



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Jose Italo Porto Siqueira

Operação de Reservatórios por Otimização Estocástica Explícita Baseada nos Momentos Estatísticos: Redução da Dependência da Distribuição de Probabilidade

São Cristóvão – SE

2025

Jose Italo Porto Siqueira

**Operação de Reservatórios por Otimização Estocástica
Explícita Baseada nos Momentos Estatísticos: Redução da
Dependência da Distribuição de Probabilidade**

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Civil
como requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Construção Civil

Linha de pesquisa: Saneamento Ambiental e
Recursos Hídricos

Universidade Federal de Sergipe (UFS)
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa (POSGRAP)
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROEC)

Orientador: Prof. Dr. Alcigeimes Batista Celeste

São Cristóvão – SE

2025

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SIBIUFS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S618o Siqueira, José Ítalo Porto
Operação de reservatórios por otimização estocástica explícita baseada nos momentos estatísticos : redução da dependência da distribuição de probabilidade / José Ítalo Porto Siqueira ; orientador Alcigeimes Batista Celeste. – São Cristóvão, SE, 2025.
114 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Reservatórios. 2. Estruturas hidráulicas. 3. Confiabilidade (Engenharia). 4. Equações diferenciais estocásticas. I. Celeste, Alcigeimes Batista, orient. II. Título.

CDU 627.81

Dedico este trabalho à minha família, cujo amor e apoio são minha força. Agradeço a Deus, que me concedeu sabedoria e perseverança, e à intercessão de São José, modelo de trabalho diligente e cuidado com a criação.

Agradecimentos

Com imensa gratidão que dedico estas palavras a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Alcigeimes Batista Celeste, cuja orientação exemplar, apoio incansável e valiosos ensinamentos foram pilares fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua paciência, dedicação e expertise me auxiliaram em cada etapa desta jornada.

Sou grato aos meus colegas e amigos Ronaldo Guilherme, Renato Santana, Matheus Pereira, Diego Teles, Rosivania Catarino e Luciene Carla. O apoio moral, as conversas enriquecedoras e os incentivos tornaram este percurso acadêmico mais significativo.

Minha sincera gratidão à Universidade Federal de Sergipe (UFS), que proporcionou as condições indispensáveis para a realização desta pesquisa. Em especial, agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROEC) pela constante valorização do conhecimento.

À minha família, dedico um agradecimento especial. A paciência, compreensão e incentivo de cada um foram essenciais para que eu pudesse vencer os desafios e concluir este trabalho. Em particular, registro meu carinho e gratidão a Salmo Siqueira, Joelma Porto, Jennyfer Siqueira e Leda Porto, cuja presença constante e apoio incondicional foram minha base e fortaleza.

Por fim, rendo graças a Deus, que me guiou, fortaleceu e iluminou em todos os momentos desta caminhada. A devoção a Nossa Senhora, cuja intercessão e proteção senti a cada passo, foi fonte inesgotável de fé, esperança e coragem para enfrentar os obstáculos e perseverar.

A todos que, direta ou indiretamente, participaram desta trajetória, meu mais sincero reconhecimento. Cada contribuição, por menor que tenha sido, teve um papel decisivo para o sucesso desta dissertação.

“A água é a substância mais importante do mundo, mas também o símbolo perfeito de que algo simples pode ser simultaneamente humilde e incrivelmente poderoso.”

(Graham Hancock)

Resumo

A otimização estocástica da operação de reservatórios desempenha um papel fundamental na gestão eficiente dos recursos hídricos, especialmente diante das incertezas hidrológicas. Apesar dos avanços, persistem desafios, como a complexidade computacional, a dimensionalidade em sistemas com múltiplos reservatórios e a necessidade de representar adequadamente a variabilidade das afluições. Nesse contexto, o método proposto por Fletcher e Ponnambalam (FP) destaca-se por incorporar momentos estatísticos das variáveis de estado, permitindo uma formulação analítica e computacionalmente eficiente, sem a necessidade de discretização ou geração de cenários. Na formulação atual do método FP, é necessário supor que as afluições seguem uma distribuição específica para resolver as integrais relacionadas às equações dos momentos de armazenamento, bem como às probabilidades de contenção, déficit e vertimento. Essa dependência representa uma limitação importante, especialmente quando não há justificativa empírica clara para a escolha de uma distribuição. Em vista disso, esta pesquisa propõe inovações ao método de otimização estocástica explícita FP, aplicadas à operação mensal do reservatório de Sobradinho, localizado no Nordeste brasileiro. O objetivo é implementar o modelo em um ambiente de programação de código aberto, operando sob uma regra de liberação mais robusta, com a consideração explícita das perdas evaporativas, não consideradas em aplicações anteriores. Para superar a limitação relacionada à suposição de distribuição, o trabalho propõe resolver as equações dos momentos estatísticos utilizando exclusivamente registros históricos de afluição. Os resultados dessas melhorias foram comparados com simulações de Monte Carlo da operação mensal do reservatório de Sobradinho, e o modelo aprimorado demonstrou forte concordância entre os resultados de otimização e simulação, validando as melhorias propostas.

Palavras-chaves: Dinâmica de reservatórios; Otimização estocástica explícita; Equações dos momentos.

Abstract

Stochastic reservoir operation optimization plays a key role in the efficient management of water resources, especially in the presence of hydrological uncertainties. Despite considerable advances, challenges remain, such as computational complexity, high dimensionality in multi-reservoir systems, and the need to adequately represent inflow variability. In this context, the method proposed by Fletcher and Ponnambalam (FP) stands out by incorporating statistical moments of state variables, enabling an analytically and computationally efficient formulation without the need for discretization or scenario generation. In its original formulation, however, the FP method requires assuming a specific inflow probability distribution to solve integrals related to storage moment equations and the probabilities of containment, deficit, and spill. This dependency poses a significant limitation, particularly when there is no clear empirical justification for the distribution choice. To address this, the present study proposes enhancements to the explicit stochastic FP method, applied to the monthly operation of the Sobradinho reservoir in northeastern Brazil. The model is implemented in an open-source programming environment, using a more robust release rule and explicitly accounting for evaporative losses—previously neglected. To overcome the distributional assumption, the moment equations are solved directly using historical inflow records. The results were compared with Monte Carlo simulations of monthly reservoir operation, and the enhanced model showed strong agreement between optimization and simulation outputs, validating the proposed improvements.

Keywords: Reservoir dynamics; Explicit stochastic optimization; Moment equations.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Representação esquemática de um reservatório com as variáveis utilizadas na sua dinâmica.	31
Figura 2	– Discretização utilizada pelo método FP-SQE-ECDF.	48
Figura 3	– Gráficos de probabilidade normal e resultados do teste de Jarque-Bera para cada mês nos registros de afluência. Quando todos os pontos caem perto da linha, a suposição de normalidade é razoável.	51
Figura 4	– Fluxograma do processo metodológico.	53
Figura 5	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-GAUSS sob cenário Cen-DG.	59
Figura 6	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-AMOSTRA sob cenário Cen-RH.	61
Figura 7	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-ECDF sob cenário Cen-MF.	64
Figura 8	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-GAUSS sob cenário Cen-RH.	86
Figura 9	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-GAUSS sob cenário Cen-MF.	89
Figura 10	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-AMOSTRA sob cenário Cen-DG	95
Figura 11	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-AMOSTRA sob cenário Cen-MF	101
Figura 12	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-ECDF sob cenário Cen-DG	107
Figura 13	– Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-ECDF sob cenário Cen-RH	110

Lista de tabelas

Tabela 1	– Informações sobre o reservatório de Sobradinho.	49
Tabela 2	– Lâminas evaporativas mensais (mm) do reservatório de Sobradinho.	50
Tabela 3	– Valores de função objetivo para várias configurações do FP-S(Q)E-GAUSS via <code>fmincon</code>	55
Tabela 4	– Valores de função objetivo para várias configurações do FP-S(Q)E-GAUSS via <code>sqp</code>	56
Tabela 5	– Valores de função objetivo obtidos pelo FP-SQE-GAUSS.	57
Tabela 6	– Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP- SQE-GAUSS.	58
Tabela 7	– Resíduos obtidos por FP-SQE-GAUSS para o cenário Cen-DG.	59
Tabela 8	– Valores de função objetivo obtidos pelo FP-SQE-AMOSTRA.	60
Tabela 9	– Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP- SQE-AMOSTRA.	60
Tabela 10	– Resíduos obtidos pelo método FP-SQE-AMOSTRA para o Cen-RH.	62
Tabela 11	– Valores para função objetivo obtidos pelo método FP-SQE-ECDF.	62
Tabela 12	– Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP- SQE-ECDF.	63
Tabela 13	– Resíduos obtidos pelo método FP-SQE-ECDF sob o cenário Cen-MF.	63

Lista de abreviaturas e siglas

Cen-DG	Cenário sintético mensal de 1.000 anos, assumindo as afluências de cada mês seguindo uma distribuição gaussiana.
Cen-MF	Série sintética mensal com 1.000 anos de duração, gerada por meio do Método dos Fragmentos.
Cen-RH	Cenário sintético mensal gerado a partir dos oitenta e cinco anos de registros históricos observados de afluência mensal natural.
ECDF	Função de Distribuição Acumulada Empírica (Empirical Cumulative Distribution Function).
FP	Método de otimização estocástica explícita proposto por Fletcher e Ponnambalam (1996).
FP-SQE-AMOSTRA	Método FP utilizando diretamente os dados históricos, sem assumir distribuição prévia.
FP-SQE-ECDF	Método FP com integrais aproximadas por meio da ECDF.
FP-SQE-GAUSS	Método FP assumindo distribuição de afluência gaussiana (normal).
KDE	Estimativa de Densidade por Kernel (Kernel Density Estimation).
LDR	Regra de decisão linear (Linear Decision Rule).
MSE	Erro quadrático médio (Mean Squared Error).
OEE	Otimização estocástica explícita.
OEI	Otimização estocástica implícita.
PDF	Função de densidade de probabilidade (Probability Density Function).
PD	Programação dinâmica.
PDE	Programação dinâmica estocástica.
PL	Programação linear.
PNL	Programação não linear.
RLM	Regressão linear múltipla.
RNLM	Regressão não linear múltipla.

RNA	Redes neurais artificiais.
S-LDR	Regra de decisão linear do tipo S (S-type Linear Decision Rule).
SQ-LDR	Regra de decisão linear do tipo SQ.
SSE	Soma dos quadrados dos erros (Sum of Squared Estimate of Errors).
SVM	Máquina de vetores de suporte (Support Vector Machine).s (Sum of Squared Estimate of Errors).
SVM	Máquina de vetores de suporte (Support Vector Machine).

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Contextualização	14
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Objetivo Geral	16
1.2.2	Objetivos Específicos	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	Operação de Reservatório	18
2.2	Métodos de Simulação	19
2.3	Métodos de Otimização	20
2.3.1	Otimização Determinística	21
2.3.2	Otimização Estocástica	22
2.4	Momentos Estatísticos	23
2.5	Função de Distribuição Acumulada Empírica	25
2.6	Regra de Decisão Linear	26
2.7	Método Fletcher-Ponnambalam	27
3	MATERIAL E MÉTODOS	30
3.1	Balanço Hídrico do Reservatório	30
3.1.1	Evaporação no Balanço Hídrico	32
3.2	Regra de Decisão	33
3.2.1	Regra de Decisão Linear do Tipo SQ	33
3.2.2	Armazenamento Projetado com SQ-LDR	33
3.3	Método FP com Evaporação e SQ-LDR	33
3.3.1	Armazenamento	33
3.3.2	Déficit	34
3.3.3	Vertimento	34
3.4	Probabilidades de Contenção, Déficit e Vertimento	35
3.4.1	Probabilidade de Contenção	35
3.4.2	Probabilidade de Déficit	35
3.4.3	Probabilidade de Vertimento	36
3.5	Momentos do Armazenamento	36
3.5.1	Primeiro Momento do Armazenamento	36
3.5.2	Segundo Momento do Armazenamento	37
3.6	Momentos do Déficit	37
3.6.1	Primeiro Momento do Déficit	37

3.6.2	Segundo Momento do Déficit	38
3.7	Momentos do Vertimento	38
3.7.1	Primeiro Momento do Vertimento	38
3.7.2	Segundo Momento do Vertimento	39
3.8	Valores Esperados da Liberação Proposta, Alocação Real e Liberação Total	39
3.9	Formulação do Problema de Otimização	40
3.10	Cálculo de Integrais no Método FP	42
3.11	FP-SQE-GAUSS: Integrais Assumindo Distribuição Gaussiana	43
3.11.1	Integrais dos Termos das Afluências	44
3.11.2	Equações Finais Considerando Afluências Gaussianas	44
3.12	FP-SQE-AMOSTRA: Integrais a partir da Amostra de Dados Históricos	46
3.13	FP-SQE-ECDF: Aproximação das Integrais via ECDF	48
3.14	Estudo de Caso	49
3.15	Validação do Modelo	50
3.16	Refinamentos em Relação ao Modelo Original	52
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	54
4.1	Análise de Estratégias Operativas com Afluências Gaussianas	54
4.2	Método FP-SQE-GAUSS	57
4.3	Método FP-SQE-AMOSTRA	59
4.4	Método FP-SQE-ECDF	62
4.5	Comparações entre os Métodos	64
	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICES	75
	APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DA FUNÇÃO OBJETIVO Z_r	76
	APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DA FUNÇÃO OBJETIVO Z_0	77
	APÊNDICE C – RESULTADOS DO FP-SQE-GAUSS	78
	APÊNDICE D – RESULTADOS DO FP-SQE-AMOSTRA	90
	APÊNDICE E – RESULTADOS DO FP-SQE-ECDF	102

1 Introdução

1.1 Contextualização

No contexto da utilização dos recursos hídricos, é perceptível a crescente demanda decorrente do desenvolvimento populacional. Com essa necessidade ascendente, a gestão da água precisa ser mais eficiente. As obras hidráulicas, especialmente, os reservatórios de armazenamento criados por barragens, ganham destaque. Estes reservatórios desempenham um papel crucial na regularização do fluxo dos rios, atendendo a diversos setores vitais da sociedade. Eles operam armazenando água durante os períodos de cheia e liberando-a de acordo com uma política operacional predefinida, visando suprir a escassez em períodos de seca. Assim, é possível encontrar alternativas para atender aos conflitos de interesses, equilibrando as perspectivas ambientais, sociais e político-econômicas (AHMAD et al., 2014; TANG et al., 2020; BILLINGTON; JACKSON, 2006; PEIXOTO, 2006).

Dessa forma, entender as necessidades é um ponto decisivo para a gestão hídrica, pois a água pode ser utilizada para serviços como navegação, recreação e produção de energia, afetando o volume temporariamente sem consumo direto, ou seja, um uso não consuntivo. Já outras atividades, como abastecimento doméstico, industrial e irrigação, necessitam do deslocamento do recurso, caracterizando um uso consuntivo que afeta a disponibilidade. Com isso, é necessário ajustar eficientemente a operação para que os diversos usos sejam atendidos e, além disso, o fluxo natural do rio represado seja mantido e regularizado, protegendo regiões de desastres naturais como inundações e deslizamentos de terra (GARCIA; RIDOLFI; BALDASSARRE, 2020; PEIXOTO, 2006).

Sendo assim, Dobson, Wagener e Pianosi (2019) enfatizam o alto volume de água represada na atualidade, referindo-se a Lehner et al. (2011), e destacam que, com o crescimento populacional, haverá uma crescente demanda hídrica do setor energético e, conseqüentemente, de outros setores. É possível ver como o represamento de rios foi amplamente desenvolvido em todo o mundo. Grill et al. (2019) estimam que cerca de 50% dos rios globais estejam controlados por barragens. Apesar desse destaque, é comum que os reservatórios não atinjam os objetivos previstos em seus projetos, tanto economicamente quanto na mitigação dos impactos negativos (LABADIE, 2004; WCD: World Commission on Dams, 2000). Além disso, existem muitas críticas quanto aos impactos nos ecossistemas fluviais (WAN et al., 2022).

Ademais, a alta variabilidade climática, que afeta os regimes de chuvas, os frequentes períodos de estiagem, as ocorrências de secas e a elevação dos índices de perdas por evaporação, contribui para o desequilíbrio hídrico de uma região. Logo, a dificuldade de incorporar a variabilidade do processo hidrológico em conjunto com as peculiaridades de cada uso do recurso, aumentam o desafio de definir estratégias que atinjam a eficiência no funcionamento e minimi-

zem os problemas de falta d'água (BRAVO, 2006). Nesse cenário, mais relevante do que nunca, operações otimizadas são essenciais tanto para impulsionar novos projetos de barragens quanto para revisar eficientemente as operações das barragens existentes. Isso pode ser trabalhado com a utilização de ferramentas de modelagem computacional capazes de fornecer informações que levem a decisões operacionais coesas diante de todas as condicionantes presentes nos sistemas (SANTANA, 2019).

O problema enfrentado pela gestão hídrica de reservatórios é expresso por algoritmos que equacionam as variáveis envolvidas e seus condicionantes, configurando modelos que fornecem informações para a operação, como a curva de liberação que melhor atenda aos objetivos planejados. Na literatura, é comum que a operação siga curvas-guia construídas a partir de modelos de simulação, que estabelecem o plano de liberação do reservatório com base em políticas preestabelecidas. Esses modelos são compilados de modo iterativo e dependem da decisão final do usuário para definir a melhor solução, diferente dos modelos de otimização, os quais possuem na sua formulação matemática o cálculo da política mais viável. Sendo foco de muitos estudos, a otimização é uma ferramenta muito poderosa, capaz de lidar com variáveis determinísticas e estocásticas, com destaque para as abordagens de programação linear, programação não linear e programação dinâmica (BOLOURIAZDELI et al., 2014; LANNA; LIMA, 2005).

A programação dinâmica proposta por Bellman (1957) é notável neste campo, pois pode incorporar a estocasticidade do processo hidrológico diretamente no modelo ao decompor o problema original em subproblemas resolvidos sequencialmente. No entanto, essa abordagem possui uma limitação: quando considera entradas aleatórias e o número de variáveis de estado do modelo é demasiadamente discretizado, o esforço computacional aumenta significativamente, configurando a “maldição da dimensionalidade” (LABADIE, 2004; MELLO JR; MATOS, 1999).

Nesse contexto, foi desenvolvido o método Fletcher-Ponnambalam (FP) (FLETCHER; PONNAMBALAM, 1996), utilizado para otimização estocástica explícita da operação de reservatórios individuais ou múltiplos (MOUSAVI; PONNAMBALAM, 2025; MOUSAVI et al., 2022; CELESTE; SIQUEIRA; CAI, 2021; MAHOOTCHI; PONNAMBALAM, 2013; MAHOOTCHI; PONNAMBALAM; TIZHOOSH, 2010; FLETCHER; PONNAMBALAM, 2008). Em sua formulação, não há necessidade de discretização das variáveis de estado nem de uma simulação Monte Carlo inicial, como ocorre em outros modelos estocásticos. Trata-se de um método explícito de otimização estocástica, onde assume-se que as afluências ao reservatório seguem uma distribuição de probabilidade específica, permitindo assim desenvolver analiticamente a formulação dos momentos estatísticos para o armazenamento, além das probabilidades de contenção (armazenamento entre os níveis mínimo e máximo), déficit (abaixo do mínimo) e vertimento (acima do máximo).

Apesar das vantagens do método FP em relação a outras abordagens estocásticas, sua aplicação apresenta limitações importantes, com destaque para a dificuldade associada à necessidade de se assumir uma distribuição de probabilidade específica para a série de afluências — requisito essencial para a viabilidade analítica da formulação. No entanto, essa suposição

nem sempre reflete adequadamente o comportamento real dos dados. Diante disso, torna-se necessário investigar a aderência da distribuição assumida aos dados analisados, para então aplicar corretamente os requisitos do modelo. Nessa perspectiva, desenvolver uma formulação que reduza a dependência da escolha prévia de uma distribuição de probabilidade, objetivo central desta pesquisa, contribui para ampliar a aplicabilidade do método FP em cenários reais de operação de reservatórios.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Propor e implementar aprimoramentos no modelo de otimização estocástica explícita de Fletcher-Ponnambalam (FP), com ênfase na incorporação de uma regra de alocação mais robusta, na consideração explícita das perdas evaporativas e, principalmente, na redução da limitação imposta pela necessidade de se assumir uma distribuição de probabilidade para as afluências, por meio do uso exclusivo de registros históricos.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver uma nova abordagem para a resolução das integrais do modelo FP, baseada no uso direto de registros históricos de afluência, eliminando a necessidade de assumir uma distribuição de probabilidade teórica;
- Aprimorar a função objetivo do modelo por meio da inclusão explícita dos momentos estatísticos do déficit e do vertimento, permitindo uma representação mais realista dos impactos operacionais;
- Avaliar o impacto da substituição da regra de liberação do tipo S (baseada apenas no armazenamento), por uma regra do tipo SQ, que considera conjuntamente armazenamento e afluência, incorporando ainda as perdas evaporativas de forma explícita na formulação, componentes ausentes na versão original do modelo;
- Derivar os momentos de primeira e segunda ordem das variáveis de armazenamento, liberação, déficit e vertimento, considerando as novas componentes incorporadas ao modelo;
- Desenvolver regras operativas mensais a partir da nova formulação, com foco na operação eficiente e sustentável de reservatório localizado em região semiárida e sujeita a eventos críticos de escassez;
- Implementar o modelo aprimorado em ambiente de código aberto, visando ganhos de desempenho computacional e maior acessibilidade para futuras aplicações;

- Avaliar a performance do modelo proposto frente à formulação original, com base em diferentes cenários hidrológicos e critérios de operação.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Operação de Reservatório

A gestão sustentável dos recursos hídricos tem sido tema de diversas discussões e estudos nas últimas décadas. O manejo da água com ênfase em garantir disponibilidade, acessibilidade e qualidade, é essencial diante da alta demanda e dos efeitos das alterações climáticas, que geram a necessidade de adotar estratégias eficientes. Com isso, destaca-se a abordagem de avaliar a operação de reservatórios de acumulação resultantes da construção de barragens, com foco em garantir a resiliência do sistema de armazenamento. Essas estruturas são fundamentais na gestão dos recursos hídricos por sua capacidade de assegurar a confiabilidade hídrica, aumentar a disponibilidade de água superficial e garantir que o curso do rio mantenha uma vazão regularizada, armazenando água nos períodos de cheia para atender à demanda nos períodos de escassez (BEÇA et al., 2023; ANA, 2021).

A gestão da água em um reservatório é um processo detalhado de tomada de decisão, que equaciona as variáveis de entradas e saídas sujeitas a desafios causados pelo impacto climático. Além disso, a finalidade é atender a objetivos, considerando os aspectos socioeconômicos e ambientais, sob as características hidráulicas e hidrológicas. Essa problemática é objeto de muitos estudos que visam melhorar a capacidade de simular a disponibilidade atual e futura de recursos hídricos em condições não estacionárias de oferta e demanda (BEÇA et al., 2023; SALWEY et al., 2023; ZOMORODIAN et al., 2017).

Embora o reservatório desempenhe um papel significativo no planejamento e na gestão dos recursos hídricos, Dobson, Wagener e Pianosi (2019) oferecem uma reflexão importante sobre sua operação. O estudo destaca a dificuldade das estruturas em alcançar os objetivos previstos no projeto, gerar retorno econômico e mitigar impactos negativos. Ressalta-se também a percepção negativa sobre os danos sociais e ambientais, como a desapropriação de comunidades e a obstrução de sedimentos, que são frequentemente subestimados e mal geridos. No entanto, o estudo relaciona tanto a construção de novas barragens como uma alternativa para melhorar a qualidade de vida, quanto a reformulação e regulamentação das barragens existentes para aumentar a eficiência e mitigar os impactos ambientais.

A alocação da água enfrenta desafios para ser gerida eficientemente, visto que seu maior consumo se concentra na agricultura (produção de alimentos) e na geração de energia, cada um com necessidades específicas que podem ter estratégias antagônicas frente a um cenário de segurança ambiental. Nesse cenário, os reservatórios desempenham um papel crucial, especialmente no semiárido, onde são a principal fonte de abastecimento hídrico para atender à demanda, além de proteger a região contra desastres e garantir a sustentabilidade dos rios. Por isso, mudanças nos objetivos sociais, a justificativa dos custos e a crescente demanda

por fornecimento, exigem grandes reformulações nos critérios de armazenamento e operação, de acordo com as prioridades necessárias (BEIRANVAND; ASHOFTEH, 2023; SILVA et al., 2022; GOMES, 2020).

Outro fator a se abordar são as incertezas das vazões naturais dos cursos d'água, que constituem as principais entradas (afluências) nos reservatórios. Essas incertezas afetam diretamente o balanço hídrico devido à relação intrínseca entre afluência e precipitação, que é suscetível a variações na dinâmica atmosférica, como fluxos de massa de ar e exposição aos ventos (ARAÚJO, 2011; LINO; COIADO; FRANCATO, 2020). Adicionalmente, a variabilidade da temperatura implica em perdas por evaporação da superfície livre da água, sendo, principalmente, o clima semiárido vulnerável devido às suas elevadas taxas de evaporação (ARAÚJO, 2011; MOURA et al., 2007; SOUZA et al., 2019). Portanto, as incertezas se destacam, sobretudo quando os valores históricos não são suficientes para representar as condições hidrológicas altamente variáveis, o que dificulta a previsão confiável das afluências futuras para um período considerável (CELESTE, 2011).

A operação de reservatório eficiente é, então, crucial para garantir os benefícios sociais, ambientais e econômicos desejados no gerenciamento, buscando equilibrar os conflitos existentes. Isso pode ser alcançado por meio de modelos computacionais que incorporam as variáveis mais complexas do sistema e seguem uma política de operação. Logo, em cada estágio de tempo, é possível tomar decisões factíveis com base no estado atual do sistema (armazenamento). Essa abordagem é fundamental tanto para o projeto eficaz de novas barragens quanto para a revisão das operações daquelas já existentes (DOBSON; WAGENER; PIANOSI, 2019; RAMOS; ZAMBELLI; SOARES, 2019).

2.2 Métodos de Simulação

O uso de métodos matemáticos para orientar as operações de reservatórios são amplamente estudados na literatura, visto com o aumento do número de trabalhos publicados nos últimos anos. Com isso, os algoritmos que lidam com a operação de reservatórios avançaram consideravelmente, utilizando modelos de simulação cada vez mais complexos, capazes de equacionar todas as características de um sistema. Esses modelos são amplamente utilizados para cenários hipotéticos, permitindo a avaliação detalhada das opções de operação, sendo aplicados de forma significativa pelos operadores (PIANOSI; DOBSON; WAGENER, 2020; ROSENBERG et al., 2017).

O funcionamento dos modelos de simulação parte da avaliação de diversos cenários distintos para o sistema em estudo, seguindo uma regra predeterminada pela qual é possível determinar o volume alocado e os níveis de armazenamento para cada situação. A decisão do resultado escolhido é obtida após determinar o cenário mais próximo do ótimo, mediante a análise manual detalhada de cada cenário do sistema (SANTANA, 2019; VIEIRA, 2017).

No processo de operação dos modelos de simulação, é equacionado o balanço hídrico, levando em conta as afluências, critérios de armazenamento e outros parâmetros adicionais que

podem envolver questões econômicas e ações preventivas contra desastres naturais. Com isso, torna-se uma ótima alternativa para avaliar cenários de crise e analisar as consequências das ações tomadas para atingir os objetivos. Em síntese, calcula-se o armazenamento disponível considerando a vazão mensal e as demandas locais a jusante do reservatório, utilizados para determinar a liberação conforme as curvas-guia do reservatório e uma regra operacional predefinida (CELESTE; SUZUKI; SANTOS, 2005; NGAMSERT; KANGRANG, 2022; PEIXOTO, 2006; VIEIRA, 2017).

