



Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - POSGRAP
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-
PROFMAT

Jogos de Diagonalização: Uma Abordagem para o Estudo de Sequências

Cinthia Rodrigues de Carvalho

SÃO CRISTÓVÃO – SE
AGOSTO DE 2025

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - POSGRAP
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-
PROFMAT

Jogos de Diagonalização: Uma Abordagem para o Estudo de Sequências

por

Cinthia Rodrigues de Carvalho

sob a orientação de

Prof^a. Dr^a. Giovana Siracusa Gouveia

São Cristóvão – SE
Agosto de 2025

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Jogos de Diagonalização: Uma Abordagem para o Estudo de Sequências

por

Cinthia Rodrigues de Carvalho

Aprovada pela Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente

GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA

Data: 26/08/2025 19:14:15-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Orientadora



Documento assinado digitalmente

FABIO LIMA SANTOS

Data: 26/08/2025 16:20:21-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fabio Lima Santos - UFS
Primeiro(a) Examinador(a)



Documento assinado digitalmente

MICHELE MENDES NOVAIS

Data: 26/08/2025 19:08:37-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Michele Mendes Novais - UFRPE
Segundo(a) Examinadora(a)

São Cristóvão, 08 de Agosto de 2025.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SIBIUFS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

C331j Carvalho, Cinthia Rodrigues de
 Jogos de diagonalização : uma abordagem para o estudo de
sequências / Cinthia Rodrigues de Carvalho ; orientador Giovana
Siracusa Gouveia. – São Cristóvão, SE, 2025.
66 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -
Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Matemática. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Teoria dos
conjuntos. 4. Sequências (Matemática). 5. Jogos no ensino de
matemática. I. Gouveia, Giovana Siracusa, orient. II. Título.

CDU 511.3

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me dar força e coragem para enfrentar os desafios, que não foram poucos, ao longo desta caminhada.

Aos meus pais e à minha sobrinha Alana, pela presença, pelo apoio incondicional, paciência e incentivo em todos os momentos, especialmente nos dias mais difíceis. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

Minha gratidão à minha orientadora, Dra. Giovana Siracusa Gouveia, pela atenção dedicada, pelas importantes orientações (que foram muitas) e pelo conhecimento compartilhado, que foram essenciais para o desenvolvimento e construção deste trabalho.

Aos professores do curso, que contribuíram de forma significativa para minha formação e me motivaram a seguir sempre em busca do conhecimento.

Aos meus amigos, Andrea de Melo, Carlos Roberto, Elaine Michelle e Thiago Ferreira, assim como aos colegas de curso, pelas conversas, pelo companheirismo, pelas trocas de aprendizado e pelo apoio mútuo.

Agradeço também ao apoio institucional recebido: O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Enfim, a todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste trabalho, o meu mais sincero agradecimento.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um jogo combinatório inspirado no argumento de diagonalização de Cantor. O jogo envolve dois jogadores, Kronecker e Cantor, cujos nomes fazem referência à histórica oposição de Leopold Kronecker à matemática desenvolvida por Georg Cantor. A partir dos argumentos explorados no jogo, propomos uma abordagem didática voltada para o ensino de conceitos relacionados a sequências e à cardinalidade de conjuntos, introduzindo a ideia de conjuntos infinitos e suas diferenças.

Palavras-chave: Diagonalização de Cantor. Conjuntos Infinitos. Sequências. Conjuntos enumeráveis.

Abstract

The aim of this work is to present a combinatorial game inspired by Cantor's diagonalization argument. The game involves two players, Kronecker and Cantor, whose names reference the historical opposition of Leopold Kronecker to the mathematics developed by Georg Cantor. Based on the arguments explored in the game, we propose a didactic approach aimed at teaching concepts related to sequences and the cardinality of sets, introducing the idea of infinite sets and their distinctions.

Keywords: Cantor's Diagonalization. Infinite Sets. Sequences. Countable Sets.

