsilon_k} < (1+\delta_k)u_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Desse modo, para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $v_k : B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v_k(x) = \frac{1}{u_{\varepsilon_k}(x_k)} u_{\varepsilon_k}(x_k + d_{\varepsilon_k}(x_k)x).$$

Observe que $\sup_{B_1} v_k < 1 + \delta_k$, $v_k(0) = 1$ e $v_k > 0$. Além disso, observe que

$$\operatorname{div}(\tilde{a}^{ij}(x)\nabla v_k) = 0,$$

onde $\tilde{a}^{ij}(x) := a^{ij}(x_k + d_{\varepsilon_k}(x_k)x)$ é uma matriz (λ, Λ)-elíptica. Com isso, pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Lema 3.1.2, temos que v_k converge localmente uniforme para uma função contínua v_∞. Aplicando a desigualdade de Harnack à função $(1+\delta_k) - v_k$, obtemos, para qualquer $B_\rho \Subset B_1$,

$$\sup_{B_\rho}[(1+\delta_k) - v_k] \leq C_\rho \inf_{B_\rho}[(1+\delta_k) - v_k],$$

onde $C_\rho > 0$ é uma constante que depende de B_ρ. Assim, para todo $x \in B_\rho$, temos

$$0 \leq (1+\delta_k) - v_k(x) \leq C_\rho(1 + \delta_k - v_k(0)) = C_\rho \delta_k.$$

Consequentemente, fazendo $k \to \infty$, concluímos que $v_\infty \equiv 1$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $y_k \in \{u_{\varepsilon_k} = \varepsilon_k\}$ tal que

$$|y_k - x_k| = d_{\varepsilon_k}(x_k),$$

e defina

$$z_k = \frac{y_k - x_k}{d_{\varepsilon_k}(x_k)}.$$

Note que

$$v_k(z_k) = \frac{1}{u_{\varepsilon_k}(x_k)} u_{\varepsilon_k}(x_k + d_{\varepsilon_k}(x_k)z_k) = \frac{1}{u_{\varepsilon_k}(x_k)} u_{\varepsilon_k}(y_k) \leq \frac{\varepsilon_k}{2\varepsilon_k} = \frac{1}{2}. \tag{3.14}$$

Por outro lado, observe que

$$|z_k| = \frac{|y_k - x_k|}{d_{\varepsilon_k}(x_k)} = 1,$$

de modo que, a menos de subsequência, $z_k \to z$, para algum z com $|z| = 1$. Com isso, desde que

$$|v_k(z_k) - 1| \leq |v_k(z_k) - v_k(z)| + |v_k(z) - 1| \leq C|z_k - z|^\alpha + |v_k(z) - 1|,$$

obtemos

$$\lim_{k\to\infty} v_k(z_k) = 1,$$

o que contradiz (3.14). Fazendo uso da desigualdade (3.13) e do Teorema 2.4.1, construiremos uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ satisfazendo

a) $u_\varepsilon(x_k) \geq (1+\delta_0)^k u_\varepsilon(x_0)$;

b) $|x_k - x_{k-1}| = d_\varepsilon(x_{k-1})$;

c) $u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(x_{k-1}) \geq C|x_k - x_{k-1}|$,

onde $x_0 \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon \geq 2\varepsilon\}$ é um ponto arbitrário, e $C > 0$ é uma constante que não depende de ε. Como

$$\operatorname{div}\left(a^{ij}(x)\nabla u_\varepsilon\right) = 0 \qquad \text{em } B_{d_\varepsilon(x_0)}(x_0),$$

segue do Princípio do Máximo que o valor máximo de u_ε em $B_{d_\varepsilon(x_0)}(x_0)$ é atingido em um ponto $x_1 \in \partial B_{d_\varepsilon(x_0)}(x_0)$. Tal ponto satisfaz