Assim, um ponto determinante é a definição de uma regra operacional que atue de forma eficiente. Um exemplo comumente utilizado e relativamente simples é a política de operação padrão (SOP: *standard operating policy*) que depende apenas da disponibilidade hídrica atual. Nessa política, na tentativa de atender à demanda imediatamente, enquanto houver disponibilidade, toda solicitação de água é liberada e o restante é armazenado. Entretanto, quando o armazenamento disponível for inferior à demanda, todo o recurso acessível é liberado. Essa definição é usada para mitigar períodos de escassez imediata, mas pode resultar em restrições hídricas em períodos subsequentes, mesmo maximizando a confiabilidade do sistema (CELESTE; SANTANA; SANTOS, 2016; GARCIA; RIDOLFI; BALDASSARRE, 2020; NGAMSERT; KANGRANG, 2022; TAN et al., 2017).

2.3 Métodos de Otimização

A otimização busca atender a um objetivo determinado, seja maximizar os benefícios ou minimizar os prejuízos de um determinado sistema, equacionando as variáveis de decisão e levando em conta todas as restrições envolvidas. Os estudos desses modelos aplicados na operação de reservatórios têm sido consideráveis nas últimas décadas, especialmente devido às discussões sobre a viabilidade e importância das barragens, além dos efeitos climáticos que afetam significativamente os regimes de entrada para os reservatórios (FOLEY et al., 2017; MAJOR et al., 2017; KAZEMNADI; NAZARI; KERACHIAN, 2024).

O processo hidrológico é repleto de incertezas, e a forma de considerá-las discrimina os modelos. Modelos que assumem o comportamento da variável como conhecido são caracterizados como determinísticos, enquanto os modelos que incorporam a incerteza na formulação da otimização são classificados como estocásticos. Entre os métodos de otimização, destacam-se a programação linear (PL), não linear (PNL) e dinâmica (PD), cada um com limitações como consequências da linearização, determinação de ótimos globais ou aumento da carga computacional (AHMAD et al., 2014; ORTIZ-PARTIDA et al., 2019; SANTANA, 2019).

A técnica utilizada para compor a otimização deve ser aquela que melhor leve em conta as características do sistema e atinja parâmetros satisfatórios e sustentáveis. Assim, a PL se destaca pela sua versatilidade e rapidez ao conseguir descrever linearmente a função objetivo e suas restrições, sendo aplicável em grande escala e capaz de obter ótimos globais. No entanto, para representar fielmente a realidade, as funções implementadas geralmente são não lineares,

o que requer simplificações que podem reduzir a precisão da PL. Alternativamente, a PNL apresenta-se como uma opção viável por não necessitar de tantas simplificações e poder lidar diretamente com tais funções. Porém, o esforço computacional aumenta exponencialmente com o número de variáveis de decisão não lineares. Por fim, a alta não linearidade em conjunto com a estocasticidade pode ser tratada apropriadamente pela PD, embora enfrente desafios na formulação propriamente dita (AHMAD et al., 2014; DOGAN; MEDELLIN-AZUARA; LUND, 2024; CELESTE; BILLIB, 2009).

Além disso, é possível observar na literatura uma lacuna contínua entre a teoria e a prática operacional (LABADIE, 2004; DOGAN; MEDELLIN-AZUARA; LUND, 2024; ORTIZ-PARTIDA et al., 2019). Para explicar isso, Wang et al. (2020) revisam algumas produções e sintetizam três fatores para essa lacuna: a subjetividade humana em adotar modelos avançados e complexos; os desafios enfrentados pelas técnicas diante da sazonalidade das cheias, da não estacionariedade hidrológica e das falhas nas informações históricas; e as configurações institucionais que muitas vezes não se alinham com os métodos convencionais de otimização aplicados na prática.

Ainda assim, métodos alternativos estão sendo utilizados para suprir as necessidades encontradas pelas demandas atuais, desenvolvendo formulações que elevam o nível dos modelos de operação e aproveitam o poder computacional disponível. Com isso, há estudos sobre a utilização e aplicações de técnicas na gestão de reservatórios no âmbito da computação evolutiva, destacando-se algoritmos de otimização como algoritmos genéticos, otimização por enxame de partículas, recozimento simulado, acasalamento de abelhas e redes neurais artificiais (CHOONG; EL-SHAFIE, 2014).

2.3.1 Otimização Determinística

Os modelos determinísticos tradicionais dependem do cenário, assumindo que o comportamento é conhecido. Assim, variáveis como afluências e demanda são parâmetros determinados, utilizando formulações baseadas em estatísticas das variáveis ou previsões de condições médias de longo prazo. Isso contrasta com os modelos estocásticos, que incorporam essas incertezas (AHMAD et al., 2014; CELESTE; BILLIB, 2009; FARMER; VOGEL, 2016).

Artigos convencionais estudaram diversos usos e aplicações de métodos determinísticos, que geralmente seguem o mesmo roteiro, utilizando a regressão linear múltipla (RLM) e a não linear múltipla (RNLM) como principais técnicas para determinar as regras de operação, considerando as restrições que condicionam o sistema. Chen (2021) e Wang, Jiang e Liu (2022) são exemplos que utilizam técnicas de regressão com sucesso, apesar de destacarem a dificuldade em derivar uma regra de operação ótima para operação de reservatório.

Ainda assim, muitas produções tratam a otimização determinística como uma boa opção na operação de reservatórios, aplicando-a em conjunto com outras técnicas com o intuito de aumentar a eficiência dos modelos. Um exemplo é Zhu et al. (2022), que trabalharam com um modelo para a operação de reservatórios em cascata, com o objetivo de garantir o fornecimento de água e maximizar a geração de energia. A abordagem utiliza o chamado método do coeficiente

discriminante para determinar a contribuição de cada reservatório em cascata. No entanto, um problema recorrente identificado é que os reservatórios a montante acabam fornecendo água antes dos reservatórios a jusante, resultando em escassez nos primeiros e acúmulos nos últimos. Para solucionar isso e obter uma distribuição racional de água entre os reservatórios, o método foi aprimorado, destacando-se o uso de ajuste polinomial combinado com uma rede neural artificial. Essa combinação foi utilizada para expressar a relação funcional derivada dos resultados de otimização determinística em séries de escoamento de longo prazo, com o objetivo de maximizar a geração de energia.

Zhu et al. (2021) apresentaram uma ferramenta promissora para a operação ótima de um conjunto de reservatórios hidrelétricos, considerando os efeitos de remanso. Destaque-se a utilização da programação dinâmica e do algoritmo de otimalidade progressiva para resolver o problema de otimização, com os resultados de uma modelagem determinística. Por fim, o método de análise relacional cinza é aplicado para selecionar os fatores mais eficazes, que são usados como entrada para uma máquina de vetores de suporte (SVM: *support vector machine*) para derivar uma regra de operação racional eficiente na operação conjunta de usinas hidrelétricas em cascata em médio e longo prazo.

2.3.2 Otimização Estocástica

Para lidar com a aleatoriedade das variáveis de interesse, ou seja, a imprevisibilidade inerente de certos fenômenos, utiliza-se a abordagem de otimização estocástica. Essa abordagem corresponde à estrutura matemática empregada para modelar tal imprevisibilidade. Os modelos estocásticos são formulações que buscam quantificar e simular comportamentos aleatórios, lidando com a complexidade da variabilidade natural. Quando aplicados ao contexto hidrológico, eles incorporam variáveis como a precipitação e a vazão afluente, cujos valores médios esperados não são suficientes para representar adequadamente as condições hidrológicas incertas, devido à dificuldade de se realizar previsões precisas para períodos mais longos. Entre esses modelos, destacam-se a otimização estocástica implícita (OEI) e a otimização estocástica explícita (OEE) (CELESTE, 2011; LABADIE, 2004).

A otimização estocástica implícita utiliza uma abordagem conhecida como procedimento de Monte Carlo, sendo empregada para encontrar as alocações ótimas do reservatório ao operar sob cenários determinísticos distintos de vazões afluentes, obtidos por registros históricos ou gerados sinteticamente. Esse método opera com base nos cenários gerados, considerando suas características específicas, presumindo um conhecimento perfeito do comportamento hidrológico futuro, incluindo correlações espaciais e temporais complexas (CELESTE, 2011; LEE; LABADIE, 2007).

Geralmente, são aplicadas análises de regressão múltipla e redes neurais artificiais (RNA) aos resultados obtidos na OEI para desenvolver regras operacionais condicionadas pelas características de armazenamento e pelos volumes de entrada atuais, anteriores ou previstos. Assim, dadas as políticas operacionais predefinidas, os resultados da otimização são submetidos

a métodos de inferência para produzir a regra de alocação ótima para o reservatório. Contudo, com ênfase em sistemas com múltiplos reservatórios, são necessários muitos cenários de entrada, o que aumenta a quantidade de problemas a serem resolvidos e gera extensos processos de tentativa e erro. Além disso, as correlações precisam ser tratadas com precisão para não invalidar as regras operacionais, exigindo um pós-processamento adequado (LABADIE, 2004; SANTANA, 2019; LEE; LABADIE, 2007; CELESTE, 2011; CELESTE; BILLIB, 2009).

Celeste, Santana e Santos (2016) estudaram um método de operação estocástica implícita que utiliza regressão linear para derivar regras operacionais ótimas, com um estudo de caso em reservatório de Sergipe. Oliveira e Celeste (2016) assumiram uma correlação bidimensional entre as variáveis de alocação mensal, armazenamento e afluência, além de considerarem uma região de racionamento. Em todos os trabalhos citados, os modelos de otimização resultaram em melhores desfechos.

A otimização estocástica explícita incorpora diretamente as incertezas hidrológicas no problema de otimização por meio de modelos probabilísticos de vazão. São métodos complexos pois não pressupõem a previsão perfeita dos eventos hidrológicos futuros, sem análises a posteriori ou inferências sobre os resultados (CELESTE, 2011; LEE; LABADIE, 2007). Nesse contexto, a programação dinâmica estocástica (PDE) tem um destaque significativo por preservar uma estrutura realista do problema em sua formulação, além de incorporar as características estocásticas e a não linearidade envolvidas na gestão hídrica (GIULIANI et al., 2021; PEIXOTO, 2006).

Bellman (1957) formulou a programação dinâmica estocástica de modo que o problema de otimização é estruturado de forma sequencial, decomposto em subproblemas resolvidos em cada estágio. Este método requer que as variáveis de estado, como o armazenamento do reservatório e/ou as vazões afluentes, sejam discretizadas, assim como as variáveis de decisão (liberações do reservatório), juntamente com definições explícitas das distribuições de probabilidade das vazões afluentes e suas correlações. Essas considerações contribuem significativamente para o aumento considerável das cargas computacionais, surgido o problema da “maldição da dimensionalidade”.

No estudo de Giuliani et al. (2021), a maldição da dimensionalidade foi discutida como a principal dificuldade na aplicação da programação dinâmica para operar sistemas de reservatórios, limitando-a a dois ou três reservatórios devido ao aumento exponencial dos custos computacionais com o número de variáveis de estado.

2.4 Momentos Estatísticos

Ao trabalhar com distribuições de probabilidades, é importante destacar algumas características e conceitos frequentemente utilizados nos estudos relacionados. É possível resumir uma distribuição por meio de características chamadas momentos estatísticos, com destaque para o valor esperado (média) e a variância.

Para descrever um pouco sobre o conceito acima, segundo Loucks e Beek (2017), dadas as variáveis aleatórias, cujos valores não podem ser previstos, pode-se, na busca de entender o processo que as envolve, caracterizá-las por meio de uma distribuição de probabilidades. Essas distribuições são frequentemente baseadas em observações passadas, que são utilizadas para defini-las e/ou estimar os parâmetros de interesse.

Seguindo a definição de Loucks e Beek (2017), para uma variável aleatória X , é possível modelar a probabilidade de ocorrência de diferentes valores possíveis por meio da função de densidade de probabilidade (PDF: *probability density function*), descrita por $f(x)$. A integral dessa função sobre x converte a função de densidade em uma função cumulativa $F(x)$, variando de 0 a 1 da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{x^*} f(x)dx = \Pr(X \leq x^*) = F(x^*) \quad (2.1)$$

A partir dessas funções, os momentos das distribuições são obtidos independentemente dos tipos ou formas das distribuições. Por definição, o momento estatístico de ordem k é dado por

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \quad (2.2)$$

em que $\mathbb{E}(\cdot)$ é o operador valor esperado (ou esperança). Quando $k = 1$, $\mathbb{E}(X) = \mu$ é o primeiro momento estatístico, igual a média μ da variável aleatória X . A ordem $k = 2$ fornece o segundo momento estatístico $\mathbb{E}(X^2)$ que está relacionado com a variância $\text{Var}(X)$ da forma

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \quad (2.3)$$

Em estudos que lidam com ambientes caracterizados por mudanças e incertezas que dificultam sua previsão, é viável atribuir probabilidades às variáveis de interesse ou parâmetros, incorporando assim as estocasticidades. Especificamente, a utilização dos conceitos de momentos estatísticos e função densidade de probabilidades permite encontrar soluções viáveis para problemas complexos. Um exemplo disso é o trabalho de Yang et al. (2024), que utilizaram momentos estatísticos para identificar os modos de vibração de pontes, fundamentando-se na teoria estatística dos momentos.

Zhao et al. (2019) investigaram um método de classificação de glaucoma através da análise multiescalar da imagem da retina. Para obter características discriminativas suficientes, são calculadas aproximações e coeficientes detalhados. Devido à alta dimensionalidade dessas características, foram utilizados vários recursos, como entropias, energia e momentos estatísticos de alta ordem, que buscam descrever a forma da distribuição das informações.

Na análise de Baghli et al. (2019), foi utilizado o cálculo dos quatro momentos em relação à origem das correntes que fluem nos rolamentos das máquinas de indução de velocidade controlada. Esses momentos foram combinados com as probabilidades específicas do circuito, para definir indicadores de falhas intermitentes de chave aberta (interruptores de energia) em inversores de três níveis com pontos neutros fixados para acionamentos elétricos de máquinas.

Esses sistemas são amplamente utilizados em aplicações de carros elétricos, um campo de estudo significativo devido ao seu impacto ambiental.

Por fim, é possível encontrar trabalhos que utilizam as definições de momentos estatísticos para estimar os parâmetros de uma função densidade de probabilidade relacionada ao gerenciamento hídrico. Rodrigues et al. (2021), a partir da PDF, modelaram eventos extremos e realizaram a regionalização de vazões importantes para a gestão de uma bacia no cerrado brasileiro. Esses estudos fornecem contribuições significativas desde o planejamento de estruturas hidráulicas até a gestão quantitativa de vazões de referência para concessões de uso de água.

2.5 Função de Distribuição Acumulada Empírica

A função de distribuição acumulada empírica (ECDF) é amplamente utilizada em análises estatísticas para descrever a distribuição acumulada de dados observados de forma não-paramétrica, oferecendo uma representação clara da probabilidade acumulada associada a cada valor da amostra. Por não exigir pressupostos sobre a forma da distribuição de dados, torna-se uma ferramenta versátil aplicada em diversas pesquisas científicas, especialmente em situações onde não é conhecida a natureza da distribuição subjacente ou de difícil modelagem.

A ECDF $F_X^s(x)$ pode ser definida como uma proporção acumulada de observações que são menores ou iguais a um determinado valor x . Pode ser representada por

$$F_X^s(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[x_i, \infty)}(x) \quad (2.4)$$

onde $\mathbb{1}_{[x_i, \infty)}(x)$ é uma função indicadora que assume o valor unitário se $x_i \leq x$ e zero caso contrário, e n é o tamanho da amostra da variável aleatória X . Essa definição simples permite que a ECDF seja calculada diretamente a partir dos dados, sem ajustes ou parametrizações. Sendo uma função degrau não decrescente, que assume o valor nulo (0%) antes do menor dado da amostra e o valor unitário (100%) após o maior dado da amostra, e que convergirá para a verdadeira distribuição conforme o tamanho da amostra aumenta.

No estudo de Popat e Hartmann (2024), a ECDF foi empregada na avaliação da magnitude de secas hidrológicas com base no índice de vazão padronizado (SSI: *standardized streamflow index*). Nesse contexto, a ECDF foi comparada a distribuições paramétricas e métodos de densidade não-paramétrica, como a estimativa de densidade por Kernel (KDE: *kernel density estimation*). A ECDF demonstrou ser uma alternativa robusta quando os dados apresentavam características sazonais ou regionais que dificultavam o ajuste a distribuições paramétricas específicas. A flexibilidade da ECDF permitiu calcular probabilidades acumuladas diretamente, minimizando os riscos de superestimação ou subestimação das magnitudes das secas.

No trabalho de Dehghani, Seifi e Riahi-Madvar (2019), a ECDF foi utilizada como uma métrica de avaliação do desempenho de modelos preditivos híbridos baseados em sistemas neuro-fuzzy otimizados. A ferramenta possibilitou comparar graficamente os valores observados

e previstos de vazão ao longo de diferentes horizontes temporais, desde previsões de curtíssimo prazo (minutos) até longo prazo (dias). Essa aplicação evidenciou o papel da ECDF na validação de modelos, destacando discrepâncias e tendências não capturadas pelos métodos convencionais.

2.6 Regra de Decisão Linear

A regra de decisão linear (LDR: *linear decision rule*) foi apresentada por Revelle, Joeres e Kirby (1969) no contexto da gestão hídrica, com foco em reservatórios, sendo amplamente utilizada em formulações de otimização na literatura. Esse método permite transformar problemas de otimização complexos, e até mesmo insolúveis, em problemas lineares. Trata-se de uma abordagem versátil, aplicável tanto a formulações que consideram afluências estocásticas quanto determinísticas. Além disso, desempenha um papel crucial no dimensionamento de reservatórios, pois possibilita ao projetista visualizar a interação entre as políticas operacionais e a capacidade dos reservatórios.

Entre as diferentes formulações desse método, destacam-se as regras do tipo S e do tipo SQ, que apresentam diferenças significativas em sua abordagem, apresentando bom desempenho em relação a métodos mais sofisticados (REVELLE; JOERES; KIRBY, 1969; REVELLE; GUNDELACH, 1975).

A LDR do tipo S é baseada na relação direta entre a liberação de água U_t e o armazenamento no reservatório S_{t-1} no início do período t , subtraído por um parâmetro de decisão sazonal β (MOUSAVI; ALIZADEH; PONNAMBALAM, 2014):

$$U_t = S_{t-1} - \beta \quad (2.5)$$

Esta regra ganha destaque por sua simplicidade de ser implementada computacionalmente, e sua aplicação é voltada para contexto onde a variabilidade das afluências é menos significativa ou com disponibilidade de dados limitada. Entretanto, há limitações na aplicação por desconsiderar o influxo durante o período em questão, o que pode resultar em liberações inadequadas em situações de alta variabilidade hidrológica (LOUCKS, 1970).

Ainda neste contexto, aprimorando a LDR do tipo S, surgiu a regra do tipo SQ, que incorpora também as afluências I_t no período atual, conforme expressão abaixo (REVELLE; GUNDELACH, 1975):

$$U_t = S_{t-1} + \alpha I_t - \beta \quad (2.6)$$

em que α e β são parâmetros de decisão formulados na otimização para a operação.

Com essa melhoria, a LDR se adapta melhor às condições hidrológicas, aumentando a confiabilidade das operações. Com isso, a regra SQ torna-se mais adequada para sistemas onde a previsibilidade das afluências é limitada ou com cenários que foquem na conservação de água durante os períodos de escassez (MOUSAVI; ALIZADEH; PONNAMBALAM, 2014).

2.7 Método Fletcher-Ponnambalam

Fletcher e Ponnambalam (1996) introduziram um método de otimização estocástica explícita (método FP), que pode ser utilizado tanto para a dimensionamento quanto para operação de reservatórios, e que considera as incertezas das variáveis de entrada (afluências). Dada a grande importância de se compreender a natureza do comportamento aleatório das variáveis envolvidas na operação do sistema, foi desenvolvido um modelo que estima os momentos de primeira e segunda ordem do estado de armazenamento, utilizando as probabilidades das variáveis de entrada.

O método original utiliza funções indicadoras no balanço de massa, incorporando explicitamente os limites dos reservatórios e permitindo a estimativa de momentos estatísticos de armazenamento e probabilidades de contenção, déficit e vertimento. É necessário assumir uma distribuição de probabilidade para a afluência, geralmente a gaussiana, para resolver as integrais que surgem nos momentos estatísticos e nas probabilidades de contenção, déficit e vertimento. Estas probabilidades são incorporadas sem a necessidade de adicionar novas variáveis ou restrições. O método é frequentemente comparado com simulações perante cenários, apresentando resultados satisfatórios (MAHOOTCHI; PONNAMBALAM; TIZHOOSH, 2010; CELESTE; SIQUEIRA; CAI, 2021; FLETCHER; PONNAMBALAM, 2008).

Fletcher e Ponnambalam (1998) apresentaram a formulação para a análise de sistemas com múltiplos reservatórios, incorporando explicitamente os limites de armazenamento nas expressões dos primeiros e segundos momentos para as variáveis de estado de armazenamento, que são a base da formulação. Com o auxílio da programação não linear, é possível obter informações úteis para o projeto e a operação de reservatórios, determinando os valores esperados dos estados de armazenamento e suas variâncias, respostas a políticas de liberação, níveis de confiabilidade e probabilidades de falha. Sem envolver qualquer discretização das variáveis do sistema, foi possível obter resultados para as médias e desvios padrões dos estados de armazenamento semelhantes aos obtidos com a simulação.

Zhang e Ponnambalam (2005) aplicaram o modelo FP na gestão de risco em sistemas hidrelétricos, considerando um mercado de eletricidade desregulamentado. Os autores incorporaram as incertezas dos preços da eletricidade, além das afluências, para obter informações estatísticas importantes sobre o sistema de múltiplos reservatórios. Ao aplicar essa formulação ao sistema de reservatórios do Lago Nipigon (Ontário, Canadá) e compará-la com a programação dinâmica dual estocástica (SDDP), os resultados demonstraram que o modelo FP é eficaz na minimização do risco como um dos objetivos da otimização.

Fletcher e Ponnambalam (2008) expandiram seu trabalho sobre o método de otimização estocástica explícita. No artigo citado, os autores comparam a formulação antiga, que opera sob uma política de liberação determinística, com um novo desenvolvimento utilizando uma política baseada na regra de decisão linear do tipo S (*S-type linear decision rule*: S-LDR).

Mahootchi, Ponnambalam e Tizhoosh (2010) utilizaram dois métodos para gestão de reservatórios, Fletcher e Ponnambalam (FP) e Q-Learning, que são capazes de incluir a

minimização dos riscos na função objetivo. O estudo considerou as incertezas nos preços da água, além das afluições aleatórias. As afluições foram modeladas pela distribuição de Kumaraswamy (1980) em contraste com métodos anteriores que assumiam um comportamento gaussiano para resolver as integrais presentes na formulação dos momentos e probabilidades da variável de estado do armazenamento. Na comparação com as simulações, os métodos apresentaram bons resultados e permitiram o desenvolvimento de uma curva de *trade-off* entre risco e retorno.

Kaviani, Hassanli e Homayounfar (2014) propuseram uma abordagem para a alocação de água na irrigação do trigo em Badjgah, no sul do Irã. O modelo utiliza o método FP aliado à distribuição de Kumaraswamy (1980), no contexto de um modelo do tipo *constraint-state* (C-S), no qual as restrições incidem sobre variáveis de estado. Neste estudo, avalia-se a umidade do solo necessária para a cultura, considerando diversos fatores, como profundidade das raízes, umidade do solo, profundidade de irrigação, precipitação, evapotranspiração, lixiviação, propriedades físicas do solo e uma variável estocástica. Com essa formulação, as restrições não incidem sobre as ações (como a irrigação), mas sobre o estado do sistema (como a manutenção da umidade do solo dentro de limites ideais para o cultivo). A utilização da distribuição de Kumaraswamy possibilitou uma formulação com resultados mais realistas, refletindo melhor as condições do sistema e resultando em políticas de irrigação mais robustas sob incerteza.

Celeste, Siqueira e Cai (2021) apresentaram uma nota técnica que propõe uma maneira alternativa de aproximar a solução das várias integrais presentes no método FP usando amostras dos registros históricos de afluência. Para determinar os momentos estatísticos do armazenamento e as probabilidades de contenção, vertimento e déficit, essa abordagem permite obter informações estatísticas com boa precisão sem necessitar a consideração de uma distribuição específica. Além disso, as expressões formuladas são mais curtas e exigem menor poder computacional.

Mousavi et al. (2022) implementaram uma abordagem inovadora que evita o uso de restrições não lineares, reduzindo o número de variáveis e melhorando o desempenho computacional com uma significativa diminuição no tempo de resolução. Além disso, incorpora o primeiro e o segundo momento do déficit, do vertimento e o segundo momento de armazenamento, aprimorando a otimização não linear do objetivo. A aplicação dessa abordagem a uma grande barragem no Brasil e a um sistema de reservatórios na Índia resultou em desempenhos satisfatórios.

Araújo e Celeste (2024) propuseram um refinamento ao método, aplicando-o para o dimensionamento de reservatórios com o objetivo de construir relações entre capacidade, regularização, confiabilidade e vulnerabilidade. Os autores incorporaram a escala mensal, em vez da anual originalmente utilizada, e incluíram estimativas das vulnerabilidades mensais, além dos momentos de déficit e vertimento, que estavam ausentes na formulação original de Fletcher e Ponnambalam (1998). Para comparar os resultados obtidos com o método, foi conduzida uma simulação da operação mensal em cenários sintéticos, guiada pela política

operacional padrão, resultando em resultados satisfatórios.

A versão mais recente do método para o contexto de operação de reservatórios, apresentada por Mousavi e Ponnambalam (2025), foi aplicada a sistemas hidrelétricos multi-reservatório e incorpora equações analíticas para o cálculo direto da energia gerada em função das liberações e dos volumes armazenados. A formulação utiliza uma regra de decisão do tipo S, com foco na maximização do valor esperado da produção anual de energia, além de permitir a estimativa da variância mensal dessa produção. As afluências são modeladas como variáveis aleatórias gaussianas, mantendo a suposição de distribuição adotada no método original. O estudo foi aplicado a um sistema real composto por três reservatórios no Irã, com base em 60 anos de dados históricos. Os resultados indicaram que o método FP apresentou desempenho comparável ao de abordagens mais complexas, como a Programação Dinâmica Estocástica (PDE) e a Otimização Estocástica Implícita (OEI), com a vantagem de exigir significativamente menos recursos computacionais.

3 Material e Métodos

3.1 Balanço Hídrico do Reservatório

O armazenamento de água em um reservatório objetiva regularizar a vazão do curso d'água barrado e atender ao máximo as demandas hídricas, e é relacionado à afluência natural do rio e as perdas por evaporação. Excesso ou falta d'água podem gerar, respectivamente, situações de vertimento ou déficit na liberação de água.

Para equacionar o balanço hídrico de um reservatório de abastecimento de água, pode-se escrever a seguinte expressão

$$S_t = S_{t-1} + \tilde{I}_t - U_t - Sp_t + \delta_t \quad (3.1)$$

onde:

- t refere-se ao período de análise (mensal nesta pesquisa);
- S_t representa o armazenamento do reservatório no final do período;
- $\tilde{I}_t$ é o saldo de afluência natural ao reservatório;
- U_t é a alocação total proposta do reservatório;
- Sp_t é a parcela que representará, caso ocorra, o vertimento;
- δ_t é a quantificação do déficit, caso haja, ao fim do período.