Lista de Figuras

1.1	Função máximo inteiro Fonte: Produzida pelas autoras.	32
1.2	Função mínimo inteiro Fonte: Produzida pelas autoras.	32
2.1	David Hilbert. Fonte: [5].	39
2.2	Ilustração do Hotel de Hilbert. Fonte: [2]	40
2.3	Leopold Kronecker (1823 - 1891). Fonte: [5].	42
2.4	Georg Cantor (1845 - 1918). Fonte: [5].	43
2.5	Nível 1. Fonte: [8].	44
2.6	Nível 2. Fonte: [8].	44
2.7	O Conjunto de Cantor. Fonte: [11].	45

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	12
1.1 Números Naturais	12
1.2 Conjuntos Finitos	17
1.3 Conjuntos Infinitos	21
1.4 Sequência	22
1.4.1 Representação dos números naturais na base 2	24
1.5 Conjuntos Enumeráveis	28
1.6 Funções máximo e mínimo inteiro	32
2 Paradoxos e Contribuições ao Estudo do Infinito	37
2.1 Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga	37
2.2 Breve biografia de David Hilbert	39
2.3 Hotel de Hilbert	40
2.4 Leopold Kronecker: o matemático finitista	42
2.5 A trajetória e contribuições de Georg Cantor	43
2.6 O Conjunto de Cantor	44
3 Jogos de Diagonalização	48
4 Uma proposta para o ensino da diagonalização	59
4.1 Atividade Proposta	60

Introdução

Ao longo de sua história, a matemática tem enfrentado desafios conceituais que vão além da simples resolução de problemas numéricos ou geométricos. Entre esses desafios, destaca-se a compreensão do infinito, um conceito que permeia desde a Grécia Antiga até as formulações rigorosas da matemática moderna. A tentativa de compreender e formalizar o infinito levou a avanços importantes na lógica, na teoria dos conjuntos e na própria estruturação do pensamento matemático.

No final do século XIX, o argumento de diagonalização de Georg Cantor permitiu comparar e classificar diferentes tamanhos de conjuntos infinitos. Como exemplo, demonstrou que o conjunto dos números reais não é enumerável. Essa ideia rompeu padrões e deu origem a novos campos de investigação. No entanto, também encontrou resistência, especialmente na figura de Leopold Kronecker, defensor de uma matemática estritamente baseada em construções finitas.

É nesse contexto que se inclui a proposta central deste trabalho: a construção de jogos combinatórios que representam, em termos finitos e estratégicos, os princípios fundamentais do argumento da diagonalização de Cantor. O jogo consiste em uma disputa entre Kronecker que seleciona uma lista secreta de sequências binárias de comprimento fixo, e Cantor deve, com o menor número possível de perguntas, construir uma nova sequência que não pertença à lista. As perguntas permitidas são do tipo:

Qual é o dígito binário j da sequência i ?

Essa dinâmica estabelece um jogo de informação parcial, no qual a estratégia de Cantor consiste em selecionar cuidadosamente quais entradas consultar e em que momento fazê-lo, com o objetivo de reunir dados suficientes para construir uma nova sequência, isto é, distinta de todas que compõem a lista de Kronecker. O principal desafio está em minimizar o número de consultas necessárias, maximizando o processo de construção de Cantor e tornando sua estratégia o mais eficiente possível. Essa busca por eficiência estratégica é baseada pelos resultados obtidos na análise matemática do jogo, que revela padrões precisos sobre o número mínimo de perguntas exigidas em função dos parâmetros do problema.

O trabalho compõe-se em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos as bases teóricas necessárias à compreensão da proposta, iniciando pelos números naturais e

abordando conceitos como conjuntos finitos, infinitos, representação binária, enumerabilidade e funções máximo e mínimo inteiro. Já no Capítulo 2, debatemos os paradoxos e contribuições de alguns matemáticos como David Hilbert, Georg Cantor e Leopold Kronecker. No Capítulo 3, chamado de jogos de diagonalização tem como objetivo representar uma proposta baseada no argumento de diagonalização de Cantor, por meio de um jogo construído com sequências binárias. E por fim, o capítulo 4 desenvolve uma proposta didática baseada no argumento de diagonalização de Cantor, organizada sob a forma de um jogo matemático que utiliza cartas contendo sequências binárias para ilustrar de forma concreta os conceitos discutidos anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Os conceitos abordados neste capítulo, como a definição formal dos números naturais por meio dos axiomas de Peano, a distinção entre conjuntos finitos e infinitos, o princípio da Boa Ordem, o princípio da indução, noções centrais de enumerabilidade, limite de uma sequência e funções piso e teto, fornecem os fundamentos teóricos indispensáveis para o entendimento das ideias desenvolvidas nos capítulos seguintes, utilizando como referências [6] [7] e [8].

