



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tese de Doutorado

Modelo com interação do sector escuro do Universo
com acoplamento quadrático: viabilidade teórica e
observacional

Por

Jaelsson Silva Lima

UFS – São Cristóvão / SE – Brasil
Julho de 2025

Jaelsson Silva Lima

**Modelo com interação do sector escuro do Universo com
acoplamento quadrático: viabilidade teórica e observacional**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Física – PPGFI-UFS, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Astrofísica

Linha de Pesquisa: Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Luciano Casarini

UFS – São Cristóvão / SE
Julho de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA
CENTRAL UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

L732m Lima, Jaelsson Silva.
Modelo com interação do sector escuro do
Universo com acoplamento quadrático:
viabilidade teórica e observacional / Jaelsson
Silva Lima; orientador Luciano Casarini. – São Cristóvão, SE,
2025.
146 f.; il.

Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de
Sergipe, 2025.

1. Cosmologia. 2. Matéria escura (Astronomia). 3.
Triangulação. 4. Relatividade (Física). 5. Paralaxe. 6. Radiação
cósmica de fundo. I. Casarini, Luciano, orient. II. Título.

CDU 524.8

Jaelsson Silva Lima

**Model with interacting dark sector of the Universe with
quadratic coupling: theoretical and observational viability**

Doctoral dissertation submitted to the Program of
Post-graduation in Physics – PPGFI-UFS, in partial
fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate in Physics.

Concentration Area: Astrophysics

Research Line: Cosmology

Advisor: Prof. Dr. Luciano Casarini

UFS – São Cristóvão / SE

July 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Programa de Pós-Graduação em Física

**“Modelo com interação do sector escuro do Universo com
acoplamento quadrático: viabilidade teórica e
observacional”**

por

Jaelsson Silva Lima

Tese de doutorado **APROVADA** em sessão pública no dia vinte e três de julho do ano dois mil e vinte e cinco perante a banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Documento assinado digitalmente
 **LUCIANO CASARINI**
Data: 26/07/2025 12:04:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luciano Casarini
(DFI-UFS)

Documento assinado digitalmente
 **JAVIER ERNESTO GONZALEZ SANCHEZ**
Data: 25/07/2025 12:26:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Javier Ernesto Gonzalez Sanchez
(DFI-UFS)

Documento assinado digitalmente
 **DIOGO MARTINS SOUTO**
Data: 24/07/2025 08:28:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Diogo Martins Souto
(DFI-UFS)

Documento assinado digitalmente
 **RODRIGO FERNANDO LUGON CORNEJO VON M.**
Data: 25/07/2025 13:12:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo Fernando Lugon Cornejo von Marttens
(IF-UFBA)

Documento assinado digitalmente
 **LEO GOUVEA MEDEIROS**
Data: 24/07/2025 01:18:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Leo Gouvêa Medeiros
(ECT-UFRN)

*Este trabalho é dedicado àqueles que nunca desistem
de seus propósitos, mesmo quando as estatísticas são desfavoráveis.
Em especial, aos grandes sonhadores.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Gostaria de agradecer a todos aqueles que de forma direta ou indiretamente tiveram contribuições importantes na minha formação como profissional e como pessoa.

Aos colegas e amigos da Sociedade de Estudos Astronômicos de Sergipe (SEASE) e da Casa de Ciência e Tecnologia da Cidade de Aracaju (CCTECA), em especial: Augusto Almeida, Jeane Santana, Emerson, Dra. Elza, Shyenne, Enzo, Késia Cristina, Edilene (Leninha), Ângelo Santana, Cynthia Martins, Liliane e Raianny Rodrigues.

Aos colegas e amigos da Universidade Federal de Sergipe (UFS), em especial: Antonio Jorge, Amanda, Eliane, Daniela Hora, Simone, Deyvid, Napoleão, Leo Santiago, Maria Jussara, Rafael, Félix, Deusalete Vilar (Deusa), Fernanda, Romoaldo, Wiliam Santos, Bárbara Cruz (Babi), Daykson, Jeferson Marques, Felipe Oliveira, Anderson, John Attah-Baah, Jamil, Cameron, Fábio Wilian, Pablo, Mateus, Camille, David, Mariana, Thainá, Ana Carla, Érica Almeida, Cleidiane Fontes, Thaise Monteiro e Lorena Feitosa.

Ao meu orientador de mestrado e doutorado, Dr. Luciano Casarini e ao meu co-orientador informal Dr. Rodrigo Von Martten (UFBA) pelas dicas.

Ao meu orientador de graduação, Rodrigo Holanda, e ao Prof. Dr. Marcelo Medeiros pelos ensinamentos de Relatividade Geral.

Aos meus melhores amigos, em especial: Mariza Santos, Tayssa Barreto, Ívina Mittarquis, Vinicius Grilo e Willian Carvalho.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus pais, Gilvanete e Zé Argolo; aos meus irmãos, Jailsson e Jalson; ao meu sobrinho Arthur; aos colegas de residência Jaédson e Joéliton; aos primos Osmar e Osmailson (*in memoriam*) e a toda minha família, que me apoiou nesta jornada.

*“Mais importante que a vontade de vencer, é a
coragem de começar.”
(Roger Stankewski)*

*“As invenções são, sobretudo, o resultado de um
trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

LIMA, J. S.. **Modelo com interação do sector escuro do Universo com acoplamento quadrático: viabilidade teórica e observacional**. 2025. 146 f. Tese (Doutorado em Física) – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2025.

Modelos que propõem uma interação não gravitacional entre energia escura (DE) e matéria escura fria (CDM) têm sido amplamente estudados como alternativas ao modelo cosmológico padrão. Uma abordagem comum para descrever o acoplamento DE-CDM assume que ele é linearmente proporcional à densidade de energia escura. Nesta tese, consideramos o modelo com o termo de interação $Q = 3H\gamma\rho_x^2/(\rho_c + \rho_x)$. Mostramos que, para valores positivos de γ , este modelo prevê uma futura violação da Condição de Energia Fraca (WEC) para a componente de matéria escura, enquanto que, para uma faixa específica de valores negativos de γ , a densidade de energia da CDM pode ser negativa no passado. Neste trabalho, conduzimos duas diferentes pesquisas. Na primeira, realizamos uma análise de seleção de parâmetros para este modelo usando dados de supernovas do Tipo Ia (SNe Ia) da amostra *Pantheon*, 30 medidas de $H(z)$ da amostra de Cronômetros Cósmicos (CC), Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) da Primeira Divulgação de Dados (DR1) do DESI e dados da Radiação Cósmica de Fundo de Micro-ondas (CMB) da colaboração *Planck*, combinados com um *prior* de H_0 da constante de *Hubble*. Impondo um *prior* para garantir que a WEC não seja violada, nosso modelo é consistente com o Λ CDM dentro de 2σ de níveis de confiança (C.L.), mas exibe uma preferência por valores menores de σ_8 , aliviando a tensão de σ_8 entre os resultados da CMB do *Planck* 2018 e as observações de cisalhamento cósmico do KiDS-1000. Na segunda pesquisa, utilizamos dados de SNe Ia da amostra *Pantheon+*, 32 medidas de $H(z)$ da amostra de CC, BAO da DR2 do DESI e dados da CMB do *Planck*. Nesta pesquisa consideramos o parâmetro da Equação de Estado (EoS) ω_x como um parâmetro livre e considerando o WEC *prior* também nas análises. Nossos resultados são consistentes até 2.5σ C.L. com os resultados da pesquisa do DESI DR2 para modelo ω CDM.

Palavras-chave: Cosmologia, Energia Escura, Matéria Escura, Modelos de Interação, Parâmetros Cosmológicos.

ABSTRACT

LIMA, J. S.. **Modelo com interação do sector escuro do Universo com acoplamento quadrático: viabilidade teórica e observacional**. 2025. 146 f. Tese (Doutorado em Física) – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2025.

Models proposing a non-gravitational interaction between dark energy (DE) and cold dark matter (CDM) have been extensively studied as alternatives to the standard cosmological model. A common approach to describing the DE-CDM coupling assumes it to be linearly proportional to the dark energy density. In this thesis, we consider the model with the interaction term $Q = 3H\gamma\rho_x^2/(\rho_c + \rho_x)$. We show that for positive values of γ , this model predicts a future violation of the Weak Energy Condition (WEC) for the dark matter component, and for a specific range of negative values of γ , the CDM energy density can be negative in the past. In this work, we conducted two different analyses. In the first, we performed a parameter selection analysis for this model using data from Type Ia supernovae (SNe Ia) from the Pantheon sample, 30 measurements of $H(z)$ from the Cosmic Chronometers (CC) sample, Baryon Acoustic Oscillations (BAO) from the DESI Data Release 1 (DR1), and Cosmic Microwave Background (CMB) data from the Planck collaboration, combined with a prior on the Hubble constant H_0 . Imposing a prior to ensure that the WEC is not violated, our model is consistent with Λ CDM within 2σ confidence levels (C.L.), but it exhibits a preference for smaller values of σ_8 , alleviating the σ_8 tension between the CMB results from Planck 2018 and the cosmic shear observations from KiDS-1000. In the second analysis, we used data from SNe Ia from the Pantheon+ sample, 32 measurements of $H(z)$ from the CC sample, BAO from DESI Data Release 2 (DR2), and CMB data from Planck. In this analysis, we considered the Equation of State (EoS) parameter ω_x as a free parameter and included the WEC prior in the analyses as well. Our results are consistent within 2.5σ C.L. with the results from the DESI DR2 analysis for the ω CDM model.

Key-words: Cosmology, Dark Energy, Dark Matter, Interacting Models, Cosmological Parameters.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Evolução temporal do fator de escala a para modelos que possui as três possibilidades distintas para o parâmetro de desaceleração q	42
Figura 2.2 – Parâmetro <i>jerk</i> $j(a)$ em função do fator de escala a para três diferentes valores do parâmetro da EoS ω_x	42
Figura 2.3 – Medindo distâncias a partir do método de triangulação.	44
Figura 2.4 – Esquematização da paralaxe estelar. Quando a Terra se move em órbita ao redor do Sol faz com que uma estrelas próxima se desloca com relação a um fundo contendo outras estrelas mais distantes.	45
Figura 2.5 – A figura mostra uma representação esquemática da distância de diâmetro angular.	50
Figura 2.6 – Comparação da intensidade da radiação observada com o radiômetro FIRAS transportado pelo COBE com um espectro de corpo negro com temperatura de 2.728 K.	54
Figura 2.7 – Mapa da CMB, mostrando anisotropias de temperatura obtido pelo satélite espacial Planck utilizando o método SMICA	55
Figura 2.8 – Espectro de potência de anisotropias da CMB, mostrando diferentes contribuições.	63
Figura 2.9 – Evolução das densidades de radiação, de matéria e da constante cosmológica em função do fator de escala a , para o modelo cosmológico Λ CDM.	64
Figura 2.10–Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de A_s para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com PLANCK Collaboration <i>et al.</i> (2020c).	67
Figura 2.11–Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de n_s para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com PLANCK Collaboration <i>et al.</i> (2020c).	67
Figura 2.12–Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de ω_b para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com PLANCK Collaboration <i>et al.</i> (2020c).	68

Figura 2.13—Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de ω_m para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com PLANCK Collaboration <i>et al.</i> (2020c).	68
Figura 2.14—Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de Ω_x para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com PLANCK Collaboration <i>et al.</i> (2020c).	69
Figura 2.15—Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de τ_{reio} para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com PLANCK Collaboration <i>et al.</i> (2020c).	69
Figura 3.1 – Razão entre a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura. .	79
Figura 3.2 – Evolução dos parâmetros de densidade dos componentes do Universo em função do fator de escala a	80
Figura 3.3 – Parâmetro da equação de estado para descrição unificada vs. o fator de escala.	81
Figura 3.4 – Simulação computacional com 30 mil curvas de $\rho_x(a)$	82
Figura 3.5 – Simulação computacional com 5 mil de curvas de $r(a)$	82
Figura 3.6 – Plote do fator de escala para violação da WEC como função do parâmetro de interação γ	84
Figura 3.7 – Soluções de <i>Background</i> dos modelos de acoplamento quadrático e Λ CDM em função do fator de escala a	84
Figura 3.8 – Gráfico mostrando como as medidas de BAO realizada pelo levantamento DESI restringem a expansão do Universo, com o fator de escala em função do tempo e com as regiões que atuam os diferentes traçadores.	90
Figura 4.1 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres no modelo Λ CDM, usando os conjuntos de dados: Background, Background+ H_0 , Planck, Background+Planck e Background+Planck+ H_0	97
Figura 4.2 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises sem WEC prior, usando os conjuntos de dados: Background, Background+ H_0 , Planck, Background+Planck e Background+Planck+ H_0 . .	99
Figura 4.3 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises com WEC <i>prior</i> , usando os conjuntos de dados: Background, Background+ H_0 , Planck, Background+Planck e Background+Planck+ H_0 . .	100
Figura 4.4 – O painel superior mostra a taxa de expansão $H(z)$ como uma função do <i>redshift</i> z para diferentes valores de γ , enquanto o painel inferior exibe a distância de luminosidade D_L para os mesmos valores de γ	101
Figura 4.5 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de γ . .	102

Figura 4.6 – Gráfico do parâmetro σ_8 em função do parâmetro de Hubble H_0 , sem o WEC <i>prior</i> e com o WEC <i>prior</i>	103
Figura 4.7 – Gráfico do parâmetro de interação γ vs. o parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} sem o WEC <i>prior</i> (painel esquerdo) e com WEC <i>prior</i> (painel direito).	104
Figura 4.8 – Gráfico do parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} vs. o parâmetro S_8 sem o WEC <i>prior</i> e com o WEC <i>prior</i>	105
Figura 4.9 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises sem o WEC <i>prior</i> , no modelo de acoplamento quadrático com o parâmetro da equação de estado ω_x livre, utilizando os conjuntos de dados: DESI+CC, DESI+CC+Pantheon+, CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.	107
Figura 4.10–Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises com o WEC <i>prior</i> , no modelo de acoplamento quadrático com o parâmetro da equação de estado ω_x livre, utilizando os conjuntos de dados: DESI+CC, DESI+CC+Pantheon+, CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.	108
Figura 4.11–Gráfico do parâmetro Ω_{m0} em função do parâmetro da EoS ω_x considerando o WEC <i>prior</i> , no modelo de acoplamento quadrático, utilizando os conjuntos de dados: DESI+CC, DESI+CC+Pantheon+, CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.	110
Figura 4.12–O gráfico mostra as restrições nos parâmetros Ω_{m0} e H_0 com o WEC <i>prior</i> e o parâmetro da EoS ω_x como um parâmetro livre, no modelo de acoplamento quadrático.	111
Figura 4.13–Gráfico do parâmetro da EoS ω_x vs. o parâmetro de interação γ (painel esquerdo) e o parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} vs. o parâmetro de interação γ (painel direito) com o parâmetro da EoS ω_x como um parâmetro livre, ambos considerando o WEC <i>prior</i>	111
Figura B.1 – O observador está na origem das coordenadas (0, 0, 0), enquanto observa uma galáxia localizada na posição (r_1, θ_1, ϕ_1)	139
Figura B.2 – A figura mostra o comprimento de onda λ_1 emitido pela fonte e o comprimento de onda λ_0 medido pelo observador. Vemos um efeito <i>Doppler</i> para o vermelho no comprimento de onda recebido em consequência da expansão do Universo.	142

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tipos comuns para representar o parâmetro da EoS ω_x	38
Tabela 2.2 – Efeitos principais que controla a forma do espectro de potência de temperatura da CMB (C_l) para um modelo Λ CDM plano mínimo.	65
Tabela 3.1 – Medidas de $H(z)$, com seus respectivos erros, contendo os dados de CC. . .	88
Tabela 4.1 – Resultados da análise estatística do modelo Λ CDM em 1σ C.L., usando os conjuntos de dados: Background e Background+ H_0	96
Tabela 4.2 – Resultados da análise estatística do modelo Λ CDM em 1σ C.L., usando os conjuntos de dados: Planck, Planck+Background e Planck+Background+ H_0	96
Tabela 4.3 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L., considerando as análises sem e com a WEC <i>prior</i> , usando os conjuntos de dados: Background e Background+ H_0	98
Tabela 4.4 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L., considerando as análises sem e com a WEC <i>prior</i> , usando os conjuntos de dados: Planck, Planck+Background e Planck+Background+ H_0	98
Tabela 4.5 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L. para o modelo com acoplamento quadrático com ω_x não fixado, considerando as análises sem e com a WEC <i>prior</i> , usando os conjuntos de dados: DESI+CC e DESI+CC+Pantheon+.	106
Tabela 4.6 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L. para o modelo com acoplamento quadrático com ω_x não fixado, considerando as análises sem e com a WEC <i>prior</i> , usando os conjuntos de dados: CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.	106

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Λ CDM ...	Λ Cold Dark Matter
ω CDM ...	ω Cold Dark Matter
ACT	Atacama Cosmology Telescope
BAO	Baryon Acoustic Oscillations
BB	Big Bang
BGS	bright galaxy sample
BOOMERanG	Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation and Geomagnetics
C.L.	<i>confidence level</i>
CAPES ...	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil
CC	Cosmic Chronometers
CCTECA .	Casa de Ciência e Tecnologia da Cidade de Aracaju
CLASS ...	Cosmic Linear Anisotropy Solving System
CMB	Cosmic Microwave Background
COBE	Cosmic Background Explorer Satellite
DDA	Distância de Diâmetro Angular
DE	Energia Escura
DESI	Dark Energy Spectroscopic Instrument
DM	Matéria Escura
DR1	Data Release 1
DR2	Data Release 2
ELGs	emission line galaxies
EoS	Equação de Estado
ESA	European Space Agency
FDDP	função distribuição de densidade de probabilidade
FIRAS ...	Far Infrared Absolute Spectrophotometer
FLRW	<i>Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</i>
IDEM	Interacting Dark Energy Model
ISW	<i>Sachs-Wolfe</i> Integrado
LRGs	luminous red galaxies
$\text{Ly}\alpha$	<i>Lyman Alpha Forest</i>
MAXIMA	Millimeter-wave Anisotropy eXperiment IMaging Array

MCMC ... *Markov Chain Monte Carlo*
MIF Matriz de Informação de Fisher
NASA National Aeronautics and Space Administration
PC Princípio Cosmológico
QSO quasars
RG Relatividade Geral
SEASE ... Sociedade de Estudos Astronômicos de Sergipe
SNe Ia Supernovas do Tipo Ia
SPT South Pole Telescope
SW *Sachs-Wolfe*
UFS Universidade Federal de Sergipe
WEC Condição de Energia Fraca
WIMPs ... Weakly Interacting Massive Particles
WMAP ... Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

LISTA DE SÍMBOLOS

. — O separador decimal adotado nesta tese é o ponto (.)

$Q, \rho_x, H, \gamma, \rho_c$ — Termo de interação; densidade de energia escura; parâmetro de *Hubble*; parâmetro de interação; densidade de matéria escura

H_0 — Parâmetro de *Hubble* hoje (Constante de *Hubble*)

$G_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R, G, c, \Lambda, T_{\mu\nu}$ — Tensor de *Einstein*; tensor de *Ricci*; componentes do tensor de métrica; escalar de curvatura de *Ricci*; constante gravitacional de *Newton*; velocidade da luz; constante cosmológica; tensor momento-energia

$ds, a(t), k, r, R_0$ — Elemento de linha; fator de escala; constante de curvatura do Universo; coordenada radial comóvel; raio de curvatura do Universo hoje

P, ρ, U_ν — Pressão; densidade de energia; componentes do quadri vetor-velocidade

$\omega_x, (\dot{})$ — Parâmetro da equação de estado; derivada com relação ao tempo cósmico t

a_0, z — Fator de escala hoje; *redshift*

$\rho_{cr}(t), \rho_{cr0}$ — Densidade crítica do Universo; densidade crítica do Universo hoje

Ω_i, Ω_0 — Parâmetro de densidade de energia, com índice i ; Parâmetro de densidade de energia hoje

$\rho_m, \rho_r, \rho_{tot}$ — Densidade de energia da matéria; densidade de energia da radiação; densidade de energia total

$\Omega_{m0}, \Omega_{r0}, \Omega_{x0}, \Omega_{k0}$ — Parâmetro de densidade da matéria hoje; parâmetro de densidade da radiação hoje; parâmetro de energia escura hoje; parâmetro de densidade associado à curvatura espacial no tempo atual

t, t_0 — Tempo cósmico t ; tempo atual

$q(t), q_0, j(t), j_0$ — Parâmetro de desaceleração; parâmetro de desaceleração hoje; parâmetro *jerk*; Parâmetro *jerk* hoje

d, D, ϕ — Distância até a estrela de interesse; distância de base (neste contexto aqui); ângulo de separação subtendido pelo raio orbital da Terra ao redor do Sol (ângulo de paralaxe, neste contexto aqui)

$D_C, r_1, E(z)$ — Distância comóvel; posição comóvel; parâmetro de *Hubble* normalizado

D_H — Distância de Hubble

D_P — Distância própria

$D_L, F, F_V, L, A_p(t_0)$ — Distância de luminosidade; fluxo; densidade de fluxo específico; luminosidade; superfície própria

E_0, E_1, h — Energia do fóton medida pelo observador; Energia do fóton emitido pela fonte; constante de *Planck*

S, D_A — Comprimento físico intrínseco do objeto; distância de diâmetro angular

m, M, pc, μ — Magnitude aparente; magnitude absoluta; *parsecs*, módulo de distância (neste contexto)

$H(z)$ — A taxa de expansão cósmica

$\Gamma, \sigma_T, n_e, x_e, \eta, ('), \tau(\eta)$ — Taxa de espalhamento *Thomson*; seção de choque do espalhamento *Thomson*; densidade total do número de elétrons; fração de elétrons ionizados; tempo conforme; derivada temporal em termos do tempo conforme η ; profundidade óptica em termos do tempo conforme

$f(\eta, \vec{x}, \vec{p}), \vec{x}, \vec{p}, T(\eta, \vec{x}), \bar{f}(\eta, p), \bar{T}(\eta), \delta f(\eta, \vec{x}, \vec{p}), \delta T(\eta, \vec{x}), \Theta$ — função de distribuição de fótons no espaço de fase; posição; momento; temperatura local do equilíbrio térmico; função de distribuição média de fótons em função do tempo η ; temperatura média em equilíbrio térmico; pequena perturbação na função de distribuição devido a flutuações espaciais e temporais da temperatura; flutuação local da temperatura em relação à temperatura média $\bar{T}(\eta)$; equação de movimento

$\vec{k}, \hat{n}, \Theta_\ell, P_\ell, \Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \delta_\gamma, \theta_\gamma, \sigma_\gamma, \vec{v}_e, \theta_b, (\phi, \psi)$ — Vetor de onda; vetor unitário; multipolos da anisotropia de temperatura da CMB; polinômios de *Legendre*; monopolo; dipolo; quadrupolo; flutuação da densidade de fótons; divergência de velocidade; estresse anisotrópico; velocidade dos elétrons; divergência de $\vec{v}_b = \vec{v}_e$; graus de liberdade na métrica FLRW perturbada

$\mathcal{F}(\eta, \vec{x}, \hat{n}), g(\eta), \delta_D(\eta - \eta_{\text{dec}}), H(\eta - \eta_{\text{dec}})$ — Função arbitrária; função de visibilidade; função de *Dirac*; função de *Heaviside*

$a_{\ell m}, Y_{\ell m}(\hat{n}), \ell, m, \delta_{\ell\ell'}^K, C_\ell, \mathcal{P}_R(k), \hat{C}_\ell, S_T(\eta, k), j_\ell(k(\eta_0 - \eta))$ — Coeficientes de expansão; harmônicos esféricos; número quântico do momento angular total (ou grau multipolar); número quântico do momento angular azimutal (componente azimutal), neste contexto aqui; delta de *Kronecker*; espectro da anisotropia da CMB; espectro de potência da curvatura primordial; espectro da anisotropia da CMB observado; função de fonte de temperatura; funções esféricas de *Bessel*

$A_s, n_s, k, k_*, \tau_{\text{reio}}, \omega_b, \omega_m, \rho_b, \rho_\gamma, \ell_d$ — Amplitude de perturbações; índice espectral; número de onda; escala arbitrária; profundidade óptica na recombinação; densidade física da matéria bariônica; densidade física de matéria total no universo; densidade de energia de bárions; densidade de energia de fótons; momento multipolar da difusão

$\delta, \bar{\rho}, \mathcal{P}_A(k, a), \xi(r, a)$ — Contraste de densidade; densidade média; espectro de potência adimensional; função janela; função de correlação

σ, σ_8, h — Incerteza da medida; flutuações de densidade da matéria em uma esfera de raio $8h^{-1}$ Mpc; parâmetro de *Hubble* normalizado, neste contexto

$Q^\mu, T_c^{\mu\nu}, T_x^{\mu\nu}, F(\rho_c, \rho_x), r(a), f(r)$ — Quadrivetor que atua como uma fonte do tensor momento-energia; tensor momento-energia para matéria escura; tensores momento-energia energia escura; uma função real de ρ_c e ρ_x ; razão entre a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura (neste contexto); função de interação

$P_d, \rho_d, \omega_d(a), t^v$ — Pressão no fluido unificado; densidade de energia do fluido unificado; parâmetro da EoS no fluido unificado; quaisquer vetores do tipo temporal

$\Theta, \hat{\Theta}, \hat{Q}, \theta_{tot}, \hat{u}^\mu, v, \hat{\rho}, \mathcal{H}, \theta, c_a, c_s$ — Escalar de expansão (neste contexto); contribuição perturbativa do escalar de expansão; contribuição perturbativa do termo de interação; divergência do fluido interagente para todo o meio cósmico; quadrivetor-velocidade perturbado; velocidade peculiar; densidade de energia perturbativa; parâmetro de *Hubble* calculado em relação ao tempo conforme; divergência do fluido interagente (neste contexto); velocidade do som adiabática; velocidade do som

$z_d, r_d(z), D_V(z), D_M(z), (\alpha_\parallel, \alpha_\perp), (\alpha_{iso}, \alpha_{AP})$ — *redshift* na “época de arrasto”; distância marca o momento de desacoplamento dos bárions (prótons e nêutrons) e dos fótons; média geométrica que combina as escalas de distâncias ao longo da linha de visão e das transversais; distância do diâmetro angular comovente; parâmetros de escala que ajustam as estruturas BAO nas direções paralela e perpendicular; parâmetros para isolar os efeitos isotrópicos (α_{iso}) ou anisotrópico (α_{AP})

$\chi^2, y(x_i), y(x_i), \sigma_i, \mathcal{L}$ — Qui-quadrado; representa o valor do cálculo de y com relação ao ponto x_i ; representa um valor experimental (ou valor observacional) em torno de $y(x_i)$; desvio padrão; função *likelihood*

$\hat{R} - 1, F_{ij}, (p_i, p_j), \mathbf{C}$ — parâmetro de convergência *Gelman-Rubin*; Elementos da matriz de informação Fisher; parâmetros do modelo; matriz de covariância

$100\theta_s, \mathcal{P}, \mathcal{P}', S_8, \omega_c$ — Tamanho angular do horizonte acústico (escalado por 100); conjunto de parâmetros cosmológicos; conjunto de parâmetros cosmológicos derivados; parâmetro de crescimento de estruturas; parâmetro de densidade física de matéria escura

$P(\theta | D, M), P(D), \theta, a$ — Probabilidade *posterior* do modelo (a probabilidade condicional de θ devido o evento ocorrido D, M (D – representa o conjunto de dados, M – representa a hipótese ou modelo, neste contexto)); probabilidade do evento D ; parâmetro paramétrico que representa a referida hipótese/modelo; a razão entre a probabilidade *posterior* do modelo em $t + 1$ e a probabilidade *posterior* do modelo em t , neste contexto aqui

$\theta, \phi, (A \text{ e } B), \delta t_i$ — Ângulo polar (neste contexto); ângulo azimutal (neste contexto); A e B são

posições: A - posição do observador e B - posição do objeto astronômico; pequena variação de t , i representa o índice de forma genérica para o observador (0), tanto para fonte (1)

$\lambda, \lambda_0, \lambda_1, t_L$ — Comprimento de onda; comprimento de onda medido pelo observador; comprimento de onda emitido pela fonte; *lookback time*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	31
2	BREVE REVISÃO DA COSMOLOGIA PADRÃO	35
2.1	O Princípio Cosmológico	35
2.2	A Cosmologia Relativística	36
2.2.1	<i>Teoria da Relatividade Geral</i>	36
2.2.2	<i>A Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</i>	36
2.2.3	<i>Equações de Friedmann</i>	37
2.2.4	<i>Parâmetros cosmológicos</i>	38
2.2.4.1	<i>O parâmetro de Hubble</i>	38
2.2.4.2	<i>Densidade crítica</i>	39
2.2.4.3	<i>Parâmetro de densidade de energia</i>	39
2.2.4.4	<i>Parâmetro de desaceleração e o parâmetro jerk</i>	40
2.2.4.5	<i>A idade do Universo</i>	42
2.3	Medidas e indicadores de distâncias na cosmologia	43
2.3.1	<i>Triangulação e paralaxe estelar</i>	43
2.3.2	<i>Distância comóvel</i>	45
2.3.3	<i>Distância própria</i>	46
2.3.4	<i>Distância de luminosidade</i>	47
2.3.5	<i>Distância de diâmetro angular</i>	49
2.3.6	<i>Módulo de distância</i>	50
2.3.7	<i>Taxa de expansão cósmica $H(z)$</i>	52
2.4	A radiação cósmica de fundo (CMB)	52
2.4.1	<i>Contextualização</i>	52
2.4.2	<i>Anisotropias de temperatura da CMB</i>	54
2.4.2.1	<i>Taxa de espalhamento dos fótons e profundidade óptica</i>	54
2.4.2.2	<i>Equação de Boltzmann</i>	56
2.4.2.3	<i>Mapa de anisotropias de temperatura da CMB</i>	58
2.4.2.4	<i>Espectro das anisotropias de temperatura da CMB</i>	60
2.4.2.5	<i>A influencia de parâmetros cosmológicos no espectro de potência da CMB</i>	62
2.4.2.6	<i>Espectro de potência de matéria</i>	70
2.5	Problemas do modelo padrão ΛCDM	71

3	DINÂMICA DE BACKGROUND E METODOLOGIA	73
3.1	Descrição matemática para o modelo de interação de energia escura	73
3.1.1	Formalismo geral	73
3.1.2	Descrição unificada de modelos de interação	77
3.1.3	Modelos específicos de interação de energia escura	78
3.1.3.1	Modelo com acoplamento quadrático	78
3.1.3.2	Restrições e violação da WEC no modelo com acoplamento quadrático	80
3.1.4	Perturbações cosmológicas	83
3.2	Metodologia	87
3.2.1	Dados observacionais	87
3.2.1.1	Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia)	87
3.2.1.2	Valor atual da taxa de expansão de Hubble (H_0)	88
3.2.1.3	Cronômetros cósmicos (CC)	88
3.2.1.4	Oscilações acústicas de bárions (BAO)	89
3.2.1.5	Dados de CMB (Planck)	90
3.2.2	Combinação de Conjuntos de Dados	91
3.2.3	Análise estatística	92
3.2.3.1	Função Likelihood	92
3.2.3.2	Qui-quadrado (χ^2)	92
3.2.3.3	Códigos CLASS, MontePython e GetDist	92
3.2.3.4	Método Markov Chain Monte Carlo	93
3.2.3.5	Matriz de informação de Fisher e matriz covariância	93
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	95
4.1	Resultados observacionais com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1$	95
4.1.1	Resultados observacionais do modelo Λ CDM	96
4.1.2	Resultados observacionais do modelo com acoplamento quadrático	98
4.2	Resultados observacionais com o parâmetro da EoS não fixado em $\omega_x = -1$	105
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	113
5.1	Conclusões	113
5.2	Perspectivas	115
REFERÊNCIAS		117
APÊNDICE A	ESTATÍSTICA BAYESIANA E O ALGORITMO DE METROPOLIS-HASTINGS	137
A.1	Teorema de Bayes	137

A.2	Algoritmo de <i>Metropolis-Hastings</i>	137
APÊNDICE B	O <i>REDSHIFT</i> COSMOLÓGICO, EXPRESSÕES E RE- SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS	139
B.1	O <i>redshift</i> cosmológico e o <i>lookback time</i>	139
B.2	O <i>lookback time</i> em função de z	143
B.3	Resolução da integral $\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R_0^2}}$	144
B.4	Relações do espaço de Fourier e função de correlação no espectro de potência	145

INTRODUÇÃO

“A ciência explica a natureza e cria novos mundos que não percebemos com nossos sentidos.”
(Marcelo Gleiser)

O Universo atual tem sua descrição fundamentada na cosmologia relativística (ELLIS *et al.*, 2011; KARTTUNEN *et al.*, 2007). Esta surge com a apresentação do primeiro modelo cosmológico de Universo (EINSTEIN, 1917) por *Albert Einstein*, em 1917, tendo como base a Relatividade Geral (RG) que foi proposta por ele no período de 1915 a 1916 (EINSTEIN, 1915a; EINSTEIN, 1915b; EINSTEIN, 1915c; EINSTEIN, 1915d; EINSTEIN, 1916). Este modelo descrevia um Universo com volume finito, estático, com forma esférica, sem bordas e em um estado estacionário, obedecendo o Princípio Cosmológico (PC), no qual diz que o Universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas (VALKENBURG; MARRA; CLARKSON, 2013; PANDEY; SARKAR, 2015). Ele adicionou um termo cosmológico (a constante cosmológica Λ) para contrapor os efeitos da gravidade para manter um Universo estático. No entanto, hoje sabemos que este termo representa a expansão acelerada do Universo (ROOS, 2015a; KARTTUNEN *et al.*, 2007). Na mesma época, *Willem de Sitter* propôs um modelo contendo curvatura plana, estacionário e sem matéria (SITTER, 1917). Entretanto, este modelo continha movimento, em constância, o modelo de *Einstein* incluía matéria, mas sem movimento (ROOS, 2015b).

Mais tarde, o matemático e cosmólogo soviético *Alexander A. Friedmann* apresentou modelos de um Universo em expansão, com soluções que previam uma curvatura positiva em 1922 (FRIEDMANN, 1922) e uma curvatura negativa em 1924 (FRIEDMANN, 1924). Posteriormente, em 1927, *Abbé G. Lemaître* (LEMAÎTRE, 1927; LEMAÎTRE, 1931), assim como *H. P. Robertson* em 1935 (ROBERTSON, 1935) e *A. G. Walker* em 1937 (WALKER, 1937), também descobriram essas mesmas soluções para o Universo de forma independente (PEEBLES; RATRA, 2003). Ainda, em 1927, *Lemaître* previu teoricamente uma relação entre a velocidade de recessão de “nebulosas extra-galácticas” e sua distância, hoje conhecida como lei de *Hubble-Lemaître* (KRAGH, 2018). Em 1929, as observações de *Edwin Hubble* confirmaram

a expansão do Universo (HUBBLE, 1929; BAHCALL, 2015) levando ao abandono a ideia de um Universo estático defendida por *Einstein*. Poucos anos depois, em 1932, *Einstein* e *de Sitter* propuseram um novo modelo de Universo em expansão, sem constante cosmológica, mas com geometria plana e preenchido por matéria. Esse modelo, conhecido como *Einstein-de Sitter*, admite a possibilidade de uma expansão eterna, mas desacelerada (PEEBLES; RATRA, 2003).

O modelo padrão tem sua base bem fundamentada no modelo do *Big Bang* (BB) sustentado em pilares teóricos e observacionais. Alguns destes podemos citar: a formulação da RG; a formação de estruturas no Universo (PEEBLES; RATRA, 2003); a expansão do Universo por *Hubble-Lemaître* (HUBBLE, 1929; KRAGH, 2018); a nucleossíntese primordial, que explica a formação dos primeiros elementos leves, como Deutério (2_1H), Hélio (3_2He , 4_2He) e Lítio (6_3Li , 7_3Li), nos instantes iniciais do Universo após o Big Bang, isto é, da ordem de $t \simeq 1s - 20 \text{ min}$ (SCHRAMM, 1991; MALANEY; MATHEWS, 1993; PITROU *et al.*, 2018); a descoberta acidental da radiação cósmica de fundo de micro-ondas (do inglês: *Cosmic Microwave Background* (CMB)) por A. Penzias e Robert W. Wilson em 1965, uma radiação que se ajusta ao espectro de um corpo negro com temperatura de aproximadamente $2.7K$, emitida cerca de 350 mil anos após o Big Bang (PENZIAS; WILSON, 1965). Por outro lado, essa radiação já havia sido prevista em 1948 por George A. Gamov (ALPHER; HERMAN; GAMOW, 1948).

Na década de 1990, os primeiros dados detalhados sobre a CMB foram obtidos pelo satélite espacial *Cosmic Background Explorer Satellite* (COBE) (SMOOT *et al.*, 1990). Em 1998, observações de Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia) revelaram que o Universo está em expansão acelerada (RIESS *et al.*, 1998; PERLMUTTER *et al.*, 1998; PERLMUTTER *et al.*, 1999), levando à adoção de um novo modelo de Universo. Esse modelo inclui um componente de energia com pressão negativa, que passou a ser conhecido como Energia Escura (DE) ¹ (LIMA, 2004; PEEBLES, 2020).

Embora o modelo padrão Λ CDM² tenha alcançado grande sucesso observacional, ele ainda enfrenta alguns desafios e comportamentos enigmáticos. Alguns destes problemas são relatados na literatura: o problema da constante cosmológica, que mostra uma enorme discrepância de 118 ordens de grandezas entre valor observado e o valor associado a teoria quântica de campos para a constante cosmológica Λ (ELLIS *et al.*, 2011; MARTTENS *et al.*, 2019; WEINBERG, 1989a); coincidência cósmica, que questiona o fato da densidade de energia da matéria (ρ_m) possuir a mesma ordem de grandeza da densidade de energia escura (ρ_x) no tempo atual (VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014); a tensão na constante de *Hubble*, que resulta do fato que atualmente diferentes dados cosmológicos indicam valores diferentes para a constante de *Hubble*, em que dados derivados de cefeidas, supernovas SNe Ia possuem valores mais altos que dados relacionados das flutuações da CMB (CAPOZZIELLO; SARRACINO; SOMMA, 2024); o problema do lítio, que surge pela discrepância de medições feitas em estrelas antigas e

¹ Do inglês: *Dark Energy*.

² Do inglês: *Λ Cold Dark Matter*.

pobres em metalicidade encontras no halo da nossa Galáxia, as quais possuem 3 vezes menos lítio do que previsto pela nucleossíntese primordial (HOU *et al.*, 2017) etc. Portanto, em razão desses e outros problemas enfrentados pelo modelo padrão, diversas teorias, modelos e abordagens alternativas têm sido propostas para tentar compreender melhor a natureza da energia escura, entre eles, estão os modelos de interação do setor escuro do Universo (MARTTENS *et al.*, 2019), modelos com gravidade modificada (SHANKARANARAYANAN; JOHNSON, 2022; KOYAMA, 2016) entre outros. Entretanto, a constante cosmológica ainda é a candidata mais simples para ser o componente da energia escura (ELLIS *et al.*, 2011; SAMI, 2009; ZLATEV; WANG; STEINHARDT, 1999; PEEBLES; RATRA, 2003; BAMBA *et al.*, 2012; PACIF, 2020).

Nesta tese, focamos em uma classe de modelos de interação comumente referidos na literatura como IDEM ³, com atenção particular ao modelo designado como IDEM 2 em Marttens *et al.* (2019). Esses modelos partem da suposição padrão de Matéria Escura (DM) ⁴ e DE como componentes independentes, introduzindo uma interação não gravitacional, resultando em uma troca de energia entre eles. Esses modelos de interação são motivados principalmente fenomenologicamente, refletindo nossa compreensão limitada da física fundamental subjacente a um termo de acoplamento (MARTTENS *et al.*, 2019; MARTTENS *et al.*, 2021; MARTTENS; BARBOSA; ALCANIZ, 2023). Uma escolha comum para um IDEM é assumir que o termo de interação Q é linearmente proporcional à densidade da energia escura, ou seja, $Q = 3\gamma H\rho_x$, onde H e γ representam, respectivamente, o parâmetro de *Hubble* e o parâmetro de interação (veja, por exemplo, as referências Marttens *et al.* (2019), Valentino *et al.* (2020a), Nunes *et al.* (2022), Kumar (2021), Valentino *et al.* (2020b) e Sabogal *et al.* (2025)). No entanto, conforme demonstrado em Marttens *et al.* (2021), essa classe de modelos pode apresentar comportamentos não físicos para certos intervalos de parâmetros, prevendo especificamente densidades negativas de matéria sem pressão, violando assim a Condição de Energia Fraca (WEC) ⁵(NGUYEN; AZREG-AÏNOU, 2024). Neste trabalho, consideramos um modelo no qual o termo de interação é dado por $Q \propto \rho_x^2 / (\rho_c + \rho_x)$, desviando-se das formas lineares convencionais de interação. A dependência quadrática em ρ_x introduz uma evolução dinâmica mais rica, refletindo uma interação mais complexa entre DE e CDM. No entanto, de forma semelhante ao caso linear, mostramos que este modelo também apresenta comportamentos não físicos para valores específicos de parâmetros, com implicações para a evolução de *background* do Universo e o crescimento de estruturas cósmicas (LIMA; MARTTENS; CASARINI, 2025; ROWLAND; WHITTINGHAM, 2008; MISHRA *et al.*, 2023). Nosso trabalho, tem como objetivo geral investigar um modelo com interação não gravitacional entre DE e CDM com acoplamento quadrático, visando contribuir para uma melhor descrição da natureza da energia escura, por meio da análise teórica e da comparação com dados cosmológicos observacionais atuais.

³ Os modelos de interação são chamados de IDEM (do inglês: *Interacting Dark Energy Model*), mais um número de referência para identificar o modelo específico, de acordo com Marttens *et al.* (2019).

⁴ Do inglês: *Dark Matter*.

⁵ Do inglês: *Weak Energy Condition*.

Nesta tese, na primeira parte da pesquisa foram utilizados dados de *SNe Ia*, 1048 medições de magnitudes aparentes, denominada de amostras *Pantheon* (SCOLNIC *et al.*, 2018; BETOULE *et al.*, 2014), também foi utilizado o valor de $H_0 = (73.24 \pm 1.74) \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, para a melhor estimativa do valor de H_0 , a partir de um conjunto de observações contendo mais de 600 cefeidas (RIESS *et al.*, 2016), 30 medidas de $H(z)$ independentes do modelo cosmológico, advindos de amostras *Cosmic Chronometers (CC)* (MORESCO *et al.*, 2016), além de dados de *Baryon Acoustic Oscillations (BAO)* extraídos da Primeira Divulgação de Dados (DR1)⁶ do levantamento do Instrumento Espectral de Energia Escura (DESI)⁷ (DESI Collaboration *et al.*, 2025c) e dados da CMB são medições do *Planck* 2018, incluindo informações sobre temperatura, polarização, espectros de correlação cruzada de polarização de temperatura e reconstrução de mapas de lentes, *Planck (TT, TE, EE+lowE+lensing)* (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c). Na segunda parte da pesquisa, utilizamos 1701 medições de magnitudes aparentes, conhecidas como amostras *Pantheon+* (*PantheonPlus*), 32 medidas de $H(z)$ das amostras CC (MORESCO *et al.*, 2022), utilizamos também dados de BAO da Segunda Divulgação de Dados (DR2)⁸ do levantamento do DESI (DESI Collaboration *et al.*, 2025b) e dados da CMB são medições do *Planck* 2018 (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c). A análise estatística é baseada no código MontePython⁹ (AUDREN *et al.*, 2013a) e em uma versão modificada adequada do código *Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS)*¹⁰ (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011).

Esta tese está dividida em 5 capítulos e apêndices. Neste primeiro capítulo vimos uma breve introdução da cosmologia relativística, além de alguns elementos que foram estudados. No Capítulo 2 fizemos uma breve introdução à cosmologia padrão. No Capítulo 3 introduzimos a dinâmica de fundo para o modelo cosmológico em análise e detalhamos os dados observacionais usados, a metodologia e a análise estatística envolvida. No Capítulo 4 discutimos os principais resultados obtidos. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

⁶ Do inglês: *Data Release 1 (DR1)*.

⁷ Do inglês: *Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI)*.

⁸ Do inglês: *Data Release 2 (DR2)*.

⁹ A documentação do código está disponível em <https://github.com/brinckmann/montepython_public/>.

¹⁰ A documentação do código está disponível em <https://lesgourg.github.io/class_public/class.html>.

BREVE REVISÃO DA COSMOLOGIA PADRÃO

“Em ciência, o crédito vai para o homem que convence o mundo de uma ideia,
não para aquele que a teve primeiro”
(William Osle)

O modelo padrão da cosmologia é baseado no modelo do BB. Este é fundamentado por alguns pilares básicos, contendo aspectos teóricos e também observacionais. Para o desenvolvimento deste capítulo apresentaremos alguns conceitos e fundamentos básicos da cosmologia moderna.

2.1 O Princípio Cosmológico

Em 1917 por intermédio de *A. Einstein* foi introduzido o conceito do PC, que na verdade tratava-se de uma extrapolação do Princípio de Copérnico¹ (EINSTEIN, 1917). Por outro lado, o PC que conhecemos hoje foi introduzido por *Edward A. Milne* em 1932 (MILNE, 1932), já que a versão apresentada por *Einstein* considerava que o Universo era homogêneo, isotrópico e imutável, isto é, considerava um Universo estático². O PC atual que conhecemos afirma que o Universo é homogêneo e isotrópico³ (para largas escalas, i. e., escalas maiores que 100 Mpc). As primeiras evidências de forma observacional foram as observações de contagens de galáxias e radiogaláxias e a expansão do Universo de forma isotrópica descoberta por estudos de realizados por *E. Hubble* (HUBBLE, 1929). No entanto, a evidência mais forte surgiu com a descoberta da CMB, por mostrar um alto grau de isotropia (MAROTO; RAMIREZ, 2004; COLES; LUCCHIN, 2002; PANDEY; SARKAR, 2015; VALKENBURG; MARRA; CLARKSON, 2013; PENZIAS; WILSON, 1965; WILSON; PENZIAS, 1967).

¹ O Princípio de Copérnico afirmava que a Terra não estava numa região central e nem favorecida.

² Este, chamamos de “Princípio Cosmológico Perfeito”.

³ Isto é, o Universo é mesmo para quaisquer direções e para quaisquer posições.

2.2 A Cosmologia Relativística

2.2.1 Teoria da Relatividade Geral

A RG foi construída e apresentada por *Einstein* entre 1915-16 numa sequência de artigos científicos [Einstein \(1915a\)](#), [Einstein \(1915b\)](#), [Einstein \(1915c\)](#), [Einstein \(1915d\)](#) e [Einstein \(1916\)](#). A RG abrange de forma universal à gravidade, enquanto que a TRE tem atuação restrita à campos gravitacionais nulos ([WEINBERG, 2008b](#); [VITTORIO, 2018](#); [ELLIS et al., 2011](#)).