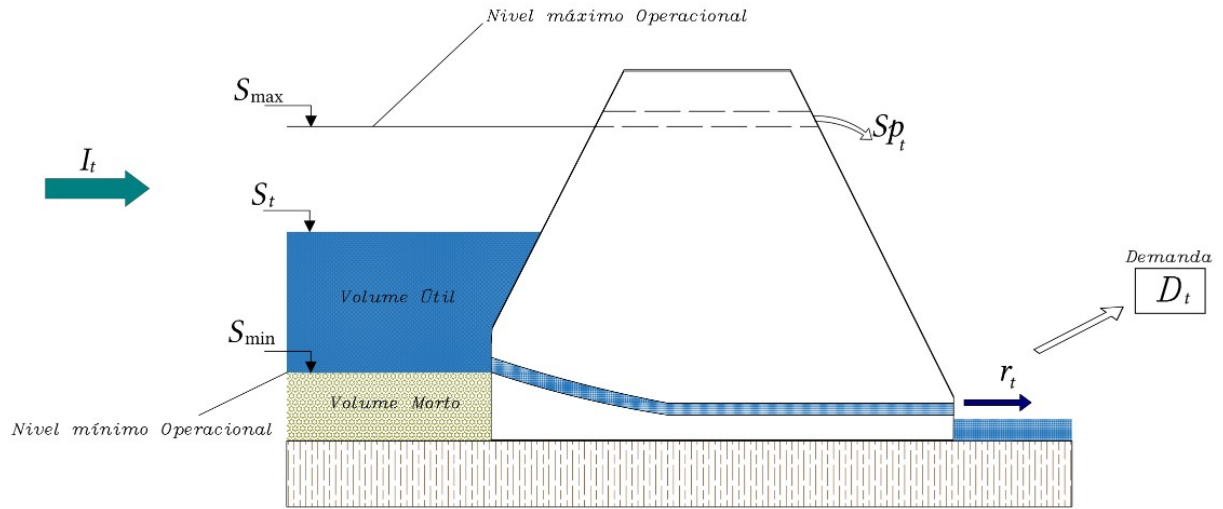
Para modelar a dinâmica de operação de reservatórios, de acordo com a Figura 1, consideramos o armazenamento S_t com limites inferior ($S_{\min}$) e superior ($S_{\max}$) para cada mês do ano. Com isso, o balanço de massa pode ser analisado e condensado em duas instâncias:

$$S_t = \underbrace{S_{t-1} + I_t}_{\text{disponibilidade}} - \underbrace{\left(\overset{\text{proposta}}{U_t} + \overset{\text{excesso}}{Sp_t} - \overset{\text{déficit}}{\delta_t} \right)}_{\text{liberação total real, } r_t} \quad (3.2)$$

Quando os cenários de vertimento e déficit ocorrem, não simultaneamente, afetam a liberação total real do sistema $r_t = U_t + Sp_t - \delta_t$ (ver equação (3.2)). Essa situação incorpora o déficit ou o vertimento à alocação projetada U_t . Quando há um déficit, U_t não pode ser totalmente liberada. Assim, três casos podem ocorrer

$$r_t = \begin{cases} (U_t - o) + o = U_t & \text{se houver contenção} \\ (U_t - \delta_t) + o = U_t - \delta_t & \text{se houver déficit} \\ (U_t - o) + Sp_t = U_t + Sp_t & \text{se houver vertimento} \end{cases} \quad (3.3)$$

Figura 1 – Representação esquemática de um reservatório com as variáveis utilizadas na sua dinâmica.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Em situação de contenção (armazenamento final contido entre seus limites) não haverá déficit nem vertimento e, portanto, a liberação total real r_t será igual a alocação proposta U_t . Em situação de déficit (armazenamento final menor do que seu mínimo), não haverá vertimento e, portanto, a liberação total real r_t será igual a alocação proposta U_t menos o déficit δ_t ; neste caso, define-se a variável alocação real $R_t = U_t - \delta_t$. Em situação de vertimento (armazenamento final maior do que seu máximo), não haverá déficit e, portanto, a liberação total real r_t será igual a alocação proposta U_t adicionada ao vertimento Sp_t ; neste caso, alocação real R_t será igual a proposta U_t .

Para equacionar esses cenários e explicitar a formulação é adotada a variável denominada *volume de armazenamento projetado*, $\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - U_t$. Assim, os cenários de armazenamento dentro dos limites, vertimento e déficit, são moldados com base na liberação U_t .

A primeira situação ocorre quando a proposta U_t é liberada e o armazenamento final permanece (ou está contido) dentro dos limites, ou seja, $S_{\min} \leq \hat{S}_t \leq S_{\max}$ (neste caso, $S_t = \hat{S}_t$). Já quando o armazenamento projetado não for contido, haverá (mas não simultaneamente) vertimento (Sp_t) ou déficit (δ_t). Se a alocação de U_t fizer com que o armazenamento projetado viole o limite superior (ou seja, $\hat{S}_t > S_{\max}$), então o excesso de água deve ser vertido do reservatório. Neste caso, a variável de vertimento Sp_t é acionada de modo que o armazenamento final se torne $S_t = S_{\max}$; a quantidade vertida será de $Sp_t = \hat{S}_t - S_{\max}$.

Alternativamente, quando $\hat{S}_t < S_{\min}$ então U_t não pode ser totalmente atendida e haverá um déficit de liberação δ_t , situação que requer uma liberação alternativa $R_t < U_t$ para que o armazenamento final se torne pelo menos $S_{\min}$. Nesse caso, o valor do déficit será $\delta_t = S_{\min} - \hat{S}_t$ e a liberação real será $R_t = U_t - \delta_t$. Vale ressaltar que tanto Sp_t quanto δ_t são quantidades não negativas; eles se tornam maiores do que zero somente se o armazenamento projetado violar

os limites de armazenamento.

3.1.1 Evaporação no Balanço Hídrico

O volume evaporado (E_t) no tempo t é uma variável determinante do sistema, sendo estimado pelo produto da lâmina evaporativa mensal ϵ_t pela área superficial média durante o tempo t

$$E_t = \epsilon_t \left(\frac{A_{t-1} + A_t}{2} \right) \quad (3.4)$$

onde A_t é a área da superfície líquida (lago) no fim do período t .

A área da superfície pode ser definida usando as curvas área-volume do reservatório, as quais geralmente são funções côncavas, mas também podem ser definidas linearmente como

$$A_t = \theta_0 + \theta_1 (S_t - S_{\min}) \quad (3.5)$$

onde θ_0 é área definida pela reta para o volume mínimo $S_{\min}$ e θ_1 é declividade da reta.

Combinando as equações tem-se

$$\begin{aligned} E_t &= \epsilon_t \left(\frac{A_{t-1} + A_t}{2} \right) \\ &= \epsilon_t \left[\frac{\theta_0 + \theta_1 (S_{t-1} - S_{\min}) + \theta_0 + \theta_1 (S_t - S_{\min})}{2} \right] \\ &= \epsilon_t (\theta_0 - \theta_1 S_{\min}) + \theta_1 \epsilon_t \left(\frac{S_{t-1} + S_t}{2} \right) \\ &= e_t^o + e_t \left(\frac{S_{t-1} + S_t}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que:

- $e_t^o = \epsilon_t (\theta_0 - \theta_1 S_{\min})$ é a perda fixa de evaporação (dimensões de volume)
- $e_t = \theta_1 \epsilon_t$ é a perda evaporativa por unidade de volume (adimensional).

Com isso, é possível inserir a evaporação (E_t) como parcela de volume na equação de balanço hídrico (3.1) resultando em

$$S_t = S_{t-1} + I_t - E_t - U_t - Sp_t + \delta_t \quad (3.7)$$

que, com a evaporação explicitada a equação (3.7) torna-se

$$\left(1 + \frac{e_t}{2} \right) S_t = \left(1 - \frac{e_t}{2} \right) S_{t-1} + I_t - e_t^o - U_t - Sp_t + \delta_t \quad (3.8)$$

Por conseguinte, o armazenamento projetado também incorpora a evaporação em sua equação:

$$\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - U_t - E_t \quad (3.9)$$

$$= S_{t-1} + I_t - U_t - e_t^o - e_t \left(\frac{S_{t-1} + S_t}{2} \right) \quad (3.10)$$

que pode ser resolvida para $\hat{S}_t$ fornecendo

$$\hat{S}_t = \left(\frac{1 - \frac{e_t}{2}}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) S_{t-1} + \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) I_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) U_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) e_t^0 \quad (3.11)$$

3.2 Regra de Decisão

3.2.1 Regra de Decisão Linear do Tipo SQ

A tomada de decisão durante a operação segue, em sua maioria, a indicação do volume do reservatório ou da vazão defluente desejada para o período de tempo adotado. Para este trabalho, foi considerada uma política de liberação mensal do reservatório guiada por uma regra de decisão linear do tipo SQ (SQ-LDR) da seguinte forma (BHASKAR; WHITLATCH, 1987):

$$U_t = S_{t-1} + \alpha_\tau I_t - \beta_\tau \quad (3.12)$$

onde α_τ ($0 \leq \alpha_\tau < 1$) é um parâmetro adimensional, β_τ é uma constante de decisão para cada mês τ do ano, sendo $\tau = t \bmod 12$ ($t \bmod 12 = 0 \Rightarrow \tau = 12$). Se $\alpha_\tau = 0$, a política de liberação torna-se uma LDR do tipo S da forma $U_t = S_{t-1} - \beta_\tau$ usada no método FP mais recente (MOUSAVI; PONNAMBALAM, 2025). Com a incorporação da evaporação, a regra de liberação é apresentada da forma

$$U_t = \left(1 - \frac{e_t}{2} \right) S_{t-1} + \alpha_\tau I_t - \beta_\tau - e_t^0 \quad (3.13)$$

3.2.2 Armazenamento Projetado com SQ-LDR

Sob a regra de decisão adotada e substituindo U_t de (3.13) em (3.11), o volume de armazenamento projetado torna-se

$$\hat{S}_t = \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_t + \beta_\tau] \quad (3.14)$$

3.3 Método FP com Evaporação e SQ-LDR

3.3.1 Armazenamento

No método FP, a dinâmica de um reservatório é representada da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_t &= \hat{S}_t \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]}(\hat{S}_t) \\ &\quad + S_{\min} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_t) \\ &\quad + S_{\max} \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que a notação $\mathbb{1}_{[\cdot]}(\hat{S}_t)$ representa a função indicadora (ou característica), assumindo o valor unitário quando o argumento estiver dentro dos limites e zero caso contrário, conforme

detalhado a seguir

$$\mathbb{1}_{[S_{\tau}^{\min}, S_{\tau}^{\max}]}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } S_{\min} \leq \hat{S}_t \leq S_{\max} \text{ (contenção)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\mathbb{1}_{(-\infty, S_{\tau}^{\min})}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } S_{\min} < S_{\tau}^{\min} \text{ (déficit)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\mathbb{1}_{(S_{\tau}^{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } \hat{S}_t > S_{\max} \text{ (vertimento)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.13) em (3.15), tem-se a equação do balanço hídrico com evaporação e SQ-LDR implementada no método FP:

$$\begin{aligned} S_t = & \left\{ \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) [(1 - \alpha_{\tau}) I_t + \beta_{\tau}] \right\} \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]}(\hat{S}_t) \\ & + S_{\min} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_t) \\ & + S_{\max} \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.3.2 Déficit

O déficit ocorre quando não é possível realizar o atendimento pleno da demanda. Nesta situação, o volume projetado fica abaixo do volume mínimo, surgindo assim a variável de déficit para quantificar essa situação:

$$\delta_t = (S_{\min} - \hat{S}_t) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_t) \quad (3.20)$$

Substituindo $\hat{S}_t$ de (3.14) na equação acima fornece a expressão final do déficit incorporando evaporação e SQ-LDR no método FP:

$$\delta_t = \left[- \left(\frac{1 - \alpha_{\tau}}{1 + \frac{e_{\tau}}{2}} \right) I_t + S_{\min} - \frac{\beta_{\tau}}{1 + \frac{e_{\tau}}{2}} \right] \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_t) \quad (3.21)$$

3.3.3 Vertimento

O vertimento ocorre quando o volume armazenado no período anterior, somado ao quantitativo que entrou no sistema e subtraído o volume liberado para atender à demanda, resulta em um valor que supera a capacidade do reservatório. Nesse caso, o volume projetado é superior ao limite máximo, resultando na seguinte quantidade vertida:

$$Sp_t = (\hat{S}_t - S_{\max}) \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.22)$$

Substituindo $\hat{S}_t$ de (3.14) em (3.22):

$$Sp_t = \left\{ \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) [(1 - \alpha_{\tau}) I_t + \beta_{\tau}] - S_{\max} \right\} \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) \quad (3.23)$$

Dessa forma, o vertimento é explicitamente equacionado da seguinte maneira:

$$Sp_t = \left[\left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) I_t - \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \right] \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \quad (3.24)$$

3.4 Probabilidades de Contenção, Déficit e Vertimento

3.4.1 Probabilidade de Contenção

Por definição, o valor esperado da expressão (3.16) representa a probabilidade do armazenamento projetado permanecer contido dentro dos limites de armazenamento, ou probabilidade de contenção $\mathbb{P}_\tau^{\text{con}}$, expressa por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]}(\hat{S}_\tau) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\ &= \Pr \left(S_{\min} \leq \hat{S}_\tau \leq S_{\max} \right) \\ &= \Pr \left(S_{\min} \leq \left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] \leq S_{\max} \right) \\ &= \Pr \left(\frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \leq I_\tau \leq \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \right) \\ &= \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $\Pr(\cdot)$ denota probabilidade, $f_{I_\tau}(I_\tau)$ é a função densidade de probabilidade (PDF: *probability density function*) da variável aleatória afluência no mês τ , e a integral estima a probabilidade de I_τ estar entre os seguintes limites de integração inferior e superior, respectivamente:

$$\begin{cases} \text{LB}_\tau = \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \\ \text{UB}_\tau = \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \end{cases} \quad (3.26)$$

3.4.2 Probabilidade de Déficit

Da mesma forma, a esperança da equação (3.17) representa a probabilidade do armazenamento projetado ficar abaixo do limite mínimo de armazenamento, ou probabilidade de déficit $\mathbb{P}_\tau^{\text{def}}$, expressa por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min})}(\hat{S}_\tau) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\ &= \Pr \left(\hat{S}_\tau < S_{\min} \right) \\ &= \Pr \left(\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] < S_{\min} \right) \\ &= \Pr \left(I_\tau < \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.4.3 Probabilidade de Vertimento

Finalmente, a esperança da equação (3.18) representa a probabilidade de vertimento $\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}$ ou probabilidade do armazenamento projetado ficar acima do limite máximo de armazenamento, expressa por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(S_\tau^{\max}, +\infty)} (\hat{S}_\tau) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \\
 &= \Pr \left(\hat{S}_\tau > S_{\max} \right) \\
 &= \Pr \left(\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] > S_{\max} \right) \\
 &= \Pr \left(I_\tau > \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \right) \\
 &= \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau = \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

3.5 Momentos do Armazenamento

3.5.1 Primeiro Momento do Armazenamento

O valor esperado da equação (3.19) para qualquer mês τ resulta no primeiro momento estatístico (ou média) do armazenamento para o referido mês:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(S_\tau) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\
 &\quad + S_{\min} \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})} (\hat{S}_\tau) \right) \\
 &\quad + S_{\max} \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)} (\hat{S}_\tau) \right) \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Nesta situação, há uma consideração a ser feita por conta da lei do estatístico inconsciente (DEVORE; BERK; CARLTON, 2021), baseada na qual

$$\mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right] f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.30}$$

Por meio de (3.14), quando o armazenamento projetado for $S_{\min}$ ou $S_{\max}$, respectivamente, então a afluência assume os valores LB_τ ou UB_τ . Isso implica em

$$\mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) = \int_{\text{LB}_\tau}^{\text{UB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.31}$$

Portanto, a equação do primeiro momento de armazenamento é, finalmente, expressa da forma

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_\tau) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \int_{LB_\tau}^{UB_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + S_{\min} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + S_{\max} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}\end{aligned}\quad (3.32)$$

3.5.2 Segundo Momento do Armazenamento

Elevando ao quadrado a equação do balanço hídrico (3.19) implica em

$$\begin{aligned}S_t^2 &= \left[\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] \right]^2 \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]}(\hat{S}_t) \\ &\quad + (S_{\min})^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_t) \\ &\quad + (S_{\max})^2 \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t)\end{aligned}\quad (3.33)$$

onde as funções indicadoras não estão elevadas ao quadrado, uma vez que produzem apenas resultados binários, motivo também pelo qual os produtos de diferentes funções indicadoras desaparecem. A esperança de (3.33), equivalente ao cálculo do segundo momento de armazenamento para o mês τ é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_\tau^2) &= \mathbb{E} \left(\left[\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] \right]^2 \cdot \mathbb{1}_{[S_{\min}, S_{\max}]}(\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + (S_{\min})^2 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + (S_{\max})^2 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \right)\end{aligned}\quad (3.34)$$

que, após desenvolvida, resulta na expressão do segundo momento do armazenamento

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_\tau^2) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \int_{LB_\tau}^{UB_\tau} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + 2 \frac{(1 - \alpha_\tau)}{(1 + \frac{e_\tau}{2})^2} \beta_\tau \cdot \int_{LB_\tau}^{UB_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + (S_{\min})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + (S_{\max})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}\end{aligned}\quad (3.35)$$

3.6 Momentos do Déficit

3.6.1 Primeiro Momento do Déficit

O valor esperado da expressão do déficit (3.21) para qualquer mês τ é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_\tau) &= - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \right)\end{aligned}\quad (3.36)$$

que resulta na equação do primeiro momento do déficit

$$\mathbb{E}(\delta_\tau) = -\left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \quad (3.37)$$

3.6.2 Segundo Momento do Déficit

O quadrado da expressão do déficit (3.21) é

$$\begin{aligned} \delta_t^2 &= \left[\left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 I_t^2 - 2 \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) I_t \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 \right] \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \\ &= \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 I_t^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \\ &\quad - 2 \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) I_t \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \\ &\quad + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau) \end{aligned} \quad (3.38)$$

e seu valor esperado fornece

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_\tau^2) &= \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 \cdot \mathbb{E}\left(I_\tau^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau)\right) \\ &\quad - 2 \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau)\right) \\ &\quad + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_{\min})}(\hat{S}_\tau)\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

que resulta na equação do segundo momento do déficit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_\tau^2) &= \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad - 2 \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\text{LB}_\tau} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.7 Momentos do Vertimento

3.7.1 Primeiro Momento do Vertimento

O valor esperado da expressão do vertimento (3.24) para qualquer mês τ é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Sp_\tau) &= \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \mathbb{E}\left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau)\right) \\ &\quad - \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau)\right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

que resulta na equação do primeiro momento do vertimento

$$\mathbb{E}(Sp_\tau) = \left(\frac{1-\alpha_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \int_{\text{UB}_\tau}^{+\infty} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau - \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1+\frac{e_\tau}{2}}\right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} \quad (3.42)$$

3.7.2 Segundo Momento do Vertimento

O quadrado da expressão do vertimento (3.24) é

$$\begin{aligned}
 Sp_t^2 &= \left[\left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 I_t^2 - 2 \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) I_t \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) + \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \right] \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \\
 &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 I_t^2 \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \\
 &\quad - 2 \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) I_t \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \\
 &\quad + \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

e seu valor esperado fornece

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Sp_\tau^2) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau^2 \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \right) \\
 &\quad - 2 \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \right) \\
 &\quad + \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(S_{\max}, +\infty)}(\hat{S}_\tau) \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

que resulta na equação do segundo momento do vertimento

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Sp_\tau^2) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \int_{UB_\tau}^{+\infty} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\
 &\quad - 2 \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \int_{UB_\tau}^{+\infty} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\
 &\quad + \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

3.8 Valores Esperados da Liberação Proposta, Alocação Real e Liberação Total

A partir da expressão da liberação proposta em (3.13), seu valor esperado para qualquer mês τ é

$$\mathbb{E}(U_\tau) = \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) + \alpha_\tau \bar{I}_\tau - \beta_\tau - e_\tau^o \tag{3.46}$$

Uma vez que a alocação real $R_t = U_t - \delta_t$, seu valor esperado é:

$$\mathbb{E}(R_\tau) = \mathbb{E}(U_\tau) - \mathbb{E}(\delta_\tau) \tag{3.47}$$

Semelhantemente, o valor esperado da liberação total real $r_t = R_t + Sp_t$ é:

$$\mathbb{E}(r_\tau) = \mathbb{E}(R_\tau) + \mathbb{E}(Sp_\tau) \tag{3.48}$$

3.9 Formulação do Problema de Otimização

Um problema de otimização da operação de reservatórios pode ser formulado com o objetivo de minimizar o valor esperado da soma dos desvios quadrados entre liberações e demandas. Em um sentido determinístico, uma função objetivo poderia ser expressa da forma

$$\text{minimizar } Z = \sum_{t=1}^N (r_t - D_t)^2 = \sum_{y=1}^Y \sum_{\tau=1}^T (r_{y,\tau} - D_{y,\tau})^2 \quad (3.49)$$

na qual D_τ é a demanda alvo no mês τ ; N é o horizonte operacional ($t = 1, \dots, N$); e $y = 1, \dots, Y$ é o índice da escala anual, significando que o horizonte operacional de N meses contém um total de Y anos (cada ano com 12 meses). Para um dado cenário de afluências, resolver o problema de otimização determinística para uma operação mensal forneceria um conjunto de dados contendo $N = 12Y$ valores do quadrado do desvio entre liberações e demandas. O desvio quadrático médio amostral seria, portanto,

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_t - D_t)^2 \\ &= \frac{1}{12Y} \sum_{y=1}^Y \sum_{\tau=1}^{12} (r_{y,\tau} - D_{y,\tau})^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \left[\frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y (r_{y,\tau} - D_{y,\tau})^2 \right] \\ &= \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \bar{Z}_\tau \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde $\bar{Z}_\tau = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y (r_{y,\tau} - D_{y,\tau})^2$ é o desvio quadrático médio amostral para o mês τ . As esperanças $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{E}(Z_\tau)$ são as equivalentes populacionais de $\bar{Z}$ e $\bar{Z}_\tau$, respectivamente. Com base em (3.50)

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E}(Z_\tau) = \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E}((r_\tau - D_\tau)^2) \quad (3.51)$$

Em um sentido estocástico, a otimização da operação do reservatório pode visar a minimização do valor esperado $\mathbb{E}(Z)$. Omitindo a constante $1/12$ da equação anterior, a função objetivo estocástica torna-se

$$\text{minimizar } \mathbb{Z}_r = \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E}((r_\tau - D_\tau)^2) = \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E}((U_\tau + Sp_\tau - \delta_\tau - D_\tau)^2) \quad (3.52)$$

A inclusão de ambos os termos de déficit e vertimento na função objetivo pressupõe que, respectivamente, o abastecimento de água e o controle de enchentes são importantes para

a operação. Se o único objetivo é o abastecimento de água, então R_τ pode ser usado em vez de r_τ e a função objetivo¹ seria $\mathbb{Z} = \mathbb{E} \left[\sum_{\tau=1}^{12} (R_\tau - D_\tau)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{12} (U_\tau - \delta_\tau - D_\tau)^2 \right]$.

Com a LDR assumida de (3.13), substituindo U_τ , a função objetivo pode ser expressa como

$$\mathbb{Z}_r = \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E} \left(\left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) S_{\tau-1} + \alpha_\tau I_t + Sp_\tau - \delta_\tau - (\beta_\tau + e_\tau^o + D_\tau) \right]^2 \right) \quad (3.53)$$

O desenvolvimento dessa equação encontra-se no Apêndice A e resulta na expressão a seguir

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_r = & \sum_{\tau=1}^{12} \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right)^2 \mathbb{E} (S_{\tau-1}^2) + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \mathbb{E} (Sp_\tau) \right. \\ & - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \mathbb{E} (\delta_\tau) - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \\ & + \alpha_\tau^2 \mathbb{E} (I_\tau^2) + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E} (Sp_\tau) - 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E} (\delta_\tau) - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \bar{I}_\tau \\ & + \mathbb{E} (Sp_\tau^2) - 2 (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \mathbb{E} (Sp_\tau) \\ & \left. + \mathbb{E} (\delta_\tau^2) + 2 (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \mathbb{E} (\delta_\tau) + (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Com o intuito de evitar as suposições de independência, uma expansão em série de Taylor de ordem zero da função objetivo pode ser testada:

$$\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_0 = \sum_{\tau=1}^{12} (\mathbb{E} (r_\tau) - D_\tau)^2 \quad (3.55)$$

resultando em (ver Apêndice B)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_0 = & \sum_{\tau=1}^{12} \left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right)^2 \mathbb{E} (S_{\tau-1})^2 + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \mathbb{E} (Sp_\tau) \right. \\ & - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \mathbb{E} (\delta_\tau) - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \\ & + \alpha_\tau^2 \bar{I}_\tau^2 + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E} (Sp_\tau) - 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E} (\delta_\tau) - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + D_\tau + e_t^o) \bar{I}_\tau \\ & + \mathbb{E} (Sp_\tau)^2 - 2 (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \mathbb{E} (Sp_\tau) \\ & \left. + \mathbb{E} (\delta_\tau)^2 + 2 (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau) \mathbb{E} (\delta_\tau) + (\beta_\tau + e_t^o + D_\tau)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Na equação acima, apenas os primeiros momentos são necessários. A diferença entre as equações (3.54) e (3.56) é, simplesmente,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_r - \mathbb{Z}_0 = & \sum_{\tau=1}^{12} \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right)^2 (\mathbb{E} (S_{\tau-1}^2) - \mathbb{E} (S_{\tau-1})^2) + \alpha_\tau^2 (\mathbb{E} (I_\tau^2) - \bar{I}_\tau^2) \right. \\ & \left. + \mathbb{E} (Sp_\tau^2) - \mathbb{E} (Sp_\tau)^2 + \mathbb{E} (\delta_\tau^2) - \mathbb{E} (\delta_\tau)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

¹ A estimativa do equivalente amostral de $\mathbb{Z}$ a partir de resultados de simulação é

$$12 \cdot \bar{Z} = \sum_{\tau=1}^{12} \bar{Z}_\tau = \sum_{t=1}^{12} \underbrace{\left[\frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y (r_{y,\tau} - D_{y,\tau})^2 \right]}_{\text{soma de 12 médias}}$$

$$\mathbb{Z}_r - \mathbb{Z}_0 = \sum_{\tau=1}^{12} \left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right)^2 \text{Var}(S_{\tau-1}) + \alpha_\tau^2 \text{Var}(I_\tau) + \text{Var}(Sp_\tau) + \text{Var}(\delta_\tau) \right] \quad (3.58)$$

Portanto, quanto maiores as variâncias sazonais, maior será o erro cometido pela aproximação de Taylor. Versões anteriores do método FP comumente usavam uma função objetivo baseada na liberação proposta esperada, definida como $\mathbb{Z}_U = \sum_{\tau=1}^{12} (\mathbb{E}[U_\tau] - D_\tau)^2$ conforme adotada por Celeste, Siqueira e Cai (2021).

3.10 Cálculo de Integrais no Método FP

Com a formulação apresentada anteriormente, para resolver as equações é necessário o cálculo das seguintes integrais:

$$\text{Tipo (1):} \quad \int_a^b f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.59)$$

$$\text{Tipo (2):} \quad \int_a^b I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.60)$$

$$\text{Tipo (3):} \quad \int_a^b I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \quad (3.61)$$

A formulação adequada para resolver essas integrais influencia diretamente a precisão e a eficiência dos métodos. Assim, são propostas três diferentes abordagens para a resolução das integrais, adotando também a regra de decisão linear do tipo SQ, resultando nas seguintes versões do método FP:

- **FP-SQE-GAUSS:** Nesta versão, assume-se que os dados de afluência seguem uma distribuição de probabilidade gaussiana (normal). Isso permite que as integrais sejam resolvidas de forma analítica, simplificando os cálculos. Caso os dados apresentem um comportamento aproximado ao da distribuição normal, com simetria e uma tendência bem definida, este método é vantajoso. No entanto, a precisão será afetada se a distribuição real dos dados apresentar assimetrias ou caudas longas em sua forma.
- **FP-SQE-AMOSTRA:** Esta abordagem não assume nenhuma distribuição prévia para os dados. Em vez disso, as integrais são aproximadas com base nos dados históricos observados. Essa versão representa as características empíricas dos dados analisados, capturando assimetrias e variações. No entanto, a precisão pode depender da quantidade e da qualidade dos dados disponíveis, sendo que a eficiência pode ser comprometida quando há poucos registros históricos. Essa estratégia foi proposta por Celeste, Siqueira e Cai (2021).
- **FP-SQE-ECDF:** Nesta formulação, as integrais são aproximadas por meio da Função de Distribuição Acumulada Empírica (ECDF), que é construída a partir dos dados históricos.