$$|x_1 - x_0| = d_\varepsilon(x_0)$$

e, pela desigualdade (3.13),

$$u_\varepsilon(x_1) \geq (1+\delta_0)u_\varepsilon(x_0).$$

Consequentemente, pelo Teorema 2.4.1, temos

$$u_\varepsilon(x_1) - u_\varepsilon(x_0) \geq \delta_0 u_\varepsilon(x_0) \geq \delta_0 C d_\varepsilon(x_0) = C|x_1 - x_0|,$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de ε. Repetindo este mesmo argumento para x_1 e assim sucessivamente, obtemos uma sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ com as propriedades desejadas. Em particular, observe que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(x_0) &= \sum_{j=1}^{k} u_\varepsilon(x_j) - u_\varepsilon(x_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^{k} C|x_j - x_{j-1}| \\ &\geq C\left|\sum_{j=1}^{k} x_j - x_{j-1}\right| \\ &= C|x_k - x_0|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ademais, por a), temos que $u_\varepsilon(x_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$. Isto implica, pela continuidade de u_ε, que existe um último x_{k_0} em $B_r(x_0)$, ou seja,

$$x_{k_0} \in B_r(x_0) \qquad \text{e} \qquad x_{k_0+1} \notin B_r(x_0).$$

Temos dois casos a considerar:

(i) Se $|x_{k_0+1} - x_{k_0}| \leq r/2$, então, necessariamente, $|x_0 - x_{k_0}| \geq r/2$. Consequentemente, por (3.15),

$$\sup_{B_r(x_0)} u_\varepsilon \geq u_\varepsilon(x_{k_0}) \geq u_\varepsilon(x_0) + C|x_{k_0} - x_0| \geq C|x_{k_0} - x_0| \geq C\frac{r}{2}.$$

(*ii*) Se $|x_{k_0+1} - x_{k_0}| \geq r/2$, então, usando o Teorema 2.4.1 aplicado ao ponto x_{k_0}, temos

$$\sup_{B_r(x_0)} u_\varepsilon \geq u_\varepsilon(x_{k_0}) \geq \tilde{C} d_\varepsilon(x_{k_0}) = \tilde{C}|x_{k_0+1} - x_{k_0}| \geq \tilde{C}\frac{r}{2}.$$

Portanto, escolhendo $C_0 = \min\{C/2, \tilde{C}/2\}$, obtemos

$$\sup_{B_r(x_0)} u_\varepsilon \geq C_0 r.$$

Como C_0 não depende de ε e $u_\varepsilon \to u_0$ uniformemente em Ω', podemos estender o mesmo resultado para $y \in \Omega' \cap \{u_0 > 0\}$. Finalmente, para $y \in \Omega' \cap \partial\{u_0 > 0\}$, considere $x \in \partial B_{r/4}(y) \cap \{u_0 > 0\}$. Assim, pelo que acabamos de demonstrar, temos

$$\sup_{B_r(y)} u_0 \geq \sup_{B_{r/4}(x)} u_0 \geq C_0 \frac{r}{4}.$$

Isto conclui a demonstração.

□

O teorema anterior nos permite concluir que o conjunto de não coincidência Ω_0 tem densidade positiva uniforme ao longo da fronteira livre, cuja demonstração é apresentada no teorema a seguir. Além dessa propriedade, é possível obter também estimativas para a dimensão de Hausdorff da fronteira livre de u_0. Embora este fato não seja discutido na dissertação, o leitor poderá consultá-lo em [9, Teorema 6.2].

Teorema 3.3.2. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante $\theta > 0$ tal que, se $x_0 \in \partial\Omega_0$ é um ponto de fronteira livre, então*

$$|\Omega_0 \cap B_r(x_0)| \geq \theta r^N.$$

para todo $0 < r < \operatorname{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega)$.

Demonstração. Pela propriedade de não degenerescência (Teorema 3.3.1), existe $\xi_r \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ tal que

$$u_0(\xi_r) \geq Cr,$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo apenas dos dados do problema. Agora, para $0 < \mu \ll 1$ suficientemente pequeno, que não depende de x_0, tem-se que

$$B_{\mu r}(\xi_r) \subset \Omega_0. \tag{3.16}$$

De fato, se existe

$$z_0 \in B_{\mu r}(\xi_r) \cap \partial\{u_0 > 0\},$$

então, pelo Teorema 3.1.1, temos

$$Cr \leq u_0(\xi_r) \leq \sup_{B_{\mu r}(z_0)} u_0 \leq \tilde{C}\mu r.$$

Desse modo, se $\mu < C \cdot \tilde{C}^{-1}$, então (3.16) deve ocorrer. Portanto, para um tal $\mu > 0$ fixado, concluímos que

$$= |B_r(x_0) \cap \Omega_0| \geq |B_r(x_0) \cap B_{\mu r}(\xi_r)| \geq \theta r^N,$$

para alguma constante $\theta > 0$, como desejado.