A equação de *Einstein* que descreve a dinâmica curva e o movimento local da *matéria-energia*, acrescentando o termo cosmológico é expressada por ([VITTORIO, 2018](#); [ELLIS et al., 2011](#); [EINSTEIN, 1917](#); [BAUMANN, 2022](#))

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de *Einstein*, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de *Ricci*, $g_{\mu\nu}$ trata-se das componentes do tensor de métrica, R é o escalar de curvatura de *Ricci*, G é a constante gravitacional de *Newton*, $\frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante gravitacional de *Einstein*, Λ é a constante cosmológica e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia⁴. A [Equação 2.1](#) conecta a geometria do espaço-tempo (lado esquerdo) com o conteúdo de matéria e energia (lado direito).

2.2.2 A Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A métrica *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW) de forma mais geral é a única métrica que satisfaz o PC. Em coordenadas esféricas um elemento de linha na métrica FLRW é dado por ([ISLAM, 2004b](#); [WEINBERG, 2008b](#); [BAUMANN, 2022](#))

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.2)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala, k é a constante de curvatura do Universo (k pode assumir valores de 1, 0 e -1 , correspondente ao tipo de geometria do Universo: elíptica (esférica), plana (pseudo-euclidiano) e hiperbólica (aberta), respectivamente, r é a coordenada radial comóvel (adimensional) e R_0 é o raio de curvatura do Universo hoje. Neste caso, as componentes do tensor de métrica $g_{\mu\nu}$ são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{(1 - kr^2/R_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

em que as componentes da diagonal são: $g_{00} = -1$, $g_{11} = a^2(t)/(1 - kr^2/R_0^2)$, $g_{22} = a^2(t)r^2$, $g_{33} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta$ e as outras são $g_{\mu\nu} = 0$, para $\mu \neq \nu$.

⁴ Os índices gregos μ e ν variam de 0 a 3.

2.2.3 Equações de Friedmann

Logo após *Einstein* ter apresentado o primeiro modelo de Universo em 1917, com descrição dada pela RG, em 1922 (FRIEDMANN, 1922) e 1924 (FRIEDMANN, 1924), *Friedmann* apresentou soluções de Universo dinâmico de curvatura positiva e negativa, respectivamente. Estas soluções podem ser obtidas tanto pelo formalismo newtoniano, assim como por intermédio da RG (KARTTUNEN *et al.*, 2007; RYDEN, 2017a; LIDDLE, 2015).

Pela RG, as famosas equações de *Friedmann* são obtidas a partir do tensor *momento-energia* e também fazendo uso da métrica FLRW. O tensor momento-energia para um fluido perfeito⁵ é dado por (ELLIS *et al.*, 2011; CARROLL, 2001; SCHUTZ, 2009b; COMBES *et al.*, 1996; CARROLL, 2004; BAUMANN, 2022)

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

em que $T_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor momento-energia. Assim, temos: $T_{00} = \rho c^2$, $T_{ij} = g_{ij}P$ se $i = j$, $T_{ij} = 0$ se $i \neq j$, U_μ e U_ν são as componentes do quadrivetor-velocidade, em que: $U_\mu, U_\nu = (-c, 0, 0, 0)$, ρ é a densidade de energia do Universo, P é a pressão, T_{0i} é o fluxo de energia, em que $T_{0i} = 0$, T_{i0} é a densidade de momento, em que $T_{i0} = 0$, T_{ij} é o fluxo de momento, com os índices latinos i e j variando de 1 a 3 e $g_{\mu\nu}$ é o tensor de métrica (a métrica FLRW). Daí, das equações do tensor momento-energia (Equação 2.4) e da métrica FLRW (Equação 2.2), podemos substituí-las na equação de campos de *Einstein* (Equação 2.1) e obter (NARLIKAR, 1993; WEINBERG, 2008b; DALARSSON; DALARSSON, 2015; VITTORIO, 2018; ELLIS *et al.*, 2011; CARROLL, 2001):

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2kc^2}{a^2 R_0^2} = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 - P) + \Lambda c^2, \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P) + \frac{1}{3} \Lambda c^2. \quad (2.6)$$

Estas equações são conhecidas como *equações de Friedmann*. Agora substituindo a Equação 2.6 na Equação 2.5, podemos reescrevê-la numa única equação

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2}. \quad (2.7)$$

onde esta é a *equação de Friedmann* na forma padrão, pela descrição da RG e com o termo cosmológico adicionado.

A Equação 2.7 pode ser derivada com relação ao tempo cósmico t . Dessa forma, após algumas manipulações, podemos simplificar e obter a seguinte expressão⁶

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{ac^2} (\rho c^2 + P), \quad (2.8)$$

⁵ O Universo é descrito por um fluido perfeito, por ser o único sistema físico que obedece o PC e sem efeitos de cisalhamentos.

⁶ Em que $\frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t)$.

que trata-se da *lei de conservação*.

A [Equação 2.8](#) tem solução analítica assumindo uma Equação de Estado (EoS) caracterizada por:

$$P = \omega_x \rho c^2, \quad (2.9)$$

em que ω_x é o parâmetro da EoS; ρ é a densidade de energia; c é a velocidade da luz; enquanto P é a pressão.

A solução da [Equação 2.8](#) é dada por⁷ ([ROOS, 2015a](#); [CARROLL, 2001](#); [WEINBERG, 2008c](#); [ROOS, 2015a](#); [LIMA, 2020](#)):

$$\rho_i(a(t)) = \rho_{i0} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+\omega_x)} = \rho_{i0} (1+z)^{3(1+\omega_x)}. \quad (2.10)$$

em que $\frac{a_0}{a} \equiv (1+z)$ é obtido através da relação de *expansão de redshift*. Alguns tipos mais comuns que representa o parâmetro da EoS são resumidos na [Tabela 2.1](#) ([CARROLL, 2001](#)).

Tabela 2.1 – Tipos comuns para representar o parâmetro da EoS ω_x .

Componentes	ω_x
Matéria	0
Radiação	$\frac{1}{3}$
Energia de vácuo	-1

Fonte: Adaptada de [Carroll \(2001\)](#).

2.2.4 Parâmetros cosmológicos

Nesta seção definiremos alguns parâmetros cosmológicos observáveis e estudados na cosmologia.

2.2.4.1 O parâmetro de Hubble

O parâmetro de *Hubble* pode ser obtido a partir de uma relação de distância física em termos de distância comóvel, $r = a(t)D_C$ (veja a [subseção 2.3.2](#)). Considerando um objeto astronômico numa trajetória $\vec{D}_C$ situado em coordenadas comóveis em que $\vec{r} = a(t)\vec{D}_C$ em coordenadas físicas. A velocidade física deste objeto astronômico será ([BAUMANN, 2022](#))

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt} \vec{D}_C + a(t) \frac{d\vec{D}_C}{dt} \equiv H\vec{r} + \vec{v}_{\text{pec}}, \quad (2.11)$$

em que $\vec{v}_{\text{pec}}$ é a velocidade peculiar e $H\vec{r}$ é o fluxo de *Hubble*. Por outro lado, podemos definir o parâmetro de *Hubble* por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.12)$$

⁷ Veja [Lima \(2020, Sec. 2.5\)](#).

Este representa à taxa de expansão do Universo. O parâmetro de *Hubble* hoje é denotado por $H(t = t_0) \equiv H(t_0) \equiv H_0$, onde podemos expressá-lo de forma adimensional (LESGOURGUES, 2013)

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}; \quad h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}}. \quad (2.13)$$

O valor atual de H_0 em diferentes conjuntos de dados gira em torno de $(67-73.5) \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

2.2.4.2 Densidade crítica

A densidade crítica pode ser definida como a densidade necessária para tornar que o Universo seja espacialmente plano ($k = 0$) na ausência de uma constante cosmológica (assumindo $\Lambda = 0$). Partindo da equação de *Friedmann* (Equação 2.7), temos (CARROLL; OSTLIE, 2007; ELLIS *et al.*, 2011; CARROLL, 2001):

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.14)$$

com $H(t) = \dot{a}/a$. A densidade crítica do Universo assume a forma:

$$\rho_{cr}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (2.15)$$

No momento atual, a densidade crítica é dada por

$$\rho_{cr0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.87798 \times 10^{-26} h^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (2.16)$$

com as constantes: $G = 6.674184 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ e $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$. Portanto, conhecendo a densidade de energia do Universo, podemos determinar o tipo de curvatura, que pode ser hiperbólica, plana ou fechada.

2.2.4.3 Parâmetro de densidade de energia

O parâmetro de densidade de energia é definido como a razão entre a densidade de energia para uma componente específica e a densidade crítica de energia:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}(t)} = \frac{8\pi G \rho_i}{3H(t)^2}. \quad (2.17)$$

No tempo atual (t_0), o parâmetro é dado por:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{cr0}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}. \quad (2.18)$$

A Equação 2.7 pode ser reescrita em termos de cada componente de densidade de energia:

$$H(t)^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_x) - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2}. \quad (2.19)$$

em que ρ_m representa a densidade de energia da matéria; ρ_r a densidade de energia da radiação e ρ_x a densidade de energia do vácuo (energia escura). Dessa forma, a [Equação 2.19](#) pode ser reescrita utilizando os parâmetros de densidade de energia e o *redshift* z , expressa por ([ELLIS et al., 2011](#); [ROOS, 2015a](#); [CARROLL; OSTLIE, 2007](#); [WEINBERG, 2008c](#); [ISLAM, 2004a](#)):

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{x0} + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4], \quad (2.20)$$

sendo que Ω_{m0} representa o parâmetro de densidade da matéria, Ω_{r0} o parâmetro de densidade da radiação e Ω_{x0} o parâmetro de energia do vácuo (energia escura), ambos medidos atualmente. Enquanto que $\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{a_0^2 R_0^2 H_0^2}$ representa o parâmetro de densidade associado à curvatura espacial no tempo atual.

Portanto, da [Equação 2.19](#) podemos reescrevê-la em termos da curvatura:

$$-k = \frac{a^2 R_0^2 H(t)^2}{c^2} \left(1 - \frac{8\pi G}{3H(t)^2} \rho_{tot} \right), \quad (2.21)$$

em que $\rho_{tot} = \rho_m + \rho_r + \rho_x$. Assim, o Universo será plano somente se $\rho_{tot} = \frac{3H(t)^2}{8\pi G} \equiv \rho_{cr}$. Portanto, temos: $k > 0$, $k < 0$ e $k = 0$ se $\rho_{tot} > \rho_{cr}$, $\rho_{tot} < \rho_{cr}$ e $\rho_{tot} = \rho_{cr}$, respectivamente. Pela definição na [Equação 3.4](#), temos $\Omega_{tot} \equiv \frac{\rho_{tot}}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G \rho_{tot}}{3H(t)^2}$, que permite explorar como curvatura espacial pode ser relacionada com a matéria e energia

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{kc^2}{a^2 R_0^2 H(t)^2} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \Omega_{tot} > 1, & \text{Universo fechado } (k = 1); \\ \Omega_{tot} = 1, & \text{Universo plano } (k = 0); \\ \Omega_{tot} < 1, & \text{Universo aberto } (k = -1). \end{cases} \quad (2.22)$$

2.2.4.4 Parâmetro de desaceleração e o parâmetro jerk

Ao expressar o fator de escala $a(t)$ em termos de série de *Taylor* podemos extrair algumas informações empiricamente ([RYDEN, 2017b](#); [WEINBERG, 2008c](#); [HAWLEY; HOLCOMB, 2005](#); [NĂSTASE, 2019a](#); [GUIMARÃES; CUNHA; LIMA, 2009](#); [MYRZAKULOV et al., 2023](#); [BOLOTIN et al., 2015](#); [VISSER, 2005](#)):

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3a}{dt^3} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^3 + \dots \quad (2.23)$$

Dividindo ambos os lados da [Equação 2.23](#) por $a(t_0)$ e considerando apenas os quatros primeiros termos obtemos uma boa aproximação, pois não há evidência observacionais de que o fator de escala do Universo real apresente um comportamento oscilatório significativo ao longo do tempo. Dessa forma, como $a(t_0) = a_0 = 1$, reescrevemos

$$a(t) \simeq 1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\ddot{\ddot{a}}}{a} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^3. \quad (2.24)$$

Vimos na [Equação 2.12](#) que a constante de *Hubble* é definida por: $H_0 \equiv \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}$. O terceiro termo da [Equação 2.24](#) pode ser expresso por:

$$\left. \frac{\ddot{\ddot{a}}}{a} \right|_{t=t_0} = -q(t)H^2|_{t=t_0}, \quad (2.25)$$

onde definimos $q(t)$ como o *parâmetro de desaceleração* para um tempo qualquer t , que reorganizando podemos expressar a seguir:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}. \quad (2.26)$$

Em termos do tempo atual ($t = t_0$) é escrito por

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}\right)_{t=t_0} = -\left(\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right)_{t=t_0}. \quad (2.27)$$

De forma semelhante, o *parâmetro jerk* é definido por:

$$j(t) \equiv \frac{\dot{\ddot{a}}}{aH^3}, \quad (2.28)$$

que em termos do tempo atual ($t = t_0$) é dado por

$$j_0 \equiv \left(\frac{\dot{\ddot{a}}}{aH^3}\right)_{t=t_0}. \quad (2.29)$$

O parâmetro de *jerk* j mede a taxa de variação do parâmetro de desaceleração q ao longo do tempo. Ele é usado em expansões cosmológicas para descrever o comportamento do fator de escala $a(t)$ em termos mais elevados (terceira derivada) e podendo capturar informações sobre dinâmicas mais sutis da expansão do universo (WU; HONG, 2024; KOUSSOUR *et al.*, 2023).

Dessa maneira, a Equação 2.24 pode ser reescrita em termos do parâmetro *jerk*, j_0 , parâmetro de desaceleração, q_0 , e da constante de *Hubble*, H_0 ,

$$a(t) \simeq 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t - t_0)^3. \quad (2.30)$$

Uma discussão contendo mais termos para a expansão de *Taylor* em $a(t)$ pode ser vista em Visser (2005).

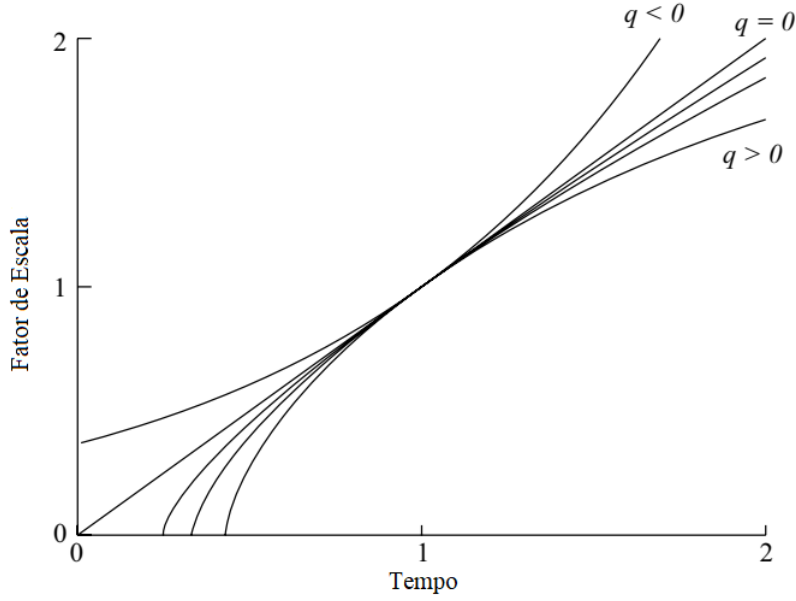
A Equação 2.26 permite explorar três possibilidades distintas:

$$\begin{cases} q > 0, & \text{se } \ddot{a} < 0 & (\text{expansão desacelerada}); \\ q = 0, & \text{se } \ddot{a} = 0 & (\text{expansão constante}); \\ q < 0, & \text{se } \ddot{a} > 0 & (\text{expansão acelerada}), \end{cases} \quad (2.31)$$

quando $q > 0$ a expansão do Universo acontece de forma desacelerada; quando $q < 0$ a expansão acontece de forma acelerada e quando $q = 0$ a expansão do Universo ocorre de modo constante.

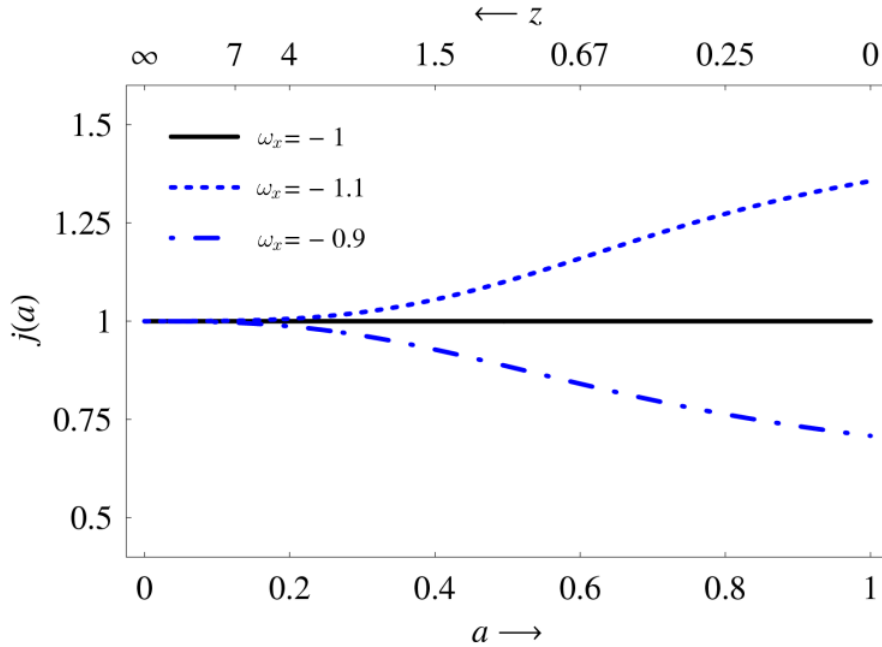
A Figura 2.1 mostra as três possibilidades distintas de q em função do fator de escala $a(t)$ (HAWLEY; HOLCOMB, 2005). Enquanto, a Figura 2.2 mostra o parâmetro *jerk* $j(a)$ em função do fator de escala a para três diferentes valores do parâmetro da EoS ω_x (BLANDFORD *et al.*, 2004).

Figura 2.1 – Evolução temporal do fator de escala a para modelos que possui as três possibilidades distintas para o parâmetro de desaceleração q .



Fonte: Adaptada de Hawley e Holcomb (2005).

Figura 2.2 – Parâmetro *jerk* $j(a)$ em função do fator de escala a para três diferentes valores do parâmetro da EoS ω_x .



Fonte: Adaptada de Blandford *et al.* (2004).

2.2.4.5 A idade do Universo

A idade do Universo t_0 é geralmente calculada usando o instante desde o *Big Bang* até o tempo presente ($a(t_0) = 1$), que obtida dada por (PIATTELLA, 2018; ZEE, 2013; WEINBERG,

2008c)

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^1 \frac{da}{H(a)a}, \quad (2.32)$$

onde $H(a) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{x0}}$ no modelo Λ CDM plano, onde Ω_{m0} , Ω_{r0} e Ω_{x0} são as densidade de matéria, densidade de radiação e densidade de energia escura atuais, respectivamente. Enquanto, vimos que na [Equação 2.30](#) o fator de escala $a(t)$ é obtido por

$$a(t) \simeq 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}j_0H_0^3(t - t_0)^3. \quad (2.33)$$

Então, se o parâmetro *jerk* j_0 for assumido como uma constante, o comportamento de $H(a)$ pode ser obtido integrando as equações cosmológicas. No caso de um Universo plano e sem oscilações abruptas, $H(a)$ pode ser aproximado em função de H_0 , q_0 e j_0

$$H(a) \approx H_0 \left[1 - q_0(1 - a) + \frac{1}{2}j_0(1 - a)^2 \right]. \quad (2.34)$$

Assim, a idade do universo pode ser calculada aproximadamente por

$$t_0 \approx \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a \left[1 - q_0(1 - a) + \frac{1}{2}j_0(1 - a)^2 \right]} \quad (2.35)$$

ou

$$t_0 \approx \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_{m0}a^{-1} + \Omega_{r0}a^{-2} + \Omega_{x0}a^2}}. \quad (2.36)$$

Levando em conta o modelo de Λ CDM plano e valores típicos de $H_0 \approx 67.7$ km/s/Mpc, $q_0 \approx -0.55$, e $j_0 = 1$ (um universo dominado por uma constante cosmológica), a idade do universo é estimada em torno de: $t_0 \approx 13.8$ bilhões de anos (já que $H_0^{-1} \approx 14.38$ bilhões de anos e numericamente a integral fornece um valor de aproximadamente de 0.96).

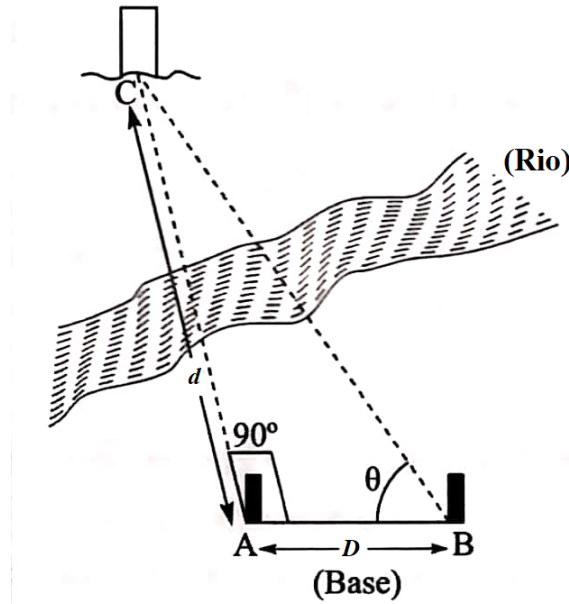
2.3 Medidas e indicadores de distâncias na cosmologia

Na astronomia, para estudar o Universo em altos *redshifts* são utilizados indicadores secundários de distâncias, que dependem de calibrações feitas por métodos locais de medidas de distâncias, os indicadores primários. Estes operam apenas em baixos *redshifts*, onde os efeitos de curvatura podem ser desconsiderados. Nesta seção, abordaremos alguns destes métodos de medir distâncias.

2.3.1 Triangulação e paralaxe estelar

O método de triangulação permite medir grandes distâncias a nível local e até pontos inacessíveis, como o outro lado de um rio. Ele é baseado numa distância de referência (denominado como distância de base) e na medição de ângulos entre essa base e a direção de mira, medidos por instrumentos como o teodolito. A [Figura 2.3](#) ilustra como é possível calcular a distância d até

Figura 2.3 – Medindo distâncias a partir do método de triangulação.



Fonte: Adaptada de [Nussenzveig \(2013\)](#).

o alvo, situada entre o ponto A até o ponto C e a distância de base D sendo a distância dos pontos A até B. Portanto, ao conhecer a distância de base D e os ângulos dos vértices correspondentes, sendo um deles igual a 90° , a distância d pode ser obtida através da relação ([NUSSENZVEIG, 2013; FILHO; SARAIVA, 2014a](#)):

$$d = D \operatorname{tg}(\theta), \quad (2.37)$$

em que θ é o outro ângulo, com $\theta < 90^\circ$. Para distâncias muito grande, θ se aproxima de 90° , tornando as medições mais sensíveis a erros.

O método da paralaxe estelar é baseado no conceito de triangulação, sendo a distância de base, D , equivalente ao raio da órbita da Terra em torno do Sol para um intervalo de seis meses. Logo, a paralaxe é determinada por

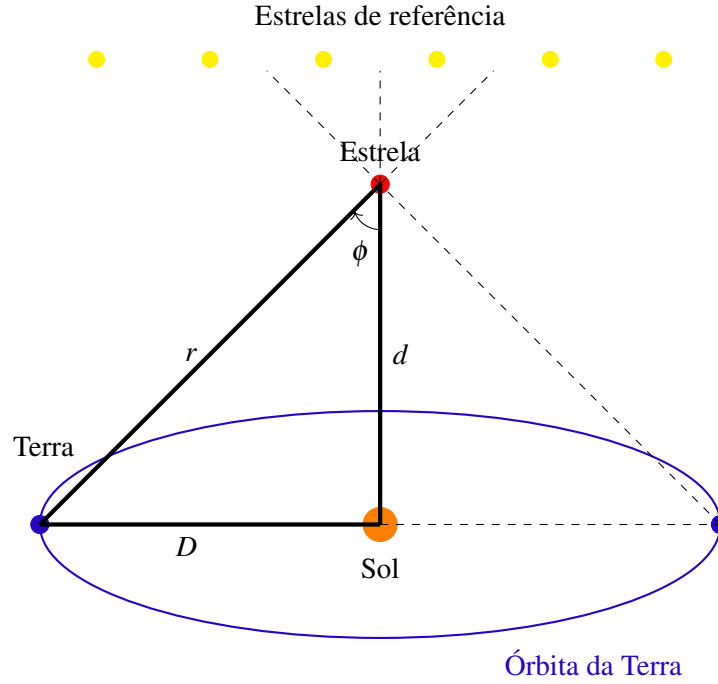
$$d = \frac{D}{\operatorname{tg}(\phi)}, \quad (2.38)$$

sendo d a distância até a estrela de interesse; o raio médio da órbita Terra-Sol é $D = 1 \text{ U.A.}$; enquanto ϕ representa o ângulo de separação subtendido pelo raio orbital da Terra ao redor do Sol, que é extremamente pequeno. Assim, podemos usar a aproximação $\operatorname{tg}(\phi) \simeq \phi$ (em radianos), que permite reescrever a [Equação 2.38](#) por

$$\phi(\text{rad}) = \frac{D}{d}. \quad (2.39)$$

A [Figura 2.4](#) traz uma esquematização da paralaxe estelar. Essa formulação simplificada é utilizada em medições astronômicas, pois facilita o cálculo de distâncias para estrelas próximas, onde o ângulo de paralaxe ϕ ainda é mensurável. Para estrelas mais distantes, torna-se necessário recorrer a métodos mais avançados e precisos.

Figura 2.4 – Esquematização da paralaxe estelar. Quando a Terra se move em órbita ao redor do Sol faz com que uma estrela próxima se desloca com relação a um fundo contendo outras estrelas mais distantes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3.2 Distância comóvel

A distância física entre dois eventos distintos em repouso relativo (observadores comóveis), sem considerar a expansão do espaço-tempo, é denominada de distância comóvel D_C . Um exemplo disso seria um observador localizado em A e uma galáxia localizada em B , caso não houvesse expansão entre eles. Dessa forma, a posição comóvel de um objeto astronômico localizado em $r = r_1$ é dada por (HOGG, 2000; ROOS, 2015c; COLES; LUCCHIN, 2002; RYDEN, 2017c; HARRISON, 2000; WEINBERG, 1972; WEINBERG, 2008c; CARROLL; OSTLIE, 2007)

$$D_C(r_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}, \quad (2.40)$$

em que $t_1 \equiv t$ representa o instante da emissão da radiação na posição do objeto astronômico, e t_0 representa o instante de detecção pelo observador. A partir da relação $1/a(t) = 1 + z$, $da = -dz/(1 + z)^2$ e $\dot{a}/a \equiv H(t)$ podemos obter a distância comóvel em função do *redshift* z ⁸:

$$D_C(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (2.41)$$

sendo $H(z) \equiv H_0 E(z)$, no modelo padrão atual Λ CDM $E(z) = [\Omega_{x0} + \Omega_{k0}(1 + z)^2 + \Omega_{m0}(1 + z)^3 + \Omega_{r0}(1 + z)^4]^{1/2}$, que representa a soma dos parâmetros de densidades. O termo $\frac{c}{H_0} \equiv D_H$ representa a *distância de Hubble*.

⁸ $H(t) = H(z) = H(a)$, pois a depende de t , podendo ser reescrito como função de z .

2.3.3 Distância própria

A distância física entre dois observadores considerando a expansão do espaço-tempo, é denominada de distância própria D_P . Nas [subseção 2.3.2](#) e [seção B.1](#) podemos ver a distância entre um observador situado em A e um objeto astronômico localizado em B (uma galáxia) que é definido como o comprimento geodésico espacial multiplicado pelo fator de escala correspondente, utilizando a métrica FLRW, temos ([ROOS, 2015c](#); [COLES; LUCCHIN, 2002](#); [RYDEN, 2017c](#); [RYDEN, 2017b](#); [HARRISON, 2000](#); [WEINBERG, 1972](#); [WEINBERG, 2008c](#); [CARROLL; OSTLIE, 2007](#); [HOGG, 2000](#); [LESGOURGUES, 2015](#); [BAUMANN, 2022](#)):

$$D_P(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} = a(t) D_C(r_1), \quad (2.42)$$

sendo $D_C(r_1)$ a *distância comóvel*. A integral apresentada na [Equação 2.42](#) possui uma solução do tipo (demonstrada no [Apêndice B](#)):

$$D_C(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} = \frac{R_0}{\sqrt{k}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{k} r_1}{R_0} \right), \quad (2.43)$$

com

$$D_C(r_1) = \begin{cases} r_1, & \text{se } (k = 0), \\ R_0 \sinh^{-1}(r_1/R_0), & \text{se } (k = -1), \\ R_0 \sin^{-1}(r_1/R_0), & \text{se } (k = 1), \end{cases} \quad (2.44)$$

i. e., a distância própria entre o observador e o objeto astronômico (descrita em coordenadas comóveis) depende diretamente do fator de escala.

Por outro lado, a distância própria entre observadores no instante t_0 e um objeto astronômico que emite luz no instante t , pode ser expressa por:

$$D_P(t_0) = a(t_0) D_C(r_1) = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = D_C(r_1). \quad (2.45)$$

Com base na discussão realizada na [seção B.1](#), a [Equação 2.45](#) pode ser reescrita por ([BOLOTIN et al., 2015](#); [VISSER, 2005](#); [WEINBERG, 2008c](#)):

$$D_P(t_0) = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \simeq c(t_0 - t) - \frac{cH_0}{2}(t_0 - t)^2 + \frac{cH_0^2}{3} \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) (t_0 - t)^3 - \frac{cH_0^3}{24} (6 + 6q_0 + j_0) (t_0 - t)^4. \quad (2.46)$$

A partir da [Equação B.23](#) pode ser expressa em termos dos parâmetros de desaceleração e *jerk*, além do *redshift*:

$$D_P(t_0) \simeq \frac{c}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \frac{1}{6} (6(1 + q_0) + 3q_0^2 - j_0) z^3 \right] - \frac{c}{2H_0} z^2 + \frac{c}{3H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^3, \quad (2.47)$$

simplificando e considerandos apenas o primeiro termo para terceira ordem de z , reescrevemos por:

$$D_P(t_0) \simeq \frac{cz}{H_0} \left\{ 1 - \left[\frac{1+q_0}{2} \right] z + \left[1 + q_0 + \frac{q_0^2}{2} - \frac{j_0}{6} \right] z^2 \right\}. \quad (2.48)$$

Quando desprezamos os termos de ordens superiores para dinâmicas mais sutis em z a [Equação 2.48](#) pode ser reduzida para

$$D_P(t_0) \approx \frac{cz}{H_0} \left\{ 1 - \left[\frac{1+q_0}{2} \right] z \right\}, \quad (2.49)$$

para $z \ll 1$.

2.3.4 Distância de luminosidade

A medida do fluxo luminoso para um objeto astronômico está associado a sua luminosidade bolométrica ([CATTOEN; VISSER, 2007](#); [BOLOTIN *et al.*, 2015](#); [SCHUTZ, 2009a](#))

$$F = \frac{L}{4\pi D^2}, \quad (2.50)$$

sendo F o fluxo medido, D é a distância do observador até a fonte e L é a luminosidade bolométrica, que é a medida da quantidade total de energia emitida por unidade de tempo para todas as faixas de frequências, expressa por

$$L = 4\pi D^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu, \quad (2.51)$$

com F_ν sendo a densidade de fluxo específico, isto é, a energia emitida por unidade de tempo, área e frequência.

A *distância de luminosidade*, D_L , tem sua definição dada a partir da [Equação 2.50](#). Portanto:

$$D_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2}, \quad (2.52)$$

em que D_L é a distância de luminosidade (é a mesma distância do observador até a fonte, vista antes). Para um Universo descrito pela métrica FLRW, uma descrição mais completa leva em conta a expansão do Universo e sua geometria. Dessa forma, para um observador que esteja na origem $t = t_0$, ele vê uma luz que foi emitida por uma fonte no tempo $t = t_1$. Os fótons emitidos no instante t_1 chegam em t_0 distribuídos sobre uma esfera de raio próprio dado por $D_P(t_0) = a_0 D_C = D_C$ (veja a [Equação 2.45](#)) e localizados em uma superfície de área própria $A_p(t_0)$ ([RYDEN, 2017b](#); [BAUMANN, 2022](#); [WEINBERG, 2008c](#)). Para um Universo de geometria plana, a distribuição da área própria é expressa por:

$$A_p(t_0) = 4\pi D_P^2(t_0) = 4\pi r_1^2. \quad (2.53)$$

Mas, de modo geral é expressada por

$$A_p(t_0) = 4\pi D_C^2(r_1), \quad (2.54)$$

com curvatura positiva para $k = 1$ ($A_p(t_0) < 4\pi r_1^2$) e curvatura é negativa para $k = -1$ ($A_p(t_0) > 4\pi r_1^2$).

Por outro lado, pela [seção B.1](#) obtemos

$$\lambda_0 = \lambda_1 \frac{a_0}{a} = (1+z)\lambda_1, \quad (2.55)$$

com $a_0 = 1$ e $a = a(t = t_1)$. A energia do fóton emitido em t_1 possui energia $E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$. Portanto, a energia medida pelo observador no instante t_0 será

$$E_0 = \frac{E_1}{1+z}. \quad (2.56)$$

A quantidade de energia medida entre dois fótons emitidos em t_1 e detectados em t_0 sofre alteração com a expansão do Universo, assim como o intervalo de tempos entre os dois momentos. A distância própria no instante da emissão, δt_1 , é obtida por $c(\delta t_1)$. Por outro lado, a distância própria na detecção dos fótons em t_0 é $c\delta t_1(1+z)$, enquanto o intervalo de tempo detectado é $\delta t_0 = \delta t_1(1+z)$. Dessa forma, podemos relacionar o fluxo F observado e a luminosidade L (potência) pela seguinte expressão

$$F = \frac{L}{4\pi D_C^2(r_1)(1+z)^2}, \quad (2.57)$$

em que $\frac{E_1}{\delta t_1} = L$. Portanto, a distância de luminosidade é relacionada com o *redshift* z por:

$$D_L = D_C(r_1)(1+z). \quad (2.58)$$

Para uma geometria espacial plana ($k = 0$), $D_C(r_1) = r_1$ e é possível relacionar a distância de luminosidade e a distância própria por

$$D_L = r_1(1+z) = D_p(t_0)(1+z), \quad (2.59)$$

para z pequeno $D_L \approx D_p(t_0)$. Considerando a [Equação 2.48](#) com aproximação até terceira ordem de z , expressamos ([VISSER, 2005](#); [RYDEN, 2017a](#); [WEINBERG, 2008c](#))

$$D_L(z) \approx \frac{cz}{H_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2}[1 - q_0]z - \frac{1}{6} \left[1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0 + \frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2 R_0^2} \right] z^2 \right\}. \quad (2.60)$$

No cálculo de distâncias de luminosidade ou de diâmetro angular é requerido o conhecimento da coordenada radial $r(z)$ da fonte observada hoje. Esta está situada em um *redshift* z e obtida pela expressão ([WEINBERG, 2008c](#); [SCOLNIC et al., 2018](#))

$$r(z) = S \left[\int_{t(z)}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} \right], \quad (2.61)$$

em que

$$S[y] \equiv \begin{cases} \text{sen } y & k = +1 \\ y & k = 0 \\ \text{senh } y & k = -1 \end{cases}. \quad (2.62)$$

Analogamente a [subseção 2.3.2](#), $r(z)$ pode ser escrito e avaliado por

$$r(z) = S \left[\int_0^z \frac{c dz}{a_0 H(z)} \right]. \quad (2.63)$$

Vimos anteriormente que

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} = \frac{R_0}{\sqrt{k}} \text{arc sen} \left(\frac{\sqrt{k}r}{R_0} \right) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (2.64)$$

portanto, aplicando a função seno em ambos os lados podemos isolar r :

$$r(z) = \frac{R_0}{\sqrt{k}} \sin \left(\frac{\sqrt{k}c}{R_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right). \quad (2.65)$$

Como $\Omega_{k0} \equiv -\frac{kc^2}{a_0^2 R_0^2 H_0^2}$, se expressarmos $a_0 H_0$ em termos de Ω_{k0} obtemos:

$$a_0 r(z) = \frac{c}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2}} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right], \quad (2.66)$$

sendo $E(z) \equiv H(z)/H_0$. Nessa expressão todos os termos de curvaturas estão incluídos. No limite $\Omega_{k0} \rightarrow 0$ recupera-se a geometria plana. Por outro lado, quando $\Omega_{k0} < 0$ podemos usar $\sinh(ix) = i \text{sen}(x)$, pois o argumento para o seno hiperbólico torna-se imaginário. Dessa forma, a distância de luminosidade pode ser obtida por

$$D_L(z) = a_0 r(z)(1+z) = \frac{(1+z)c}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2}} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right], \quad (2.67)$$

para o modelo Λ CDM com curvatura, temos

$E(z) = \sqrt{\Omega_{x0} + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{x0} - \Omega_{r0})(1+z)^2}$. Quando $k = 0$, temos $\Omega_{k0} = 0$, logo a distância de luminosidade é reescrita por:

$$D_L(z) = a_0 r(z)(1+z) = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (2.68)$$

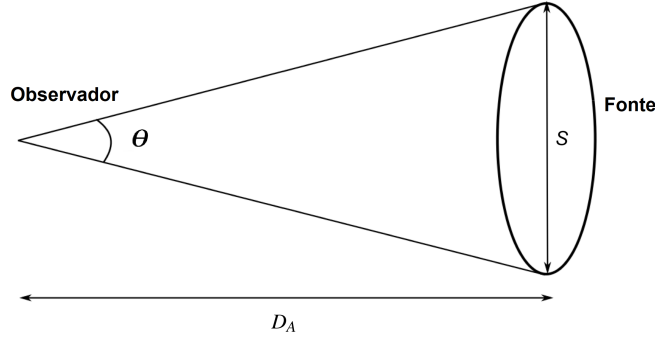
onde $E(z) = \sqrt{\Omega_{x0} + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4}$ representa o modelo Λ CDM plano.

2.3.5 Distância de diâmetro angular

A Distância de Diâmetro Angular (DDA) tem sua definição dada pela razão entre o comprimento físico intrínseco S do objeto e o tamanho angular θ observado ([RYDEN, 2017b](#); [VICENTE, 2020](#); [MAKLER, 2019](#); [CARROLL; OSTLIE, 2007](#); [WEINBERG, 2008c](#))

$$D_A \equiv \frac{S}{\theta}, \quad (2.69)$$

Figura 2.5 – A figura mostra uma representação esquemática da distância de diâmetro angular.



Fonte: Adaptada de Makler (2019).

em que D_A é a DDA. Ela está associada às propriedades observacionais. A Figura 2.5 apresenta uma esquematização da DDA. Supondo que a fonte esteja localizada na coordenada r , enquanto emite luz no instante t_1 e observada sob um ângulo θ (com $\theta \ll 1$ rad) estendido pela distância S , que corresponde $a(t_1)r\theta$. Portanto,

$$D_A = a(t_1)r. \quad (2.70)$$

Ao comparar a Equação 2.70 com a Equação 2.59 e utilizando a Equação B.17, observamos que a razão entre a DDA e a distância de luminosidade depende do *redshift*, conforme podemos ver a seguir:

$$\frac{D_A}{D_L} = (1+z)^{-2} \quad \text{ou} \quad \frac{D_L}{D_A(1+z)^2} = 1. \quad (2.71)$$

Esta relação é conhecida como a *dualidade de distâncias cósmicas*.

A partir da Equação 2.67 a DDA pode ser reescrita também em termos da coordenada radial r

$$D_A(z) = \frac{c}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2} (1+z)} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right]. \quad (2.72)$$

Quando $z \approx$ pequeno (i. e. $z \ll 1$), é esperado que $D_L \approx D_A \approx D_p(t_0)$. A partir da Equação 2.60 e da Equação 2.71 ($D_A(z) = D_L(z)(1+z)^{-2}$), usando expansão em série *Taylor* de $(1+z)^{-2}$ até terceira ordem de z ⁹ podemos expressar a DDA, com aproximação até terceira ordem de z , por (VISSER, 2005; RYDEN, 2017a; BOLOTIN *et al.*, 2015)

$$D_A(z) \approx \frac{cz}{H_0} \left\{ 1 - \frac{3+q_0}{2}z + \frac{1}{6} \left[11 + 7q_0 + 3q_0^2 - j_0 - \frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2 R_0^2} \right] z^2 \right\}, \quad (2.73)$$

onde $\frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2 R_0^2} = -\Omega_{k0}$.

2.3.6 Módulo de distância

O brilho das estrelas foi historicamente definido em termos de magnitudes por *Hiparcos* (160–125 a.C.), que classificou as estrelas visíveis a olho nú em seis categorias de brilho aparente:

⁹ Expansão em série de *Taylor* de $(1+z)^{-2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots$

as mais brilhantes foram atribuídas à magnitude 1, enquanto as mais fracas, ainda visíveis sem instrumentos, à magnitude 6. Em 1856, o astrônomo *Norman Robert Pogson* (1829-1891) observou que o sistema, fundamentando na percepção de brilho pelo olho humano, possui natureza logarítmica¹⁰ e fluxo era de 100 vezes mais brilhante, para uma estrela de magnitude 1 em relação a outra estrela de magnitude 6, ou seja, cerca de 2.512 mais ou menos brilhante de uma magnitude até a outra na escala (MACIEL, 1999; FILHO; SARAIVA, 2014b; FUJIWARA, 2005). Portanto, $2.512^5 \simeq 100$, sabendo que o fluxo medido na terra de algum astro é o brilho aparente do astro, podemos definir a *magnitude aparente*, m , por uma relação que depende do fluxo observado (NĂSTASE, 2019b; UMEH, 2022)

$$m = -2.5 \log_{10} F + \text{constante}, \quad (2.74)$$

em que F é o fluxo. Assim a diferença de magnitudes é dada por:

$$m_1 - m_2 = (-2.5 \log_{10} F_1 + \text{constante}) - (-2.5 \log_{10} F_2 + \text{constante}) \quad (2.75)$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2} \quad (2.76)$$

ou em termos da razão dos fluxos¹¹:

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}, \quad (2.77)$$

em que $10^{0.4} \simeq 2.512$ que corresponde a diferença de uma certa magnitude em razão de seus fluxos.

A *magnitude absoluta*, M , é definida como a magnitude teórica de um objeto astronômico situado a 10 parsecs (3.09×10^{16} m) de nós, dada pela relação (NĂSTASE, 2019b; ROOS, 2015c; RYDEN, 2017b; UMEH, 2022):

$$M = -2.5 \log_{10}[F(10\text{pc})] + \text{constante}. \quad (2.78)$$

O *módulo de distância* tem sua definição dada pela diferença entre a *magnitude aparente* e *magnitude absoluta*. Neste contexto, temos

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10}(D_L) - 5 \quad (2.79)$$

Esta é conhecida como a equação do *módulo de distância*, em unidades de pc. Por outro lado, na literatura é comumente apresentada em unidade de Mpc, que é expressa por:

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left[\frac{D_L}{\text{Mpc}} \right] + 25. \quad (2.80)$$

¹⁰ A fórmula do logaritmo é dada na forma $\log_b c = a$, onde $b^a = c$.

¹¹ Pela propriedade logarítmica temos que o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ficar igual a b , para $0 < a \neq 1$, $b > 0$, visto na seguinte equação: $a^{\log_a b} = b$.

2.3.7 Taxa de expansão cósmica $H(z)$

A taxa de expansão cósmica, $H(z)$, é dada pelo o parâmetro de *Hubble* em função do *redshift* z , que descreve a taxa de expansão do universo em diferentes épocas cosmológicas. Vimos na subseção 2.2.4.1 que o parâmetro de *Hubble* é definido por: $H(z) = \dot{a}/a$, onde $\dot{a} = da/dt$ é a derivada temporal de $a(t)$. Por outro lado, obtivemos a relação do fator de escala a com o *redshift* z na Equação B.17 ($1 + z = 1/a$). Logo, derivando esta com relação a t , podemos obter

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}. \quad (2.81)$$

Estes estudos foram apresentados por Jimenez e Loeb (2002), que consistem em medidas entre duas galáxias vermelhas antigas de diferentes idades¹², Δt , formadas na mesma época, com metalicidade semelhante e baixa formação estelar, e separadas por um intervalo de *redshift*, Δz , mostra que a taxa obtida por dz/dt (inferida da razão $\Delta z/\Delta t$) pode ser relacionada ao parâmetro de *Hubble*, $H(z)$.

As medidas de distâncias obtidas por meio de dados de $H(z)$ têm sido utilizadas amplamente para investigar a taxa de expansão do Universo e para explorar as propriedades da energia escura (MORESCO *et al.*, 2022).

2.4 A radiação cósmica de fundo (CMB)

2.4.1 Contextualização

A radiação cósmica de fundo de micro-ondas revela detalhes sobre a composição e a estrutura do Universo primitivo (WANDS; PIATTELLA; CASARINI, 2016). Ela foi descoberta de forma acidental em 1965 por A. Penzias e Robert W. Wilson (PENZIAs; WILSON, 1965). Em 1948, George A. Gamov já tinha proposto a existência de uma radiação de fundo (ALPHER; HERMAN; GAMOW, 1948). Esta radiação era bem ajustada ao espectro de um corpo negro com temperatura de aproximadamente 2.7K, emitida cerca de 380 mil anos após o *Big Bang* (i. e., após o tempo de *Planck* $t \sim 10^{-43}s$, instante em que a física atual pode ser aplicada) (RYDEN, 2017a; WANDS; PIATTELLA; CASARINI, 2016). Nesta época o Universo inicial era composto por um plasma quente e denso de fótons, elétrons e bárions. Os fótons interagem com o plasma por intermédio do espalhamento *Thomson*, onde as colisões elásticas entre fótons e elétrons livres mantinham os fótons acoplados ao plasma, sem alterar sua energia de forma significativa, já que os fótons possuíam uma energia muito menor que a massa de repouso dos elétrons. A medida que o Universo se expandiu resfriou-se a ponto de alcançar uma temperatura em torno de 3000K permitindo o processo de desacoplamento entre fótons e a matéria (WEINBERG, 2008a; BERNARDIS *et al.*, 2000).