A ECDF modela as incertezas de forma mais flexível, preservando a estrutura estatística dos dados sem assumir distribuições específicas (WILKS, 2011). Essa versão é especialmente interessante quando a distribuição subjacente é complexa ou desconhecida. Entretanto, a eficiência do método depende da quantidade e qualidade dos dados disponíveis. Essa estratégia representa uma nova contribuição da presente pesquisa.

Cada versão será detalhada nas seções seguintes, e suas limitações e vantagens serão discutidas ao longo deste trabalho, com o objetivo de encontrar a versão que equilibre precisão, complexidade computacional e disponibilidade de dados históricos.

3.11 FP-SQE-GAUSS: Integrais Assumindo Distribuição Gaussiana

Por definição, a função densidade de probabilidade (PDF) de uma variável aleatória X seguindo uma distribuição gaussiana da forma $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z_x^2) \quad (3.62)$$

sendo $z_x = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$. A função de distribuição acumulada correspondente (CDF: *cumulative distribution function*) de X é dada pela integral da PDF

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(z_x)] \quad (3.63)$$

na qual $\operatorname{erf}(\cdot)$ é a função erro formulada como $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.

Com as considerações da PDF para uma distribuição gaussiana, é possível solucionar os três tipos de integrais abaixo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_X(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}(z_b) - \operatorname{erf}(z_a) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b x f_X(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b x \exp(-z_x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \mu \left[\operatorname{erf}(z_b) - \operatorname{erf}(z_a) \right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \left[\exp(-z_b^2) - \exp(-z_a^2) \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 f_X(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b x^2 \exp(-z_x^2) dx \\
&= \frac{1}{2} (\mu^2 + \sigma^2) \left[\operatorname{erf}(z_b) - \operatorname{erf}(z_a) \right] \\
&\quad - \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \left[(\mu + b) \exp(-z_b^2) - (\mu + a) \exp(-z_a^2) \right]
\end{aligned} \tag{3.66}$$

3.11.1 Integrais dos Termos das Afluências

As soluções para todas as integrais que aparecem nas expressões de momentos brutos de armazenamento/déficit/vertimento, bem como nas expressões para probabilidades, podem ser encontradas analiticamente. Sendo $X = I_\tau$, supondo os limites de integração genéricos inferior a e superior b :

$$z_a = \frac{a - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\operatorname{Var}(I_\tau)}} \Rightarrow z_{\text{LB}_\tau} = \frac{\text{LB}_\tau - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\operatorname{Var}(I_\tau)}} \tag{3.67}$$

$$z_b = \frac{b - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\operatorname{Var}(I_\tau)}} \Rightarrow z_{\text{UB}_\tau} = \frac{\text{UB}_\tau - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\operatorname{Var}(I_\tau)}} \tag{3.68}$$

3.11.2 Equações Finais Considerando Afluências Gaussianas

- Probabilidade de Contenção:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{con}} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \operatorname{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \tag{3.69}$$

- Probabilidade de Déficit:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{def}} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \tag{3.70}$$

- Probabilidade de Vertimento:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \tag{3.71}$$

- Primeiro Momento do Armazenamento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \bar{I}_\tau \left[\operatorname{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \operatorname{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) - \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + S_{\min} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + S_{\max} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

- Segundo Momento do Armazenamento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau^2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[\text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + \text{UB}_\tau) \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \right. \\
&\quad \left. - (\bar{I}_\tau + \text{LB}_\tau) \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right] \\
&\quad + \frac{1 - \alpha_\tau}{(1 + \frac{e_\tau}{2})^2} \beta_\tau \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) - \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad - 2 \frac{1 - \alpha_\tau}{(1 + \frac{e_\tau}{2})^2} \beta_\tau \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) - \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + S_{\min}^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + S_{\max}^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

- Primeiro Momento do Déficit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta_\tau) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \bar{I}_\tau \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad + \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \\
&\quad + \left(S_\tau^{\min} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

- Segundo Momento do Déficit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta_\tau^2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + \text{LB}_\tau) \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \right] \\
&\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \bar{I}_\tau \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}_\tau}) \right] \\
&\quad + 2 \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \exp(-z_{\text{LB}_\tau}^2) \\
&\quad + \left(S_{\min} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

- Primeiro Momento do Vertimento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Sp_\tau) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \bar{I}_\tau \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\
&\quad + \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \\
&\quad - \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

- Segundo Momento do Vertimento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Sp_\tau^2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\
&\quad + \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} (\bar{I}_\tau + \text{UB}_\tau) \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \\
&\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \bar{I}_\tau \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}_\tau}) \right] \\
&\quad - 2 \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \exp(-z_{\text{UB}_\tau}^2) \\
&\quad + \left(S_{\max} - \frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

3.12 FP-SQE-AMOSTRA: Integrais a partir da Amostra de Dados Históricos

Para resolução das integrais sem atribuir uma distribuição de probabilidades específica, será utilizado a abordagem estudada por Celeste, Siqueira e Cai (2021). Esta formulação relaciona a PDF ($f_X(x)$) e a CDF ($F_X(x)$) de uma variável aleatória X , definida pelos limites de integração genéricos a e b .

Será considerado X^{sub} um subconjunto de X , delimitado pelos valores inferiores e superiores a e b . A partir de uma amostra de X de tamanho n^{sam} e uma amostra de X^{sub} de tamanho n^{sub} , o valor esperado de X pode ser aproximado pela média da amostra $\bar{x} = \frac{1}{n^{\text{sam}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sam}}} X_i$ que representa a estimativa empírica do valor esperado de X dada uma amostra de tamanho n^{sam} :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \approx \bar{x} = \frac{1}{n^{\text{sam}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sam}}} x_i \tag{3.78}$$

Desse modo, as integrais podem ser aproximadas em termos amostrais pela soma dos elementos da subamostra X^{sub} dividida pelo tamanho total da amostra n^{sam} :

$$\int_a^b x f_X(x) dx \approx \frac{1}{n^{\text{sam}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sub}}} x_i^{\text{sub}} \tag{3.79}$$

Para isso, empiricamente, as integrais podem ser formuladas de maneira genérica para resolver as integrais, resultando na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^k f_X(x) dx &\approx \frac{1}{n^{\text{sam}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sub}}} x_i^{\text{sub}} \\
&\approx \left(\frac{1}{n^{\text{sam}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sub}}} x_i^{\text{sub}} \right) \cdot \frac{n^{\text{sub}}}{n^{\text{sub}}} \\
&\approx \left(\frac{1}{n^{\text{sub}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sub}}} x_i^{\text{sub}} \right)^k \cdot \frac{n^{\text{sub}}}{n^{\text{sam}}} \\
&\approx m_k^{\text{sub}} \cdot \frac{n^{\text{sub}}}{n^{\text{sam}}}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

O índice k vai determinar o tipo da integral e sua resolução adequada. O termo m_k^{sub} representa o momento bruto de ordem k da amostra e a razão $n^{\text{sub}}/n^{\text{sam}}$ corresponde à relação entre o tamanho da subamostra e o tamanho total da amostra X . O procedimento consiste em retirar uma subamostra de tamanho n^{sub} da amostra X , cujos elementos estejam limitados pelos valores a e b . Em seguida, calcula-se o momento bruto correspondente m_k^{sub} da subamostra, multiplicando esse valor pela razão $n^{\text{sub}}/n^{\text{sam}}$, o que permite obter a estimativa desejada.

Com $k = 0$, a integral torna-se a Equação (3.59), que pode ser aproximada com base na expressão que define a CDF

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt \tag{3.81}$$

A probabilidade de X estar no intervalo $[a, b]$ pode ser expressa por

$$\int_a^b f_X(x) dx = F_X(a) - F_X(b) \tag{3.82}$$

Empiricamente, essa probabilidade pode ser estimada a partir de uma amostra, ao utilizar a função de distribuição acumulada empírica $F_X^s(x)$, que aproxima a CDF teórica $F_X(x)$. A relação, então, torna-se:

$$\int_a^b f_X(x) dx \approx F_X^s(a) - F_X^s(b)$$

Para $k = 1$ a integral é semelhante a Equação (3.60) e m_1^{sub} corresponde ao primeiro momento bruto da subamostra que é determinado por $\frac{1}{n^{\text{sub}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sub}}} x_i^{\text{sub}}$. Por fim, para $k = 2$ a integral representa a Equação (3.61) e m_2^{sub} o segundo momento bruto da subamostra definido por $\left(\frac{1}{n^{\text{sub}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{sub}}} x_i^{\text{sub}} \right)^2$.

Com essas abordagens, as soluções para todas as integrais que aparecem nas expressões dos momentos brutos de armazenamento, déficit e vertimento, assim como nas expressões para as probabilidades, podem ser aproximadas em função da amostra de dados disponíveis.

3.13 FP-SQE-ECDF: Aproximação das Integrais via ECDF

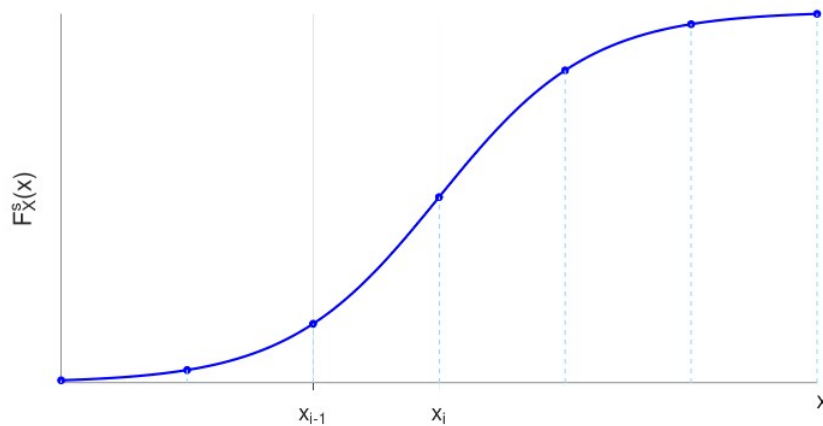
Este estudo introduz uma abordagem inovadora—FP-SQE-ECDF—que utiliza apenas a função de distribuição acumulada empírica (ECDF) para estimar numericamente as integrais necessárias. A integral de interesse é aproximada por meio dos seguintes passos:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b x^k f_X(x) dx &\approx \sum_{i=1}^N x_i^k \cdot f_X^s(x_i) \cdot \Delta x_i \\
 &\approx \sum_{i=1}^N x_i^k \cdot \Delta F_X^s(x_i) \\
 &\approx \sum_{i=1}^N x_i^k \cdot [F_X^s(x_i) - F_X^s(x_{i-1})]
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Nesta formulação:

- N = número de intervalos discretizados (ou “classes”) dentro do intervalo $[a, b]$; um valor de $N = 100$ é utilizado neste estudo.
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ = largura de cada intervalo (ver Figura 2).
- $f_X^s(x_i)$ = frequência relativa (estimativa da PDF baseada no histograma) de X no ponto x_i .
- $\Delta F_X^s(x_i)$ = probabilidade estimada de X estar contido em $[x_{i-1}, x_i]$, que pode ser calculada subtraindo o valor da ECDF no limite inferior do valor da ECDF no limite superior: $\Delta F_X^s(x_i) = F_X^s(x_i) - F_X^s(x_{i-1})$.

Figura 2 – Discretização utilizada pelo método FP-SQE-ECDF.



Tanto o FP-SQE-AMOSTRA quanto o FP-SQE-ECDF fornecem alternativas flexíveis e baseadas em dados para estimar momentos e probabilidades sem depender de suposições específicas sobre a distribuição—ao contrário do método FP-SQE-GAUSS, que assume uma distribuição normal para os fluxos de entrada. Essas abordagens apoiam diretamente a contribuição central deste estudo, ao reduzir significativamente a dependência do modelo em relação às suposições

sobre a distribuição das afluições, aumentando assim sua robustez e aplicabilidade em cenários do mundo real.

3.14 Estudo de Caso

O estudo de caso desta pesquisa utiliza dados provenientes da barragem de Sobradinho, que está inserida na importante bacia hidrográfica do rio São Francisco. A bacia possui uma área de 619.543,94 km², abrangendo 505 municípios, dos quais 409 estão totalmente inseridos e 96 parcialmente. Esta bacia é subdividida em Alto, Médio, Submédio e Baixo São Francisco (CODEVASF, 2024).

O reservatório possui o maior lago artificial do mundo, com uma extensão linear aproximada de 320 km e uma cota nominal de 392,50 m. Construído em 1973, o objetivo inicial do reservatório era regularizar a vazão para potencializar a produção de energia elétrica, o que acabou sendo invertido ao longo do tempo. A barragem é de terra zoneada, com altura máxima de 41 m e comprimento total de 12,5 km, possuindo um vertedouro de superfície e um descarregador de fundo para controle de cheias. Suas tomadas de água têm capacidade de até 25 m³/s (CHESF, 2024). A Tabela 1 ilustra os dados do reservatório, extraídos do site da Companhia Hidro Elétrica do São Francisco (Chesf).

A barragem foi construída na zona submédica da bacia do rio São Francisco, a 1.912 km de sua nascente no estado de Minas Gerais e a 748 km de sua foz, entre Sergipe e Alagoas (CORREIA; DIAS; ARAGAO, 2006). A topografia da região é irregular e possui um clima semiárido, localizado no polígono das secas, sujeitando a área do reservatório a períodos críticos prolongados com eventos de estiagens. A precipitação ocorre significativamente entre os meses de novembro e abril, com valores máximos entre 800 e 1.000 mm e mínimos abaixo de 400 mm (BACELAR, 2019; CORREIA; DIAS; ARAGAO, 2006).

A região onde o reservatório foi instalado possui vegetação predominante de caatinga, composta por arbustos, árvores e cactos. O relevo era caracterizado por um vale, com pequenas

Tabela 1 – Informações sobre o reservatório de Sobradinho.

Característica	Dado
Área de reservatório na cota 392,50 m	4.214 km ²
Volume total do reservatório	34.116 hm ³
Volume morto do reservatório	5.447 hm ³
Volume útil do reservatório	28.669 hm ³
Vazão regularizada	2.060 m ³ /s km
Nível máximo <i>maximorum</i>	393,50 m
Nível máximo operativo normal	392,50 m
Nível mínimo operativo normal	380,50 m
Área de drenagem até o reservatório	498.968 km ²

Fonte: Chesf (2024).

cidades que tiveram que ser adaptadas às implicações do reservatório. O lago formado possui um espelho d'água de 4.214 km², sujeito a condições hidrometeorológicas adversas, incluindo altas taxas de evaporação. Segundo a ANA (2021), a evaporação é o segundo maior gasto hídrico, sendo seu volume mais de cinco vezes o necessário para o abastecimento doméstico do Brasil (BACELAR, 2019).

Os dados fluviométricos das vazões naturais da barragem estão disponíveis no portal da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) (www.ccee.org.br). As perdas médias mensais por evaporação, organizadas por Mendes (2012), são apresentadas na Tabela 2 que mostra as lâminas evaporativas mensais (mm). Para a demanda, a fim de simplificar a questão do uso múltiplo da água do reservatório e manter a continuidade do cálculo, foi utilizada uma demanda constante D_τ igual a 80% da vazão média de longo período (MLP), considerada como única para todos os meses do ano.

Além disso, para validar a consideração das afluições históricas como normalmente distribuídas para a resolução das integrais apresentadas no método, foi realizada uma investigação sobre a normalidade das vazões para cada mês do ano. O teste de Jarque-Bera (JARQUE; BERA, 1980), que se baseia no método de mínimos quadrados, utilizando os parâmetros dos coeficientes de curtose e assimetria foi realizado para cada mês dos registros de entrada, indicando que somente nos meses de janeiro, agosto, outubro e dezembro a normalidade não é rejeitada, ou seja, apenas nesses meses as afluições ao reservatório de Sobradinho podem ser corretamente representadas por uma distribuição gaussiana. A Figura 3 apresenta graficamente os resultados do teste de normalidade. Os dados seguem uma distribuição normal quando os pontos estão alinhados com a linha de referência.

3.15 Validação do Modelo

Os resultados produzidos pelo modelo FP-SQE foram validados por meio de simulações da operação mensal do reservatório de Sobradinho, aplicadas a diversos cenários de afluição. As simulações foram orientadas pela regra de decisão linear do tipo SQ, utilizando os parâmetros otimizados (α_τ , β_τ) obtidos a partir do modelo FP-SQE. O objetivo foi avaliar de forma independente a confiabilidade e a consistência dos resultados do modelo, comparando-os com indicadores de desempenho baseados em simulação. Seguindo o procedimento descrito por Araújo e Celeste (2024), os cenários de afluição utilizados nas simulações foram os seguintes:

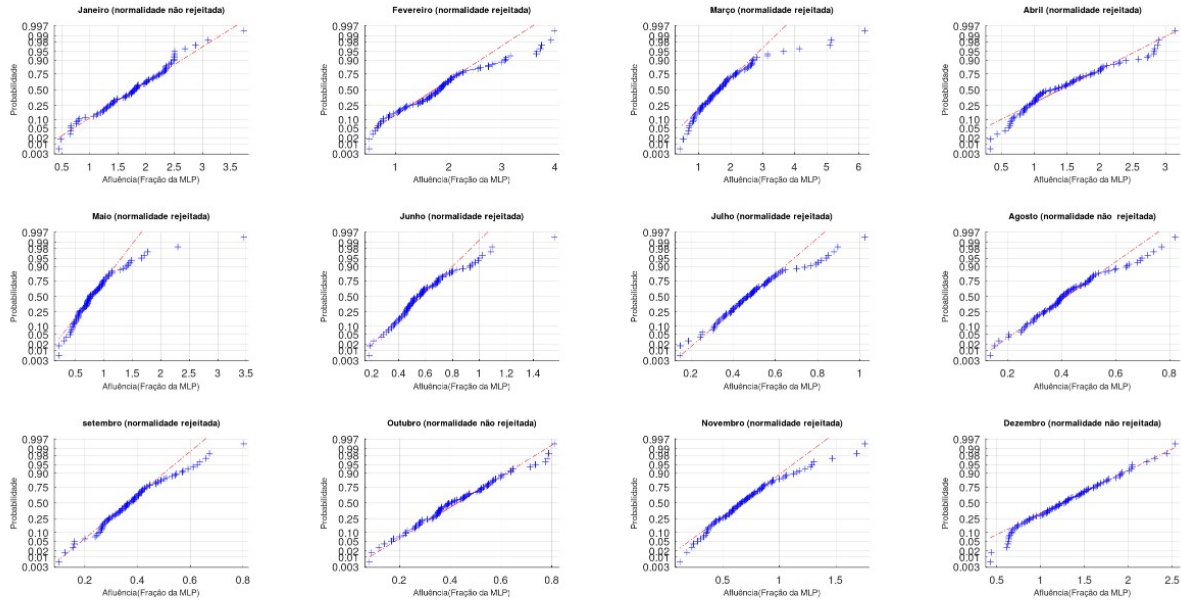
- Cen-DG: cenário sintético mensal de 1.000 anos assumindo as afluições de cada mês

Tabela 2 – Lâminas evaporativas mensais (mm) do reservatório de Sobradinho.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
171	109	61	56	108	104	165	203	234	267	245	223

Fontes: Mendes (2012).

Figura 3 – Gráficos de probabilidade normal e resultados do teste de Jarque-Bera para cada mês nos registros de afluência. Quando todos os pontos caem perto da linha, a suposição de normalidade é razoável.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

seguindo uma distribuição gaussiana com média e desvio padrão iguais aos históricos. Formulado a partir dos registros históricos, onde são obtidos os valores amostrais da média e do desvio padrão das afluências para cada mês, respectivamente, $\bar{I}_\tau$ e σ_τ . A partir disso, uma afluência sintética é gerada por $\bar{I}_\tau + \psi\sigma_\tau$, em que ψ é a variável aleatória normal padrão (média zero e variância unitária).

- Cen-RH: oitenta e cinco anos de registros históricos observados de afluência mensal natural para Sobradinho (1931–2020).
- Cen-MF: série sintética mensal com 1.000 anos de duração, gerada por meio do Método dos Fragmentos, conforme a metodologia proposta por Svanidze (1980). Esse método tem como objetivo preservar, na geração das afluências, as principais características estatísticas observadas nos dados históricos. Para representar as séries anuais sintéticas, foi adotada uma função de distribuição gama com três parâmetros.

O procedimento de simulação utiliza os valores otimizados dos parâmetros α_τ e β_τ para guiar a operação mensal do reservatório conforme os seguintes passos:

1. Para cada mês t , verifica-se o armazenamento inicial S_{t-1} ; $t = 1$ assume $S_{t-1} = S_{\max}$ (reservatório cheio);
2. A partir do armazenamento inicial S_{t-1} e da afluência do mês I_t (admite-se previsão perfeita), calcula-se a alocação proposta segundo a SQ-LDR da Eq. (3.13);

3. Com U_t calculado no passo anterior, determina-se o armazenamento projetado $\hat{S}_t$ via Eq. (3.14);
4. Se $\hat{S}_t$ calculado no passo 3 não violar os limites de armazenamento, não há déficit nem vertimento, o armazenamento final é igual ao projetado, e a alocação real é igual a proposta;
5. Se $\hat{S}_t$ calculado no passo 3 violar algum limite de armazenamento, os valores de déficit, vertimento, alocação real e armazenamento final são corrigidos de acordo com a situação.
6. O procedimento é repetido para todos os meses do cenário de aflúências.

A partir dos resultados de simulação, calculam-se os momentos amostrais de armazenamento e as frequências de contenção, déficit e vertimento, com o objetivo de compará-los os todos os momentos estatísticos ($\mathbb{E}(S_t)$, $\mathbb{E}(S_t^2)$, $\mathbb{E}(\delta_t)$, $\mathbb{E}(\delta_t^2)$, $\mathbb{E}(Sp_t)$, $\mathbb{E}(Sp_t^2)$), bem como as probabilidades dos estados de armazenamento ($\mathbb{P}_t^{\text{con}}$, $\mathbb{P}_t^{\text{def}}$, $\mathbb{P}_t^{\text{sp}}$) determinados pelo processo otimizado FP. Toda a implementação computacional foi realizada em um ambiente de programação de código aberto, utilizando a ferramenta de programação científica GNU Octave (www.octave.org).

Uma forma numérica de avaliar os resultados do método em questão é por meio da análise dos erros (resíduos) quadráticos, definidos como $(\text{modelo} - \text{simulação})^2$. A partir desses valores, estima-se a soma dos quadrados dos erros (SSE: *sum of squared estimate of errors*) e o erro quadrático médio (MSE: *mean squared error*). Para verificar a presença de viés, os resíduos são submetidos a uma versão do teste estatístico dos postos sinalizados de Wilcoxon (*Wilcoxon signed-rank test*), que avalia se a mediana dos erros é significativamente diferente de zero. Esse procedimento permite inferir se o modelo tende a superestimar ou subestimar os valores reais.

3.16 Refinamentos em Relação ao Modelo Original

Nesta pesquisa, é proposta a análise de um aprimoramento do método de otimização estocástica explícita, originalmente formulado por Fletcher e Ponnambalam (1996), utilizando os avanços recentes estudados por Mousavi et al. (2022). O objetivo é obter informações importantes para atender às diversas demandas conflitantes na gestão de recursos hídricos, mitigando a lacuna entre as formulações teóricas e a realidade operacional.

Os aprimoramentos começam com a adoção de uma regra de decisão linear do tipo SQ, que considera explicitamente as perdas evaporativas para orientar a liberação de água. Essa abordagem visa manter o nível da água dentro de uma faixa predefinida, maximizando o uso eficiente dos recursos hídricos enquanto minimiza o risco de inundações e escassez. Com essa estratégia, é possível prever informações sobre os estados de armazenamento com base nas decisões lógicas tomadas a partir dos dados de aflúências.

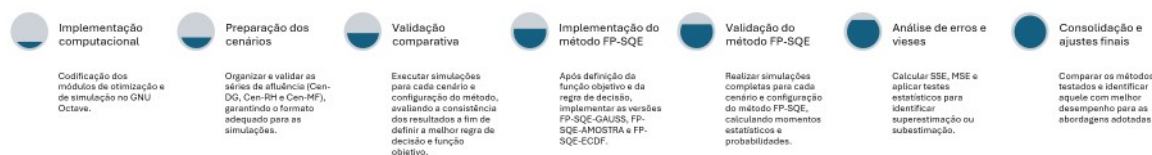
Outro aspecto importante é a expansão da função objetivo para incluir os momentos de primeira e segunda ordem de déficit e vertimento, além dos momentos de armazenamento.

Com essa ampliação, a função se torna mais robusta, proporcionando soluções mais confiáveis e promovendo uma gestão sustentável dos recursos hídricos. Além disso, busca-se diminuir a dependência da escolha de uma distribuição de probabilidades para as afluências, uma limitação significativa do modelo tradicional. Em vez disso, foram utilizados registros históricos para calcular os momentos estatísticos, tornando o modelo mais consistente e aplicável a diversos cenários. Essa estratégia não só simplifica o processo de modelagem, mas também melhora a precisão e a adaptabilidade das decisões operacionais, especialmente em condições de incerteza.

Com essas melhorias, foram formuladas versões do método FP para cada abordagem de resolução das integrais: FP-SQE-GAUSS, em que as integrais são resolvidas atribuindo uma distribuição de probabilidades gaussiana aos dados de afluência; FP-SQE-AMOSTRA, versão que aproxima as integrais utilizando apenas os dados históricos; e FP-SQE-ECDF, onde as integrais são aproximadas por meio da Função de Distribuição Acumulada Empírica (ECDF).

Para melhorar a compreensão do processo metodológico adotado, o fluxo geral da análise do modelo FP-SQE foi sistematizado no fluxograma mostrado na Figura 4. Esse esquema resume as etapas principais, desde a implementação até a consolidação, fornecendo uma visão estruturada do procedimento que precede a apresentação dos resultados obtidos.

Figura 4 – Fluxograma do processo metodológico.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4 Resultados e Discussão

Nesta pesquisa, foram analisadas as três variações propostas do método FP-SQE com o objetivo de identificar a versão que apresenta a menor diferença entre os resultados da simulação e da otimização. Outro foco foi a identificação do método que resultasse nos menores valores da função objetivo, a qual busca minimizar a diferença entre a liberação efetiva e a demanda solicitada.

Inicialmente, foram testadas as diferentes propostas de função objetivo Z_U , Z_0 , e Z_r além da comparação entre as regras de decisão do tipo S e do tipo SQ, a fim de determinar a configuração do método que proporciona o menor valor de função objetivo na versão que resolve as integrais assumindo uma distribuição gaussiana para definir a melhor estratégia operativa. Com essa versão definida, foram analisados os resultados completos para as demais abordagens de resolução das integrais.

