



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL – PROFMAT

HÉLIO LUIZ OLIVEIRA SAMPAIO

**A Álgebra Linear das Matrizes no Estudo da Dinâmica de um Braço
Robótico Articulado**

SÃO CRISTÓVÃO

HÉLIO LUIZ OLIVEIRA SAMPAIO

**A Álgebra Linear das Matrizes no Estudo da Dinâmica de um Braço
Robótico Articulado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo.

SÃO CRISTÓVÃO

2025

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S192a Sampaio, Hélio Luiz Oliveira.
A álgebra linear das matrizes no estudo da dinâmica de um
braço robótico articulado / Hélio Luiz Oliveira Sampaio; orientador
Gerson Cruz Araújo. – São Cristóvão, SE, 2025.
104 f.: il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matrizes (Matemática). 3.
Álgebra linear. 4. Autovalores. 5. Abordagem interdisciplinar do
conhecimento na educação. 6. Ensino médio. I. Araújo, Gerson Cruz,
orient. II. Título.

CDU 512.643



Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A Álgebra Linear das Matrizes no Estudo da Dinâmica de um Braço Robótico Articulado

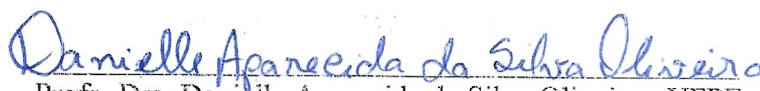
por

Hélio Luiz Oliveira Sampaio

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo - UFS
Orientador


Profa. Dra. Verônica Santana Reis - USP
Primeiro Examinador


Profa. Dra. Danielle Aparecida da Silva Oliveira - UFPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Agosto de 2015.

AGRADECIMENTOS

A realização desta dissertação é fruto de uma caminhada repleta de desafios e aprendizados, e muitas pessoas foram essenciais nesse percurso. Expresso minha profunda gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a construção deste trabalho.

Agradeço aos professores do PROFMAT/SE, que compartilharam seus conhecimentos com dedicação e paciência, proporcionando uma base sólida para meu crescimento acadêmico.

Aos colegas do PROFMAT/SE, com quem compartilhei horas de estudo, discussões e desafios. A troca de conhecimento e a parceria tornaram essa jornada mais leve e enriquecedora.

Ao meu orientador, Dr. Gerson Cruz Araújo, pela orientação, incentivo e contribuições na construção desta dissertação. Sua expertise foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Um agradecimento especial à minha esposa, Paula, e ao meu filho, Pedro, pela paciência, carinho e compreensão diante do tempo que precisei dedicar a este trabalho.

Por fim, agradeço ao SESI Sergipe, instituição à qual mantenho vínculo, por permitir a aplicação da intervenção didática que fundamentou esta dissertação. O apoio e a abertura para a realização deste estudo foram determinantes para sua concretização.

A todos vocês, minha eterna gratidão.

RESUMO

Este texto tem por objetivo propor uma abordagem interdisciplinar para o estudo de matrizes, com ênfase na formulação matemática de um modelo de braço robótico articulado. Utilizando conceitos básicos da álgebra linear — especialmente o estudo de matrizes associadas a transformações lineares, coordenadas homogêneas, autovalores e autovetores — apresentamos as principais propriedades matriciais aplicadas ao modelo de um braço robótico simples com um único grau de liberdade, composto por uma base e um braço retilíneo, submetidos a movimentos rígidos de translação e rotação em torno de um eixo. Por fim, propomos uma intervenção pedagógica no Ensino Médio, motivada pela necessidade de facilitar a compreensão do modelo robótico apresentado. Com o auxílio do software GeoGebra, os alunos puderam estabelecer conexões entre o conhecimento teórico e a prática relacionada ao conteúdo de matrizes, promovendo uma aprendizagem mais significativa e integrada.

Palavras-chave: Matrizes; Álgebra Linear; Braço robótico articulado; Autovalores e autovetores; Rotação; Translação.

ABSTRACT

This text aims to propose an interdisciplinary approach to the study of matrices, with an emphasis on the mathematical formulation of an articulated robotic arm model. Using basic concepts from linear algebra — especially the study of matrices associated with linear transformations, homogeneous coordinates, eigenvalues, and eigenvectors — we present the main matrix properties applied to the model of a simple robotic arm with a single degree of freedom, consisting of a base and a straight arm, subjected to rigid translation and rotation movements around an axis. Finally, we propose a pedagogical intervention in high school, motivated by the need to facilitate the understanding of the presented robotic model. With the aid of the GeoGebra software, students were able to establish connections between theoretical knowledge and practical applications related to matrix content, promoting more meaningful and integrated learning.

Keywords: Matrices; Linear Algebra; Articulated Robotic Arm; Eigenvalues and Eigenvectors; Rotation; Translation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Rotação de um vetor	40
Figura 2 – Rotação do vetor $\mathbf{u}$ em 30°	43
Figura 3 – Translação do vetor $\mathbf{u}$	44
Figura 4 – Representação geométrica dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$	45
Figura 5 – Expansão do vetor $\mathbf{u}$	51
Figura 6 – Braço robótico industrial	58
Figura 7 – Braço robótico industrial	58
Figura 8 – Imagem do exemplo 49	59
Figura 9 – Recorte da imagem do exemplo 49	60
Figura 10 – Imagem do exemplo 50	61
Figura 11 – Imagem do exemplo 51	63
Figura 12 – Modelo simplificado de braço robótico	65
Figura 13 – Representação do braço robótico por um vetor	65
Figura 14 – Rotação e translação do braço robótico	68
Figura 15 – Rotação e translação do braço robótico mantendo a extremidade fixa em $(5, 0)$	70
Figura 16 – Posição inicial do vetor AB	74
Figura 17 – Rotação do vetor AB em 90° e translação por $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}$	74
Figura 18 – Aplicação da atividade 1	77
Figura 19 – Esclarecimento de dúvidas sobre a matriz de rotação na atividade 3	77
Figura 20 – Resultados da atividade 01 realizados por um estudante	78
Figura 21 – Resultados da atividade 02 realizados por um estudante	79
Figura 22 – Resultados da atividade 03 realizados por um estudante	80
Figura 23 – Resultados da atividade 04 realizados por um estudante	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Quantidade de itens da Estante 1	14
Tabela 2	–	Quantidade de itens da Estante 20	17
Tabela 3	–	Quantidade de itens da Estante 4	19
Tabela 4	–	Quantidade de itens da Estante 2	20

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	MATRIZES E ESPAÇOS VETORIAIS	14
1.1	Matrizes	14
1.2	Matrizes especiais	16
1.2.1	Matriz linha	16
1.2.2	Matriz coluna	17
1.2.3	Matriz nula	17
1.2.4	Matriz quadrada de ordem n	18
1.2.5	Matriz diagonal	18
1.2.6	Matriz identidade de ordem n	19
1.2.7	Igualdade de matrizes	19
1.3	Operações com matrizes	20
1.3.1	Adição de matrizes	20
1.3.2	Matriz oposta	22
1.3.3	Subtração de matrizes	22
1.3.4	Multiplicação de um número real por uma matriz	22
1.3.5	Multiplicação de matrizes	23
1.4	Matrizes Transposta, Simétrica e Antissimétrica	25
1.5	Determinantes	26
1.6	Espaços vetoriais	27
1.6.1	Definição de espaços vetoriais	27
1.6.2	Subespaços vetoriais	30
1.6.3	Combinação linear	32
1.6.4	Independência linear	32
1.6.5	Base de espaços vetoriais	33
1.6.6	Dimensão de um espaço vetorial	35
1.7	Produto Interno e Norma de Matrizes	36
1.8	Matriz Inversa e Matrizes Ortogonais	36
1.8.1	Matriz Inversa	37
1.8.2	Propriedades das Matrizes Inversas	37
1.8.3	Matrizes Ortogonais	38
1.8.4	Propriedades das Matrizes Ortogonais	38

2	TRANSFORMAÇÕES LINEARES, AUTOVALORES E AUTOVE- TORES	40
2.1	Transformações Lineares	40
2.1.1	Rotação em relação a origem	42
2.1.2	Translação	43
2.1.3	Coordenadas homogêneas	44
2.1.4	Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear	46
2.1.5	Isomorfismo	48
2.2	Autovalores e Autovetores	50
2.2.1	Definição de autovalores e autovetores	50
2.2.2	Equação característica e polinômio característico	51
3	O BRAÇO ROBÓTICO	57
3.1	Como funciona o braço robótico	57
3.2	Aplicações do braço robótico no ensino da matemática	59
3.3	Modelo simplificado de braço robótico	64
3.4	Rotação de um braço robótico	65
3.5	Translação de um braço robótico	66
3.6	Matriz de rotação e translação para o braço robótico	67
3.7	Um problema com o braço robótico	68
4	INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO	73
4.1	Um problema com o braço robótico	73
4.2	Relações com habilidades e competências da BNCC	75
4.3	Aplicação com os estudantes em sala de aula	77
4.3.1	Atividade 01: Definição de matrizes	78
4.3.2	Atividade 02: Operações com matrizes	78
4.3.3	Atividade 03: Transformações: Rotação e Translação	79
4.3.4	Atividade 04: Rotação e Translação de um braço robótico	80
4.4	Conclusões das atividades	81
	REFERÊNCIAS	86
	APÊNDICE A – ATIVIDADE 1	88
	APÊNDICE B – ATIVIDADE 2	91
	APÊNDICE C – ATIVIDADE 3	95
	APÊNDICE D – ATIVIDADE 4	99
	APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO AVALIATIVO	102

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática representa um grande desafio para os professores. Frequentemente, os estudantes não atribuem sentido a esse campo do conhecimento, seja em relação à vida cotidiana ou ao futuro ambiente profissional. Muitas vezes, a Matemática é percebida apenas como um conjunto de regras a serem memorizadas e repetidas. Essa situação reflete-se diretamente nos resultados de avaliações, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

Segundo a Agência Brasil (2025), no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2022, “menos de 50% dos alunos conseguiram nível mínimo de aprendizado em matemática e ciências” e apenas “27% dos alunos brasileiros alcançaram o nível 2 de proficiência em matemática, considerado o patamar mínimo de aprendizado, enquanto que a média dos países da OCDE na disciplina é 69%” (BRASIL, 2023). Além disso, dados do Instituto Datafolha (2024) indicam que, entre os jovens ingressantes no Ensino Médio que indicaram apenas uma área de conhecimento para aprofundar, somente 13% escolheriam Matemática, evidenciando a necessidade de propostas didáticas mais atrativas e contextualizadas (DATAFOLHA, 2024). Esse dado é preocupante, considerando que o aprofundamento em Matemática é de extrema importância para diversas áreas do conhecimento, como em ciências exatas e ciências da natureza, fundamentais ao desenvolvimento de países como o Brasil.

Nesse cenário, a introdução de abordagens interdisciplinares pode favorecer a aprendizagem significativa e ampliar o interesse dos estudantes. A Álgebra Linear, particularmente o estudo das matrizes, oferece um campo para tais propostas, pois combina um potencial de modelagem com ampla aplicabilidade. Formalmente, matrizes são “arranjos retangulares de elementos dispostos em linhas e colunas, sujeitos a operações algébricas específicas” (ANTON; RORRES, 2012). Apesar de sua simplicidade conceitual, constituem uma ferramenta versátil para representar sistemas lineares, realizar transformações geométricas e modelar problemas em diversas áreas. No campo da engenharia, por exemplo, matrizes são fundamentais no estudo de estruturas, na análise de circuitos elétricos e no controle de processos dinâmicos (OGATA, 2010).

O desenvolvimento do conceito de matrizes está intimamente ligado à própria evolução da matemática. Giuseppe Peano (Itália, 1858–1932), em seu livro *Calcolo Geometrico* (1888), apresentou a primeira definição abstrata de um sistema linear. No século XIX, Arthur Cayley (Inglaterra, 1821–1895) contribuiu decisivamente para a formalização

da teoria das matrizes, introduzindo notações, propriedades e a definição do produto matricial que fundamentam o estudo moderno do tema. Outro marco relevante foi o método de eliminação por transformações elementares aplicado a sistemas de equações lineares, desenvolvido por Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777–1855) e posteriormente aperfeiçoado por Wilhelm Jordan (Alemanha, 1842–1899) (HEFEZ; FERNANDEZ, 2022). Atualmente, as matrizes desempenham papel central de todo aparato tecnológico que lidamos no cotidiano, em diversas áreas das ciências exatas, sendo indispensáveis na análise numérica, na visão computacional, na robótica, dentre outras.

Perante o breve relato acima descrito, este trabalho propõe uma abordagem interdisciplinar para o estudo de matrizes, mais especificamente, no estudo da formulação matemática de um modelo de braço robótico articulado e como exibir de forma simples e didática uma visão para o problema com ferramentas básicas de matrizes, para o ensino médio. O modelo de braço robótico sugerido é simplificado, composto por uma base fixa e um braço retilíneo com um único grau de liberdade. Será analisado a partir de conceitos básicos da Álgebra Linear, em especial matrizes associadas a transformações lineares, coordenadas homogêneas, autovalores e autovetores. As propriedades matriciais são exploradas para descrever movimentos de translação e rotação em torno de um eixo.

Com o intuito de aproximar o conteúdo da realidade escolar, a pesquisa inclui uma intervenção pedagógica voltada ao Ensino Médio. Nessa proposta, o software GeoGebra é utilizado para auxiliar os estudantes a estabelecerem conexões entre a teoria e a prática, promovendo uma aprendizagem mais integrada e significativa. Ao simular o funcionamento do braço robótico, os alunos não apenas compreendem os fundamentos das operações matriciais, mas também percebem a relevância desses conceitos para áreas tecnológicas e de engenharia.

A estrutura desta dissertação organiza-se da seguinte forma:

O primeiro capítulo apresenta conceitos fundamentais de matrizes, operações matriciais e espaços vetoriais, formando a base para o estudo de transformações geométricas;

O segundo capítulo discute transformações lineares, autovalores e autovetores, destacando métodos de cálculo e aplicações em rotações e translações;

O terceiro capítulo desenvolve a modelagem matemática do braço robótico, aplicando os conceitos discutidos anteriormente para resolver um problema proposto;

O quarto capítulo analisa e propõe uma intervenção pedagógica, detalhando a sequência didática e avaliando seus resultados no processo de aprendizagem dos estudantes. Ao final, são apresentadas as conclusões e considerações finais, evidenciando as contribuições da pesquisa para a integração entre teoria e prática no estudo de matrizes.

1 MATRIZES E ESPAÇOS VETORIAIS

Neste capítulo, será realizado um estudo sobre matrizes, abordando seus principais tipos e operações. Também será introduzido o conceito de determinantes. Esse conteúdo servirá de base para a compreensão das transformações lineares, bem como dos autovalores e autovetores que serão tratados no Capítulo 2, permitindo, a partir disso, a manipulação matemática do braço robótico no Capítulo 3. Ainda neste capítulo, será apresentado o conceito de espaço vetorial, fundamental para compreender a estrutura dos sistemas matemáticos utilizados neste trabalho. Desde já, informamos ao leitor que a abordagem desenvolvida nas cinco primeiras seções deste capítulo constitui uma proposta de estudo de matrizes voltada para o ensino básico. Nas seções 1.1, 1.2 e 1.3, será apresentado um problema que servirá de motivação e orientação para a exposição das definições formais e dos principais resultados da teoria abordada. A partir da seção 1.6, o estudo de matrizes será tratado sob a perspectiva da Álgebra Linear. As principais referências utilizadas neste capítulo foram (FIGUEIREDO, 2009), (ANTON; RORRES, 2012) e (LARSON, 2017).

1.1 Matrizes

Vejamos a seguinte situação:

Em um centro de distribuição automatizado, as estantes de armazenamento são compostas por 5 seções verticais, cada uma contendo 5 gavetas. As gavetas de uma mesma seção armazenam um mesmo tipo de item. A quantidade de itens armazenados em cada gaveta da Estante 1 está indicada na tabela a seguir:

Tabela 1 – Quantidade de itens da Estante 1

Gavetas:	Seção 1	Seção 2	Seção 3	Seção 4	Seção 5
Gaveta 1	5	4	1	8	5
Gaveta 2	3	3	0	3	3
Gaveta 3	1	4	9	7	10
Gaveta 4	4	7	5	0	9
Gaveta 5	0	9	6	2	3

Fonte: Autor, 2025.

Para saber quantos itens estão armazenados em uma determinada seção, basta observar a coluna correspondente. Por exemplo, se quisermos saber o total de itens na

Seção 4, somamos os valores da coluna 4:

$$8 + 3 + 7 + 0 + 2 = 20.$$

Portanto, há 20 itens na Seção 4.

Da mesma forma, se quisermos saber quantos itens estão armazenados nas gavetas de número 3, somamos os valores da linha 3:

$$1 + 4 + 9 + 7 + 10 = 31.$$

Assim, as gavetas de número 3 armazenam, ao todo, 31 itens.

Também é possível identificar a quantidade de itens de uma gaveta específica. Por exemplo, a Gaveta 4 da Seção 5 contém 9 itens.

Esse tipo de organização e análise por linhas, colunas e elementos individuais pode ser representado por meio de matrizes. As matrizes são ferramentas valiosas para a manipulação e interpretação de dados em diversos contextos, como na logística de centros de distribuição, no controle de estoques em supermercados e na análise de desempenho acadêmico de estudantes.

De maneira formal, temos a definição de matrizes a seguir.

Definição 1. *Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1. Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Dizemos que a matriz é do tipo $m \times n$ ou de ordem $m \times n$. Os elementos ou termos de uma matriz podem estar no corpo dos reais, no corpo dos complexos¹, ser funções, ou ainda outras matrizes.*

A matriz A , do tipo $m \times n$, será escrita, genericamente, do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Para representar os elementos de uma matriz, usamos uma letra com dois índices. Um elemento genérico de uma matriz A será indicado por a_{ij} , em que i representa a linha e j representa a coluna na qual o elemento se encontra; este é chamado (ij) -ésimo elemento

¹ Um conjunto é chamado de corpo se for munido de uma operação de adição, uma operação de multiplicação e se um conjunto de propriedades relacionadas a essas operações forem atendidas (HEFEZ; FERNANDEZ, 2022).

da matriz. Além disso, os elementos podem vir entre parênteses () ou colchetes []. Neste estudo, adotamos como padrão o uso dos colchetes.

Exemplo 1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2 .

Exemplo 2. $\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 \\ 4 & -13 \\ 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 .

1.2 Matrizes especiais

Vamos retomar o problema do centro de distribuição. A tabela 1 mostra a quantidade de itens distribuída nas gavetas das seções da Estante 1. Cada gaveta está associada a um número (representado pelas linhas da tabela) e cada seção também está associada a um número (representado pelas colunas).

Sem perder nenhuma informação sobre as gavetas e seções, podemos representar essas quantidades por meio de uma matriz 5×5 , contendo apenas os valores numéricos referentes aos itens armazenados, como mostra a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 8 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 7 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Considerando essa representação, veremos a seguir algumas matrizes estudadas no ensino básico.

1.2.1 Matriz linha

Escolhendo um tipo de gaveta da Estante 1, como por exemplo, a gaveta 1 das 5 seções, podemos representá-las pela matriz

$$G_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de matriz é chamada de matriz linha. Uma matriz linha é toda matriz que apresenta apenas uma linha, isto é, do tipo $1 \times n$.

Exemplo 3. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha do tipo 1×3 .

1.2.2 Matriz coluna

Agora escolhendo apenas uma seção, como por exemplo a Seção 3, podemos representá-las pela matriz

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de matriz é chamada de matriz coluna. Uma matriz coluna é toda matriz que apresenta apenas uma coluna, isto é, do tipo $m \times 1$.

Exemplo 4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 3×1 .

A matrizes linha e coluna são chamadas, respectivamente, de vetor linha e vetor coluna.