1.1 Números Naturais

Nesta seção, apresentamos o conjunto dos números naturais e sua fundamentação teórica. A seguir, apresentamos os axiomas que definem o conjunto dos números naturais e suas propriedades.

Definição 1. *O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos seguintes axiomas:*

1. *Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n ;*
2. *Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*
3. *Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $(n \in X \Rightarrow s(n) \in X)$, então $X = \mathbb{N}$.*

Observação 1. *Os itens 1, 2 e 3 na Definição anterior podem ser interpretados das seguintes formas*

- (a) *Todo número natural tem sucessor que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes;*
- (b) *Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro;*

- (c) *Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.*

As propriedades 1, 2 e 3 são conhecidas como *axiomas de Peano*. O Axioma 3 é conhecido como o *Princípio da indução finita*.

O princípio da indução possibilita um método de demonstração de afirmações que envolvam os números naturais, conhecido como o *método de indução (ou recorrência)*, o qual funciona assim:

Proposição 1. (*Método de Indução Finita*) *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a um número natural n . Se $P(1)$ é válida e se, supondo $P(n)$ válida, resultar que $P(s(n))$ também é válida, então $P(n)$ é válida para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais.*

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é válida}\}$. Como $P(1)$ é válida, então $1 \in X$. Além disso, assumindo que $n \in X$ isso implica que $P(n)$ é válida e, por hipótese $P(s(n))$ também é válida, ou seja, $s(n) \in X$. Pelo princípio de indução $X = \mathbb{N}$ e, portanto $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definição 2. *No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais definimos as operações fundamentais de adição, que associa a cada par de números (m, n) a soma $m + n$, e a multiplicação, que faz corresponder ao par (m, n) , o produto $m \cdot n$. Essas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades:*

- (i) $m + 1 = s(m)$;
- (ii) $m + s(n) = s(m + n)$, isto é, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$;
- (iii) $m \cdot 1 = m$;
- (iv) $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$, isto é, $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Proposição 2. *Sejam m, n e p números naturais quaisquer, então temos as seguintes propriedades da adição e da multiplicação:*

- (i) (*Associatividade*) $(m + n) + p = m + (n + p)$ e $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;
- (ii) (*Distributividade*) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$;
- (iii) (*Comutatividade*) $m + n = n + m$ e $m \cdot n = n \cdot m$;
- (iv) (*Lei do corte*) $n + m = p + m \Rightarrow n = p$ e se $m \neq 0$, temos $n \cdot m = p \cdot m \Rightarrow n = p$.

Demonstração. A demonstração dos itens (i)-(iii) são encontradas em [[8]]. A seguir, mostramos a lei do corte para a adição, usando indução em m . Observe que, para $m = 1$ temos

$$\begin{array}{ccc} n + 1 = p + 1 & \xRightarrow{\text{Definição de soma}} & s(n) = s(p) \\ & \xRightarrow{\text{Injetividade de } s} & n = p. \end{array}$$

Supondo válida para m , ou seja,

$$n + m = p + m \Rightarrow n = p.$$

Dessa forma,

$$\begin{array}{ccc} n + (m + 1) = p + (m + 1) & \xRightarrow{\text{Associatividade da soma}} & (n + m) + 1 = (p + m) + 1 \\ & \xRightarrow{\text{Definição de soma}} & s(n + m) = s(p + m) \\ & \xRightarrow{\text{Injetividade de } s} & n + m = p + m \\ & \xRightarrow{\text{Hipótese de indução}} & n = p. \end{array}$$

□

Definição 3. Dados os números naturais m, n , dizemos que m é menor do que n , se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, denotamos $m < n$.

Proposição 3. Sejam m, n e p números naturais. Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Demonstração. Como $m < n$ e $n < p$, existem k_1 e k_2 números naturais tais que

$$n = m + k_1 \text{ e } p = n + k_2.$$

Portanto,

$$p = (m + k_1) + k_2 = m + (k_1 + k_2),$$

isto é, existe $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $p = m + k$, e portanto, $m < p$. □

Uma propriedade importante acerca da relação de ordem é que ela relaciona dois naturais quaisquer da seguinte forma: Dados m e $n \in \mathbb{N}$, então exatamente uma das três possibilidades é satisfeita:

$$m = n \text{ ou } m < n \text{ ou } n < m.$$

Outra propriedade relevante é que não existe nenhum número natural entre um número e seu sucessor, como mostramos a seguir.