4.1 Análise de Estratégias Operativas com Afluências Gaussianas

No processo de otimização, inicialmente foi utilizada a função `fmincon`, fornecida pelo pacote `Optim`, que utiliza por padrão um algoritmo semelhante ao de Levenberg–Marquardt (<<https://octave.sourceforge.io/optim/function/fmincon.html>>). A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos a partir da avaliação de diferentes formulações da função objetivo, comparadas sob duas abordagens de regras de decisão. Para cada configuração, são apresentados tanto o valor otimizado da função objetivo (“Otim.”), quanto o valor correspondente obtido a partir da simulação (“Simul.”), junto com a diferença relativa (“Dif. (%)”). Visando explorar outra abordagem de otimização, testou-se também a função `sqp`, que utiliza o método de programação quadrática sequencial (<<https://octave.sourceforge.io/octave/function/sqp.html>>). Essa abordagem resultou em variações significativas nos resultados, conforme apresentado na Tabela 4.

Tabela 3 – Valores de função objetivo para várias configurações do FP-S(Q)E-GAUSS via fmincon.

Função Objetivo $\mathbb{Z}_U$						
	Cen-DG		Cen-RH		Cen-MF	
	S	SQ	S	SQ	S	SQ
Otim.	0,011442	0,2456	0,011442	0,2456	0,011442	0,2456
Simul.	2,8012	2,5919	3,8673	3,4746	3,7711	3,2762
Dif. (%)	24382,60	955,26	33700,95	1314,64	32859,90	1233,86
Função Objetivo $\mathbb{Z}_o$						
	Cen-DG		Cen-RH		Cen-MF	
	S	SQ	S	SQ	S	SQ
Otim.	1,3101	1,8276	1,3101	1,8276	1,3101	1,83
Simul.	4,0868	4,4515	4,4861	4,9015	4,2240	4,63
Dif. (%)	211,95	143,57	242,43	168,20	222,43	153,21
Função Objetivo $\mathbb{Z}_r$						
	Cen-DG		Cen-RH		Cen-MF	
	S	SQ	S	SQ	S	SQ
Otim.	4,2581	3,6173	4,2581	3,6173	4,2581	3,6173
Simul.	4,1261	3,8670	4,5621	4,8997	4,2920	4,6058
Dif. (%)	3,20	6,90	7,14	35,45	0,80	27,33

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 4 – Valores de função objetivo para várias configurações do FP-S(Q)E-GAUSS via *sqp*.

Função Objetivo $\mathbb{Z}_U$						
	Cen-DG		Cen-RH		Cen-MF	
	S	SQ	S	SQ	S	SQ
Otim.	7,15E-14	1,29E-13	7,15E-14	1,29E-13	7,15E-14	1,29E-13
Simul.	3,0316	2,9141	4,0695	4,0628	3,9957	4,0004
Dif. (%)	4,24E+15	2,26E+15	5,69E+15	3,15E+15	5,59E+15	3,09719E+15
Função Objetivo $\mathbb{Z}_0$						
	Cen-DG		Cen-RH		Cen-MF	
	S	SQ	S	SQ	S	SQ
Otim.	0,0745	0,1998	0,0745	0,1998	0,0745	0,1998
Simul.	2,7822	2,2168	3,8940	3,6570	3,7941	3,4692
Dif. (%)	3636,63	1009,69	5129,98	1730,67	4995,78	1636,66
Função Objetivo $\mathbb{Z}_r$						
	Cen-DG		Cen-RH		Cen-MF	
	S	SQ	S	SQ	S	SQ
Otim.	2,7879	2,0167	2,7879	2,0167	2,7879	2,0167
Simul.	2,4849	2,1769	3,7188	3,2635	3,5987	3,0181
Dif. (%)	12,19	7,94	33,39	61,82	29,08	49,66

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

A comparação entre rotinas de otimização indica que a *sqp* superou consistentemente a *fmincon*, em termos de obtenção de um melhor valor ótimo. Com relação à formulação da função objetivo, o uso da expressão completa $\mathbb{Z}_r$ levou a resultados melhores do que $\mathbb{Z}_U$ ou $\mathbb{Z}_0$. Notadamente, $\mathbb{Z}_U$ teve um desempenho ruim, com uma discrepância extremamente alta entre otimização e simulação, confirmando as limitações de usar apenas a liberação esperada como um indicador de desempenho. A formulação intermediária $\mathbb{Z}_0$, baseada em uma aproximação de Taylor de ordem zero, apresentou um alinhamento melhor, mas ainda teve um desempenho inferior à forma completa $\mathbb{Z}_r$, o que considera diretamente a variância e é mais robusta sob incerteza. Tanto na Tabela 3 quanto na Tabela 4, observa-se que os valores da função objetivo diminuem progressivamente conforme se aprimora a formulação da função objetivo, seguindo a ordem: $\mathbb{Z}_U$, $\mathbb{Z}_0$ e $\mathbb{Z}_r$.

Os resultados na Tabela 4 (via *sqp*) também mostram que a regra de decisão linear do tipo SQ supera significativamente a regra mais simples do tipo S. Para a melhor função objetivo, $\mathbb{Z}_r$, obtém-se um valor otimizado inferior (2,0167 vs. 2,7879). Além disso, os valores simulados da função objetivo também foram menores sob a regra SQ — por exemplo, 7,94 contra 12,19 no cenário Cen-DG. Portanto, incluir tanto o armazenamento quanto a afluência como variáveis preditoras na regra de liberação melhora o desempenho. A incorporação da SQ-LDR no modelo FP-SQE é uma das contribuições inéditas desta pesquisa.

Com base na análise apresentada, os modelos FP-SQE-GAUSS, FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF foram executados sob uma configuração padronizada, composta pela regra de

decisão linear do tipo SQ (SQ-LDR), a função objetivo $\mathbb{Z}_r$ e a rotina de otimização *sqp*. Todos os modelos foram rodados para todos os cenários, detalhados nos apêndices C (FP-SQE-GAUSS), D (FP-SQE-AMOSTRA) e E (FP-SQE-ECDF). Contudo, por brevidade e facilidade de explicação, as discussões nas seções posteriores serão feitas sob os seguintes cenários em cada modelo: FP-SQE-GAUSS sob Cen-DG; FP-SQE-AMOSTRA sob Cen-RH; e FP-SQE-ECDF sob Cen-MF.

Um aspecto relevante observado nas análises foi o impacto do ponto de partida sobre os resultados da otimização. Embora as rotinas tenham sido inicialmente configuradas para iniciar a busca do ponto ótimo a partir do zero (valores nulos de α_τ e β_τ), constatou-se que o uso de soluções previamente obtidas pelo FP-SQE-AMOSTRA como ponto inicial resultou em valores mais promissores da função objetivo, especialmente para os demais métodos. Isso indica que a escolha do ponto inicial pode impactar diretamente a eficiência da otimização, sendo um fator relevante a considerar em aplicações práticas.

4.2 Método FP-SQE-GAUSS

O método FP-SQE-GAUSS foi aplicado com o objetivo de avaliar o desempenho da formulação considerando aflúências sintetizadas a partir de uma distribuição normal. Essa abordagem permitiu a estimação dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem dos estados do sistema (armazenamento, déficit e vertimento), bem como a obtenção das probabilidades associadas a cada estado operacional, comparados com seus respectivos parâmetros amostrais obtidos por simulação.

A Tabela 5 apresenta os resultados de função objetivo, comparando os valores obtidos pela otimização com os encontrados por simulação. Observa-se que, no cenário Cen-DG, foram alcançados os menores valores absolutos para a função objetivo, indicando um elevado grau de aderência entre os modelos simulado e otimizado. Além disso, a menor diferença foi notada no cenário Cen-DG.

Tabela 5 – Valores de função objetivo obtidos pelo FP-SQE-GAUSS.

	Cen-DG	Cen-RH	Cen-MF
Otim.	1,0582	1,0582	1,0582
Simul.	1,9897	3,4019	3,1822
Dif.(%)	88,03	221,48	200,72

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Para implementar a regra de decisão linear do tipo SQ, o modelo determinou os parâmetros α_τ e β_τ mensalmente. Os valores ótimos estão apresentados na Tabela 6 e refletem a influência das variáveis na otimização. Observa-se que os valores de α_τ permanecem praticamente constantes, indicando o percentual da vazão afluyente que impacta a otimização. Por outro lado, β_τ apresenta oscilações, ajustando-se conforme a correção necessária para atender às variações hidrológicas das aflúências.

Tabela 6 – Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP-SQE-GAUSS.

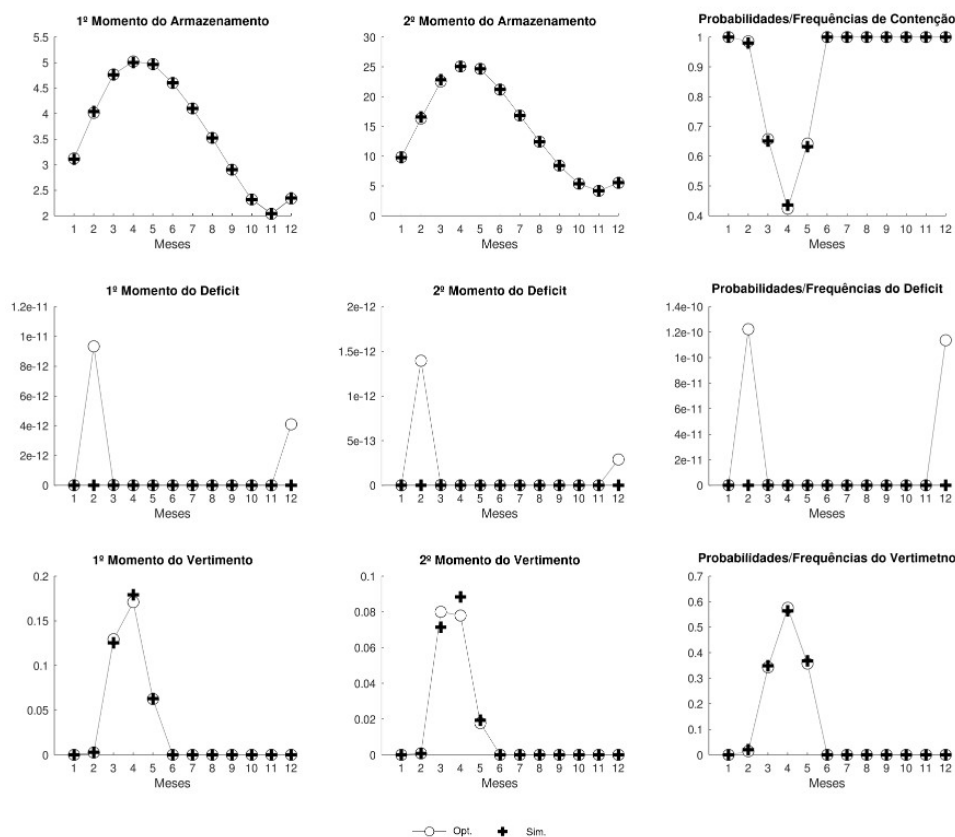
Mês	α_τ	β_τ
1	0,4954	2,2603
2	0,3830	2,8948
3	0,4281	3,8882
4	0,4943	4,4871
5	0,4316	4,5738
6	0,4955	4,3292
7	0,4931	3,8887
8	0,4912	3,3473
9	0,4896	2,7433
10	0,4893	2,1364
11	0,4904	1,7036
12	0,4924	1,7120

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

A Figura 5 apresenta, para o cenário Cen-DG, os momentos estatísticos e as probabilidades associadas aos estados operacionais do reservatório. Os resultados obtidos por meio da otimização demonstram elevada aderência em relação à simulação, sendo as variações observadas atribuídas, em grande parte, à escala dos gráficos. Observa-se um padrão caracterizado por altas probabilidades de contenção e vertimento, enquanto as probabilidades de déficit permanecem bastante reduzidas.

Os resultados consolidados dessa abordagem estão detalhados no Apêndice C, para todos os cenários, onde se observa uma boa correspondência entre os valores otimizados e simulados ao longo do ano. A Tabela 7, que apresenta, especificamente para o Cen-DG, os resíduos quadráticos entre otimização e simulação, reforça a consistência entre os dados otimizados e simulados, evidenciando baixos erros. No entanto, o teste estatístico aplicado rejeita a hipótese de que esses valores estejam centrados em torno de zero, o que aponta para a possibilidade de aperfeiçoamento do FP-SQE-GAUSS. Tabelas e resultados semelhantes foram encontrados para os demais cenários (Apêndice C).

Figura 5 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-GAUSS sob cenário Cen-DG.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 7 – Resíduos obtidos por FP-SQE-GAUSS para o cenário Cen-DG.

Variável	SSE	MSE
1º Momento do armazenamento	0,00169	0,00014
2º Momento do armazenamento	0,15265	0,01272
Probabilidade de Contenção	0,00033	0,00003
Probabilidade de Déficit	0,00000	0,00000
Probabilidade de Vertimento	0,00033	0,00003
1º Momento do Déficit	0,00000	0,00000
2º Momento do Déficit	0,00000	0,00000
1º Momento do Vertimento	0,00008	0,00001
2º Momento do Vertimento	0,00019	0,00002
1º Momento da alocação	0,00375	0,00031

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.3 Método FP-SQE-AMOSTRA

A abordagem FP-SQE-AMOSTRA utiliza a série histórica de aflúências para representar com maior fidelidade a variabilidade natural do sistema. Diferentemente da suposição de uma distri-

buição específica, como a gaussiana, este método incorpora diretamente as oscilações e padrões presentes nos dados reais, favorecendo uma representação mais acurada do comportamento hidrológico do reservatório.

A avaliação da função objetivo é apresentada na Tabela 8, para cada cenário. Os resultados evidenciam uma boa correspondência entre os valores obtidos por otimização e aqueles simulados, com diferenças de pequena magnitude em comparação com o FP-SQE-GAUSS. Essa proximidade confirma a efetividade do modelo em minimizar a discrepância entre demanda e liberação de água, mesmo em um ambiente com incertezas mais realistas.

Tabela 8 – Valores de função objetivo obtidos pelo FP-SQE-AMOSTRA.

	CEN-DG	CEN-RH	CEN-MF
Otim.	1,7511	1,7511	1,7511
Simul.	1,8340	3,0458	2,7775
Dif.(%)	4,74	73,94	58,62

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

A Tabela 9 mostra os valores ótimos de α_τ e β_τ da regra de decisão linear para cada mês do ano. O parâmetro α_τ se mantém relativamente estável ao longo do ano, indicando uma relação quase linear entre o percentual da afluência e a liberação. Os valores de β_τ variam quantitativamente, refletindo o ajuste sazonal necessário para acomodar as variações na disponibilidade hídrica e na demanda.

Tabela 9 – Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP-SQE-AMOSTRA.

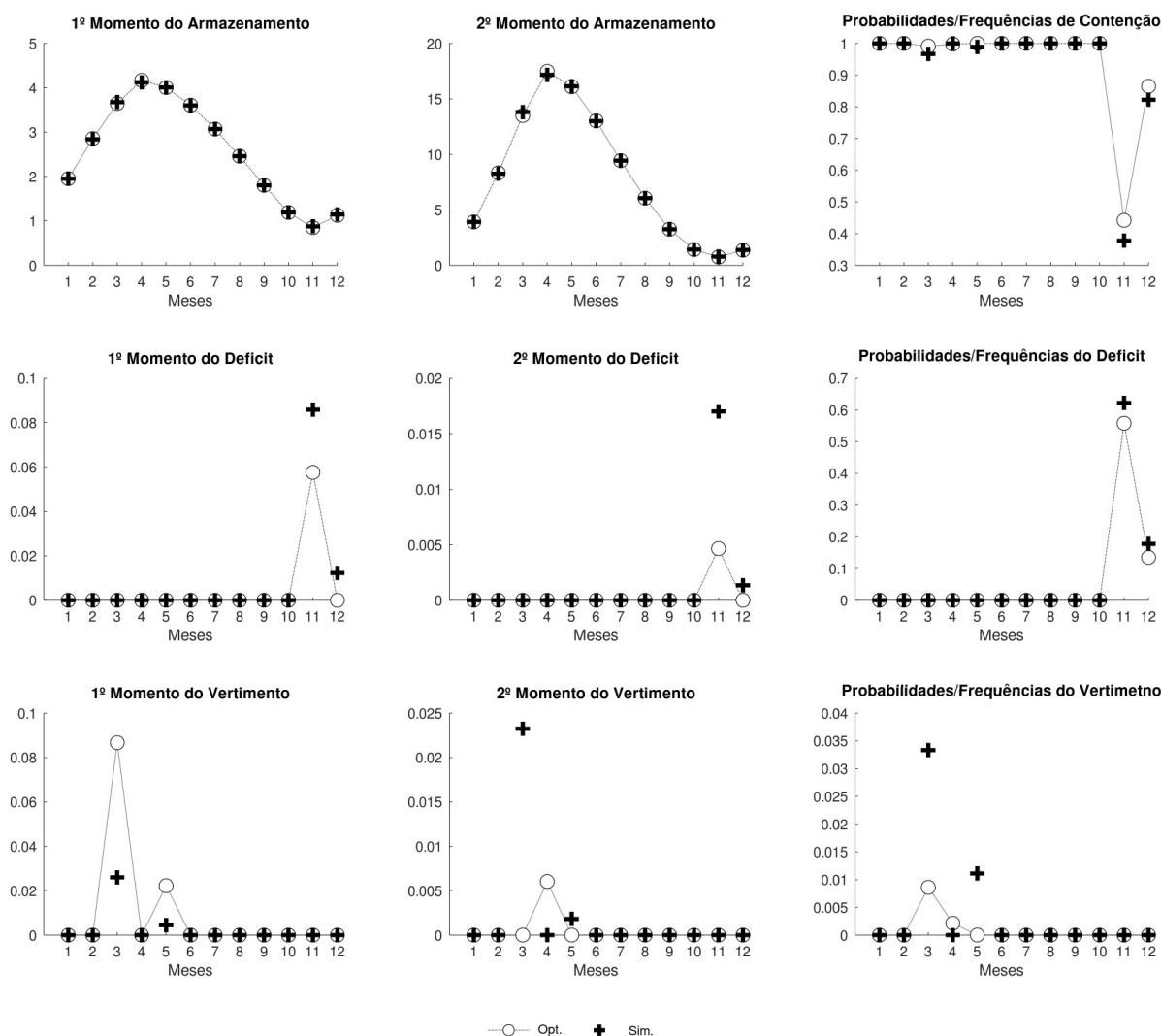
Mês	α_τ	β_τ
1	0,4954	1,0792
2	0,4983	1,9405
3	0,4077	2,6814
4	0,4985	3,4600
5	0,4183	3,5509
6	0,4957	3,3310
7	0,4931	2,8482
8	0,4912	2,2694
9	0,4896	1,6313
10	0,4893	0,9930
11	0,4052	0,3828
12	0,3933	0,3689

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

A Figura 6 apresenta, para o Cen-RH, os momentos estatísticos dos estados de armazenamento e as probabilidades de contenção, déficit e vertimento. Diferente do que se observa nas figuras correspondentes ao modelo FP-SQE-GAUSS, as distribuições de probabilidade obtidas com o uso de dados históricos refletem uma dinâmica distinta: quando há redução na

probabilidade de contenção, observa-se um aumento na probabilidade de déficit, enquanto as ocorrências de vertimento permanecem praticamente nulas. A dependência direta dos dados históricos pode afetar a robustez do modelo, tornando-o sensível à qualidade e disponibilidade das séries temporais utilizadas. Ainda assim, o método FP-SQE-AMOSTRA demonstrou ser eficaz e aderente à realidade observada.

Figura 6 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-AMOSTRA sob cenário Cen-RH.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, assim como as demais estatísticas analisadas, sob todos os cenários, apresentaram boa correspondência entre os resultados da otimização e da simulação, conforme descrito no Apêndice D. Os resultados demonstram boa aderência, com pequenas variações e estimativas com baixo grau de diferença. A metodologia adotada gerou valores bastante próximos aos obtidos por simulação, evidenciando o ganho resultante da aproximação das integrais proposta neste método.

A Tabela 10 reforça essa consistência entre os dados otimizados e simulados, sob

o cenário Cen-RH, com resultados estatisticamente relevantes. Cabe destacar que o teste estatístico não rejeitou a hipótese de que os resíduos estejam centrados em torno de zero. Isso permite inferir que, com medianas próximas de zero, o modelo não apresenta tendência sistemática de superestimar ou subestimar os resultados.

Tabela 10 – Resíduos obtidos pelo método FP-SQE-AMOSTRA para o Cen-RH.

Variável	SSE	MSE
1º Momento do armazenamento	0,00433	0,00036
2º Momento do armazenamento	0,19467	0,01622
Probabilidade de Contenção	0,00665	0,00055
Probabilidade de Déficit	0,00591	0,00049
Probabilidade de Vertimento	0,00074	0,00006
1º Momento do Déficit	0,00095	0,00008
2º Momento do Déficit	0,00015	0,00001
1º Momento do Vertimento	0,00400	0,00033
2º Momento do Vertimento	0,00058	0,00005
1º Momento da alocação	0,01177	0,00098

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.4 Método FP-SQE-ECDF

O método FP-SQE-ECDF estima as integrais utilizando a Função de Distribuição Acumulada Empírica (ECDF), sem impor uma distribuição de probabilidades às afluências. Esse procedimento permite uma reconstrução mais flexível da distribuição dos dados, capturando nuances da variabilidade histórica.

A Tabela 11 apresenta os valores da função objetivo obtidos com essa metodologia, que evidenciam uma excelente aderência entre os resultados da otimização e da simulação, com destaque para a redução das discrepâncias entre essas duas em todos os cenários analisados. Observa-se, ainda, um desempenho superior em relação aos demais métodos comparados.

Tabela 11 – Valores para função objetivo obtidos pelo método FP-SQE-ECDF.

	CEN-DG	CEN-RH	CEN-MF
Optm.	1,7692	1,7692	1,7692
Simul.	1,8349	3,0463	2,7778
Dif.(%)	3,71	72,18	57,01

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Os parâmetros α_τ e β_τ calculados nessa abordagem estão apresentados na Tabela 12. A consistência dos valores de α_τ confirma que, para a operação, a vazão afluente tem papel significativo na melhoria dos resultados. Os valores de β_τ variam de maneira semelhantes às demais abordagens, encontrando resultados que apresentam variações a depender da época do ano, o que demonstra a adaptação do modelo à sazonalidade das afluências.

Tabela 12 – Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP-SQE-ECDF.

Mês	α_τ	β_τ
1	0,4955	1,0792
2	0,4983	1,9405
3	0,4061	2,6823
4	0,4984	3,4600
5	0,4170	3,5514
6	0,4957	3,3311
7	0,4930	2,8482
8	0,4912	2,2694
9	0,4896	1,6313
10	0,4894	0,9931
11	0,4045	0,3838
12	0,3929	0,3695

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

A Figura 7 ilustra, para o Cen-MF, a boa correspondência entre os resultados obtidos com o método FP-SQE-ECDF, com seus equivalentes da simulação. Os resultados mostram forte coerência com as versões anteriores, destacando a correlação inversa entre contenção e déficit: nos períodos em que a probabilidade de contenção é reduzida, há aumento na incidência de déficit, assemelhando-se com o FP-SQE-AMOSTRA e divergindo do FP-SQE-GAUSS.

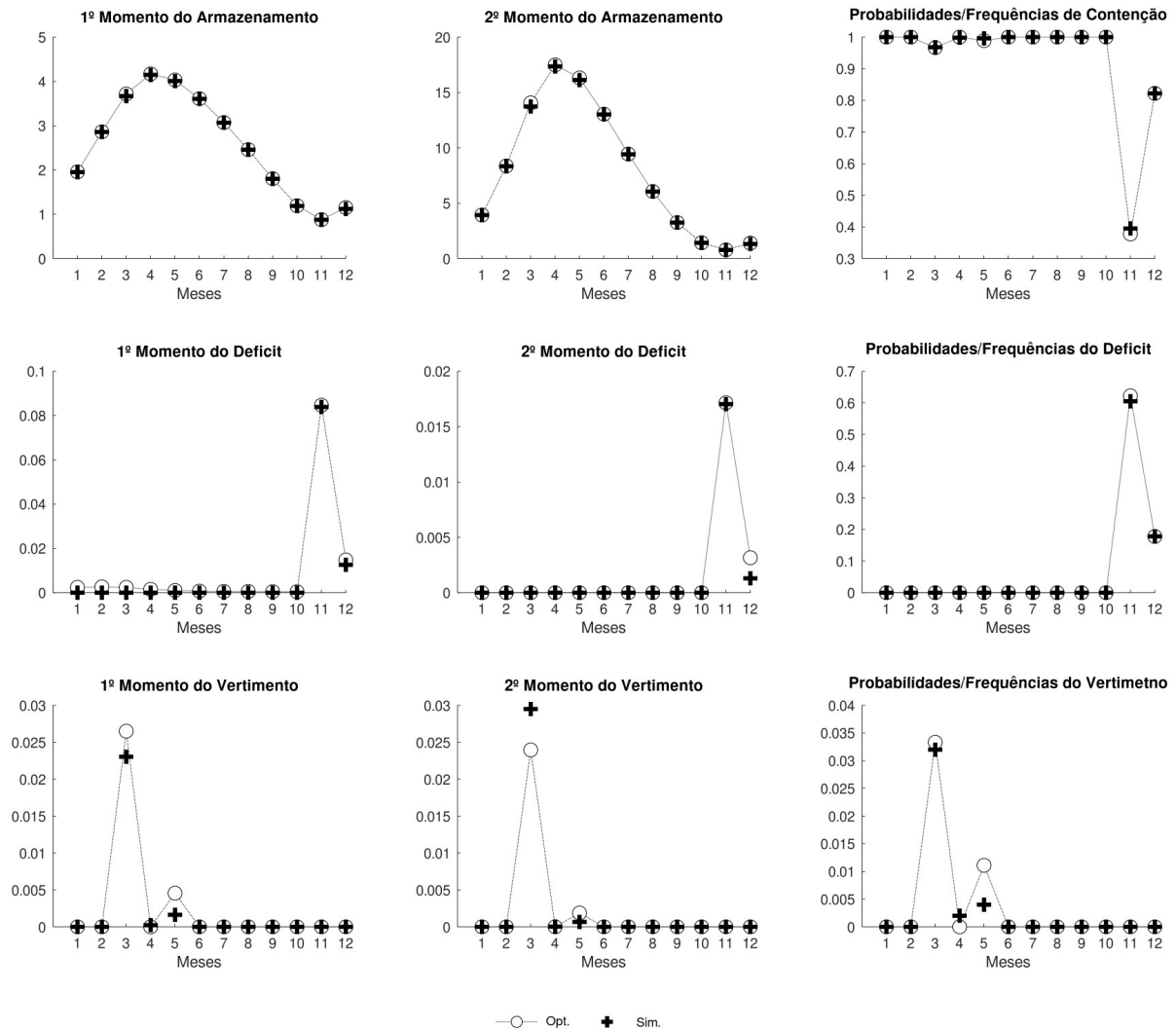
Os resultados completos e as figuras geradas com o modelo estão apresentados no Apêndice E, para todos os cenários. A Tabela 13 apresenta os resíduos dos momentos estatísticos e das probabilidades entre os resultados da otimização e da simulação para o cenário Cen-MF. No entanto, mesmo com os ótimos resultados encontrados, os resíduos não foram suficientemente baixos para que o teste estatístico aceitasse a hipótese de centralidade em torno de zero.

Tabela 13 – Resíduos obtidos pelo método FP-SQE-ECDF sob o cenário Cen-MF.

Variável	SSE	MSE
1º Momento do armazenamento	0,00440	0,00037
2º Momento do armazenamento	0,16967	0,01414
Probabilidade de Contenção	0,00035	0,00003
Probabilidade de Déficit	0,00030	0,00002
Probabilidade de Vertimento	0,00006	0,00000
1º Momento do Déficit	0,00003	0,00000
2º Momento do Déficit	0,00000	0,00000
1º Momento do Vertimento	0,00002	0,00000
2º Momento do Vertimento	0,00003	0,00000
1º Momento da alocação	0,00268	0,00022

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 7 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-ECDF sob cenário Cen-MF.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

4.5 Comparações entre os Métodos

Conforme os resultados apresentados nas seções anteriores, é possível realizar uma análise comparativa consistente entre as três versões do modelo FP-SQE, tanto em termos de desempenho quanto de adequação estatística. De modo geral, observa-se que os modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF apresentaram desempenho superior ao FP-SQE-GAUSS no que se refere à fidelidade da simulação. O modelo FP-SQE-GAUSS apresentou os maiores desvios, com destaque para 88,03% no cenário Cen-DG e valores superiores a 200% nos cenários Cen-RH e Cen-MF. Em contraste, os modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF reduziram significativamente essas discrepâncias, sendo que os menores desvios foram observados no modelo FP-SQE-ECDF, seguido de perto pelo FP-SQE-AMOSTRA.