¹² Calculadas geralmente por métodos espectrais de populações estelares antigas.

Na década de 1990, os primeiros dados detalhados sobre a CMB foram obtidos pelo satélite espacial COBE (SMOOT *et al.*, 1990). Em 1992, o COBE detectou com significância estatística flutuações (anisotropias) de temperatura na CMB, com $44 \pm 7 \mu\text{K}$ e $30.5 \pm 2.7 \mu\text{K}$ para escalas de 7 e 10 graus, respectivamente (WANDS; PIATTELLA; CASARINI, 2016; BENNETT *et al.*, 1994). Diversos experimentos (em terra e com balões) estudaram as anisotropias da CMB inspirados pelos resultados do COBE. O objetivo principal desses experimentos foi determinar a escala angular do primeiro pico acústico, contrapondo ao COBE que tinha resolução limitada para fazer essas medidas. O primeiro pico foi, enfim, detectado pelos experimentos *Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation and Geomagnetism* (BOOMERanG) e *Millimeter-wave Anisotropy eXperiment IMaging Array* (MAXIMA) (MILLER *et al.*, 1999; HANANY *et al.*, 2000; WINANT *et al.*, 2001; BERNARDIS *et al.*, 2000). A dinâmica das oscilações acústicas antes da recombinação está ligada diretamente ou indiretamente a quase todos os parâmetros cosmológicos, que permite o espectro de anisotropias do fundo cósmico impor restrições nesses parâmetros. Particularmente, as densidades de bárions (ou $\Omega_b h^2$), que afeta a intensidade e a amplitude das oscilações acústicas, sendo essencial para entender as características das BAO. Estas servem como régua padrão nas medições de distâncias cósmicas (AUBOURG *et al.*, 2015; STAICOVA, 2022).

A Figura 2.6 mostra a comparação da observação do espectro de corpo negro observado com o radiômetro Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS) transportado pelo COBE (FIXSEN *et al.*, 1996).

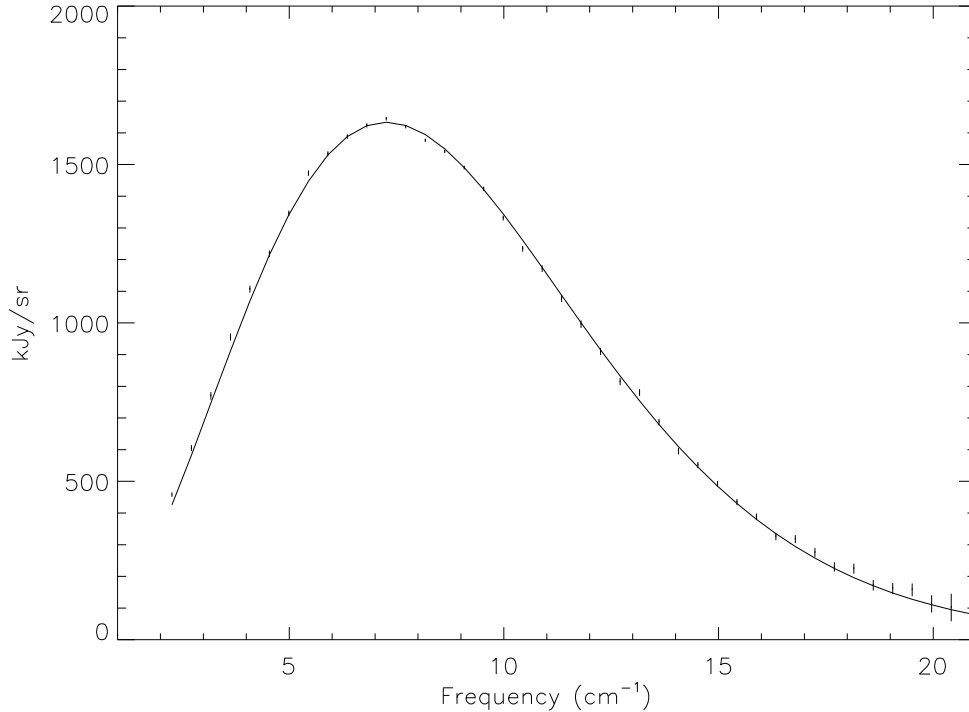
O COBE foi sucedido pelo satélite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) que foi lançado pela NASA ¹³ em 2001, divulgando seus primeiros dados em 2003, incluindo TT e TE. Este produziu mapas do céu para 5 diferentes frequências (nas faixas de 23 a 94 GHz) e mapeou pela primeira vez a polarização da CMB em largas escalas angulares (HINSHAW *et al.*, 2003; PAGE *et al.*, 2003; BUCHER, 2015; WANDS; PIATTELLA; CASARINI, 2016). Em 2009, a agência espacial europeia (ESA) ¹⁴ lança o satélite espacial *Planck* (PLANCK Collaboration *et al.*, 2014) que observou o céu de 2009 a 2013 de forma contínua e estável, usando uma matriz com 74 detectores sensíveis nas faixas de frequências entre 25 e 1000 GHz, com resolução angular entre 33' e 5'. A missão *Planck* permitiu medir com precisão as anisotropias da CMB, impondo limites fundamentais a modelos cosmológicos e encerrando assim a fase de estudo das anisotropias de temperatura que foi iniciada pelo COBE (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020a; PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c).

O estudo da CMB foi transformado nas últimas décadas graças as medições cada vez melhores por experimentos transportados por balões, pelos satélites COBE e WMAP, e por último o satélite *Planck* (HU; DODELSON, 2002; BAMBI; DOLGOV, 2016). A Figura 2.7 mostra um mapa de anisotropias de temperaturas da CMB obtida pelo satélite *Planck* dos resultados de

¹³ Do inglês: National Aeronautics and Space Administration (NASA).

¹⁴ Do inglês: European Space Agency (ESA).

Figura 2.6 – Comparação da intensidade da radiação observada com o radiômetro FIRAS transportado pelo COBE com um espectro de corpo negro com temperatura de 2.728 K. O eixo vertical fornece a intensidade em quiloJansky por esterradiano e o eixo horizontal fornece o comprimento de onda recíproco em cm^{-1} . O valor de temperatura atualizada é dada por $T=2.7260$ K (FIXSEN, 2009).



Fonte: Fixsen *et al.* (1996).

planck 2018 (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020a). Atualmente, o Planck fornece o resultado mais avançado que se tem para medidas de anisotropias da CMB, sendo complementado em escalas menores por experimentos como o *Atacama Cosmology Telescope* (ACT) e o *South Pole Telescope* (SPT) (LOUIS *et al.*, 2025; NAEISS *et al.*, 2025; GE *et al.*, 2025).

2.4.2 Anisotropias de temperatura da CMB

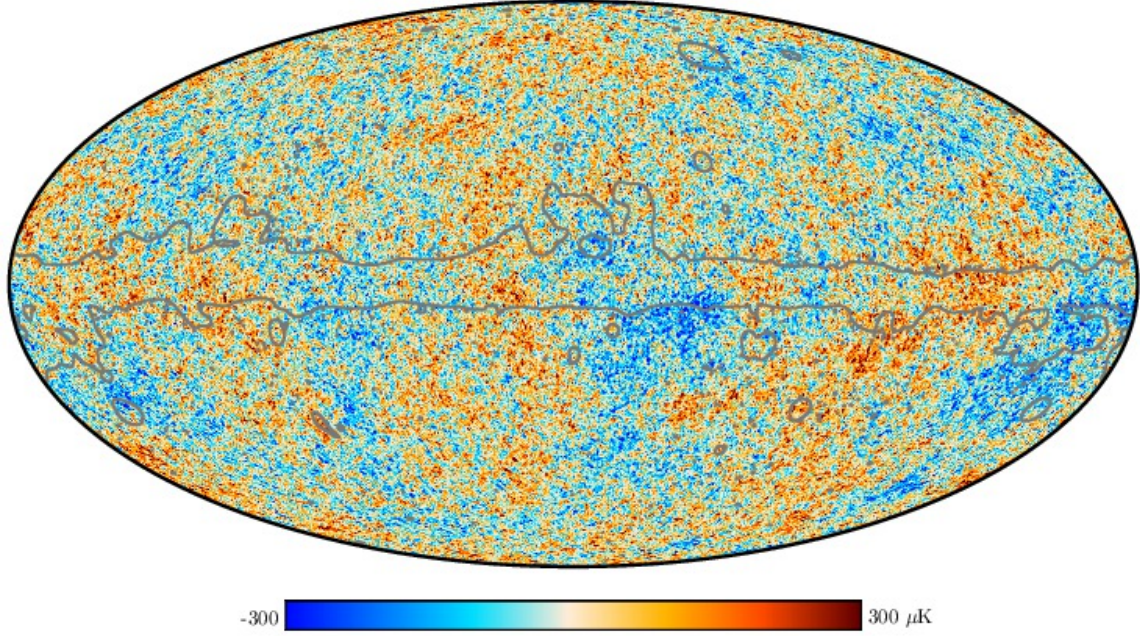
Aqui trataremos alguns aspectos matemáticos e conceituais importantes para o estudo das anisotropias de temperaturas da CMB, considerando um Universo plano.

2.4.2.1 Taxa de espalhamento dos fótons e profundidade óptica

No Universo primitivo, os elétrons livres e bárions ¹⁵ estavam acoplados por meio da interação coulombiana, onde estes carregam cargas elétricas opostas. Já, os fótons e elétrons estavam acoplados pelo espalhamento *Thomson*, no limite do espalhamento *Compton*, i. e., para elétrons não relativísticos, cuja energia dos fótons era menor que a energia de repouso dos elétrons (BAMBI; DOLGOV, 2016; HU; DODELSON, 2002; LESGOURGUES, 2013; WANDS; PIATTELLA; CASARINI, 2016; SUGIYAMA, 2014).

¹⁵ Quando mencionamos bárions estamos nos referimos as partículas com 3 quarks (prótons, nêutrons, etc).

Figura 2.7 – Mapa da CMB, mostrando anisotropias de temperatura obtido pelo satélite espacial Planck utilizando o método SMICA .



Fonte: [PLANCK Collaboration et al. \(2020a\)](#).

A taxa de espalhamento *Thomson* (com relação ao tempo conforme e em unidade de $c = 1$) é dada por

$$\Gamma = \sigma_T a n_e x_e, \quad (2.82)$$

em que σ_T é a seção de choque do espalhamento *Thomson*, a o fator de escala, n_e a densidade total do número de elétrons (que escala com a^{-3}) e x_e a fração de elétrons ionizados. O produto de $a n_e$ escala com a^{-2} e a fração de elétrons ionizados é $x_e \approx 1$ em alta energia. Dessa forma, na (re)combinação ¹⁶ que ocorre entre elétrons e núcleos (em torno de $z \approx 1100$), ocorrendo no início da era de dominação da matéria, n_e se mantém decaindo com a^{-3} , enquanto x_e decai de forma abrupta para valores pequenos. Tudo isso faz o espalhamento de *Thomson* se tornar ineficiente e os fótons passam a não interagir mais com os elétrons (momento conhecido como desacoplamento), tornando o Universo transparente (também em torno de $z \approx 1100$). Por outro lado, elétrons e bárions continuam fortemente acoplados pela interação coulombiana. Agora o sistema complexo entre elétrons-bárions-fótons, que era fortemente acoplado se separa em duas componentes: elétrons-bárions e fótons.

O Universo antes da recombinação era opaco, tornando-se transparente após a recombinação. Antes da recombinação $\Gamma \gg a'/a$. A queda abrupta de x_e durante a recombinação torna o

¹⁶ É o momento em que o componente bariônico do Universo deixa de ser ionizado para ser neutro, i. é., os elétrons livres se combinam com prótons pra formar átomos neutros. O termo recombinação é unânime em quase toda literatura, mas segundo alguns cosmólogos deveria ser chamado de “época da combinação”, já que é a primeira vez que elétrons e prótons se combinam para formar átomos estáveis.

universo transparente, com $\Gamma \ll a'/a$. Devido a diluição que ocorre em n_e o Universo continua transparente durante a reionização (que ocorre em torno de $z \sim 10$ por conta da formação estelar). A maioria dos fótons emitidos na recombinação não interagem mais e nos permite observar as anisotropias da última superfície de espalhamento. A profundidade óptica é dada por

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta \Gamma(\eta). \quad (2.83)$$

Esta representa a opacidade do Universo em um dado momento, sendo η o tempo conforme (quando vista hoje denotamos por $\eta = \eta_0$). No Universo primitivo, quando $\eta \rightarrow 0$, a profundidade óptica era extremamente alta devido à densidade elevada de elétrons livres, tornando o Universo opaco. Após a reionização, a opacidade diminuiu gradativamente à medida que o Universo se expandiu e esfriou, atingindo zero nos dias atuais por definição.

2.4.2.2 Equação de Boltzmann

No momento em que os fótons desacoplam dos elétrons (e, indiretamente, dos bárions acoplados a eles), em instantes próximos ao tempo da recombinação, não podem mais ser descritos por equações de fluidos, é necessário resolver a equação de *Boltzmann* (LESGOURGUES, 2013; DODELSON, 2003a)

$$\frac{df}{d\eta} = C[f, f_e] \quad (2.84)$$

para primeira ordem perturbativa. O lado direito da Equação 2.84 representa o termo de acoplamento fóton-elétron por conta do espalhamento *Thomson*. Tendo em vista que, os elétrons e bárions são fortemente acoplados é indiferente pensar como um termo de acoplamento fóton-elétron ou fóton-bárion. A resolução desta equação é complexa pois a distribuição do espaço de fase dos fótons $f(\eta, \vec{x}, \vec{p})$ envolve muitos argumentos. Enquanto os fótons estiverem em equilíbrio térmico com os elétrons (consequentemente também com os bárions), sua distribuição no espaço de fase é completamente descrita pela temperatura local de equilíbrio $T(\eta, \vec{x})$, que permite reduzir a dimensionalidade do problema e segue a distribuição de *Bose-Einstein*:

$$f(\eta, \vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{e^{\frac{p}{T(\eta, \vec{x})}} - 1}, \quad (2.85)$$

em que $f(\eta, \vec{x}, \vec{p})$ é a função de distribuição de fótons no espaço de fase, com dependência do tempo (η), da posição ($\vec{x}$) e do momento ($\vec{p}$). Enquanto $T(\eta, \vec{x})$ é a temperatura local do equilíbrio térmico e p é o módulo do momento do fóton. Considerando uma parte de fundo e um nível perturbativo de primeira ordem, temos: $f = \bar{f} + \delta f$, com

$$\bar{f}(\eta, p) = \frac{1}{e^{\frac{p}{\bar{T}(\eta)}} - 1} \quad (2.86)$$

e

$$\delta f(\eta, \vec{x}, \vec{p}) = \frac{d\bar{f}}{d \log p} \frac{\delta T(\eta, \vec{x})}{\bar{T}(\eta)}, \quad (2.87)$$

em que $\bar{f}(\eta, p)$ é a função de distribuição média de fótons em função do tempo η e do módulo do momento p ; $\bar{T}(\eta)$ é a temperatura média em equilíbrio térmico. Enquanto $\delta f(\eta, \vec{x}, \vec{p})$ representa uma pequena perturbação na função de distribuição devido a flutuações espaciais e temporais da temperatura; $\frac{d\bar{f}}{d \log p}$ é a derivada da função de distribuição média em relação ao logaritmo do momento e $\delta T(\eta, \vec{x})$ é a flutuação local da temperatura em relação à temperatura média $\bar{T}(\eta)$. Num regime que esteja fortemente acoplado (*tightly-coupling*), i.e., quando a taxa de espalhamento *Thomson* (Γ) é muito maior que a taxa de expansão do Universo (a'/a), podemos diminuir 1 dimensão substituindo a variável $f(\eta, \vec{x}, \vec{p})$ por $\Theta(\eta, \vec{x}) \equiv [\delta T(\eta, \vec{x})/\bar{T}(\eta)]$, levando a equação *Boltzmann* a uma equação de movimento para $\Theta(\eta, \vec{x})$.

Após o desacoplamento dos fótons, a forma da distribuição de *Bose-Einstein* permanece inalterada. Por outro lado, eles viajam em diferentes direções e geodésicas, experimentando diferentes *redshifting* ¹⁷. Como consequência, a função de distribuição dos fótons adquire um argumento adicional: a direção de propagação dos fótons, representada pelo vetor unitário $\hat{n}$, definido como $\hat{n} \equiv \vec{p}/p$. Assim,

$$f(\eta, \vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{e^{\frac{p}{T(\eta, \vec{x}, \vec{n})}} - 1}. \quad (2.88)$$

Agora, a equação de *Boltzmann* pode ser utilizada para obter uma equação de movimento para $\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n})$ e derivada no espaço de *Fourier* para a função $\Theta(\eta, \vec{k}, \hat{n})$. Esta não depende explicitamente de $\vec{k}$, nem de $\hat{n}$ por causa da isotropia estatística do Universo na métrica FLRW. A ocorrência disso é porque não há uma direção preferencial e a equação depende apenas da direção de propagação em relação ao número de onda, i. e., do produto escalar $(\vec{k} \cdot \hat{n})$. Dessa forma, podemos escrever uma equação do movimento em termos de k e também do ângulo θ em que $\vec{k} \cdot \hat{n} = k \cos \theta$. As condições iniciais para Θ tem dependência do vetor de onda $\vec{k}$, já que cada modo recebe condições iniciais aleatórias, com dependência apenas de θ e não depende de $\hat{n}$. Portanto, a dependência de $\hat{n}$ pode ser eliminada do problema e podemos resolver a equação de movimento para $\Theta(\eta, \vec{k}, \theta)$. Por fim, usando uma transformação de polinômios de *Legendre* podemos expandir a anisotropia de temperatura em relação a θ :

$$\Theta(\eta, \vec{k}, \theta) = \sum_{\ell} (-i)^{\ell} (2\ell + 1) \Theta_{\ell}(\eta, \vec{k}) P_{\ell}(\cos \theta), \quad (2.89)$$

em que Θ_{ℓ} representam os multipolos da anisotropia de temperatura da CMB e P_{ℓ} são os polinômios de *Legendre*. O monopolo Θ_0 está ligado à flutuação da densidade de fótons δ_{γ} , o dipolo Θ_1 à sua divergência de velocidade θ_{γ} e o quadrupolo Θ_2 ao estresse anisotrópico σ_{γ} . A equação de *Boltzmann* forma uma hierarquia infinita de equações de movimento para esses multipolos acoplados Θ_{ℓ} .

No espaço real, no calibre newtoniano a equação de movimento Θ , antes das expansões em *Fourier* e *Legendre*, é expressa notavelmente por

$$\Theta' + \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \Theta - \phi' + \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi = -\Gamma (\Theta - \Theta_0 - \hat{n} \cdot \vec{v}_e), \quad (2.90)$$

¹⁷ Refere-se ao alongamento do comprimento de onda dos fótons devido sua viagem pelo Universo em expansão.

em que Γ representa a taxa de espalhamento *Thomson* no tempo conforme, enquanto Θ_0 é o monopolo de anisotropia de temperatura (a média de $\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n})$ para todas as direções $\hat{n}$), e $\vec{v}_e$ é a velocidade dos elétrons, que é igual também à dos bárions em consequência da interação Coulomb. Por definição, a variável θ_b corresponde à divergência de $\vec{v}_b = \vec{v}_e$. Enquanto que ϕ' e ψ são relacionados aos graus de liberdade na métrica FLRW perturbada (veja a [subseção 3.1.4](#) para mais detalhes).

2.4.2.3 Mapa de anisotropias de temperatura da CMB

O mapa de anisotropias de temperatura que observamos hoje ($\eta = \eta_0$), ao olharmos numa direção $\hat{n}$ é representado por ([LESGOURGUES, 2013](#))

$$\frac{\delta T}{\bar{T}}(\hat{n}) = \Theta(\eta, \vec{x}_0, -\hat{n}), \quad (2.91)$$

em que o sinal negativo ($-$) indica que os fótons viajam em direção $-\hat{n}$ e $\vec{x}_0$ é a posição do observador, que é conveniente escolher a nossa localização no Universo sendo a origem ($\vec{x} = \vec{x}_0$). Nosso interesse é vincular essa quantidade às perturbações da última superfície de espalhamento que é observada na mesma direção $\vec{n}$. Para isso, basta integrar a equação de *Boltzmann* ao longo da linha de visão correspondente.

Para obter uma descrição do mapa de anisotropias de temperatura da CMB, é útil considerar a derivada total de uma função arbitrária $\mathcal{F}(\eta, \vec{x}, \hat{n})$ ao longo da trajetória dos fótons na direção $\hat{n}$, que é expressa por

$$\frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \vec{x}, \hat{n}) = \mathcal{F}' + \frac{dx_i}{d\eta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} + \frac{dn_i}{d\eta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n_i}. \quad (2.92)$$

Considerando que $\mathcal{F}$ seja um termo de primeira ordem perturbativa, os dois primeiros termos do lado direito da [Equação 2.92](#) são também de primeira ordem de perturbação. Enquanto que, o terceiro termo é de segunda ordem perturbativa, uma vez que o termo $\frac{dn_i}{d\eta}$ tem ordem um. No entanto, para um Universo sem perturbação (homogêneo e isotrópico) os fótons viajam em linha reta, isto é, com $\frac{dn_i}{d\eta} = 0$, que faria o lado direito da [Equação 2.92](#) ser reduzido a uma ordem linear. Portanto, para o termo $\frac{dx_i}{d\eta}$ é necessário apenas a contribuição de ordem zero, que assumindo um Universo homogêneo pode ser obtido por

$$\frac{dx_i}{d\eta} = \hat{n}_i, \quad (2.93)$$

em que os fótons estão viajando na direção $\hat{n}$, na velocidade da luz ($d\vec{x}^2 = d\eta^2$). Deste modo, a derivada total de $\mathcal{F}$ na primeira ordem perturbativa pode ser expressa por

$$\frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \vec{x}, \hat{n}) = \mathcal{F}' + \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{F}. \quad (2.94)$$

Aqui, é conveniente substituir a função genérica por $\mathcal{F}$ por

$$\mathcal{F}(\eta, \vec{x}, \hat{n}) = e^{-\tau(\eta)} (\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n}) + \psi(\eta, \vec{x})). \quad (2.95)$$

Logo, a derivada total é reescrita por

$$\frac{d}{d\eta} [e^{-\tau}(\Theta + \Psi)] = e^{-\tau} \left(\Theta' + \Psi' + \hat{n} \cdot \vec{\nabla}(\Theta + \Psi) \right) - \tau' e^{-\tau}(\Theta + \Psi). \quad (2.96)$$

Por outro lado, usando a equação de *Boltzmann* linearizada (Equação 2.90) e sabendo que $\tau' = -\Gamma$ obtemos

$$\frac{d}{d\eta} [e^{-\tau}(\Theta + \Psi)] = -e^{-\tau} \tau' (\Theta_0 + \Psi + \hat{n} \cdot \vec{v}_b) + e^{-\tau} (\phi' + \psi'). \quad (2.97)$$

Por fim, utilizando a função de visibilidade, definida por $g(\eta) = -e^{-\tau} \tau'$, podemos reescrever a Equação 2.97 por

$$\frac{d}{d\eta} [e^{-\tau}(\Theta + \Psi)] = g(\Theta_0 + \Psi + \hat{n} \cdot \vec{v}_b) + e^{-\tau} (\phi' + \psi'). \quad (2.98)$$

Fazendo a integração disso, resulta

$$(\Theta + \Psi)|_{\text{obs}} = \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta_0} d\eta [g(\Theta_0 + \Psi + \hat{n} \cdot \vec{v}_b) + e^{-\tau} (\phi' + \psi')], \quad (2.99)$$

onde a integração acontece ao longo da linha de visão, isto é, na direção $-\hat{n}$ vista pelo observador (oposta à direção de propagação dos fótons $\hat{n}$), iniciando num tempo anterior ao da recombinação (quando $e^{-\tau(\eta_{\text{ini}})} \approx 0$) até o tempo presente, quando os fótons atingem o observador (por definição: $e^{-\tau(\eta_0)} = 1$). A notação $(|_{\text{obs}})$ significa que foi avaliado na localização do observador.

Uma forma de simplificar a Equação 2.99 é usar a aproximação de desacoplamento instantâneo, assumindo que todos os fótons se desacoplam exatamente no tempo η_{dec} . Nesse caso, podemos substituir a função de visibilidade $g(\eta)$ pela função de *Dirac* $\delta_D(\eta - \eta_{\text{dec}})$ e $e^{-\tau}$ pela função de *Heaviside* $H(\eta - \eta_{\text{dec}})$. A normalização de $g(\eta) = \delta_D(\eta - \eta_{\text{dec}})$ é necessária, pois a definição de g exige que $\int g(\eta) d\eta = 1$. Assim, neste limite a Equação 2.99 assume a forma:

$$(\Theta + \Psi)|_{\text{obs}} = (\Theta_0 + \Psi + \hat{n} \cdot \vec{v}_b)|_{\text{dec}} + \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta (\phi' + \psi'), \quad (2.100)$$

onde a notação $(|_{\text{dec}})$ significa que foi avaliado na última superfície de espalhamento. A interpretação para cada termo é: $\Theta|_{\text{obs}}$ é a anisotropia de temperatura medida pelo observador na direção de $-\hat{n}$, enquanto que $\Theta_0|_{\text{dec}}$ é a anisotropia de temperatura no ponto da última superfície de espalhamento vista na mesma direção. Se apenas esses dois termos estivessem presentes, a anisotropia de temperatura observada seria igual à anisotropia intrínseca no ponto do último espalhamento dos fótons. O termo $\hat{n} \cdot \vec{v}_b|_{\text{dec}}$ representa a correção para essa temperatura devido ao efeito *Doppler*, causada pela velocidade do fluido bárion-fóton, que está fortemente acoplado até η_{dec} , projetada ao longo da linha de visão. Espera-se também uma correção para efeitos gravitacionais. O desvio para o vermelho e para o azul (*redshifting* e *blueshifting*) dos fótons que viajam ao longo das flutuações do potencial gravitacional pode influenciar diretamente a anisotropia de temperatura observada. No entanto, o potencial gravitacional varia com o tempo, fazendo com que o desvio gravitacional dos fótons (para *redshifting* ou *blueshifting*) num poço

potencial não seja compensado se o poço se aprofunda enquanto os fótons o atravessam. Isso explica o termo adicional $\int d\eta \psi$. Efeitos de dilatação ao longo da linha de visão também geram uma contribuição, expressado por $\int d\eta \phi$. Por fim, podemos ignorar o segundo termo à esquerda, porque ele representa apenas uma pequena correção isotrópica para as anisotropias observadas. Estas, do ponto de vista observacional é impossível medi-las apenas com o mapa da CMB. Pois equivale a uma redefinição de temperatura média $\bar{T}$, mas apenas uma quantidade da ordem de $10^{-5}\bar{T}$.

A equação [Equação 2.100](#) pode ser reescrita, separando cada uma das contribuições que foram mencionadas anteriormente e descartando a correção não observável:

$$\Theta|_{\text{obs}} = \underbrace{(\Theta_0 + \psi)_{\text{dec}}}_{\text{SW}} + \underbrace{\hat{n} \cdot \vec{v}_b|_{\text{dec}}}_{\text{Doppler}} + \underbrace{\int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta (\phi' + \psi')}_{\text{ISW}}. \quad (2.101)$$

O primeiro termo no lado direito da equação é chamado de termo *Sachs-Wolfe* (SW), que contém o termo de temperatura intrínseca Θ_0 , além do termo do efeito *Doppler* gravitacional ψ em um ponto da última superfície de espalhamento. O segundo termo representa o efeito Doppler convencional. Por fim, o último termo é chamado de termo *Sachs-Wolfe* Integrado (ISW), que contém todos os efeitos gravitacionais não conservativos que surgem em um universo com flutuações métricas dinâmicas.

2.4.2.4 Espectro das anisotropias de temperatura da CMB

O mapa de anisotropias de temperatura pode ser expandido em harmônicos esféricos e representado por ([LESGOURGUES, 2013](#); [WANDS](#); [PIATTELLA](#); [CASARINI, 2016](#); [OFFRINGA et al., 2021](#); [DURRER, 2008](#); [DODELSON](#); [SCHMIDT, 2021b](#))

$$\frac{\delta T}{\bar{T}}(\hat{n}) = \Theta(\eta, \vec{x}_0, -\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}). \quad (2.102)$$

Da expansão em polinômios de *Legendre* introduzida para Θ ([Equação 2.89](#)) e utilizando relações matemáticas entre polinômios de *Legendre* e harmônicos esféricos, $a_{\ell m}$ pode ser expresso como uma função de Θ_ℓ :

$$a_{\ell m} = (-i)^\ell \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\pi^2} Y_{\ell m}(\hat{k}) \Theta_\ell(\eta_0, \vec{k}), \quad (2.103)$$

em que $\hat{k} \equiv \vec{k}/k$. Usando a relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, é possível determinar a função de correlação de dois pontos (2-pontos) dos $a_{\ell m}$ como uma função do espectro de potência de Θ_ℓ , ou ainda, do espectro de potência da curvatura primordial:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'}^K \delta_{m m'}^K \left[\frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \Theta_\ell^2(\eta_0, k) \mathcal{P}_R(k) \right], \quad (2.104)$$

$\delta_{\ell \ell'}^K$ e $\delta_{m m'}^K$ representa o delta de *Kronecker*. O termo $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle$ desaparece quando $\ell \neq \ell'$ ou $m \neq m'$, que deve ao fato da isotropia e homogeneidade do Universo. Por outro lado, temos que

o espectro de potência de anisotropias de temperatura no espaço harmônico (ou simplesmente espectro da anisotropia da CMB), C_ℓ , é definido por

$$C_\ell \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \Theta_\ell^2(\eta_0, k) \mathcal{P}_R(k), \quad (2.105)$$

em que $\mathcal{P}_R(k)$ é espectro de potência da curvatura primordial. Para um Universo com perturbações lineares e gaussianas¹⁸, os C_ℓ contêm todas as informações cosmológicas relevantes presentes no mapa de temperatura da CMB.

As anisotropias são observadas no Universo em apenas uma realização e os mapas da CMB medem um valor definido para cada $a_{\ell m}$. Dessa forma, não é esperado que os $|a_{\ell m}|^2$ sejam iguais a C_ℓ , existirá alguma dispersão em torno de $a_{\ell m}$. No entanto, a dispersão pode ser reduzida notando que para ℓ fixo, a distribuição estatística de $|a_{\ell m}|^2$ independe de m , devido a isotropia e conforme é descrito na [Equação 2.105](#). Portanto, um experimento ideal da CMB que observa o céu completo, em que cada multipolo ℓ corresponde a uma escala angular específica de anisotropias da CMB, o melhor estimador dos C_ℓ subjacentes é a média de todos os coeficientes observados $|a_{\ell m}|^2$ para um ℓ fixo,

$$C_\ell^{obs} \equiv \langle |a_{\ell m}^{obs}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{-\ell \leq m \leq \ell} |a_{\ell m}^{obs}|^2. \quad (2.106)$$

Em um Universo típico (homogêneo e isotrópico em largas escalas), calculando a média dos $|a_{\ell m}|^2$ para todos os m associados a um ℓ fixo, esta deve se aproximar do valor verdadeiro do C_ℓ subjacente, matematicamente,

$$\hat{C}_\ell \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{-\ell \leq m \leq \ell} |a_{\ell m}|^2. \quad (2.107)$$

Ao determinar médias conforme a [Equação 2.104](#), é possível obter que para os $a_{\ell m}$ gaussianos,

$$\langle \hat{C}_\ell \rangle = C_\ell \quad \text{e} \quad \langle (\hat{C}_\ell - C_\ell^{obs})^2 \rangle = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2, \quad (2.108)$$

em que a média de $|a_{\ell m}|^2$ para um dado ℓ está relacionada diretamente a C_ℓ , enquanto a dispersão estatística das flutuações é reduzida quando consideramos todos os modos m associados a ℓ . Podemos combinar a [Equação 2.108](#) e expressa-la por

$$\left\langle \left(\frac{\hat{C}_\ell - C_\ell^{obs}}{\hat{C}_\ell} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{2\ell + 1}, \quad (2.109)$$

que é conhecida como *variância cósmica*. Esta é grande para medições de ℓ pequenos tornando-se os C_ℓ imprecisos em baixo ℓ .

De acordo com a [Equação 2.105](#), a forma do espectro da CMB C_ℓ tem dependência com o quadrado da função de transferência $\Theta_\ell(\eta_0, k)$ em um espectro primordial. No espaço de *Fourier*, pode ser elaborada uma abordagem semelhante ao da [Equação 2.99](#), resultando em:

$$\Theta_\ell(\eta_0, k) = \int_{\eta_{ini}}^{\eta_0} d\eta S_T(\eta, k) j_\ell(k(\eta_0 - \eta)), \quad (2.110)$$

¹⁸ Na teoria de perturbação linear Θ_ℓ e $a_{\ell m}$ são variáveis aleatórias gaussianas.

sendo

$$S_T(\eta, k) \equiv \underbrace{g(\Theta_0 + \psi)}_{\text{SW}} + \underbrace{(g k^{-2} \theta_b)'}_{\text{Doppler}} + \underbrace{e^{-\tau}(\phi' + \psi')}_{\text{ISW}}. \quad (2.111)$$

$\Theta_\ell(\eta_0, k)$ representa a convolução de funções esféricas de *Bessel* $j_\ell(x)$ com uma função $S_T(\eta, k)$, em que a [Equação 2.111](#) é denominada de *função de fonte de temperatura*. Esta contém os três termos usuais já mencionados antes: *Sachs-Wolfe*, *Doppler* e *Sachs-Wolfe* Integrado. Agora considerando a aproximação de desacoplamento instantâneo, reescrevemos $\Theta_\ell(\eta_0, k)$ por

$$\Theta_\ell(\eta_0, k) \simeq [\Theta_0(\eta_{\text{dec}}, k) + \psi(\eta_{\text{dec}}, k)] j_\ell(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) + k^{-1} \theta_b(\eta_{\text{dec}}, k) j'_\ell(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) + \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta [\phi'(\eta, k) + \psi'(\eta, k)] j_\ell(k(\eta_0 - \eta)). \quad (2.112)$$

O resultado desta aproximação pode ser inserido na [Equação 2.105](#) afim de obter o espectro final dos C_ℓ .

A contribuição no efeito *Sachs-Wolfe* é dada pelo produto do espectro primordial com a função de transferência ao quadrado:

$$C_\ell^{\text{SW}} \sim [\Theta_0(\eta_{\text{dec}}, k) + \psi(\eta_{\text{dec}}, k)]^2 \mathcal{P}_R(k), \quad k \simeq \frac{\ell}{(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})}, \quad (2.113)$$

avaliando no momento do desacoplamento e para números de onda na vizinhança de $k = \frac{l}{(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})}$, ainda podemos reescrever por

$$C_\ell^{\text{SW}} \sim \langle |\Theta_0 + \psi|^2 \rangle_{(\eta, k) \simeq (\eta_{\text{dec}}, \ell/(\eta_0 - \eta_{\text{dec}}))}. \quad (2.114)$$

De forma similar, a contribuição para o efeito *Doppler* é dada por

$$C_\ell^{\text{Doppler}} \sim \langle |\theta_b|^2 \rangle_{(\eta, k) \simeq (\eta_{\text{dec}}, \ell/(\eta_0 - \eta_{\text{dec}}))}. \quad (2.115)$$

Enquanto que, a contribuição para o efeito *Sachs-Wolfe* integrado é expressa por

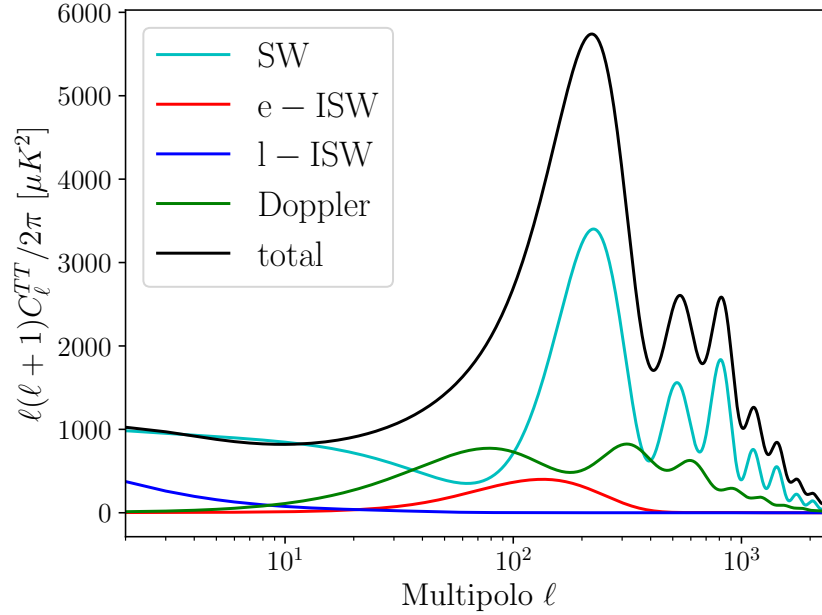
$$C_\ell^{\text{ISW}} \sim \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta (\eta_0 - \eta) \langle |\phi' + \psi'|^2 \rangle_{(\eta, k) \simeq (\eta, \ell/(\eta_0 - \eta))}. \quad (2.116)$$

A [Figura 2.8](#) mostra o espectro de potência das anisotropias da CMB contendo diferente contribuições dos efeitos: SW, ISW (ISW recente (e-ISW) e ISW tardio (l-ISW)), *Doppler* e o total, para o modelo Λ CDM com parâmetros cosmológicos ajustados de acordo com [PLANCK Collaboration et al. \(2020c\)](#).

2.4.2.5 A influencia de parâmetros cosmológicos no espectro de potência da CMB

O espectro de potência primordial contém informações sobre o Universo primordial. Os modelos mais simples preveem perturbações primordiais quase adiabáticas e o espectro de

Figura 2.8 – Espectro de potência de anisotropias da CMB, mostrando diferentes contribuições. A linha na cor verde clara representa a contribuição do efeito *Sachs-Wolfe*; A linha na cor azul representa a contribuição tardia do efeito *Sachs-Wolfe*; A linha na cor vermelha representa a contribuição recente do efeito *Sachs-Wolfe*; A linha na cor verde representa a contribuição do efeito Doppler e a linha na cor preta contém todas as contribuições somadas, que representa o próprio espectro total das anisotropias de temperatura da CMB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

potência praticamente invariante de escala. Nesses modelos, o espectro de potência primordial é assumido por (PAYKARI *et al.*, 2014; LESGOURGUES, 2013):

$$\mathcal{P}_R(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}, \quad (2.117)$$

em que A_s é a amplitude de perturbações, n_s é o índice espectral, k é o número de onda, e k_* é uma escala arbitrária.

Um modelo Λ CDM plano mínimo pode ser parametrizado por seis parâmetros livres e podemos escolher (LESGOURGUES, 2013):

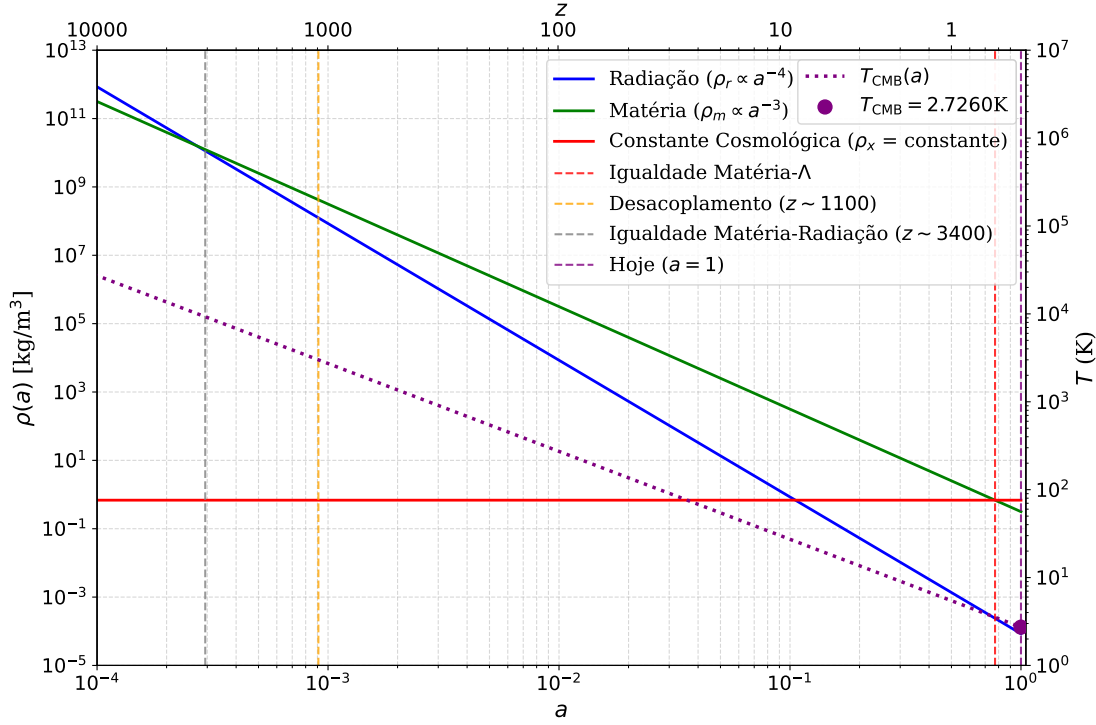
$$\{A_s, n_s, \omega_b, \omega_m, \Omega_x, \tau_{\text{reio}}\}, \quad (2.118)$$

em que τ_{reio} representa a profundidade óptica na recombinação, Ω_x é o parâmetro de densidade de energia escura, ω_b é a densidade física da matéria bariônica e ω_m é a densidade física de matéria total no universo (que inclui matéria bariônica (ω_b) e matéria escura (ω_c)). A forma do espectro da CMB é diretamente relacionada à esses parâmetros.

A Figura 2.9 mostra a evolução das densidades de *background* para um modelo Λ CDM plano mínimo.

Na Tabela 2.2, resumimos os oito principais efeitos físicos, entre diversos outros, indicando os parâmetros que os governam. As principais características são listadas nos tópicos a

Figura 2.9 – Evolução das densidades de radiação, de matéria e da constante cosmológica em função do fator de escala a , para o modelo cosmológico Λ CDM. As escalas de *redshift* z correspondentes são mostradas no eixo superior. Enquanto, no eixo vertical direito mostra uma escala de temperatura em *Kelvin* (K). As linhas verticais indicam eventos chave na história do universo: o desacoplamento da radiação ($z \sim 1100$), a igualdade entre matéria e radiação ($z \sim 3400$), a igualdade entre a matéria e a constante cosmológica e o valor atual do fator de escala ($a = a_0 = 1$). O gráfico também exibe a temperatura da CMB como função do fator de escala, com o ponto correspondente à temperatura $T_{\text{CMB}} = 2.7260$ K no presente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

seguir ¹⁹:

- **(C1) – Escala de pico / Primeiro pico acústico:** Os picos acústicos no espaço multipolar tem correspondência aos harmônicos de um único comprimento de correlação no espaço real, cuja escala é controlada por ℓ_{pico} . Este parâmetro é proporcional a razão entre a distância do horizonte sonoro e da distância de diâmetro angular no desacoplamento. O horizonte sonoro é influenciado por ω_m (que afeta o tempo de igualdade entre a matéria e a radiação) e ω_b (afeta a velocidade do som). A distância de diâmetro angular está relacionada à expansão e geometria do universo após o desacoplamento, que envolve Ω_x , H_0 ou ω_m .
- **(C2) – Razão entre as amplitudes de picos ímpares e pares:** Ao estudar a contribuição do efeito *Sachs-Wolfe* para os C_ℓ é observado que a diferença na amplitude entre os picos pares e ímpares é influenciada pelo deslocamento do ponto de equilíbrio das oscilações acústicas, causado por um termo $-R\psi$, em que R é definido por (EISENSTEIN; SEO;

¹⁹ Os C1 – C8 representam os códigos identificadores da Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Efeitos principais que controla a forma do espectro de potência de temperatura da CMB (C_ℓ) para um modelo Λ CDM plano mínimo.

Identificação	Efeito	Quantidade relevante	Parâmetro
(C1)	Escala de pico	$\theta_{\text{peak}} = \frac{\pi}{\ell_{\text{peak}}} \sim \frac{d_s _{\text{dec}}}{d_a _{\text{dec}}}$	$\leftarrow \omega_m, \omega_b$ $\leftarrow \Omega_x, \omega_m$
(C2)	Razão entre a amplitude de pico ímpar/par	$R _{\text{dec}}$	ω_b
(C3)	Amplitude geral dos picos	$\frac{a_{\text{dec}}}{a_0}$	ω_m, ω_b
(C4)	Envoltório de amortecimento	$\theta_d = \frac{\pi}{\ell_d} = \frac{a_{\text{dec}} r_d _{\text{dec}}}{d_a _{\text{dec}}}$	$\leftarrow \omega_m, \omega_b$ $\leftarrow \Omega_x, \omega_m$
(C5)	Amplitude global	$\mathcal{P}_R(k_*)$	A_s
(C6)	Inclinação global	$\frac{d \log \mathcal{P}_R}{d \log k}$	n_s
(C7)	Inclinação adicional do platô (I-ISW)	$\frac{a_x}{a_0} = \left(\frac{1-\Omega_x}{\Omega_x} \right)^{1/3}$	Ω_x
(C8)	Amplitude para $\ell \geq 40$	τ_{reio}	τ_{reio}

Fonte: Adaptada de [Lesgourgues \(2013\)](#).[WHITE, 2007](#))

$$R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}, \quad (2.119)$$

sendo dependente do parâmetro ω_b , que é relacionado à densidade de bárions.

- **(C3) – Amplitude geral dos picos:** Se houver uma mudança no tempo de equivalência entre a matéria e a radiação isso afeta a amplitude do picos devido a dois fatores:
 1. *A duração do estágio entre igualdade e desacoplamento:* Se a equivalência entre a matéria e a radiação ocorrer depois, terá menos tempo para o amortecimento das oscilações acústicas por efeitos bariônicos, consequentemente, todos os picos serão aumentados;
 2. *Efeito Sachs-Wolfe Integrado:* Se a igualdade ocorrer mais tarde, o primeiro pico terá um aumento ainda maior, pois as flutuações métricas são menos estabilizadas no desacoplamento.

Ambos os efeitos contribuem de forma consistente no aumento dos picos, mas sendo mais significativo no primeiro pico. Os parâmetros que mais contribuem diretamente são ω_m e ω_b .