Observação 2. Diremos que m é menor do que ou igual a n se $m = n$ ou $m < n$. Usaremos a notação de $m \leq n$.

Proposição 4. *Dado $n \in \mathbb{N}$, não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha por absurdo, que existe um número $p \in \mathbb{N}$ com essa propriedade. Então, podemos escrever $p = n + q$ e $n + 1 = p + r$ onde $q, r \in \mathbb{N}$. Assim, temos:

$$p + 1 = n + 1 + q \implies p + 1 = p + r + q \xrightarrow{\text{Lei do corte}} 1 = r + q.$$

Isso leva a uma contradição, pois, pela definição de adição nos números naturais, a soma de dois números naturais é sempre o sucessor de algum número, e, portanto, não pode ser igual a 1. Logo, a hipótese inicial está errada, e tal p não pode existir. $\square$

Lema 1. *Se $n \in \mathbb{N}$, então $1 \leq n$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < 1$. Por definição, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 = n + k.$$

Mas, por definição de adição, a soma de dois números naturais é sempre o sucessor de algum número, o que é um absurdo, pois $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Observação 3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n , isto é,*

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Teorema 1. *(Princípio da Boa Ordem) Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.*

Demonstração. Se $1 \in A$, então pelo Lema 1, 1 é o menor elemento do conjunto A . Caso contrário, ou seja, se $1 \notin A$, consideramos o conjunto X , formado pelos números naturais n tais que $I_n \subseteq \mathbb{N} - A$ onde $I_1 = \{1\} \subseteq \mathbb{N} - A$ concluímos que $1 \in X$. Porém, como A não é vazio, segue que $X \neq \mathbb{N}$. Assim, a tese do Princípio de Indução Finita não é satisfeita. Logo, deve existir algum $n \in X$ tal que $s(n) \notin X$. Isso implica que $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N} - A$, mas $I_{n+1} = \{1, 2, \dots, n+1\} \not\subseteq \mathbb{N} - A$. Logo, $n_0 = n+1 \in A$, ou seja, n_0 será o menor elemento do conjunto A , já que não existe número natural entre n e $n + 1$. $\square$

A seguir, apresentamos um resultado muito útil na aritmética dos inteiros, que segue do Princípio da Boa Ordem.

Corolário 1. *(Algoritmo da Divisão) Dado dois inteiros x e y , com $y > 0$, existem únicos inteiros q e r , chamados respectivamente de quociente e resto, tais que:*

$$x = qy + r, \text{ com } 0 \leq r < y.$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto

$$A = \{x - ky \mid k \in \mathbb{Z} \text{ e } x - ky \geq 0\}.$$

O conjunto A não é vazio, pois considerando $k = -|x|$, temos

$$\begin{aligned} x - ky &= x - (-|x|)y \\ &= x + |x|y \\ &\geq x + |x| \geq 0. \end{aligned}$$

Pelo Princípio da Boa Ordem 1, A tem um menor elemento r , com $r = x - qy$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Então,

$$x = qy + r, \text{ com } r \geq 0.$$

Para mostrar que $r < y$, suponha por contradição que $r = y$. Então,

$$y = x - qy \Rightarrow x = y + qy \Rightarrow x = (1 + q)y.$$

Logo,

$$x - (q + 1)y = 0 \in A.$$

Porém, note que

$$r = x - qy > x - qy - y,$$

o que contraria a minimalidade de r . Por outro lado, assumindo $r > y$, existe a tal que $r = x + a$, com $0 < a < r$. Então,

$$y + a = x - qy \Rightarrow a = x - qy - y \Rightarrow a = x - (1 + q)y \in A,$$

que é uma contradição, pois r é o menor elemento de A . Portanto, $0 \leq r < y$.

Para mostrar a unicidade, suponha que existam dois pares de inteiros (q, r) e (q', r') , tais que,

$$x = qy + r = q'y + r' \text{ com } 0 \leq r, r' < y$$

Daí, temos:

$$qy + r = q'y + r' \Rightarrow (q - q')y = r' - r \Rightarrow |q - q'|y = |r - r'|, \text{ com } 0 \leq |r - r'| < y.$$

Note que $y|(r - r')$ e $0 \leq |r - r'| < y$, donde concluímos que $r - r' = 0$ e portanto, $|q - q'| = 0$, pois $y \neq 0$, logo $q = q'$.