1.2.3 Matriz nula

Em determinado dia, no centro de distribuição, verificou-se que a estante de número 20 ainda não havia armazenado nenhum item. A tabela 2 mostra o comportamento dessa situação referente à Estante 20.

Tabela 2 – Quantidade de itens da Estante 20

Gavetas:	Seção 1	Seção 2	Seção 3	Seção 4	Seção 5
Gaveta 1	0	0	0	0	0
Gaveta 2	0	0	0	0	0
Gaveta 3	0	0	0	0	0
Gaveta 4	0	0	0	0	0
Gaveta 5	0	0	0	0	0

Fonte: Autor, 2025.

A representação matricial dessa tabela é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de matriz é chamada de matriz nula do tipo 5×5 . Uma matriz nula é aquela que possui todos os seus elementos iguais a zero.

Exemplo 5. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 2×3 .

1.2.4 Matriz quadrada de ordem n

A matriz A , que representa as quantidades de itens armazenados pela Estante 1 e mostrada no início da seção 1.2, é chamada de matriz quadrada de ordem 5, pois apresenta 5 linhas e 5 colunas. Uma matriz quadrada é toda matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas, isto é, do tipo $n \times n$.

Exemplo 6. A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 & \frac{1}{5} \\ -6 & 0 & 1 \\ 7 & \sqrt{3} & 11 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

Uma matriz quadrada apresenta duas diagonais: a diagonal principal e a diagonal secundária.

Diagonal principal: é o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, ou seja, é o conjunto $\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$.

Diagonal secundária: é o conjunto dos elementos que têm a soma dos dois índices iguais a $n+1$, ou seja, é o conjunto $\{a_{ij} | i+j = n+1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}$.

Exemplo 7. Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 8 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 7 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que a diagonal principal é composta pelos elementos $a_{11} = 5, a_{22} = 3, a_{33} = 9, a_{44} = 0$ e $a_{55} = 3$ e a diagonal secundária é composta pelos elementos $a_{15} = 5, a_{24} = 3, a_{33} = 9, a_{42} = 7$ e $a_{51} = 0$.

Nas duas subseções a seguir, veremos mais dois tipos especiais de matrizes importantes para o nosso estudo: as matrizes diagonal e identidade.

1.2.5 Matriz diagonal

É toda matriz quadrada que apresenta elementos não nulos apenas na diagonal principal.

Exemplo 8. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 3.

1.2.6 Matriz identidade de ordem n

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Indicamos essa matriz por I_n .

Exemplo 9. A matriz $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

1.2.7 Igualdade de matrizes

Um passo importante, no estudo de matrizes, é saber quando duas matrizes podem ser consideradas iguais.

Em certo dia, na situação do centro de distribuição, a Estante 4 apresentou as quantidades de itens armazenados conforme a tabela 3 abaixo:

Tabela 3 – Quantidade de itens da Estante 4

Gavetas:	Seção 1	Seção 2	Seção 3	Seção 4	Seção 5
Gaveta 1	5	4	1	8	5
Gaveta 2	3	3	0	3	3
Gaveta 3	1	4	9	7	10
Gaveta 4	4	7	5	0	9
Gaveta 5	0	9	6	2	3

Fonte: Autor, 2025.

Sem perder nenhuma informação sobre as gavetas e seções da Estante 4, podemos escrever a matriz D a seguir, contendo apenas os valores numéricos referentes aos itens armazenados.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 8 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 7 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz D apresenta o mesmo número de linhas, colunas e itens da matriz A . Nessa situação, dizemos que as matrizes A e D são iguais ($A = D$).

Na definição a seguir, veremos o critério formal de igualdade entre matrizes.

Definição 2. Duas matrizes A e B são iguais ($A = B$) se:

1. Têm o mesmo número de linhas e colunas.
2. Seus elementos correspondentes são iguais, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os i e j .

Exemplo 10. As matrizes A e B abaixo são iguais ($A = B$), pois ambas possuem o mesmo tamanho e os mesmos elementos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Contraexemplo: Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Neste caso, $A \neq C$, pois $a_{22} \neq b_{22}$ ($4 \neq 5$).

1.3 Operações com matrizes

Nesta seção veremos como realizar as operações de adição, subtração e multiplicação com matrizes.

1.3.1 Adição de matrizes

Em um determinado dia, o centro de distribuição decidiu transferir todos os itens da Estante 2 para a Estante 1, respeitando a correspondência entre as posições das gavetas e das seções. Ou seja, os itens de cada gaveta de cada seção da Estante 2 serão somados aos itens da mesma posição na Estante 1. A tabela 4 a seguir representa a quantidade de itens armazenados na Estante 2:

Tabela 4 – Quantidade de itens da Estante 2

Gavetas:	Seção 1	Seção 2	Seção 3	Seção 4	Seção 5
Gaveta 1	2	4	0	1	3
Gaveta 2	0	5	5	7	1
Gaveta 3	1	7	2	0	3
Gaveta 4	3	1	5	1	4
Gaveta 5	5	3	8	0	6

Fonte: Autor, 2025.

Sem perder nenhuma informação sobre as gavetas e seções da Estante 2, podemos escrever a matriz B , contendo apenas os valores numéricos referentes aos itens armazenados. A matriz B pode ser vista a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

A matriz C representa a soma das matrizes A e B , sendo formada pela adição dos itens das gavetas da matriz A com os respectivos itens das mesmas posições na matriz B :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5+2 & 4+4 & 1+0 & 8+1 & 5+3 \\ 3+0 & 3+5 & 0+5 & 3+7 & 3+1 \\ 1+1 & 4+7 & 9+2 & 7+0 & 10+3 \\ 4+3 & 7+1 & 5+5 & 1+1 & 9+4 \\ 0+5 & 9+3 & 6+8 & 2+0 & 3+6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 9 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 4 \\ 2 & 11 & 11 & 7 & 13 \\ 7 & 8 & 10 & 2 & 13 \\ 5 & 12 & 14 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ representa o total de itens armazenados na Es-}$$

tante 1 após a transferência dos itens da Estante 2.

Após a interpretação do problema, segue a definição formal da adição entre duas matrizes.

Definição 3. Dadas duas matrizes A e B , ambas do tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B , representado por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B .

A definição acima pode ser representada pela expressão:

$$C = A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}].$$

Exemplo 11. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ do tipo 3×2 , temos que a matriz $C = A + B$, determinada por $[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$, é

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -2+2 \\ 0+3 & 5+(-4) \\ 4+7 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Também é possível realizar a subtração de matrizes utilizando o conceito de matriz oposta, como será mostrado nas seções a seguir.

1.3.2 Matriz oposta

Denomina-se matriz oposta de uma matriz A (representada por $-A$) a matriz que somada com A gera como resultado uma matriz nula.

Exemplo 12. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, temos que sua matriz oposta é $-A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, pois

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3.3 Subtração de matrizes

Sendo A e B duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada por $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B , tal que

$$A - B = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} + (-b_{ij})] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Exemplo 13. Sejam A e B duas matrizes do tipo 2×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A subtração entre A e B resulta em:

$$A + (-B) = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + (-4) & 1 + (-1) & 6 + (-3) \\ 0 + (-2) & 3 + 0 & -2 + 5 \end{bmatrix}$$

$$A + (-B) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.3.4 Multiplicação de um número real por uma matriz

Continuando o problema das estantes do centro de distribuição, suponha que um novo carregamento tenha chegado e que, agora, a Estante 1 precise comportar o dobro da quantidade de itens em cada uma de suas gavetas.

Para representar essa nova situação, utilizamos a matriz $2C$, na qual cada elemento da matriz C foi multiplicado por 2, ou seja, a quantidade de itens em cada gaveta

foi duplicada:

$$2C = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 9 & 2 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 10 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 11 & 2 \cdot 11 & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 13 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 10 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 13 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot 12 & 2 \cdot 14 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 6 & 16 & 10 & 20 & 8 \\ 4 & 22 & 22 & 14 & 26 \\ 14 & 16 & 20 & 4 & 26 \\ 10 & 24 & 28 & 4 & 18 \end{bmatrix}.$$

A partir dessa observação, podemos definir a multiplicação de um número real por uma matriz como uma operação em que cada elemento da matriz é multiplicado por esse número real.

Definição 4. Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij} e α é um número real, então αA é uma matriz $m \times n$ cujo elementos são $\alpha a_{ij} \in \mathbb{R}$, tal que

$$\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}].$$

Exemplo 14. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$, a matriz $3A$ é:

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 21 & -15 \end{bmatrix}.$$

1.3.5 Multiplicação de matrizes

No nosso problema do centro de distribuição, a quantidade de itens armazenados na Estante 1 é representada pela seguinte matriz:

$$2C = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 6 & 16 & 10 & 20 & 8 \\ 4 & 22 & 22 & 14 & 26 \\ 14 & 16 & 20 & 4 & 26 \\ 10 & 24 & 28 & 4 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ao final do mês, o centro de distribuição precisa calcular o valor total em reais de todos os itens armazenados em uma estante. Sabendo que os valores unitários dos itens das Seções 1 a 5 são, respectivamente R\$ 1,00 – R\$ 3,00 – R\$ 2,00 – R\$ 5,00 – R\$ 4,00, podemos determinar o valor dos itens nas gavetas de número 1 (primeira linha da matriz) da seguinte forma:

$$\text{Valor das gavetas 1} = 14 \cdot 1 + 16 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 18 \cdot 5 + 16 \cdot 4$$

Valor das gavetas 1 = 220 reais.

Ao invés de repetir esse cálculo para cada linha (gaveta), podemos organizar os valores unitários dos itens em uma matriz coluna V , representando os preços de cada seção:

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Com isso, o valor total de cada gaveta pode ser obtido por meio do produto da matriz $2C$ pela matriz V :

$$\begin{bmatrix} 14 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 6 & 16 & 10 & 20 & 8 \\ 4 & 22 & 22 & 14 & 26 \\ 14 & 16 & 20 & 4 & 26 \\ 10 & 24 & 28 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \cdot 1 + 16 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 18 \cdot 5 + 16 \cdot 4 \\ 6 \cdot 1 + 16 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 8 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 22 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 14 \cdot 5 + 26 \cdot 4 \\ 14 \cdot 1 + 16 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 26 \cdot 4 \\ 10 \cdot 1 + 24 \cdot 3 + 28 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 18 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 206 \\ 288 \\ 226 \\ 226 \end{bmatrix}.$$

Cada elemento do resultado corresponde ao valor total dos itens de um tipo de gaveta.

Para realizar essa operação, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda. O procedimento consiste em multiplicar, elemento a elemento, os valores das linhas da primeira matriz pelos valores correspondentes da coluna da segunda matriz, somando os produtos obtidos.

De maneira formal, definimos a multiplicação de matrizes como:

Definição 5. Sejam $A = [a_{ij}]$, uma matriz de ordem $m \times n$, e $B = [b_{ij}]$, uma matriz de ordem $n \times p$. O produto da matriz A pela matriz B resulta em uma matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times p$, cujos elementos c_{ij} são obtidos multiplicando-se, termo a termo, os elementos da linha i de A pelos correspondentes elementos da coluna j de B , somando-se os produtos obtidos.

A definição acima pode ser representada pela expressão:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, i = 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

O produto é representado por AB . É importante destacar que esse produto só está definido quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . Além

disso, a matriz resultante AB terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B .

Exemplo 15. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ duas matrizes, o produto é obtido por:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{bmatrix}.$$

Note que o produto é do tipo 3×2 (o número de linhas igual ao número de linhas de A e o número de colunas igual ao número de colunas de B).

1.4 Matrizes Transposta, Simétrica e Antissimétrica

Veremos a seguir as definições de matrizes transposta, simétrica e antissimétrica. Essas definições serão usadas para compreender alguns exemplos de subespaços vetoriais na subseção 1.6.2.

Definição 6. *Seja A uma matriz $m \times n$. Denomina-se matriz transposta de A , indicada por A^T , a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A , tal que*

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow A^T = [a_{ji}].$$

Exemplo 16. $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Exemplo 17. $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$

Definição 7. Matriz Simétrica: *Uma matriz quadrada A é simétrica se $A^T = A$.*

Exemplo 18. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, temos $A^T = A$.

Definição 8. Matriz Antissimétrica (ou alternada): *Uma matriz quadrada A é antissimétrica se $A^T = -A$.*

Exemplo 19. Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, temos $A^T = -A$.

1.5 Determinantes

O determinante é um valor associado a uma matriz quadrada, isto é, uma matriz com o mesmo número de linhas e colunas. Esse valor fornece informações úteis sobre a matriz, como a possibilidade dela ser invertível (veremos na subseção 1.8.1 que isso ocorre quando o determinante da matriz é diferente de zero).

Os determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 são importantes para este estudo. Eles serão usados para encontrar o polinômio característico para obtenção de autovalores e autovetores de uma matriz A no Capítulo 2.

A seguir, veremos como calcular os determinantes de matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3.

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, podemos representar o determinante por $\det A$ ou escrevendo os elementos de A limitados por barras simples:

$$\det A = \det [a_{ij}] = |a_{ij}|.$$

Para $n = 1$: Neste caso, se $A = [a_{11}]$, temos $\det A = a_{11}$.

Para $n = 2$: Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então o determinante de A é calculado como:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Aqui, a_{11} e a_{22} são os elementos da diagonal principal, enquanto a_{12} e a_{21} pertencem à diagonal secundária.

Para $n = 3$: Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

o determinante será dado por:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Exemplo 20. Calcularemos os determinantes das matrizes abaixo:

$$\text{a) } A = [5] \Rightarrow \det A = 5.$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 1 = 14 - 3 = 11.$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0) - (5 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 2) = (6 + 2) - (15) = 8 - 15 = -7.$$

O cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem superior a 3 é mais complexo, podendo ser realizado por meio do método dos cofatores ou pela técnica de triangularização. Ao leitor que desejar se aprofundar no estudo dos determinantes, recomenda-se a leitura das referências citadas no início deste capítulo.

1.6 Espaços vetoriais

Existem conjuntos cujos elementos podem ser somados entre si e multiplicados por números reais, de modo que o resultado dessas operações ainda pertença ao próprio conjunto. Além disso, esses conjuntos obedecem às mesmas propriedades da adição e da multiplicação que conhecemos dos números reais. Tais conjuntos recebem o nome de espaços vetoriais.

As definições e propriedades sobre matrizes e espaços vetoriais discutidas neste capítulo constituem a base para os conteúdos que serão desenvolvidos nos capítulos seguintes.

Neste estudo, os vetores serão representados por letras minúsculas em negrito, enquanto os escalares serão denotados apenas por letras minúsculas latinas ou gregas.

1.6.1 Definição de espaços vetoriais

Estudaremos o conceito de espaço vetorial e identificaremos as vantagens desse estudo, especialmente por revelar o que há de comum entre conjuntos como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e o conjunto das matrizes. A seguir, apresentamos a definição formal de espaço vetorial.

Definição 9. *Considere um conjunto V no qual estão definidas duas operações:*

Adição vetorial, que associa a cada par de elementos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um novo elemento $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, também pertencente a V ;

Multiplicação por escalar, que associa a cada número real α e a cada vetor $\mathbf{v} \in V$ um novo elemento $\alpha\mathbf{v}$, também pertencente a V .

Dizemos que o conjunto V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se, para todos os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. *Comutatividade da adição:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
2. *Associatividade da adição:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
3. *Elemento neutro da adição:* Existe um vetor $\mathbf{e} \in V$ tal que: $\mathbf{u} + \mathbf{e} = \mathbf{u}$;
4. *Elemento oposto (inverso aditivo):* Para todo $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{e}$;
5. *Associatividade da multiplicação:* $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$;
6. *Distributividade da multiplicação por vetor em relação à adição de escalares:* $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$;
7. *Distributividade da multiplicação por escalar em relação à adição vetorial:* $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;
8. *Elemento neutro da multiplicação por escalar:* $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Observando a definição acima, concluímos que os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ e dos números inteiros $\mathbb{Z}$ não são espaços vetoriais. Isso ocorre porque, em ambos os casos, a operação de multiplicação por escalar não está devidamente definida. Por exemplo, ao multiplicar um número inteiro não nulo por $\sqrt{3}$, que é um número real, o resultado não pertence ao conjunto dos inteiros. Essa observação mostra que certos conjuntos numéricos familiares não satisfazem os requisitos de um espaço vetorial. Para que um conjunto seja considerado um espaço vetorial, todas as condições da definição devem ser atendidas.

Exemplo 21. $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial

Sendo $V = \mathbb{R}^n$, podemos definir as operações de espaço vetorial em V como as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar de n -uplas, ou seja

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n).$$

O conjunto $V = \mathbb{R}^n$ é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Veremos que essas operações satisfazem as propriedades da Definição 9.

Considere $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, todos em $\mathbb{R}^n$, α e β números reais. Então temos:

$$1. \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) = \mathbf{v} + \mathbf{u};$$

$$2. \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \dots, u_n + (v_n + w_n)) = ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \dots, (u_n + v_n) + w_n) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w};$$

$$3. \text{ o vetor } \mathbf{e} = (0, 0, \dots, 0) \text{ satisfaz}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{e} = (u_1 + 0, u_2 + 0, \dots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{u};$$

$$4. \text{ tomando } -\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n), \text{ temos}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \dots, u_n - u_n) = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{e};$$

$$5. \alpha(\beta\mathbf{u}) = \alpha(\beta u_1, \beta u_2, \dots, \beta u_n) = (\alpha\beta u_1, \alpha\beta u_2, \dots, \alpha\beta u_n) = (\alpha\beta)\mathbf{u};$$

$$6. (\alpha + \beta)\mathbf{u} = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2, \dots, (\alpha + \beta)u_n) = (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2, \dots, \alpha u_n + \beta u_n) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u};$$

$$7. \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2), \dots, \alpha(u_n + v_n)) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2, \dots, \alpha u_n + \alpha v_n) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v};$$

$$8. 1\mathbf{u} = (1u_1, 1u_2, \dots, 1u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{u}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.

Exemplo 22. O espaço vetorial das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Seja V o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas reais e tomemos as operações de espaço vetorial em V como sendo as operações usuais de adição matricial e multiplicação matricial por escalar, ou seja

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_{ij}] + [v_{ij}] = [u_{ij} + v_{ij}]$$

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha[u_{ij}] = [\alpha u_{ij}]$$

O conjunto V é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações matriciais usadas nessa definição produzem matrizes $m \times n$ como resultado final. Assim, resta confirmar que valem as propriedades da Definição 9.

Considere $\mathbf{u} = [u_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{v} = [v_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{w} = [w_{ij}]_{m \times n}$, todas matrizes da ordem $m \times n$, α e β números reais. Então temos:

$$1. \mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_{ij}] + [v_{ij}] = [u_{ij} + v_{ij}] = [v_{ij} + u_{ij}] = [v_{ij}] + [u_{ij}] = \mathbf{v} + \mathbf{u};$$

$$2. \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = [u_{ij}] + ([v_{ij}] + [w_{ij}]) = [u_{ij}] + [v_{ij} + w_{ij}] = [u_{ij} + v_{ij} + w_{ij}] = [u_{ij} + v_{ij}] + [w_{ij}] = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w};$$

3. o vetor $\mathbf{e} = [0_{ij}]$ satisfaz $\mathbf{u} + \mathbf{e} = [u_{ij}] + [0_{ij}] = [u_{ij} + 0_{ij}] = [u_{ij}] = \mathbf{u}$;
4. tomando $-\mathbf{u} = [-u_{ij}]$, temos $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = [u_{ij}] + [-u_{ij}] = [u_{ij} - u_{ij}] = [0_{ij}] = \mathbf{e}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = \alpha(\beta[u_{ij}]) = \alpha[\beta u_{ij}] = [\alpha\beta u_{ij}] = (\alpha\beta)[u_{ij}] = (\alpha\beta)\mathbf{u}$;
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = (\alpha + \beta)[u_{ij}] = \alpha[u_{ij}] + \beta[u_{ij}] = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$;
7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha([u_{ij}] + [v_{ij}]) = \alpha[u_{ij}] + \alpha[v_{ij}] = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;
8. $1\mathbf{u} = 1[u_{ij}] = [u_{ij}] = \mathbf{u}$.