- **(C4) – Envoltório de amortecimento:** O envelope dos picos acústicos é controlado pelo amortecimento de difusão próximo do tempo da recombinação. Esse efeito é dado pela função exponencial $\exp[-(\ell/\ell_d)^2]$, em que ℓ_d é o momento multipolar da difusão. Esse efeito depende da razão dos dois fatores a seguir:

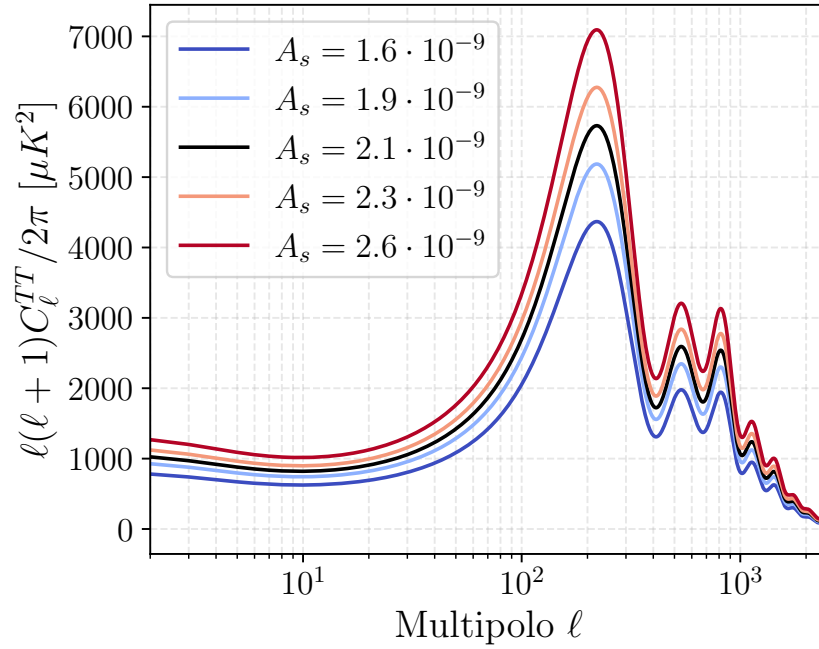
1. *Escala de amortecimento no desacoplamento*: É relacionado à taxa de espalhamento Thomson antes de acontecer o desacoplamento, tendo influência do parâmetros ω_m (que controla o tempo conforme na igualdade) e ω_b (que governa a fração de ionização como função a);
2. *Distância do diâmetro angular*: Depende da geometria e expansão do Universo após o desacoplamento, tendo influência dos parâmetros Ω_x e H_0 (ou simplesmente Ω_x e ω_m).

Note que, apesar das dependências serem semelhantes no horizonte sonoro, as combinações ω_m e ω_b são distintas. Esses efeito iniciam pelo terceiro pico acústico.

- **(C5) – Amplitude global**: A amplitude global dos picos dos C_ℓ dependem diretamente da amplitude do espectro primordial, dada pelo parâmetro A_s .
- **(C6) – Inclinação global**: A inclinação global dos picos dos C_ℓ dependem diretamente da inclinação do espectro primordial, dada pelo índice espectral n_s .
- **(C7) – Inclinação adicional do platô**: O efeito I-ISW (*Sachs-Wolfe* Integrado tardio) inclina o platô de *Sachs-Wolfe*, pela influência do índice espectral n_s . Esse platô é elevado para valores de ℓ pequenos correspondendo o momento que a dominância da energia escura é mais alta, devido as flutuações métricas decaírem por um intervalo de tempo maior. Portanto, esta característica é intensificada para valores elevados de Ω_x . No modelo ω CDM, o parâmetro ω_x afeta também esse platô.
- **(C8) – Amplitude para $\ell \geq 40$** : A amplitude dos C_ℓ será reduzida quando a reionização ocorrer mais cedo, consequentemente, para valores grandes de τ_{reio} . Por outro lado, as escalas maiores de ℓ permanece inalteradas.

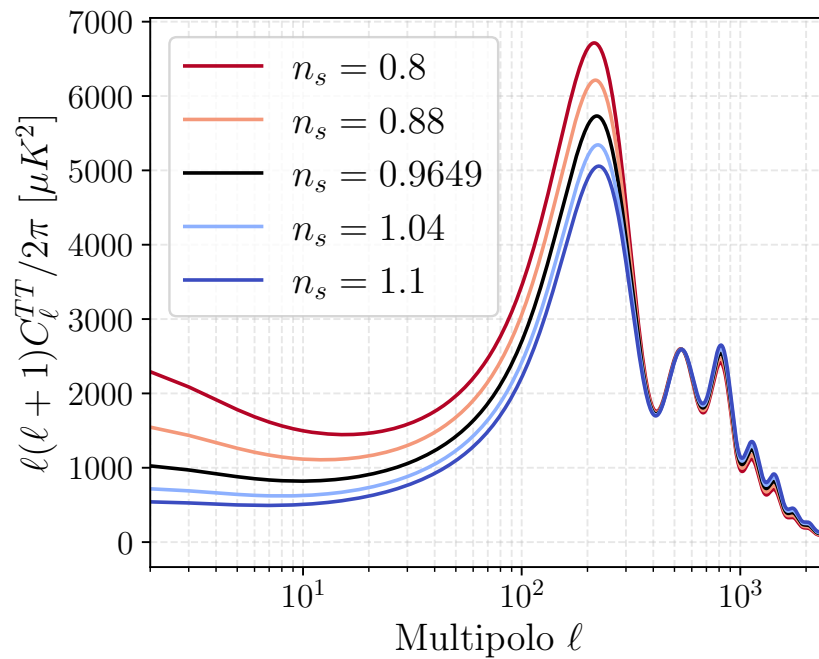
A [Figura 2.10](#) mostra a influencia do parâmetro A_s no espectro das anisotropias da CMB. Aqui evidencia que um aumento de A_s gera aumento global do picos. A [Figura 2.11](#) mostra a influencia do parâmetro n_s no espectro das anisotropias da CMB. Aqui evidencia uma inclinação no sentido anti-horário e um aumento do pico principal com uma diminuição de n_s . A [Figura 2.12](#) mostra a influencia do parâmetro ω_b no espectro das anisotropias da CMB. A medida que ω_b aumenta também a amplitude do primeiro pico acústico e inverte a escala no segundo pico acústico. A partir do terceiro pico entra em amortecimento. A [Figura 2.13](#) mostra a influencia do parâmetro ω_m no espectro das anisotropias da CMB. Aqui um aumento de ω_m diminui a amplitude geral do picos e ocorre um deslocamento no sentido anti-horário nos picos secundários. A [Figura 2.14](#) mostra a influencia do parâmetro Ω_x no espectro das anisotropias da CMB. A medida que Ω_x cresce também parece aumentar a amplitude geral dos picos. A [Figura 2.15](#) mostra a influencia do parâmetro τ_{reio} no espectro das anisotropias da CMB. Com o aumento de τ_{reio} diminui a amplitude, que parece ficar inalterada para $\ell < 40$.

Figura 2.10 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de A_s para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com [PLANCK Collaboration et al. \(2020c\)](#).



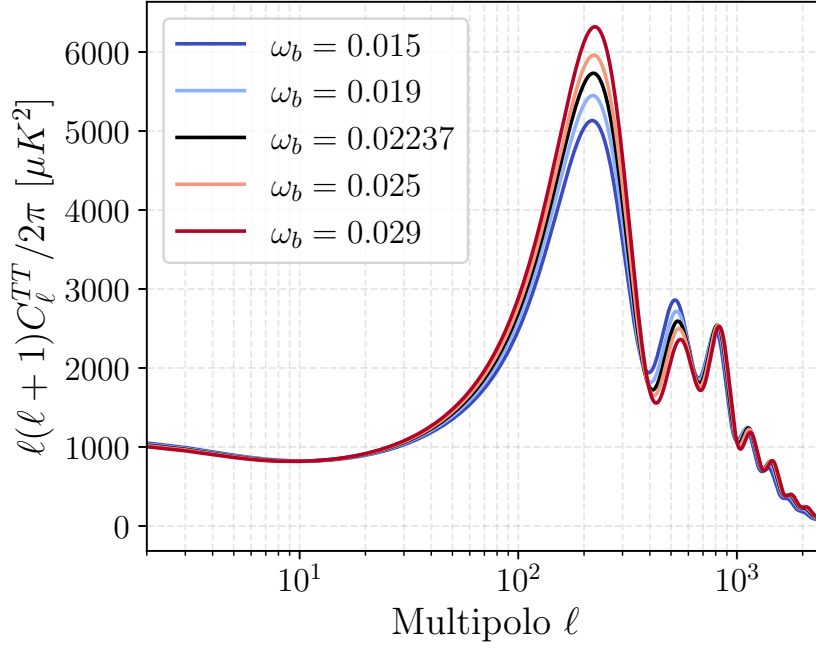
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.11 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de n_s para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com [PLANCK Collaboration et al. \(2020c\)](#).



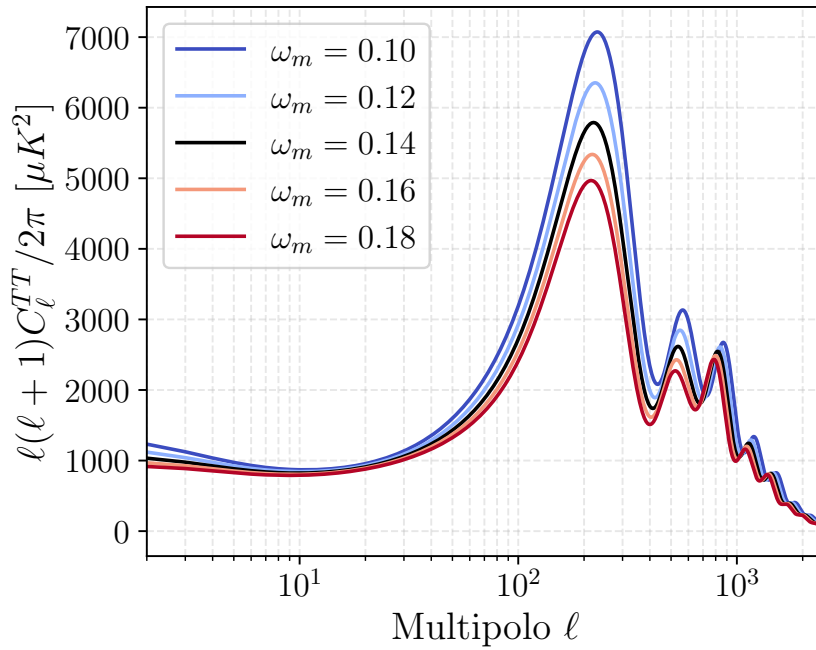
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.12 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de ω_b para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com [PLANCK Collaboration *et al.* \(2020c\)](#).



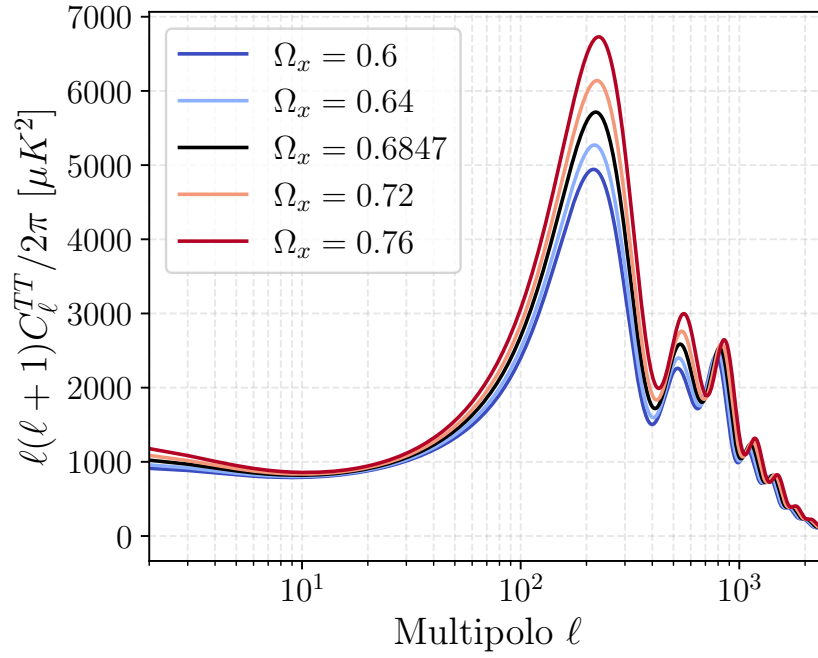
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.13 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de ω_m para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com [PLANCK Collaboration *et al.* \(2020c\)](#).



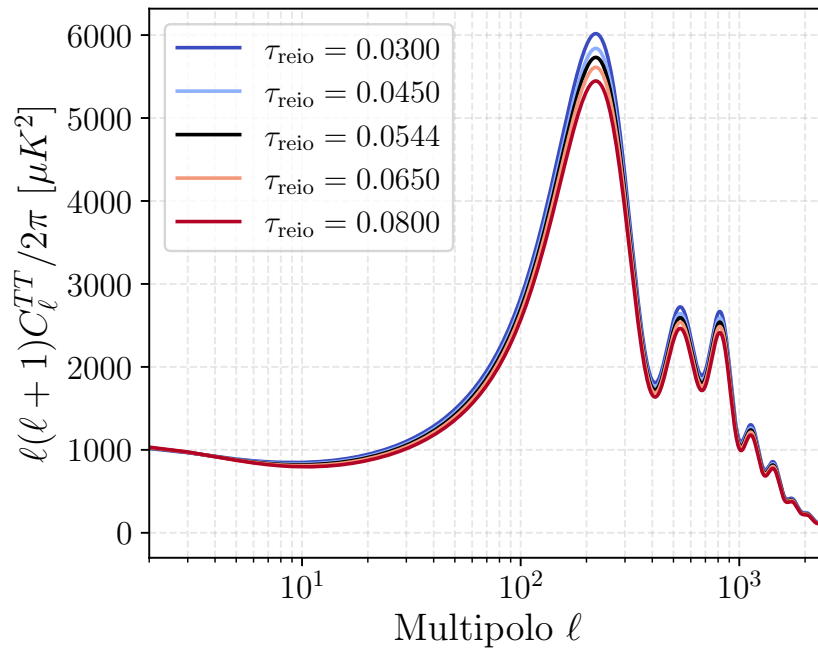
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.14 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de Ω_x para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com [PLANCK Collaboration et al. \(2020c\)](#).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.15 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de τ_{reio} para o modelo Λ CDM mínimo. A linha na cor preta representa o modelo Λ CDM, com os parâmetro fixados de acordo com [PLANCK Collaboration et al. \(2020c\)](#).



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.2.6 Espectro de potência de matéria

A densidade de matéria do Universo, $\rho(\vec{x}, a)$, pode ser decomposta por uma densidade de *background* constante (no espaço), $\bar{\rho}(a)$, e outra componente definida como o contraste de densidade, $\delta(\vec{x}, a)$, tal que (BARTLETT *et al.*, 2024; DODELSON, 2003b; MEIKSIN; WHITE, 1999; NORMAN, 2010; LESGOURGUES, 2013):

$$\rho(\vec{x}, a) = \bar{\rho}(a)[1 + \delta(\vec{x}, a)], \quad (2.120)$$

sendo o contraste de densidade definido por

$$\delta(\vec{x}, a) \equiv \frac{\rho(\vec{x}, a) - \bar{\rho}(a)}{\bar{\rho}(a)}. \quad (2.121)$$

As vezes o termo $(\rho(\vec{x}, a) - \bar{\rho}(a))$ pode ser mencionado por $\delta\rho(\vec{x}, a) = \rho(\vec{x}, a) - \bar{\rho}(a)$ em diferentes referências. Utilizando a transformada de *Fourier* podemos expressar $\delta(\vec{x}, a)$ como:

$$\delta(\vec{x}, a) = \int d^3k \delta(\vec{k}, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (2.122)$$

A partir da função de autocorrelação de $\delta(\vec{x}, a)$ é possível definir o espectro de potência por meio das relações

$$\langle \delta(\vec{x}, a) \delta(\vec{x}, a) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 |\delta^2(\vec{k}, a)|}{2\pi^2} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 P_A(k, a)}{2\pi^2} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_A(k, a) \quad (2.123)$$

com as seguintes definições

$$P_A(k, a) \equiv |\delta^2(\vec{k}, a)| \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_A(k, a) \equiv \frac{k^3 P_A(k, a)}{2\pi^2}. \quad (2.124)$$

A quantidade $\mathcal{P}_A(k, a)$ é conhecida como espectro de potência adimensional, fundamental na formação de estruturas; $P_A(k, a)$ é chamado de espectro de potência associado a quantidade A . Além disso, é conveniente utilizar o espectro de potência invariante de escala, pois no espaço real, a média para diversas quantidades geralmente expressa a convolução do espectro de potência com uma função de janela $f(k)$, levando à forma

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} P_A(k, a) f(k) = \int \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} P_A(k, a) f(k) = \int d\log k \mathcal{P}_A(k, a) f(k), \quad (2.125)$$

sendo que o espectro adimensional $\mathcal{P}_A(k, a)$ representa a contribuição de cada intervalo logarítmico na integral. No caso de um espectro invariante de escala o termo $\mathcal{P}_A(k, a)$ é independente de k , isto é, $P_A(k, a) \propto k^{-3}$.

A transformada de *Fourier* da função de correlação $\xi(r, a)$ pode ser definida como o espectro de potência $P(k, a)$ (veja a [seção B.4](#)). Assim :

$$P(k, a) = \int d^3r \xi(r, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (2.126)$$

Agora, substituímos isso na [Equação B.57](#):

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P(k, a). \quad (2.127)$$

Esta expressão relaciona as propriedades estatísticas do contraste de densidade no espaço de *Fourier* com o espectro de potência.

O espectro de potência para um dado momento e considerando perturbações lineares pode ser escrito como o produto do espectro primordial pelo quadrado da função de transferência, que em nosso caso é $\delta(\vec{k}, a) \equiv \delta_m(\vec{k}, a)$. Assumindo o espectro primordial dado na [Equação 2.117](#), temos o espectro de potência da matéria

$$P(k, a) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \delta_m^2(k, a). \quad (2.128)$$

Portanto, ao fazer estudos qualitativos da evolução da função de transferência $\delta_m(k, a)$, podemos ter uma melhor compreensão das informações cosmológicas codificadas no espectro de potência da matéria.

2.5 Problemas do modelo padrão Λ CDM

O modelo Λ CDM é considerado o modelo padrão da cosmologia moderna, que tem alicerces em pilares de aspectos observacionais, quanto em aspectos teóricos. Apesar do grande sucesso observacional, a exemplo da boa descrição na expansão acelerada do Universo, nucleossíntese primordial, CMB etc. ele apresenta diversos problemas ou comportamentos estranhos ([ELLIS et al., 2011](#); [WEINBERG, 1989a](#); [SAMI, 2009](#); [VELTEN](#); [MARTTENS](#); [ZIMDAHL, 2014](#); [JÚNIOR et al., 2024](#); [LOMBRISER, 2023](#)), vamos mencionar alguns destes a seguir

O problema da constante cosmológica: A constante cosmológica que é representada por Λ , continua sendo a candidata mais simples que representa a componente de energia escura. Ela está teoricamente associada aos estados de vácuos quânticos que existe no Universo. No entanto, do ponto de vista observacional está associada a densidade de energia de vácuo, cujo valor observacional é da ordem ([ELLIS et al., 2011](#); [WEINBERG, 1989a](#); [MARTTENS et al., 2019](#); [SAMI, 2009](#); [JÚNIOR et al., 2024](#))

$$\rho_x \simeq 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (2.129)$$

Por outro lado, o valor associado aos campos quânticos pela teoria quântica, descrito por osciladores de massa m , em ordem de grandezas tem seu valor dado por

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} = \frac{k_{\text{max}}^4}{16\pi^2} \simeq 2 \times 10^{71} \text{GeV}^4, \quad (2.130)$$

com diferença em torno de 118 vezes em ordem de grandezas, uma das maiores diferenças encontradas no campo da física.

O problema da coincidência cósmica não chega ser exatamente um problema, mas um questionamento motivado pelo fato da densidade de energia da matéria ser da mesma ordem de grandeza que a densidade de energia da energia escura atualmente. Elas são relacionadas por (VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014; JÚNIOR *et al.*, 2024; CHIMENTO *et al.*, 2003; MARTTENS *et al.*, 2019; SHIMON, 2024)

$$\frac{\rho_m}{\rho_x} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{x0}} a^{-3}, \quad (2.131)$$

em que para o tempo atual, t_0 , implica $a(t_0) = 1$. Na história cósmica, este valor foi adquirido “recentemente” por conta da dependência com o fator de escala a (ou z). Por outro lado, a igualdade entre a densidade de matéria e a densidade de energia escura ocorreu em $z_{eq} \approx 0.33$ (cerca de 5 bilhões de anos atrás) o que não é tão recente se pensarmos em anos. No entanto, esta razão entre as densidades no Universo primordial quanto na evolução futura distante, diferem em muitas ordens de grandezas, variando de quase infinito a zero no modelo Λ CDM, enquanto no “momento atual” (janela cosmológica atual) tende a ser 1.

No modelo Λ CDM, é previsto que os fluidos cósmicos não podem interagir entre si, ou seja, possuem dinâmica independentes. Já nas classes de modelos interativos, as densidades de energia escura e matéria escura são acopladas, podendo influenciar na dinâmica de formação de estruturas e amenizar essa coincidência. Há ainda abordagens que consideram que a coincidência cósmica não representa necessariamente um problema.

Os problemas das tensões em H_0 e σ_8 : A tensão na constante de *Hubble* surge do fato de que, atualmente, diferentes dados cosmológicos indicam valores distintos para a constante de *Hubble*, sendo que os dados derivados de cefeidas e supernovas do tipo Ia fornecem valores mais altos do que aqueles relacionados às flutuações da radiação cósmica de fundo (CMB), com discrepâncias que variam entre $4\sigma - 6\sigma$ C.L. (JÚNIOR *et al.*, 2024; BENGALY *et al.*, 2023; CAPOZZIELLO; SARRACINO; SOMMA, 2024; LEMOS; LEWIS, 2023). Por outro lado, uma discrepância, em torno de 3σ C.L., pode ser observada na amplitude atual das flutuações de densidade da matéria (σ_8) (LOMBRISER, 2023) entre o levantamento de estruturas em largas escalas (KiDS-1000 (HEYMANS *et al.*, 2021)) e os resultados primários da CMB do *Planck* 2018 (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c); entre outras tensões.

O problema do lítio: este surge pela discrepância entre o valor que é medido em estrelas antigas e pobres em metalicidade encontradas no halo da nossa Galáxia e o valor previsto pela nucleossíntese primordial, que é 3 vezes maior (HOU *et al.*, 2017).

Devido a esses e outros problemas com o modelo padrão Λ CDM, há diversos modelos e abordagens tentando melhor descrever a natureza da energia escura.

DINÂMICA DE *BACKGROUND* E METODOLOGIA

“A mente talvez seja simplesmente pequena demais para compreender a mente”
(Colin McGinn)

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo matemático para descrever o modelo de interação do setor escuro do Universo, com foco num modelo de interação com acoplamento quadrático, além de descrever brevemente os conjuntos de dados observacionais utilizados e toda metodologia envolvendo a análise estatística.

3.1 Descrição matemática para o modelo de interação de energia escura

Nesta seção, vamos apresentar o formalismo matemático e dinâmica para os modelos de interação de energia escura.

3.1.1 Formalismo geral

O nível de *background* do Universo com distribuição espacial plana que obedeça o PC, com a métrica FLRW e usando a lei de conservação descrita em [Equação 2.8](#), com a definição de $c \equiv 1$ daqui por diante, podemos reescrevê-la por ([MARTTENS *et al.*, 2019](#); [LIMA, 2020](#)):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (3.1)$$

Assumiremos que o conteúdo energético do Universo seja composto somente por: radiação, bárions, matéria escura e energia escura, em que os subíndices: r , b , c e x , respectivamente, representam os parâmetros da equação de estado: $\omega_r = 1/3$ (radiação), $\omega_b = 0$ (bárions), $\omega_c = 0$

(matéria escura) e $\omega_x = -1$ (energia escura). Dessa maneira, a densidade de energia total do Universo e a pressão são dadas por:

$$\rho = \rho_r + \rho_b + \rho_c + \rho_x \quad (3.2)$$

e

$$P = P_r + P_x. \quad (3.3)$$

Uma vez que o parâmetro de densidade de energia tem sua definição dada pela razão entre densidade de energia e a densidade de energia crítica:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{cr}(t)} = \frac{8\pi G\rho_i}{3H(t)^2}, \quad (3.4)$$

é conveniente expressarmos em termos dos parâmetros de densidades de energia:

$$\Omega_r + \Omega_b + \Omega_c + \Omega_x = 1. \quad (3.5)$$

A radiação e a matéria de bárions evoluem por

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad \implies \quad \rho_r = \rho_{r0}a^{-4} \quad (3.6)$$

e

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad \implies \quad \rho_b = \rho_{b0}a^{-3}. \quad (3.7)$$

No campo da física, a equação de *Boltzmann* pode ser utilizada para descrever uma interação ([KREMER, 2014](#); [DODELSON](#); [SCHMIDT, 2021a](#)):

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (3.8)$$

em que f é uma função de distribuição e o coeficiente $C[f]$ representa todos os termos de colisão desta interação. Este termo, de modo geral, é utilizado para descrever seções de choque associadas à física de cada partícula em questão.

Por outro lado, temos que a natureza do setor escuro do Universo ainda é desconhecida. Assim, não faria sentido utilizar seções de choque para descrever partículas do setor escuro, exceto quando se trabalha com extensão do modelo padrão de partículas (ex.: supersimetria, *axions*, WIMPs ¹ etc.) ([JUNGMAN](#); [KAMIONKOWSKI](#); [GRIEST, 1996](#); [BODDY et al., 2014](#)). Portanto, de forma alternativa a descrição da interação do setor escuro, assumindo uma natureza fenomenológica, pode ser dada por meio de uma derivada covariante do tensor momento-energia

$$T_{x;\nu}^{\mu\nu} = -T_{c;\nu}^{\mu\nu} = Q^\mu, \quad (3.9)$$

em que o termo Q^μ trata-se de um quadri vetor que atua como uma fonte do tensor momento-energia; os termos $T_c^{\mu\nu}$ e $T_x^{\mu\nu}$ são tensores momento-energia para matéria escura e energia

¹ Do inglês: Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs).

escura, respectivamente. Em um fluido perfeito, as componentes espaciais perante à uma derivada covariante do tensor momento-energia são nulas, consequentemente, no *background*, o termo de interação é dada por uma função escalar (MARTTENS *et al.*, 2019; MARTTENS *et al.*, 2020; MARTTENS *et al.*, 2021; LIMA, 2020; MARTTENS; BARBOSA; ALCANIZ, 2023)

$$Q^\mu = (Q, \vec{0}). \quad (3.10)$$

Dessa maneira, a lei de conservação de energia em termos das componentes de matéria escura e energia escura do *background* torna-se, respectivamente,

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -Q \quad (3.11)$$

e

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x(1 + \omega_x) = Q. \quad (3.12)$$

No caso em que $\omega_x = -1$, esta última é reduzida à $\dot{\rho}_x = Q$. As equações 3.11 e 3.12 podem ser entendidas como uma transferência de energia entre as componentes do setor escuro. A direção do fluxo desta transferência depende do sinal de Q , quando $Q < 0$, o processo da criação da matéria escura é aumentado e energia escura é decaído, mas quando $Q > 0$ acontece o oposto.

Neste trabalho, estamos interessados nas interações que possuem o termo de interação da forma

$$Q = 3H\gamma F(\rho_c, \rho_x), \quad (3.13)$$

onde γ é um parâmetro adimensional (o parâmetro de interação) e F é uma função real de ρ_c e ρ_x e possui uma dimensão de densidade de energia. Logo, as equações 3.11 e 3.12 podem ser reescritas por

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c \left(\gamma \frac{F}{\rho_c} + 1 \right) = 0; \quad (3.14)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x \left(1 + \omega_x - \gamma \frac{F}{\rho_x} \right) = 0. \quad (3.15)$$

Note que as equações acima são acopladas e $F(\rho_c, \rho_x)$ corresponde à uma função geral com dependência de ρ_c e ρ_x . Quando trata-se de modelos com parâmetro da equação de estado $\omega_x = -1$ a Equação 3.15 é reduzida para:

$$\dot{\rho}_x - 3\gamma HF = 0. \quad (3.16)$$

Aqui é conveniente definir a razão entre a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura por:

$$r \equiv \frac{\rho_c}{\rho_x}, \quad (3.17)$$

daí, fazendo a derivada temporal da [Equação 3.17](#) é fornecido:

$$\dot{r} = r \left(\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c} - \frac{\dot{\rho}_x}{\rho_x} \right). \quad (3.18)$$

Dessa maneira, fazendo a combinação entre as equações [3.14](#) e [3.18](#) é obtida uma equação de balanço de energia unificada em termos de r :

$$\dot{r} + 3Hr \left(\gamma F \frac{\rho_c + \rho_x}{\rho_c \rho_x} - \omega_x \right) = 0. \quad (3.19)$$

A [Equação 3.19](#) pode ser usada para desacoplar as equações [3.14](#) e [3.15](#) sempre que houver uma solução analítica para $r = r(a)$. Para encontrar soluções analíticas para ρ_c e ρ_x requer considerarmos

$$f(r) \equiv F \frac{\rho_c + \rho_x}{\rho_c \rho_x}, \quad (3.20)$$

de maneira que, $f(r)$ seja uma função apenas de r . A partir disso, podemos reescrever o termo de interação dado na [Equação 3.13](#) por

$$Q = 3H\gamma \frac{\rho_c \rho_x}{\rho_c + \rho_x} f(r). \quad (3.21)$$

Dessa forma, a [Equação 3.19](#) pode ser reescrita por

$$\dot{r} + 3Hr \left[\gamma f(r) - \omega_x \right] = 0. \quad (3.22)$$

Nosso interesse aqui é na classe de modelos no qual possuem uma solução analítica para $r = r(a)$ que dependa apenas do fator de escala a . Deste modo, a interação $F(\rho_c, \rho_x)$ em termos do fator de escala e também em termos apenas de uma das densidades de energia (densidade matéria escura e/ou energia escura)

$$F = \frac{f(r)}{1+r} \rho_c \quad \text{ou} \quad F = \frac{f(r)}{1+r^{-1}} \rho_x. \quad (3.23)$$

Em consequência, as equações [Equação 3.14](#) e [Equação 3.15](#) de balanço de energia do setor escuro podem ser reescritas de modo separado por

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c \left(\gamma \frac{f(r)}{1+r} + 1 \right) = 0 \quad (3.24)$$

e

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x \left(1 + \omega_x - \gamma \frac{f(r)}{1+r^{-1}} \right) = 0. \quad (3.25)$$

A função $f(r)$ pode possuir características gerais de acordo com [Yang, Pan e Barrow \(2018\)](#). No entanto, aqui, assumiremos um tratamento no qual o termo de interação é dado da seguinte forma

$$Q = 3H\gamma\rho_c^\alpha\rho_x^\beta(\rho_c + \rho_x)^\sigma, \quad (3.26)$$

com a relação $\alpha + \beta + \sigma = 1$ precisando ser satisfeita, devido as unidades. Daí, a [Equação 3.26](#) assume a seguinte forma²

$$f(r) = r^{\alpha-1} (r+1)^{\sigma+1}. \quad (3.27)$$

Quando σ é número inteiro, a [Equação 3.26](#) pode ser obtida por meio de uma função $f(r)$ que trata-se de uma lei de potência e esta pode ser derivada a partir da série binomial de *Newton*,

$$f(r) = r^{\alpha-1}, \quad (3.28)$$

quando $\sigma = -1$ e

$$f(r) = \sum_{i=0}^{|\sigma+1|} \binom{|\sigma+1|}{i} r^{\alpha-1+i}, \quad (3.29)$$

quando $\sigma \neq -1$.

3.1.2 Descrição unificada de modelos de interação

Os modelos com termo de interação dada por [Equação 3.13](#) podem ser descritos de forma unificada, em que podemos combinar as componentes de matéria escura e energia escura num fluido conservativo, com equação de estado descrita por

$$P_d = \omega_d(a) \rho_d, \quad (3.30)$$

o subíndice d (de *dark*) representa a componente escura do fluido. Enquanto que as densidades de energia e pressão são dadas por

$$\rho_d = \rho_c + \rho_x \quad (3.31)$$

e

$$P_d = P_c + P_x = P_x. \quad (3.32)$$

A densidade de energia deste fluido escuro pode ser reescrita em termos de r e com apenas uma das densidades ρ_c ou ρ_x , respectivamente,

$$\rho_d = \left(\frac{1+r}{r} \right) \rho_c \quad \text{ou} \quad \rho_d = (1+r) \rho_x. \quad (3.33)$$

Das equações 3.31 e 3.33, podemos escrever uma relação geral para a pressão³:

$$P_d = \frac{\omega_x}{1+r} \rho_d. \quad (3.34)$$

Mas, uma observação importante é que a [Equação 3.30](#) só é válida somente se existir uma solução analítica para r e que dependa apenas do fator de escala a , portanto,

$$\omega_d(a) = \frac{\omega_x}{1+r(a)}. \quad (3.35)$$

² Neste contexto α , β e σ representam apenas números no expoente da [Equação 3.26](#). Não confundir com ângulos ou incertezas de outras partes do texto.

³ Porque temos: $P_x = \omega_x \rho_x = P_d$.

Dessa forma, o fluido conservativo satisfaz a equação de conservação

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d \left[1 + \frac{\omega_x}{1+r(a)} \right] = 0. \quad (3.36)$$

A taxa de expansão de *Hubble* pode ser obtida pela equação *Friedmann*

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_b + \rho_d), \quad (3.37)$$

em que ρ_r e ρ_b é dada na [Equação 3.6](#) e [Equação 3.7](#), respectivamente; ρ_d é a solução da [Equação 3.36](#), expressado por

$$\rho_d(a) = \rho_{d0} \exp \left[-3 \int \frac{1 + \omega_d(a')}{a'} da' \right]. \quad (3.38)$$

Dessa forma, podemos utilizar apenas a componente do fluido escuro unificado sem a necessidade das componente de energia escura e matéria escura de modo separado.

3.1.3 Modelos específicos de interação de energia escura

De modo geral, o uso da [Equação 3.28](#) e da [Equação 3.29](#), permite solução não analítica para a [Equação 3.19](#). Desta forma, [Martens et al. \(2019\)](#) e [Martens \(2017\)](#) consideraram cinco casos (IDEM 1 – IDEM 5) em que a solução pôde ser tratada analiticamente.

Aqui trataremos apenas o modelo de interação com acoplamento quadrático, designado como IDEM 2 por [Martens et al. \(2019\)](#), por ter uma descrição ainda incompleta (que proporcionou a publicação [Lima, Martens e Casarini \(2025\)](#)), enquanto os modelos IDEM 1 e IDEM 4 são modelos bastantes trabalhados na literatura. O modelo IDEM 1 é muito conhecido na literatura, por coincidir com modelo de gás de *Chaplygin* generalizado. Alguns destes estudos podem ser consultados em [Martens et al. \(2017a\)](#), [Wang et al. \(2013\)](#), [Amendola et al. \(2003\)](#), [Bento, Bertolami e Sen \(2002\)](#) e [Martens, Barbosa e Alcaniz \(2023\)](#). O modelo IDEM 4 já foi bem discutido em [Martens et al. \(2021\)](#). Enquanto, os modelos IDEM 3 e IDEM 5 são muitos sensíveis à pequenas perturbações e interação no *background* e não serão avaliados.

3.1.3.1 Modelo com acoplamento quadrático

O modelo com acoplamento quadrático, descrito pelo IDEM 2 na Ref. [Martens et al. \(2019\)](#), tem a função de interação dada por $f(r) = \frac{1}{r}$, já que neste caso, temos a [Equação 3.28](#) com $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $\sigma = -1$ como função de interação. Assim, o termo de interação para este modelo é dado pela expressão

$$Q = 3H\gamma \frac{\rho_x^2}{\rho_c + \rho_x}. \quad (3.39)$$

A solução de *background* das densidade de matéria escura e energia escura são dadas a partir das resoluções das equações 3.24 e 3.25 e são expressas por:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} a^{-\frac{3(\omega_x + \omega_x^2 + \gamma)}{\omega_x + \gamma}} \left[\frac{\Omega_{x0}(\omega_x + \gamma) + (\Omega_{c0}\omega_x - \Omega_{x0}\gamma)a^{3\omega_x}}{(\Omega_{c0} + \Omega_{x0})\omega_x} \right]^{-\frac{\gamma}{\omega_x + \gamma}} \times \left[\Omega_{c0}a^{3\omega_x} + \Omega_{x0}\frac{\gamma}{\omega_x}(1 - a^{3\omega_x}) \right] \quad (3.40)$$

e

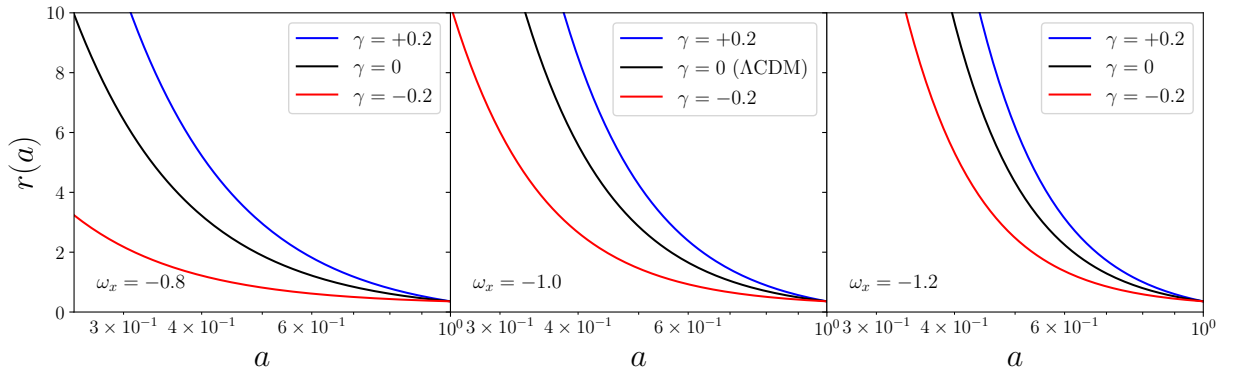
$$\rho_x = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{x0} a^{-\frac{3(\omega_x + \omega_x^2 + \gamma)}{\omega_x + \gamma}} \left[\frac{\Omega_{x0}(\omega_x + \gamma) + (\Omega_{c0}\omega_x - \Omega_{x0}\gamma)a^{3\omega_x}}{(\Omega_{c0} + \Omega_{x0})\omega_x} \right]^{-\frac{\gamma}{\omega_x + \gamma}}, \quad (3.41)$$

onde Ω_{x0} e Ω_{c0} são os parâmetros de densidade da DE e DM hoje. É possível ainda expressa-la de modo unificada. Utilizando a interação descrita na Equação 3.39, obtém-se como solução para a Equação 3.22 a seguinte expressão

$$r(a) = r_0 a^{3\omega_x} + \frac{\gamma}{\omega_x} (1 - a^{3\omega_x}), \quad (3.42)$$

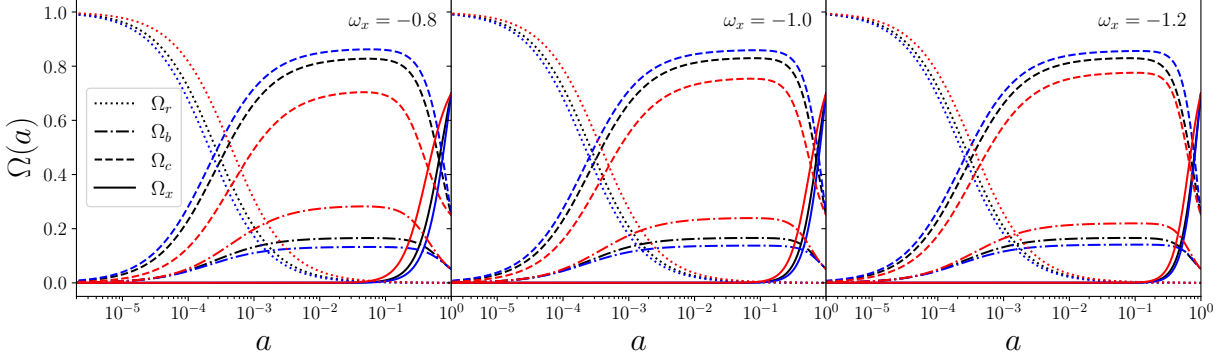
em que $r(a)$ é definido como a razão entre a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura, $r(a) \equiv \rho_c/\rho_x$. Neste caso, quando $\omega_x < 0$ e no limite em que temos o fator de escala $a(t)$ tendendo ao infinito $r(a)$ tende a um valor constante, o que difere do modelo padrão Λ CDM e do modelo IDEM 1 que tendem a zero. A Figura 3.1 mostra curvas de $r(a)$ para diferentes valores do parâmetro de interação γ , enquanto a Figura 3.2 o parâmetro de densidade das componentes de energia do Universo, ambas com o parâmetro da equação de estado fixado em $\omega_x = -0.8$, $\omega_x = -1$, e $\omega_x = -1.2$, respectivamente.

Figura 3.1 – Razão entre a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura. Painel esquerdo: A linha preta representa o modelo com $\gamma = 0$, a linha vermelha possui $\gamma = -0.2$ e a linha azul possui $\gamma = +0.2$, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -0.8$. Painel central: A linha preta representa o modelo $\gamma = 0$ (caso não interagente, i.e., reduz ao modelo Λ CDM), a linha vermelha possui $\gamma = -0.2$ e a linha azul possui $\gamma = +0.2$, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1$. Painel direito: A linha preta representa o modelo com $\gamma = 0$, a linha vermelha possui $\gamma = -0.2$ e a linha azul possui $\gamma = +0.2$, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1.2$. Em todos os painéis, o parâmetro de densidade da DE foi fixado em $\Omega_{x0} = 0.7$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.2 – Evolução dos parâmetros de densidade dos componentes do Universo em função do fator de escala a . O parâmetro EoS foi fixado em $\omega_x = -0.8$ (painel esquerdo), $\omega_x = -1$ (painel central), e $\omega_x = -1.2$ (painel direito), respectivamente. Em todos os painéis, a linha pontilhada representa a componente de radiação, a linha tracejada representa a matéria escura, a linha tracejada-pontilhada representa os bárions e a linha sólida representa a componente de energia escura. As linhas pretas representam o modelo com $\gamma = 0$, as linhas vermelhas têm $\gamma = -0.2$ e as linhas azuis têm $\gamma = +0.2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, podemos escrever a solução de *background*, isto é, a densidade de energia em termos do fluido unificado, cuja solução é dada por

$$\rho_d = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{d0} a^{-3 \left(1 - \frac{\omega_x^2}{\omega_x - \gamma}\right)} \left[\frac{\omega_x - \gamma + (\omega_x r_0 + \gamma) a^{-3\omega_x}}{\omega_x (1 + r_0)} \right]^{\frac{\omega_x}{\omega_x - \gamma}}, \quad (3.43)$$

em que $r_0 = \Omega_{c0}/\Omega_{x0}$. Desta forma, a equação de *Friedmann* em termos do parâmetro de *Hubble*, com as componentes do fluido conservativo, bárions e radiação é dada por

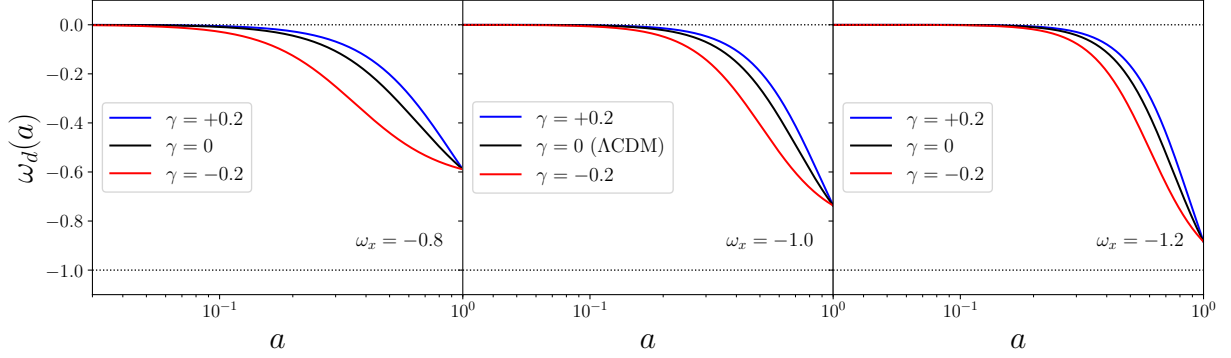
$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{d0} a^{-3 \left(1 - \frac{\omega_x^2}{\omega_x - \gamma}\right)} \left[\frac{\omega_x - \gamma + (\omega_x r_0 + \gamma) a^{-3\omega_x}}{\omega_x (1 + r_0)} \right]^{\frac{\omega_x}{\omega_x - \gamma}} + \Omega_{b0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4} \right], \quad (3.44)$$

logo, a dinâmica do *background* para este modelo está completamente compreendida. A [Figura 3.3](#) mostra o parâmetro da equação de estado para descrição unificada em função do fator de escala (ver [Equação 3.35](#)), com o parâmetro da equação de estado fixado em $\omega_x = -0.8$, $\omega_x = -1$, e $\omega_x = -1.2$, respectivamente. Observa-se que, no passado, o fluido unificado se comportava de forma semelhante à CDM, i.e., quando $a \rightarrow 0$, nota-se que $\omega_d \rightarrow 0$, já que $r(a) \rightarrow \infty$, o que indica uma dominação da CDM sobre a DE nos tempos primordiais. Atualmente, observa-se um valor negativo para ω_d , enquanto no futuro, no limite $a \rightarrow \infty$, o parâmetro da EoS efetivo (ω_d) tende a ω_x . Por outro lado, o parâmetro de interação (γ) modula a transição: valores positivos de γ suavizam a transição para ω_x , enquanto valores negativos a tornam mais abrupta.