Evidencia-se um melhor desempenho dos modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF em relação ao FP-SQE-GAUSS visto que os valores simulados foram consistentemente mais

baixos em todos os cenários de afluência analisados. Isso é particularmente perceptível no cenário Cen-DG, em que o valor da função objetivo foi reduzido de 1,9897 no modelo FP-SQE-GAUSS para 1,8340 no FP-SQE-AMOSTRA e 1,8349 no FP-SQE-ECDF. Tais resultados indicam que os modelos baseados em dados empíricos proporcionam maior robustez frente às incertezas associadas às condições hidrológicas.

Os modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF, mesmo quando testados em cenários com distribuição Gaussiana, como o Cen-DG, foram capazes de gerar valores simulados mais baixos. Isso sugere que os parâmetros de decisão otimizados por esses modelos (α_τ e β_τ) possuem maior capacidade de adaptação a diferentes condições de entrada, conferindo-lhes maior versatilidade. Esses ganhos de desempenho tornam-se ainda mais relevantes ao se considerar que os modelos não pressupõem a distribuição gaussiana para os dados de afluência.

Cabe ainda destacar que os modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF tenderam a selecionar valores mais baixos de β_τ na maioria dos meses, em comparação com o modelo FP-SQE-GAUSS, o que possivelmente contribuiu para o melhor desempenho desses modelos na etapa de simulação e possivelmente, para o comportamento gráfico das probabilidades. Esses resultados indicam que os modelos baseados em dados empíricos oferecem uma representação mais estável e precisa do comportamento do reservatório frente às diferentes condições de entrada.

Entretanto, os valores otimizados da função objetivo foram mais altos nos modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF (1,7511 e 1,7692, respectivamente), em comparação com o modelo FP-SQE-GAUSS (1,0582). Em termos de tempo de processamento, o FP-SQE-GAUSS executou a rotina de otimização de forma praticamente instantânea. Em contraste, o FP-SQE-AMOSTRA demandou cerca de 44 segundos, enquanto o FP-SQE-ECDF levou aproximadamente 7 minutos para concluir a rotina de otimização.

Além disso, a análise dos valores residuais entre os resultados da otimização e da simulação dos diversos parâmetros, utilizando o teste estatístico de Wilcoxon para as diferentes versões do modelo FP-SQE, revelou que o modelo FP-SQE-AMOSTRA não rejeitou a hipótese nula de que a mediana dos erros é igual a zero. Esse resultado indica a ausência de viés sistemático nos resíduos, ou seja, o modelo não apresentou tendência consistente de superestimar ou subestimar os valores reais, o que reforça a consistência e robustez de sua aplicação.

Em síntese, embora o modelo FP-SQE-GAUSS apresente vantagens em termos de simplicidade analítica e velocidade de execução, mostrou-se mais sensível a desvios em relação à distribuição de afluência assumida. Os modelos FP-SQE-AMOSTRA e FP-SQE-ECDF, por sua vez, demonstraram maior aderência aos dados reais, com melhor fidelidade na simulação e evidências estatísticas favoráveis, ao se basearem diretamente em dados empíricos. Essa característica os alinha ao objetivo central do estudo, que é reduzir a dependência de distribuições de afluência assumidas. O FP-SQE-AMOSTRA destacou-se por seu equilíbrio entre desempenho e custo computacional, além da ausência de viés sistemático nos resíduos. Já o FP-SQE-ECDF apresentou uma ligeira superioridade em termos de acurácia na simulação, consolidando-se como uma

alternativa robusta e eficaz para a otimização da operação de reservatórios sob incerteza.

Conclusão

Este estudo aprimorou de forma significativa o modelo estocástico explícito de Fletcher-Ponnambalam (FP) aplicado à operação de reservatórios, incorporando avanços que incrementam o processo de otimização. A formulação passou a adotar uma regra de decisão do tipo SQ, que considera de forma conjunta armazenamento e a vazão afluente, além de incluir explicitamente as perdas evaporativas, capturando com maior precisão os riscos e limitações operacionais. Também foram introduzidas abordagens alternativas para a resolução das integrais do modelo, baseadas exclusivamente no uso de registros históricos de afluência, eliminando a necessidade de assumir distribuições de probabilidade teóricas e ampliando a flexibilidade frente a diferentes padrões hidrológicos.

A função objetivo foi formulada com a inclusão dos momentos estatísticos do déficit e do vertimento, permitindo quantificar os impactos da operação e refletir melhor as prioridades de atendimento. Além disso, derivaram-se momentos de primeira e segunda ordem para variáveis-chave como armazenamento, déficit e vertimento, o que forneceu uma base sólida para avaliar o desempenho das diferentes formulações.

Os resultados obtidos evidenciaram que as modificações propostas viabilizaram o desenvolvimento de regras operativas mensais robustas e adequadas às condições de operação do reservatório de Sobradinho, especialmente em um contexto sujeito a eventos críticos de escassez. Entre as variantes analisadas, a abordagem FP-SQE-ECDF se destacou pela consistência estatística e pela fidelidade na representação da variabilidade hidrológica, ainda que com maior custo computacional. O método FP-SQE-AMOSTRA apresentou um equilíbrio interessante entre qualidade de resultados e eficiência computacional, enquanto o FP-SQE-GAUSS, embora mais rápido, manteve as limitações associadas à suposição de normalidade das afluências.

A implementação do modelo em ambiente de código aberto ampliou seu potencial de reaplicação e favoreceu ganhos de desempenho computacional, tornando a ferramenta mais acessível para futuras aplicações. De forma integrada, as melhorias desenvolvidas reduzem a dependência de hipóteses de probabilidade para as afluências, mitigando as limitações dessa suposição, e reforçam a aplicabilidade do método FP, com destaque para os métodos empíricos, que consideram apenas os dados para o desenvolvimento da abordagem. Essas são contribuições importantes para o avanço da otimização estocástica na gestão de recursos hídricos, oferecendo soluções mais alinhadas às incertezas e desafios operacionais de sistemas hídricos em regiões de alta variabilidade.

Como direções para pesquisas futuras, propõe-se a aplicação do modelo FP-SQE a sistemas com múltiplos reservatórios, a exploração de algoritmos evolutivos de otimização e o desenvolvimento de novas abordagens para a resolução das integrais envolvidas no método de Fletcher-Ponnambalam (FP), como, por exemplo, o uso de técnicas de integração numérica baseadas em Estimativas de Densidade por Kernel (KDE). Além disso, melhorias na política

operativa, como a incorporação de regras de proteção (*hedging*), podem contribuir para um atendimento mais eficiente da demanda, reduzindo ainda mais a diferença entre os volumes liberados e as necessidades hídricas da região. Recomenda-se também comparar a regra de decisão SQ-LDR proposta com outras estratégias usuais, como curvas-guia, por meio da avaliação de critérios de confiabilidade, resiliência e vulnerabilidade.

Referências

- AHMAD, A. et al. Reservoir optimization in water resources: a review. *Water Resources Management*, v. 28, n. 11, p. 3391–3405, 2014.
- ANA. *Conjuntura Recursos Hídricos do Brasil 2021*. Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico, 2021. Disponível em: <<https://relatorio-conjuntura-ana-2021.webflow.io>>.
- ARAÚJO, J. E. S.; CELESTE, A. B. Explicit stochastic procedure for developing reservoir storage-yield-reliability-vulnerability relationships. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, set. 2024. ISSN 1573-1650.
- ARAÚJO, S. M. S. de. A região semiárida do nordeste do Brasil: questões ambientais e possibilidades de uso sustentável dos recursos. *Rios Eletrônica-Revista Científica da FASETE*, v. 5, n. 5, p. 89–98, 2011.
- BACELAR, T. S. *Características das condições ambientais no reservatório da UHE Sobradinho no contexto da geração fotovoltaica flutuante*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019.
- BAGHLI, M. et al. *Three-Level NPC Inverter Incipient Fault Detection and Classification using Output Current Statistical Analysis*. [S.l.]: MDPI, 2019. 1372 p.
- BEÇA, P. et al. Optimizing reservoir water management in a changing climate. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 37, n. 9, p. 3423–3437, 2023.
- BEIRANVAND, B.; ASHOFTEH, P.-S. A systematic review of optimization of dams reservoir operation using the meta-heuristic algorithms. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 37, n. 9, p. 3457–3526, abr. 2023. ISSN 1573-1650.
- BELLMAN, R. *Dynamic Programming*. [S.l.]: Princeton University Press, 1957. (Rand Corporation research study).
- BHASKAR, N. R.; WHITLATCH, E. E. Comparison of reservoir linear operation rules using linear and dynamic programming. *Journal of the American Water Resources Association*, Wiley, v. 23, n. 6, p. 1027–1036, dez. 1987.
- BILLINGTON, D. P.; JACKSON, D. C. *Big dams of the New Deal era: A confluence of engineering and politics*. 1st. ed. [S.l.]: University of Oklahoma Press, 2006.
- BOLOURIAZDELI, Y. et al. Evaluation of real-time operation rules in reservoir systems operation. *Water Resources Management*, Springer, v. 28, n. 3, 2014.
- BRAVO, J. M. *Otimização da operação de um reservatório para controle de cheias com base na previsão de vazão*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- CELESTE, A. B. Comparação de modelos de otimização estocástica implícita e explícita na derivação de regras operacionais mensais de reservatórios. *XIX Simpósio Brasileiro de Recursos hídricos*. Associação Brasileira de Recursos hídricos (ABRH), Maceió, 2011.

- CELESTE, A. B.; BILLIB, M. Evaluation of stochastic reservoir operation optimization models. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 32, n. 9, p. 1429–1443, 2009.
- CELESTE, A. B.; SANTANA, R. F.; SANTOS, W. M. Otimização estocástica dinâmica e implícita para operação de reservatório: estudo de caso em Sergipe. *Ciência e Natura*, Universidade Federal de Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 273–280, 2016.
- CELESTE, A. B.; SIQUEIRA, J. I. P.; CAI, X. Using inflow records to approximate solutions to statistical moment equations of an explicit stochastic reservoir optimization method. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 147, n. 7, p. 06021006, 2021.
- CELESTE, A. B.; SUZUKI, K.; SANTOS, V. S. Análise de indicadores de sustentabilidade para reservatórios operados por regras derivadas de otimização estocástica implícita. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE RECURSOS HÍDRICOS (ABRH). *Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. João Pessoa, 2005.
- CHEN, J. Long-term joint operation of cascade reservoirs using enhanced progressive optimality algorithm and dynamic programming hybrid approach. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 35, n. 7, p. 2265–2279, maio 2021. ISSN 1573-1650.
- CHESF. *Descrição do Aproveitamento de Sobradinho*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.chesf.com.br/SistemaChesf/Pages/SistemaGeracao/Sobradinho.aspx>>.
- CHOONG, S.-M.; EL-SHAFIE, A. State-of-the-art for modelling reservoir inflows and management optimization. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 29, n. 4, p. 1267–1282, nov. 2014. ISSN 1573-1650.
- CODEVASF. *Caracterização da Bacia*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.codevasf.gov.br/area-de-atuacao/bacia-hidrografica/sao-francisco>>.
- CORREIA, M. F.; DIAS, M. A. F. S.; ARAGAO, M. R. S. Soil occupation and atmospheric variations over Sobradinho Lake area. Part one: an observational analysis. *Meteorology and Atmospheric Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 94, n. 1-4, p. 103–113, jun. 2006.
- DEHGHANI, M.; SEIFI, A.; RIAHI-MADVAR, H. Novel forecasting models for immediate-short-term to long-term influent flow prediction by combining anfis and grey wolf optimization. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 576, p. 698–725, 2019.
- DEVORE, J. L.; BERK, K. N.; CARLTON, M. A. *Modern Mathematical Statistics with Applications*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2021. (Springer Texts in Statistics). ISBN 9783030551568.
- DOBSON, B.; WAGENER, T.; PIANOSI, F. An argument-driven classification and comparison of reservoir operation optimization methods. *Advances in Water Resources*, v. 128, p. 74–86, 2019.
- DOGAN, M. S.; MEDELLIN-AZUARA, J.; LUND, J. R. Hydropower reservoir optimization with solar generation-changed energy prices in california. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 38, n. 6, p. 2135–2153, 2024.
- FARMER, W. H.; VOGEL, R. M. On the deterministic and stochastic use of hydrologic models. *Water Resources Research*, American Geophysical Union (AGU), v. 52, n. 7, p. 5619–5633, 2016.

- FLETCHER, S. G.; PONNAMBALAM, K. A new formulation for the stochastic control of systems with bounded state variables: An application to a single reservoir system. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Springer, v. 10, n. 3, p. 167–186, 1996.
- FLETCHER, S. G.; PONNAMBALAM, K. Constrained state formulation for the stochastic control of multireservoir systems. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 34, n. 2, p. 257–270, 1998.
- FLETCHER, S. G.; PONNAMBALAM, K. Stochastic control of reservoir systems using indicator functions: New enhancements. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 44, n. 12, 2008.
- FOLEY, M. M. et al. Dam removal: Listening in. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 53, n. 7, p. 5229–5246, 2017.
- GARCIA, M.; RIDOLFI, E.; BALDASSARRE, G. D. The interplay between reservoir storage and operating rules under evolving conditions. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 590, p. 125270, 2020.
- GIULIANI, M. et al. A state-of-the-art review of optimal reservoir control for managing conflicting demands in a changing world. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 57, n. 12, p. e2021WR029927, 2021.
- GOMES, L. S. *Regra de operação de reservatório isolado no semiárido: uma aplicação da lógica fuzzy*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.
- GRILL, G. et al. Mapping the worlds free-flowing rivers. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 569, n. 7755, p. 215–221, 2019.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, v. 6, n. 3, p. 255–259, 1980.
- KAVIANI, S.; HASSANLI, A. M.; HOMAYOUNFAR, M. Optimal crop water allocation based on constraint-state method and nonnormal stochastic variable. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 29, n. 4, p. 1003–1018, nov. 2014. ISSN 1573-1650.
- KAZEMNADI, Y.; NAZARI, M.; KERACHIAN, R. Adaptive reservoir operation considering water quantity and quality objectives: Application of parallel cellular automata and sub-seasonal streamflow forecasts. *Journal of Environmental Management*, v. 354, p. 120294, 2024.
- KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, v. 46, n. 1, p. 79–88, 1980.
- LABADIE, J. W. Optimal operation of multireservoir systems: state-of-the-art review. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 2, p. 93–111, 2004.
- LANNA, A. E. L.; LIMA, H. V. C. Modelos para operação de sistemas de reservatórios: atualização do estado da arte. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 10, n. 3, p. 5–22, 2005.
- LEE, J.-H.; LABADIE, J. W. Stochastic optimization of multireservoir systems via reinforcement learning. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 43, n. 11, 2007.

- LEHNER, B. et al. High-resolution mapping of the world's reservoirs and dams for sustainable river-flow management. *Frontiers in Ecology and the Environment*, Wiley, v. 9, n. 9, p. 494–502, maio 2011. ISSN 1540-9309.
- LINO, V. F.; COIADO, L. C.; FRANCATO, A. L. Análise da garantia física de usinas hidroelétricas de forma cooperativa por meio de modelos de otimização. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 10, p. 74356–74372, 2020.
- LOUCKS, D. P. Some comments on linear decision rules and chance constraints. *Water Resources Research*, v. 6, n. 2, p. 668–671, 1970.
- LOUCKS, D. P.; BEEK, E. V. *Water resource systems planning and management: An introduction to methods, models, and applications*. [S.l.]: Springer, 2017.
- MAHOOTCHI, M.; PONNAMBALAM, K. Parambikulam-Aliyar project operations optimization with reliability constraints. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 4, p. 364–375, 2013.
- MAHOOTCHI, M.; PONNAMBALAM, K.; TIZHOOSH, H. R. Comparison of risk-based optimization models for reservoir management. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 37, n. 1, p. 112–124, 2010.
- MAJOR, J. J. et al. Geomorphic responses to dam removal in the united states—a two-decade perspective. *Gravel-bed rivers: Processes and disasters*, Wiley Online Library, p. 355–383, 2017.
- MELLO JR, A. V.; MATOS, L. N. Otimização da operação de reservatório pela programação dinâmica em um processo de decisão markoviano. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 4, n. 3, p. 5–15, 1999. ISSN 2318-0331.
- MENDES, L. A. *O impacto dos usos consuntivos na operação de sistemas de reservatórios para produção de energia elétrica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- MOURA, M. S. B. de et al. Clima e água de chuva no Semi-Árido. In: BRITO, L. T. L.; MOURA, M. S. B. de; GAMA, G. F. B. (Ed.). *Potencialidades da água de chuva no Semi-Árido brasileiro*. Petrolina: Embrapa Semi-Árido, 2007. p. 37–59.
- MOUSAVI, S. J.; ALIZADEH, H.; PONNAMBALAM, K. Storage-yield analysis of surface water reservoirs: the role of reliability constraints and operating policies. *Stochastic environmental research and risk assessment*, Springer, v. 28, n. 8, p. 2051–2061, 2014. ISSN 1436-3259.
- MOUSAVI, S. J.; PONNAMBALAM, K. An analytical method for fast optimization of multireservoir hydropower systems operations considering risk-return tradeoffs. *Water Resources Research*, American Geophysical Union (AGU), v. 61, n. 6, maio 2025. ISSN 1944-7973.
- MOUSAVI, S. J. et al. Enhancements to explicit stochastic reservoir operation optimization method. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 169, p. 104307, 2022.
- NGAMSERT, R.; KANGRANG, A. Applying of marine predators algorithm linked with reservoir simulation model considering sedimentation for reservoir operation. *Advances in Civil Engineering*, v. 2022, n. 1, p. 1631914, 2022.
- OLIVEIRA, I. A.; CELESTE, A. B. Operação de reservatório sergipano via curvas-guia parametrizadas por modelo de simulação-otimização. *Scientia cum Industria*, v. 4, n. 3, p. 154–160, 2016.

ORTIZ-PARTIDA, J. P. et al. A two-stage stochastic optimization for robust operation of multipurpose reservoirs. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 11, p. 3815–3830, ago. 2019.

PEIXOTO, L. S. *Derivação de regras operacionais de proteção contra déficits de suprimento de sistemas de reservatórios via algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) — Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

PIANOSI, F.; DOBSON, B.; WAGENER, T. Use of reservoir operation optimization methods in practice: Insights from a survey of water resource managers. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 146, n. 12, p. 02520005, 2020.

POPAT, E.; HARTMANN, A. Exploring cumulative probability functions for streamflow drought magnitude: Global scale analysis and parametric vs. non-parametric comparisons. *Journal of Hydrology*, Elsevier, p. 131426, 2024.

RAMOS, G. L.; ZAMBELLI, M.; SOARES, S. Impacto de regras de operação de reservatórios na produtividade de sistemas hidrelétricos em cascata: um estudo de caso com as usinas hidrelétricas de três marias e sobradinho na bacia do rio São Francisco. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 1, n. 1.

REVELLE, C.; GUNDELACH, J. Linear decision rule in reservoir management and design: 4. a rule that minimizes output variance. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 11, n. 2, p. 197–203, 1975.

REVELLE, C.; JOERES, E.; KIRBY, W. The linear decision rule in reservoir management and design: 1, development of the stochastic model. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 5, n. 4, p. 767–777, 1969.

RODRIGUES, J. A. M. et al. Hydrological regionalization of streamflows for the Tocantins river basin in brazilian cerrado biome. *Revista Ambiente & Água*, Instituto de Pesquisas Ambientais em Bacias Hidrográficas, v. 16, n. 6, p. e2716, 2021.

ROSENBERG, D. E. et al. More integrated formal education and practice in water resources systems analysis. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 143, n. 12, dez. 2017.

SALWEY, S. et al. National-scale detection of reservoir impacts through hydrological signatures. *Water Resources Research*, v. 59, n. 5, 2023. E2022WR033893.

SANTANA, R. F. *Avaliação de estratégias de otimização estocástica para operação de reservatórios de pequena, média e grande escalas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe (UFS), São Cristóvão, 2019.

SILVA, T. O. da et al. Caracterização morfométrica da SubBacia Hidrográfica do Rio dos Monos-Bahia, Brasil. *Conjecturas*, União Atlântica de Pesquisadores, v. 22, n. 2, p. 292–306, 2022.

SOUZA, A. S. et al. Análise do desempenho hídrico do eixo leste do PISF considerando diferentes cenários hidrológicos. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE RECURSOS HÍDRICOS (ABRH). *Anais do XXIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. Foz do Iguaçu, 2019.

SVANIDZE, G. G. Mathematical modeling of hydrologic series for hydroelectric and water resources computations. FORT COLLINS, COLO.: WRP, 1980.

- TAN, Q.-f. et al. Derivation of optimal joint operating rules for multi-purpose multi-reservoir water-supply system. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 551, p. 253–264, 2017.
- TANG, R. et al. Reference point based multi-objective optimization of reservoir operation: a comparison of three algorithms. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 34, n. 3, p. 1005–1020, jan. 2020. ISSN 1573-1650.
- VIEIRA, A. S. *Um modelo de simulação, via programação linear sequencial, para sistema de recursos hídricos*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.
- WAN, H. et al. A novel model for water quality prediction caused by non-point sources pollution based on deep learning and feature extraction methods. *Journal of Hydrology*, Elsevier BV, v. 612, p. 128081, set. 2022.
- WANG, S.; JIANG, Z.; LIU, Y. Dimensionality reduction method of dynamic programming under hourly scale and its application in optimal scheduling of reservoir flood control. *Energies*, MDPI AG, v. 15, n. 3, p. 676, jan. 2022.
- WANG, X. et al. A bilevel modeling framework to analyze the institutional gap between research and operation practices—case on the three gorges reservoir pre-impoundment problem. *Journal of Hydrology*, v. 585, p. 124742, 2020.
- WCD: World Commission on Dams. *Dams and development: A new framework for decision-making*. [S.l.]: Earthscan Publications Ltd, 2000.
- WILKS, D. S. *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. 3. ed. [S.l.]: Academic Press, 2011. ISBN 9780123850225.
- YANG, Y. et al. Bridge bearing damage identification based on statistical moment change rate. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 206, p. 110898, 2024.
- ZHANG, J. L.; PONNAMBALAM, K. Stochastic control for risk under deregulated electricity market: a case study using a new formulation. *Canadian Journal of Civil Engineering*, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 32, n. 4, p. 719–725, 2005.
- ZHAO, X. et al. Glaucoma screening pipeline based on clinical measurements and hidden features. *IET Image Processing*, v. 13, n. 12, p. 2213–2223, 2019.
- ZHU, Y. et al. Operation rule derivation of hydropower reservoirs by support vector machine based on grey relational analysis. *Water*, MDPI AG, v. 13, n. 18, p. 2518, 2021.
- ZHU, Y. et al. Optimal energy storage operation chart and output distribution of cascade reservoirs based on operating rules derivation. *Water Resources Management*, Springer Science and Business Media LLC, v. 36, n. 14, p. 5751–5766, out. 2022.
- ZOMORODIAN, M. et al. Development and application of coupled system dynamics and game theory: A dynamic water conflict resolution method. *PLOS ONE*, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 12, n. 12, p. e0188489, 2017.

Apêndices

APÊNDICE A – Desenvolvimento da Função Objetivo $\mathbb{Z}_r$

Para o desenvolvimento das equações é considerado o produto notável $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + b^2 + 2bc + 2bd + 2be + c^2 + 2cd + 2ce + d^2 + 2de + e^2$. Dessa forma, a equação da função objetivo pode ser desenvolvida conforme abaixo.

$$\mathbb{Z}_r = \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E} \left(\left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) S_{\tau-1} + \alpha_\tau I_t + Sp_\tau - \delta_\tau - (\beta_\tau + e_\tau^0 + D_\tau) \right]^2 \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_r = \sum_{\tau=1}^{12} \mathbb{E} & \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right)^2 S_{\tau-1}^2 + 2\alpha_\tau S_{\tau-1} I_t \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) + 2S_{\tau-1} Sp_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \right. \\ & - 2S_{\tau-1} \delta_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) - 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) S_{\tau-1} \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \\ & + \alpha_\tau^2 I_t^2 + 2\alpha_\tau I_t Sp_\tau - 2\alpha_\tau I_t \delta_\tau - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) I_t \\ & + Sp_\tau^2 - 2Sp_\tau \delta_\tau - 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) Sp_\tau \\ & \left. + \delta_\tau^2 + 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \delta_\tau + (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$+ \delta_\tau^2 + 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \delta_\tau + (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau)^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_r = \sum_{\tau=1}^{12} & \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right)^2 \mathbb{E} (S_{\tau-1}^2) + 2\alpha_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1} I_t) + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1} Sp_\tau) \right. \\ & - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1} \delta_\tau) - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \\ & + \alpha_\tau^2 \mathbb{E} (I_t^2) + 2\alpha_\tau \mathbb{E} (I_t Sp_\tau) - 2\alpha_\tau \mathbb{E} (I_t \delta_\tau) - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \bar{I}_t \\ & + \mathbb{E} (Sp_\tau^2) - 2\mathbb{E} (Sp_\tau \delta_\tau) - 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E} (Sp_\tau) \\ & \left. + \mathbb{E} (\delta_\tau^2) + 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E} (\delta_\tau) + (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Uma vez que ou Sp_τ ou δ_τ vale zero, $\mathbb{E} (Sp_\tau \delta_\tau) = 0$. Assumindo $S_{\tau-1}$ e I_t independentes um do outro e de Sp_τ e δ_τ :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_r = \sum_{\tau=1}^{12} & \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right)^2 \mathbb{E} (S_{\tau-1}^2) + 2\alpha_\tau \bar{I}_t \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \mathbb{E} (Sp_\tau) \right. \\ & - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2} \right) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \mathbb{E} (\delta_\tau) - 2 \left(1 - \frac{e_t}{2} \right) (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \\ & + \alpha_\tau^2 \mathbb{E} (I_t^2) + 2\alpha_\tau \bar{I}_t \mathbb{E} (Sp_\tau) - 2\alpha_\tau \bar{I}_t \mathbb{E} (\delta_\tau) - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \bar{I}_t \\ & + \mathbb{E} (Sp_\tau^2) - 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E} (Sp_\tau) \\ & \left. + \mathbb{E} (\delta_\tau^2) + 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E} (\delta_\tau) + (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – Desenvolvimento da Função Objetivo $\mathbb{Z}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_0 &= \sum_{\tau=1}^{12} (\mathbb{E}(r_\tau) - D_\tau)^2 = \sum_{\tau=1}^{12} (\mathbb{E}(U_\tau + Sp_\tau - \delta_\tau) - D_\tau)^2 \\
&= \sum_{\tau=1}^{12} \left[\mathbb{E} \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) S_{\tau-1} - e_t^0 + \alpha_\tau I_t - \beta_\tau + Sp_\tau - \delta_\tau \right) - D_\tau \right]^2 \\
&= \sum_{\tau=1}^{12} \left[\mathbb{E} \left(\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) S_{\tau-1} + \alpha_\tau I_\tau + Sp_\tau - \delta_\tau \right) - (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \right]^2 \\
&= \sum_{\tau=1}^{12} \left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) + \alpha_\tau \bar{I}_\tau + \mathbb{E}(Sp_\tau) - \mathbb{E}(\delta_\tau) - (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \right]^2 \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_0 &= \sum_{\tau=1}^{12} \left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right)^2 \mathbb{E}(S_{\tau-1})^2 + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) \mathbb{E}(Sp_\tau) \right. \\
&\quad - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) \mathbb{E}(\delta_\tau) - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) \\
&\quad + \alpha_\tau^2 \bar{I}_\tau^2 + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E}(Sp_\tau) - 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E}(\delta_\tau) - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + D_\tau + e_t^0) \bar{I}_\tau \\
&\quad + \mathbb{E}(Sp_\tau)^2 - 2\mathbb{E}(Sp_\tau) \mathbb{E}(\delta_\tau) - 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E}(Sp_\tau) \\
&\quad \left. + \mathbb{E}(\delta_\tau)^2 + 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E}(\delta_\tau) + (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau)^2 \right] \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_0 &= \sum_{\tau=1}^{12} \left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right)^2 \mathbb{E}(S_{\tau-1})^2 + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) \mathbb{E}(Sp_\tau) \right. \\
&\quad - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) \mathbb{E}(\delta_\tau) - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E}(S_{\tau-1}) \\
&\quad + \alpha_\tau^2 \bar{I}_\tau^2 + 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E}(Sp_\tau) - 2\alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E}(\delta_\tau) - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + D_\tau + e_t^0) \bar{I}_\tau \\
&\quad + \mathbb{E}(Sp_\tau)^2 - 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E}(Sp_\tau) \\
&\quad \left. + \mathbb{E}(\delta_\tau)^2 + 2(\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau) \mathbb{E}(\delta_\tau) + (\beta_\tau + e_t^0 + D_\tau)^2 \right] \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – Resultados do FP-SQE-GAUSS

Otimização

[OPTIMIZATION]: Moments of storage and LDR parameters

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.		
LDR						
Time	E1	E2	VarS	StdS	alpha	beta
1	3.1234	9.8525	0.0971	0.3116	0.4954	2.2603
2	4.0159	16.3386	0.2110	0.4593	0.3830	2.8948
3	4.7695	22.5581	0.0000	0.0000	0.4281	3.8882
4	5.0223	25.0755	0.0000	0.0000	0.4943	4.4871
5	4.9717	24.6726	0.0000	0.0000	0.4316	4.5738
6	4.6004	21.1768	0.0127	0.1128	0.4955	4.3292
7	4.1018	16.8318	0.0071	0.0841	0.4931	3.8887
8	3.5257	12.4357	0.0049	0.0700	0.4912	3.3473
9	2.9013	8.4215	0.0041	0.0637	0.4896	2.7433
10	2.3194	5.3862	0.0066	0.0811	0.4893	2.1364
11	2.0363	4.1718	0.0251	0.1585	0.4904	1.7036
12	2.3355	5.5116	0.0572	0.2392	0.4924	1.7120

[OPTIMIZATION]: Probabilities for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Pcon	Pdef	Psp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.9859	0.0000	0.0141
3	0.6572	0.0000	0.3428
4	0.4239	0.0000	0.5761
5	0.6424	0.0000	0.3576
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	0.0000	0.0000

[OPTIMIZATION]: Moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.