Portanto, as matrizes de ordem $m \times n$ representam um espaço vetorial. Esse espaço é representado como $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

As propriedades verificadas aqui decorrem diretamente das propriedades operatórias das operações com matrizes.

1.6.2 Subespaços vetoriais

Um subconjunto S de um espaço vetorial V é dito subespaço de V se tem a mesma estrutura de V , como podemos ver na definição a seguir:

Definição 10. *Dado um espaço vetorial V e um subconjunto S de V . Dizemos que S é subespaço vetorial de V se S for um espaço vetorial atendendo as mesmas operações que tornam V um espaço vetorial.*

No entanto, não é necessário verificar todas as condições para garantir que S seja um subespaço de V . Precisamos apenas verificar as condições abaixo:

1. $S \neq \emptyset$ (Caso S não seja vazio, verificar se o vetor nulo pertence a S);
2. Dados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ quaisquer em S , a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em S ;
3. Dados $\mathbf{u} \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto $\alpha\mathbf{u}$ está em S .

Caso $S \subset V$ satisfaça as condições acima, todas as outras propriedades da definição de espaço vetorial serão “herdadas” pelo conjunto S .

Exemplo 23. O exemplo 21 nos mostrou que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial. Agora mostraremos como provar que um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é um de seus subespaços vetoriais.

Seja $S = \{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$. O conjunto S é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Podemos verificar através das três condições vistas anteriormente:

1. $S \neq \emptyset$, porque $(0, 0) \in S$, basta considerar $x = 0$.

2. Se $\mathbf{u} \in S$ e $\mathbf{v} \in S$, digamos que $\mathbf{u} = (x, 3x)$ e $\mathbf{v} = (y, 3y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x + y, 3x + 3y) = (x + y, 3(x + y))$. Logo, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$, pois é um par ordenado de números reais onde a segunda ordenada é o triplo da primeira, que é a regra que define os elementos de S .

3. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, 3x) \in S$ então $\alpha(x, 3x) = (\alpha x, \alpha 3x) \in S$, pois $\alpha 3x = 3\alpha x$ é o triplo de αx .

Como as três condições foram atendidas, podemos concluir que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 24. Subespaço das Matrizes Simétricas. Sejam $A, B \in S$, onde $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$:

1. O elemento nulo 0 satisfaz $0^T = 0$, logo $0 \in S$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B \in S$;
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A \Rightarrow \lambda A \in S$.

Portanto, S é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 25. Subespaço das Matrizes Antissimétricas. Sejam $A, B \in Q$, onde $Q = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\}$:

1. O elemento nulo 0 satisfaz $0^T = 0 = -0 \Rightarrow 0 \in Q$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A + B) \Rightarrow A + B \in Q$;
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda(-A) = -\lambda A \Rightarrow \lambda A \in Q$.

Portanto, Q também é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Os subespaços mostrados nos exemplos 24 e 25 podem ser usados para fazer a decomposição de uma matriz. Visto que, qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita unicamente como a soma de uma matriz simétrica e uma antissimétrica:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2},$$

sendo $\frac{A + A^T}{2}$ simétrica e $\frac{A - A^T}{2}$ antissimétrica.

Logo, $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus Q$ ², ou seja, $M_n(\mathbb{R})$ é a soma direta dos subespaços das matrizes simétricas e antissimétricas.

² Sejam U e V subespaços vetoriais de W tais que $U \cap V = \{0\}$. Então dizemos que $U + V$ é a soma direta de U e V . Denotamos a soma direta por $U \oplus V$ (FIGUEIREDO, 2009).

1.6.3 Combinação linear

Podemos, por meio das propriedades das combinações lineares, obter uma descrição simples e completa de cada espaço vetorial. Iniciaremos pela definição a seguir:

Definição 11. Considere um espaço vetorial V , e sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ elementos de V . Uma expressão da forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais, representa uma combinação linear desses vetores.

Quando for possível descrever um vetor $\mathbf{v} \in V$ através de uma expressão como a vista acima, dizemos que $\mathbf{v}$ é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ ou que $\mathbf{v}$ se escreve como combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$\mathbf{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n.$$

Exemplo 26. O vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é combinação linear dos vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -6 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ pois } \mathbf{v} = 2v_1 + (-1)v_2 + 0v_3.$$

Temos ainda que $\mathbf{v} = 3v_1 + 0v_2 + v_3$, ou seja, $\mathbf{v}$ é combinação linear de v_1, v_2 e v_3 de várias maneiras.

1.6.4 Independência linear

Dizemos que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pertencente a um espaço vetorial V é linearmente independente quando a seguinte equação vetorial:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

possui somente a solução trivial, ou seja, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Por outro lado, o conjunto é considerado linearmente dependente se essa equação admite alguma solução não trivial, isto é, existem escalares $c_1, \dots, c_n$, nem todos nulos, que satisfazem a equação acima.

É comum utilizar as siglas L.I. para conjuntos linearmente independentes e L.D. para aqueles linearmente dependentes.

Exemplo 27. Um conjunto contendo um único vetor v é linearmente independente se, e somente se, $v \neq 0$.

Exemplo 28. As matrizes colunas $u_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são L.I., pois a equação:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

admite apenas a solução trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Exemplo 29. Vamos retomar o exemplo 26. Os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -6 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes. A equação:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

admite a solução não trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, o que caracteriza o conjunto como L.D.

1.6.5 Base de espaços vetoriais

Um conjunto B , linearmente independente, cujos vetores permitem escrever, por meio de uma combinação linear, todos os vetores de um subespaço W , é chamado de base de W . As bases se comportam como conjuntos geradores “mínimos” para um subespaço vetorial, no seguinte sentido:

1. Se um conjunto tem mais elementos do que uma base de W , então ele é linearmente dependente (L.D.);
2. Se tem menos elementos do que uma base de W , então ele não gera todo o subespaço W .

Trataremos as bases a partir da definição abaixo:

Definição 12. Considere W um subespaço de um espaço vetorial V . Uma base de W será um conjunto de vetores $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ se:

1. B é um conjunto linearmente independente.
2. O subespaço gerado por B é W .

Observações:

1. A definição de base se aplica ao próprio espaço V , pois todo espaço vetorial é subespaço de si mesmo.

2. Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de W , então $v_1, \dots, v_n$ pertencem a W .

Exemplo 30. Os vetores $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$ denominada **base canônica de $\mathbb{R}^3$** . Podemos ver que esses vetores atendem a Definição 12:

1. O conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é linearmente independente, pois a equação

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

admite apenas a solução trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$;

2. Qualquer vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Portanto, os vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ geram $\mathbb{R}^3$.

Generalizando os resultados para $\mathbb{R}^n$, temos que os vetores unitários canônicos

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

geram uma base de $\mathbb{R}^n$ que denominamos **base canônica de $\mathbb{R}^n$** .

Exemplo 31. Mostraremos que as matrizes

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço vetorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 . Partindo da Definição 12, temos

1. A equação $c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = \mathbf{0}_{2 \times 2}$ apresenta apenas a solução trivial (sendo $\mathbf{0}$ a matriz nula 2×2). Para provar, podemos escrever

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, temos que o conjunto formado pelas matrizes u_1, u_2, u_3 e u_4 é L.I.

2. Para qualquer matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pode ser expressa por $A = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4$. De fato,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Segue que, $c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c, c_4 = d$. Portanto, o conjunto formado pelas matrizes u_1, u_2, u_3 e u_4 geram $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Generalizando os resultados, temos que a **base canônica de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$** consiste nas mn matrizes distintas com uma única entrada 1 e todas as demais entradas iguais a zero.

1.6.6 Dimensão de um espaço vetorial

Um espaço vetorial V é dito de dimensão finita quando possui uma base finita. Nesse caso, a dimensão de V , denotada por $\dim V$, é definida como o número de vetores que compõem qualquer base de V . Se, por outro lado, não for possível encontrar uma base finita para V , dizemos que se trata de um espaço vetorial de dimensão infinita. Já o espaço vetorial trivial $[0]$ tem dimensão definida como sendo igual a zero.

Exemplo 32. A $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Vimos no Exemplo 30 que a base canônica de $\mathbb{R}^3$ possui 3 vetores distintos.

Exemplo 33. A $\dim \mathbb{R}^n = n$. A base canônica de $\mathbb{R}^n$ possui n vetores.

Exemplo 34. A $\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$. Vimos no Exemplo 31 que essa base possui 4 vetores distintos.

Exemplo 35. A $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$. Note que a base canônica de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ possui mn matrizes distintas.

1.7 Produto Interno e Norma de Matrizes

Veremos a definição de produto interno e a utilizaremos para definir a norma de um vetor ou de uma matriz. Em seguida, empregaremos a norma para auxiliar na interpretação das transformações isométricas abordadas no Capítulo 2.

Definição 13. *Sejam $A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Definimos o produto interno como:*

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) \quad (1.1)$$

onde $\text{tr}(M)$ representa o traço da matriz M , ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal.

Propriedades do Produto Interno:

1. *Simetria* $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$;
2. *Linearidade* : $\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$;
3. *Positividade* : $\langle A, A \rangle \geq 0$ e $\langle A, A \rangle = 0 \iff A = 0$.

Definição 14. *A norma, de um Vetor ou Matriz, induzida pelo produto interno é dada por:*

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \quad (1.2)$$

Exemplo 36. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Para determinar sua norma, inicialmente calculamos

$$(A^T A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix},$$

em seguida, através da equação 1.1, determinamos o produto interno

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = 10 + 20 = 30.$$

Assim, pela equação 1.2, temos a norma da matriz A igual a

$$\|A\| = \sqrt{30}.$$

1.8 Matriz Inversa e Matrizes Ortogonais

Nesta seção abordaremos dois conceitos fundamentais da Álgebra Linear: a **matriz inversa** e a **matriz ortogonal**. A combinação destes conceitos permitirá uma análise da **matriz de rotação**, um caso especial de matriz ortogonal, estudadas no Capítulo 2.

1.8.1 Matriz Inversa

A seguir temos a definição de Matriz Inversa e em seguida a condição necessária para verificar se uma matriz A é invertível.

Definição 15. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é **invertível** (ou **não singular**) se existir uma matriz B , também de ordem n , tal que*

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n . Essa matriz B é denominada **matriz inversa** de A e é usualmente denotada por A^{-1} .

Condição de Invertibilidade

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero:

$$\det(A) \neq 0.$$

Se $\det(A) = 0$, a matriz é dita **singular** e não possui inversa.

Caso a condição de invertibilidade seja atendida, podemos calcular a inversa de uma matriz. O teorema a seguir traz uma método para calcular a inversa de uma matriz de ordem 2.

Teorema 1. *Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\det(A) = ad - bc \neq 0$, então a inversa da matriz A é*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exemplo 37. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Podemos afirmar que A é invertível, pois

$$\det(A) = 6 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 7,$$

que é não nulo. A inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}.$$

1.8.2 Propriedades das Matrizes Inversas

Se A e B são matrizes invertíveis da mesma ordem:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Observação: O cálculo manual de inversas é viável apenas para matrizes de pequenas dimensões. Para matrizes de grande ordem, recorre-se a métodos numéricos, como a eliminação de Gauss-Jordan (LARSON, 2017).

1.8.3 Matrizes Ortogonais

Matrizes ortogonais preservam normas e ângulos, sendo amplamente utilizadas em transformações geométricas, como rotações e reflexões. A seguir veremos sua definição formal.

Definição 16. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita **ortogonal** se o seu produto pela sua transposta resulta na matriz identidade:

$$A^T A = A A^T = I_n.$$

ou de forma equivalente, A é ortogonal se

$$A^{-1} = A^T.$$

1.8.4 Propriedades das Matrizes Ortogonais

Se A é uma matriz ortogonal de ordem n , então:

1. $A^{-1} = A^T$.
2. As colunas de A são vetores unitários e mutuamente ortogonais.
3. $\det(A) = \pm 1$.
4. O produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal.
5. A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.

Exemplo 38. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = I_2.$$

Além disso, $\det(A) = 1$ para todo θ .

O produto da matriz ortogonal do exemplo 38 por um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ preserva a norma desse vetor. Tal propriedade pode ser verificada pelo cálculo de $\|A\mathbf{x}\|$ apresentado a seguir:

$$\|A\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^T \mathbf{x} A \mathbf{x})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{x} A^T A \mathbf{x})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{x} I_2 \mathbf{x})} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \|\mathbf{x}\|.$$

Como consequência direta, a matriz A também preserva ângulos entre vetores. Essa matriz é conhecida como **matriz de rotação** e será estudada com mais detalhes no Capítulo 2.

As seções 1.6, 1.7 e 1.8, que tratam, respectivamente, de espaços vetoriais, produto interno e norma de matrizes e matriz inversa e matrizes ortogonais, podem ser aprofundadas por meio das referências citadas no início deste capítulo.

2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES, AUTO-VALORES E AUTOVETORES

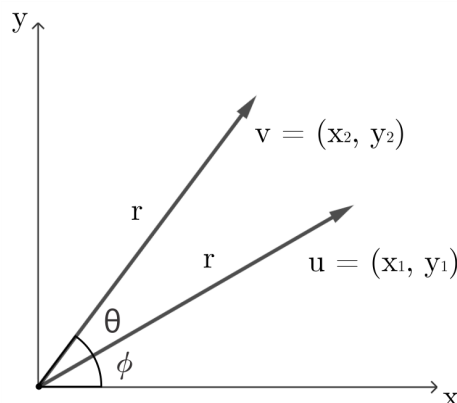
Começaremos este capítulo abordando as transformações lineares, conceitos fundamentais na Álgebra Linear e amplamente utilizados em diversas áreas da Matemática e suas aplicações. Exploraremos como essas transformações preservam as operações de adição e multiplicação por escalar entre elementos de espaços quaisquer. Serão discutidas suas representações matriciais, bem como os efeitos geométricos associados. Neste trabalho, a unidade utilizada para medir o valor de um ângulo será o grau. Essa escolha se deve à intenção de aproximar o conteúdo deste trabalho aos conteúdos dos textos utilizados na educação básica, facilitando a abordagem, já que, em sua maioria, esses materiais adotam o grau como unidade de medida. Para construir os temas abordados neste capítulo foram usadas as seguintes referências (ANTON; RORRES, 2012), (NETO, 2022) e (AMORIM, 2017).

2.1 Transformações Lineares

Daremos início a esta seção por meio de um exemplo sobre a rotação de um vetor. Os resultados obtidos nesse exemplo, juntamente com as definições que serão apresentadas a seguir, servirão de base para modelar o movimento de um braço robótico no Capítulo 3.

A rotação é um procedimento matemático usado para girar um vetor em $\mathbb{R}^2$ por um ângulo θ . Para encontrar as equações que permitam rotacionar o vetor, considere a figura 1.

Figura 1 – Rotação de um vetor



Fonte: Autor, 2025.

Na Figura 1, r representa o módulo dos vetores ($\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$) e $\mathbf{v}$ representa a rotação do vetor $\mathbf{u}$ por um ângulo θ .

As coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ podem ser obtidas através das relações:

$$x_1 = r \cos \phi \text{ e } y_1 = r \sin \phi.$$

Já as coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ podem ser obtidas através das relações:

$$x_2 = r \cos(\theta + \phi) \text{ e } y_2 = r \sin(\theta + \phi).$$

Usando as fórmulas de adição de arcos, podemos escrever:

$$x_2 = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \text{ e } y_2 = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi$$

e considerando as relações obtidas para o vetor $\mathbf{u}$, podemos reescrever as relações obtidas para $\mathbf{v}$ da seguinte forma:

$$x_2 = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \text{ e } y_2 = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta.$$

Essas relações encontram as novas coordenadas de um vetor após sofrer uma rotação por um ângulo θ .

Também podemos analisar essas relações sob o ponto de vista matricial. Seja $\beta = \{e_1, e_2\}$ a base canônica de $V = \mathbb{R}^2$. Sabemos que $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. A matriz de rotação é definida por

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Essa matriz, chamada de matriz de rotação, quando multiplicada pelo vetor $\mathbf{u}$ fornece como resultado o vetor $\mathbf{v}$, cujas coordenadas correspondem às de $\mathbf{u}$ após uma rotação por um ângulo θ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_\beta &= R[\mathbf{u}]_\beta \\ [\mathbf{v}]_\beta &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} [\mathbf{u}]_\beta \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A aplicação que rotaciona o vetor $\mathbf{u}$ pela ação de um ângulo θ , θ variando entre 0° e 360° , tanto para o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ quanto para o espaço das matrizes $M_{2 \times 2}$, representa uma transformação linear. Para aprofundar esse conceito, veremos sua definição a seguir.

Definição 17. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita, a aplicação $T : V \rightarrow W$ é denominada transformação linear de V em W se propriedades seguintes forem válidas para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e qualquer escalar $k \in \mathbb{R}$:

- (i) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;
- (ii) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ [Homogeneidade];
- (iii) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ [Aditividade].

Observação: No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada operador linear do espaço vetorial V .

2.1.1 Rotação em relação a origem

Chamamos de rotação a transformação linear que gira um vetor em $\mathbb{R}^2$ por um ângulo θ . Aqui veremos sua abordagem matricial usando a Definição 17.

Uma matriz $A_{2 \times 2}$ leva a uma transformação linear $T : M_{2 \times 1} \rightarrow M_{2 \times 1}$. Precisando apenas definir $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, sendo o vetor $\mathbf{x}$ identificado como uma matriz coluna com 2 linhas.

Retomando o exemplo do início deste capítulo, temos que $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ e $A = R$, o que nos permite escrever a transformação linear de rotação na forma:

$$T(\mathbf{u}) = R\mathbf{u}$$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

A rotação representa uma transformação linear. Podemos verificar essa afirmação observando que essa transformação atende a Definição 17.

Exemplo 39. Aplicando uma rotação de 30° ao vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, quais coordenadas obtemos como resultado?

Chamaremos de $\mathbf{v}$ o vetor $\mathbf{u}$ após sofrer a rotação.

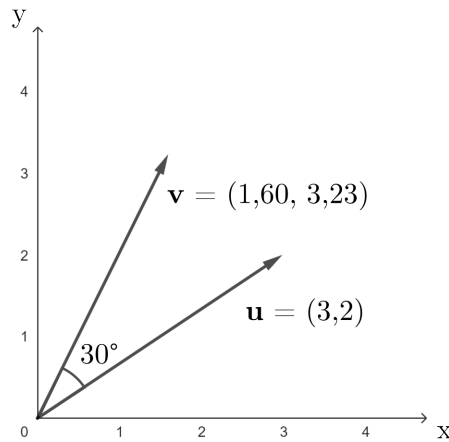
$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = R\mathbf{u}$$

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + (-\frac{1}{2}) \cdot 2 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,60 \\ 3,23 \end{bmatrix}$$

A figura 2 mostra a representação geométrica da rotação do vetor $\mathbf{u}$.

Figura 2 – Rotação do vetor $\mathbf{u}$ em 30°



Fonte: Autor, 2025.