3.1.3.2 Restrições e violação da WEC no modelo com acoplamento quadrático

Estamos interessados em determinar as regiões onde as densidades ρ_x e ρ_c são maiores ou iguais a zero. Especificamente, queremos encontrar as regiões permitidas para as densidades de energia escura e matéria escura durante sua evolução temporal cósmica, pois somente essas possuem significados físicos. Diante da definição que $r(a) = \rho_c/\rho_x$, é suficiente avaliar somente

Figura 3.3 – Parâmetro da equação de estado para descrição unificada vs. o fator de escala. Painel esquerdo: A linha preta representa o modelo com $\gamma = 0$, a linha vermelha possui $\gamma = -0.2$ e a linha azul possui $\gamma = +0.2$, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -0.8$. Painel central: A linha preta representa o modelo $\gamma = 0$ (caso não interagente, i.e., reduz ao modelo Λ CDM), a linha vermelha possui $\gamma = -0.2$ e a linha azul possui $\gamma = +0.2$, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1$. Painel direito: A linha preta representa o modelo com $\gamma = 0$, a linha vermelha possui $\gamma = -0.2$ e a linha azul possui $\gamma = +0.2$, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1.2$. Em todos os painéis, o parâmetro de densidade da DE foi fixado em $\Omega_{x0} = 0.7$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

um dos pares: ρ_x, ρ_c ou $\rho_x, r(a)$ ou $\rho_c, r(a)$. Para garantir que as curvas possuam valores maiores ou iguais a zero, do fator de escala inicial $a = 0$ até $a \rightarrow \infty$, é necessário introduzir uma transformação de variável do tipo:

$$y = \frac{2}{\pi} \arctan(\bar{y}), \quad (3.45)$$

em que $\bar{y}$ pode ser: ρ_c, ρ_x, r ou a . O eixo x , usado para o fator de escala, assume um intervalo finito $x = [0, 1]$, enquanto y , sendo usado para ρ_x , ou r , assume o intervalo finito $y = [-1, 1]$.

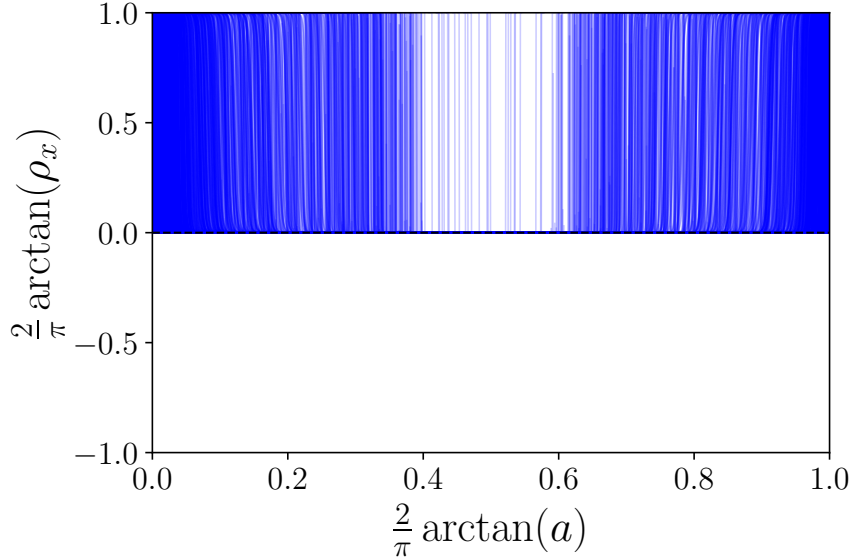
Para garantir que a Equação 3.41 satisfaça $\rho_x \geq 0$, na Figura 3.4 foi plotado $(2/\pi) \arctan(\rho_x)$ versus $(2/\pi) \arctan(a)$ a partir uma simulação computacional com 30 mil curvas geradas com os parâmetros $\omega_x, \gamma, \Omega_{m0}$ e h variando aleatoriamente entre os intervalos de $\omega_x = [-2, 2]$, $\gamma = [-2, 2]$, $\Omega_{m0} = [-1, 1]$ e $h = [0.5, 1]$ (em que h é $H/(100 \text{ km/s/Mpc})$), respectivamente. Enquanto isso, a Figura 3.5 mostra o plote de $(2/\pi) \arctan(r)$ versus $(2/\pi) \arctan(a)$, construído com a geração de 5 mil curvas, mantendo a mesma configuração dos parâmetros $\omega_x, \gamma, \Omega_{m0}$. Nesta figura, a densidade da matéria escura pode assumir valores negativos ($\rho_c < 0$) para certos intervalos de tempo (no passado ou no futuro), violando assim o WEC.

A Condição de Energia Fraca é uma das condições de energia tratadas pela teoria da Relatividade Geral, a qual estabelece que (MAEDA; HARADA, 2022; NGUYEN; AZREG-AÏNOU, 2024; SEN; SCHERRER, 2008)

$$T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0, \quad (3.46)$$

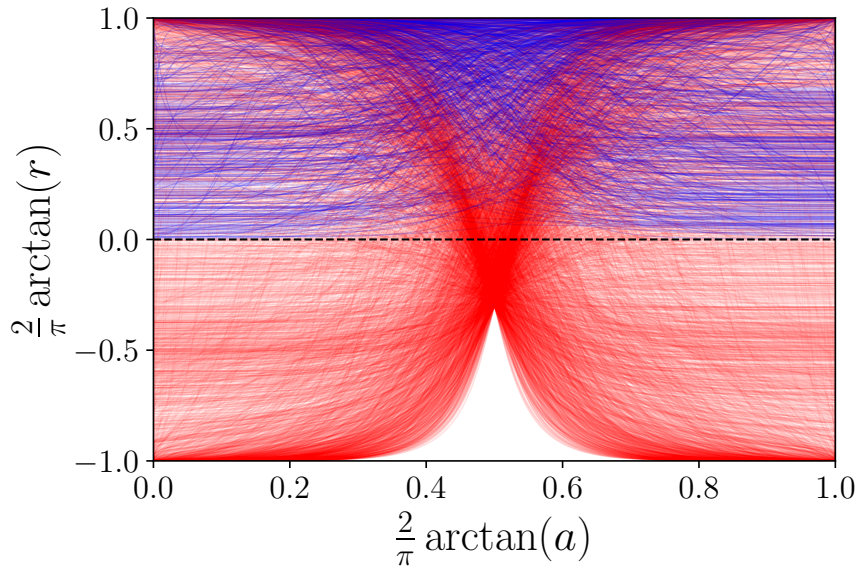
onde $T_{\mu\nu}$ representa o tensor momento-energia, enquanto t^μ e t^ν são quaisquer vetores do tipo temporal. Para um universo que segue a métrica FLRW, isso significa que a densidade de energia local, conforme medida por qualquer observador movendo-se ao longo de qualquer trajetória do tipo tempo, não deve ser negativa, ou seja, a WEC exige que $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$, onde ρ é a

Figura 3.4 – Simulação computacional com 30 mil curvas de $\rho_x(a)$. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são $\rho_x(a) \geq 0$. Não houve curvas com para $\rho_x(a) < 0$. O gráfico representa a maior escala possível para ρ_x e a ($\rho_x = [-\infty, \infty]$, $a = [0, \infty]$), com os parâmetros ω_x , γ , Ω_{m0} e h variando aleatoriamente entre os intervalos de $\omega_x = [-2, 2]$, $\gamma = [-2, 2]$, $\Omega_{m0} = [-1, 1]$ e $h = [0, 5, 1]$, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.5 – Simulação computacional com 5 mil de curvas de $r(a)$. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são $r(a) \geq 0$ e as linhas em cor vermelha representam as curvas cujos valores em algum momento possuem $r < 0$. O gráfico representa a maior escala possível para r e a ($r = [-\infty, \infty]$, $a = [0, \infty]$), com os parâmetros ω_x , γ e Ω_{m0} variando aleatoriamente entre os intervalos de $\omega_x = [-2, 2]$, $\gamma = [-2, 2]$ e $\Omega_{m0} = [-1, 1]$, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

densidade de energia e p é a pressão para qualquer observador seguindo uma trajetória temporal. No entanto, para observadores comóveis é suficiente apenas $\rho \geq 0$, pois a pressão não tem contribuição na direção temporal.

No cenário aqui considerado, a densidade de energia escura satisfaz $\rho_x \geq 0$, enquanto ρ_c pode assumir valores negativos. Portanto, $\rho_c < 0$ representa uma violação da WEC nesse setor, embora a condição global possa permanecer satisfeita. Então, ao avaliar a WEC localmente para cada fluido, estamos implicitamente analisando a consistência da condição global do sistema.

A partir da [Equação 3.40](#), é possível avaliar as condições que levam à violação da WEC. Dessa forma, podemos dividir a análise em dois momentos distintos: o passado e o futuro, de modo que se pode observar que a densidade de energia da matéria se torna negativa em

$$a = \left[\frac{-\gamma \Omega_{x0}}{\omega_x \Omega_{c0} - \gamma \Omega_{x0}} \right]^{\frac{1}{3\omega_x}}. \quad (3.47)$$

Assumindo que o valor do parâmetro da equação de estado seja $\omega_x < 0$, obtemos diretamente as condições de soluções para a [Equação 3.47](#) nos intervalos $0 < a < 1$ (no passado) e $a > 1$ (no futuro). Para evitar que a densidade de energia da matéria escura fique negativa nos primeiros momentos do Universo, o parâmetro de interação deve atender à seguinte condição:

$$\gamma > -|\omega_x| \frac{\Omega_{c0}}{\Omega_{x0}}. \quad (3.48)$$

No entanto, é provável que a densidade de matéria escura, ρ_c , seja negativa no futuro, a menos que,

$$\gamma \leq 0, \quad (3.49)$$

que independe do valor de ω_x . As equações (3.48) e (3.49) definem o intervalo em que o modelo é fisicamente bem definido, independentemente da escala de tempo. Na [Figura 3.6](#), o fator de escala é representado para a violação da WEC em função do parâmetro de interação γ .

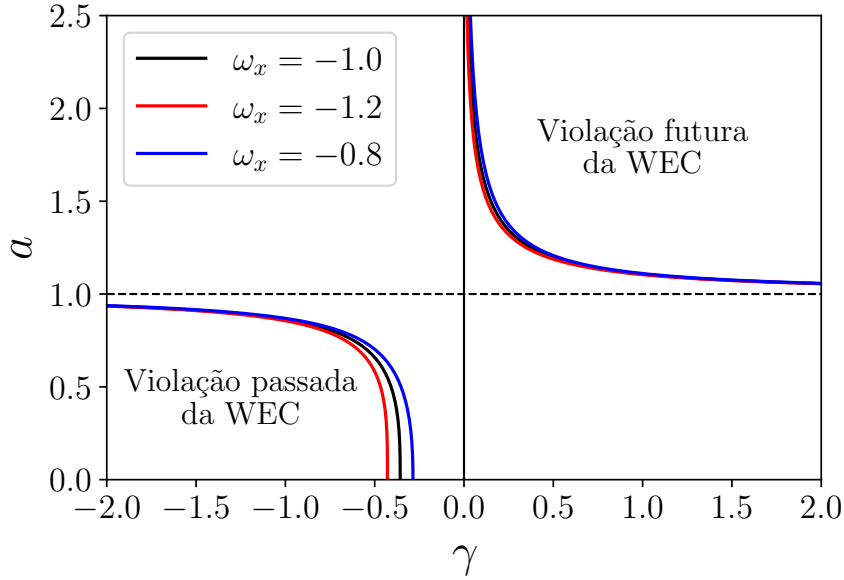
Vamos considerar, por exemplo, $\omega_x = -1$, $\Omega_{x0} = 0.7$ e $\gamma = 0.2$, ρ_c torna-se negativo com fator de escala $a \approx 1.4$, onde a densidade crítica é $\rho_{cr0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.87798 \times 10^{-26} h^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, com $h = 0.7324$ ([RIESS et al., 2016](#)). A [Figura 3.7](#) mostra como o universo evolui com a função de Hubble, as densidades de DE e DM em função do fator de escala a .

3.1.4 Perturbações cosmológicas

A descrição da interação do setor escuro para um modelo de interação, assumindo uma natureza fenomenológica, pode ser dada por meio de uma derivada covariante do tensor momento-energia, onde as equações para a conservação de bárions, DM e DE são

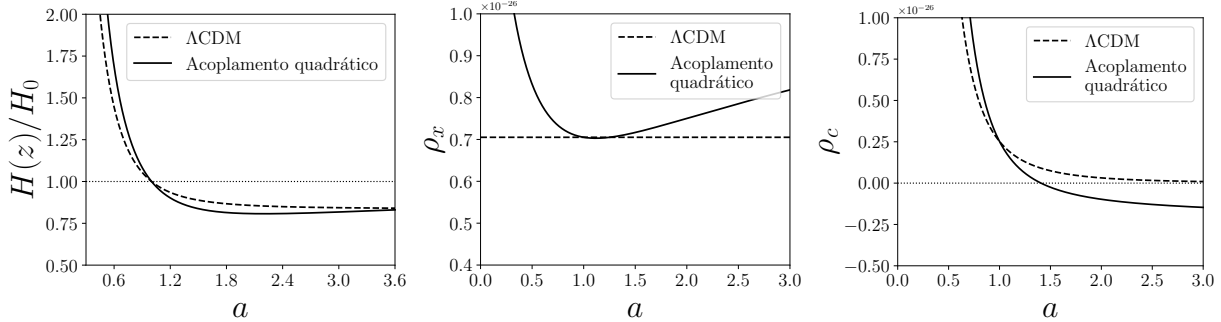
$$T_{b;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.50)$$

Figura 3.6 – Plote do fator de escala para violação da WEC como função do parâmetro de interação γ . No canto superior direito é mostrada a violação do WEC no futuro, enquanto no canto inferior esquerdo é mostrada a violação do WEC no passado. A linha na cor preta corresponde $\omega_x = -1$, enquanto que a linha na cor azul corresponde $\omega_x = -0.8$ e cor vermelha corresponde a $\omega_x = -1.2$. Aqui o parâmetro de densidade da energia escura foi fixado em $\Omega_{x0} = 0.7$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.7 – Soluções de *Background* dos modelos de acoplamento quadrático e Λ CDM em função do fator de escala a . Painel esquerdo: Mostra a Função de Hubble $H(z)/H_0$. Painel central: Densidade de energia escura. Painel direito: Relativo a densidade de matéria. Em todos os painéis a linha sólida corresponde ao nosso modelo de acoplamento quadrático, com $\omega_x = -1$, $\Omega_{x0} = 0.7$, $\gamma = 0.2$ e $h = 0.7324$, e as linhas pontilhadas corresponde ao modelo Λ CDM, com o mesmo valores de Ω_{x0} e h .



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$T_{c;\nu}^{\mu\nu} = -Q^\mu, \quad (3.51)$$

e

$$T_{x;\nu}^{\mu\nu} = Q^\mu. \quad (3.52)$$

O termo Q^μ trata-se de um quadri vetor que atua como uma fonte do tensor momento-energia; os termos $T_c^{\mu\nu}$ e $T_x^{\mu\nu}$ são tensores momento-energia para matéria escura e energia escura, respectivamente. Em um fluido perfeito, as componentes espaciais perante à uma derivada covariante do tensor momento-energia são nulas. Consequentemente, no *background*, o termo de interação é dada por uma função escalar ($Q^\mu = (Q, \vec{0})$) num caso sem perturbação (MARTTENS *et al.*, 2019; MARTTENS *et al.*, 2020; MARTTENS *et al.*, 2021; MARTTENS; BARBOSA; ALCANIZ, 2023). Por outro lado, para um caso perturbado e assumindo perturbações escalares que são responsáveis pela formação de estruturas no universo, a métrica perturbada de FLRW num Universo com distribuição espacial plana considerando o calibre newtoniano é dada por (MA; BERTSCHINGER, 1995; MARTTENS *et al.*, 2019)

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\psi) d\eta^2 + (1 - 2\phi) dx^i dx_i \right] \quad (3.53)$$

com os graus de liberdade escalares sendo ψ e ϕ , e usando o tempo conforme η ao invés do tempo cósmico t .

Na descrição da formação de estrutura em nível linear é necessário resolver todas as equações de perturbação para cada componente do Universo. As anisotropias de temperatura da CMB são obtidas calculando as equações de *Boltzmann* em todas componentes. No entanto, assumindo que as componentes de bárions e de radiação são semelhantes ao do modelo Λ CDM que tem interação entre si através do espalhamento *Thomson* antes da recombinação e sem está ligada diretamente ao setor escuro (MARTTENS *et al.*, 2019; MA; BERTSCHINGER, 1995; MAJEROTTO; VÄLIVIITA; MAARTENS, 2010).

Assumindo uma descrição dinâmica de fluidos para representar as componentes do setor escuro, as equações de fluidos perturbadas devem incorporar a contribuição do termo de interação. Dessa forma, podemos considerar no nível linear a contribuição perturbativa dividido em duas componentes uma componente paralela e outra ortogonal ao quadri vetor velocidade,

$$Q^\mu = Qu^\mu + F^\mu. \quad (3.54)$$

com $F^\mu u_\mu = 0$. O primeiro termo no lado direito Q é uma função escalar com componentes de fundo que foi definido nas equações 3.11 e 3.12. A contribuição perturbativa será denotada por $\hat{Q}$ e tem a forma $\hat{Q} = \hat{\Theta}\gamma R + 3H\gamma\hat{R}$, em que $\hat{R}$ tem dependência com o modelo e pode ser obtido por meio do linearização do escalar de expansão $\Theta \equiv u^\mu_{;\mu}$, no calibre newtoniano é expresso por

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{a} \left(\theta_{tot} - \Theta\psi - 3\phi' \right). \quad (3.55)$$

onde θ_{tot} é a divergência do fluido interagente para todo o meio cósmico. A descrição com fluido ideal nos componentes escuros exige que o termo F^μ tenha apenas uma contribuição perturbativa espacial. Logo, o termo de interação perturbativa total pode ser escrito como, $\hat{Q}^\mu = a(Q\psi + \hat{Q}, Q\hat{u}^i + F^i)$.

Na consideração das equações básicas do balanço de energias definido nas eqs. 3.51 e 3.52, levando em conta um fluido geral interagente com EoS contante $p = \omega\rho$ e o quadrvetor velocidade perturbado $\hat{u}^\mu = a^{-1}(-\psi, \partial^i v)$, onde v é sua velocidade peculiar. A conservação de energia e momento no calibre newtoniano é dada por

$$\begin{aligned} \delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta + 9\mathcal{H}^2(1 + \omega)(c_s^2 - c_a^2)\frac{\theta}{k^2} + (1 + \omega)(\theta - 3\phi') \\ = \frac{Qa}{\rho} \left[\frac{\hat{Q}}{Q} - \delta + \psi + 3\mathcal{H}(c_s^2 - c_a^2)\frac{\theta}{k^2} \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\theta' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\theta - \frac{k^2 c_s^2}{1 + \omega}\delta - k^2\psi = \frac{a}{\rho(1 + \omega)} \left[Q\theta_{tot} - k^2 f - (1 + c_s^2)Q\theta \right]. \quad (3.57)$$

Nas equações acima expressam informações importantes, os primes representam a derivada com respeito ao tempo conforme, onde $\mathcal{H}$ é o parâmetro de *Hubble* calculado em relação ao tempo conforme, definido como $\mathcal{H} = aH$. Na Equação 3.56 é introduzido o contraste de densidade $\delta \equiv \hat{\rho}/\rho$ onde $\hat{\rho}$ é a densidade de energia perturbativa e ρ é a densidade de energia de *background*. Na Equação 3.57 a quantidade dinâmica de interesse é a divergência do fluido interagente $\theta \equiv ik^a \partial_a v$. Enquanto que, θ_{tot} refere-se à mesma quantidade, mas agora para todo meio cósmico ao invés de está restrito a um único fluido. Tratando-se de perturbações escalares, é interessante definir a contribuição espacial do termo de interação por $aF^i = \partial^i f$. Por último, c_a^2 e c_s^2 correspondem à velocidade do som adiabática e à velocidade do som do quadro de repouso físico para o fluido, respectivamente. Na consideração de um parâmetro EoS constante, a velocidade adiabática do som c_a^2 reduz a ω .

Agora, usando as equações (3.56) e (3.57) podemos escrever as equações perturbativas para os componentes do setor escuro. Para o componente CDM temos que

$$\delta'_c + \theta_c - 3\phi' = \frac{aQ}{\rho_c} \left(\delta_c - \frac{\hat{Q}}{Q} - \psi \right), \quad (3.58)$$

$$\theta'_c + \mathcal{H}\theta_c - k^2\psi = \frac{aQ}{\rho_c} (\theta_{tot} - \theta_c). \quad (3.59)$$

Enquanto para o componente DE é expressa por,

$$\delta'_x + (1 + \omega_x)(\theta_x - 3\phi') + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega_x)\delta_x = -\frac{aQ}{\rho_x} \left[\delta_x - \psi - 3\mathcal{H}(c_s^2 - c_a^2)\frac{\theta_x}{k^2} - \frac{\hat{Q}}{Q} \right], \quad (3.60)$$

$$\theta'_x + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\theta_x - \frac{c_s^2 k^2}{1 + \omega_x}\delta_x - k^2\psi = \frac{aQ}{(1 + \omega_x)\rho_x} \left[\theta_{tot} - (1 + c_s^2)\theta_x + (1 + \omega_x)\frac{\hat{Q}}{Q} \right]. \quad (3.61)$$

Para prevenir de instabilidades, a velocidade física do som c_s^2 não deve ser negativa numa energia escura dinâmica. Assim, consideramos $c_s^2 = 1$, de acordo com algumas Refs. [Marttens et al. \(2019\)](#), [Yang, Pan e Mota \(2017\)](#), [Majerotto, Väliiita e Maartens \(2010\)](#), [Väliiita, Majerotto e Maartens \(2008\)](#) e [Caldera-Cabral, Maartens e Schaefer \(2009\)](#).

O termo de interação perturbativa é dado pela linearização do termo de interação do *background* (Equação 3.39), que é expresso como ([MARTTENS et al., 2019](#))

$$\hat{Q} = Q \left(\frac{\hat{\Theta}}{\Theta} + \frac{\rho_x \delta_x + 2\rho_c \delta_x - \rho_c \delta_c}{\rho_c + \rho_x} \right). \quad (3.62)$$

No *background*, o escalar de expansão Θ simplifica para $\Theta = 3H$ ([MARTTENS et al., 2019](#); [KOLB; MATARRESE; RIOTTO, 2006](#)).

3.2 Metodologia

Esta seção descreve brevemente os conjuntos de dados observacionais e a metodologia de análise estatística.

3.2.1 Dados observacionais

Aqui apresentaremos os conjuntos de dados observacionais.

3.2.1.1 Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia)

As SNe Ia são consideradas velas padrão na astronomia e desempenharam um papel fundamental para a observação da expansão acelerada do Universo ([PLANCK Collaboration et al., 2020c](#); [RIESS et al., 1998](#); [PERLMUTTER et al., 1998](#); [PERLMUTTER et al., 1999](#)). Em geral, a magnitude aparente e a distância de luminosidade são relacionadas por (veja a subseção 2.3.6)

$$m = 5 \log_{10}(D_L) + 25 + M, \quad (3.63)$$

em que M é magnitude absoluta e o termo $D_L(z)$ representa a distância de luminosidade expressa em unidades de Mpc. Esta é uma relação muito importante para a análise dos dados de SNe Ia. Na primeira parte da pesquisa, foram usadas nas análises 1048 medições de magnitudes aparentes de supernovas do Tipo Ia, denominada de amostra *Pantheon*⁴. Este conjunto de dados abrange o intervalo de *redshift*: $0.01 < z < 2.3$ ([SCOLNIC et al., 2018](#); [BETOULE et al., 2014](#)). Na segunda parte, utilizamos 1701 medições de magnitudes aparentes, conhecidas como amostras *Pantheon+* (*PantheonPlus*)⁵, no intervalo de *redshift*: $0.001 < z < 2.26$ ([BROUT et al., 2022](#)).

⁴ Os dados Pantheon estão disponíveis e podem ser baixados de: <http://www.github.com/dscolnic/Pantheon>.

⁵ Os dados PantheonPlus estão disponíveis em: <https://pantheonplush0es.github.io/>.

3.2.1.2 Valor atual da taxa de expansão de Hubble (H_0)

A taxa de expansão de *Hubble* obtida por [Riess et al. \(2016\)](#) fornece a melhor estimativa de $H_0 = (73.24 \pm 1.74) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, a partir de um conjunto de observações contendo mais de 600 cefeidas, usando as frequências do infravermelho e visível. Este valor é independente de modelo cosmológico.

3.2.1.3 Cronômetros cósmicos (CC)

O *Cosmic Chronometers* são dados independentes de modelos cosmológicos, derivados de medições feitas em galáxias antigas (veja a [subseção 2.3.7](#)). Na primeira parte da pesquisa, usamos 30 medidas de $H(z)$ no intervalo de $0.07 < z < 1.965$ ([MORESCO et al., 2016](#))⁶. Na segunda parte, utilizamos 32 medidas de $H(z)$ no intervalo de $0.07 < z < 1.965$, conforme apresentado na [Tabela 3.1](#) ([MORESCO et al., 2022](#)).

Tabela 3.1 – Medidas de $H(z)$, com seus respectivos erros, contendo os dados de CC.

z	$H(z)$	$\sigma_{H(z)}$	Referências
0.07	69.0	19.6	Zhang et al. (2014)
0.09	69.0	12.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.12	68.6	26.2	Zhang et al. (2014)
0.17	83.0	8.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.179	75.0	4.0	Moresco et al. (2012)
0.199	75.0	5.0	Moresco et al. (2012)
0.2	72.9	29.6	Zhang et al. (2014)
0.27	77.0	14.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.28	88.8	36.6	Zhang et al. (2014)
0.352	83.0	14.0	Moresco et al. (2012)
0.3802	83.0	13.5	Moresco et al. (2016)
0.4	95.0	17.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.4004	77.0	10.2	Moresco et al. (2016)
0.4247	87.1	11.2	Moresco et al. (2016)
0.4497	92.8	12.9	Moresco et al. (2016)
0.47	89.0	49.6	Ratsimbazafy et al. (2017)
0.4783	80.9	9.0	Moresco et al. (2016)
0.48	97.0	62.0	Stern et al. (2010)
0.593	104.0	13.0	Moresco et al. (2012)
0.68	92.0	8.0	Moresco et al. (2012)
0.75	98.8	33.6	Borghi, Moresco e Cimatti (2022)
0.781	105.0	12.0	Moresco et al. (2012)
0.875	125.0	17.0	Moresco et al. (2012)
0.88	90.0	40.0	Stern et al. (2010)
0.9	117.0	23.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.037	154.0	20.0	Moresco et al. (2012)
1.3	168.0	17.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.363	160.0	33.6	Moresco (2015)
1.43	177.0	18.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.53	140.0	14.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.75	202.0	40.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.965	186.0	50.4	Moresco (2015)

Fonte: Adaptada de [Moresco et al. \(2022\)](#).

⁶ Os dados CC com 30 medidas de $H(z)$ foram incluídos no MontePython e estão disponíveis em: https://github.com/brinckmann/montepython_public/tree/3.3/data/cosmic_clocks.

3.2.1.4 Oscilações acústicas de bárions (BAO)

As oscilações acústicas de bárions carregam informações do Universo do pré-desacoplamento e as medições dependem do horizonte sonoro na “época de arrasto”⁷, $r_d(z)$. Esta distância marca o momento de desacoplamento dos bárions (prótons e nêutrons) e dos fótons e é dada por (BASSETT; HLOZEK, 2009; EISENSTEIN; SEO; WHITE, 2007; AIZPURU; ARJONA; NESSERIS, 2021):

$$r_d \equiv \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (3.64)$$

em que z_d é o *redshift* na “época de arrasto” ($z_d \approx 1060$ (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c)) e c_s representa a velocidade do som no plasma primordial, que é dada por

$$c_s(z) = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad (3.65)$$

com $R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \propto \frac{\Omega_b}{1+z}$. As medições isotrópicas das BAO são fornecidas por meio da razão adimensional D_V/r_d , onde D_V é a média geométrica que combina as escalas de distâncias ao longo da linha de visão e das transversais. D_V é expressado por

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (3.66)$$

em que $D_A(z)$ é a distância de diâmetro angular. Por outro lado, as medições BAO restringem as quantidades $D_M(z)/r_d$ e $D_H(z)/r_d$, onde $D_M(z)$ é a distância do diâmetro angular comovente e está relacionado à distância de luminosidade por $D_M(z) = D_L(z)/(1+z) = (1+z) D_A(z)$, e D_H é a distância de *Hubble*, dada por $D_H(z) = c/H(z)$.

O levantamento do DESI é baseado em quatro classes distintas de objetos extragaláticos: Quasares (QSO), galáxias vermelhas luminosas (LRGs), galáxias de linha de emissão (ELGs) e uma amostra de galáxias brilhante (BGS)⁸. Além disso, foi incluído o *Lyman Alpha Forest* ($\text{Ly}\alpha$) espectros de quasares com altos *redshift* ($z > 2.1$), que funciona como um traçador das flutuações na densidade de matéria bariônica. Os parâmetros de escala que ajustam as estruturas BAO nas direções paralela e perpendicular à linha de visão são relacionados à cosmologia por (DESI Collaboration *et al.*, 2025c; DESI Collaboration *et al.*, 2025a; DESI Collaboration *et al.*, 2025b)

$$\alpha_{\parallel}(z) = \frac{D_H(z)^{\text{fid}} r_d^{\text{fid}}}{D_H^{\text{fid}}(z) r_d} \quad \text{e} \quad \alpha_{\perp}(z) = \frac{D_M(z) r_d^{\text{fid}}}{D_M^{\text{fid}}(z) r_d}, \quad (3.67)$$

em que o sobrescrito *fid* indica que as quantidades foram calculadas em uma cosmologia fiducial, que servem para converter medidas de *redshifts* em distâncias⁹. Os parâmetros $\alpha_{\parallel}$ e $\alpha_{\perp}$, podem ser reparametrizados em termos de combinações alternativas como α_{iso} e α_{AP} :

$$\alpha_{\text{iso}} = (\alpha_{\parallel} \alpha_{\perp}^2)^{1/3} \quad \text{e} \quad \alpha_{\text{AP}} = \frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}}, \quad (3.68)$$

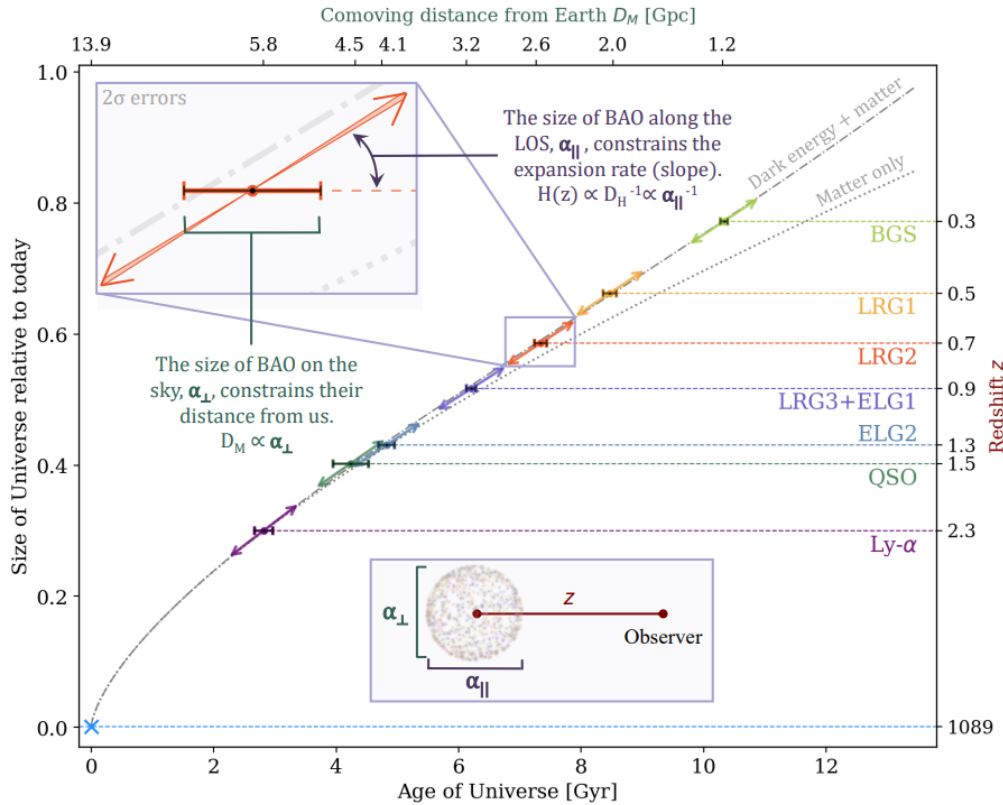
⁷ Do inglês: *drag epoch*. Esta refere-se ao instante no Universo primitivo quando fótons e bárions se desacoplaram.

⁸ Do inglês: *quasars (QSO), luminous red galaxies (LRGs), emission line galaxies (ELGs), e bright galaxy sample (BGS)*.

⁹ A partir de modelos baseados no espectro de potência no espaço de Fourier.

que serve para isolar os efeitos isotrópicos (α_{iso}) ou anisotrópico (α_{AP}) das características das BAO. A Figura 3.8 mostra como as medidas de BAO realizadas pelo levantamento DESI restringem a expansão do Universo, indicando as regiões de *redshift* nas quais atuam os diferentes traçadores. Aqui, na primeira parte do trabalho, consideramos dados de BAO extraídos da DR1

Figura 3.8 – Gráfico mostrando como as medidas de BAO realizada pelo levantamento DESI restringem a expansão do Universo, com o fator de escala em função do tempo e com as regiões que atuam os diferentes traçadores.



Fonte: DESI Collaboration *et al.* (2025b).

do levantamento do DESI. As medições estão resumidas na Tabela I da Ref. DESI Collaboration *et al.* (2025c)¹⁰. Na segunda parte, utilizamos a DR2 do levantamento do DESI, com as medições apresentadas na Tabela IV da Ref. DESI Collaboration *et al.* (2025b). Os resultados dos traçadores LRG3 e ELG1 não foram usados em nossa análise, apenas os resultados correlacionados de LRG3+ELG1.

3.2.1.5 Dados de CMB (Planck)

Os dados usados aqui para CMB são medições do *Planck* 2018, que incluem informações sobre temperatura, polarização, espectros de correlação cruzada de polarização de temperatura e reconstrução de mapas de lentes, *Planck* (TT , TE , $EE+lowE+lensing$)¹¹ (PLANCK Collabo-

¹⁰ Dados disponível em: <<https://data.desi.lbl.gov/doc/releases/>>.

¹¹ Para a análise de CMB, todos os códigos de *likelihoods* e dados do *Planck* podem ser obtidos em: <<https://pla.esac.esa.int/pla/>>.

ration *et al.*, 2020c). Nestas análises, foram considerados os códigos de *likelihood* padrão: (i) COMANDER para o espectro TT em baixos multipolos (ℓ), com dados de espectro no intervalo $2 \leq \ell < 30$; (ii) SimAll para o espectro EE em baixos multipolos, com dados de espectro no intervalo $2 \leq \ell < 30$; (iii) Plik TT, TE, EE para os espectros TT, TE e EE, cobrindo $30 \leq \ell \lesssim 2500$ para TT e $30 \leq \ell \lesssim 2000$ para TE e EE; (iv) Reconstrução do espectro de potência de lentes com $8 \leq l \leq 400$. Para mais detalhes das *likelihoods* veja as Refs. [PLANCK Collaboration et al. \(2020b\)](#) e [PLANCK Collaboration et al. \(2020c\)](#).

3.2.2 Combinação de Conjuntos de Dados

Investigamos o impacto do físico ou da WEC *prior*, no caso de $\gamma \geq 0$, na estimativa dos parâmetros cosmológicos do modelo em análise. O código CLASS não modificado já resolve automaticamente violações passadas da WEC. Uma análise estatística Bayesiana foi realizada com e sem a inclusão desse *prior*, para duas diferentes pesquisas. Na primeira pesquisa, foram utilizados cinco conjuntos de dados diferentes:

1. **Background:** Composto por dados de SNe Ia (as amostras Pantheon), CC (30 medidas de $H(z)$) e BAO (DESI DR1);
2. **Background+ H_0 :** Composto por Background e H_0 ;
3. **Planck:** Composto pelos dados completos de CMB do Planck, combinados com a reconstrução de lentes, Planck (TT,TE,EE+lowE+lensing);
4. **Background+Planck:** Composto pela combinação de Planck+Background;
5. **Background+Planck+ H_0 :** Composto pela combinação de Planck+Background, com H_0 .

Na segunda pesquisa, foram utilizados também cinco conjuntos de dados diferentes:

1. **DESI+CC:** Composto por dados de CC (com 32 medidas de $H(z)$) e BAO (DESI DR2);
2. **DESI+CC+Pantheon+:** Composto por dados de SNe Ia (as amostras PantheonPlus), CC (32 medidas de $H(z)$) e BAO (DESI DR2);
3. **CMB:** Composto pelos dados completos de CMB do Planck, combinados com a reconstrução de lentes, Planck (TT,TE,EE+lowE+lensing);
4. **CMB+DESI:** Composto pela combinação de CMB e BAO (DESI DR2);
5. **CMB+DESI+Pantheon+:** Composto pela combinação de CMB e por dados de SNe Ia (as amostras PantheonPlus), CC (32 medidas de $H(z)$) e BAO (DESI DR2).

3.2.3 Análise estatística

A análise estatística é feita por intermédio do código MontePython que leva em consideração o conhecimento dos conceitos básicos da distribuição de densidade de probabilidade (função *likelihood*, $\mathcal{L}$), qui-quadrado (χ^2) e a matriz de covariância, que fornece o melhor ajuste para um conjunto de parâmetros. Aqui veremos alguns aspectos relacionado à análise estatística

3.2.3.1 Função Likelihood

A função distribuição de densidade de probabilidade (FDDP), também denominada de função *likelihood* ¹², fornece a melhor estimativa para os valores de um conjunto de parâmetros de uma determinada base de dados, é expressa por (VUOLO, 1996; HELENE; VANIN, 1991; LIMA, 2020).

$$\mathcal{L} \propto \exp \left[\frac{-\chi^2}{2} \right]. \quad (3.69)$$

3.2.3.2 Qui-quadrado (χ^2)

Considerando um sistema com N variáveis aleatórias x_i , χ^2 é definido sendo a soma dos quadrados das distâncias, d_i , com relação aos ajustes dos pontos num determinado conjunto de dados via o método dos mínimos quadrados (MMQ) (BONAMENTE, 2017; BEVINGTON; ROBINSON, 2003; VUOLO, 1996; HELENE; VANIN, 1991; TAYLOR, 1997),

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{\sigma_i^2} \right\}, \quad (3.70)$$

em que $y(x_i)$ representa o valor do cálculo de y com relação ao ponto x_i . Este representa o valor verdadeiro (ou o valor teórico) para y . Enquanto, y_i representa um valor experimental (ou valor observacional) em torno de $y(x_i)$, com um desvio padrão associado de σ_i .

3.2.3.3 Códigos CLASS, MontePython e GetDist

A análise estatística é feita por intermédio do código MontePython ¹³ (BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019; AUDREN *et al.*, 2013b), que utiliza o código CLASS ¹⁴ (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011; AUDREN *et al.*, 2013b). No código MontePython, o método *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) (METROPOLIS *et al.*, 1953; HASTINGS, 1970) é usado para realizar a análise estatística dos dados de entrada, comparando-os com as previsões teóricas fornecidas por uma versão modificada do código CLASS, adaptada para levar em conta a estrutura cosmológica descrito na seção 3.1. Para usar os modelos Λ CDM e ω CDM ¹⁵, não é necessário fazer modificação no código. No entanto, para outros modelos, como os modelos interagentes,

¹² Na literatura pode ser encontrada ainda por *verossimilhança*.

¹³ A documentação do código está disponível em: https://github.com/brinckmann/montepython_public/.

¹⁴ A documentação do código está disponível em: https://lesgourg.github.io/class_public/.

¹⁵ Do inglês: ω Cold Dark Matter.

é necessário implementar tanto as equações de *background* quanto as equações perturbadas do fluido, considerando a contribuição perturbativa linear do modelo no código. Para todas as cadeias, durante a análise MCMC do MontePython é exigido que o parâmetro de convergência *Gelman-Rubin* atenda à condição $\hat{R} - 1 < 0.01$ (VATS; KNUDSON, 2018; GELMAN; RUBIN, 1992). Utilizamos *GetDist*¹⁶ para analisar e plotar as cadeias (LEWIS, 2019a; LEWIS, 2019b). Ele permite criar gráficos de contorno, histogramas, correlações de parâmetros, entre outros, a partir de conjuntos de dados gerados por códigos como o MontePython. Nesta parte, utilizando a biblioteca *GetDist*, as amostras em que o parâmetro γ não satisfaz as condições das equações (3.48) e (3.49) foram filtradas. Essas equações estabelecem limites específicos para o valor de γ . Assim, apenas as amostras que atendem a essas restrições são consideradas na análise *posterior*, especificamente com o *prior* aplicado.

3.2.3.4 Método Markov Chain Monte Carlo

O método MCMC é uma técnica de integração de Monte Carlo¹⁷ por meio das cadeias Markov¹⁸. Dentre diversos algoritmos de MCMC, tem o algoritmo de *Metropolis-Hastings* (METROPOLIS *et al.*, 1953; HASTINGS, 1970). Em um trabalho posterior, GEMAN e GEMAN (1984) introduziu um caso especial para o algoritmo *Metropolis-Hastings* (BROOKS *et al.*, 2011; GEMAN; GEMAN, 1984; ANDRIEU *et al.*, 2003; RAVENZWAAIJ; CASSEY; BROWN, 2018). No Apêndice A é mostrado uma ideia simplista do algoritmo em questão, no qual leva conta a estatística bayesiana.

3.2.3.5 Matriz de informação de Fisher e matriz covariância

A Matriz de Informação de Fisher (MIF) é utilizada no processo de determinar incertezas dos parâmetros cosmológicos através das análises estatísticas dos dados observacionais/simulados. Esta, por sua vez, corresponde a 1/2 da matriz Hessiana da função qui-quadrado (χ^2), expressa por (PAPATHANASIOU, 1993; KAGAN; LANDSMAN, 1999; TAYLOR, 1997; OLIVEIRA-FILHO; SARAIVA, 2004; BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019; COE, 2009):

$$[\mathbf{F}]_{ij} \equiv F_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_i \partial p_j} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_i \partial p_j}, \quad (3.71)$$

as derivadas parciais são relativo aos parâmetros do modelo. Ela se relacionada com a matriz de covariância por intermédio

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.72)$$

¹⁶ A documentação do código está disponível em: <<https://getdist.readthedocs.io/>>.

¹⁷ Monte Carlo: Significa geração/amostragem aleatória de números (amostra de uma distribuição).

¹⁸ Markov Chain: Significa cadeia de números, em que cada número é dependente do número anterior.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano”
(Isaac Newton)

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos e discussões relacionadas. Na [seção 4.1](#) discutiremos os resultados quando o parâmetro da EoS foi fixado $\omega_x = -1$. Estes resultados renderam a publicação [Lima, Marttens e Casarini \(2025\)](#). Na [seção 4.2](#) discutiremos os resultados quando o parâmetro da EoS não foi fixado $\omega_x = -1$.

4.1 Resultados observacionais com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1$

Quando não incluímos os dados do *Planck* em nossa análise, consideramos os seguintes parâmetros cosmológicos: $\mathcal{P} = \{\omega_c, H_0, \gamma\}$, onde ω_c é o parâmetro de densidade física de matéria escura, e os parâmetros derivados: $\mathcal{P}' = \{\Omega_{m0}, \omega_b\}$, onde ω_b e Ω_{m0} representam, respectivamente, os parâmetros de densidade física de bárions e densidade de matéria atual. Por outro lado, quando incluímos os dados do *Planck*, os parâmetros são: $\mathcal{P} = \{100\theta_s, n_s, \ln(10^{10}A_s), \omega_b, \omega_c, \tau_{reio}, \gamma\}$, onde $100\theta_s$, n_s , $\ln(10^{10}A_s)$ e τ_{reio} representam, respectivamente, o tamanho angular do horizonte acústico (escalado por 100), o índice espectral escalar, o logaritmo da amplitude do espectro primordial de potência escalar, e a profundidade óptica de reionização. Os parâmetros derivados são: $\mathcal{P}' = \{H_0, \Omega_{m0}, \sigma_8, S_8\}$, onde σ_8 e S_8 representam, respectivamente, o desvio padrão das flutuações de densidade em uma esfera de raio de $8 h^{-1}$ Mpc, e o parâmetro de crescimento de estruturas, com o parâmetro da EoS fixado em $\omega_x = -1$. No caso do modelo Λ CDM, o parâmetro de interação γ não está contido nas amostras.

Inicialmente, na próxima subseção introduziremos os resultados obtidos para o modelo Λ CDM, mas sem se aprofundar numa discussão para os resultados apresentados. Estes servirão

para fins de comparação e base para discussões dos resultados do modelo com acoplamento quadrático com discussões apresentadas na subseção posterior.

4.1.1 Resultados observacionais do modelo Λ CDM

Nesta subseção apresentaremos os resultados observacionais do modelo Λ CDM. Este é o modelo padrão da cosmologia atualmente. Este modelo tem o parâmetro da EoS $\omega_x = -1$, representando a energia de vácuo. No entanto, os resultados apresentados nesta seção servirão de base para fins de comparação e validação dos resultados obtidos para o modelo com acoplamento quadrático apresentado na próxima seção.

Aqui, apresentaremos os resultados obtidos na análise estatística para o modelo Λ CDM. Estes incluem um gráfico triangular com os resultados, conforme mostrado na [Figura 4.1](#), juntamente com as Tabelas 4.1 e 4.2, que exibem os principais parâmetros cosmológicos dentro de um intervalo de níveis de confiança ¹ (C.L.) de 1σ para este modelo.

Tabela 4.1 – Resultados da análise estatística do modelo Λ CDM em 1σ C.L., usando os conjuntos de dados: Background e Background+ H_0 .