□

1.2 Conjuntos Finitos

Nesta seção, apresentamos os conjuntos finitos e algumas de suas propriedades.

Definição 4. Um conjunto X é dito finito quando é vazio ou quando existir uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Se $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $\dots$, $x_n = f(n)$, então $X = \text{Im}(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, e neste caso, dizemos que a função f é uma contagem dos elementos de X , e o número n é denominado o número de elementos ou a cardinalidade do conjunto finito X . Denotamos por $|X|$ a cardinalidade do conjunto X .

Lema 2. Seja f uma bijeção de X em Y . Então, para qualquer elemento a de X e qualquer elemento b de Y , existe uma bijeção g de X em Y de modo que $g(a) = b$.

Demonstração. Como f é uma bijeção, sabemos que existe exatamente um $a' \in X$ tal que $f(a') = b$. Se $a' = a$, basta considerar $g = f$. Se $a' \neq a$, precisamos definir g de forma a "trocar" os papéis de a e a' em relação a f , sem prejudicar a bijetividade. Dessa forma, definimos $g : X \rightarrow Y$ a seguir:

$$g(x) = \begin{cases} b, & \text{se } x = a, \\ f(a), & \text{se } x = a', \\ f(x), & \text{se } x \neq a, x \neq a' \text{ e } x \in X. \end{cases}$$

Da sobrejetividade de f , temos que

$$\begin{aligned} Y &= \text{Im}(f) \\ &= \{f(x); x \in X\} \\ &= \{f(a')\} \cup \{f(a)\} \cup \{f(x); x \in X, x \neq a' \text{ e } x \neq a\} \\ &= \{b\} \cup \{f(a)\} \cup \{f(x); x \in X, x \neq a' \text{ e } x \neq a\} \\ &= \text{Im}(g) \end{aligned}$$

Portanto, g é sobrejetiva.

A injetividade de g segue de sua definição e da injetividade de f . Logo, a função g é uma bijeção e satisfaz $g(a) = b$. $\square$

Teorema 2. Se A é um subconjunto próprio de I_n , não pode existir uma bijeção em A em I_n .

Demonstração. O resultado é imediato para $n = 1$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$ e A um subconjunto próprio de I_n . Suponha por contradição que exista uma bijeção $f : A \rightarrow I_n$. Pelo Princípio da Boa Ordem, podemos supor sem perda de generalidade que n é o menor número natural para o qual essa condição é satisfeita, isto é, se $k < n$, não pode existir

uma bijeção de um subconjunto próprio de I_k em I_k . Analisemos separadamente os casos $n \in A$ e $n \notin A$.

Se $n \in A$, pelo Lema 2, existe uma bijeção $g : A \rightarrow I_n$ tal que $g(n) = n$. Nesse caso, podemos considerar a restrição, denotada por $\tilde{g}$, de g ao conjunto $A - \{n\}$. Isto é, $\tilde{g} : A - \{n\} \rightarrow I_{n-1}$ é definida por

$$\tilde{g}(k) = g(k) \text{ para todo } k \in I_{n-1}.$$

Ou seja, $\tilde{g}$ é uma bijeção do subconjunto próprio $A - \{n\} \subseteq I_{n-1}$, contrariando a minimalidade de n , pois $A - \{n\}$ é um subconjunto próprio de I_{n-1} .

Se $n \notin A$, como f é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = n$. Como $a \in A$ e $n \notin A$, segue que $a \neq n$ donde concluímos que $A - \{a\}$ é um subconjunto próprio de I_{n-1} . Logo, a restrição de f ao subconjunto próprio $A - \{a\}$ de I_{n-1} também é uma bijeção de $A - \{a\}$ em I_{n-1} , o que novamente contradiz a minimalidade de n . $\square$

O seguinte Corolário mostra que a cardinalidade de um conjunto está bem definida, isto é, $|X| = m$ e $|X| = n$, então $m = n$, e portanto podemos dizer que o conjunto possui m elementos.