2.1.2 Translação

Podemos realizar a translação de um vetor $\mathbf{u}$ não nulo em $\mathbb{R}^2$ adicionando às suas coordenadas os valores numéricos não nulos das coordenadas de um vetor (a, b) . Essa operação pode ser representada pela seguinte transformação:

$$T : M_{2 \times 1} \rightarrow M_{2 \times 1}$$

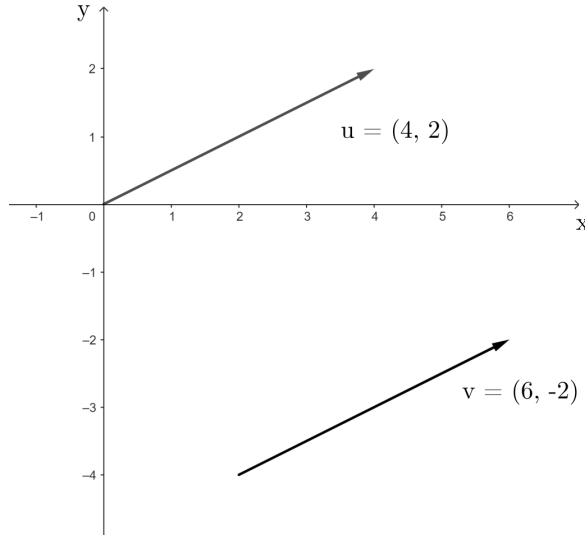
definida por

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} + \mathbf{p} \\ T(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 40. Considere o vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Aplicando uma translação através do vetor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, quais coordenadas obtemos como resultado?

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2 \\ 2 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A figura 3 mostra o vetor $\mathbf{v}$ que representa de forma geométrica a translação do vetor $\mathbf{u}$. Note que a origem do vetor após a translação passa a ser as coordenadas do vetor $\mathbf{p}$.

Figura 3 – Translação do vetor $\mathbf{u}$ 

Fonte: Autor, 2025.

Vale ressaltar que a translação, embora tenha sido descrita neste capítulo, não é uma transformação linear. Isso ocorre porque ela não satisfaz a Definição 17, pois

$$T(\mathbf{0}_{2 \times 1}) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

2.1.3 Coordenadas homogêneas

A seguir vamos exibir um estudo particular de **coordenadas homogêneas** que pode ser visto em (ARAUJO, 2017) e em (AMORIM, 2017). As coordenadas homogêneas podem ser obtidas com a introdução de uma componente adicional na matriz de rotação. A intenção de introduzir essa nova componente é realizar a rotação e a translação de um vetor através de uma única matriz.

Considere a seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Sendo p_x e p_y as coordenadas de um vetor $\mathbf{p}$ usadas para realizar a translação de um vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

Podemos escrever a transformação acima da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Na matriz acima a porção $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é denominada componente de rotação e a porção $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ é denominada componente de translação.

Exemplo 41. Deseja-se realizar a rotação de 60° do vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e em seguida transladá-lo com as coordenadas de um vetor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Quais as novas coordenadas de $\mathbf{u}$ após a rotação e translação que conservam sua norma? ($\|\mathbf{u}\| = 5$)

Aplicando a matriz de rotação e translação, temos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ & 2 \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 5 \cos 60^\circ + 2 \cdot 1 = 4,5$$

$$y_2 = 5 \operatorname{sen} 60^\circ + 3 \cdot 1 = 7,33.$$

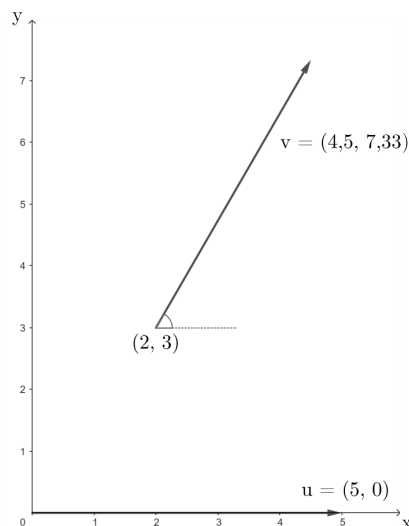
Com essa translação a nova origem de $\mathbf{u}$ passa a ser $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Chamaremos o vetor $\mathbf{u}$ após sofrer a transformação de vetor $\mathbf{v}$. A norma de $\mathbf{v}$ dada por:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(4,5 - 2)^2 + (7,33 - 3)^2} \cong 5.$$

Perceba que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, ou seja, a norma do vetor $\mathbf{v}$ é invariante por rotação. A representação geométrica dessa transformação pode ser vista na figura 4.

Figura 4 – Representação geométrica dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$



Fonte: Autor, 2025.

2.1.4 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Duas noções centrais associadas a uma transformação linear são os conceitos de *núcleo* e a *imagem*, que desempenham papéis cruciais na compreensão das propriedades estruturais da aplicação, como injetividade, sobrejetividade e isomorfismo.

Nesta seção, apresentaremos as definições de núcleo e imagem e demonstraremos que tais conjuntos são subespaços vetoriais. Por fim, aplicaremos a teoria ao caso particular da rotação em torno do eixo x no espaço tridimensional, analisando seu núcleo e sua imagem.

Definição 18. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Definimos:*

Núcleo de T :

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

O núcleo é o conjunto de todos os vetores de V que são mapeados no vetor nulo de W pela transformação T .

Imagem de T :

$$\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \subseteq W.$$

A imagem é o conjunto de todos os vetores de W que podem ser obtidos como $T(\mathbf{v})$ para algum $\mathbf{v} \in V$.

Em seguida, mostraremos que tanto $\ker(T)$ quanto $\text{Im}(T)$ são subespaços vetoriais.

Proposição 1. *Sejam V e W subespaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Considere $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então, o $\ker(T)$ é um subespaço vetorial de V e o conjunto $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W .*

Inicialmente, provaremos que o núcleo de T é um subespaço vetorial. De fato,

1. **Não-vazio:** O vetor nulo $\mathbf{0}_V \in V$ satisfaz $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, logo $\mathbf{0}_V \in \ker(T)$.

2. **Fechamento por adição:** Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(T)$, então $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W$ e $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$.

Pela linearidade:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W.$$

Assim, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \ker(T)$.

3. Fechamento por multiplicação escalar: Se $\mathbf{v} \in \ker(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então:

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}) = \alpha \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

logo $\alpha\mathbf{v} \in \ker(T)$.

Portanto, $\ker(T)$ é um subespaço vetorial de V . Por sua vez, o conjunto imagem $\text{Im}(T)$ é um subespaço de W , pois verificamos as condições,

1. **Não-vazio:** Existe $\mathbf{0}_V \in V$ tal que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, portanto $\mathbf{0}_W \in \text{Im}(T)$.

2. **Fechamento por adição:** Se $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \text{Im}(T)$, existem $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tais que $\mathbf{y}_1 = T(\mathbf{v}_1)$ e $\mathbf{y}_2 = T(\mathbf{v}_2)$. Pela linearidade:

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in \text{Im}(T).$$

3. **Fechamento por multiplicação escalar:** Se $\mathbf{y} \in \text{Im}(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{y} = T(\mathbf{v})$. Assim:

$$\alpha\mathbf{y} = \alpha T(\mathbf{v}) = T(\alpha\mathbf{v}) \in \text{Im}(T).$$

Portanto, $\text{Im}(T)$ é subespaço vetorial de W .

Agora exploramos uma caracterização importante de injetividade da transformação linear no ambiente de Álgebra Linear.

Proposição 2. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então T é injetiva se, e somente se, $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.*

($\Rightarrow$) Suponha que T é injetiva e seja $\mathbf{v} \in \ker(T)$. Temos $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W = T(\mathbf{0}_V)$. Pela injetividade, $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, logo $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ e que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Então:

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}_W.$$

Assim, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker(T)$, o que implica $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Logo, T é injetiva.

Exemplo 42. Rotação em torno do eixo X no $\mathbb{R}^3$.

Consideremos a transformação linear $R_x^\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida pela rotação em torno do eixo x de ângulo θ (em radianos):

$$R_x^\theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{bmatrix}.$$

A priori, vamos encontrar o núcleo deste operador rotação. Pois bem, se $R_x^\theta(x, y, z) = (0, 0, 0)$, temos:

$$x = 0, \quad y \cos \theta - z \sin \theta = 0, \quad y \sin \theta + z \cos \theta = 0.$$

O sistema homogêneo nas variáveis y e z possui determinante $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$, logo $y = 0$ e $z = 0$. Assim:

$$\ker(R_x^\theta) = \{\mathbf{0}\}.$$

Portanto, R_x^θ é injetiva.

Por outro lado, para encontrar o subespaço $\text{Im}(T)$, perceba que, como R_x^θ é representada por uma matriz ortogonal (determinante igual a 1 e colunas ortonormais), ela preserva dimensões e normas, mapeando $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo. Logo:

$$\text{Im}(R_x^\theta) = \mathbb{R}^3.$$

Assim, R_x^θ é sobrejetiva.

2.1.5 Isomorfismo

A partir do problema apresentado no início deste capítulo, realizamos uma discussão sobre a rotação em $\mathbb{R}^2$ e no espaço das matrizes. Os resultados obtidos foram os mesmos, pois, apesar das diferenças aparentes, ambos os espaços compartilham a mesma estrutura algébrica. Isso significa seus elementos se comportam de forma equivalente em termos de operações e propriedades. Essa equivalência é conhecida como isomorfismo.

Do ponto de vista da Álgebra Linear, dois espaços vetoriais são ditos isomorfos quando existe entre eles uma função bijetora que preserva as operações de adição e multiplicação por escalar. Nesta seção, mostraremos que o espaço das matrizes $M_{m \times n}$ e o espaço $\mathbb{R}^{mn}$ são isomorfos. Esse tipo de isomorfismo será essencial para o desenvolvimento deste trabalho, pois em alguns exemplos que abordaremos, utilizaremos inicialmente uma abordagem matricial, seguida de sua interpretação geométrica em $\mathbb{R}^2$.

Começaremos discutir isomorfismo pela definição a seguir:

Definição 19. Se uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora, dizemos que T é um **isomorfismo** e que os espaços vetoriais V e W são isomorfos.

Para ser injetora, T deve transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W . Para T ser sobrejetora, qualquer vetor em W deve ser a imagem de pelo menos um vetor em V .

Exemplo 43. Isomorfismo de $M_{2 \times 2}$ em $\mathbb{R}^4$.

Inicialmente, definimos uma aplicação linear que transforma uma matriz em um vetor enfileirando os elementos de suas linhas:

$$T : M_{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$$

Seja $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

temos, após aplicar T sobre A o resultado:

$$T(A) = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

Em seguida, verificamos se essa aplicação preserva as operações de adição e multiplicação por escalar e se atende a Definição 19.

$$(i) \quad T(0_{2 \times 2}) = (0, 0, 0, 0);$$

(ii) Preserva a adição: Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Então:

$$\begin{aligned} T(A + B) &= (a + e, b + f, c + g, d + h) = (a, b, c, d) + (e, f, g, h) \\ &= T(A) + T(B); \end{aligned}$$

(iii) Preserva a multiplicação por escalar:

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$T(\lambda A) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \lambda(a, b, c, d) = \lambda T(A).$$

(iv) T é naturalmente injetora, pois para $T(A) = T(B) = (a, b, c, d)$, temos $A = B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, portanto T é injetora.

(v) T será sobrejetora se para todo vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{mn}$ existe uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = \mathbf{u}$.

Com $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$, temos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $T(A) = \mathbf{u}$, portanto T é sobrejetora.

A generalização do exemplo acima, mostra que o espaço vetorial $M_{m \times n}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$.

2.2 Autovalores e Autovetores

Autovalores e autovetores são conceitos fundamentais na Álgebra Linear, com amplas aplicações em diversas áreas da Matemática e das ciências aplicadas. No contexto educacional, seu estudo permite compreender como certas transformações lineares agem de maneira específica sobre vetores. Esta seção introduz essas ideias de forma acessível, explorando sua interpretação geométrica. A proposta é apresentar uma forma de lidar com rotações e translações de vetores de modo que sua extremidade permaneça fixa em um ponto determinado.

2.2.1 Definição de autovalores e autovetores

De maneira formal, temos a seguinte definição de autovalores e autovetores:

Definição 20. Se A for uma matriz quadrada de ordem n , então um vetor não nulo $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^n$ é denominado autovetor de A (ou do operador matricial T_A) se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de $\mathbf{x}$, isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ . O escalar λ é denominado autovalor de A (ou de T_A), e dizemos que $\mathbf{x}$ é um autovetor associado a λ .

A partir da definição, temos que a multiplicação de uma matriz A por um vetor $\mathbf{x}$ que é autovetor de A , mantém a direção de $\mathbf{x}$ inalterada. Dependendo do valor e do sinal do autovalor λ associado a $\mathbf{x}$, temos que a operação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ expande ou comprime o vetor $\mathbf{x}$ pelo fator λ , ou ainda pode inverter o sentido de $\mathbf{x}$ no caso de λ ser negativo.

Exemplo 44. Vamos considerar a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e o vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. O produto entre A e $\mathbf{u}$ é dado por:

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O resultado mostra que o efeito de multiplicar A por $\mathbf{u}$ foi o mesmo que multiplicar $\mathbf{u}$ por um escalar, neste caso, o número 3. Vejamos agora o valor do produto de A pelo vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

O mesmo comportamento se repete, o vetor $\mathbf{v}$ também foi multiplicado por 3. No exemplo acima, dizemos que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são autovetores da matriz A e que o número 3 é o autovalor correspondente que associa esses vetores a matriz A .

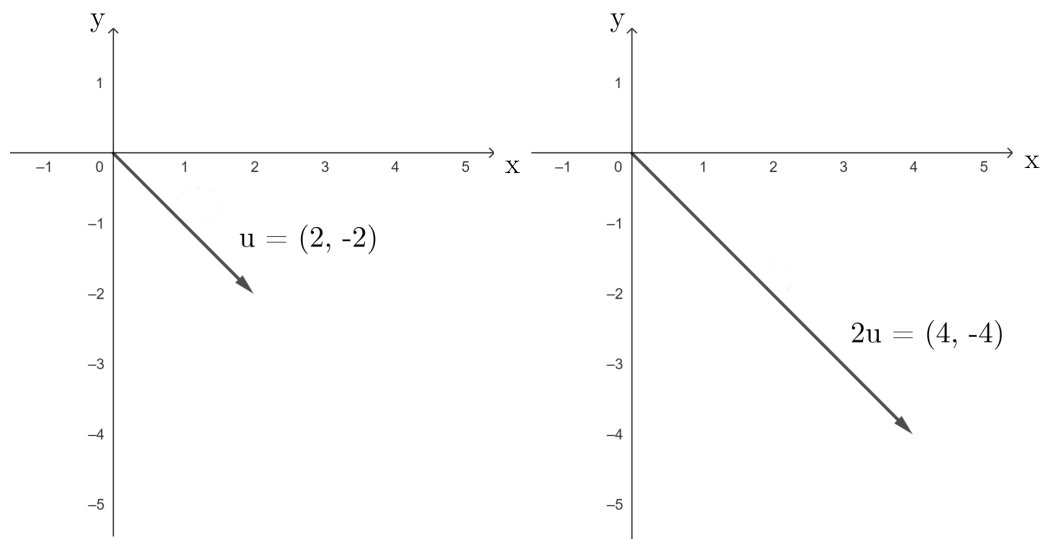
Exemplo 45. Autovetor de uma matriz 2×2 .

O vetor $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda = 2$.

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que do ponto de vista geométrico, após a multiplicação de A por $\mathbf{u}$, temos o vetor $\mathbf{u}$ expandido pelo fator 2. Essa expansão pode ser vista na figura 5.

Figura 5 – Expansão do vetor $\mathbf{u}$



Fonte: Autor, 2025

2.2.2 Equação característica e polinômio característico

Definidos os conceitos de autovalores e autovetores, precisamos de um procedimento que seja capaz de calculá-los em relação a uma matriz A de tamanho $n \times n$. O procedimento que será usado aqui parte do teorema a seguir.

Teorema 2. Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e só se, λ satisfaz a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Essa é a equação característica de A .

O desenvolvimento do determinante $\det(\lambda I - A)$ resulta em um polinômio de grau n , chamado de polinômio característico de A . Em geral, esse polinômio é da forma

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

em que 1 é o coeficiente de λ^n e $c_1, \dots, c_n$ são os demais coeficientes.

Como um polinômio de grau n possui no máximo n raízes distintas, podemos afirmar que a equação

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

possui, no máximo, n soluções distintas, o que faz uma matriz $n \times n$ ter, no máximo, n autovalores distintos. Os autovalores obtidos podem ser reais ou complexos.

Conhecendo os autovalores de uma matriz, partimos para o problema de achar os autovetores associados. Faremos isso encontrando os vetores $\mathbf{x}$ não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0.$$

Os autovetores encontrados são os vetores não nulos do espaço nulo da matriz $\lambda I - A$. Esse espaço nulo é chamado de autoespaço de A associado a λ .

Exemplo 46. Autovalores e autovetores de uma matriz 2×2 .

Deseja-se encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo $\det(\lambda I - A)$ podemos encontrar o polinômio característico

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 5 \cdot 2 = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

A equação característica é dada por:

$$(\lambda + 1)(\lambda - 6) = 0.$$

A partir dela podemos encontrar a solução, o que nos dá como resultado os dois autovalores da matriz A :

$$\lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 6.$$

Para determinar os autovetores associados, encontraremos vetores $\mathbf{u} = (x, y)$, não nulos, que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o autovalor $\lambda_1 = -1$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 - 1 & 5 \\ 2 & -1 - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que resulta nas equações

$$-2x_1 + 5y_1 = 0 \text{ e } 2x_1 - 5y_1 = 0.$$

Dessas equações, encontramos a solução geral

$$x_1 = t \text{ e } y_1 = \frac{2}{5}t.$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{2}{5}t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Sendo a matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ a base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

Para o autovalor $\lambda_2 = 6$, temos

$$\begin{bmatrix} 6-1 & 5 \\ 2 & 6-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que resulta nas equações

$$5x_1 + 5y_1 = 0 \text{ e } 2x_1 + 2y_1 = 0.$$

Dessas equações, encontramos a solução geral

$$x_1 = t \text{ e } y_1 = -t.$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo a matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ a base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$.

Exemplo 47. Autovalores e autovetores de uma matriz 3×3 .

Deseja-se encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo $\det(\lambda I - A)$ podemos encontrar o polinômio característico

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 3 \\ 2 & \lambda - 2 & -5 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) - (3(\lambda - 2)) \\ &= (\lambda - 2)((\lambda - 1)(\lambda - 3) - 3) \\ &= (\lambda - 2)\lambda(\lambda - 4). \end{aligned}$$

Usando o teorema 2, montamos a equação característica $(\lambda - 2)\lambda(\lambda - 4) = 0$. Desenvolvendo essa equação obteríamos um polinômio de grau 3, mas como ela já se apresenta na forma fatorada, é possível determinar facilmente suas raízes, portanto os autovalores associados a A são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$.

Para determinar os autovetores associados, encontraremos vetores $\mathbf{u} = (x, y, z)$, não nulos, que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 3 \\ 2 & \lambda - 2 & -5 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o autovalor $\lambda_1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 - 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 - 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O que resulta nas equações

$$-x_1 + 3z_1 = 0, \quad 2x_1 - 2y_1 - 3z_1 = 0 \text{ e } x_1 - 3z_1 = 0.$$

Dessas equações, encontramos a solução geral

$$x_1 = 3t, \quad y_1 = \frac{1}{2}t \text{ e } z_1 = t.$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sendo a matriz $\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ a base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$.

De maneira similar ao que foi feito para encontrar os autovetores associado ao autovalor λ_1 , podemos encontrar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$, que são, respectivamente, iguais a $t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Uma pergunta que pode surgir naturalmente é: a partir de um autovalor e um autovetor, previamente fixados, é possível determinar uma matriz a qual eles estão associados? A resposta é sim! O exemplo a seguir tem como objetivo demonstrar como essa matriz pode ser encontrada.

Exemplo 48. Encontrar a matriz $A_{2 \times 2}$ que associa o autovetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o autovalor $\lambda = 1$.