Parâmetro	Background	Background+ H_0
ω_c	$0.1181^{+0.0056}_{-0.0062}$	$0.1203^{+0.0060}_{-0.0060}$
H_0 [km/s/Mpc]	$68.91^{+0.61}_{-0.61}$	$69.40^{+0.59}_{-0.59}$
Ω_{m0}	$0.295^{+0.011}_{-0.011}$	$0.295^{+0.011}_{-0.011}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

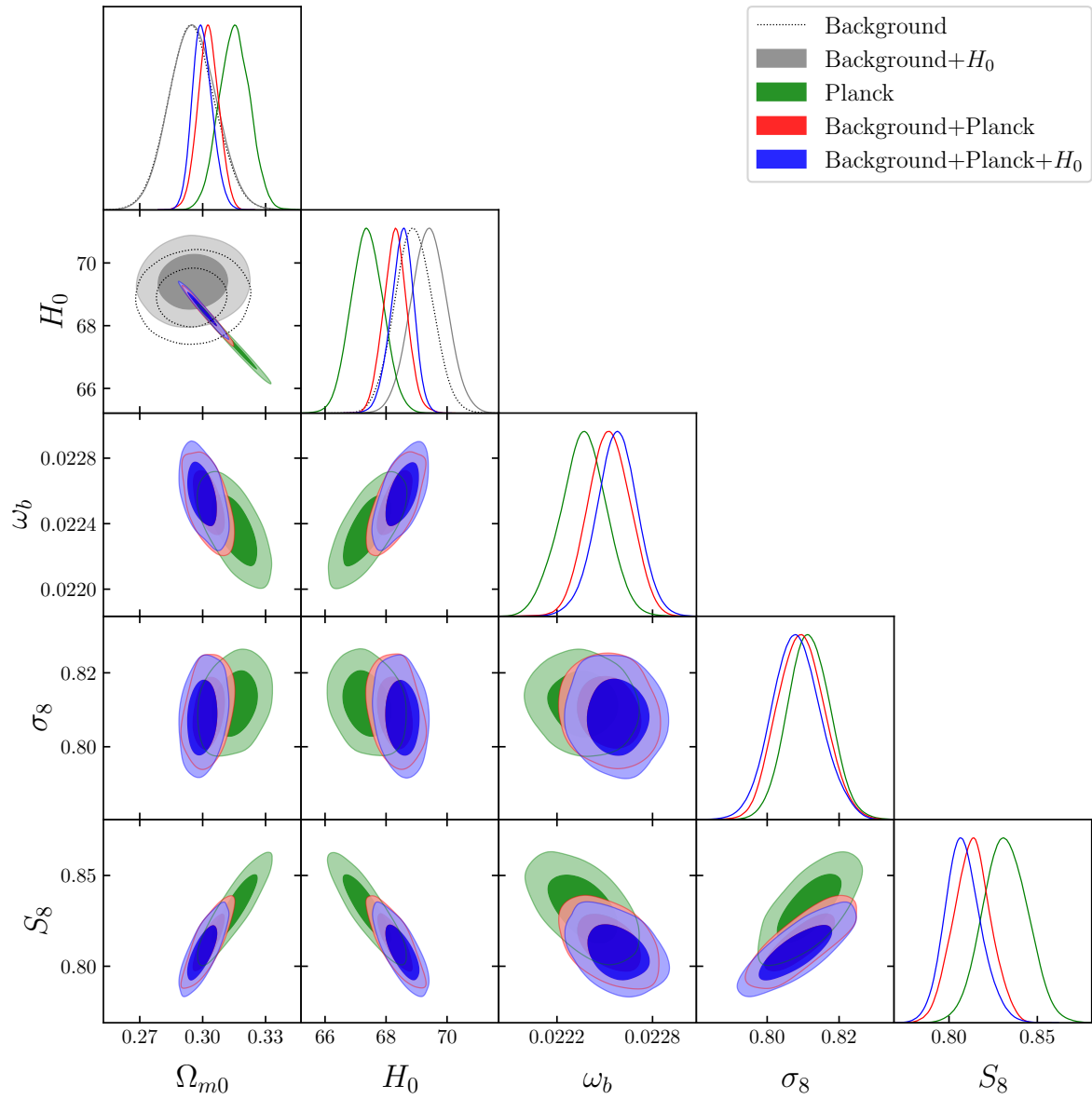
Tabela 4.2 – Resultados da análise estatística do modelo Λ CDM em 1σ C.L., usando os conjuntos de dados: Planck, Planck+Background e Planck+Background+ H_0 .

Parâmetro	Planck	Background+Planck	Background+Planck+ H_0
$100\theta_s$	$1.04189^{+0.00029}_{-0.00029}$	$1.04209^{+0.00027}_{-0.00027}$	$1.04213^{+0.00028}_{-0.00028}$
$\ln 10^{10} A_s$	$3.045^{+0.014}_{-0.014}$	$3.053^{+0.015}_{-0.015}$	$3.054^{+0.016}_{-0.016}$
n_s	$0.9650^{+0.0041}_{-0.0041}$	$0.9704^{+0.0036}_{-0.0036}$	$0.9715^{+0.0036}_{-0.0032}$
ω_b	$0.02237^{+0.00014}_{-0.00014}$	$0.02253^{+0.00013}_{-0.00013}$	$0.02258^{+0.00013}_{-0.00013}$
ω_c	$0.1200^{+0.0012}_{-0.0012}$	$0.11803^{+0.00086}_{-0.00086}$	$0.11758^{+0.00075}_{-0.00086}$
τ_{reio}	$0.0544^{+0.0074}_{-0.0074}$	$0.0603^{+0.0075}_{-0.0075}$	$0.0611^{+0.0067}_{-0.0067}$
H_0 [km/s/Mpc]	$67.38^{+0.53}_{-0.53}$	$68.30^{+0.39}_{-0.39}$	$68.52^{+0.40}_{-0.34}$
Ω_{m0}	$0.3152^{+0.0073}_{-0.0073}$	$0.3027^{+0.0050}_{-0.0050}$	$0.2999^{+0.0043}_{-0.0052}$
σ_8	$0.8116^{+0.0059}_{-0.0059}$	$0.8094^{+0.0064}_{-0.0064}$	$0.8081^{+0.0067}_{-0.0067}$
S_8	$0.832^{+0.013}_{-0.013}$	$0.813^{+0.010}_{-0.010}$	$0.8090^{+0.0091}_{-0.0110}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

¹ Do inglês: *confidence level* (C.L.).

Figura 4.1 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres no modelo Λ CDM, usando os conjuntos de dados: Background, Background+ H_0 , Planck, Background+Planck e Background+Planck+ H_0 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2 Resultados observacionais do modelo com acoplamento quadrático

Os resultados de nossa análise são apresentados nas Tabelas 4.3 e 4.4, com e sem o WEC *prior*. Para os testes de *background*, o parâmetro de densidade física de bárions foi fixado em $\omega_b = \Omega_{b0}h^2 = 0.022$ (DESI Collaboration *et al.*, 2025c), enquanto nas análises que incluem dados da CMB, ω_b é um parâmetro livre.

Tabela 4.3 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L., considerando as análises sem e com a WEC *prior*, usando os conjuntos de dados: Background e Background+ H_0 .

Parâmetro	Background		Background+ H_0	
	Sem prior	WEC prior	Sem prior	WEC prior
γ	$0.01^{+0.12}_{-0.12}$	> -0.126	$0.10^{+0.11}_{-0.11}$	> -0.092
ω_c	$0.116^{+0.019}_{-0.015}$	$0.1293^{+0.0091}_{-0.0110}$	$0.104^{+0.020}_{-0.018}$	$0.1292^{+0.0082}_{-0.0092}$
H_0 [km/s/Mpc]	$69.0^{+1.2}_{-1.2}$	$68.13^{+0.80}_{-0.80}$	$70.2^{+1.0}_{-1.0}$	$68.99^{+0.65}_{-0.59}$
Ω_{m0}	$0.291^{+0.047}_{-0.040}$	$0.326^{+0.021}_{-0.030}$	$0.256^{+0.044}_{-0.044}$	$0.318^{+0.018}_{-0.022}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

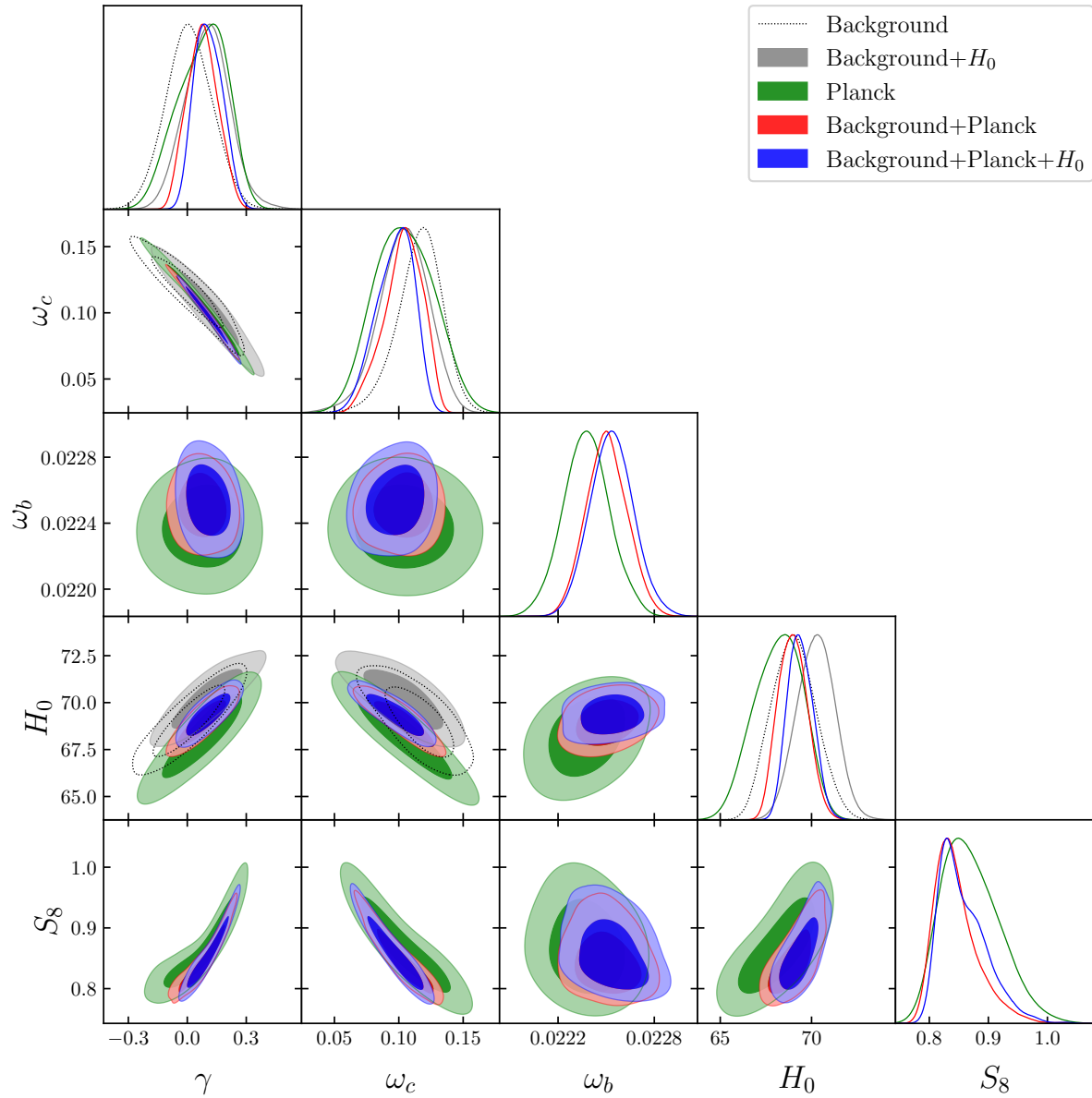
Tabela 4.4 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L., considerando as análises sem e com a WEC *prior*, usando os conjuntos de dados: Planck, Planck+Background e Planck+Background+ H_0 .

Parâmetros	Planck		Planck+Background		Planck+Background+ H_0	
	Sem prior	WEC prior	Sem prior	WEC prior	Sem prior	WEC prior
γ	$0.08^{+0.14}_{-0.11}$	> -0.117	$0.077^{+0.078}_{-0.078}$	> -0.058	$0.107^{+0.067}_{-0.079}$	> -0.0161
$100\theta_s$	$1.04191^{+0.00030}_{-0.00030}$	$1.04187^{+0.00030}_{-0.00030}$	$1.04206^{+0.00030}_{-0.00030}$	$1.042213^{+0.00034}_{-0.00034}$	$1.04212^{+0.00027}_{-0.00027}$	$1.04215^{+0.00024}_{-0.00024}$
$\ln 10^{10} A_s$	$3.045^{+0.015}_{-0.015}$	$3.044^{+0.014}_{-0.014}$	$3.051^{+0.014}_{-0.014}$	$3.052^{+0.015}_{-0.015}$	$3.053^{+0.014}_{-0.014}$	$3.056^{+0.012}_{-0.012}$
n_s	$0.9654^{+0.0041}_{-0.0041}$	$0.9647^{+0.0040}_{-0.0040}$	$0.9696^{+0.0035}_{-0.0035}$	$0.9707^{+0.0035}_{-0.0031}$	$0.9704^{+0.0036}_{-0.0036}$	$0.9722^{+0.0037}_{-0.0037}$
ω_b	$0.02238^{+0.00014}_{-0.00014}$	$0.02236^{+0.00014}_{-0.00014}$	$0.02250^{+0.00013}_{-0.00013}$	$0.02250^{+0.00013}_{-0.00013}$	$0.02254^{+0.00013}_{-0.00013}$	$0.02263^{+0.00013}_{-0.00013}$
ω_c	$0.104^{+0.022}_{-0.022}$	$0.1287^{+0.0054}_{-0.0054}$	$0.103^{+0.018}_{-0.012}$	$0.1236^{+0.0040}_{-0.0046}$	$0.097^{+0.017}_{-0.012}$	$0.1191^{+0.0012}_{-0.0014}$
τ_{reio}	$0.0544^{+0.0076}_{-0.0076}$	$0.0539^{+0.0070}_{-0.0070}$	$0.0588^{+0.0072}_{-0.0072}$	$0.0592^{+0.0076}_{-0.0076}$	$0.0504^{+0.0074}_{-0.0074}$	$0.0628^{+0.0070}_{-0.0064}$
H_0 [km/s/Mpc]	$68.2^{+1.5}_{-1.3}$	$66.70^{+0.70}_{-0.70}$	$68.97^{+0.79}_{-0.79}$	$68.00^{+0.41}_{-0.41}$	$69.38^{+0.65}_{-0.75}$	$68.53^{+0.36}_{-0.36}$
Ω_{m0}	$0.275^{+0.058}_{-0.066}$	$0.347^{+0.020}_{-0.027}$	$0.267^{+0.042}_{-0.032}$	$0.318^{+0.011}_{-0.012}$	$0.251^{+0.039}_{-0.031}$	$0.3033^{+0.0052}_{-0.0052}$
σ_8	$0.93^{+0.14}_{-0.17}$	$0.763^{+0.036}_{-0.029}$	$0.905^{+0.052}_{-0.130}$	$0.782^{+0.017}_{-0.017}$	$0.947^{+0.066}_{-0.140}$	$0.8001^{+0.0081}_{-0.0065}$
S_8	$0.869^{+0.041}_{-0.057}$	$0.819^{+0.015}_{-0.015}$	$0.845^{+0.022}_{-0.044}$	$0.8038^{+0.0098}_{-0.0088}$	$0.857^{+0.026}_{-0.048}$	$0.804^{+0.010}_{-0.009}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

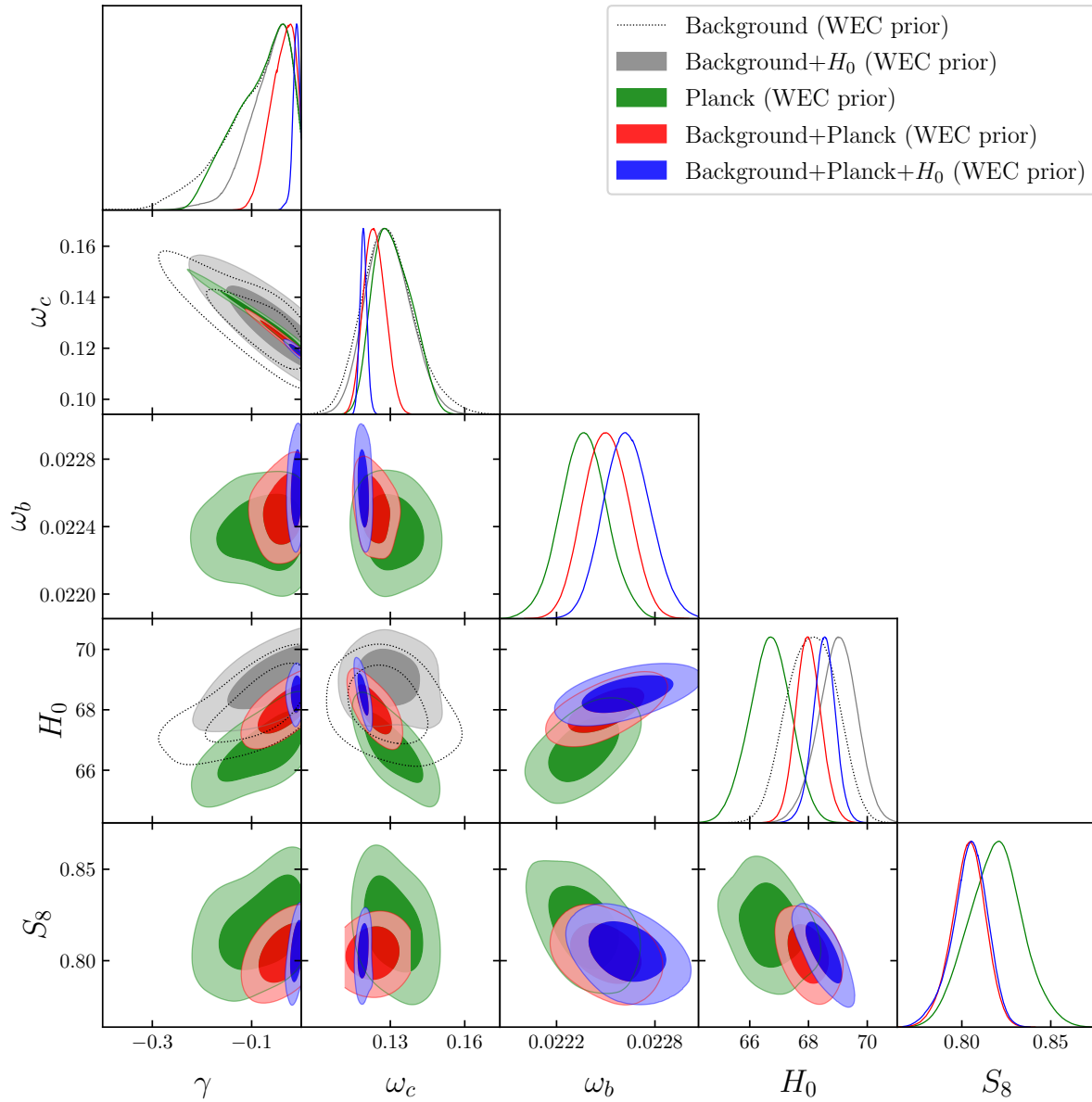
Na Figura 4.2, são mostradas as curvas de contorno e as distribuições dos posteriores correspondentes, sem implementação da restrição da WEC nas soluções de *background*. Na Figura 4.3, são mostradas as curvas de contorno e as distribuições dos posteriores, levando em consideração a restrição da WEC. Ambas as figuras exibem regiões de contorno em níveis de confiança de 1σ e 2σ C.L., respectivamente. As regiões de confiança para H_0 , Ω_{m0} e σ_8 são menos restritivas sem o WEC *prior* e mais restritivas com ele, sendo consistentes com os resultados do Planck (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c) em 2.3σ C.L.. As Figuras 4.2 e 4.3 mostram uma anticorrelação entre o parâmetro de interação γ e o parâmetro ω_c (ou com Ω_{m0} ,

Figura 4.2 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises sem WEC prior, usando os conjuntos de dados: Background, Background+ H_0 , Planck, Background+Planck e Background+Planck+ H_0 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.3 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises com WEC *prior*, usando os conjuntos de dados: Background, Background+ H_0 , Planck, Background+Planck e Background+Planck+ H_0 .

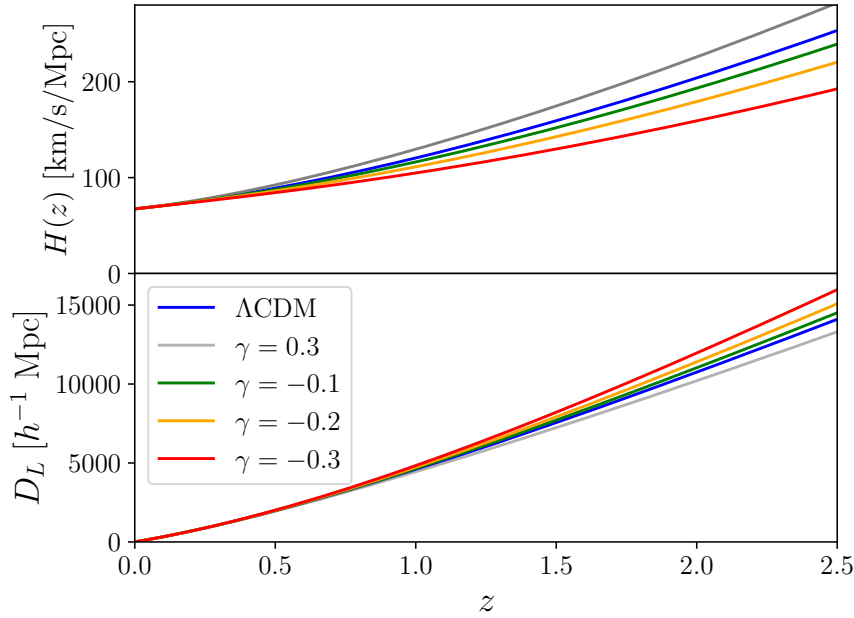


Fonte: Elaborada pelo autor.

conforme é mostrado na Figura 4.7), e exibem uma correlação entre o parâmetro de interação γ e os parâmetros σ_8 , S_8 e H_0 . Para interpretar essas correlações, é útil observar como os observáveis mudam conforme os parâmetros envolvidos mudam.

Na Figura 4.4 são mostradas a taxa de expansão $H(z)$ (painel superior) e a distância de luminosidade $D_L(z)$ (painel inferior) como uma função do *redshift* para diferentes valores de γ . Mesmo se considerarmos apenas o *background*, podemos apreciar um efeito compensatório entre γ e Ω_{m0} . A medida que Ω_{m0} aumenta, o crescimento do parâmetro de *Hubble*, que está relacionado aos dados dos cronômetros cósmicos, diminui, uma vez que, na ausência de curvatura, a contribuição da energia escura aumenta. Uma vez que quanto menor o parâmetro γ , maior a supressão da contribuição da densidade de energia da matéria escura (ver Figura 3.2), encontramos uma anticorrelação entre Ω_m e o parâmetro de interação γ . Consequentemente, a correlação entre γ e a constante de *Hubble* é direta, pois $H(z)$ aumenta com H_0 . Similarmente, a distância de luminosidade relacionada aos dados de supernova do tipo Ia, uma vez que incorpora a integral de $H(z)^{-1}$, aumenta com o aumento do parâmetro Ω_{m0} (ou diminui com o aumento de H_0), assim como diminui com o aumento do parâmetro γ . É possível repetir a mesma avaliação para a distância angular D_A , relacionada aos dados de BAO, uma vez que $D_L = (1+z)^2 D_A$.

Figura 4.4 – O painel superior mostra a taxa de expansão $H(z)$ como uma função do *redshift* z para diferentes valores de γ , enquanto o painel inferior exibe a distância de luminosidade D_L para os mesmos valores de γ .

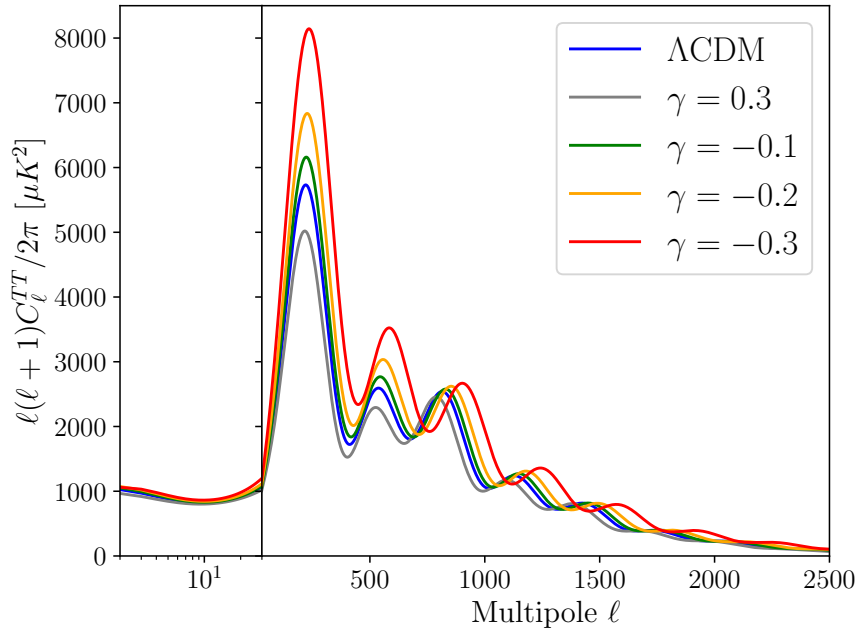


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 4.5 mostra o espectro de potência da temperatura conforme o parâmetro γ varia, onde é possível comparar esse comportamento com o observado com mudanças nos parâmetros Ω_{m0} e σ_8 . Um aumento no valor de Ω_{m0} antecipa a época de radiação (veja a Figura 3.2) e, através do efeito de condução da radiação, suprime o espectro de potência (HU; DODELSON, 2002; WANDS; PIATTELLA; CASARINI, 2016). De maneira similar, um aumento no parâmetro

γ também antecipa a época da radiação, produzindo o mesmo efeito. Por outro lado, um aumento no parâmetro σ_8 corresponde a um aumento na amplitude das perturbações escalares, ou a um aumento nas anisotropias de temperatura. Isso implica que, para ajustar os dados relacionados às flutuações de temperatura do fundo cósmico de micro-ondas, encontramos uma anticorrelação entre o parâmetro γ e o parâmetro Ω_{m0} , e uma correlação com o parâmetro σ_8 e, portanto, com o parâmetro S_8 .

Figura 4.5 – Espectros de potência de temperatura da CMB para diferentes valores de γ . Utilizamos o código CLASS e, para o modelo Λ CDM, fixamos os parâmetros $\gamma = 0$, $\omega_x = -1$, $\omega_c = 0.1200$, $\omega_b = 0.02237$ e $h = 0.6736$ (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que as mesmas tendências acompanham outros modelos que exibem física de acoplamento semelhante (MARTTENS *et al.*, 2017b; MARTTENS *et al.*, 2019).

Os gráficos triangulares nas Figuras 4.2 e 4.3 mostram os resultados dos posteriores para o parâmetro de interação γ são apresentados em dois cenários: sem o uso de um *prior* e com a aplicação do WEC *prior*, respectivamente. Para o caso sem *prior*, em todas as análises, o valor médio de γ é ligeiramente maior que zero, o que significa que a WEC será inevitavelmente violada no futuro. Em contraste, quando o WEC *prior* é levado em consideração, o valor médio de γ é sempre negativo, satisfazendo a WEC.

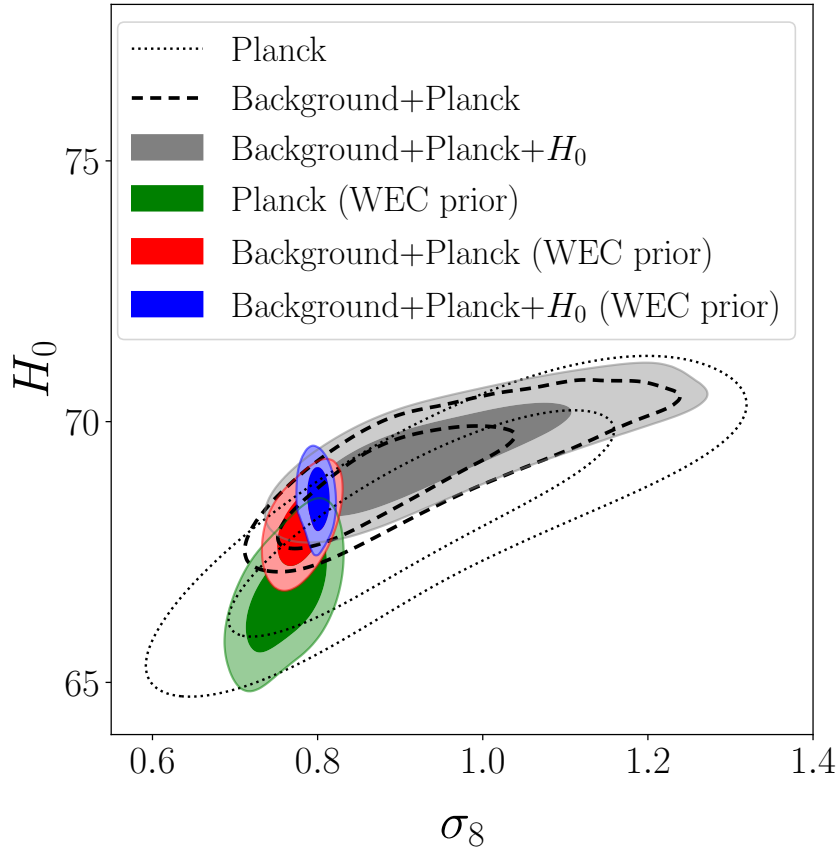
Os resultados com WEC *prior* em 1σ C.L. para γ não satisfazem o modelo padrão Λ CDM. Em todos os casos, o limite Λ CDM ($\gamma = 0$) é satisfeito dentro do 2σ C.L..

Os gráficos triangulares nas Figuras 4.2 e 4.3 mostram também os resultados dos posteriores para H_0 . Tanto no caso com o WEC *prior* quanto sem ele, quando os conjuntos de dados Background, Background+ H_0 e Planck são usados, observa-se restrições mais fracas na constante de Hubble, com uma média de melhor ajuste em torno de $H_0 \approx 67.9 - 69.1$ km

$\text{s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, destacando a necessidade de adicionar mais dados nessas análises. Ao combinar dados de Background com dados de Planck, as restrições são melhoradas. Na [subseção 4.1.1](#), mostramos nossa análise para o modelo ΛCDM ($\gamma = 0$) com o mesmo conjunto de dados para fins de comparação. A tensão de H_0 entre a análise que inclui os dados do Planck e a análise que inclui apenas os dados de Background é reproduzida. O modelo de interação é consistente com ΛCDM até 2σ C.L., e não podemos apreciar uma diminuição significativa da tensão de H_0 (Veja as Tabelas 4.1 e 4.2).

Na [Figura 4.6](#), é apresentado o gráfico para o plano $\sigma_8 - H_0$. No caso em que o WEC *prior* não foi usado, as restrições são mais fracas, enquanto no caso em que o *prior* foi adotado, as restrições são mais rigorosas e as estimativas tendem a um valor menor de σ_8 . Os resultados

Figura 4.6 – Gráfico do parâmetro σ_8 em função do parâmetro de Hubble H_0 , sem o WEC *prior* e com o WEC *prior*.



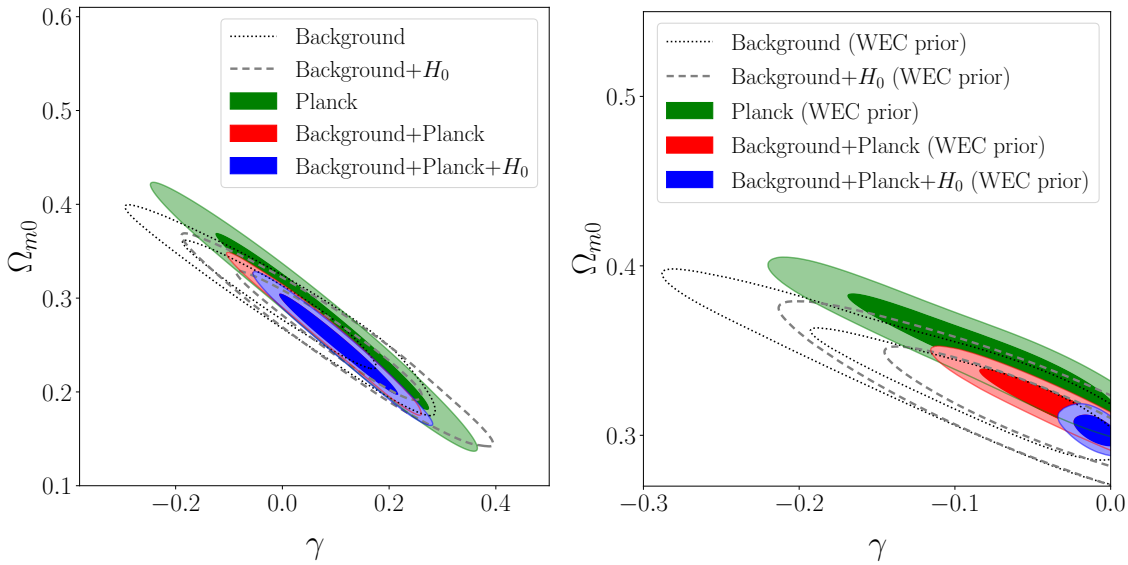
Fonte: Elaborada pelo autor.

das análises com o WEC *prior* produzem valores médios de aproximadamente $67.7 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ para H_0 e 0.78 para σ_8 . A preferência por valores mais baixos de σ_8 alivia a tensão σ_8 entre os resultados primários da CMB do *Planck* 2018 ([PLANCK Collaboration et al., 2020c](#)) e as observações de lentes gravitacionais fracas do levantamento de cisalhamento cósmico KiDS-1000 ([HEYMANS et al., 2021](#)).

A [Figura 4.7](#) mostra o gráfico do parâmetro de interação γ versus o parâmetro de

densidade de matéria Ω_{m0} com e sem o WEC *prior*. No caso sem o WEC *prior*, todos os conjuntos de dados têm restrições fracas nos parâmetros γ e Ω_{m0} , que parecem melhorar quando os dados de Background e H_0 são combinados com os dados do Planck. A inclusão do WEC *prior* melhora significativamente as restrições dos parâmetros, resultando em valores mais altos de Ω_{m0} , o que contribui para aliviar a tensão de S_8 entre os resultados da CMB do *Planck* e as estimativas do levantamento de cisalhamento cósmico KiDS, conforme discutido nas Refs. (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c; HEYMANS *et al.*, 2021; JOUDAKI *et al.*, 2017b; JOUDAKI *et al.*, 2017a).

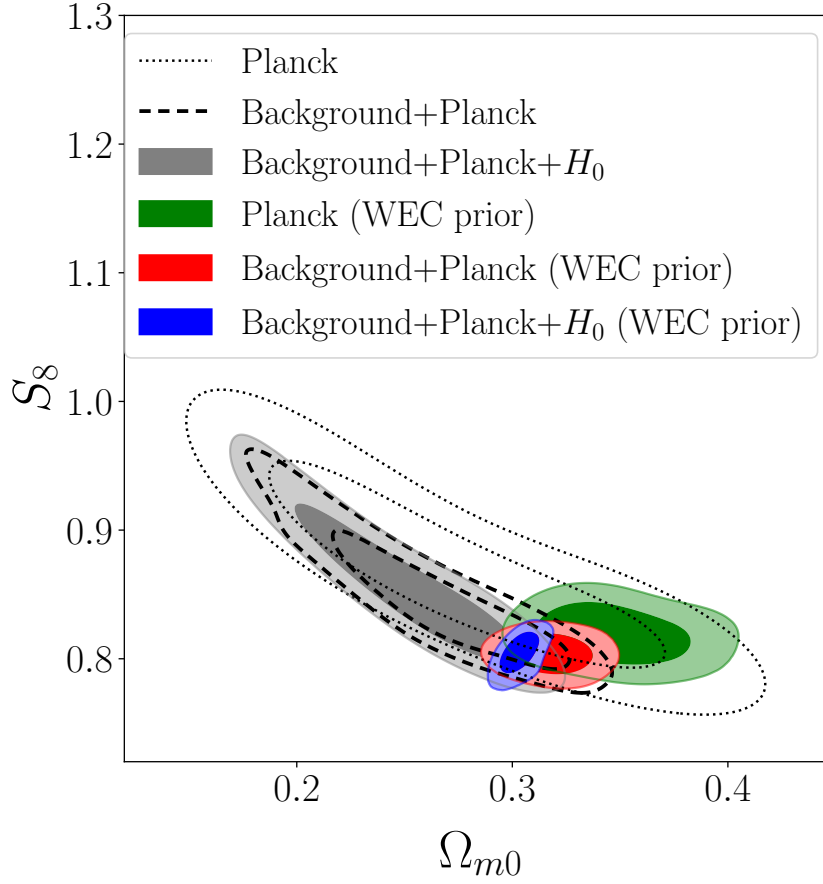
Figura 4.7 – Gráfico do parâmetro de interação γ vs. o parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} sem o WEC *prior* (painel esquerdo) e com WEC *prior* (painel direito).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, na Figura 4.8 apresentamos estimativas da quantidade $S_8 = \sigma_8 (\Omega_{m0}/0.3)^{1/2}$ que descreve o crescimento de estruturas, com e sem o WEC *prior*, usando os conjuntos de dados que incluem Planck. Os resultados das análises sem o WEC *prior*, têm restrições fracas para S_8 e Ω_{m0} . Em contraste, as análises com o WEC *prior* apresentam boas restrições, com valores médios em torno de 0.809 e 0.323 para S_8 e Ω_{m0} , respectivamente. Esses resultados estão de acordo em 2.3σ C.L. com os resultados do *Planck* 2018 (PLANCK Collaboration *et al.*, 2020c) e 1.6σ C.L. com o DESI *survey* (DESI Collaboration *et al.*, 2024) para o modelo Λ CDM, e também são consistentes com os resultados de dados de lentes gravitacionais fracas do KiDS-1000 (HEYMANS *et al.*, 2021), bem como dados de agrupamento e lentes do *Dark Energy Survey* (TROXEL *et al.*, 2018; AMON *et al.*, 2022) em $\sim 3.5\sigma$ C.L.. As análises com o WEC *prior* também são compatíveis com os resultados das análises para o modelo Λ CDM (veja subseção 4.1.1, Tab. 4.2) em 1.3σ C.L.

Figura 4.8 – Gráfico do parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} vs. o parâmetro S_8 sem o WEC *prior* e com o WEC *prior*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Resultados observacionais com o parâmetro da EoS não fixado em $\omega_x = -1$

Em nossa análise, consideramos os seguintes parâmetros cosmológicos: $\mathcal{P} = \{100\theta_s, n_s, \ln(10^{10}A_s), \omega_b, \omega_c, \tau_{reio}, H_0, \Omega_{m0}, \sigma_8, S_8, \gamma, \omega_x\}$, onde ω_x é o parâmetro da EoS. Quando os dados do Planck não são incluídos em nossa análise, consideramos os seguintes parâmetros cosmológicos: $\mathcal{P} = \{\omega_c, H_0, \gamma, \omega_x\}$, e o parâmetro derivado $\mathcal{P}' = \{\Omega_{m0}\}$. Por outro lado, ao incluir os dados do Planck na análise, os parâmetros considerados são: $\mathcal{P} = \{100\theta_s, n_s, \ln(10^{10}A_s), \omega_b, \omega_c, \tau_{reio}, \gamma, \omega_x\}$ e os parâmetros derivados são: $\mathcal{P}' = \{H_0, \Omega_{m0}, \sigma_8, S_8\}$.

Os resultados de nossa análise são apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6, com e sem o WEC *prior* para o modelo com acoplamento quadrático. Nestas análises, o parâmetro da EoS ω_x é considerado como um parâmetro livre. Para o conjunto de dados que não contém Planck (dados de CMB), o parâmetro da densidade física de bárions foi fixado em $\omega_b = \Omega_{b0}h^2 = 0.02218$ (DESI Collaboration *et al.*, 2025b). No entanto, nas análises que incluem dados de CMB, ω_b é tratado como parâmetro livre.

Tabela 4.5 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L. para o modelo com acoplamento quadrático com ω_x não fixado, considerando as análises sem e com a WEC *prior*, usando os conjuntos de dados: DESI+CC e DESI+CC+Pantheon+.

Parâmetros	DESI+CC		DESI+CC+Pantheon+	
	Sem prior	WEC prior	Sem prior	WEC prior
γ	$-0.20^{+0.22}_{-0.19}$	$-0.27^{+0.21}_{-0.13}$	-0.58 ± 0.17	-0.58 ± 0.16
ω_c	$0.145^{+0.039}_{-0.033}$	$0.157^{+0.019}_{-0.024}$	$0.185^{+0.019}_{-0.015}$	$0.185^{+0.019}_{-0.015}$
H_0 [km/s/Mpc]	$70.9^{+1.5}_{-1.7}$	$70.8^{+1.5}_{-1.7}$	68.4 ± 1.0	68.4 ± 1.0
ω_x	$-1.120^{+0.090}_{-0.081}$	$-1.141^{+0.083}_{-0.065}$	-1.143 ± 0.065	-1.144 ± 0.064
Ω_{m0}	$0.332^{+0.078}_{-0.057}$	$0.357^{+0.042}_{-0.054}$	$0.443^{+0.036}_{-0.027}$	$0.444^{+0.036}_{-0.027}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.6 – Resultados da análise estatística em 1σ C.L. para o modelo com acoplamento quadrático com ω_x não fixado, considerando as análises sem e com a WEC *prior*, usando os conjuntos de dados: CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.

Parâmetros	CMB		CMB+DESI		CMB+DESI+Pantheon+	
	Sem prior	WEC prior	Sem prior	WEC prior	Sem prior	WEC prior
γ	0.003 ± 0.021	$-0.0167^{+0.0160}_{-0.0076}$	$0.0098^{+0.094}_{-0.085}$	-0.075 ± 0.048	$-0.142^{+0.034}_{-0.062}$	$-0.144^{+0.034}_{-0.059}$
$100\theta_s$	$1.04194^{+0.00033}_{-0.00030}$	1.04192 ± 0.00031	1.04212 ± 0.00029	$1.04211^{+0.00027}_{-0.00032}$	1.04222 ± 0.00028	1.04222 ± 0.00028
$\ln 10^{10}A_s$	3.037 ± 0.013	$3.037^{+0.011}_{-0.013}$	$3.049^{+0.013}_{-0.016}$	$3.048^{+0.012}_{-0.014}$	$3.058^{+0.014}_{-0.017}$	$3.058^{+0.014}_{-0.017}$
n_s	$0.9669^{+0.0038}_{-0.0053}$	$0.9664^{+0.0038}_{-0.0054}$	0.9709 ± 0.0036	0.9705 ± 0.0035	0.9744 ± 0.0035	0.9744 ± 0.0035
ω_b	0.02243 ± 0.00016	0.02242 ± 0.00014	0.02253 ± 0.00014	$0.02251^{+0.00015}_{-0.00013}$	0.02265 ± 0.00013	0.02265 ± 0.00013
ω_c	0.1178 ± 0.0063	$0.1233^{+0.0027}_{-0.0040}$	0.115 ± 0.017	0.1311 ± 0.0082	$0.1396^{+0.0096}_{-0.0046}$	$0.1399^{+0.0091}_{-0.0048}$
ω_x	-1.74 ± 0.36	$-1.66^{+0.35}_{-0.29}$	-1.144 ± 0.042	-1.166 ± 0.038	$-1.067^{+0.025}_{-0.029}$	$-1.068^{+0.025}_{-0.028}$
τ_{reio}	0.0524 ± 0.0066	$0.0522^{+0.0055}_{-0.0069}$	$0.0592^{+0.0068}_{-0.0078}$	0.0586 ± 0.0070	$0.0645^{+0.0069}_{-0.0086}$	$0.0645^{+0.0068}_{-0.0086}$
H_0 [km/s/Mpc]	93^{+10}_{-20}	90^{+10}_{-14}	$73.12^{+0.92}_{-1.00}$	$72.82^{+0.86}_{-0.96}$	69.80 ± 0.55	69.80 ± 0.56
Ω_{m0}	$0.173^{+0.044}_{-0.064}$	$0.191^{+0.041}_{-0.054}$	0.258 ± 0.034	0.291 ± 0.018	$0.334^{+0.020}_{-0.011}$	$0.335^{+0.020}_{-0.012}$
σ_8	$1.02^{+0.11}_{-0.14}$	$0.963^{+0.076}_{-0.096}$	$0.877^{+0.076}_{-0.110}$	0.791 ± 0.035	$0.725^{+0.015}_{-0.033}$	$0.724^{+0.016}_{-0.031}$
S_8	0.753 ± 0.038	0.752 ± 0.038	$0.806^{+0.025}_{-0.036}$	0.778 ± 0.013	$0.765^{+0.010}_{-0.013}$	$0.764^{+0.010}_{-0.012}$

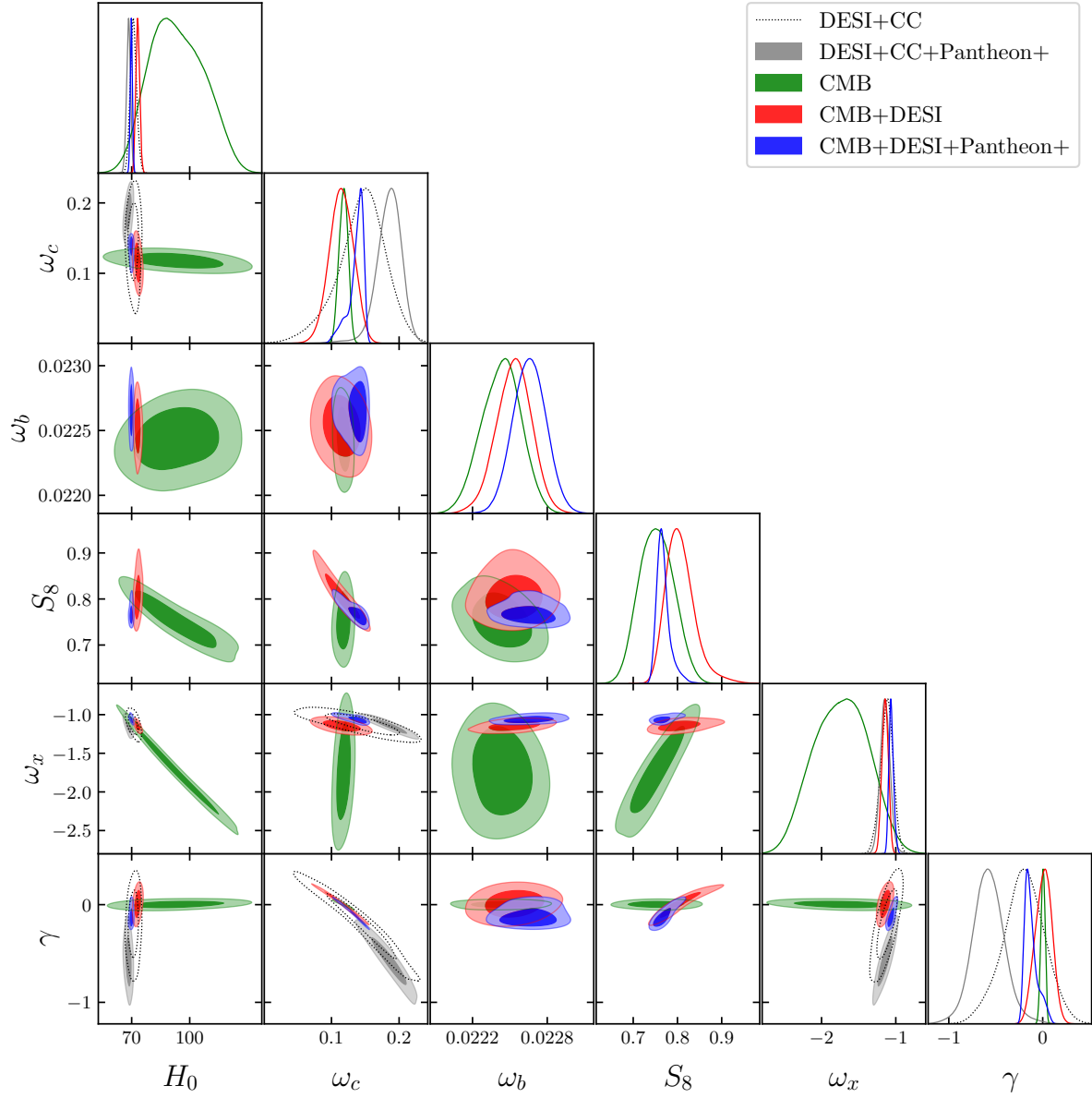
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na [Figura 4.9](#), são apresentados os gráficos triangulares com curvas de contorno e distribuições posteriores sem o WEC *prior*, no modelo de acoplamento quadrático com o parâmetro da EoS ω_x como parâmetro livre. Por outro lado, a [Figura 4.10](#) exibe os mesmos gráficos com a imposição da WEC *prior*. Ambas as figuras mostram as regiões de contorno em 1σ e 2σ C.L., respectivamente.