Corolário 2. *Se $f : I_m \rightarrow X$ e $g : I_n \rightarrow X$ são bijeções então $m = n$.*

Demonstração. Se $m = n$, nada temos a provar. Sem perda de generalidade, suponha que $m < n$. Então I_m é um subconjunto próprio de I_n e observe que a composição $g^{-1} \circ f : I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção (por ser composição de bijeções), o que contraria o Teorema 2. Portanto, $m = n$. $\square$

Corolário 3. *Seja X um conjunto finito. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração. Como X é um conjunto finito, existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção

$$\phi : I_n \rightarrow X.$$

Dessa forma, podemos definir $\tilde{f} : I_n \rightarrow I_n$ por

$$\tilde{f} = \phi^{-1} \circ f \circ \phi,$$

então temos:

$$f \text{ é injetiva} \iff \tilde{f} \text{ é injetiva}$$

e

$$f \text{ é sobrejetiva} \iff \tilde{f} \text{ é sobrejetiva}.$$

Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $X = I_n$, ou seja, basta mostrar o resultado para $f : I_n \rightarrow I_n$.

Suponha que f seja injetiva e considere $Y = \text{Im}f$. Suponha, por absurdo, que $Y \subsetneq I_n$, temos que existe uma bijeção

$$f : I_n \rightarrow Y \subsetneq I_n.$$

Donde concluímos que

$$f^{-1} : Y \rightarrow I_n$$

é uma bijeção de Y em I_n , contrariando o Teorema 2. Logo, $Y = I_n$ e f é sobrejetiva.

Suponha que $f : I_n \rightarrow I_n$ seja sobrejetiva, queremos mostrar que f é injetiva. Para isso, escolha para cada $k \in I_n$, um $x_k \in I_n$ tal que $f(x_k) = k$. Defina

$$A = \{x_k; k \in I_n\}.$$

Se f não for injetiva, existe um $n_0 \in I_n$ e $a, b \in I_n$ com $a \neq b$ tal que $f(a) = f(b) = n_0$ isto implica que ou $x_{n_0} = a$ ou $x_{n_0} = b$. Logo, $A \neq I_n$ pois a ou b não pertencem a este conjunto A . Definindo $\tilde{f}$ como a restrição de f ao conjunto A , $\tilde{f} = f|_A$, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A \subsetneq I_n &\rightarrow I_n \\ k &\mapsto \tilde{f}(x_k) = f(k) \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{f}$ é uma bijeção de $A \subsetneq I_n$ em I_n , contrariando o Teorema 2. Portanto, f é sobrejetiva.

□

Corolário 4. *Não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma sua parte própria.*

Demonstração. Seja X um conjunto finito. Assim, existe uma bijeção

$$\varphi : I_n \rightarrow X.$$

Supondo Y subconjunto próprio de X , temos que o conjunto $A = \varphi^{-1}(Y)$ é um subconjunto próprio de I_n . Dessa forma,

$$\varphi_A : A \rightarrow Y$$

definida por $\varphi_A(x) = \varphi(x)$ é uma bijeção de A em Y .

Se $f : Y \rightarrow X$ for bijeção, então

$$g : A \subsetneq I_n \rightarrow I_n$$

definida por

$$g(x) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_A(x)$$

é uma bijeção, contrariando o Teorema 2. Logo, f não pode ser uma bijeção. $\square$

Teorema 3. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração. Inicialmente, considere $X = \emptyset$, então X não tem elementos e qualquer subconjunto de X também é vazio, ou seja, é finito. Mostramos para o caso de conjuntos que não são vazios, usando o princípio de indução no número de elementos do conjunto X . Supondo que $|X| = 1$, então os únicos subconjuntos de X são o conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio X , que são conjuntos finitos. Suponha que o teorema seja válido para conjuntos com n elementos. Queremos mostrar que é válido para conjuntos com $n + 1$ elementos. Então, seja X um conjunto com $n + 1$ elementos, e $Y \subseteq X$, daí temos que se $Y = X$, não há nada a provar, pois X é finito por hipótese.

Caso $Y \subsetneq X$, tomemos um elemento $a \in X$ tal que $a \notin Y$, então $Y \subset X - \{a\}$. Como o conjunto $X - \{a\}$ tem n elementos, e, pela hipótese de indução, todo subconjunto de $X - \{a\}$ é finito, segue que Y também é finito. Portanto, pelo princípio de indução, o teorema é válido para qualquer conjunto finito X . Logo, todo subconjunto de um conjunto finito é finito. $\square$

Corolário 5. *Dada $f : X \rightarrow Y$, se Y é finito e f é injetiva então X é finito; se X é finito e f é sobrejetiva então Y é finito.*

Demonstração. Suponha que Y seja um conjunto finito e que $f : X \rightarrow Y$ seja injetiva. Como $f(X) \subset Y$, pelo Teorema 3, $f(X)$ é um conjunto finito, isto é, existe uma bijeção $g : I_n \rightarrow f(X)$. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X &\rightarrow f(X) \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) = f(x) \end{aligned}$$

Dessa forma, $\tilde{f}$ é bijetiva. Logo, a função $h : I_n \rightarrow X$ dada por $h = g \circ (\tilde{f})^{-1}$ é uma bijeção, o que garante que X é finito.