Podemos escrever a matriz A na forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Usando a Definição 20, escrevemos

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo essa multiplicação, encontramos as equações

$$3a + b = 3 \text{ e } 3c + d = 1.$$

Essas equações apresentam as seguintes soluções

$$a = t, \quad b = 3(1 - t), \quad c = q \text{ e } d = 1 - 3q.$$

Variando os valores de t e q , podemos encontrar os elementos da matriz A que satisfazem o enunciado do exemplo.

Para $t = 2$ e $q = 3$, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}.$$

Usando novamente a Definição 20, podemos perceber que

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + (-8) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como queríamos mostrar.

Vimos que é possível determinar a matriz A que associa um autovetor e um autovalor dados. Essa ideia pode ser estendida para matrizes de ordem 3 e será usada para solucionar um problema envolvendo o movimento de um braço robótico no Capítulo 3.

3 O BRAÇO ROBÓTICO

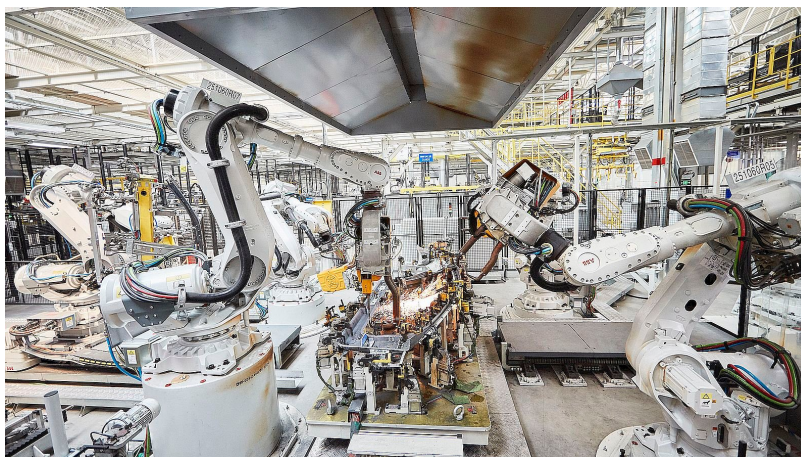
O estudo do braço robótico, dispositivo geralmente encontrado em ambientes industriais, oferece uma oportunidade interdisciplinar para conectar conceitos matemáticos abstratos a aplicações concretas da tecnologia moderna. Modelos de braços robóticos envolvem transformações lineares, sistemas de equações, vetores e matrizes, tornando-se um recurso valioso para o ensino contextualizado da Matemática. Neste capítulo, serão exploradas as bases teóricas necessárias para a modelagem matemática dos movimentos de um braço robótico, com ênfase no estudo de rotação e translação de vetores. Para as construções dos temas deste capítulo, foram usadas as seguintes referências (ANTON; RORRES, 2012), (HEFEZ; FERNANDEZ, 2022), (NETO, 2022) e (AMORIM, 2017).

3.1 Como funciona o braço robótico

Começaremos definindo o que é um robô industrial. Segundo a Federação Internacional de Robótica (IFR), um robô industrial é um “manipulador multifuncional reprogramável, controlado automaticamente, programável em três ou mais eixos, que pode ser fixo no local ou montado sobre uma plataforma móvel, para uso em aplicações de automação em um ambiente industrial” (IFR, 2025).

A partir dessa definição, é possível identificar diversos tipos de robôs, entre eles os cartesianos, cilíndricos, polares, SCARA, delta e articulados (IFR, 2025). Um braço robótico se classifica como um robô articulado, sendo o foco deste estudo. Atualmente, os braços robóticos são os mais utilizados nas indústrias. Sua estrutura se assemelha à de um braço humano, podendo conter múltiplos eixos que permitem movimentos em várias direções. Essa flexibilidade garante um bom alcance e diversas possibilidades de aplicação. Além disso, esses robôs podem ser programados levando em consideração as coordenadas cartesianas tridimensionais de sua estrutura permitindo o desenvolvimento de rotinas de controle e programação que incorporam transformações geométricas, como rotação e translação. A figura 6 mostra um exemplo de braço robótico na indústria automotiva que apresenta as características citadas.

Figura 6 – Braço robótico industrial

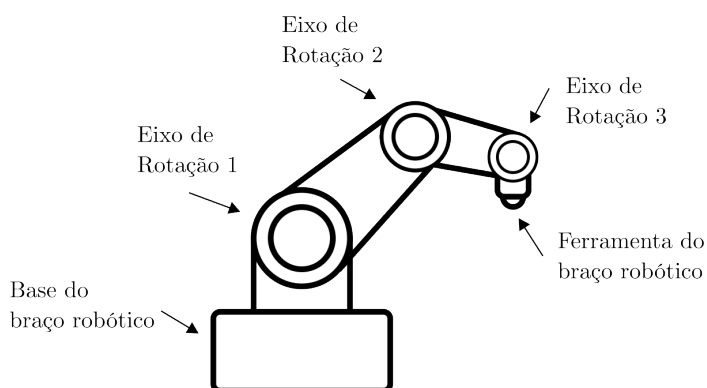


Fonte: IFR, 2025.

Uma das propriedades fundamentais dos braços robóticos é o grau de liberdade, conhecido pela sigla em inglês *DoF* (*Degree of Freedom*). Esse conceito refere-se à quantidade de movimentos independentes que o robô é capaz de realizar dentro do seu ambiente operacional. Em termos práticos, quanto mais graus de liberdade um braço robótico possui, maior será sua capacidade de adaptação e precisão ao executar diferentes tarefas.

Entretanto, essa versatilidade tem um custo: sistemas com muitos graus de liberdade tendem a ser mais caros, exigem projetos mecânicos mais complexos e demandam estratégias de controle mais sofisticadas. Como exemplo, considere um braço robótico com apenas 2 graus de liberdade — ele é limitado a movimentos básicos, como elevação e rotação em torno de um ponto fixo. Por outro lado, braços industriais com 6 graus de liberdade conseguem realizar movimentos semelhantes aos de um braço humano, sendo capazes de operar em múltiplas direções, girar, estender-se e ajustar a orientação do efetuador com grande precisão, o que os torna ideais para tarefas em ambientes industriais exigentes. A figura 7 ilustra a estrutura de um braço robótico com 3 graus de liberdade.

Figura 7 – Braço robótico industrial



Fonte: Autor, 2025.

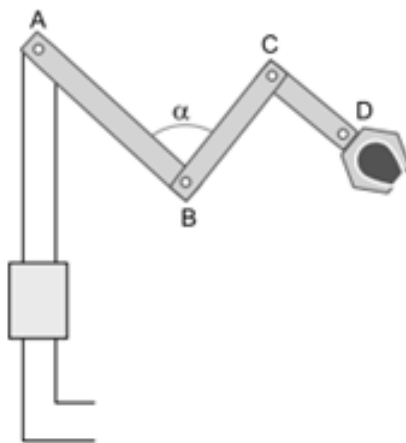
3.2 Aplicações do braço robótico no ensino da matemática

A relação entre o braço robótico e a Matemática permite contextualizar diversos problemas, especialmente aqueles ligados à Álgebra Linear. É comum encontrar questões que exploram esse tema em olimpíadas e provas de vestibulares. Como exemplos dessa aplicação, apresentamos os exemplos 49, 50 e 51. Além de expor os enunciados, discutiremos suas soluções com o objetivo de aprofundar os conteúdos envolvidos.

Exemplo 49. (UNESP 2023 – 2ª Fase)

A figura indica o projeto de um braço mecânico em que $\overline{AB}$ assume função próxima de um bíceps humano, $\overline{BC}$ de um antebraço e $\overline{CD}$ de um punho. Sabe-se que a medida de $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm e que a medida de $\overline{BC}$ é 8 cm.

Figura 8 – Imagem do exemplo 49



Fonte: UNESP, 2023.

Se, para $\alpha = 60^\circ$, a distância entre os pontos A e C do mecanismo é igual a $8\sqrt{3}$ cm, a extensão máxima horizontal do braço mecânico, em cm, é igual a

- A) 31 B) 28 C) 30 D) 27 E) 29

Solução: Pelo enunciado da questão, podemos escrever

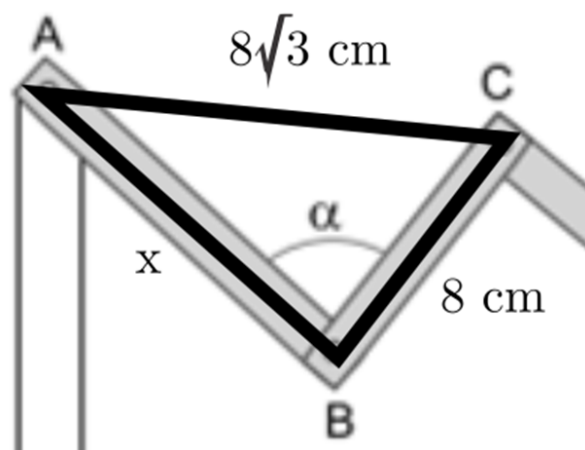
$$\overline{AB} = x = (11 + \overline{CD})$$

$$\overline{BC} = 8$$

$$\overline{CD} = (x - 11)$$

Note que nossa tarefa é encontrar o valor de x . Faremos isso considerando o triângulo escaleno ABC obtido da figura 8, como mostra a figura 9.

Figura 9 – Recorte da imagem do exemplo 49



Fonte: UNESP-Adaptada, 2023.

Pela lei dos cossenos segue que

$$(8\sqrt{3})^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

ou melhor,

$$x^2 - 8x - 128 = 0$$

Como a soma das soluções $x_1 + x_2 = 8$ e produto das soluções é $x_1 \cdot x_2 = -128$, podemos intuir que essa equação possui como soluções $x_1 = 16$ e $x_2 = -8$. Considerando como medidas de comprimento apenas valores positivos, encontramos o valor de $\overline{AB} = 16 \text{ cm}$.

Assim, podemos concluir que a extensão máxima horizontal do braço mecânico é

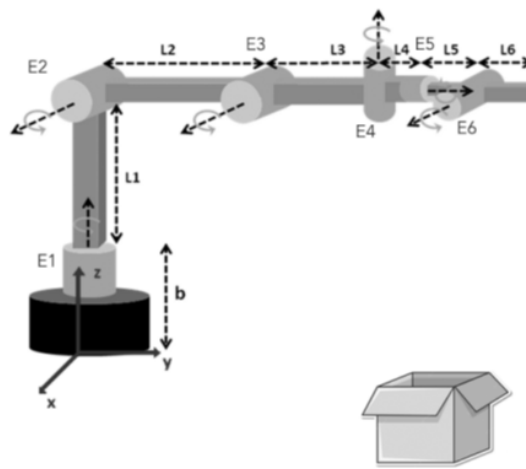
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 16 + 8 + 5 = 29$$

Portanto, o valor encontrado é 29 cm, sendo a resposta correta a letra E.

Exemplo 50. (Nível 5 - OBR 2022 - Adaptada)

Braços robóticos são amplamente utilizados nas indústrias do mundo todo para garantir precisão e rapidez aos processos de produção. Um ‘grau de liberdade’ (DoF – degree of freedom) no que se refere a braços robóticos, é uma junta independente que pode proporcionar liberdade de movimento do manipulador, seja em sentido rotativo ou translacional (linear). Quanto mais DoF um braço robótico possui, mais complexa se torna a análise da sua movimentação a partir da movimentação de alguns eixos independentes. Considere uma empresa que utiliza um braço robótico como este apresentado na imagem a seguir.

Figura 10 – Imagem do exemplo 50



Fonte: OBR, 2022.

Considere que: $b = 6 \text{ cm}$; $L1 = 10,2 \text{ cm}$; $L2 = 12 \text{ cm}$; $L3 = 8 \text{ cm}$; $L4 = 2 \text{ cm}$; $L5 = 3 \text{ cm}$; $L6 = 4 \text{ cm}$.

Considere que a distância da caixa para o braço robótico é 15 cm no eixo X e 20 cm no eixo Y , e que ela se encontra no chão, e tem uma altura de 6 cm . Com as informações descritas, responda os itens a seguir:

a) Para que a ponta final do braço robótico encontre a caixa, qual dos seguintes movimentos deve ser feito?

a) $E1 : \theta_1 / E2 : -\theta_2 / E3 : -\theta_3$

b) $E1 : \theta_1 / E2 : \theta_2 / E3 : \theta_3$

c) $E1 : -\theta_1 / E2 : \theta_2$

d) $E1 : -\theta_1 / E2 : -\theta_2$

e) $E1 : -\theta_1 / E6 : -\theta_3$

b) Qual o comprimento total do braço robótico da junção $E2$ até a junção $E6$? Esse comprimento é suficiente para despejar um objeto dentro da caixa?

Solução do item a): A caixa está posicionada à direita e à frente do braço robótico no plano XY . Para alcançar essa posição, a junta da base ($E1$) deve girar no sentido negativo, realizando o movimento $-\theta_1$. Em seguida, a segunda junta ($E2$) também deve ser ajustada no sentido negativo, correspondendo ao movimento $-\theta_2$, de modo a direcionar o braço para dentro do plano e alinhá-lo com a caixa. Com esses movimentos, o braço robótico pode alcançar a caixa sem a necessidade de acionar as demais juntas. Assim, a

alternativa correta para o item a) é a letra D.

Solução do item b): Vamos determinar a distância entre a caixa e a base do braço robótico. Essa distância pode ser obtida através do Teorema de Pitágoras:

$$d_1^2 = 15^2 + 20^2 = 25.$$

Novamente, pelo Teorema de Pitágoras, podemos encontrar a distância entre a caixa e a junta $E2$, ou seja

$$d_2^2 = 25^2 + 10,2^2 \approx 27.$$

Sabe-se que o braço robótico possui comprimento igual a soma dos L_i ; $i = 2, \dots, 6$. Então:

$$L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 = 12 + 8 + 2 + 3 + 4 = 29 \text{ cm}.$$

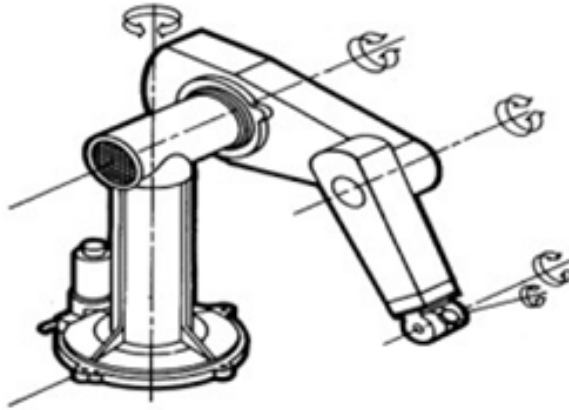
Podemos concluir que o braço robótico possui comprimento suficiente para alcançar a caixa em algum ponto entre sua base e sua extremidade e despejar um objeto dentro dela. Os movimentos necessários envolvem apenas as juntas anteriormente mencionadas.

Exemplo 51. (Nível 5 - OBR 2019)

Com o avanço da tecnologia, diversos tipos de manipuladores robóticos que permitem emular o braço humano surgiram para atender aos mais diversos processos industriais. Os manipuladores são compostos por juntas, elos e punhos.

Um dos fatores mais importantes para determinar as características de um manipulador robótico industrial é definir o número de graus de liberdade, pois este fator determina a quantidade e os tipos de movimentos que o manipulador será capaz de executar. Além disso, a complexidade de controlar um manipulador está diretamente ligada à quantidade de graus de liberdade, já que quanto maior o grau de liberdade, mais difícil é o seu controle. O braço do manipulador robótico é a parte que está ligada diretamente ao posicionamento no espaço físico cartesiano, ou operacional. A descrição cinemática completa de uma cadeia articulada pode ser obtida a partir do produto matricial entre as diversas matrizes de transformações.

Figura 11 – Imagem do exemplo 51



Fonte: OBR, 2019.

Seja T pertencente ao domínio de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação:

$$T(x, y, z) = (2x + 3z, -5y + 4z, x + y)$$

E a matriz que ilustra a base canônica, onde cada linha representa um ponto, dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de transformação linear na base canônica, sabendo que para obtê-la é necessário multiplicar a equação T pela base.

$$\text{A) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{B) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{C) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{D) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{E) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: Para solucionar a questão, precisamos encontrar a matriz A tal que

$$T(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u}, \text{ para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$$

Uma das maneiras de encontrar a matriz A é aplicar T aos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Aplicando T a esses vetores, temos

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, -5 \cdot 0 + 4 \cdot 0, 1 + 0) = (2, 0, 1),$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (2 \cdot 0 + 3 \cdot 0, -5 \cdot 1 + 4 \cdot 0, 0 + 1) = (0, -5, 1),$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, -5 \cdot 0 + 4 \cdot 1, 0 + 0) = (3, 4, 0).$$

Com esses resultados podemos montar a matriz associada a T , na base canônica. Essa matriz possui as colunas iguais aos vetores encontrados. Assim, temos

$$A = [T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz encontrada nos dá como alternativa correta a letra A.

Como evidenciado nos exemplos anteriores, o estudo do braço robótico envolve conteúdos fundamentais da matemática, como transformações lineares, análise vetorial no espaço tridimensional e conhecimentos de trigonometria. Foi necessário articular conceitos de álgebra linear e geometria para a modelagem matemática do braço robótico. Dessa forma, tais conteúdos contribuem de maneira significativa para o desenvolvimento teórico e aplicado da matemática, inclusive no contexto do ensino médio.

3.3 Modelo simplificado de braço robótico

Dependendo da aplicação, a forma como um braço robótico é construído pode variar. A seguir, será apresentado um modelo simplificado, com o objetivo de mostrar como as matrizes de rotação e translação se relacionam com o movimento de um braço robótico. A este modelo, a partir de agora denominaremos de **Protótipo I**.

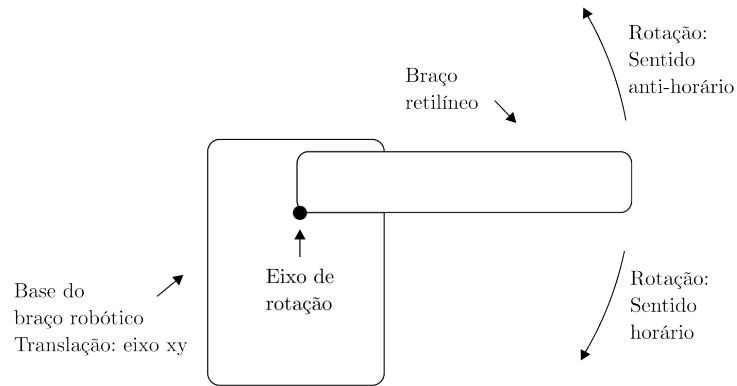
Para construir o Protótipo I e atender ao objetivo citado acima, foram considerados os seguintes requisitos:

1. Possuir o mínimo de partes, a fim de simplificar sua estrutura física;
2. Apresentar uma estrutura que permita a translação;
3. Apresentar uma estrutura que permita a rotação;
4. Ser passível de manipulação por meio de equações algébricas.

Levando em conta o requisito 1, o modelo desenvolvido é composto apenas por uma base e um braço retilíneo, apresentando apenas 1 grau de liberdade. A base possibilita a movimentação do robô em um plano (usaremos o plano cartesiano como referência), atendendo ao requisito 2. Já o braço retilíneo atende ao requisito 3, permitindo a realização de rotações em torno de seu próprio eixo, que está fixado à base. Para facilitar a interpretação geométrica do Protótipo I, foi elaborado, com o uso do **GeoGebra**, um

esquema do modelo. Esse esquema foi utilizado para gerar as imagens do Protótipo I apresentadas neste capítulo. O referido esquema pode ser visto na figura 12.