As Figuras [4.9](#) e [4.10](#) mostram uma anticorrelação entre o parâmetro de interação γ e o parâmetro ω_c , assim como uma anticorrelação entre o parâmetro da equação de estado ω_x e H_0 . As mesmas explicações usadas nas Figuras [4.4](#) e [4.5](#) também são aplicadas aqui.

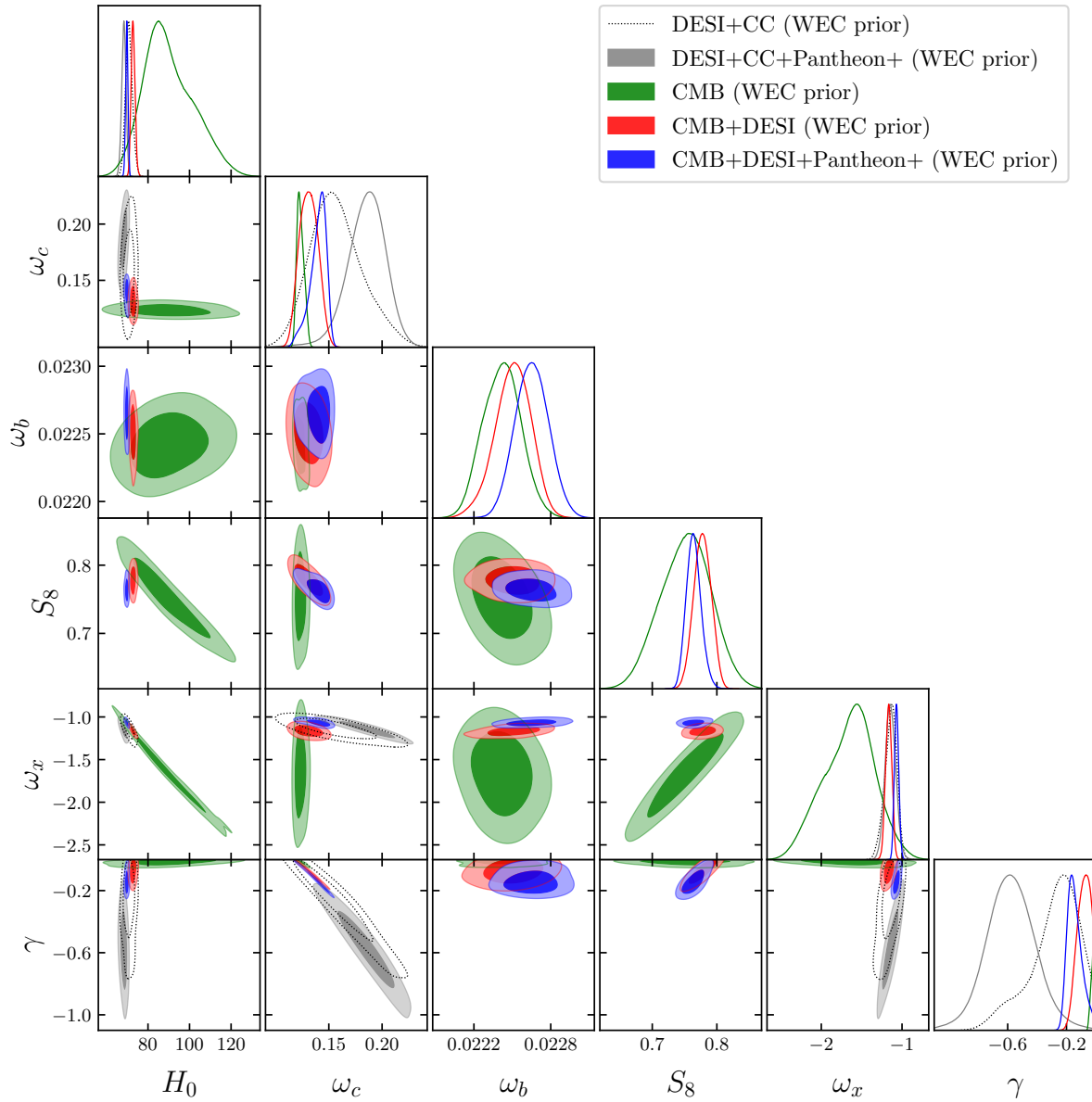
O parâmetro γ apresenta fracas restrições com os parâmetros ω_c , H_0 e ω_x , tanto sem quanto com a imposição do WEC *prior*, exceto quando os dados da CMB são combinados com outros conjuntos de dados na análise. Isso ocorre devido à ausência de informações da CMB sobre o universo primordial e sobre as perturbações, uma vez que os dados de épocas tardias

Figura 4.9 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises sem o WEC *prior*, no modelo de acoplamento quadrático com o parâmetro da equação de estado ω_x livre, utilizando os conjuntos de dados: DESI+CC, DESI+CC+Pantheon+, CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.10 – Gráfico triangular com os parâmetros cosmológicos livres, considerando as análises com o WEC *prior*, no modelo de acoplamento quadrático com o parâmetro da equação de estado ω_x livre, utilizando os conjuntos de dados: DESI+CC, DESI+CC+Pantheon+, CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.



Fonte: Elaborada pelo autor.

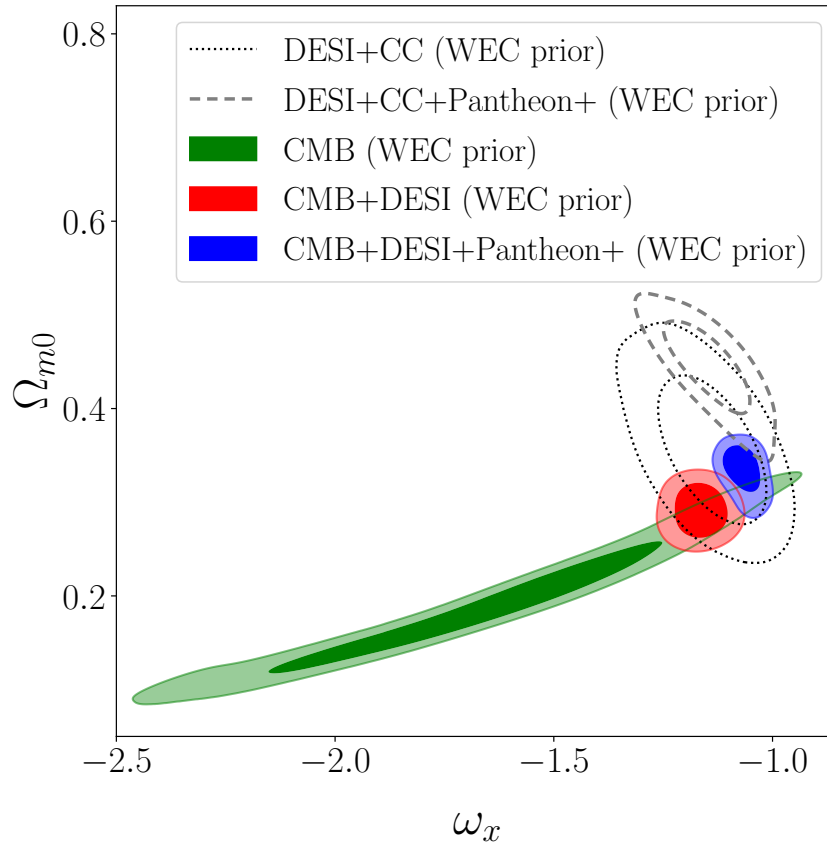
(BAO, CC e SNe Ia) são sensíveis à expansão, mas não conseguem quebrar as degenerescências entre esses parâmetros. Em contraste, a inclusão da CMB melhora significativamente as restrições ao fixar ω_c e o histórico de altos *redshifts* (LIU; WANG; ZHAO, 2024; LEMOS; LEWIS, 2023; DESI Collaboration *et al.*, 2025c), exceto para as análises que utilizam apenas os dados de CMB, principalmente, em modelos com ω_x variável. Pois, a CMB não fornece informações suficientes sobre a evolução tardia do universo quando é dominado pela energia escura. Esta por sua vez, tem pouca influência na época da recombinação ($z \sim 1100$) (WEINBERG *et al.*, 2013).

Neste modelo de acoplamento quadrático com o parâmetro EoS ω_x sendo um parâmetro livre, considerando o WEC *prior*, $\gamma = 0$ (ω CDM) é satisfeito apenas em 4.2σ C.L.. Apenas quando o conjunto de dados CMB+DESI é usado (sem considerar o WEC *prior*), a análise resulta em $\gamma > 0$ em 1σ C.L., indicando inevitavelmente que a WEC será violado no futuro. Os outros conjuntos de dados resultam em $\gamma < 0$ (ou $\gamma = 0$), o que impede a violação da WEC.

Na Figura 4.11, é exibido o gráfico para o plano ω_x – Ω_{m0} para o modelo de acoplamento quadrático, considerando o WEC *prior*. Todos os contornos representam 1σ e 2σ C.L., respectivamente. O conjunto de dados que impõe as restrições mais fortes em Ω_{m0} e ω_x é CMB+DESI+Pantheon+, em contraste com os outros conjuntos de dados. Considerando o WEC *prior*, determinamos: $\omega_x = -1.66^{+0.35}_{-0.29}$ e $\Omega_{m0} = 0.191^{+0.041}_{-0.054}$ para CMB. Enquanto isso, combinando DESI BAO com CMB (CMB+DESI), encontramos $\omega_x = -1.134^{+0.067}_{-0.060}$ e $\Omega_{m0} = 0.291 \pm 0.018$. Por fim, as restrições mais fortes são obtidas ao incluir dados SNe Ia (CMB+DESI+Pantheon+), resultando em $\omega_x = -1.068^{+0.025}_{-0.028}$ e $\Omega_{m0} = 0.335^{+0.020}_{-0.012}$. Na Figura 4.12 é mostrado o gráfico para o plano $\Omega_{m0} - H_0$ no modelo de acoplamento quadrático, com o WEC *prior* e o parâmetro da EoS ω_x como um parâmetro livre e contornos representando 1σ e 2σ C.L., respectivamente. Considerando apenas o WEC *prior*, determinamos: $H_0 = (90^{+10}_{-14})$ km/s/Mpc para a CMB. Enquanto, combinando DESI BAO com CMB (CMB+DESI), encontramos $H_0 = (72.82^{+0.86}_{-0.96})$ km/s/Mpc e $H_0 = (69.80 \pm 0.56)$ km/s/Mpc para CMB+DESI+Pantheon+. Estes resultados são consistentes com o modelo ω CDM da pesquisa DESI DR2 (DESI Collaboration *et al.*, 2025b) até 2.5σ C.L. e até 3σ C.L. com o modelo ww_a CDM, quando não é considerado o conjunto de dados CMB+DESI (com este distoa até 12σ C.L.). Os demais resultados estão resumidos na Tabela 4.5.

A Figura 4.13 (painel esquerdo) mostra o gráfico do parâmetro da EoS ω_x vs. o parâmetro de interação γ , considerando o WEC *prior*. O parâmetro γ é melhor restringido para o conjuntos de dados CMB e com restrições mais fracas para os demais dados. Enquanto que, no parâmetro da EoS ω_x ocorre o oposto, isto é, o conjunto de dados da CMB sofre degenerescência com o aumento ou decréscimo de ω_x , enquanto os demais dados são degenerados com o aumento ou decréscimo de γ . A Figura 4.13 (painel direito) mostra o gráfico do parâmetro de interação γ vs. o parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} , com o parâmetro da EoS ω_x como um parâmetro livre, considerando o WEC *prior*. Aqui o parâmetro de interação γ apresenta uma anticorrelação com o parâmetro Ω_{m0} , exceto para o conjunto de dados da CMB (no qual a anticorrelação é

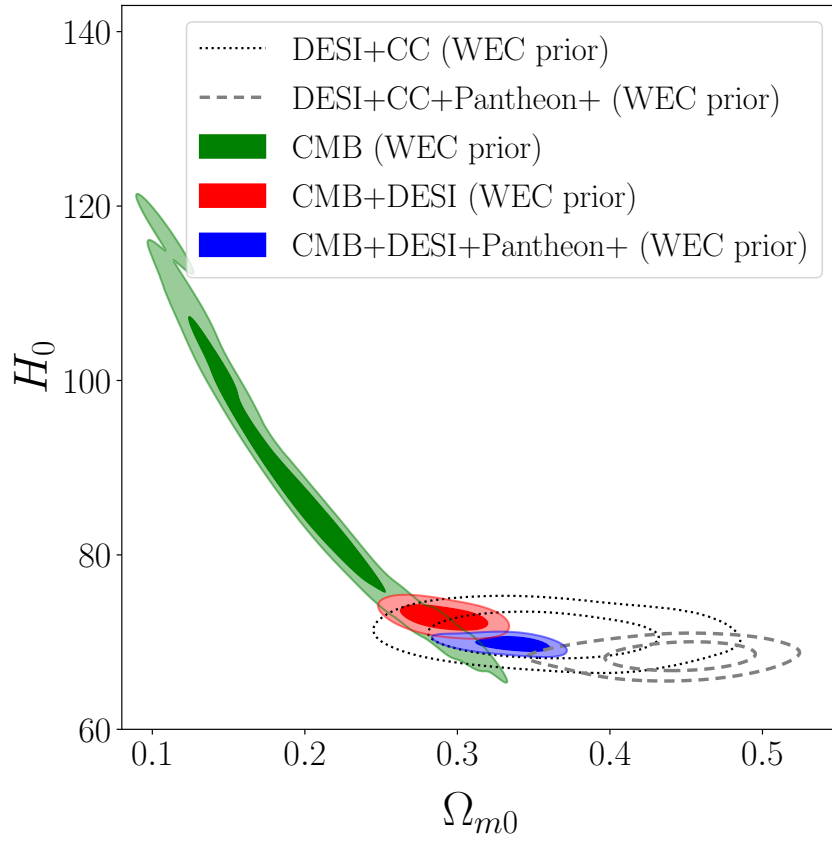
Figura 4.11 – Gráfico do parâmetro Ω_{m0} em função do parâmetro da EoS ω_x considerando o WEC *prior*, no modelo de acoplamento quadrático, utilizando os conjuntos de dados: DESI+CC, DESI+CC+Pantheon+, CMB, CMB+DESI e CMB+DESI+Pantheon+.



Fonte: Elaborada pelo autor.

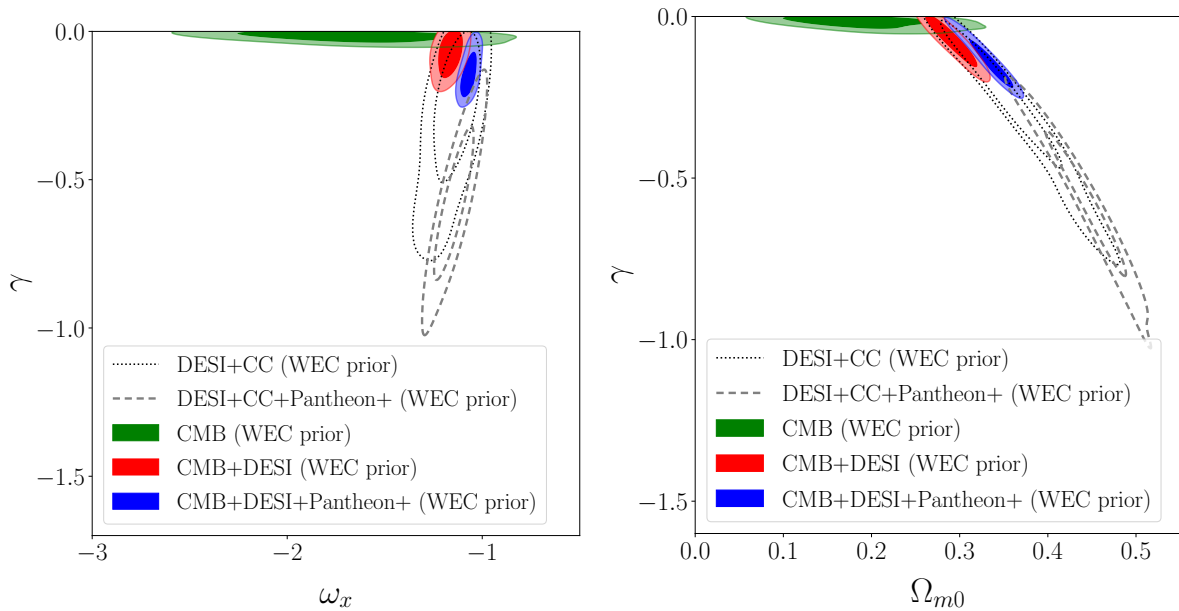
bem suave ou inexistente). Todos os conjuntos de dados têm restrições fracas nos parâmetros γ e Ω_{m0} , exceto conjunto de dados da CMB que restringem bem o valor para γ . No entanto, este tem degenerescência e restrição fraca para Ω_{m0} . As restrições são melhoradas em Ω_{m0} quando combinamos dados de DESI com dados da CMB e também para o parâmetro γ considerando os demais conjuntos de dados.

Figura 4.12 – O gráfico mostra as restrições nos parâmetros Ω_{m0} e H_0 com com o WEC *prior* e o parâmetro da EoS ω_x como um parâmetro livre, no modelo de acoplamento quadrático.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.13 – Gráfico do parâmetro da EoS ω_x vs. o parâmetro de interação γ (painel esquerdo) e o parâmetro de densidade de matéria Ω_{m0} vs. o parâmetro de interação γ (painel direito) com o parâmetro da EoS ω_x como um parâmetro livre, ambos considerando o WEC *prior*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

“Não existe o direito à vida em nenhuma sociedade sobre a Terra hoje em dia, nem houve tal direito em nenhuma época no passado (com algumas raras exceções, como entre os jainistas da Índia): criamos animais nas fazendas para a matança; destruimos florestas; poluímos rios e lagos até que os peixes não possam mais viver nesses ambientes; matamos veados e alces por esporte, leopardos pelas suas peles e as baleias para fabricar fertilizantes; encurralamos golfinhos, arfando e se contorcendo, em grandes redes; matamos a pauladas filhotes de focas; e provocamos a extinção de uma espécie a cada dia. Todos esses animais e vegetais são tão Vivos como nós. O que é (calcadamente) protegido não é a vida. mas a vida humana.”
(Bilhões e Bilhões, Carl Sagan.)

Neste capítulo, faremos as devidas conclusões e abordaremos as perspectivas.

5.1 Conclusões

Ao longo desta tese foi realizada uma breve abordagem dos principais pontos da cosmologia relativística, tendo como objeto de estudo a cosmologia do setor escuro. Nesta, o estudo foi baseado na descrição matemática dos modelos de interação do setor escuro do Universo, especificamente, um modelo com acoplamento quadrático, designado como IDEM 2 por [Marttens et al. \(2019\)](#). Além disso, estudamos também o modelo padrão Λ CDM para servir de comparação e validação dos resultados do modelo interativo com a EoS fixa em $\omega_x = -1$. Adicionalmente, estudamos também o modelo interativo com acoplamento quadrático com a EoS não fixada em $\omega_x = -1$.

O modelo padrão Λ CDM apresenta diferentes problemas, como o problema da constante cosmológica, a coincidência cosmológica e a tensão do *Hubble* ([ELLIS et al., 2011](#); [SAMI, 2009](#); [VELTEN](#); [MARTTENS](#); [ZIMDAHL, 2014](#); [WEINBERG, 1989b](#); [ZLATEV](#); [WANG](#); [STEINHARDT, 1999](#); [MARTTENS et al., 2019](#); [PEEBLES](#); [RATRA, 2003](#); [CAPOZZIELLO](#); [SARRACINO](#); [SOMMA, 2024](#)). Nesse sentido, diversos modelos e abordagens têm sido pro-

postos para descrever melhor a natureza da energia escura. Consequentemente, vários modelos interagentes foram sugeridos para capturar possíveis interações entre os componentes do setor escuro do Universo. Nesta tese, exploramos um modelo interativo descrito por um termo de interação proporcional a $\rho_x^2 / (\rho_c + \rho_x)$. A direção da transferência de energia depende do sinal de Q : quando $Q < 0$, o processo de criação de matéria escura é aumentado e energia escura é decaído, mas quando $Q > 0$, ocorre o oposto. Aqui, investigamos a consistência teórica dessa classe de cosmologias e mostramos que para valores positivos de γ ($\gamma > 0$), que corresponde fisicamente a uma transferência de energia da matéria escura para a energia escura, este modelo em particular prevê uma violação do WEC, especificamente uma violação de $\rho_c \geq 0$, que inevitavelmente ocorrerá na evolução futura.

A análise dos resultados foi executada usando os códigos CLASS, MontePython e GetDist, empregando cinco conjuntos de dados diferentes, conforme descrito na [seção 3.2](#). Na primeira parte da pesquisa, com a EoS fixa em $\omega_x = -1$, para todos os conjuntos de dados, os resultados com o WEC *prior* mostraram valores negativos de γ em 1σ C.L., excluindo assim o modelo padrão Λ CDM, que é reproduzido por $\gamma = 0$. No entanto, para as regiões de 2σ C.L., o parâmetro de interação é $\gamma = 0$, portanto, o modelo Λ CDM é o preferido.

Nossos resultados mostraram uma notável anticorrelação entre o parâmetro de interação γ e Ω_{m0} , bem como uma correlação entre γ e os parâmetros σ_8 , S_8 e H_0 . Fisicamente, reflete o papel compensatório da interação no setor escuro: um aumento em γ reduz a contribuição efetiva da matéria escura, que exige valores mais elevados de H_0 e da amplitude das perturbações (σ_8 , S_8) no ajuste dos observáveis cosmológicos. Por outro lado, a inclusão de interação pode atenuar tensões entre parâmetros obtidos por diferentes sondas cosmológicas, reforçando a importância deste tipo de modelo como alternativa ao modelo Λ CDM.

Em ambos os casos (com e sem o WEC *prior*) não apreciamos uma redução significativa da tensão de *Hubble* apresentada no Λ CDM. Por outro lado, a inclusão do WEC *prior* melhora significativamente as restrições dos parâmetros, mostrando uma preferência por valores drasticamente menores de σ_8 , o que alivia a tensão de σ_8 entre os resultados dos dados da CMB (*Planck* 2018) ([PLANCK Collaboration et al., 2020c](#)) e os dados de lentes gravitacionais fracas (KiDS-1000) ([HEYMANS et al., 2021](#)).

A inclusão do WEC *prior* melhora significativamente as restrições dos parâmetros, resultando em valores mais altos de Ω_{m0} e valores mais baixos de σ_8 , que combinados levam a um valor mais baixo de S_8 , que está incluído entre os valores previstos pelo *Planck* 2018 ([PLANCK Collaboration et al., 2020c](#)), e os valores previstos pelos levantamentos de cisalhamento cósmico ([HEYMANS et al., 2021](#); [JOUDAKI et al., 2017b](#); [JOUDAKI et al., 2017a](#)). Em qualquer caso, nossa análise exhibe que as previsões do modelo com acoplamento quadrático são consistentes com as estimativas atuais de σ_8 e S_8 dentro de regiões de 2σ C.L. com os resultados do *Planck* 2018 e com a pesquisa do DESI ([DESI Collaboration et al., 2024](#)).

Adicionalmente, obtivemos os resultados da segunda parte da pesquisa, em que o parâme-

tro da EoS, do modelo interativo com acoplamento quadrático, não foi fixado em $\omega_x = -1$. Nesta parte também consideramos 5 conjuntos de dados diferentes, conforme descrito na [seção 3.2](#). Os resultados com o parâmetro EoS ω_x sendo um parâmetro livre e com o WEC *prior*, satisfaz $\gamma = 0$ (ω CDM) somente em 4.2σ C.L.. Nesta segunda parte, sem considerar o WEC *prior*, apenas o conjunto de dados CMB+DESI resulta em $\gamma > 0$ em 1σ C.L., que indica a violação da WEC no futuro.

Os resultados mostraram uma anticorrelação entre o parâmetro de interação γ e o parâmetro ω_c e também uma anticorrelação entre os ω_x e H_0 . O parâmetro γ apresenta fracas restrições com os parâmetros ω_c , H_0 e ω_x , tanto com ou sem o WEC *prior*, que melhora quando os dados da CMB são combinados com outros conjuntos de dados. Os dados da CMB isoladamente não consegue resolver o parâmetro ω_x (associado a anergia escura, que domina o Universo tardio) causando grande degenerescências nos resultados para ω_x e outros parâmetros.

Nossos resultados, considerando os parâmetros Ω_{m0} , ω_x e H_0 são consistentes com o modelo ω CDM da pesquisa do DESI DR2 ([DESI Collaboration et al., 2025b](#)) até 2.5σ C.L. e até 3σ C.L. com o modelo ww_a CDM (desconsiderando os dados CMB+DESI).

5.2 Perspectivas

Por conta do surgimento de novos dados e por quebra de equipamento, não foi possível ainda finalizar todos os resultados e análises desta segunda parte da pesquisa com o parâmetro da EoS ω_x não fixado. Portanto, como perspectivas estamos interessados em avaliar o modelo ww_a CDM e fazer comparações com o nossos resultados em andamento com maior profundidade para publicar nossos resultados.

REFERÊNCIAS

AIZPURU, A.; ARJONA, R.; NESSERIS, S. Machine learning improved fits of the sound horizon at the baryon drag epoch. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 104, p. 043521, Aug 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.043521>. Citado na página 89.

ALPHER, R. A.; HERMAN, R.; GAMOW, G. A. Thermonuclear reactions in the expanding universe. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 74, p. 1198–1199, Nov 1948. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1198.2>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 52.

AMENDOLA, L.; FINELLI, F.; BURIGANA, C.; CARTURAN, D. WMAP and the generalized chaplygin gas. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2003, n. 07, p. 005–005, jul 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2003%2F07%2F005>. Citado na página 78.

AMON, A.; GRUEN, D.; TROXEL, M. A.; MACCRANN, N. *et al.* Dark energy survey year 3 results: Cosmology from cosmic shear and robustness to data calibration. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 105, p. 023514, Jan 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.023514>. Citado na página 104.

ANDRIEU, C.; FREITAS, N. de; DOUCET, A.; JORDAN, M. I. An introduction to mcmc for machine learning. **Machine Learning**, Springer, v. 50, p. 5–43, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1020281327116>. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 137.

AUBOURG, E.; BAILEY, S.; BAUTISTA, J. E. *et al.* Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 123516, Dec 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.123516>. Citado na página 53.

AUDREN, B.; LESGOURGUES, J.; BENABED, K.; PRUNET, S. Conservative constraints on early cosmology: an illustration of the monte python cosmological parameter inference code. **JCAP**, v. 1302, p. 001, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/001>. Citado na página 34.

_____. Conservative constraints on early cosmology with monte python. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2013, n. 02, p. 001, feb 2013. Citado na página 92.

BAHCALL, N. A. Hubble's law and the expanding universe. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 112, n. 11, p. 3173–3175, 2015. ISSN 0027-8424. Disponível em: <https://www.pnas.org/content/112/11/3173>. Citado na página 32.

BAMBA, K.; CAPOZZIELLO, S.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. **Astrophysics and Space Science**, v. 342, n. 1, p. 155–228, 2012. ISSN 1572-946X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10509-012-1181-8>. Citado na página 33.

- BAMBI, C.; DOLGOV, A. D. Cosmic microwave background. In: _____. **Introduction to Particle Cosmology: The Standard Model of Cosmology and its Open Problems**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. p. 191–206. ISBN 978-3-662-48078-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48078-6_10>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- BARTLETT, D. J.; KAMMERER, L.; KRONBERGER, G. *et al.* A precise symbolic emulator of the linear matter power spectrum. **A&A**, v. 686, p. A209, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202348811>>. Citado na página 70.
- BASSETT, B. A.; HLOZEK, R. **Baryon Acoustic Oscillations**. 2009. Citado na página 89.
- BAUMANN, D. **Cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2022. Citado 7 vezes nas páginas 36, 37, 38, 46, 47, 139 e 140.
- BENGALY, C.; DANTAS, M. A.; CASARINI, L.; ALCANIZ, J. Measuring the hubble constant with cosmic chronometers: a machine learning approach. **The European Physical Journal C**, v. 83, n. 6, p. 548, jun 2023. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11734-1>>. Citado na página 72.
- BENNETT, C. L.; KOGUT, A.; HINSHAW, G. *et al.* Cosmic temperature fluctuations from two years of coBE differential microwave radiometers observations. **apj**, v. 436, p. 423, dez. 1994. Citado na página 53.
- BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 66, p. 043507, Aug 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.043507>>. Citado na página 78.
- BERNARDIS, P. de; ADE, P. A. R.; BOCK, J. J. *et al.* A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. **Nature**, v. 404, n. 6781, p. 955–959, apr 2000. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/35010035>>. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.
- BETOULE, M.; KESSLER, R.; GUY, J. *et al.* Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. **Astronomy and Astrophysics**, v. 568, p. A22, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423413>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 87.
- BEVINGTON, P. R.; ROBINSON, D. **Data Reduction and Error analysis for the Physical Sciences**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003. Citado na página 92.
- BLANDFORD, R. D.; AMIN, M.; BALTZ, E. A.; MANDEL, K.; MARSHALL, P. J. Cosmokinetics. 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0408279>>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- BLAS, D.; LESGOURGUES, J.; TRAM, T. The cosmic linear anisotropy solving system (CLASS). part II: Approximation schemes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2011, n. 07, p. 034–034, jul 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2011%2F07%2F034>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 92.
- BODDY, K. K.; FENG, J. L.; KAPLINGHAT, M.; TAIT, T. M. P. Self-interacting dark matter from a non-abelian hidden sector. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, p. 115017, Jun 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.115017>>. Citado na página 74.

- BOLMER, J. **The PyMC MCMC python package**. ESO, 2017. Disponível em: <https://www.sc.eso.org/~bdias/pycoffee/talks/20171207_pymc-mcmc-python.pdf>. Acesso em: 05 Ago. 2020. Citado na página 137.
- BOLOTIN, Y. L.; CHERKASKIY, V. A.; LEMETS, O. A.; YEROKHIN, D. A.; ZAZUNOV, L. G. **Cosmology In Terms Of The Deceleration Parameter. Part I**. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1502.00811>>. Citado 4 vezes nas páginas 40, 46, 47 e 50.
- BONAMENTE, M. Hypothesis testing and statistics. In: _____. **Statistics and Analysis of Scientific Data**. New York: Springer, 2017. cap. 7, p. 117–146. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6572-4_7>. Citado na página 92.
- BORGHI, N.; MORESCO, M.; CIMATTI, A. Toward a better understanding of cosmic chronometers: A new measurement of $h(z)$ at $z \sim 0.7$. **The Astrophysical Journal Letters**, The American Astronomical Society, v. 928, n. 1, p. L4, mar 2022. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac3fb2>>. Citado na página 88.
- BRINCKMANN, T.; LESGOURGUES, J. Montepython 3: Boosted mcmc sampler and other features. **Physics of the Dark Universe**, v. 24, p. 100260, 2019. ISSN 2212-6864. Citado 3 vezes nas páginas 92, 93 e 137.
- BROOKS, S.; GELMAN, A.; JONES, G. L.; MENG, X.-L. **Handbooks of Modern Statistical Methods**. [S.l.]: CRC Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 137.
- BROUT, D.; SCOLNIC, D.; POPOVIC, B.; RIESS, A. G.; *et al.* The pantheon+ analysis: Cosmological constraints. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 938, n. 2, p. 110, oct 2022. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac8e04>>. Citado na página 87.
- BUCHER, M. Physics of the cosmic microwave background anisotropy. **International Journal of Modern Physics D**, v. 24, n. 02, p. 1530004, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218271815300049>>. Citado na página 53.
- CALDERA-CABRAL, G.; MAARTENS, R.; SCHAEFER, B. M. The Growth of Structure in Interacting Dark Energy Models. **JCAP**, v. 0907, p. 027, 2009. Citado na página 87.
- CAPOZZIELLO, S.; SARRACINO, G.; SOMMA, G. D. A critical discussion on the h_0 tension. **Universe**, v. 10, n. 3, 2024. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/10/3/140>>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 72 e 113.
- CARROLL, B.; OSTLIE, D. Cosmology. In: _____. **An Introduction to Modern Astrophysics**. 2. ed. San Francisco: Pearson Addison-Wesley, 2007. cap. 29, p. 1144–1229. Citado 7 vezes nas páginas 39, 40, 45, 46, 49, 139 e 140.
- CARROLL, S. Cosmology. In: _____. **Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity**. San Francisco: Addison Wesley, 2004. cap. 8, p. 323–375. Citado na página 37.
- CARROLL, S. M. The cosmological constant. **Living Reviews in Relativity**, v. 4, n. 1, p. 1, Feb 2001. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2001-1>>. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- CATTOEN, C.; VISSER, M. **Cosmography: Extracting the Hubble series from the supernova data**. 2007. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703122>>. Citado na página 47.

CHIMENTO, L. P.; JAKUBI, A. S.; PAVÓN, D.; ZIMDAHL, W. Interacting quintessence solution to the coincidence problem. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 67, p. 083513, Apr 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.083513>>. Citado na página 72.

CHRISTENSEN, N.; MEYER, R.; KNOX, L.; LUEY, B. Bayesian methods for cosmological parameter estimation from cosmic microwave background measurements. **Classical and Quantum Gravity**, v. 18, n. 14, p. 2677–2688, jul. 2001. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001CQGra..18.2677C>>. Citado na página 137.

COE, D. Fisher Matrices and Confidence Ellipses: A Quick-Start Guide and Software. **arXiv e-prints**, p. arXiv:0906.4123, jun. 2009. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0906.4123C>>. Citado na página 93.

COLES, P.; LUCCHIN, F. First principles. In: _____. **Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure**. 2. ed. Chichester, West Sussex – England: John Wiley & Sons, Ltd, 2002. cap. 1, p. 3–31. ISBN 0471489093. Citado 5 vezes nas páginas 35, 45, 46, 139 e 140.

COMBES, F. .; BOISSÉ, P.; MAZURE, A.; BLANCHARD, A. Cosmology. In: _____. **Galaxies and Cosmology**. 2. ed. Berlin: Springer, 1996. cap. 13, p. 393–436. Citado na página 37.

DALARSSON, M.; DALARSSON, N. 24 - the cosmic dynamics. In: DALARSSON, M.; DALARSSON, N. (Ed.). **Tensors, Relativity, and Cosmology**. 2. ed. Amsterdam: Academic Press, 2015. cap. 24, p. 225–235. ISBN 978-0-12-803397-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803397-5.00024-8>>. Citado na página 37.

DESI Collaboration; ABDUL-KARIM, M.; AGUILAR, J.; AHLEN, S. *et al.* Desi dr2 results i: Baryon acoustic oscillations from the lyman alpha forest. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2503.14739>>. Citado na página 89.

DESI Collaboration; ABDUL-KARIM, M.; AGUILAR, J.; AHLEN, E. *et al.* Desi dr2 results ii: Measurements of baryon acoustic oscillations and cosmological constraints. **arXiv preprint arXiv:2503.14738**, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.14738>>. Citado 6 vezes nas páginas 34, 89, 90, 105, 109 e 115.

DESI Collaboration; ADAME, A.; AGUILAR, J.; AHLEN, S. *et al.* Desi 2024 vi: cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2025, n. 02, p. 021, feb 2025. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2025/02/021>>. Citado 5 vezes nas páginas 34, 89, 90, 98 e 109.

DESI Collaboration; ADAME, A. G.; AGUILAR, J.; AHLEN, S. *et al.* **DESI 2024 VII: Cosmological Constraints from the Full-Shape Modeling of Clustering Measurements**. 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2411.12022>>. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 114.

DODELSON, S. 4 - the boltzmann equations. In: DODELSON, S. (Ed.). **Modern Cosmology**. Burlington: Academic Press, 2003. p. 84–116. ISBN 978-0-12-219141-1. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780122191411500231>>. Citado na página 56.

_____. 7 - inhomogeneities. In: DODELSON, S. (Ed.). **Modern Cosmology**. Burlington: Academic Press, 2003. p. 180–215. ISBN 978-0-12-219141-1. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780122191411500267>>. Citado na página 70.

DODELSON, S.; SCHMIDT, F. 3 - the fundamental equations of cosmology. In: DODELSON, S.; SCHMIDT, F. (Ed.). **Modern Cosmology (Second Edition)**. Second edition. Academic Press, 2021. cap. 3, p. 57 – 83. ISBN 978-0-12-815948-4. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128159484000097>>. Citado na página 74.

_____. 9 - the cosmic microwave background. In: DODELSON, S.; SCHMIDT, F. (Ed.). **Modern Cosmology (Second Edition)**. Second edition. Academic Press, 2021. p. 231–269. ISBN 978-0-12-815948-4. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128159484000152>>. Citado na página 60.

DURRER, R. Perturbation theory. In: _____. **The Cosmic Microwave Background**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. p. 57–104. Citado na página 60.

EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 844–847, 1915. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....844E>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

_____. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 831–839, 1915. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....831E>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

_____. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 778–786, 1915. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....778E>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

_____. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag). **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 799–801, 1915. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:GTN3GYS8>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

_____. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916. [Version translated Into English by Satyendra Nath Bose: **The Foundation of the Generalised Theory of Relativity**]. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

_____. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152.**, 1917. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1917SPAW.....142E>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 35 e 36.

EISENSTEIN, D. J.; SEO, H.-J.; WHITE, M. On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter. **APJ**, v. 664, n. 2, p. 660–674, ago. 2007. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007ApJ...664..660E>>. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 89.

ELLIS, G. F. R.; ELST, H. van; MURUGAN, J.; UZAN, J.-P. On the trace-free einstein equations as a viable alternative to general relativity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 28, n. 22, p. 225007, oct 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F28%2F22%2F225007>>. Citado 9 vezes nas páginas 31, 32, 33, 36, 37, 39, 40, 71 e 113.

ETZ, A. Introduction to the concept of likelihood and its applications. **Advances in Methods and Practices in Psychological Science**, v. 1, n. 1, p. 60–69, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/2515245917744314>>. Citado na página 137.

FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. de F. O. Astronomia e astrofísica: Determinação de distâncias. In: _____. Departamento de Astronomia - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014. cap. 18, p. 177–186. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/livro.pdf>>. Acesso em: 16 de Fevereiro de 2020. Citado na página 44.

_____. Astronomia e astrofísica: Fotometria. In: _____. Departamento de Astronomia - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014. cap. 20, p. 193–215. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/livro.pdf>>. Acesso em: 17 de Junho de 2025. Citado na página 51.

FIXSEN, D. J. The temperature of the cosmic microwave background. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 707, n. 2, p. 916, nov 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/916>>. Citado na página 54.

FIXSEN, D. J.; CHENG, E. S.; GALES, J. M.; MATHER, J. C.; SHAFER, R. A.; WRIGHT, E. L. The cosmic microwave background spectrum from the full cobe* firas data set. **The Astrophysical Journal**, v. 473, n. 2, p. 576, dec 1996. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/178173>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

FRIEDMANN, A. Über die krümmung des raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 10, n. 1, p. 377–386, Dec 1922. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01332580>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.

_____. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 21, n. 1, p. 326–332, Dec 1924. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01328280>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.

FUJIWARA, H. Y. T. Magnitude systems in old star catalogues. **Journal of Astronomical History and Heritage**, v. 8, n. 1, p. 39–47, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.3724/SP.J.1440-2807.2005.01.04>>. Citado na página 51.

GE, F.; MILLEA, M.; CAMPHUIS, E. *et al.* Cosmology from cmb lensing and delensed *ee* power spectra using 2019–2020 spt-3g polarization data. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 111, p. 083534, Apr 2025. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.111.083534>>. Citado na página 54.

GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statist. Sci.**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 4, p. 457–472, 11 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/ss/1177011136>>. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 137.

GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, PAMI-6, n. 6, p. 721–741, 1984. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4767596>>. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 137.

GUIMARÃES, A.; CUNHA, J.; LIMA, J. Bayesian analysis and constraints on kinematic models from union snia. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2009, n. 10, p. 010, oct 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/10/010>>. Citado na página 40.

HANANY, S.; ADE, P.; BALBI, A.; BOCK, J. *et al.* Maxima-1: A measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10'–5°. **The Astrophysical Journal**, v. 545, n. 1, p. L5, nov 2000. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/317322>>. Citado na página 53.

HARRISON, E. R. Redshifts. In: _____. **Cosmology: the science of the universe**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2000. cap. 15, p. 301–322. Fifth printing 2010. Citado 5 vezes nas páginas 45, 46, 139, 140 e 142.

HASTINGS, W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, v. 57, n. 1, p. 97–109, 04 1970. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>>. Citado 3 vezes nas páginas 92, 93 e 137.

HAWLEY, J. F.; HOLCOMB, K. A. Modeling the universe. In: _____. **Foundations of Modern Cosmology**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 2005. cap. 3, p. 313–335. Disponível em: <<https://global.oup.com/academic/product/foundations-of-modern-cosmology-9780198530961>>. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 42.

HELENE, O. A. M.; VANIN, V. R. **Tratamento estatístico de dados em física experimental**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Edgard Blucher LTDA, 1991. Citado na página 92.

HEYMANS, C.; TRÖSTER, T.; ASGARI, M. *et al.* Kids-1000 cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints. **A&A**, v. 646, p. A140, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039063>>. Citado 4 vezes nas páginas 72, 103, 104 e 114.

HINSHAW, G.; SPERGEL, D. N.; VERDE, L. *et al.* First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)* observations: The angular power spectrum. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 148, n. 1, p. 135, sep 2003. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/377225>>. Citado na página 53.

HOGG, D. W. **Distance measures in cosmology**. 2000. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9905116>>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

HOU, S. Q.; HE, J. J.; PARIKH, A. *et al.* Non-extensive statistics to the cosmological lithium problem. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 834, n. 2, p. 165, jan 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/834/2/165>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 72.

HU, W.; DODELSON, S. Cosmic microwave background anisotropies. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews, v. 40, n. Volume 40, 2002, p. 171–216, 2002. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.astro.40.060401.093926>>. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 101.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.

ISLAM, J. N. The friedmann models. In: _____. **AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL COSMOLOGY**. The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. cap. 4, p. 60–75. Citado na página 40.

_____. The robertson–walker metric. In: _____. **AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL COSMOLOGY**. The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. cap. 3, p. 37–59. Citado na página 36.

JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 573, n. 1, p. 37–42, jul. 2002. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/340549>>. Citado na página 52.

JOUDAKI, S.; BLAKE, C.; JOHNSON, A.; AMON, A. *et al.* KiDS-450 + 2dFLenS: Cosmological parameter constraints from weak gravitational lensing tomography and overlapping redshift-space galaxy clustering. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 474, n. 4, p. 4894–4924, 10 2017. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stx2820>>. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 114.

JOUDAKI, S.; MEAD, A.; BLAKE, C. *et al.* KiDS-450: testing extensions to the standard cosmological model. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 471, n. 2, p. 1259–1279, 04 2017. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stx998>>. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 114.

JUNGMAN, G.; KAMIONKOWSKI, M.; GRIEST, K. Supersymmetric dark matter. **Physics Reports**, v. 267, n. 5, p. 195–373, 1996. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157395000585>>. Citado na página 74.

JÚNIOR, Z. C. S.; COSTA, M. O.; HOLANDA, R. F. L.; SILVA, R. Interaction in the dark sector: A phenomenological approach. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 109, p. 123542, Jun 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.123542>>. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.

KAGAN, A.; LANDSMAN, Z. Relation between the covariance and fisher information matrices. **Statistics and Probability Letters**, v. 42, n. 1, p. 7 – 13, 1999. ISSN 0167-7152. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715298001783>>. Citado na página 93.

KARTTUNEN, H.; KRÖGER, P.; OJA, H.; POUTANEN, M.; DONNER, K. Cosmology. In: _____. **Fundamental Astronomy**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. cap. 19, p. 393–414. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-540-34144-4>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.

KOLB, E. W.; MATARRESE, S.; RIOTTO, A. On cosmic acceleration without dark energy. **New Journal of Physics**, v. 8, n. 12, p. 322, dec 2006. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/8/12/322>>. Citado na página 87.

KOUSSOUR, M.; DAHMANI, S.; BENNAI, M.; OUALI, T. Cosmic jerk parameter in symmetric teleparallel cosmology. **The European Physical Journal Plus**, v. 138, n. 2, p. 179, 2023. ISSN 2190-5444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03827-3>>. Citado na página 41.

KOYAMA, K. Cosmological tests of modified gravity. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 79, n. 4, p. 046902, mar 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/4/046902>>. Citado na página 33.

KRAGH, H. **Hubble Law or Hubble-Lemaître Law? The IAU Resolution**. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1809.02557>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

KREMER, G. M. Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation. **arXiv e-prints**, abr. 2014. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014arXiv1404.7083K>>. Citado na página 74.

KUMAR, S. Remedy of some cosmological tensions via effective phantom-like behavior of interacting vacuum energy. **Physics of the Dark Universe**, v. 33, p. 100862, 2021. ISSN 2212-6864. Citado na página 33.

LAZKOZ, R.; LEANIZBARRUTIA, I.; SALZANO, V. Forecast and analysis of the cosmological redshift drift. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 1, p. 11, 2018. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5479-0>>. Citado 2 vezes nas páginas 139 e 140.