Time	E1def	E2def	VarDef	StdDef
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[OPTIMIZATION]: Moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	E1sp	E2sp	VarSp	StdSp
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0025	0.0008	0.0008	0.0285
3	0.1294	0.0801	0.0633	0.2516
4	0.1710	0.0780	0.0487	0.2207
5	0.0624	0.0178	0.0139	0.1179
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[OPTIMIZATION]: 1st moments of release variables

	U	r	R
Time	E1U	E1r	E1R
1	0.9127	0.9127	0.9127
2	0.9118	0.9143	0.9118
3	0.8773	1.0067	0.8773
4	0.9682	1.1392	0.9682
5	0.7807	0.8431	0.7807
6	0.8964	0.8964	0.8964
7	0.8978	0.8978	0.8978
8	0.8997	0.8997	0.8997
9	0.9020	0.9020	0.9020
10	0.9048	0.9048	0.9048
11	0.9077	0.9077	0.9077
12	0.9103	0.9103	0.9103

Simulação sob Cenário Cen-DG

[SIMULATION]: 1000-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.74	0.36
2	1.91	0.42
3	1.81	0.52
4	1.44	0.48
5	0.86	0.54
6	0.60	0.38
7	0.49	0.36
8	0.42	0.33
9	0.38	0.34
10	0.42	0.38
11	0.72	0.43
12	1.31	0.36

[SIMULATION]: Sample moments of storage

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	3.1087	9.7634	0.0997	0.3157
2	4.0421	16.5820	0.2437	0.4936
3	4.7604	22.8393	0.1780	0.4219
4	5.0018	25.0679	0.0501	0.2238
5	4.9641	24.6791	0.0368	0.1919
6	4.6053	21.2217	0.0132	0.1148
7	4.1023	16.8371	0.0080	0.0894
8	3.5242	12.4251	0.0050	0.0705
9	2.9034	8.4341	0.0044	0.0662
10	2.3165	5.3728	0.0065	0.0807
11	2.0419	4.1934	0.0241	0.1552
12	2.3479	5.5695	0.0571	0.2389

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.9800	0.0000	0.0200
3	0.6510	0.0000	0.3490
4	0.4360	0.0000	0.5640
5	0.6320	0.0000	0.3680
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000

```

11      1.0000      0.0000      0.0000
12      1.0000      0.0000      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

```

=====
      1st Mom.   2nd Mom.   Variance   Std.Dev.
      -----
Time    meanDef   meanDef2   varDef    stdDef
-----
  1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  2      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  3      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  4      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  5      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  6      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  7      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  8      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  9      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 10      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 11      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 12      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: Sample moments of spill

```

=====
      1st Mom.   2nd Mom.   Variance   Std.Dev.
      -----
Time    meanSp    meanSp2    varSp     stdSp
-----
  1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  2      0.0028      0.0007      0.0007      0.0270
  3      0.1254      0.0715      0.0558      0.2362
  4      0.1791      0.0884      0.0564      0.2374
  5      0.0629      0.0194      0.0154      0.1242
  6      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  7      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  8      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  9      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 10      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 11      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 12      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

```

=====
              U              r              R
              -----
Time    meanU    meanr    meanR
-----
  1      0.9139      0.9139      0.9139
  2      0.9188      0.9216      0.9188
  3      0.9307      1.0560      0.9307
  4      0.9852      1.1643      0.9852
  5      0.7660      0.8289      0.7660
  6      0.8942      0.8942      0.8942
  7      0.9031      0.9031      0.9031

```

8	0.8988	0.8988	0.8988
9	0.9026	0.9026	0.9026
10	0.9041	0.9041	0.9041
11	0.9102	0.9102	0.9102
12	0.9280	0.9280	0.9280

=====

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

=====

fval = 1.0582

fsim = 1.9897; diff = 88.03%

Measure	SSE	MSE
Storage 1st Mom.	0.00169	0.00014
Storage 2nd Mom.	0.15265	0.01272
Prob. Containment	0.00033	0.00003
Prob. Deficit	0.00000	0.00000
Prob. Spill	0.00033	0.00003
Deficit 1st Mom.	0.00000	0.00000
Deficit 2nd Mom.	0.00000	0.00000
Spill 1st Mom.	0.00008	0.00001
Spill 2nd Mom.	0.00019	0.00002
Allocation 1st Mom.	0.00375	0.00031

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)

p-value = 3.9565e-15

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = -0.0077253

h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.15862

95%-CI: [-0.018537, 0.0030866]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

sample median = 3.1614e-246

h = 1 (1 = reject)

p-value = 0.016348

=====

Simulação sob Cenário Cen-RH

[SIMULATION]: 90-year inflow scenario

=====

Time	Mean	CV
1	1.77	0.35
2	1.86	0.44
3	1.79	0.55

4	1.43	0.47
5	0.86	0.53
6	0.59	0.38
7	0.49	0.34
8	0.43	0.33
9	0.38	0.33
10	0.42	0.38
11	0.70	0.45
12	1.28	0.37

=====

[SIMULATION]: Sample moments of storage

=====

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanS	meanS2	varS	stdS
-----	-----	-----	-----	-----
1	3.1234	9.8514	0.0971	0.3116
2	4.0058	16.3012	0.2580	0.5080
3	4.7318	22.5359	0.1478	0.3844
4	4.9906	24.9574	0.0516	0.2271
5	4.9662	24.6932	0.0301	0.1736
6	4.5966	21.1440	0.0157	0.1252
7	4.1018	16.8317	0.0071	0.0841
8	3.5257	12.4356	0.0049	0.0700
9	2.9013	8.4214	0.0041	0.0637
10	2.3194	5.3862	0.0066	0.0811
11	2.0363	4.1715	0.0251	0.1585
12	2.3355	5.5110	0.0572	0.2392

=====

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

=====

	Containment	Deficit	Spill
	-----	-----	-----
Time	Fcon	Fdef	Fsp
-----	-----	-----	-----
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.9556	0.0000	0.0444
3	0.7778	0.0000	0.2222
4	0.5000	0.0000	0.5000
5	0.7667	0.0000	0.2333
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	0.0000	0.0000

=====

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

=====

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanDef	meanDef2	varDef	stdDef
-----	-----	-----	-----	-----

1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

=====

[SIMULATION]: Sample moments of spill

=====

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanSp	meanSp2	varSp	stdSp
-----	-----	-----	-----	-----
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0047	0.0007	0.0007	0.0264
3	0.1263	0.1550	0.1406	0.3750
4	0.1704	0.0905	0.0622	0.2493
5	0.0556	0.0354	0.0327	0.1808
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

=====

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

=====

	U	r	R
	-----	-----	-----
Time	meanU	meanr	meanR
-----	-----	-----	-----
1	0.9471	0.9471	0.9471
2	0.9199	0.9246	0.9199
3	0.9081	1.0345	0.9081
4	0.9629	1.1333	0.9629
5	0.7615	0.8171	0.7615
6	0.8949	0.8949	0.8949
7	0.8940	0.8940	0.8940
8	0.8997	0.8997	0.8997
9	0.9020	0.9020	0.9020
10	0.9048	0.9048	0.9048
11	0.9077	0.9077	0.9077
12	0.9103	0.9103	0.9103

=====

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

=====

fval = 1.0582

fsim = 3.4019; diff = 221.48%

Measure	SSE	MSE
Storage 1st Mom.	0.00258	0.00021
Storage 2nd Mom.	0.01735	0.00145
Prob. Containment	0.03668	0.00306
Prob. Deficit	0.00000	0.00000
Prob. Spill	0.03668	0.00306
Deficit 1st Mom.	0.00000	0.00000
Deficit 2nd Mom.	0.00000	0.00000
Spill 1st Mom.	0.00006	0.00001
Spill 2nd Mom.	0.00609	0.00051
Allocation 1st Mom.	0.00261	0.00022

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)
p-value = 3.9794e-15

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = 0.0025608
h = 0 (1 = reject)
p-value = 0.2563
95%-CI: [-0.001901, 0.0070226]

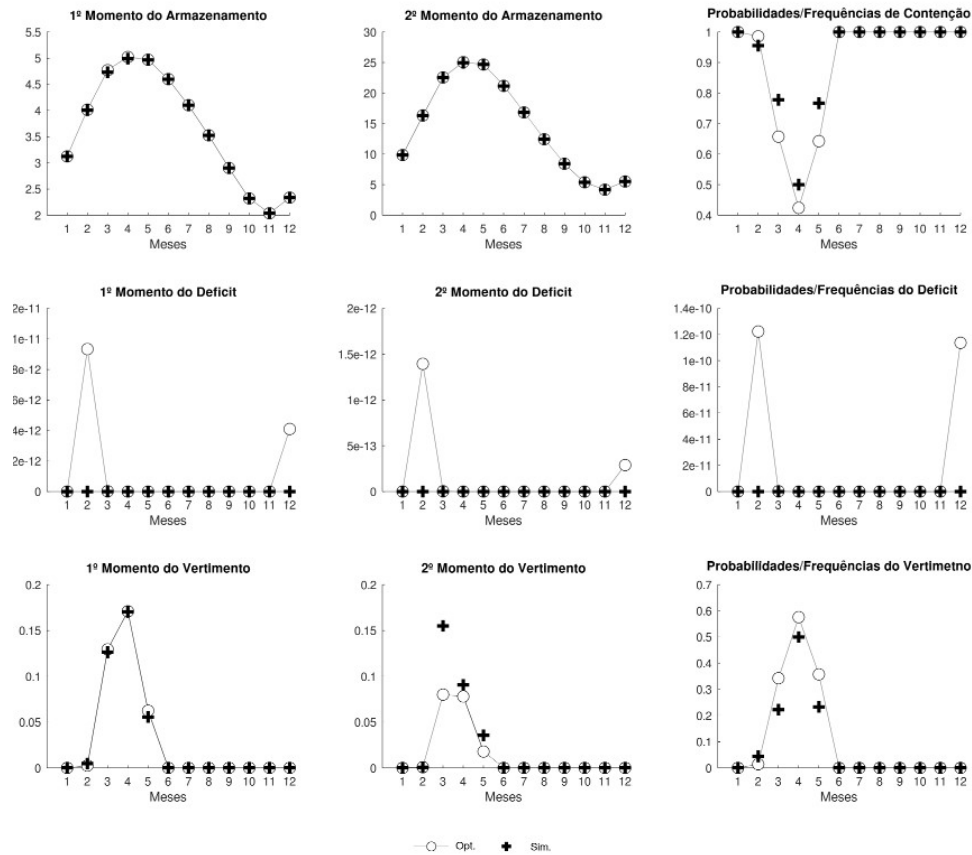
SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

sample median = 8.2591e-18
h = 1 (1 = reject)
p-value = 8.0676e-08

=====

Figura 8 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-GAUSS sob cenário Cen-RH.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Simulação sob Cenário Cen-MF

[SIMULATION]: 1000-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.76	0.38
2	1.88	0.41
3	1.75	0.57
4	1.44	0.49
5	0.84	0.49
6	0.59	0.38
7	0.48	0.36
8	0.42	0.34
9	0.38	0.37
10	0.42	0.40
11	0.70	0.44
12	1.24	0.36

[SIMULATION]: Sample moments of storage

1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
----------	----------	----------	----------

Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	3.1216	9.8595	0.1154	0.3398
2	4.0230	16.4043	0.2200	0.4690
3	4.7292	22.5112	0.1462	0.3823
4	5.0016	25.0486	0.0330	0.1817
5	4.9660	24.6832	0.0217	0.1471
6	4.5989	21.1626	0.0128	0.1130
7	4.0984	16.8045	0.0075	0.0869
8	3.5242	12.4252	0.0053	0.0729
9	2.8993	8.4105	0.0048	0.0694
10	2.3157	5.3696	0.0070	0.0835
11	2.0349	4.1646	0.0236	0.1537
12	2.3132	5.4000	0.0491	0.2217

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.9600	0.0000	0.0400
3	0.7050	0.0000	0.2950
4	0.5250	0.0000	0.4750
5	0.7600	0.0000	0.2400
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	0.0000	0.0000

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanDef	meanDef2	varDef	stdDef
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[SIMULATION]: Sample moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanSp	meanSp2	varSp	stdSp
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0062	0.0016	0.0016	0.0399
3	0.1168	0.1353	0.1218	0.3490
4	0.1815	0.1034	0.0706	0.2656
5	0.0513	0.0230	0.0204	0.1429
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

	U	r	R
Time	meanU	meanr	meanR
1	0.8922	0.8922	0.8922
2	0.9248	0.9310	0.9248
3	0.8919	1.0087	0.8919
4	0.9547	1.1362	0.9547
5	0.7552	0.8065	0.7552
6	0.8909	0.8909	0.8909
7	0.8929	0.8929	0.8929
8	0.8949	0.8949	0.8949
9	0.8986	0.8986	0.8986
10	0.8992	0.8992	0.8992
11	0.9027	0.9027	0.9027
12	0.8871	0.8871	0.8871

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

fval = 1.0582

fsim = 3.1822; diff = 200.72%

Measure	SSE	MSE
Storage 1st Mom.	0.00267	0.00022
Storage 2nd Mom.	0.02137	0.00178
Prob. Containment	0.02699	0.00225
Prob. Deficit	0.00000	0.00000
Prob. Spill	0.02699	0.00225
Deficit 1st Mom.	0.00000	0.00000
Deficit 2nd Mom.	0.00000	0.00000
Spill 1st Mom.	0.00041	0.00003
Spill 2nd Mom.	0.00373	0.00031
Allocation 1st Mom.	0.00232	0.00019

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

 h = 1 (1 = reject)
 p-value = 7.0515e-15

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

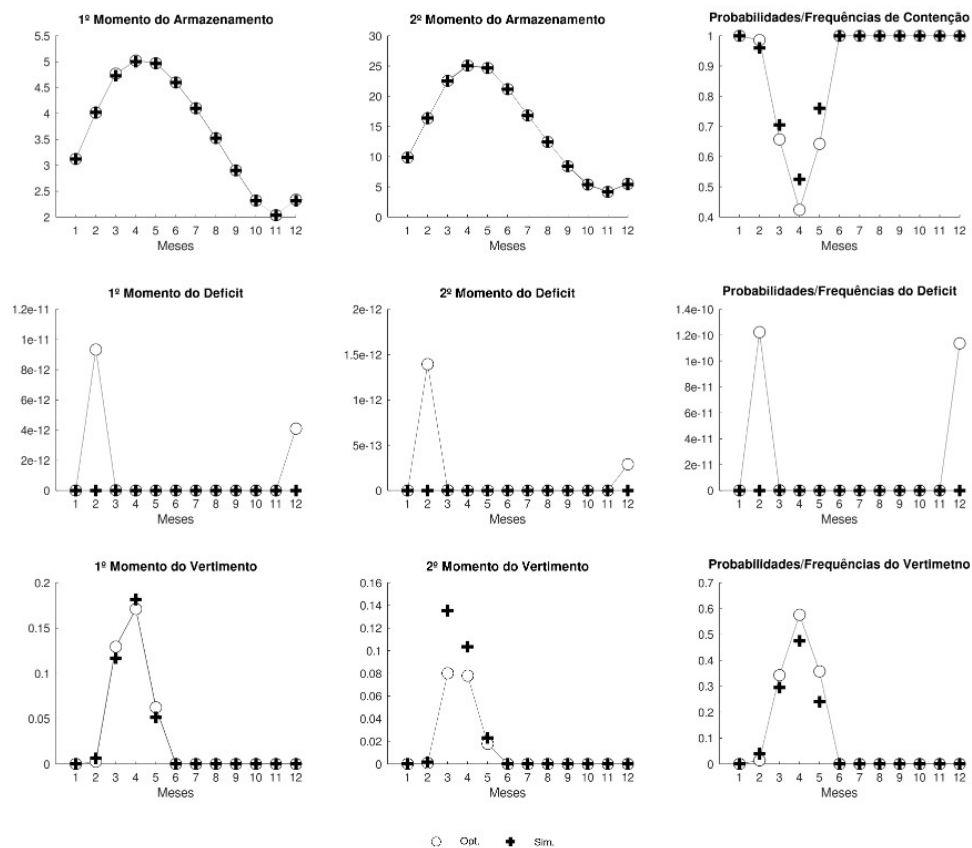
 sample mean = 0.002901
 h = 0 (1 = reject)
 p-value = 0.21575
 95%-CI: [-0.0017301, 0.0075321]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

sample median = 8.2591e-18
 h = 1 (1 = reject)
 p-value = 7.513e-07
 =====

Figura 9 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-GAUSS sob cenário Cen-MF.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

APÊNDICE D – Resultados do FP-SQE-AMOSTRA

Otimização

[OPTIMIZATION]: Moments of storage and LDR parameters

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.		
LDR						
Time	E1	E2	VarS	StdS	alpha	beta
1	1.9528	3.9106	0.0971	0.3117	0.4954	1.0792
2	2.8564	8.3281	0.1689	0.4110	0.4983	1.9405
3	3.6458	13.5092	0.2177	0.4665	0.4077	2.6814
4	4.1669	17.4777	0.1149	0.3390	0.4985	3.4600
5	4.0061	16.0949	0.0461	0.2147	0.4183	3.5509
6	3.6077	13.0280	0.0127	0.1128	0.4957	3.3310
7	3.0703	9.4339	0.0071	0.0841	0.4931	2.8482
8	2.4593	6.0530	0.0049	0.0700	0.4912	2.2694
9	1.8028	3.2541	0.0041	0.0637	0.4896	1.6313
10	1.1919	1.4273	0.0066	0.0811	0.4893	0.9930
11	0.8493	0.7506	0.0293	0.1713	0.4052	0.3828
12	1.1267	1.3627	0.0933	0.3054	0.3933	0.3689

[OPTIMIZATION]: Probabilities for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Pcon	Pdef	Psp
1	0.9999	0.0001	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9914	0.0000	0.0086
4	0.9979	0.0000	0.0021
5	1.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	0.4418	0.5582	0.0000
12	0.8647	0.1353	0.0000

[OPTIMIZATION]: Moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.

Time	E1def	E2def	VarDef	StdDef
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0029
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011
4	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
11	0.0576	0.0047	0.0013	0.0366
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[OPTIMIZATION]: Moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	E1sp	E2sp	VarSp	StdSp
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
3	0.0867	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0060	0.0060	0.0777
5	0.0222	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[OPTIMIZATION]: 1st moments of release variables

	U	r	R
Time	E1U	E1r	E1R
1	0.8959	0.8959	0.8959
2	0.9167	0.9167	0.9167
3	0.8918	0.9785	0.8918
4	0.8808	0.8808	0.8808
5	0.9416	0.9638	0.9416
6	0.9343	0.9343	0.9343
7	0.9541	0.9541	0.9541
8	0.9572	0.9572	0.9572
9	0.9608	0.9608	0.9608
10	0.9652	0.9652	0.9652
11	1.0555	0.9979	0.9979
12	0.9532	0.9532	0.9532

Simulação sob Cenário Cen-DG

[SIMULATION]: 1000-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.74	0.36
2	1.91	0.42
3	1.81	0.52
4	1.44	0.48
5	0.86	0.54
6	0.60	0.38
7	0.49	0.36
8	0.42	0.33
9	0.38	0.34
10	0.42	0.38
11	0.72	0.43
12	1.31	0.36

[SIMULATION]: Sample moments of storage

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	1.9381	3.8561	0.0998	0.3159
2	2.8733	8.4300	0.1742	0.4174
3	3.7259	14.2119	0.3296	0.5741
4	4.1440	17.3300	0.1576	0.3971
5	4.0193	16.2329	0.0780	0.2793
6	3.6121	13.0607	0.0133	0.1155
7	3.0708	9.4381	0.0080	0.0894
8	2.4578	6.0456	0.0050	0.0705
9	1.8049	3.2621	0.0044	0.0662
10	1.1890	1.4203	0.0065	0.0807
11	0.8805	0.7851	0.0098	0.0987
12	1.1662	1.4250	0.0651	0.2551

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9970	0.0000	0.0030
4	0.9970	0.0000	0.0030
5	1.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000

```

11      0.4600      0.5400      0.0000
12      0.8840      0.1160      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

```

=====
      1st Mom.   2nd Mom.   Variance   Std.Dev.
      -----
Time    meanDef   meanDef2   varDef    stdDef
-----
  1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  2      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  3      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  4      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  5      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  6      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  7      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  8      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  9      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 10      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 11      0.0824      0.0197      0.0129      0.1135
 12      0.0177      0.0045      0.0042      0.0645
=====

```

[SIMULATION]: Sample moments of spill

```

=====
      1st Mom.   2nd Mom.   Variance   Std.Dev.
      -----
Time    meanSp    meanSp2    varSp      stdSp
-----
  1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  2      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  3      0.0009      0.0004      0.0004      0.0207
  4      0.0002      0.0000      0.0000      0.0051
  5      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  6      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  7      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  8      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  9      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 10      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 11      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 12      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