□

Apêndice A

Demonstrações Complementares

Ao longo do texto, utilizamos alguns resultados cujas demonstrações poderiam comprometer a fluidez da leitura. Por esse motivo, optamos por reuni-las neste apêndice. Como se tratam de resultados oriundos de contextos diversos, a maioria não está organizada segundo uma ordem lógica.

Lema A.0.1. *Seja $u \in L^2(\Omega)$ e sejam $x_0 \in \Omega$, $R > 0$ tais que $B_R(x_0) \subset \Omega$. Então, a função*

$$\phi(r) := \int_{B_r(x_0)} (u - (u)_r)^2 \, dx$$

é não decrescente no intervalo $[0, R]$.

Demonstração. Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \int_{B_r(x_0)} u^2 \, dx - 2(u)_r \int_{B_r(x_0)} u \, dx + (u)_r^2 \int_{B_r(x_0)} dx \\
&= \int_{B_r(x_0)} u^2 \, dx - \frac{2}{\alpha(N) r^N} \left(\int_{B_r(x_0)} u \, dx \right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha(N) r^N} \int_{B_r(x_0)} u \, dx \right)^2 \alpha(N) r^N \\
&= \int_{B_r(x_0)} u^2 \, dx - \frac{2}{\alpha(N) r^N} \left(\int_{B_r(x_0)} u \, dx \right)^2 + \frac{1}{\alpha(N) r^N} \left(\int_{B_r(x_0)} u \, dx \right)^2 \\
&= \int_{B_r(x_0)} u^2 \, dx - \frac{1}{\alpha(N) r^N} \left(\int_{B_r(x_0)} u \, dx \right)^2 .
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \int_{\partial B_r(x_0)} u^2 dS - \frac{2}{\alpha(N) r^N} \int_{B_r(x_0)} u dx \int_{\partial B_r(x_0)} u dS + \frac{N r^{N-1}}{\alpha(N) r^{2N}} \left(\int_{B_r(x_0)} u dx \right)^2 \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} u^2 dS - 2 \int_{\partial B_r(x_0)} u (u)_r dS + \int_{\partial B_r(x_0)} (u)_r^2 dS \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} (u - (u)_r)^2 \, dS \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é não decrescente em $[0, R]$. $\square$

Teorema A.0.2 (Desigualdade de Poincaré com Traço). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$. Então, existe uma constante positiva $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|T(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que uma tal constante não existe. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \geq n \left(\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|T(u_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Observe que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \qquad \text{e} \qquad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\{v_n\}$ é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$. Desse modo, por Rellich-Kondrachov, existem uma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}$, e $v \in L^2(\Omega)$ tais que

$$v_n \to v \qquad \text{em } L^2(\Omega)$$

Mostraremos que $v \in H^1(\Omega)$, com $\nabla v = 0$. Para tanto, seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Note que

$$\int_\Omega v D_k \phi \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n D_k \phi \, dx = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi D_k v_n \, dx = 0,$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Isto mostra que $D_k v = 0$ para todo $k = 1, \ldots N$. Portanto, $v \in H^1(\Omega)$ e $\nabla v = 0$. Com isso, temos que

$$v_n \to v \qquad \text{em } H^1(\Omega).$$

Dessa forma, pela continuidade do Operador Traço,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|T(v)\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Por outro lado, como

$$\|T(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} = \frac{\|T(u_n)\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{1}{n},$$

temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|T(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

Consequentemente, $T(v) = 0$. Isto implica que $v \in H_0^1(\Omega)$. Desse modo, usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

para alguma constante $K > 0$. Portanto, como ∇v=0, concluímos que $v = 0$. Mas isto é uma contradição, uma vez que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Logo, uma tal constante C existe. $\square$