LEMAÎTRE, G. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. **Annales de la Société Scientifique de Bruxelles**, v. 47, p. 49–59, jan. 1927. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1927ASSB...47...49L>>. Citado na página 31.

LEMAÎTRE, A. G. A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 91, n. 5, p. 483–490, 03 1931. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/91.5.483>>. Citado na página 31.

LEMOS, P.; LEWIS, A. Cmb constraints on the early universe independent of late-time cosmology. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 107, p. 103505, May 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.103505>>. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 109.

LESGOURGUES, J. TASI Lectures on Cosmological Perturbations. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1302.4640, fev. 2013. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2013arXiv1302.4640L>>. Citado 8 vezes nas páginas 39, 54, 56, 58, 60, 63, 65 e 70.

_____. **Cosmology**. 2015. Course notes, Spring Semester 2015. Given at the University of Bern. Disponível em: <https://lesgourg.github.io/courses/Cosmo_JL_Bern.pdf>. Citado na página 46.

LEWIS, A. Efficient sampling of fast and slow cosmological parameters. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, p. 103529, May 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.103529>>. Citado na página 137.

_____. **GetDist: a Python package for analysing Monte Carlo samples**. 2019. Citado na página 93.

_____. **GetDist: Monte Carlo sample analyzer**. 2019. Astrophysics Source Code Library, record ascl:1910.018. Citado na página 93.

LIDDLE, A. Newtonian gravity. In: _____. **An Introduction to Modern Cosmology**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, Institute for Astronomy, University of Edinburgh, 2015. cap. 3, p. 21–28. Citado na página 37.

LIMA, J. A. S. Alternative dark energy models: an overview. **Brazilian Journal of Physics**, sciELO, v. 34, p. 194 – 200, 03 2004. ISSN 0103-9733. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332004000200009>>. Citado na página 32.

LIMA, J. S. **Estudo de cosmologia com interação no setor escuro do universo**. 133 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2020. Disponível em: <<https://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/15690>>. Citado 4 vezes nas páginas 38, 73, 75 e 92.

- LIMA, J. S.; MARTTENS, R. von; CASARINI, L. Interacting dark sector with quadratic coupling: theoretical and observational viability. **The European Physical Journal Plus**, v. 140, n. 4, p. 297, 2025. ISSN 2190-5444. [arXiv:2412.16299](https://arxiv.org/abs/2412.16299) [astro-ph.GA]. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-025-06237-9>. Citado 3 vezes nas páginas 33, 78 e 95.
- LIU, G.; WANG, Y.; ZHAO, W. Testing the consistency of early and late cosmological parameters with bao and cmb data. **Physics Letters B**, v. 854, p. 138717, 2024. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269324002752>. Citado na página 109.
- LOMBRISER, L. Cosmology in minkowski space. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 40, n. 15, p. 155005, jun 2023. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/acdb41>. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- LOUIS, T.; POSTA, A. L.; ATKINS, Z. *et al.* The atacama cosmology telescope: Dr6 power spectra, likelihoods and λ cdm parameters. **arXiv preprint arXiv:2503.14452**, 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2503.14452>. Citado na página 54.
- MA, C.-P.; BERTSCHINGER, E. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. **Astrophys. J.**, v. 455, p. 7–25, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/176550>. Citado na página 85.
- MACIEL, W. J. **Introdução à Estrutura e Evolução Estelar**. São Paulo: Edusp, 1999. Citado na página 51.
- MAEDA, H.; HARADA, T. Criteria for energy conditions. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 39, n. 19, p. 195002, aug 2022. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac8861>. Citado na página 81.
- MAJEROTTO, E.; VÄLIVIITA, J.; MAARTENS, R. Adiabatic initial conditions for perturbations in interacting dark energy models. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 402, n. 4, p. 2344–2354, 03 2010. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.16140.x>. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 87.
- MAKLER, M. Lentes gravitacionais: Um rico recurso didático na ocasião da celebração dos 100 anos do eclipse de sobral. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, p. 21–36, 2019. ISSN 2176-0144. Disponível em: <http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1679>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- MALANEY, R. A.; MATHEWS, G. J. Probing the early universe: a review of primordial nucleosynthesis beyond the standard big bang. **Physics Reports**, v. 229, n. 4, p. 145 – 219, 1993. ISSN 0370-1573. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390134Y>. Citado na página 32.
- MAROTO, A. L.; RAMIREZ, J. A Conceptual Tour About the Standard Cosmological Model. **arXiv e-prints**, p. astro-ph/0409280, Sep 2004. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2004astro.ph..9280M>. Citado na página 35.
- MARTTENS, R. F. L. C. von. **Cosmologia com interação no setor escuro do Universo**. 119 f. Tese (Doutorado em Física) — PPGFIS, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/7388>. Citado na página 78.

- MARTTENS, R. F. vom; CASARINI, L.; ZIMDAHL, W.; HIPÓLITO-RICALDI, W. S.; MOTA, D. F. Does a generalized chaplygin gas correctly describe the cosmological dark sector? **Phys. Dark Univ.**, v. 15, p. 114–124, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.02.001>>. Citado na página 78.
- MARTTENS, R. vom; CASARINI, L.; ZIMDAHL, W.; HIPÓLITO-RICALDI, W.; MOTA, D. Does a generalized chaplygin gas correctly describe the cosmological dark sector? **Physics of the Dark Universe**, v. 15, p. 114–124, 2017. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686417300067>>. Citado na página 102.
- MARTTENS, R. von; BARBOSA, D.; ALCANIZ, J. One-parameter dynamical dark-energy from the generalized chaplygin gas. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2023, n. 04, p. 052, apr 2023. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2023/04/052>>. Citado 4 vezes nas páginas 33, 75, 78 e 85.
- MARTTENS, R. von; Borges, H. A.; CARNEIRO, S.; ALCANIZ, J. S.; ZIMDAHL, W. Unphysical properties in a class of interacting dark energy models. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 80, p. 1110, dec 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-08682-5>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 78.
- MARTTENS, R. von; CASARINI, L.; MOTA, D.; ZIMDAHL, W. Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy. **Physics of the Dark Universe**, v. 23, p. 100248, 2019. ISSN 2212-6864. [arXiv:1807.11380](https://arxiv.org/abs/1807.11380) [astro-ph.CO]. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686418300992>>. Citado 11 vezes nas páginas 32, 33, 71, 72, 73, 75, 78, 85, 87, 102 e 113.
- MARTTENS, R. von; GONZALEZ, J. E.; ALCANIZ, J.; MARRA, V.; CASARINI, L. Model-independent reconstruction of dark sector interactions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 104, p. 043515, Aug 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.043515>>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 85.
- MARTTENS, R. von; LOMBRISER, L.; KUNZ, M.; MARRA, V.; CASARINI, L.; ALCANIZ, J. Dark degeneracy i: Dynamical or interacting dark energy? **Physics of the Dark Universe**, v. 28, p. 100490, 2020. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686419303292>>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 85.
- MEIKSIN, A.; WHITE, M. The growth of correlations in the matter power spectrum. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 308, n. 4, p. 1179–1184, 10 1999. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1999.02825.x>>. Citado na página 70.
- METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. **The Journal of Chemical Physics**, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1699114>>. Citado 3 vezes nas páginas 92, 93 e 137.
- MILLER, A. D.; CALDWELL, R.; DEVLIN, M. J. *et al.* A measurement of the angular power spectrum of the cosmic microwave background from $l = 100$ to 400. **The Astrophysical Journal**, v. 524, n. 1, p. L1, sep 1999. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/312293>>. Citado na página 53.
- MILNE, E. A. World structure and the expansion of the universe. **nat.**, v. 130, p. 9–10, jul. 1932. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/130009a0>>. Citado na página 35.

MISHRA, K. R.; PACIF, S. K. J.; KUMAR, R.; BAMBA, K. Cosmological implications of an interacting model of dark matter & dark energy. **Physics of the Dark Universe**, v. 40, p. 101211, 2023. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686423000456>>. Citado na página 33.

MITZENMACHER, M.; UPFAL, E. **Probability and Computing Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 137.

MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Letters**, v. 450, n. 1, p. L16–L20, 04 2015. ISSN 1745-3925. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv037>>. Citado na página 88.

MORESCO, M.; AMATI, L.; AMENDOLA, L. *et al.* Unveiling the universe with emerging cosmological probes. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 25, n. 1, p. 6, 2022. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s41114-022-00040-z>>. Citado 3 vezes nas páginas 34, 52 e 88.

MORESCO, M. *et al.* Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to z 1.1 from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. **JCAP**, v. 1208, p. 006, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006>>. Citado na página 88.

MORESCO, M.; POZZETTI, L.; CIMATTI, A.; JIMENEZ, R.; MARASTON, C.; VERDE, L.; THOMAS, D.; CITRO, A.; TOJEIRO, R.; WILKINSON, D. A 6% measurement of the hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 05, p. 014–014, may 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2016%2F05%2F014>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 88.

MYRZAKULOV, N.; KOUSSOUR, M.; ALFEDEEL, A. H.; ELKHAIR, H. Cosmological implications of the constant jerk parameter in $f(q,t)$ gravity theory. **Chinese Journal of Physics**, v. 86, p. 300–312, 2023. ISSN 0577-9073. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S057790732300182X>>. Citado na página 40.

NAESS, S.; GUAN, Y.; DUIVENVOORDEN, A. J. *et al.* **The Atacama Cosmology Telescope: DR6 Maps**. [S.l.], 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2503.14451>>. Citado na página 54.

NARLIKAR, J. V. The friedmann models. In: _____. **Introduction To Cosmology**. 2. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1993. cap. 4, p. 105–134. Citado na página 37.

NĂSTASE, H. The expanding universe and the big bang. In: _____. **Cosmology and String Theory**. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 3–14. ISBN 978-3-030-15077-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15077-8_1>. Citado na página 40.

_____. The propagation of light and measurements of distance, luminosity and mass. In: _____. **Cosmology and String Theory**. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 27–39. ISBN 978-3-030-15077-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15077-8_3>. Citado na página 51.

NGUYEN, H. K.; AZREG-AÏNOU, M. Revisiting weak energy condition and wormholes in brans-dicke gravity. **Nuclear Physics B**, v. 1007, p. 116669, 2024. ISSN 0550-3213. Disponível

em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321324002359>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 81.

NORMAN, M. L. **Simulating Galaxy Clusters**. 2010. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1005.1100>>. Citado na página 70.

NUNES, R. C.; VAGNOZZI, S.; KUMAR, S.; VALENTINO, E. D.; MENA, O. New tests of dark sector interactions from the full-shape galaxy power spectrum. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 105, p. 123506, Jun 2022. Citado na página 33.

NUSSENZVEIG, H. M. Introdução. In: _____. **Curso de Física Básica: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 2013. cap. 1, p. 15–40. Citado na página 44.

OFFRINGA, A. R.; SINGAL, J.; HESTON, S.; HORIUCHI, S.; LUCERO, D. M. Measurement of the anisotropy power spectrum of the radio synchrotron background. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 509, n. 1, p. 114–121, 10 2021. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stab2865>>. Citado na página 60.

OLIVEIRA-FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. 2. ed. [S.l.]: Editora: Livraria da Física, São Paulo, 2004. Citado na página 93.

PACIF, S. K. J. Dark energy models from a parametrization of h : a comprehensive analysis and observational constraints. **The European Physical Journal Plus**, v. 135, n. 10, p. 792, 2020. ISSN 2190-5444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00769-y>>. Citado na página 33.

PADILLA, L. E.; TELLEZ, L. O.; ESCAMILLA, L. A.; VAZQUEZ, J. A. Cosmological parameter inference with Bayesian statistics. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1903.11127, mar. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019arXiv190311127P>>. Citado na página 137.

PAGE, L.; NOLTA, M. R.; BARNES, C. *et al.* First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)* observations: Interpretation of the tt and te angular power spectrum peaks. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 148, n. 1, p. 233, sep 2003. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/377224>>. Citado na página 53.

PANDEY, B.; SARKAR, S. Testing homogeneity in the Sloan Digital Sky Survey Data Release Twelve with Shannon entropy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 454, n. 3, p. 2647–2656, 10 2015. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stv2166>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.

PAPATHANASIOU, V. Some Characteristic Properties of the Fisher Information Matrix via Cacoullos-Type Inequalities. . **Journal of Multivariate analysis**, v. 44, n. 2, p. 256–265, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jmva.1993.1014>>. Citado na página 93.

PAYKARI, P.; LANUSSE, F.; STARCK, J.-L.; SUREAU, F.; BOBIN, J. Prism: Sparse recovery of the primordial power spectrum. **A&A**, v. 566, p. A77, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322326>>. Citado na página 63.

PEEBLES, P. J. E. Nobel lecture: How physical cosmology grew. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 92, p. 030501, Sep 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.92.030501>>. Citado na página 32.

PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 75, p. 559–606, Apr 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.559>>. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 113.

PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, jul. 1965. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1965ApJ...142..419P>>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 52.

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDBABER, G. *et al.* Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F307221>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 87.

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; VALLE, M. D. *et al.* Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. **Nature**, v. 391, n. 6662, p. 51–54, jan. 1998. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/34124>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 87.

PIATTELLA, O. The universe in expansion. In: _____. **Lecture Notes in Cosmology**. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 17–53. ISBN 978-3-319-95570-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-95570-4_2>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

PITROU, C.; COC, A.; UZAN, J.-P.; VANGIONI, E. Precision big bang nucleosynthesis with improved helium-4 predictions. **Physics Reports**, v. 754, p. 1–66, 2018. ISSN 0370-1573. Precision big bang nucleosynthesis with improved Helium-4 predictions. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157318301054>>. Citado na página 32.

PLANCK Collaboration; ADE, P. A. R.; AGHANIM, N.; ALVES, M. I. R.; ARMITAGE-CAPLAN, C. *et al.* Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. **A&A**, v. 571, p. A1, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321529>>. Citado na página 53.

PLANCK Collaboration; AGHANIM, N.; AKRAMI, Y.; ARROJA, F. *et al.* Planck 2018 results - i. overview and the cosmological legacy of planck. **A&A**, v. 641, p. A1, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>>. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 55.

PLANCK Collaboration; Aghanim, N.; Akrami, Y.; Ashdown, M. *et al.* Planck 2018 results - v. cmb power spectra and likelihoods. **A&A**, v. 641, p. A5, 2020. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201936386>>. Citado na página 91.

PLANCK Collaboration; AGHANIM, N.; AKRAMI, Y.; ASHDOWN, M. *et al.* Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. **Astronomy and Astrophysics**, March 2020. [arXiv:1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [astro-ph.GA]. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado 17 vezes nas páginas 15, 16, 34, 53, 62, 67, 68, 69, 72, 87, 89, 91, 98, 102, 103, 104 e 114.

RATSIMBAZAFY, A. L.; LOUBSER, S. I.; CRAWFORD, S. M.; CRESS, C. M.; BASSETT, B. A.; NICHOL, R. C.; VäISÄNEN, P. Age-dating luminous red galaxies observed with the Southern African Large Telescope. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 467, n. 3, p. 3239–3254, 02 2017. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stx301>>. Citado na página 88.

RAVENZWAAIJ, D. van; CASSEY, P.; BROWN, S. D. A simple introduction to markov chain monte-carlo sampling. **Psychon. Bull. Rev.**, Springer, v. 25, p. 143–154, 2018. ISSN 1531-5320. Disponível em: <<https://doi.org/10.3758/s13423-016-1015-8>>. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 137.

RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F300499>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 87.

RIESS, A. G. *et al.* A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. **Astrophys. J.**, v. 826, n. 1, p. 56, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/0004-637X/826/1/56>>. Citado 3 vezes nas páginas 34, 83 e 88.

ROBERTSON, H. P. Kinematics and World-Structure. **apj**, v. 82, p. 284, nov. 1935. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/143681>>. Citado na página 31.

ROOS, M. Cosmological model. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 4. ed. [S.l.]: John-Wiley & Sons, 2015. cap. 5, p. 81–110. Citado 3 vezes nas páginas 31, 38 e 40.

_____. From newton to hubble. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 4. ed. [S.l.]: John-Wiley & Sons, 2015. cap. 1, p. 1–23. Citado na página 31.

_____. Special relativity. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 4. ed. [S.l.]: John-Wiley & Sons, 2015. cap. 2, p. 25–47. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 51.

ROWLAND, D.; WHITTINGHAM, I. B. Models of interacting dark energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 390, n. 4, p. 1719–1726, 10 2008. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13863.x>>. Citado na página 33.

RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107154834. Citado 4 vezes nas páginas 37, 48, 50 e 52.

_____. Measuring cosmological parameters. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 6, p. 153–181. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado 6 vezes nas páginas 40, 46, 47, 49, 51 e 142.

_____. Newton versus einstein. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 3, p. 48–76. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 139 e 140.

SABOGAL, M. A.; SILVA, E.; NUNES, R. C.; KUMAR, S.; VALENTINO, E. D. **Sign Switching in Dark Sector Coupling Interactions as a Candidate for Resolving Cosmological Tensions**. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2501.10323>>. Citado na página 33.

SAMI, M. A primer on problems and prospects of dark energy. **arXiv e-prints**, p. arXiv:0904.3445, abr. 2009. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0904.3445S>>. Citado 3 vezes nas páginas 33, 71 e 113.

SCHRAMM, D. N. Big bang nucleosynthesis: the standard model and alternatives. **Physica Scripta**, IOP Publishing, T36, p. 22–29, jan 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0031-8949%2F1991%2Ft36%2F003>>. Citado na página 32.

SCHUTZ, B. F. Comology. In: _____. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. New York, United States: Cambridge University Press, 2009. cap. 12, p. 335–370. Citado na página 47.

_____. Perfect fluids in special relativity. In: _____. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. New York, United States: Cambridge University Press, 2009. cap. 4, p. 84–110. Citado na página 37.

SCOLNIC, D. M.; JONES, D. O.; REST, A. *et al.* The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe ia from pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 859, n. 2, p. 101, may 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb>>. Citado 3 vezes nas páginas 34, 48 e 87.

SEN, A.; SCHERRER, R. J. The weak energy condition and the expansion history of the universe. **Physics Letters B**, v. 659, n. 3, p. 457–461, 2008. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269307014840>>. Citado na página 81.

SHANKARANARAYANAN, S.; JOHNSON, J. P. Modified theories of gravity: Why, how and what? **General Relativity and Gravitation**, v. 54, n. 5, p. 44, May 2022. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-022-02927-2>>. Citado na página 33.

SHARMA, S. Markov chain monte carlo methods for bayesian data analysis in astronomy. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews, v. 55, n. 1, p. 213–259, Aug 2017. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-082214-122339>>. Citado na página 137.

SHIMON, M. Elucidation of ‘cosmic coincidence’. **New Astronomy**, v. 106, p. 102126, 2024. ISSN 1384-1076. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1384107623001276>>. Citado na página 72.

SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. **Phys. Rev.**, D71, p. 123001, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.123001>>. Citado na página 88.

SITTER, W. de. On einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences. third paper. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 78, n. 1, p. 3–28, 11 1917. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/78.1.3>>. Citado na página 31.

SMOOT, G.; BENNETT, C.; WEBER *et al.* COBE Differential Microwave Radiometers: Instrument Design and Implementation. **apj**, v. 360, p. 685, set. 1990. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990ApJ...360..685S>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 53.

SPEAGLE, J. S. A Conceptual Introduction to Markov Chain Monte Carlo Methods. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1909.12313, set. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019arXiv190912313S>>. Citado na página 137.

STAICOVA, D. Cosmological parameters from different Baryon Acoustic Oscillations dataset. **PoS, CORFU2021**, p. 345, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.22323/1.406.0345>>. Citado na página 53.

STERN, D.; JIMENEZ, R.; VERDE, L.; KAMIONKOWSKI, M.; STANFORD, S. A. Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I: H(z) Measurements. **JCAP**, v. 1002, p. 008, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/02/008>>. Citado na página 88.

SUGIYAMA, N. Introduction to temperature anisotropies of cosmic microwave background radiation. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2014, n. 6, p. 06B101, 06 2014. ISSN 2050-3911. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/ptep/ptu073>>. Citado na página 54.

TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis**. 2. ed. Sausalito, California: University Science Books, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.

TROXEL, M. A.; MACCRANN, N.; ZUNTZ, J. *et al.* Dark energy survey year 1 results: Cosmological constraints from cosmic shear. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 043528, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.043528>>. Citado na página 104.

UMEH, O. Emergence of smooth distance and apparent magnitude in a lumpy universe. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 39, n. 23, p. 235006, nov 2022. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac9d1c>>. Citado na página 51.

VALENTINO, E. D.; MELCHIORRI, A.; MENA, O.; VAGNOZZI, S. Interacting dark energy in the early 2020s: A promising solution to the H_0 and cosmic shear tensions. **Phys. Dark Univ.**, v. 30, p. 100666, 2020. Citado na página 33.

_____. Nonminimal dark sector physics and cosmological tensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 101, p. 063502, Mar 2020. Citado na página 33.

VALKENBURG, W.; MARRA, V.; CLARKSON, C. Testing the Copernican principle by constraining spatial homogeneity. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 438, n. 1, p. L6–L10, 11 2013. ISSN 1745-3925. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt140>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.

VATS, D.; KNUDSON, C. Revisiting the Gelman-Rubin Diagnostic. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1812.09384, dez. 2018. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv181209384V>>. Citado na página 93.

VAVRYČUK, V. Cosmological redshift and cosmic time dilation in the flrw metric. **Frontiers in Physics**, v. 10, p. 826188, May 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3389/fphy.2022.826188>>. Citado 2 vezes nas páginas 139 e 140.

VELTEN, H. E. S.; MARTTENS, R. F. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 1, p. 3160, 2014. ISSN 1434-6062. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3160-4>>. Citado 4 vezes nas páginas 32, 71, 72 e 113.

VICENTE, J. de. On the luminosity-angular distances relation for an expanding universe. In: . [s.n.], 2020. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:258461317>>. Citado na página 49.

VISSER, M. Cosmography: Cosmology without the einstein equations. **General Relativity and Gravitation**, v. 37, n. 9, p. 1541–1548, 2005. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-005-0134-8>>. Citado 6 vezes nas páginas 40, 41, 46, 48, 50 e 142.

VITTORIO, N. **Cosmology**. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Edgard Blucher LTDA, 1996. (4a reimpressão, 2005). Citado na página 92.

VÄLIVIITA, J.; MAJEROTTO, E.; MAARTENS, R. Large-scale instability in interacting dark energy and dark matter fluids. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2008, n. 07, p. 020, jul 2008. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2008/07/020>>. Citado na página 87.

WALKER, A. G. On milne's theory of world-structure*. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s2-42, n. 1, p. 90–127, 1937. Disponível em: <<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-42.1.90>>. Citado na página 31.

WANDS, D.; PIATTELLA, O. F.; CASARINI, L. Physics of the cosmic microwave background radiation. In: FABRIS, J. C.; PIATTELLA, O. F.; RODRIGUES, D. C.; VELTEN, H. E.; ZIMDAHL, W. (Ed.). **The Cosmic Microwave Background**. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 3–39. ISBN 978-3-319-44769-8. Citado 5 vezes nas páginas 52, 53, 54, 60 e 101.

WANG, Y.; WANDS, D.; XU, L.; DE-SANTIAGO, J.; HOJJATI, A. Cosmological constraints on a decomposed chaplygin gas. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, p. 083503, Apr 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.083503>>. Citado na página 78.

WEINBERG, D. H.; MORTONSON, M. J.; EISENSTEIN, D. J.; HIRATA, C.; RIESS, A. G.; ROZO, E. Observational probes of cosmic acceleration. **Physics Reports**, v. 530, n. 2, p. 87–255, 2013. ISSN 0370-1573. Observational Probes of Cosmic Acceleration. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157313001592>>. Citado na página 109.

WEINBERG, S. Cosmography. In: _____. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. [S.l.]: Wiley, 1972. cap. 14, p. 407–468. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 139 e 140.

_____. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 71.

_____. _____. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. Citado na página 113.

_____. The cosmic microwave radiation background. In: _____. **Cosmology**. 2. ed. Oxford University Press, New York, United States, 2008. cap. 2, p. 101–148. Disponível em: <<https://global.oup.com/academic/product/cosmology-9780198526827>>. Citado na página 52.

_____. **Cosmology**. [S.l.]: Oxford University Press, New York, United States, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

_____. The expansion of the universe. In: _____. **Cosmology**. 1. ed. Oxford University Press, New York, United States, 2008. cap. 1, p. 1–100. Disponível em: <<https://global.oup.com/academic/product/cosmology-9780198526827>>. Citado 11 vezes nas páginas 38, 40, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 139 e 140.

WILSON, R. W.; PENZIAS, A. A. Isotropy of cosmic background radiation at 4080 megahertz. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 156, n. 3778, p. 1100–1101, 1967. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/156/3778/1100>>. Citado na página 35.

- WINANT, C.; ABROE, M.; ADE, P.; BALBI, A. *et al.* Maxima: Millimeter-wave anisotropy experiment imaging array. **AIP Conference Proceedings**, v. 586, n. 1, p. 214–216, 10 2001. ISSN 0094-243X. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1419557>. Citado na página 53.
- WU, J.-W.; HONG, K.-Y. Constrain the jerk parameters with desi 2024 data. **Research in Astronomy and Astrophysics**, National Astronomical Observatories, CAS and IOP Publishing, v. 24, n. 12, p. 125016, dec 2024. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1674-4527/ad94ce>. Citado na página 41.
- YANG, W.; PAN, S.; BARROW, J. D. Large-scale stability and astronomical constraints for coupled dark-energy models. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 97, p. 043529, Feb 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.043529>. Citado na página 76.
- YANG, W.; PAN, S.; MOTA, D. F. Novel approach toward the large-scale stable interacting dark-energy models and their astronomical bounds. **Phys. Rev.**, D96, n. 12, p. 123508, 2017. Citado na página 87.
- ZEE, A. **Einstein Gravity in a Nutshell**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0-691-14558-7. Disponível em: <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691145587/einstein-gravity-in-a-nutshell>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- ZHANG, C.; ZHANG, H.; YUAN, S. *et al.* Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. **Research in Astronomy and Astrophysics**, IOP Publishing, v. 14, n. 10, p. 1221–1233, sep 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F1674-4527%2F14%2F10%2F002>. Citado na página 88.
- ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 82, p. 896–899, Feb 1999. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 113.

ESTATÍSTICA BAYESIANA E O ALGORITMO DE METROPOLIS-HASTINGS

A.1 Teorema de Bayes

A estatística bayesiana é obtida por (HASTINGS, 1970; METROPOLIS *et al.*, 1953; ETZ, 2018; PADILLA *et al.*, 2019; SPEAGLE, 2019),

$$P(\theta \mid D, M) = \frac{P(D \mid \theta, M)P(\theta)}{P(D)}, \quad (\text{Teorema de Bayes}) \quad (\text{A.1})$$

onde $P(\theta \mid D, M)$ é a *probabilidade posterior* do modelo (a probabilidade condicional de θ devido o evento ocorrido D, M); M representa a hipótese ou modelo; D é o conjunto de dados; θ é o parâmetro paramétrico que representa a referida hipótese/modelo. A a probabilidade do evento D é obtida por

$$P(D) = \int_{\theta} P(x, \theta) d\theta. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Algoritmo de *Metropolis-Hastings*

O algoritmo de *Metropolis-Hastings* leva em conta a estatística bayesiana. Uma ideia simplista para o método é assumir um conjunto de θ , D , M e uma distribuição X (PADILLA *et al.*, 2019; SPEAGLE, 2019; LEWIS, 2013; HASTINGS, 1970; METROPOLIS *et al.*, 1953; GEMAN; GEMAN, 1984; GELMAN; RUBIN, 1992; RAVENZWAAIJ; CASSEY; BROWN, 2018; BROOKS *et al.*, 2011; MITZENMACHER; UPFAL, 2005; ANDRIEU *et al.*, 2003; BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019; CHRISTENSEN *et al.*, 2001; SHARMA, 2017; BOLMER, 2017). O método é iniciado em $t = 0$ e N interações:

- Passo 1: Encontra θ_{t+1}

$$\theta_{t+1} = X(\theta_t, \sigma) \quad (\text{A.3})$$

- Passo 2: Encontra a razão a

$$a = \frac{P(\theta_{t+1} | D, M)}{P(\theta_t | D, M)} = \frac{\frac{P(D|\theta_{t+1}, M)P(\theta_{t+1})}{P(D)}}{\frac{P(D|\theta_t, M)P(\theta_t)}{P(D)}} = \frac{\mathcal{L}(\theta_{t+1})P(\theta_{t+1})}{\mathcal{L}(\theta_t)P(\theta_t)}, \quad (\text{A.4})$$

- Passo 3: Geração de θ_{t+1} através de

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_{t+1}, & \text{se } a > 1; \\ \theta_t, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

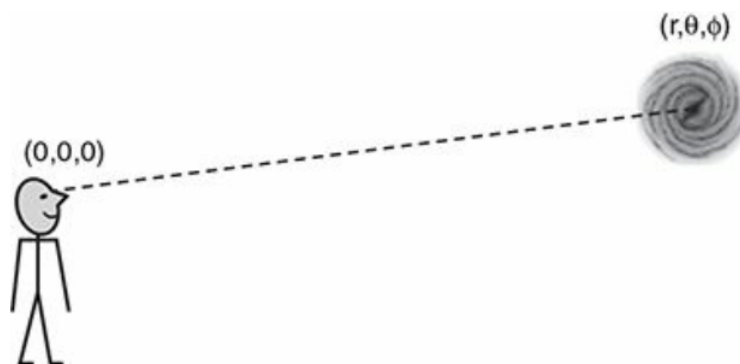
- Passo 4: Incrementa t e retorna ao passo 1.

O *REDSHIFT* COSMOLÓGICO, EXPRESSÕES E RESOLUÇÕES COSMOLÓGICAS

B.1 O *redshift* cosmológico e o *lookback time*

As medições do fator de escala $a(t)$ são geralmente derivadas das observações do *redshift* z . Vamos supor que um observador A esteja localizado na origem ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$), enquanto um objeto astronômico localizado na posição B ($r = r_1, \theta = \theta_1, \phi = \phi_1$), conforme é ilustrado na [Figura B.1](#). Na consideração que a distância entre eles seja grande o suficiente para desprezar

Figura B.1 – O observador está na origem das coordenadas $(0, 0, 0)$, enquanto observa uma galáxia localizada na posição (r_1, θ_1, ϕ_1) .



Fonte: [Ryden \(2017c\)](#).

perturbações existentes em pequenas escalas do espaço-tempo. Dessa forma, podemos adotar a métrica FLRW. Se uma onda eletromagnética for emitida no tempo t_1 pelo objeto astronômico B , viajando na direção de $-r$ com θ e ϕ fixos ($d\theta_1 = d\phi_1 = 0$) e detectada pelo observador localizado em A no instante t_0 , o raio de luz viaja numa geodésica radial nula. Portanto, a equação que descreve esse movimento é dada pelo elemento de linha da métrica ([RYDEN, 2017c](#); [HARRISON, 2000](#); [WEINBERG, 1972](#); [COLES; LUCCHIN, 2002](#); [WEINBERG, 2008c](#);

CARROLL; OSTLIE, 2007; VAVRYČUK, 2022; LAZKOZ; LEANIZBARRUTIA; SALZANO, 2018; BAUMANN, 2022):

$$0 = ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2}, \quad (\text{B.1})$$

consequentemente,

$$cdt = \frac{\pm a(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}. \quad (\text{B.2})$$

em que o sinal (+) corresponde à luz viajando da fonte (B) em sentido oposto ao da origem; o sinal (-) corresponde à luz viajando da fonte (B) em direção à origem (observador A). Neste caso, temos:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}. \quad (\text{B.3})$$

Por outro lado, considerando que a crista de onda seguinte seja emitida pela fonte no tempo $t_1 + \delta t_1$ e detectada pelo observador A no tempo $t_0 + \delta t_0$, podemos escrever:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}. \quad (\text{B.4})$$

As equações (B.3) e (B.4) têm seus lados direitos equivalentes, pois descrevem a posição comóvel do objeto astronômico, que permanece invariável diante da expansão do Universo. No entanto, ao substituímos a Equação B.3 no lado esquerdo da Equação B.4, obtemos:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (\text{B.5})$$

A Equação B.5 pode ser definida como:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = f(t_0 + \delta t_0) - f(t_1 + \delta t_1). \quad (\text{B.6})$$

Por outro lado, analogamente podemos definir também

$$\begin{aligned} \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} &= (f(t_1) - f(t_1 + \delta t_1)) + (f(t_0) - f(t_1)) + (f(t_0 + \delta t_0) - f(t_0)) \\ &= \cancel{f(t_1)} - f(t_1 + \delta t_1) + \cancel{f(t_0)} - \cancel{f(t_1)} + f(t_0 + \delta t_0) - \cancel{f(t_0)} \\ &= f(t_0 + \delta t_0) - f(t_1 + \delta t_1), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dessa forma, as equações Equação B.6 e Equação B.7 podem ser consideradas equivalentes. Assim,

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (\text{B.8})$$

Por outro lado, pela Equação B.5, temos:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \cancel{\frac{cdt}{a(t)}} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \cancel{\frac{cdt}{a(t)}} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Dessa forma, obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{a(t)} = 0 \implies \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (\text{B.10})$$

O intervalo de tempo correspondente ao pulso de luz emitido entre duas cristas consecutivas é da ordem de 10^{-14} s, logo, podemos assumir que o fator de escala $a(t)$ permanece aproximadamente constante neste intervalo. Portanto, podemos fazer a aproximação $a(t_0 + \delta t_0) \simeq a(t_0)$ e $a(t_1 + \delta t_1) \simeq a(t_1)$, permitindo tratar $a(t)$ como uma constante dentro da integral. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{cdt}{a(t)}, \\ \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} cdt &= \frac{cdt}{a(t_1)} \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} cdt. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Dessa forma, o cálculo da integral resulta na seguinte relação:

$$\frac{c\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{c\delta t_1}{a(t_1)}, \quad (\text{B.12})$$

sendo o período das ondas relacionado ao comprimento de onda λ . Então, para cada caso, temos

$$\lambda_1 = c\delta t_1 \quad \text{e} \quad \lambda_0 = c\delta t_0. \quad (\text{B.13})$$

Logo, a [Equação B.12](#) pode ser reescrita por

$$\frac{\lambda_0}{a(t_0)} = \frac{\lambda_1}{a(t_1)} \implies \frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (\text{B.14})$$

Portanto, o *redshift* z e o comprimento de onda é relacionado por

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1, \quad (\text{B.15})$$

em que λ_1 representa o comprimento de onda do pulso de luz emitido pela fonte (o objeto astronômico localizado em B), enquanto que λ_0 representa o comprimento de onda medido pelo observador A . A [Figura B.2](#) mostra essa relação, destacando os comprimentos de onda emitido e recebido, considerando o *efeito Doppler* em consequência da expansão do Universo. Assim, ao combinar a [Equação B.14](#) com a [Equação B.15](#), encontramos uma relação entre o *redshift* z e o fator de escala $a(t_1)$

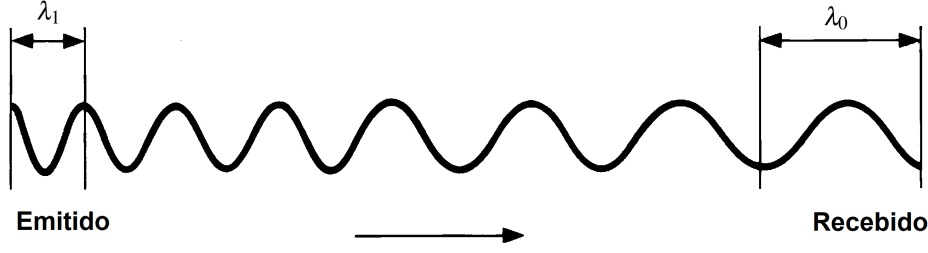
$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1, \quad (\text{B.16})$$

como $a(t_0) \equiv a_0 \equiv 1$, generalizando rescrevemos por

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \quad \text{ou} \quad a(t) = \frac{1}{z+1}, \quad (\text{B.17})$$

sendo o fator de escala $a(t)$ inversamente proporcional ao *redshift* z .

Figura B.2 – A figura mostra o comprimento de onda λ_1 emitido pela fonte e o comprimento de onda λ_0 medido pelo observador. Vemos um efeito *Doppler* para o vermelho no comprimento de onda recebido em consequência da expansão do Universo.



Fonte: Adaptada de [Harrison \(2000\)](#).

Da [Equação B.17](#), expandindo o termo $1/a(t)$ como uma expansão em série de *Taylor* e considerando apenas os quatros primeiros termos da expansão:

$$\frac{1}{a(t)} \simeq \frac{1}{a(t_0)} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^3, \quad (\text{B.18})$$

desenvolvendo os termos do lado direito e reescrevendo em termos do parâmetro de desaceleração ([Equação 2.26](#)):

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{H^2}{a} \left(2 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right) = \frac{H^2}{a} (2 + q(t)). \quad (\text{B.19})$$

Analogamente, a terceira derivada em termos dos parâmetros *jerk* e desaceleração:

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{a} \right) = -\frac{H^3}{a} (6 + 6q + j). \quad (\text{B.20})$$

Dessa forma, podemos reescrever a [Equação B.18](#) em termos dos parâmetros desaceleração, *jerk* e *Hubble*:

$$\frac{1}{a(t)} \simeq 1 - H_0(t - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t - t_0)^2 - \frac{1}{6} H_0^3 (6 + 6q_0 + j_0) (t - t_0)^3, \quad (\text{B.21})$$

com $a(t_0) = 1$. Por outro lado, relacionando a [Equação B.21](#) e [Equação B.17](#), podemos expressar o *redshift* z observado de uma fonte através do *lookback time*, que é definido como diferença entre a idade Universo hoje t_0 e a idade para um certo *redshift* z com a luz emita no tempo t ($t_L = t_0 - t$) ([RYDEN, 2017b](#); [VISSER, 2005](#))

$$z \simeq H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \frac{1}{6} H_0^3 (6 + 6q_0 + j_0) (t_0 - t)^3. \quad (\text{B.22})$$

Fazendo a inversão da [Equação B.22](#) podemos expressar o tempo de *lookback time* em termos de *redshift* z (com demonstração na [seção B.2](#)):

$$t_0 - t \simeq H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \frac{1}{6} (6(1 + q_0) + 3q_0^2 - j_0) z^3 \right]. \quad (\text{B.23})$$

B.2 O lookback time em função de z

Fazendo a inversão da [Equação B.22](#) podemos expressar o tempo de *lookback time* em termos de *redshift* z . Para isso vamos redefinir algumas variáveis para simplificar o processo. Substituindo a definição de *lookback time* ($t_L = t_0 - t$) na [Equação B.22](#), obtemos

$$z \simeq H_0 t_L + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 t_L^2 + \frac{1}{6} H_0^3 (6 + 6q_0 + j_0) t_L^3. \quad (\text{B.24})$$

Assumindo que seja expansão perturbativa de t_L em termos de z , temos:

$$t_L \simeq Az + Bz^2 + Cz^3. \quad (\text{B.25})$$

Aqui estamos interessados em encontrar A , B e C . Substituímos $t_L = Az + Bz^2 + Cz^3$ na [Equação B.24](#):

$$z \simeq H_0(Az + Bz^2 + Cz^3) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(Az + Bz^2 + Cz^3)^2 + \frac{1}{6} H_0^3(6 + 6q_0 + j_0)(Az + Bz^2 + Cz^3)^3. \quad (\text{B.26})$$

Expandindo os termos até z^3 :

- Linear (z):

$$H_0 Az = z \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{H_0}. \quad (\text{B.27})$$

- Quadrático (z^2):

$$H_0 Bz^2 + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 A^2 z^2 = 0. \quad (\text{B.28})$$

Substituindo $A = \frac{1}{H_0}$, obtemos:

$$H_0 B + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 \frac{1}{H_0^2} = 0 \quad (\text{B.29})$$

com

$$B = -\frac{1 + \frac{q_0}{2}}{H_0}. \quad (\text{B.30})$$

- Cúbico (z^3):

$$H_0 Cz^3 + 2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 ABz^3 + \frac{1}{6} H_0^3 (6 + 6q_0 + j_0) A^3 z^3 = 0. \quad (\text{B.31})$$

Substituindo $A = \frac{1}{H_0}$ e $B = -\frac{1 + \frac{q_0}{2}}{H_0}$ na [Equação B.31](#):

$$H_0 C + 2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 \left(\frac{1}{H_0}\right) \left(-\frac{1 + \frac{q_0}{2}}{H_0}\right) + \frac{1}{6} H_0^3 (6 + 6q_0 + j_0) \left(\frac{1}{H_0}\right)^3 = 0. \quad (\text{B.32})$$

simplificando os termos, temos:

$$H_0 C - 2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} (6 + 6q_0 + j_0) = 0 \quad (\text{B.33})$$

logo

$$C = \frac{1}{H_0} \left[2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} (6 + 6q_0 + j_0) \right]. \quad (\text{B.34})$$

Expandindo o quadrado de:

$$\left(1 + \frac{q_0}{2} \right)^2 = 1 + q_0 + \frac{q_0^2}{4}. \quad (\text{B.35})$$

Substituindo de volta na [Equação B.34](#):

$$C = \frac{1}{H_0} \left[2 \left(1 + q_0 + \frac{q_0^2}{4} \right) - \frac{1}{6} (6 + 6q_0 + j_0) \right]. \quad (\text{B.36})$$

Distribuindo os termos:

$$C = \frac{2}{H_0} \left(1 + q_0 + \frac{q_0^2}{4} \right) - \frac{1}{6H_0} (6 + 6q_0 + j_0). \quad (\text{B.37})$$

Simplificando:

$$C = \frac{2}{H_0} + \frac{2q_0}{H_0} + \frac{q_0^2}{2H_0} - \frac{1}{H_0} - \frac{q_0}{H_0} - \frac{j_0}{6H_0}. \quad (\text{B.38})$$

E agrupando os termos:

$$C = \frac{1}{H_0} + \frac{q_0}{H_0} + \frac{q_0^2}{2H_0} - \frac{j_0}{6H_0} = \frac{1}{6H_0} (6 + 6q_0 + 3q_0^2 - j_0). \quad (\text{B.39})$$

Portanto, substituindo A , B e C na expansão ([Equação B.25](#)), obtemos:

$$(t_0 - t) \simeq \frac{z}{H_0} - \frac{2 + q_0}{2H_0} z^2 + \frac{1}{6H_0} (6 + 6q_0 + 3q_0^2 - j_0) z^3. \quad (\text{B.40})$$

Esse é o tempo de *lookback time* em função de *redshift* z , com os parâmetros cosmológicos H_0 , q_0 e j_0 .

B.3 Resolução da integral $\int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}$

Para resolver a integral

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}, \quad (\text{B.41})$$

vamos assumir que todas as variáveis de [Equação B.41](#), $\frac{1}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}}$, são positivas. Definindo

$$r \equiv \frac{R_0 \sin(\theta)}{\sqrt{k}}; \quad dr = \frac{R_0 \cos(\theta)}{\sqrt{k}} d\theta. \quad (\text{B.42})$$

Temos que:

$$1 - \frac{kr^2}{R_0^2} = 1 - \frac{k \left(\frac{R_0^2 \sin^2(\theta)}{k} \right)}{R_0^2} = 1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta), \quad (\text{B.43})$$

logo

$$\sqrt{1 - kr^2/R_0^2} = \cos(\theta); \quad \theta = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{k}r}{R_0} \right). \quad (\text{B.44})$$

Dessa forma, substituímos r e dr a integral [Equação B.41](#) pode ser reescrita como::

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}}} = \int \frac{\frac{R_0}{\sqrt{k}} \cos(\theta) d\theta}{\cos(\theta)} = \frac{R_0}{\sqrt{k}} \int 1 d\theta, \quad (\text{B.45})$$

sendo a integral $\int 1 d\theta = \theta + c_1$. Portanto

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{k}} (\theta + c_1). \quad (\text{B.46})$$

Da [Equação B.44](#) obtemos que a solução para integral dada na [Equação B.3](#) é:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{k}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{k}r}{R_0} \right) + \text{constante}. \quad (\text{B.47})$$

B.4 Relações do espaço de Fourier e função de correlação no espectro de potência

No espaço de Fourier, o contraste de densidade $\delta(\vec{k}, a)$ é obtida a partir de $\delta(\vec{x}, a)$ por meio da transformada de Fourier direta:

$$\delta(\vec{k}, a) = \int d^3x \delta(\vec{x}, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (\text{B.48})$$

sendo o complexo conjugado dado por

$$\delta^*(\vec{k}', a) = \int d^3x' \delta(\vec{x}', a) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'}. \quad (\text{B.49})$$

A partir da correlação de $\delta(\vec{k}, a)$ no espaço de Fourier e usando a definição de $\delta(\vec{k}, a)$, temos:

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = \left\langle \int d^3x \delta(\vec{x}, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int d^3x' \delta(\vec{x}', a) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \right\rangle. \quad (\text{B.50})$$

Reorganizando

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = \int d^3x \int d^3x' \langle \delta(\vec{x}, a) \delta(\vec{x}', a) \rangle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'}. \quad (\text{B.51})$$

O contraste de densidade no espaço real, $\delta(\vec{x}, a)$, é real. Dessa forma, através da função de correlação de 2-pontos, obtemos

$$\langle \delta(\vec{x}, a) \delta(\vec{x}', a) \rangle = \xi(|\vec{x} - \vec{x}'|, a), \quad (\text{B.52})$$

em que $\xi(|\vec{x} - \vec{x}'|, a)$ é a função de correlação no espaço real, que depende apenas da separação $|\vec{x} - \vec{x}'|$ por conta da homogeneidade e isotropia do Universo. Substituindo a [Equação B.52](#), temos:

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = \int d^3x \int d^3x' \xi(|\vec{x} - \vec{x}'|, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}'}. \quad (\text{B.53})$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}', \quad \vec{x}' \rightarrow \vec{x}.$$

Logo, a integral torna-se:

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = \int d^3x \int d^3r \xi(r, a) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{x})} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}}. \quad (\text{B.54})$$

Fazendo a separação dos termos que dependem de $\vec{x}'$:

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = \int d^3r \xi(r, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int d^3x e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}}. \quad (\text{B.55})$$

A integral sobre $\vec{x}$ resulta:

$$\int d^3x e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{B.56})$$

em que $\delta_D(\vec{k} - \vec{k}')$ trata da função delta de Dirac, que reflete a invariância estatística para poder garantir que $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ sejam correlacionados apenas quando forem iguais. Assim, temos:

$$\langle \delta(\vec{k}, a) \delta^*(\vec{k}', a) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') \int d^3r \xi(r, a) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{B.57})$$