```

=====
              U              r              R
              -----
Time    meanU    meanr    meanR
-----
  1      0.9252      0.9252      0.9252
  2      0.9333      0.9333      0.9333
  3      0.9283      0.9292      0.9283
  4      0.9935      0.9938      0.9935
  5      0.9265      0.9265      0.9265
  6      0.9532      0.9532      0.9532
  7      0.9591      0.9591      0.9591

```

8	0.9562	0.9562	0.9562
9	0.9614	0.9614	0.9614
10	0.9645	0.9645	0.9645
11	1.0571	0.9747	0.9747
12	0.9938	0.9761	0.9761

=====

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

=====

fval = 1.7511

fsim = 1.834; diff = 4.74%

Measure	SSE	MSE
Storage 1st Mom.	0.01020	0.00085
Storage 2nd Mom.	0.55430	0.04619
Prob. Containment	0.00073	0.00006
Prob. Deficit	0.00070	0.00006
Prob. Spill	0.00003	0.00000
Deficit 1st Mom.	0.00093	0.00008
Deficit 2nd Mom.	0.00025	0.00002
Spill 1st Mom.	0.00786	0.00065
Spill 2nd Mom.	0.00004	0.00000
Allocation 1st Mom.	0.01686	0.00141

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)

p-value = 1.4259e-13

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = -0.013367

h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.20598

95%-CI: [-0.03425, 0.0075151]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

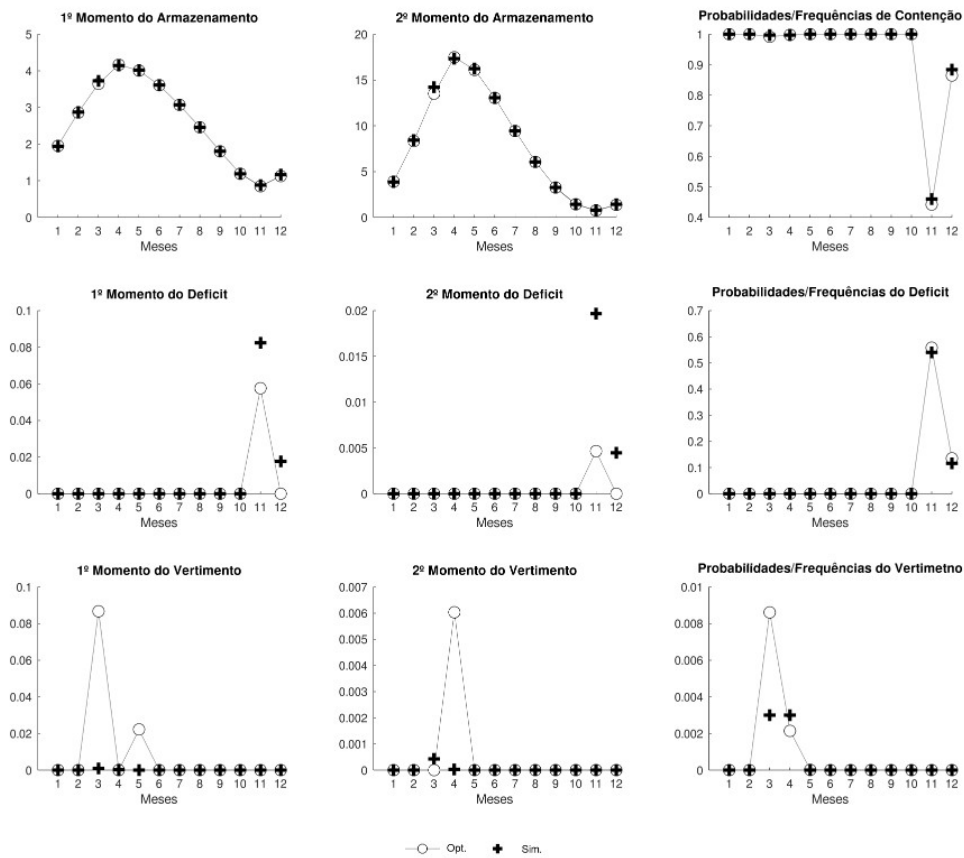
sample median = 0

h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.41769

=====

Figura 10 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-AMOSTRA sob cenário Cen-DG



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Simulação sob Cenário Cen-RH

[SIMULATION]: 90-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.77	0.35
2	1.86	0.44
3	1.79	0.55
4	1.43	0.47
5	0.86	0.53
6	0.59	0.38
7	0.49	0.34
8	0.43	0.33
9	0.38	0.33
10	0.42	0.38
11	0.70	0.45
12	1.28	0.37

[SIMULATION]: Sample moments of storage

1st Mom. 2nd Mom. Variance Std.Dev.

Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	1.9525	3.9087	0.0975	0.3123
2	2.8394	8.2548	0.1950	0.4416
3	3.6760	13.8087	0.2989	0.5467
4	4.1230	17.1695	0.1720	0.4147
5	4.0074	16.1371	0.0784	0.2800
6	3.6021	12.9927	0.0178	0.1335
7	3.0703	9.4338	0.0071	0.0841
8	2.4593	6.0529	0.0049	0.0700
9	1.8028	3.2540	0.0041	0.0637
10	1.1919	1.4272	0.0066	0.0811
11	0.8775	0.7841	0.0143	0.1194
12	1.1460	1.3849	0.0724	0.2691

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9667	0.0000	0.0333
4	1.0000	0.0000	0.0000
5	0.9889	0.0000	0.0111
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	0.3778	0.6222	0.0000
12	0.8222	0.1778	0.0000

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanDef	meanDef2	varDef	stdDef
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0858	0.0170	0.0098	0.0987
12	0.0123	0.0013	0.0012	0.0348

[SIMULATION]: Sample moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanSp	meanSp2	varSp	stdSp
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0260	0.0233	0.0228	0.1511
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0045	0.0018	0.0018	0.0427
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

	U	r	R
Time	meanU	meanr	meanR
1	0.9628	0.9628	0.9628
2	0.9336	0.9336	0.9336
3	0.9053	0.9313	0.9053
4	0.9513	0.9513	0.9513
5	0.9145	0.9190	0.9145
6	0.9413	0.9413	0.9413
7	0.9486	0.9486	0.9486
8	0.9572	0.9572	0.9572
9	0.9608	0.9608	0.9608
10	0.9652	0.9652	0.9652
11	1.0555	0.9697	0.9697
12	0.9811	0.9688	0.9688

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

fval = 1.7511

fsim = 3.0458; diff = 73.94%

Measure	SSE	MSE
Storage 1st Mom.	0.00433	0.00036
Storage 2nd Mom.	0.19467	0.01622
Prob. Containment	0.00665	0.00055
Prob. Deficit	0.00591	0.00049
Prob. Spill	0.00074	0.00006
Deficit 1st Mom.	0.00095	0.00008
Deficit 2nd Mom.	0.00015	0.00001
Spill 1st Mom.	0.00400	0.00033
Spill 2nd Mom.	0.00058	0.00005
Allocation 1st Mom.	0.01177	0.00098

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)

p-value = 1.3294e-14

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = 0.00019987

h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.97489

95%-CI: [-0.012417, 0.012817]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

sample median = 0

h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.32401

=====

Simulação sob Cenário Cen-MF

[SIMULATION]: 1000-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.76	0.38
2	1.88	0.41
3	1.75	0.57
4	1.44	0.49
5	0.84	0.49
6	0.59	0.38
7	0.48	0.36
8	0.42	0.34
9	0.38	0.37
10	0.42	0.40
11	0.70	0.44
12	1.24	0.36

[SIMULATION]: Sample moments of storage

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	1.9512	3.9223	0.1153	0.3395
2	2.8577	8.3333	0.1669	0.4085
3	3.6646	13.7062	0.2774	0.5267
4	4.1470	17.3529	0.1552	0.3940
5	4.0066	16.1131	0.0601	0.2452
6	3.6057	13.0146	0.0132	0.1148
7	3.0669	9.4136	0.0075	0.0869

8	2.4577	6.0458	0.0053	0.0729
9	1.8008	3.2476	0.0048	0.0694
10	1.1882	1.4189	0.0070	0.0835
11	0.8747	0.7777	0.0126	0.1124
12	1.1198	1.3153	0.0614	0.2478

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
	-----	-----	-----
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9700	0.0000	0.0300
4	0.9980	0.0000	0.0020
5	0.9960	0.0000	0.0040
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	0.3900	0.6100	0.0000
12	0.8220	0.1780	0.0000

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanDef	meanDef2	varDef	stdDef
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0847	0.0172	0.0101	0.1004
12	0.0127	0.0013	0.0012	0.0340

[SIMULATION]: Sample moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanSp	meanSp2	varSp	stdSp
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0228	0.0290	0.0285	0.1689
4	0.0002	0.0000	0.0000	0.0051

5	0.0016	0.0006	0.0006	0.0254
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

=====

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

=====

	U	r	R
	-----	-----	-----
Time	meanU	meanr	meanR
-----	-----	-----	-----
1	0.8918	0.8918	0.8918
2	0.9394	0.9394	0.9394
3	0.8928	0.9155	0.8928
4	0.9321	0.9324	0.9321
5	0.9204	0.9220	0.9204
6	0.9354	0.9354	0.9354
7	0.9489	0.9489	0.9489
8	0.9523	0.9523	0.9523
9	0.9574	0.9574	0.9574
10	0.9596	0.9596	0.9596
11	1.0508	0.9661	0.9661
12	0.9608	0.9481	0.9481

=====

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

=====

fval = 1.7511

fsim = 2.7775; diff = 58.62%

Measure	SSE	MSE
-----	-----	-----
Storage 1st Mom.	0.00148	0.00012
Storage 2nd Mom.	0.05862	0.00489
Prob. Containment	0.00499	0.00042
Prob. Deficit	0.00451	0.00038
Prob. Spill	0.00047	0.00004
Deficit 1st Mom.	0.00089	0.00007
Deficit 2nd Mom.	0.00016	0.00001
Spill 1st Mom.	0.00452	0.00038
Spill 2nd Mom.	0.00088	0.00007
Allocation 1st Mom.	0.00475	0.00040

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)

p-value = 6.3829e-15

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = -0.00040555

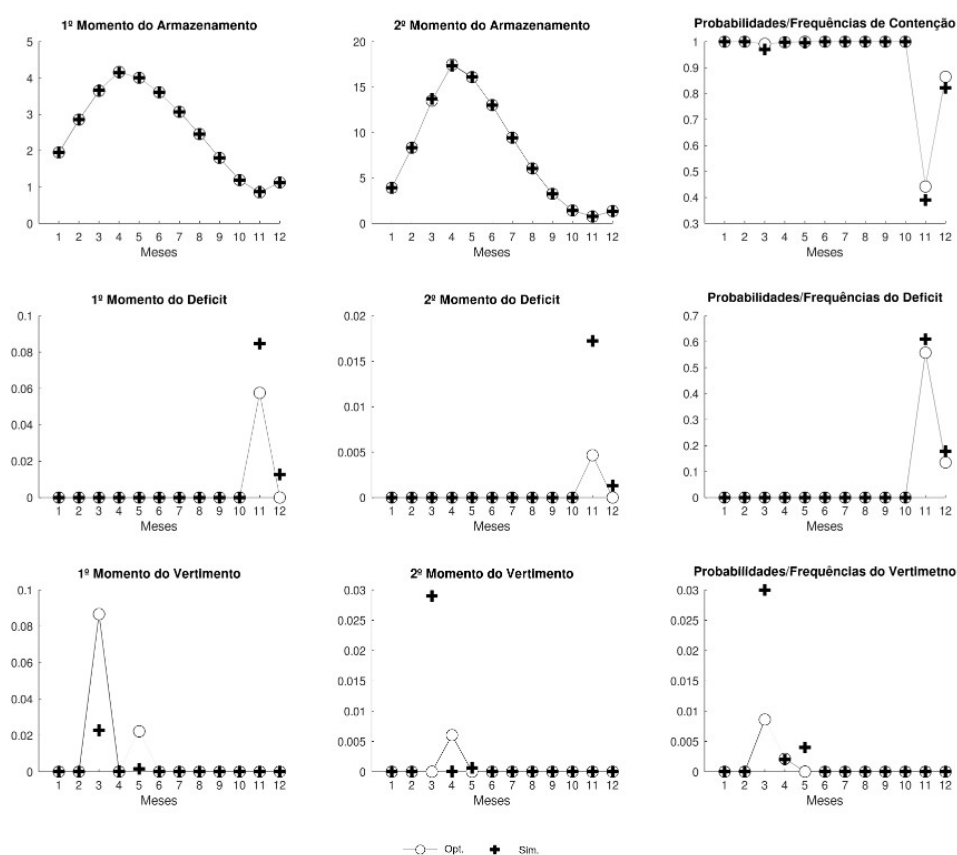
h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.91082
 95%-CI: [-0.0075994, 0.0067883]

SIGNED-RANK TEST
 FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

 sample median = 0
 h = 0 (1 = reject)
 p-value = 0.33678
 =====

Figura 11 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-AMOSTRA sob cenário Cen-MF



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

APÊNDICE E – Resultados do FP-SQE-ECDF

Otimização

[OPTIMIZATION]: Moments of storage and LDR parameters

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.		
LDR						
Time	E1	E2	VarS	StdS	alpha	beta
1	1.9581	3.9340	0.0997	0.3157	0.4955	1.0792
2	2.8619	8.3624	0.1716	0.4143	0.4983	1.9405
3	3.7163	14.0579	0.2472	0.4972	0.4061	2.6823
4	4.1683	17.4905	0.1157	0.3401	0.4984	3.4600
5	4.0318	16.3132	0.0580	0.2409	0.4170	3.5514
6	3.6100	13.0451	0.0131	0.1145	0.4957	3.3311
7	3.0715	9.4416	0.0073	0.0855	0.4930	2.8482
8	2.4605	6.0590	0.0051	0.0716	0.4912	2.2694
9	1.8040	3.2587	0.0042	0.0647	0.4896	1.6313
10	1.1933	1.4305	0.0067	0.0817	0.4894	0.9931
11	0.8792	0.7874	0.0145	0.1203	0.4045	0.3838
12	1.1506	1.3961	0.0722	0.2687	0.3929	0.3695

[OPTIMIZATION]: Probabilities for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Pcon	Pdef	Psp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9667	0.0000	0.0333
4	1.0000	0.0000	0.0000
5	0.9889	0.0000	0.0111
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	0.3778	0.6222	0.0000
12	0.8222	0.1778	0.0000

[OPTIMIZATION]: Moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.

Time	E1def	E2def	VarDef	StdDef
1	0.0024	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0026	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0024	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0015	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0846	0.0172	0.0100	0.0999
12	0.0148	0.0032	0.0029	0.0542

[OPTIMIZATION]: Moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	E1sp	E2sp	VarSp	StdSp
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0265	0.0240	0.0233	0.1525
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0046	0.0019	0.0018	0.0430
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[OPTIMIZATION]: 1st moments of release variables

	U	r	R
Time	E1U	E1r	E1R
1	0.9196	0.9172	0.9172
2	0.9219	0.9193	0.9193
3	0.8935	0.9176	0.8911
4	0.9510	0.9494	0.9494
5	0.9414	0.9449	0.9404
6	0.9598	0.9591	0.9591
7	0.9564	0.9558	0.9558
8	0.9584	0.9578	0.9578
9	0.9620	0.9615	0.9615
10	0.9664	0.9659	0.9659
11	1.0554	0.9707	0.9707
12	0.9817	0.9669	0.9669

Simulação sob Cenário Cen-DG

[SIMULATION]: 1000-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.74	0.36
2	1.91	0.42
3	1.81	0.52
4	1.44	0.48
5	0.86	0.54
6	0.60	0.38
7	0.49	0.36
8	0.42	0.33
9	0.38	0.34
10	0.42	0.38
11	0.72	0.43
12	1.31	0.36

[SIMULATION]: Sample moments of storage

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	1.9381	3.8558	0.0998	0.3159
2	2.8734	8.4305	0.1743	0.4174
3	3.7296	14.2409	0.3314	0.5756
4	4.1442	17.3316	0.1576	0.3970
5	4.0210	16.2465	0.0784	0.2799
6	3.6122	13.0612	0.0133	0.1155
7	3.0709	9.4381	0.0080	0.0894
8	2.4578	6.0456	0.0050	0.0705
9	1.8049	3.2621	0.0044	0.0662
10	1.1890	1.4203	0.0065	0.0807
11	0.8813	0.7866	0.0099	0.0994
12	1.1671	1.4273	0.0652	0.2553

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

	Containment	Deficit	Spill
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9970	0.0000	0.0030
4	0.9970	0.0000	0.0030
5	1.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000

```

11      0.4620      0.5380      0.0000
12      0.8850      0.1150      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

```

=====
      1st Mom.   2nd Mom.   Variance   Std.Dev.
      -----
Time    meanDef   meanDef2   varDef    stdDef
-----
  1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  2      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  3      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  4      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  5      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  6      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  7      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  8      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  9      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 10      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 11      0.0817      0.0195      0.0128      0.1132
 12      0.0176      0.0044      0.0041      0.0643
=====

```

[SIMULATION]: Sample moments of spill

```

=====
      1st Mom.   2nd Mom.   Variance   Std.Dev.
      -----
Time    meanSp    meanSp2    varSp     stdSp
-----
  1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  2      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  3      0.0009      0.0004      0.0004      0.0210
  4      0.0002      0.0000      0.0000      0.0051
  5      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  6      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  7      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  8      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
  9      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 10      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 11      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
 12      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
=====

```

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

```

=====
              U              r              R
              -----
Time    meanU    meanr    meanR
-----
  1      0.9262      0.9262      0.9262
  2      0.9332      0.9332      0.9332
  3      0.9247      0.9256      0.9247
  4      0.9970      0.9972      0.9970
  5      0.9250      0.9250      0.9250
  6      0.9548      0.9548      0.9548
  7      0.9591      0.9591      0.9591

```

8	0.9562	0.9562	0.9562
9	0.9614	0.9614	0.9614
10	0.9645	0.9645	0.9645
11	1.0556	0.9740	0.9740
12	0.9935	0.9760	0.9760

=====

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

=====

fval = 1.7692

fsim = 1.8349; diff = 3.71%

Measure	SSE	MSE
Storage 1st Mom.	0.00172	0.00014
Storage 2nd Mom.	0.07550	0.00629
Prob. Containment	0.01209	0.00101
Prob. Deficit	0.01103	0.00092
Prob. Spill	0.00105	0.00009
Deficit 1st Mom.	0.00004	0.00000
Deficit 2nd Mom.	0.00001	0.00000
Spill 1st Mom.	0.00067	0.00006
Spill 2nd Mom.	0.00056	0.00005
Allocation 1st Mom.	0.00403	0.00034

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)

p-value = 4.9329e-14

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = 0.0015383

h = 0 (1 = reject)

p-value = 0.6955

95%-CI: [-0.0062665, 0.0093431]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

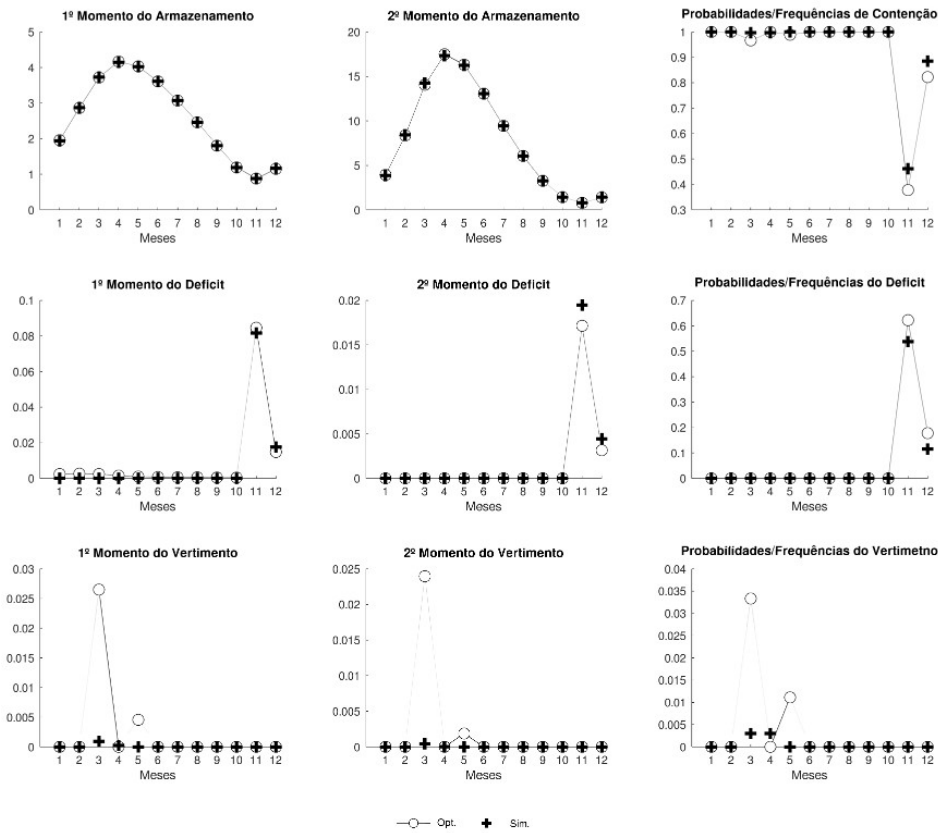
sample median = 6.6871e-15

h = 1 (1 = reject)

p-value = 0.0054863

=====

Figura 12 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-ECDF sob cenário Cen-DG



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Simulação sob Cenário Cen-RH

[SIMULATION]: 90-year inflow scenario

Time	Mean	CV
1	1.77	0.35
2	1.86	0.44
3	1.79	0.55
4	1.43	0.47
5	0.86	0.53
6	0.59	0.38
7	0.49	0.34
8	0.43	0.33
9	0.38	0.33
10	0.42	0.38
11	0.70	0.45
12	1.28	0.37

[SIMULATION]: Sample moments of storage

1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
-----	-----	-----	-----

Time	meanS	meanS2	varS	stdS
1	1.9524	3.9084	0.0975	0.3122
2	2.8395	8.2553	0.1950	0.4416
3	3.6793	13.8336	0.2999	0.5476
4	4.1232	17.1708	0.1720	0.4147
5	4.0090	16.1500	0.0786	0.2804
6	3.6022	12.9932	0.0178	0.1334
7	3.0703	9.4339	0.0071	0.0841
8	2.4593	6.0529	0.0049	0.0700
9	1.8028	3.2540	0.0041	0.0637
10	1.1919	1.4272	0.0066	0.0811
11	0.8782	0.7854	0.0144	0.1201
12	1.1468	1.3870	0.0726	0.2694

=====

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

=====

	Containment	Deficit	Spill
	-----	-----	-----
Time	Fcon	Fdef	Fsp
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9667	0.0000	0.0333
4	1.0000	0.0000	0.0000
5	0.9889	0.0000	0.0111
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	0.3778	0.6222	0.0000
12	0.8222	0.1778	0.0000

=====

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

=====

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanDef	meanDef2	varDef	stdDef
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0850	0.0168	0.0097	0.0984
12	0.0121	0.0013	0.0012	0.0346

=====

[SIMULATION]: Sample moments of spill

```
=====
```

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanSp	meanSp2	varSp	stdSp
-----	-----	-----	-----	-----
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0263	0.0238	0.0233	0.1528
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0046	0.0019	0.0019	0.0432
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

```
=====
```

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

```
=====
```

	U	r	R
	-----	-----	-----
Time	meanU	meanr	meanR
-----	-----	-----	-----
1	0.9637	0.9637	0.9637
2	0.9334	0.9334	0.9334
3	0.9018	0.9281	0.9018
4	0.9544	0.9544	0.9544
5	0.9130	0.9176	0.9130
6	0.9428	0.9428	0.9428
7	0.9487	0.9487	0.9487
8	0.9572	0.9572	0.9572
9	0.9608	0.9608	0.9608
10	0.9652	0.9652	0.9652
11	1.0540	0.9690	0.9690
12	0.9807	0.9686	0.9686

```
=====
```

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

```
=====
```

fval = 1.7692
fsim = 3.0463; diff = 72.18%

Measure	SSE	MSE
-----	-----	-----
Storage 1st Mom.	0.00454	0.00038
Storage 2nd Mom.	0.19419	0.01618
Prob. Containment	0.00000	0.00000
Prob. Deficit	0.00000	0.00000
Prob. Spill	0.00000	0.00000
Deficit 1st Mom.	0.00003	0.00000
Deficit 2nd Mom.	0.00000	0.00000
Spill 1st Mom.	0.00000	0.00000
Spill 2nd Mom.	0.00000	0.00000
Allocation 1st Mom.	0.00357	0.00030

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

 h = 1 (1 = reject)
 p-value = 1.6491e-16

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

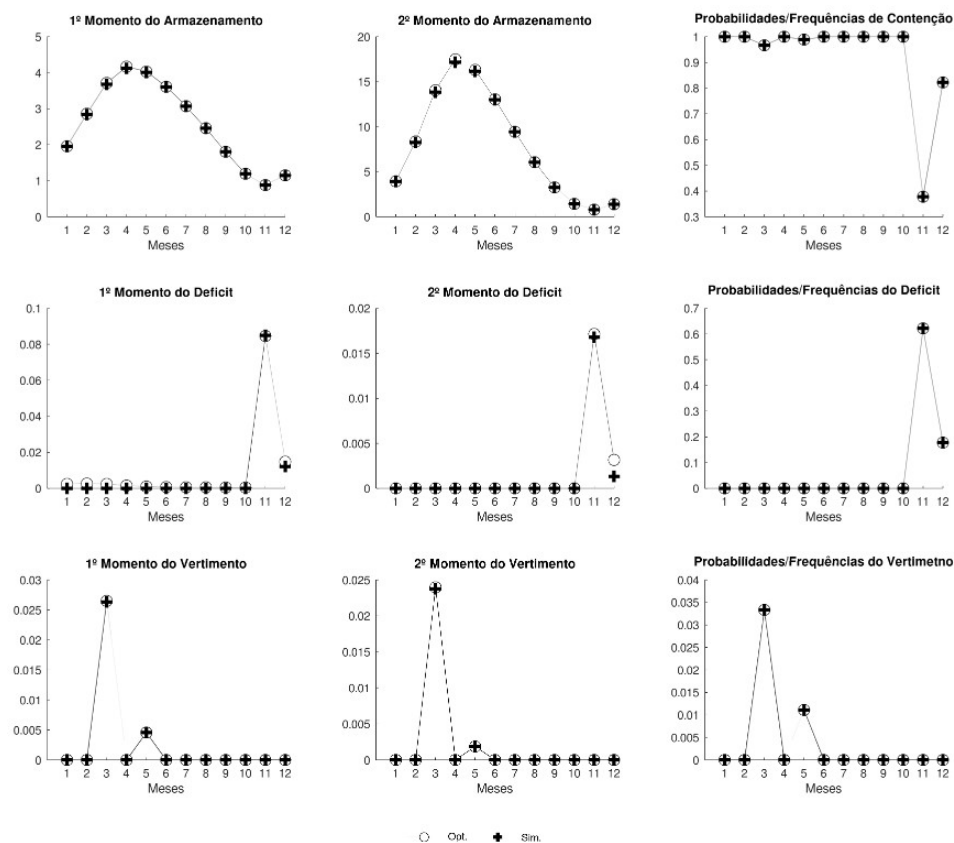
 sample mean = 0.015179
 h = 1 (1 = reject)
 p-value = 0.01318
 95%-CI: [0.0032761, 0.027083]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

 sample median = 0.00039649
 h = 1 (1 = reject)
 p-value = 6.124e-13
 =====

Figura 13 – Comparação de probabilidades e momentos para o FP-SQE-ECDF sob cenário Cen-RH



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Simulação sob Cenário Cen-MF

[SIMULATION]: 1000-year inflow scenario

```
=====
```

Time	Mean	CV

1	1.76	0.38
2	1.88	0.41
3	1.75	0.57
4	1.44	0.49
5	0.84	0.49
6	0.59	0.38
7	0.48	0.36
8	0.42	0.34
9	0.38	0.37
10	0.42	0.40
11	0.70	0.44
12	1.24	0.36

```
=====
```

[SIMULATION]: Sample moments of storage

```
=====
```

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.

Time	meanS	meanS2	varS	stdS

1	1.9511	3.9220	0.1152	0.3395
2	2.8578	8.3337	0.1669	0.4085
3	3.6679	13.7312	0.2783	0.5276
4	4.1472	17.3541	0.1552	0.3940
5	4.0082	16.1262	0.0603	0.2456
6	3.6058	13.0151	0.0132	0.1148
7	3.0669	9.4136	0.0075	0.0869
8	2.4577	6.0458	0.0053	0.0729
9	1.8008	3.2476	0.0048	0.0694
10	1.1883	1.4189	0.0070	0.0834
11	0.8754	0.7790	0.0128	0.1130
12	1.1206	1.3173	0.0615	0.2481

```
=====
```

[SIMULATION]: Frequencies for projected storage

```
=====
```

	Containment	Deficit	Spill

Time	Fcon	Fdef	Fsp

1	1.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000	0.0000
3	0.9680	0.0000	0.0320
4	0.9980	0.0000	0.0020
5	0.9960	0.0000	0.0040
6	1.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.0000	0.0000
11	0.3950	0.6050	0.0000
12	0.8220	0.1780	0.0000

```
=====
```

[SIMULATION]: Sample moments of deficit

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanDef	meanDef2	varDef	stdDef
-----	-----	-----	-----	-----
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0838	0.0170	0.0100	0.1001
12	0.0126	0.0013	0.0011	0.0337

[SIMULATION]: Sample moments of spill

	1st Mom.	2nd Mom.	Variance	Std.Dev.
	-----	-----	-----	-----
Time	meanSp	meanSp2	varSp	stdSp
-----	-----	-----	-----	-----
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0230	0.0295	0.0290	0.1703
4	0.0002	0.0000	0.0000	0.0051
5	0.0016	0.0007	0.0007	0.0257
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[SIMULATION]: 1st moments of release variables

	U	r	R
	-----	-----	-----
Time	meanU	meanr	meanR
-----	-----	-----	-----
1	0.8926	0.8926	0.8926
2	0.9393	0.9393	0.9393
3	0.8893	0.9123	0.8893
4	0.9353	0.9355	0.9353
5	0.9189	0.9205	0.9189
6	0.9369	0.9369	0.9369
7	0.9490	0.9490	0.9490
8	0.9523	0.9523	0.9523
9	0.9574	0.9574	0.9574
10	0.9596	0.9596	0.9596
11	1.0493	0.9654	0.9654

12 0.9605 0.9479 0.9479
 =====

OPTIMIZATION vs. SIMULATION

=====

fval = 1.7692

fsim = 2.7778; diff = 57.01%

Measure	SSE	MSE
-----	-----	-----
Storage 1st Mom.	0.00440	0.00037
Storage 2nd Mom.	0.16967	0.01414
Prob. Containment	0.00035	0.00003
Prob. Deficit	0.00030	0.00002
Prob. Spill	0.00006	0.00000
Deficit 1st Mom.	0.00003	0.00000
Deficit 2nd Mom.	0.00000	0.00000
Spill 1st Mom.	0.00002	0.00000
Spill 2nd Mom.	0.00003	0.00000
Allocation 1st Mom.	0.00268	0.00022

K-S TEST FOR NORMALITY OF RESIDUALS:

h = 1 (1 = reject)

p-value = 2.2377e-16

t-TEST FOR ZERO MEAN OF RESIDUALS:

sample mean = 0.014574

h = 1 (1 = reject)

p-value = 0.010912

95%-CI: [0.0034579, 0.025689]

SIGNED-RANK TEST

FOR ZERO MEDIAN OF RESIDUALS:

sample median = 0.00066362

h = 1 (1 = reject)

p-value = 5.5196e-12

=====