Por outro lado, suponha que X seja um conjunto finito e que $f : X \rightarrow Y$ seja sobrejetiva. Para cada $y \in Y$, escolha $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Tal escolha é possível, pois f é sobrejetiva. Considere $A = \{x_y \in X ; y \in Y\} \subseteq X$, pelo Teorema 3, A é um conjunto finito, isto é, existe uma bijeção $k : I_n \rightarrow A$. Defina:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A &\rightarrow Y \\ x_y &\mapsto \tilde{f}(x_y) = y \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{f}$ é bijetiva. Portanto, $\tilde{f} \circ k : I_n \rightarrow Y$ é uma bijeção, o que garante que Y é finito. $\square$

Definição 5. Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$.

Corolário 6. Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto finito. Por definição, existe uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$. Considerando $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$, defina $m = \max\{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$. Então, se $x \in X$, temos $x \leq m$, ou seja, X é limitado. Reciprocamente, suponha que $X \subseteq \mathbb{N}$ seja limitado. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq k$ para todo $x \in X$. O conjunto X está contido no intervalo $\{1, 2, \dots, k\}$ que é finito. De maneira que, X é um subconjunto de um conjunto finito e, pelo Teorema 3, ele próprio é finito. $\square$

1.3 Conjuntos Infinitos

Nesta seção, introduzimos o conceito de infinito e exploramos algumas de suas propriedades, que fogem à intuição. Apresentamos também a noção de cardinalidade, que permite quantificar e comparar diferentes tipos de infinitos.

Definição 6. Um conjunto X é chamado de infinito quando ele não é finito. Isso significa que X é infinito se ele não for vazio e não existir nenhum número natural n para o qual seja possível estabelecer uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$, onde

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Exemplo 1. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, se $\mathbb{N}$ não for infinito, então existe uma bijeção $x : I_n \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $x(k) = x_k$, para todo $k \in I_n$. Considere $n_0 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, desse modo, $n_0 + 1 = s(n_0) \notin \text{Im}(x)$, mas $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, contrariando a sobrejetividade de x .

Teorema 4. Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Demonstração. Como X é infinito, ele não é vazio. Logo, podemos escolher um elemento $x_1 \in X$. Fazendo a demonstração por indução, ou seja, vamos construir $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ de maneira injetiva. Para $n = 1$, temos que $x_1 \in X$. Suponha que já escolhemos $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$, com $k \in \mathbb{N}$. Como X é infinito, o subconjunto $X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ não é vazio. Assim, podemos escolher $x_{k+1} \in X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Determinamos $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ como $f(n) = x_n$. Com isso, por construção $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, já que cada elemento x_n foi escolhido de forma a ser distinto dos anteriores. Logo, f é injetiva. Portanto, a construção garante que $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ é uma função injetiva. $\square$

O resultado a seguir ilustra bem o cuidado que devemos ter ao lidar com conjuntos infinitos, pois, em certas situações, a intuição pode falhar. Por exemplo, não é intuitivo

pensar que, ao removermos alguns elementos de um conjunto, ainda seja possível estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto original. No entanto, isso de fato ocorre com conjuntos infinitos, como será mostrado a seguir.

Corolário 7. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi : X \rightarrow Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subsetneq X$.*

Demonstração. Suponha X um conjunto infinito, então pelo Teorema 4, existe uma função injetiva

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X.$$

Considere $x_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $Y = X - \{x_1\}$. Defina $\varphi : X \rightarrow Y$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq x_n, \\ x_{n+1}, & \text{se } x = x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Temos que

$$x_k \neq x_j \text{ se } k \neq j$$

pois f é uma função injetiva e portanto φ é uma bijeção.

Reciprocamente, se existe uma bijeção de X sobre um subconjunto próprio de si mesmo, então X é infinito, conforme estabelece o Corolário 4 do Teorema 2.