Figura 12 – Modelo simplificado de braço robótico



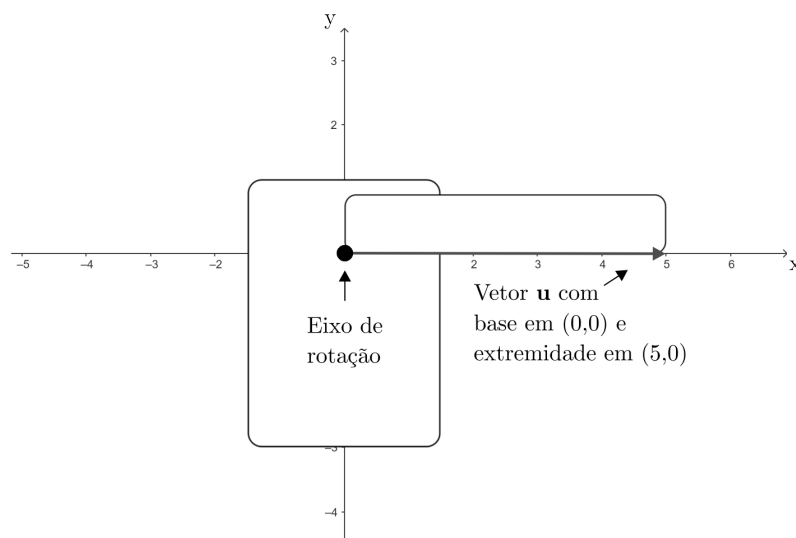
Fonte: Autor, 2025

Por fim, será demonstrado na próxima seção que o Protótipo I também atende ao requisito 4, permitindo o uso das equações estudadas nos Capítulos 1 e 2 para determinar sua posição após operações de rotação e translação.

3.4 Rotação de um braço robótico

O Protótipo I construído, apresenta um braço retilíneo que pode ser representado por um vetor, como mostra a figura 13. Para efeitos de exemplificação, assumiremos aqui que este vetor possui módulo de $5 u.c.$ e que sua base parte da origem do plano cartesiano, estando sua extremidade no ponto $(5, 0)$.

Figura 13 – Representação do braço robótico por um vetor



Fonte: Autor, 2025.

A partir de uma rotação desse braço por um ângulo θ escolhido, é possível obter as novas coordenadas de sua extremidade usando a matriz de rotação vista na subseção 2.1.1.

Exemplo 52. Rotacionar o braço do Protótipo I em 50° e encontrar as coordenadas de sua extremidade.

Chamando de $\mathbf{u}$ o vetor que representa o braço robótico e de $\mathbf{v}$ o vetor que representa a rotação de $\mathbf{u}$, através da transformação $T(\mathbf{u}) = R\mathbf{u}$, segue que

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_\beta &= [T][(\mathbf{u})]_\beta = \begin{bmatrix} \cos 50^\circ & -\sin 50^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,64 & -0,77 \\ 0,77 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3,2 \\ 3,85 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com essa transformação o vetor que representa o braço robótico passa a ser $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3,2 \\ 3,85 \end{bmatrix}$.

3.5 Translação de um braço robótico

O modelo construído apresenta uma base que pode ser transladada, como foi visto na figura 13. Para efeitos de exemplificação, assumiremos aqui que o ponto de referência dessa base é o eixo ao qual o braço está preso. Este eixo está localizado na origem do plano cartesiano ($O = (0,0)$).

A partir de uma translação dessa base por um vetor $\mathbf{p}$ escolhido, é possível obter suas as novas coordenadas usando o método visto na subseção 2.1.2.

Exemplo 53. Realizar a translação do Protótipo I considerando o vetor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e encontrar as novas coordenadas de sua base e do vetor que representa o braço robótico.

Considerando a translação a partir do vetor $\mathbf{p}$, a base e o vetor $\mathbf{u}$, que representa o braço robótico, passa a ter como ponto de referências as coordenadas $(3, -2)$. Já a extremidade do vetor $\mathbf{u}$ pode ser determinada pela transformação

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sendo $\mathbf{v}$ o vetor que representa a translação do vetor $\mathbf{u}$.

3.6 Matriz de rotação e translação para o braço robótico

Nas seções anteriores, vimos como realizar a rotação e a translação do modelo de braço robótico construído separadamente, mas é possível realizar as duas transformações de forma simultânea usando coordenadas homogêneas conforme discutido na subseção 2.1.3. Vejamos o exemplo a seguir.

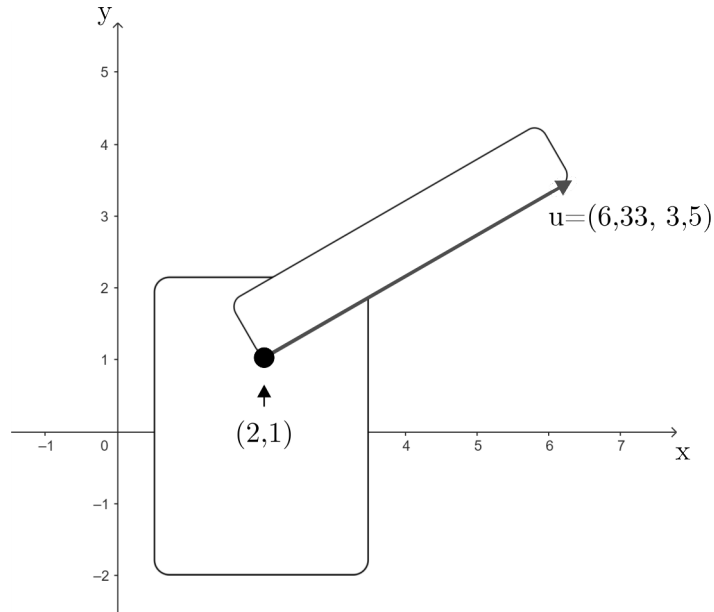
Exemplo 54. Determine a posição da ponta do braço do Protótipo I realizando uma rotação de 30° e translação pelo vetor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Considerando a translação a partir do vetor $\mathbf{p}$, a base e o vetor $\mathbf{u}$, que representa o braço robótico, passa a ter como ponto de referências as coordenadas $(2, 1)$. Já a extremidade do vetor $\mathbf{u}$ pode ser determinada pela transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 2 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6,33 \\ 3,5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com essa translação a nova origem de $\mathbf{u}$ passa a ser $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}$ representa a posição do vetor $\mathbf{u}$ após sofrer a transformação. A representação geométrica desse resultado é ilustrada na figura 14.

Figura 14 – Rotação e translação do braço robótico



Fonte: Autor, 2025.

3.7 Um problema com o braço robótico

Com as seções anteriores, foi possível perceber que as transformações estudadas no Capítulo 2 cumprem o papel de determinar as coordenadas do modelo de braço robótico construído. Agora, discutiremos como resolver a seguinte situação-problema:

Deseja-se manter a extremidade do braço robótico fixa em uma determinada coordenada. É possível encontrar valores de θ (ângulo de rotação) e $\mathbf{p}$ (vetor de translação) que satisfaçam essa condição?

Por conviniência e melhor exibição, veremos, por meio dos exemplos 55, 56 e 57, que os conceitos discutidos na seção 2.2 podem ser aplicados para resolver a situação-problema.

Exemplo 55. Para uma rotação de 90° , quais os valores de p_x e p_y que mantém a extremidade do vetor que representa o braço do Protótipo I (vetor $\mathbf{u}$) nas coordenadas $(5, 0)$?

Usando as coordenadas homogêneas, podemos escrever a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & p_x \\ 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz permite a as transformações de rotação e translação de forma simul-

tânea. Para encontrar os autovalores da matriz A , fazemos

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 0 & 1 & -p_x \\ -1 & \lambda - 0 & -p_y \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) - (-1 \cdot (\lambda - 1)) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Obtendo os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Estamos no corpo dos reais, logo há apenas $\lambda_1 = 1$ como autovalor. Ademais, queremos manter o vetor que representa o braço do Protótipo I com a mesma norma. Agora, vamos encontrar o autovetor $\mathbf{u}$ associado a $\lambda_1 = 1$. Com efeito, tome

$$A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & p_x \\ 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

o que equivale a,

$$\begin{cases} -y + p_x = x \\ x + p_y = y. \end{cases}$$

A relação entre as equações acima nos permite escrever os valores de x e y em função de p_x e p_y , ou seja,

$$x = \frac{(p_x - p_y)}{2} \text{ e } y = \frac{(p_x + p_y)}{2},$$

resultando no vetor,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{p_x - p_y}{2} \\ \frac{p_x + p_y}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

que representa a posição do braço do Protótipo I. Para estarmos na posição almejada,

tomemos $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, deste modo, segue a equação

$$\begin{bmatrix} \frac{p_x - p_y}{2} \\ \frac{p_x + p_y}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

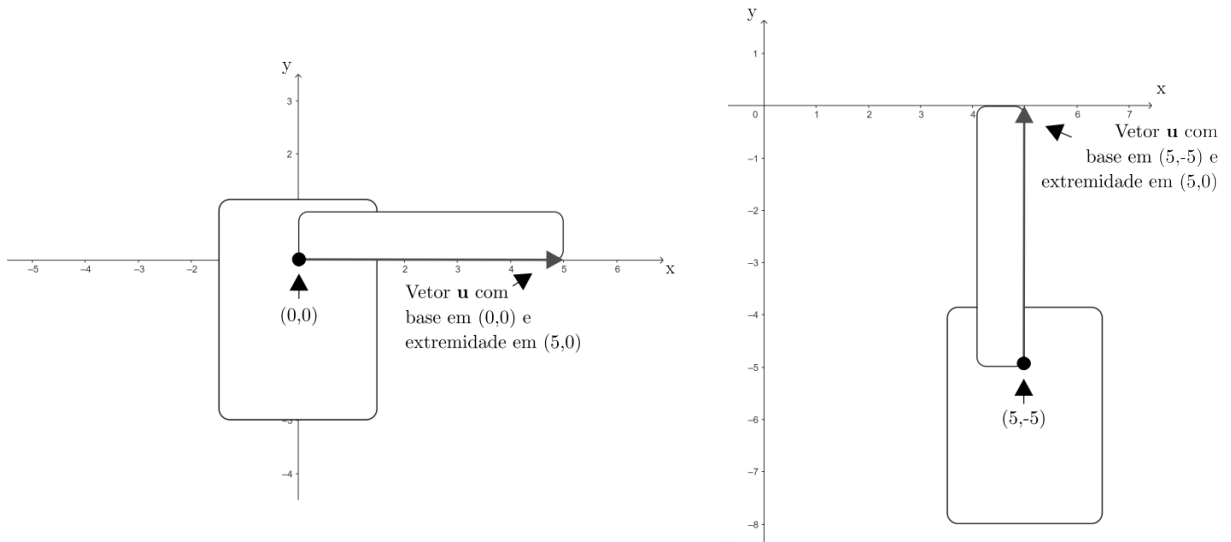
O que resulta em $p_x = 5$ e $p_y = -5$.

Assim, podemos reescrever a matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naturalmente, da operação $A\mathbf{u}$ obtemos uma rotação de 90° e uma translação de $p_x = 5$ e $p_y = -5$ e mantemos a ponta do braço no mesmo ponto inicial, cuja a representação geométrica é ilustrada na figura 15.

Figura 15 – Rotação e translação do braço robótico mantendo a extremidade fixa em $(5,0)$



Fonte: Autor, 2025.

Exemplo 56. Considerando a situação-problema, agora desejamos encontrar os valores de p_x e p_y para um ângulo θ de rotação qualquer.

Usando as coordenadas homogêneas, podemos escrever a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para encontrar os autovalores da matriz A , usamos a equação característica:

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta & -p_x \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta & -p_y \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Por meio de manipulações algébricas elementares, encontramos os autovalores

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{-\theta i} \text{ e } \lambda_3 = e^{\theta i}.$$

Salientamos, mais uma vez, que λ deve ser um valor real, ou seja, $\lambda = 1$. Dessa forma, o autovetor associado é:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-3p_x + 4p_x \cdot \cos \theta - p_x \cdot \cos 2\theta + 2p_y \cdot \sin \theta - p_y \cdot \sin 2\theta}{(8 \cdot \cos \theta - 2 \cdot \cos 2\theta - 6)} \\ \frac{(-p_y + p_y \cdot \cos \theta - p_x \cdot \sin \theta)}{2 \cdot \cos \theta - 2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com esses resultados, basta agora escolher o valor de θ desejado para substituí-lo em

$$\begin{bmatrix} \frac{-3p_x + 4p_x \cdot \cos \theta - p_x \cdot \cos 2\theta + 2p_y \cdot \sin \theta - p_y \cdot \sin 2\theta}{8 \cdot \cos \theta - 2 \cdot \cos 2\theta - 6} \\ \frac{-p_y + p_y \cdot \cos \theta - p_x \cdot \sin \theta}{2 \cdot \cos \theta - 2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e encontrar os valores de p_x e p_y da matriz A .

Exemplo 57. Use os resultados encontrados no exemplo 56 e encontre os valores de p_x e p_y para uma rotação de 180° .

Substituindo $\theta = 180^\circ$ no vetor $\mathbf{u}_1$ encontrado no exemplo 56 e igualando à $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,
obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{-3p_x + 4p_x \cdot \cos 180^\circ - p_x \cdot \cos 2 \cdot 180^\circ + 2p_y \cdot \sin 180^\circ - p_y \cdot \sin 2 \cdot 180^\circ}{8 \cdot \cos 180^\circ - 2 \cdot \cos 2 \cdot 180^\circ - 6} \\ \frac{-p_y + p_y \cdot \cos 180^\circ - p_x \cdot \sin 180^\circ}{2 \cdot \cos 180^\circ - 2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-3p_x + 4p_x \cdot (-1) - p_x \cdot 1 + 2p_y \cdot 0 - p_y \cdot 0}{8 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 - 6} \\ \frac{-p_y + p_y \cdot (-1) - p_x \cdot 0}{2 \cdot (-1) - 2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-3p_x - 4p_x - p_x}{-8 - 2 - 6} \\ \frac{-p_y + p_y}{-2 - 2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8p_x \\ -16 \\ -2p_y \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ 2 \\ p_y \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O que resulta em $p_x = 10$ e $p_y = 0$. Podemos concluir que uma rotação de 180° combinada com uma translação a partir do vetor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$, mantem a extremidade do braço robótico em $(5, 0)$.

Com os exemplos 55, 56 e 57, mostramos como os conceitos de autovalores e autovetores podem ser utilizados para determinar o ângulo de rotação e as coordenadas de translação necessárias para que a extremidade do braço robótico permaneça fixa em um ponto específico.

As ideias discutidas até aqui serão retomadas no Capítulo 4, que propõe uma intervenção pedagógica voltada para estudantes do ensino médio.

4 INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Ao longo dos capítulos anteriores, apresentamos os conceitos de Matrizes, Transformações Lineares, Autovalores, Autovetores e o funcionamento de um braço robótico. Neste capítulo, por meio de um estudo envolvendo matrizes aplicadas ao braço robótico, propomos uma aplicação voltada ao ensino médio. Tal aplicação aborda a necessidade de determinar as coordenadas da posição da extremidade de um braço robótico.

4.1 Um problema com o braço robótico

O problema envolvendo o braço robótico, que motivou a construção das atividades descritas neste capítulo, teve origem durante as aulas do curso de Álgebra Linear PROF-MAT/SE. Ao longo do curso, cada estudante foi responsável por elaborar apresentações relacionadas a temas previamente definidos pelo professor da disciplina. O tema que deu ponto de partida a este trabalho intitulava-se “Autovalores e autovetores: aplicação na robótica”.

Inicialmente, o tema apresentou-se desafiador. No entanto, após uma investigação mais aprofundada, foi possível estabelecer diversas conexões entre os conceitos abordados em Álgebra Linear e o movimento de um braço robótico. Um exemplo, é o problema recorrente em centros de distribuição automatizados, utilizados por empresas como Amazon ou Mercado Livre. Nestes ambientes, é necessário calcular rotas otimizadas para os robôs, de forma que eles não se cruzem, evitando colisões e congestionamentos. Contudo, um desafio prático se apresenta: o que fazer caso um robô já esteja posicionado no trajeto de outro durante a realização de uma tarefa, como a descarga de produtos? Como liberar a passagem sem comprometer a execução dessa tarefa?

A partir dessa indagação, surgiu a ideia de que o robô poderia realizar uma rotação e/ou translação parcial de sua estrutura, mantendo a parte responsável pela descarga dos materiais em sua posição original, ao mesmo tempo em que desloca a outra parte do corpo robótico para liberar a via.

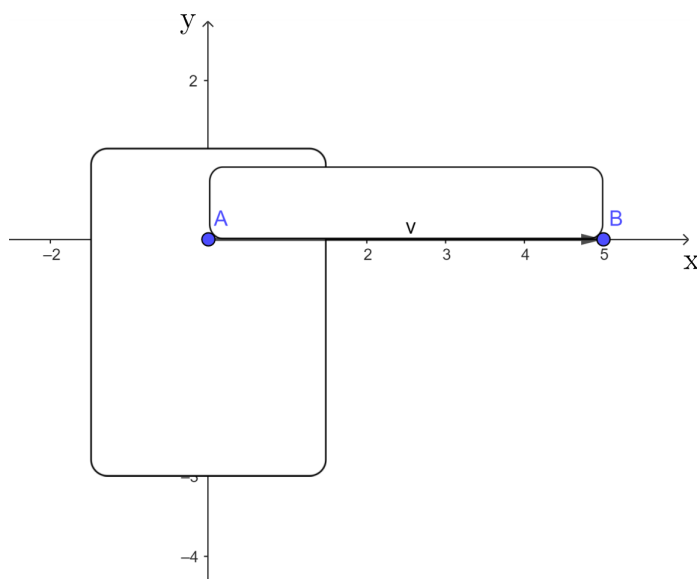
Em síntese, esse problema foi adaptado e apresentado aos estudantes da seguinte forma:

Um robô está posicionado em um espaço limitado e precisa se movimentar para permitir que outro robô atravesse o caminho que ele ocupa. No entanto, o robô deve mover seu braço de forma que a extremidade (ponto B) permaneça na mesma posição

inicial, garantindo que ele continue acessível para uma tarefa específica. Sabendo que a posição do braço pode ser representada como um vetor no espaço, pergunta-se: Existe valores para a matriz de rotação e translação que, aplicados ao vetor do braço robótico, permitam que a extremidade (ponto B) continue exatamente nas mesmas coordenadas?

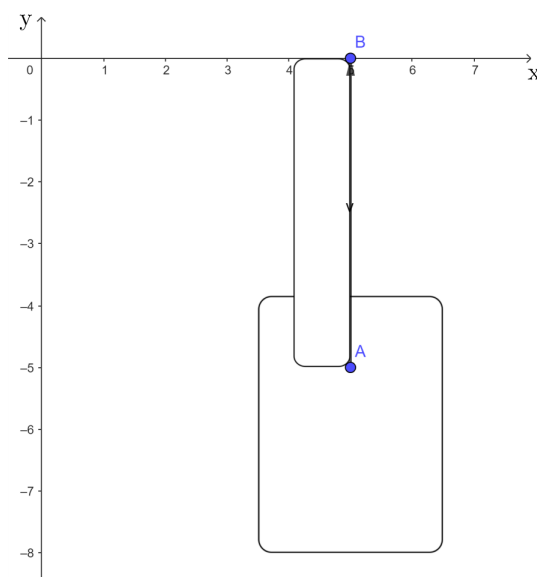
As figuras a seguir, construídas com uso do GeoGebra, ilustram o problema proposto. A figura 16 mostra a posição inicial do braço robótico e a figura 17 mostra a rotação e translação feitas para atender o que foi pedido no problema.

Figura 16 – Posição inicial do vetor AB



Fonte: Autor, 2025.

Figura 17 – Rotação do vetor AB em 90° e translação por $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$



Fonte: Autor, 2025.

Para discutir o problema proposto, a intervenção voltada ao ensino médio foi organizada em quatro atividades. A seguir temos os temas e os objetivos destas atividades.