Lema A.0.3. *Seja $\Omega' \Subset \Omega$ e considere $u \in H_0^1(\Omega')$. Então, a função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por*

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & em \ \ \Omega' \\ 0, & em \ \ \Omega \setminus \Omega' \end{cases}$$

pertence a $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Para cada $k = 1, \ldots, N$, temos

$$\int_\Omega vD_k\phi \ dx = \int_{\Omega'} vD_k\phi \ dx + \int_{\Omega\setminus\Omega'} vD_k\phi \ dx = \int_{\Omega'} uD_k\phi \ dx.$$

Como $u \in H_0^1(\Omega')$, existe uma sequência $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega')$ tal que

$$u_n \to u \qquad \text{em } H_0^1(\Omega').$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega vD_k\phi \ dx &= \int_{\Omega'} uD_k\phi \ dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} u_nD_k\phi \ dx \\ &= \lim_{n\to\infty} -\int_{\Omega'} \phi D_k u_n \ dx \\ &= -\int_{\Omega'} \phi D_k u \ dx \\ &= -\int_\Omega \phi D_k v \ dx, \end{aligned}$$

onde

$$D_kv(x) := \begin{cases} D_ku(x), & \text{em } \ \Omega' \\ 0, & \text{em } \ \Omega \setminus \Omega'. \end{cases}$$

Isto verifica que v possui derivadas parciais fracas em $L^2(\Omega)$. Além disso, definindo

$$v_n(x) := \begin{cases} u(x), & \text{em } \ \Omega' \\ 0, & \text{em } \ \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

temos que $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ e

$$v_n \to v \qquad \text{em } H^1(\Omega).$$

Portanto, $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Lema A.0.4 (**Desigualdade de Cauchy com** ε)**.** *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tem-se*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Observe que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

ou seja,

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

Assim, escolhendo $\alpha = 2\varepsilon a$ e $\beta = b$, obtemos

$$2\varepsilon ab \leq \frac{4\varepsilon^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

de onde segue que

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

$\square$

Lema A.0.5. *Seja (a^{ij}) uma matriz de coeficientes satisfazendo a condição de elipticidade*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle a^{ij}(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

para certas constantes $\Lambda \geq \lambda > 0$. Então,

$$\left|\langle a^{ij}(x)\xi, \eta\rangle\right| \leq \Lambda|\xi||\eta|,$$

para todo $x \in \Omega$ e quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Usando a condição de elipticidade, verifica-se que

$$(\xi, \eta) := \langle a^{ij}(x)\xi, \eta\rangle, \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^N$. Assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$|(\xi, \eta)| \leq (\xi, \xi)^{1/2}(\eta, \eta)^{1/2},$$

ou seja,

$$\left|\langle a^{ij}(x)\xi, \eta\rangle\right| \leq \langle a^{ij}(x)\xi, \xi\rangle^{1/2}\langle a^{ij}(x)\eta, \eta\rangle^{1/2}.$$

Portanto, usando a condição de elipticidade mais uma vez, concluímos que

$$\left|\langle a^{ij}(x)\xi, \eta\rangle\right| \leq \Lambda|\xi||\eta|.$$

$\square$

Na proposição a seguir, demonstraremos mais uma propriedade de matrizes (λ, Λ) - elípticas que foi utilizada nesta dissertação. Antes disso, precisaremos estabelecer a seguinte notação.

Notação A.0.6. *Considere o conjunto*

$$\mathcal{M}(\Omega) := \left\{ (a^{ij}) \mid a^{ij} \in L^2(\Omega) \text{ para } i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Verifica-se que $\mathcal{M}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno

$$\langle (a^{ij}), (b^{ij}) \rangle_{\mathcal{M}(\Omega)} := \sum_{i,j=1}^{N} \langle a^{ij}, b^{ij} \rangle_{L^2(\Omega)},$$

que induz a norma

$$\|(a^{ij})\| := \left(\sum_{i,j=1}^{N} \|a^{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Denotaremos por $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}(\Omega)$:

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega) := \left\{ (a^{ij}) \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \lambda \mathrm{Id} \leq (a^{ij}) \leq \Lambda \mathrm{Id} \right\},$$

onde $\Lambda \geq \lambda > 0$.

Proposição A.0.7. *Seja $\{(a_k^{ij})\}_k$ uma sequência em $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$. Então, existem uma subsequência, ainda denotada por $\{(a_k^{ij})\}_k$, e uma matriz $(b^{ij}) \in \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ tais que*

$$(a_k^{ij}) \rightharpoonup (b^{ij}) \qquad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Demonstração. Como Ω é limitado, segue da condição de elipticidade que $\{(a_k^{ij})\}_k$ é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Consequentemente, desde que $\mathcal{M}(\Omega)$ é reflexivo por ser um espaço de Hilbert, existem uma subsequência, ainda denotada por $\{(a_k^{ij})\}_k$, e uma matriz $(b^{ij}) \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que

$$(a_k^{ij}) \rightharpoonup (b^{ij}) \qquad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Nos resta verificar que $(b^{ij}) \in \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$. Para isso, observe primeiramente que $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ é um subconjunto convexo. De fato, sejam $(c^{ij}), (d^{ij}) \in \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ e seja $t \in [0,1]$. Para q.t.p. $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned} \langle [(1-t)c^{ij}(x) + t d^{ij}(x)]\xi, \xi \rangle &= (1-t)\langle c^{ij}(x)\xi, \xi \rangle + t \langle d^{ij}(x)\xi, \xi \rangle \\ &\geq (1-t)\lambda|\xi|^2 + t\lambda|\xi|^2 \\ &= \lambda|\xi|^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\langle [(1-t)c^{ij}(x) + t d^{ij}(x)]\xi, \xi \rangle \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Isto significa que

$$(1-t)(c^{ij}) + t(d^{ij}) \in \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}$$

e, portanto, $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ é convexo. Afirmamos também que $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ é fechado. Para verificar isso, seja $\{(c_k^{ij})\}_k$ uma sequência em $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ com

$$(c_k^{ij}) \to (d^{ij}) \qquad \text{em } \mathcal{M}(\Omega)$$

para algum $(d^{ij}) \in \mathcal{M}(\Omega)$. Para cada i, j fixados, como

$$\|c_k^{ij} - d^{ij}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(c_k^{ij}) - (d^{ij})\|,$$

temos que

$$c_k^{ij} \to d^{ij} \qquad \text{em } L^2(\Omega).$$

Consequentemente, usando o fato que convergência em espaços de Lebesgue implica em convergência em quase todo ponto para alguma subsequência, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\{(c_k^{ij})\}_k$, tal que

$$c_k^{ij}(x) \to d^{ij}(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

para i, j fixados. Assim, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, desde que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle c_k^{ij}(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2,$$

passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle d^{ij}(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Isto mostra que $(d^{ij}) \in \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ e, portanto, $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ é fechado. Para finalizar a demonstração, vamos utilizar o fato que, para conjuntos convexos, ser fechado na topologia fraca equivale a ser fechado na topologia forte (ver Teorema 3.7 em [6]). Como $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ é convexo e fechado na topologia forte, temos que $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ é fechado na topologia fraca. Logo, desde que (b^{ij}) pertence ao fecho fraco de $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$, concluímos que $(b^{ij}) \in \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$, como queríamos. □

Proposição A.0.8. *As sequências de funções $\{\beta_\varepsilon\}$ e $\{B_\varepsilon\}$ definidas na Introdução são tais que*

$$\beta_\varepsilon \to \left(\int \beta(s)\ ds\right) \cdot \delta_0 \qquad e \qquad B_\varepsilon \to \left(\int \beta(s)\ ds\right) \cdot \chi_{\{\xi>0\}},$$

no sentido de distribuições, onde δ_0 denota a medida de Dirac concentrada em 0.