1. Definição de matrizes

Objetivo: Apresentar a definição de matriz, introduzir a sua representação genérica e conhecer seus principais tipos.

2. Operações com matrizes

Objetivo: Conhecer e praticar operações fundamentais com matrizes (adição, subtração, multiplicação e cálculo de determinantes).

3. Transformações lineares: rotação e translação

Objetivo: Compreender como matrizes são usadas para modelar rotações e translações no plano cartesiano.

4. Rotação e translação de um braço robótico.

Objetivo: Resolver o problema proposto: encontrar condições para que a matriz de rotação e translação mantenha um ponto fixo.

Todas as atividades elaboradas podem ser vistas nos apêndices.

4.2 Relações com habilidades e competências da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi concebida com o objetivo de orientar a formação dos estudantes com base no desenvolvimento de competências e habilidades. O fortalecimento dessas competências possibilita que os estudantes sejam capazes de resolver problemas de diferentes naturezas, incluindo aqueles relacionados às áreas científicas, tecnológicas e ao mundo do trabalho. Ao analisar as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio, foi possível identificar relações significativas com a proposta de intervenção didática desenvolvida.

Por meio da Competência 1, espera-se que o estudante interprete situações em diversos contextos. A partir da habilidade EM13MAT105, isso inclui o uso de transformações isométricas, como demonstrado a seguir:

COMPETÊNCIA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018, p 532).

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p 533).

Já a Competência 3 requer que o estudante crie modelos para resolver problemas em diferentes contextos, apoiando-se na habilidade EM13MAT301, que envolve o uso de técnicas algébricas e gráficas, conforme apresentado a seguir:

COMPETÊNCIA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p 535).

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p 536).

Por fim, a Competência 4 aborda a busca por soluções de problemas com base em diferentes representações matemáticas, incluindo conceitos iniciais de linguagens de programação, como descrito a seguir:

COMPETÊNCIA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2017, p 538).

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (BRASIL, 2018, p 539).

Dessa forma, a construção da intervenção didática proposta, fundamentada nos conceitos de matrizes de rotação e translação, mostra-se como uma estratégia pedagógica eficaz para o desenvolvimento das competências e habilidades previstas na BNCC. Tal abordagem permite que os estudantes interpretem e modelem situações concretas com base em procedimentos matemáticos, articulando conhecimentos algébricos, geométricos e computacionais em um contexto tecnológico e significativo. Além de favorecer a compreensão das transformações isométricas no plano, a atividade propicia a resolução de problemas com matrizes e a aplicação de algoritmos simples, promovendo a integração entre teoria e prática.

4.3 Aplicação com os estudantes em sala de aula

As atividades foram aplicadas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio da rede SESI, localizada na cidade de Aracaju, estado de Sergipe. A referida turma é composta por 30 estudantes, dos quais 23 são do sexo feminino e 7 do sexo masculino, com idades variando entre 15 e 18 anos. Todos os alunos da instituição possuem notebooks com acesso à internet, disponibilizados para uso durante as aulas.

Destaca-se ainda que os estudantes já haviam tido contato prévio com o software GeoGebra nas aulas de matemática, considerando que seu uso é incentivado pelos professores desde o 1º ano do Ensino Médio, conforme orientação do material didático adotado pela escola. As atividades propostas foram disponibilizadas em formato digital, e as respostas dos estudantes foram entregues em folhas de papel A4.

As figuras 18 e 19 mostram alguns momentos onde ocorreram as aplicações das atividades.

Figura 18 – Aplicação da atividade 1



Fonte: Autor, 2025.

Figura 19 – Esclarecimento de dúvidas sobre a matriz de rotação na atividade 3



Fonte: Autor, 2025

4.3.1 Atividade 01: Definição de matrizes

A atividade foi aplicada no dia 16 de abril, contando com a participação de 22 estudantes presentes. Após a leitura atenta do enunciado, foi solicitado aos alunos que respondessem às três questões propostas ao final da atividade. A realização ocorreu sem intercorrências relevantes, e os resultados foram obtidos de forma satisfatória. A seguir, na Figura 20, apresentam-se um dos resultados produzidos na Atividade 01.

Figura 20 – Resultados da atividade 01 realizados por um estudante

1- Indique a ordem das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{essa matriz tem 3 linhas e 2 colunas.} \\ \text{Ordem: } 3 \times 2 \end{array} \right.$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{essa matriz tem 2 linhas e 3 colunas.} \\ \text{Ordem: } 2 \times 3 \end{array} \right.$

c) $B = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{essa matriz tem 3 linhas e 1 coluna.} \\ \text{Ordem: } 3 \times 1 \end{array} \right.$

2- Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & -12 & 3 \\ -4 & 5/2 & 2 \end{pmatrix}$ e determine os valores dos termos a seguir:

a) $a_{32} = \sqrt{3}$

b) $a_{33} = -4$

c) $a_{22} = -12$

3- Pesquise os principais tipos de matrizes e suas características.

Matriz linha: tem só uma linha e várias colunas. Ex.: $(3 \ 5 \ 7)$

Matriz coluna: tem só uma coluna e várias linhas. Ex.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Matriz quadrada: tem o mesmo número de linhas e colunas. Ex.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz diagonal: é uma matriz quadrada onde todos os elementos fora da diagonal principal são zero, Ex.: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz identidade: é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são 1. Ex.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz nula: todos os elementos são 0. Ex.: $(0 \ 0 \ 0)$

Matriz transposta: é uma matriz que troca linhas por colunas. Ex.: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Fonte: Autor, 2025.

4.3.2 Atividade 02: Operações com matrizes

A atividade foi aplicada no dia 28 de abril, com a participação de 22 estudantes presentes. Inicialmente, realizou-se uma revisão dos principais conceitos trabalhados na Atividade 01. Em seguida, procedeu-se à leitura e à análise do enunciado da Atividade 02. Os estudantes demonstraram compreender a maior parte dos tópicos abordados. No

entanto, foram identificadas algumas dificuldades relacionadas à última questão da atividade, a qual envolvia a operação de multiplicação de matrizes. Com o intuito de sanar tais dúvidas, foram apresentados e discutidos exemplos adicionais no quadro da sala de aula. Ao término da aula, todos os estudantes presentes foram capazes de resolver corretamente as questões propostas. A seguir, na figura 21, apresentam-se um dos resultados obtidos na Atividade 02.

Figura 21 – Resultados da atividade 02 realizados por um estudante

$$\begin{array}{l}
 1. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{16} = 4 & -2+4 = 2 \\ 5 & 2 \cdot 5 = 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matrizes A e B são iguais.} \\
 2. 3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 = 3 & 3 \cdot 2 = 6 \\ 3 \cdot 0 = 0 & 3 \cdot 3 = 9 \end{pmatrix} \quad 3A+B = \begin{pmatrix} 3+4 & 6+1 \\ 0+2 & 9+5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \\
 3. 2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 = 4 & 2 \cdot 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 = 2 & 2 \cdot 0 = 0 \end{pmatrix} \quad 2A-B = \begin{pmatrix} 4+(-3) & 6+(-7) \\ 2+(-1) & 0+(-6) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \\
 4.a. AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \\
 4.b. CB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 2 & 12 \\ 7 & -1 & -1 \\ -10 & 5 & 15 \end{pmatrix} \\
 4.c. EF = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & -2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 & 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 10 & 3 \\ 10 & 24 & 8 \\ 16 & 18 & 5 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Fonte: Autor, 2025.

4.3.3 Atividade 03: Transformações: Rotação e Translação

A atividade foi aplicada no dia 05 de maio, com a presença de 25 estudantes. Antes da leitura do enunciado da Atividade 03, foi realizada uma exposição teórica sobre transformações lineares, com foco nas matrizes de rotação e translação aplicadas a vetores no plano.

Essa introdução mostrou-se eficaz, uma vez que os alunos demonstraram boa compreensão do conteúdo apresentado na atividade e conseguiram resolver as questões propostas sem dificuldades significativas. A seguir, na figura 22, apresentam-se um dos resultados obtidos na Atividade 03.

Figura 22 – Resultados da atividade 03 realizados por um estudante

5. Exercício Prático

1. Matriz de Transformação

a) Matriz de Rotação de 45° :

A matriz de rotação em 2D (homogênea) é:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $\theta = 45^\circ$:

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Matriz de Translação $t = (2, -1)$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Matriz de Transformação completa:

Primeiro rotaciona, depois translada, então:

$$M = T \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Coordenadas finais do ponto P após transformação:

A forma homogênea do ponto é:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando pela Matriz M:

$$P' = M \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor, 2025.

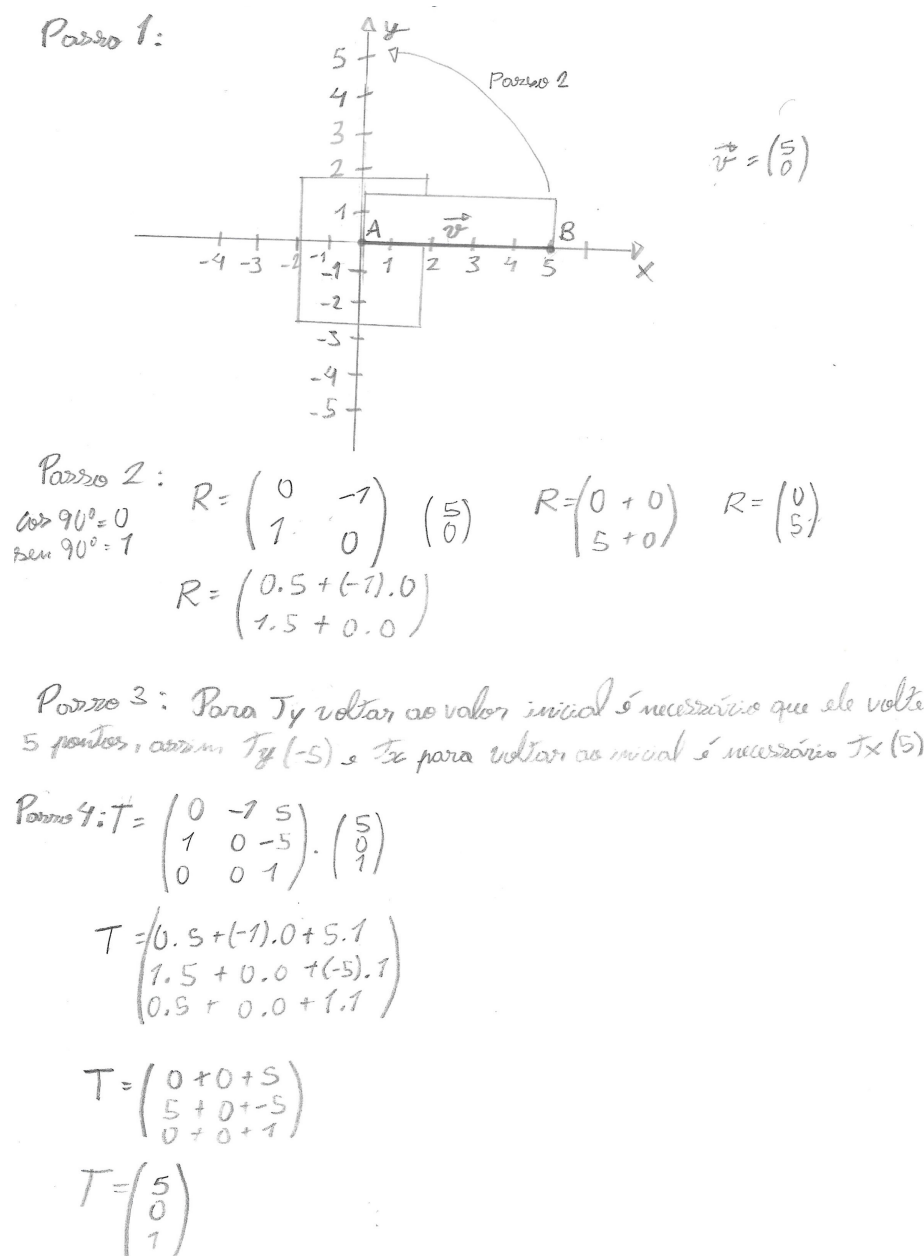
4.3.4 Atividade 04: Rotação e Translação de um braço robótico

A atividade foi aplicada no dia 12 de maio, com a presença de 25 estudantes. Inicialmente, procedeu-se à leitura do enunciado da atividade. Em seguida, com o auxílio do software GeoGebra para a simulação do problema proposto, foi possível observar que a maioria dos estudantes compreendeu satisfatoriamente a proposta, alcançando os resultados esperados e realizando simulações pedidas.

Entretanto, alguns alunos encontraram dificuldades para concluir a simulação solicitada, o que suscita uma reflexão acerca da adequação do tempo destinado à execução

da atividade. Considera-se que a ampliação desse tempo pode ser benéfica, especialmente para os estudantes que requerem um ritmo de aprendizagem mais individualizado. A seguir, na figura 23, apresentam-se um dos resultados obtidos na Atividade 04.

Figura 23 – Resultados da atividade 04 realizados por um estudante



Fonte: Autor, 2025.

4.4 Conclusões das atividades

Após a conclusão das atividades, foi solicitado aos alunos que respondessem a um questionário avaliativo. O objetivo desse instrumento foi investigar a percepção dos estudantes quanto às vantagens e desvantagens de se estudar determinados tópicos de

Álgebra Linear por meio da metodologia de resolução de problemas, bem como verificar se essa abordagem contribuiu para a consolidação da aprendizagem esperada.

O formulário foi composto por cinco perguntas objetivas e uma subjetiva e foi organizado considerando os seguintes eixos temáticos: conceitos matemáticos envolvidos, aplicação prática, relação entre teoria e prática, visualização por meio do GeoGebra, comparação com aulas tradicionais e reflexão sobre a sequência didática.

Todos os alunos da turma em que as atividades foram desenvolvidas participaram da avaliação, tendo o questionário sido disponibilizado por meio de um link.

A análise das respostas fornecidas pelos alunos evidencia que a intervenção didática foi, em geral, positiva e eficaz para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos abordados. A seguir, apresentam-se as principais conclusões extraídas dos dados coletados:

Conceitos Matemáticos envolvidos

Todos os alunos reconheceram que a sequência didática contribuiu para o aprendizado de operações com matrizes, sendo que 50% relataram clareza total na compreensão e os outros 50% apontaram que, embora tenha sido útil, houve dificuldades pontuais em alguns conceitos.

Essa resposta sugere que a intervenção cumpriu seu papel como estratégia de reforço, mas também aponta a necessidade de revisar ou aprofundar tópicos específicos para atender plenamente todos os alunos.

Aplicação prática

A maioria significativa dos alunos, 78%, destacou que a abordagem prática com transformações lineares, como rotação e translação, foi fundamental para compreender a aplicação das matrizes.

Outros 17% reconheceram a contribuição da prática apenas como um reforço de conhecimentos prévios. Isso indica que a atividade prática foi capaz de concretizar a teoria e dar sentido ao conteúdo abstrato, favorecendo a aprendizagem significativa.

Relação entre teoria e prática

Para 56% dos alunos, a integração entre o conteúdo teórico e o problema do braço robótico foi excelente, conectando o conteúdo ao mundo real. Os 44% restantes avaliaram como boa, mas sugerem que a sequência didática poderia ser enriquecida com mais exemplos práticos. Isso aponta para o potencial da metodologia, ao mesmo tempo que revela espaço para aprimoramentos que ampliem ainda mais essa conexão.

Visualização por meio do GeoGebra

A ferramenta GeoGebra foi bem avaliada por 83,3% dos alunos, que afirmaram que ela tornou o aprendizado mais visual e interativo, reforçando a intuição geométrica sobre as transformações lineares.

Uma minoria, 5,6%, sentiu-se confusa com o uso do software, o que sugere a necessidade de uma mediação mais cuidadosa ou de suporte técnico e pedagógico adicional para esses alunos.

Comparação com aulas tradicionais

A proposta didática foi considerada mais eficaz que as aulas tradicionais por 77,8% dos estudantes, principalmente no que se refere à compreensão das operações com matrizes.

Apenas 5,6% afirmaram que a sequência foi menos eficaz, indicando que a abordagem ativa e contextualizada se mostrou superior na percepção da maioria dos alunos, em comparação aos métodos tradicionais.

Reflexão sobre a sequência didática

A análise qualitativa das respostas evidencia que a sequência didática foi percebida como mais eficaz, interessante e significativa em comparação com as aulas tradicionais. Os estudantes ressaltaram especialmente a contribuição do GeoGebra e dos problemas contextualizados como elementos centrais para o sucesso da intervenção.

A seguir temos alguns comentários feitos a partir do depoimento dos alunos. Os depoimentos dos estudantes são identificados com a letra “E” seguida dos números de 1 a 4.

O Estudante E1 afirmou que a abordagem *“deixa a matemática mais interessante e fácil de entender, porque você consegue ver os conceitos em ação”*, destacando a importância da visualização para a construção do conhecimento matemático. Essa percepção reforça a ideia de que o uso de ferramentas tecnológicas pode tornar os conceitos mais concretos e acessíveis.

De modo semelhante, o Estudante E2 apontou que a sequência didática foi *“boa e leve, ajudando na compreensão de uma forma mais fácil”*, o que demonstra que o formato adotado reduziu a complexidade percebida dos conteúdos, favorecendo a aprendizagem de forma mais natural e fluida.

A contribuição do Estudante E3 vai além, ao elogiar a organização e clareza das etapas da sequência, afirmando que *“todas as etapas foram muito bem divididas, com*

clareza e didática”. No entanto, ele também sugere melhorias, como a inserção de mais exemplos antes das atividades finais e orientações mais claras, mostrando que mesmo estratégias eficazes podem ser aprimoradas com base no feedback dos discentes.

Por fim, o Estudante E4 fez uma comparação direta com as aulas tradicionais, observando que *“usar problemas práticos e o GeoGebra deixou a aula mais interessante e me ajudou a entender melhor o conteúdo”*, acrescentando que essa forma de aprender *“faz mais sentido do que só copiar e resolver contas”*. Ainda assim, o aluno mencionou ter se sentido *“meio perdido no começo dos exercícios”*, o que revela a importância de mediações mais claras nas etapas iniciais, especialmente em atividades mais abertas.

Os resultados discutidos apontam que a sequência didática envolvendo a modelagem do movimento de um braço robótico, aliada ao uso de tecnologias como o GeoGebra, promoveu um aprendizado mais significativo, contextualizado e interativo. A maioria dos estudantes reconheceu ganhos tanto na compreensão teórica quanto na visualização prática dos conceitos, o que reforça a relevância de metodologias ativas e integradas ao uso de tecnologias no ensino da matemática.

Considerações finais

A aplicação da sequência didática envolvendo o estudo de matrizes e transformações lineares a partir de um problema contextualizado no movimento de um braço robótico revelou-se uma estratégia pedagógica eficaz para o ensino de conceitos fundamentais da Álgebra Linear no Ensino Médio. Ao integrar conteúdos abstratos a uma situação concreta e próxima do cotidiano tecnológico dos estudantes, foi possível não apenas promover uma maior compreensão conceitual, mas também estimular o interesse e o engajamento dos discentes na aprendizagem matemática.

A proposta partiu de um problema real da área de automação industrial, adaptado para o contexto escolar, o que conferiu à atividade um caráter interdisciplinar e aplicado. A utilização do software **GeoGebra** como recurso didático contribuiu para a visualização das transformações geométricas envolvidas, permitindo que os estudantes percebessem, de forma dinâmica, os efeitos das operações matriciais sobre vetores no plano. Tal abordagem proporcionou uma experiência de aprendizagem ativa, na qual os alunos puderam explorar, testar hipóteses e verificar resultados, ampliando sua autonomia intelectual.