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Observe que

$$\int_{\mathbb{R}} \beta_\varepsilon(t)\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\phi\left(\varepsilon t\right)\,dt.$$

Como, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\beta(t)\phi\left(\varepsilon t\right) \to \beta(t)\phi(0), \qquad \text{quando } \varepsilon \to 0,$$

e

$$|\beta(t)\phi\left(\varepsilon t\right)| \leq \max_{\mathbb{R}} \beta \max_{\mathbb{R}} \phi,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_{\mathbb{R}} \beta_\varepsilon(t)\phi(t)\,dt \to \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\phi(0)\,dt = \phi(0)\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \beta\right)\phi(t)\,d\delta_0(t),$$

pois

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, d\delta_0(t) = \phi(0).$$

Isto prova a primeira convergência. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} B_\varepsilon(\xi)\phi(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\xi} \beta_\varepsilon(t)\, dt \right) \phi(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\xi/\varepsilon} \beta(t)\, dt \right) \phi(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\xi/\varepsilon} \beta(t)\, dt \right) \chi_{\{\xi>0\}}(\xi)\phi(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ fixado, vale a convergência

$$\left(\int_0^{\xi/\varepsilon} \beta(t)\, dt \right) \chi_{\{\xi>0\}}(\xi)\phi(\xi) \to \left(\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, dt \right) \chi_{\{\xi>0\}}(\xi)\phi(\xi) \qquad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Portanto, usando o Teorema da Convergência Dominada novamente, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} B_\varepsilon(\xi)\phi(\xi)\, d\xi \to \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, dt \right) \chi_{\{\xi>0\}}(\xi)\phi(\xi)\, d\xi \qquad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev Spaces**. 2. ed. Amsterdam: Academic Press, 2003.

[2] ALT, H. W.; CAFFARELLI, L.A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 325, p. 105-144, 1981.

[3] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[4] BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L. A.; NIRENBERG, L. Uniform estimates for regularization of free boundary problems. In: BERENSTEIN, C. A. (org.). **Analysis and partial differential equations**. New York: Dekker, 1990. p. 567–619. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 122).

[5] BOCCARDO, L.; MURAT, F. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 19, n. 6, p. 581-597, 1992.

[6] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**, Universitext, Springer, 2011.

[7] CAFFARELLI, L. A.; SALSA, S. **A Geometric Aproach to Free Boundary Problems**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2005.

[8] COSTA, D. G. **A Invitation to Variational Methods in Differential Equations**. Boston: Birkhauser, 2007.

[9] DOS PRAZERES, D; TEIXEIRA, E. V. Cavity Problems in Discontinuous Media. **Calculus of Variations**, v. 55, n. 10, 2016.

[10] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure Theory and Fine Properties of Functions**. New York: Taylor & Fracis Group, 2015.

[11] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Rhode Island: American Mathematical Society, v. 19, 1990.

[12] FRIEDMAN, A. **Variational Principles and Free-Boundary Problems**. New York: John Wiley & Sons, 1982.

[13] GIAQUINTA, M.; MARTIAZZI, L. **An Introduction to the Regularity for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs**. 2 ed. Pisa: Edizioni della Normale Pisa, 2012.

[14] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[15] GIUSTI, E. **Direct Methods in the Calculus of Variations**. New Jersey: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2003.

[16] HAN, Q.; LIN, F. **Elliptic Partial Differential Equations**. 2 ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2011.

[17] KOSKELA, P.; ROHDE, S. Hausdorff Dimension and mean porosity. **Mathematische Annalen**, 309, p. 593-609, 1997.

[18] LEITÃO, R.; DE QUEIROZ, O. S.; TEIXEIRA, E. V. Regularity for degenerate two-phase free boundary problems. **Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire**, v. 32, n. 4, 2015.

[19] MALY, J.; ZIEMER, W. P. **Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations**. Providence: American Mathematical, 1997.

[20] MOREIRA, D. R.; TEIXEIRA, E. V. A singular perturbation free boundary problem for elliptic equations in divergence form. **Calc. Var.**, v. 29, p. 161–190, 2007.

[21] STRUWE, M. **Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems**. 4. ed. Berlin: Springer, 2008.

[22] TEIXEIRA, E. V. **Um Convite à Análise Geométrica de EDPs Elípticas de 2a Ordem**. IV Escola Brasileira de Equações Diferenciais.