As quatro atividades desenvolvidas ao longo da intervenção permitiram uma progressão gradual no nível de complexidade, partindo da introdução e manipulação de matrizes até a resolução do problema proposto. Essa organização favoreceu o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e a construção de conhecimentos de forma significativa. Observou-se, ao final das atividades, que a maioria dos alunos foi capaz de aplicar os conceitos de rotação e translação, representados por matrizes, para manter um ponto fixo

no espaço, o que demonstra a internalização do conteúdo e sua capacidade de aplicação em situações-problema.

Não obstante os resultados positivos, a aplicação evidenciou a necessidade de ajustes em relação ao tempo destinado à execução das tarefas, especialmente nas atividades mais complexas que envolvem simulações computacionais. Ressalta-se, portanto, a importância de considerar os diferentes ritmos de aprendizagem e a necessidade de um planejamento flexível que contemple momentos de retomada e aprofundamento dos conteúdos.

Em síntese, a intervenção didática realizada reafirma a pertinência de se explorar abordagens contextualizadas e investigativas no ensino de Matemática, especialmente no que se refere a conteúdos tradicionalmente considerados abstratos. A robótica, enquanto campo de aplicação concreta da Álgebra Linear, mostrou-se um potente recurso para o desenvolvimento do pensamento matemático, além de aproximar os estudantes de temas contemporâneos e interdisciplinares, em consonância com as competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Dessa forma, a experiência aqui relatada contribui para a discussão sobre práticas pedagógicas inovadoras no ensino de Matemática e aponta caminhos possíveis para a construção de saberes mais significativos e conectados com a realidade dos estudantes.

REFERÊNCIAS

AMORIM, S. R. de. Monografia, **Quatro Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia**. Alagoas: UFAL, 2017.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

ARAÚJO, T. de. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL, A. **Pisa: menos de 50%** Disponível em: <<https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/menos-de%2050%25-dos-alunos-sabem-o-b%C3%AAsico-em-matem%C3%A1tica-e-ci%C3%A2ncias#:~:text=Educa%C3%A7%C3%A3o-,Pisa%3A%20menos%20de%2050%25%20dos%20alunos%20sabem%20o,b%C3%AAsico%20em%20matem%C3%A1tica%20e%20ci%C3%A2ncias&text=O%20Brasil%20manteve%2Dse%20est%C3%A1vel,aprendizado%20em%20matem%C3%A1tica%20e%20ci%C3%A2ncias>>. Acesso em: 02 mai. 2025.

DATAFOLHA. **Pesquisa aponta percepção de jovens ingressantes no ensino médio**. 2024. Disponível em: <<https://datafolha.folha.uol.com.br/opiniao-e-sociedade/2024/03/pesquisa-aponta-percepcao-de-jovens-ingressantes-no-ensino-medio.shtml>>. Acesso em: 02 mai. 2025.

FIGUEIREDO, L. M. **Álgebra Linear I. v.1**. 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

GEOGEBRA. 2025. Disponível em: <<https://demonstrations.wolfram.com/TheSpiralOfTheodorus/>>. Acesso em: 16 abr. 2025.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

IFR. **Industrial Robots**. 2025. Disponível em: <<https://ifr.org/industrial-robots>>. Acesso em: 16 abr. 2025.

LARSON, R. **Elementos de Álgebra Linear**. 1. ed. São Paulo: Cengage, 2017.

NETO, A. C. M. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

OBR. **Olimpíada Brasileira de Robótica - Modalidade Teórica**. 2025. Disponível em: <<https://obr.robocup.org.br/>>. Acesso em: 23 abr. 2025.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

UNESP. **Vestibular**. 2023. Disponível em: <<https://www2.unesp.br/>>. Acesso em: 23 abr. 2025.

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1

DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Objetivo

Apresentar a definição de matriz, introduzir a sua representação genérica e conhecer seus principais tipos.

Tempo necessário

1 aula (50 min)

1. Introdução teórica

O estudo das matrizes é fundamental para diversas áreas da matemática e da engenharia. Elas são representações retangulares de números, que podem ser organizadas em linhas e colunas. As aplicações das matrizes são vastas, desde a resolução de sistemas lineares até a análise de estruturas complexas. Nesta primeira atividade, serão abordados os conceitos básicos das matrizes, bem como sua representação e diferentes tipos que podem ser encontrados.

2. Definição de matrizes

Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1. Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas. Dizemos que a matriz é do tipo $m \times n$ ou de ordem $m \times n$.

3. Exemplos de matrizes

A seguir temos alguns exemplos de matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2 .

b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 1 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 .

c) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×3 . Essa matriz é chamada de matriz linha. Ocorre quando $m = 1$.

d) $\begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×1 . Essa matriz é chamada de matriz coluna. Ocorre quando $n = 1$.

Matrizes linha e colunas, também podem ser chamadas de vetores. Essa denominação é comum no estudo de Álgebra Linear no ensino superior.

4. Representação genérica de uma matriz

Os números que aparecem na matriz são chamados elementos ou termos da matriz. Para representar o elemento de uma matriz, usamos uma letra com dois índices. Um elemento genérico de uma matriz A será indicado por a_{ij} , em que i representa a linha e j representa a coluna na qual o elemento se encontra; ele é chamado (ij) -ésimo elemento da matriz.

5. Exemplos da representação genérica de uma matriz

A matriz A , do tipo $m \times n$, será escrita, genericamente, do seguinte modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

6. Tipos de matrizes

Existem diferentes tipos de matrizes, cada uma com características específicas, como a matriz linha, coluna, quadrada, diagonal, identidade, nula e transposta.

6.1 Matriz quadrada

A matriz quadrada é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas, formando uma estrutura simétrica $(n \times n)$. Ela é fundamental em álgebra linear,

pois possibilita operações como determinante e inversão.

6.2 Matriz identidade

A matriz identidade é uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, enquanto os demais elementos são iguais a 0. Ela é representada como I_n , onde n é a ordem da matriz. A matriz identidade funciona como o "elemento neutro" na multiplicação de matrizes, ou seja, ao multiplicar qualquer matriz A pela matriz identidade I , o resultado é a própria matriz A . Por exemplo, para $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos $AI = A$. Esse tipo de matriz é fundamental em álgebra linear e sistemas lineares.

7. Exercício prático

1. Indique a ordem das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix}$

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & -12 & 3 \\ -4 & 5/2 & 2 \end{pmatrix}$ e determine os valores dos termos a seguir:

a) a_{12} b) a_{22} c) a_{31}

3. Existem diferentes tipos de matrizes, cada uma com características específicas. Pesquise os principais tipos e suas características.

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Objetivo

Apresentar e praticar operações fundamentais com matrizes (adição, subtração e multiplicação).

Tempo necessário

1 aula (50 min)

1. Introdução teórica

Matrizes são estruturas matemáticas utilizadas para organizar números em linhas e colunas. Elas possuem diversas aplicações, incluindo a resolução de sistemas lineares, a realização de transformações geométricas e o uso em áreas como robótica e computação gráfica. Nesta segunda atividade, abordaremos o conceito de igualdade de matrizes, as operações de adição, subtração e multiplicação.

2. Conceito de Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são iguais $A = B$ se: 1. Têm o mesmo número de linhas e colunas. 2. Seus elementos correspondentes são iguais, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os i e j .

Exemplo:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, temos que $A = B$, pois ambas possuem o mesmo tamanho e os mesmos elementos.

Contraexemplo:

Para $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, temos que $A \neq C$, pois $a_{22} \neq c_{22}$ ($4 \neq 5$).

3. Operações com Matrizes

A seguir veremos as principais operações com matrizes.

3.1 Adição de Matrizes

Duas matrizes podem ser somadas se tiverem o mesmo número de linhas e colunas. A soma é feita adicionando os elementos correspondentes.

Exemplo:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, teremos a adição $A + B$ dada por:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

3.2 Subtração de Matrizes

Podemos realizar a subtração entre duas matrizes se elas tiverem o mesmo número de linhas e colunas. A subtração entre A e B é feita adicionando A à matriz oposta de B. Ou seja, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo:

Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, teremos a subtração $A - B$ dada por:

$$A + (-B) = \begin{pmatrix} 3+(-2) & 5+(-3) \\ 1+(-1) & 2+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.3 Multiplicação de Matriz por Escalar

Multiplicar uma matriz por um número (escalar) significa multiplicar cada elemento da matriz por esse número.

Exemplo:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, teremos $2A$ dado por:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

3.4 Multiplicação de Matrizes

Duas matrizes A e B podem ser multiplicadas se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B . O elemento c_{ij} do produto $C = A \cdot B$ é calculado como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

ou

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Exemplo:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, teremos $C = A \cdot B$ dado por:

$$C = \begin{pmatrix} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) \\ (3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) & (3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Exercícios práticos

1. Verifique se as matrizes abaixo são iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \sqrt{16} & -2 + 4 \\ 5 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

2. Calcule $3A + B$, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Calcule $2A - B$, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Calcule o produto das matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE C – ATIVIDADE 3

TRANSFORMAÇÕES: ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO

Objetivo

Compreender como matrizes são usadas para modelar rotações e translações no plano cartesiano.

Tempo necessário

2 aulas (1 hora e 40 min)

1. Introdução teórica

No contexto geométrico, as transformações lineares podem ser usadas para manipular objetos no espaço, como rotações, reflexões, dilatações e translações. Em robótica, transformações lineares são amplamente utilizadas para calcular a posição e orientação de braços robóticos, ferramentas, e outros componentes no espaço tridimensional. As transformações que estudaremos são:

1. Rotação: Altera a orientação de um objeto em torno de um ponto ou eixo.
2. Translação: Move o objeto de um local para outro no espaço.

2. Matriz de rotação

A matriz de rotação é usada para girar um vetor (ou ponto) em torno de um eixo no espaço. Para o plano xy (rotação em 2D), a matriz de rotação para um ângulo θ é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Multiplicando essa matriz por um vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, obtemos o vetor resultante $\vec{v}'$, que representa o vetor original após a rotação.

3. Matriz de translação

A translação é o deslocamento de um ponto ou objeto por uma distância fixa em uma determinada direção. Em termos matemáticos, uma translação é representada como:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{t}$$

sendo $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$ o vetor de translação.

4. Matriz de rotação e translação

Em robótica, é comum combinar rotações e translações em uma única operação. Para isso, utilizamos a matriz de transformação homogênea, que unifica a rotação e a translação. A matriz de transformação em 2D é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ pode ser transformado por T para obter a posição final no espaço.

5. Exercício prático

Considere um ponto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ no espaço 2D homogêneo. Ele é submetido a

uma transformação que combina uma rotação de $\theta = 45^\circ$ e uma translação $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Considere as informações dadas e responda o que é pedido abaixo:

1. Monte a matriz de transformação (Matriz de rotação e translação).
2. Calcule as coordenadas finais do ponto P após a transformação.

6. Simulação e visualização

Utilize o GeoGebra para demonstrar a transformação obtida no exercício prático.

Passo 1: Abrir o GeoGebra

a) Acesse o GeoGebra através do site <https://www.geogebra.org/> ou abra o aplicativo.

b) Escolha a opção "GeoGebra Clássico" ou "Geometria", que permite trabalhar com gráficos e vetores.

Passo 2: Inserir o Ponto Inicial

No campo de entrada, digite o ponto inicial P :

$$P = (3, 2)$$

O ponto será exibido no plano cartesiano.

Passo 3. Definir a Matriz de Rotação

a) A rotação é de 45° . A matriz de rotação em 2D é:

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}.$$

b) No campo de entrada do GeoGebra, insira:

$$R = \{\{\cos(45^\circ), -\sin(45^\circ)\}, \{\sin(45^\circ), \cos(45^\circ)\}\}$$

Passo 4: Aplicar a Rotação ao Ponto

Multiplique o vetor do ponto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ pela matriz R . No campo de entrada do GeoGebra, insira:

$$P_{rot} = R \cdot P$$

O resultado será o ponto rotacionado P_{rot} .

Passo 5: Adicionar a Translação

a) A translação é representada pelo vetor $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Adicione o vetor de translação ao ponto rotacionado P_{rot} . No campo de entrada do GeoGebra, insira:

$$t = (2, -1)$$

E em seguida insira:

$$P_{final} = P_{rot} + t$$

c) O ponto P_{final} será o resultado final após a transformação.

Passo 6. Aplicar a Matriz de Rotação e translação

a) No campo de entrada do GeoGebra, insira:

$$T = \{\{\cos(45^\circ), -\sin(45^\circ), 2\}, \{\sin(45^\circ), \cos(45^\circ), -1\}, \{0, 0, 1\}\}$$

b) Multiplique o vetor P pela matriz T . No campo de entrada do GeoGebra, insira:

$$P_{rottransl} = T \cdot P$$

c) Compare os resultados encontrados com os resultados dos passos 4 e 5.

APÊNDICE D – ATIVIDADE 4

ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE UM BRAÇO ROBÓTICO

Objetivo

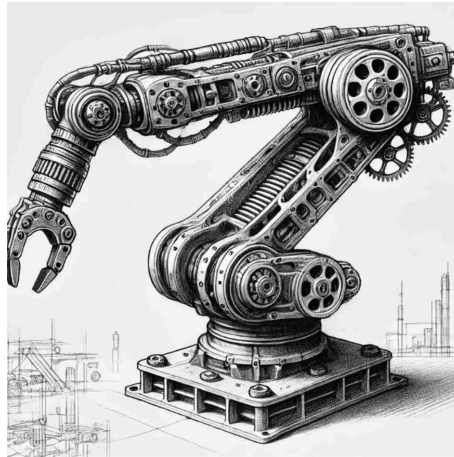
Resolver o problema proposto: encontrar condições para que a matriz de rotação e translação mantenha um ponto fixo.

Tempo necessário

2 aulas (1 h e 40 min)

1. Introdução teórica

Um braço robótico é um dispositivo dotado de articulações e programado para executar atividades com inúmeras finalidades e destinado a substituir a atividade física do homem nas tarefas repetidas e perigosas.

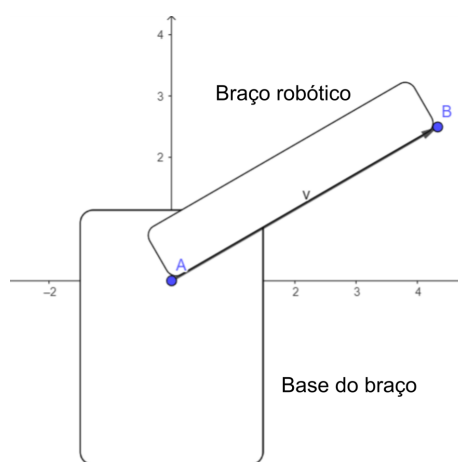


Braço robótico industrial (Fonte: Autor, 2025)

Usando Álgebra Linear, é possível entender como se dá a dinâmica de um braço robótico no que diz respeito a sua rotação e translação.

Para o estudo da rotação e translação, usaremos um modelo de braço robótico simples. O modelo contém uma base e apenas um “antebraço”. O estudo mostrará como obter as coordenadas da extremidade de um vetor $\vec{v}$ (ponto B após sua rotação e/ou

translação). Ao final da atividade, poderemos usar os resultados obtidos para simular o movimento do braço robótico no GeoGebra.



Braço robótico simples (Fonte: Autor, 2025)

2. Definição do problema

Um robô está posicionado em um espaço limitado e precisa se movimentar para permitir que outro robô atravesse o caminho que ele ocupa. No entanto, o robô deve mover seu braço de forma que a extremidade (ponto B) permaneça na mesma posição inicial, garantindo que ele continue acessível para uma tarefa específica.

Sabendo que a posição do braço pode ser representada como um vetor no espaço, pergunta-se:

Existe valores para a matriz de rotação e translação que, aplicados ao vetor do braço robótico, permitam que a extremidade (ponto B) continue exatamente nas mesmas coordenadas?

3. Resolução guiada

Siga os passos a seguir para obter a solução do problema proposto.

Passo 1: Representar o braço robótico no plano cartesiano

Construa um plano cartesiano e localize os pontos $A(0,0)$ e $B(5,0)$. O braço robótico será representado pelo vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, com origem em A e extremidade em B . O robô pode girar o braço em torno do ponto A , mas para solucionar o problema, o ponto B não pode mudar de posição.

Passo 2: Aplicar a Matriz de rotação

Aplique a Matriz de rotação, vista na Atividade 03, para produzir uma rotação de 90° e encontre as novas coordenadas de $\vec{v}$.

Passo 3: Aplicar a Matriz de translação

Aplique a Matriz de translação, vista na Atividade 03, para fazer o vetor encontrado no Passo 2 sofrer uma translação e voltar as coordenadas iniciais (coordenadas do Passo 1). Pense na movimentação do vetor no plano cartesiano para encontrar os valores ideais para essa translação.

Passo 4: Matriz de Rotação e Translação

Com os valores obtidos nos Passos 2 e 3, monte a Matriz de Rotação e Translação da maneira que foi vista na Atividade 3. Em seguida, faça os cálculos e verifique se essa matriz resolve de forma adequada o problema proposto.

4. Questões para aprofundamento

1. Repita os passos anteriores para uma rotação de 45° .
2. Para uma translação $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2, 5 \\ -4, 33 \end{pmatrix}$, é possível encontrar o valor de θ que resolva o problema?
3. Use o GeoGebra para realizar a simulação da solução do problema proposto. Teste a simulação para outros valores de θ .

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO AVALIATIVO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE UM BRAÇO ROBÓTICO

Objetivo

Avaliar a percepção dos alunos sobre a eficácia da sequência didática, o impacto de atividades práticas e do uso do GeoGebra em comparação com aulas tradicionais.

Tempo necessário

25 min

1. Sobre os conceitos matemáticos envolvidos

A sequência didática ajudou a reforçar os conceitos de matrizes (ex.: operações com matrizes e determinantes)?

- (A) Sim, com grande clareza.
- (B) Sim, mas houve dificuldades em alguns conceitos específicos.
- (C) Não, foi mais difícil do que as explicações tradicionais.
- (D) Não, não senti progresso no aprendizado.

2. Sobre a aplicação prática

A abordagem prática com transformações lineares, como rotação e translação, ajudou você a compreender melhor o conceito de matrizes?

- (A) Sim, foi fundamental para entender como as matrizes são aplicadas.
- (B) Sim, mas apenas para relembrar conceitos que já conhecia.

(C) Não, pois as atividades práticas não se conectaram aos conceitos teóricos.

(D) Não, foi mais confuso do que as explicações tradicionais.

3. Sobre a relação entre teoria e prática

Em sua opinião, a integração entre teoria (ex.: conceitos de matrizes) e prática (ex.: problema do braço robótico) foi:

(A) Excelente, pois conectou o conteúdo ao mundo real.

(B) Boa, mas poderia ter mais exemplos práticos.

(C) Fraca, pois os exemplos não se conectaram aos conceitos teóricos.

(D) Ineficaz, pois dificultou o entendimento geral do conteúdo.

4. Sobre a visualização no GeoGebra

A utilização do GeoGebra para explorar transformações lineares e matrizes:

(A) Tornou o aprendizado mais visual e interativo.

(B) Foi útil, mas não essencial para compreender o conteúdo.

(C) Não contribuiu significativamente para o entendimento.

(D) Tornou o processo mais confuso do que as aulas teóricas tradicionais.

5. Comparação com aulas tradicionais

Em relação às aulas tradicionais, a sequência didática proposta:

(A) Foi mais eficaz para entender conceitos como operações com matrizes, transposição e determinantes.

(B) Foi igualmente eficaz às aulas tradicionais.

(C) Foi menos eficaz que as aulas tradicionais.

(D) Não contribuiu para o aprendizado.

6. Reflexão sobre a sequência didática

Compare a sequência didática aplicada com as aulas tradicionais que você já teve sobre matrizes. Explique se e como essa abordagem ajudou no seu aprendizado, destacando pontos positivos e negativos. Você acredita que o uso de problemas práticos e ferramentas como o GeoGebra são estratégias melhores para estudar matrizes? Por quê?