□

Exemplo 2. *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é infinito. De fato, considere*

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{Z}; n = 2m \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\},$$

ou seja, $\mathcal{P}$ é o conjunto dos números pares. Então $\mathcal{P}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$. Considere a função

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}, \text{ definida por } f(n) = 2n.$$

Dessa forma, f é uma bijeção e, portanto, pelo Corolário 7, conclui-se que $\mathbb{Z}$ é infinito.

1.4 Sequência

Neste trabalho, um conceito fundamental é o de sequência, em especial as sequências finitas, definidas a seguir:

Definição 7. *Uma sequência finita de tamanho n em $\mathbb{R}$ é uma função $x : I_n \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural $k \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ um número real $x(k)$.*

Sendo $x_k = x(k)$ a sequência finita pode ser representada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Além disso, x_k é chamado o k -ésimo termo da sequência.

Exemplo 3. $x = (1, 0, 1)$ é uma sequência finita de tamanho 3. Basta considerar a função $x : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(1) = 1$, $x(2) = 0$ e $x(3) = 1$.

Definição 8. Uma sequência em $\mathbb{R}$ é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real $x(n)$.

Sendo $x_k = x(k)$ a sequência pode ser representada por $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ ou (x_n) . Além disso, x_n é chamado o n -ésimo termo da sequência.

É importante observar que uma sequência não é o mesmo que o conjunto formado por seus termos. Por exemplo, a sequência $(1, 1, 1, \dots)$ não é igual ao conjunto $\{1\}$, assim como as sequências $(0, 1, 0, 1, \dots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ têm o mesmo conjunto de termos $\{0, 1\}$, mas são sequências diferentes.

Definição 9. Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada superiormente se existe um número real a tal que todos os termos x_n sejam menores ou iguais a a . Da mesma forma, uma sequência é limitada inferiormente se existe um número real a tal que todos os termos x_n sejam maiores ou iguais a a . Uma sequência é simplesmente chamada de limitada se ela é limitada tanto superiormente quanto inferiormente. Isso significa que existe um número positivo m tal que o valor absoluto de cada termo da sequência, $|x_n|$, seja menor ou igual a m para todos os valores de n .

Lema 3. (Desigualdade de Bernoulli) Se $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração. A prova da desigualdade

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

é feita por indução em n . Para $n = 1$ é verdadeira, visto que

$$1 + x = 1 + x.$$

Suponha que seja válida para $n = k$. Queremos mostrar que é válida para $n = k + 1$. Com efeito, considere

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Observe que, $(1 + x)$ é um número real não negativo, uma vez que $x \geq -1$. Deste modo, multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por $(1 + x)$, temos:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k \cdot (1 + x) \geq (1 + kx) \cdot (1 + x) \\ &= 1 + kx + x + kx^2 \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x. \end{aligned}$$

Observe que a última desigualdade é verdadeira devido ao termo kx^2 ser não negativo, ou seja, $x \geq 0$ e $k \geq 1$.

Logo, o resultado é válido para $n = k + 1$. Portanto, pelo Princípio da Indução, o resultado vale para todo $n \geq 1$.

□

Exemplo 4. Considere a sequência $(a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$, onde $a > 1$. Queremos analisar as propriedades dessa sequência e determinar se ela é limitada superiormente e inferiormente.

Sabemos que $a > 1$, multiplicando ambos os lados da desigualdade $1 < a$ por a^n , temos:

$$a^n < a^{n+1}$$

ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $a^n \geq a$. Logo, isso mostra que a sequência (a^n) é limitada inferiormente por a (o menor valor da sequência ocorre no primeiro termo, $a^1 = a$).

Porém, considere que $a = 1 + d$, com $d > 0$, ou seja, isso significa que a é ligeiramente maior que 1. Pela desigualdade de Bernoulli (Lema 3), sabemos que:

$$(1 + d)^n \geq 1 + nd$$

para todo $n \geq 1$.

Portanto, $a^n = (1 + d)^n$ cresce sem limites à medida que $n \rightarrow \infty$. Para qualquer valor $c \in \mathbb{R}$, é possível encontrar um n suficientemente grande tal que $a^n > c$. Concluimos que, a sequência (a^n) não é limitada superiormente, ou seja, ela cresce indefinidamente.

1.4.1 Representação dos números naturais na base 2

Podemos utilizar o conceito de sequência para compreender a representação dos números naturais em diversas bases. A seguir, apresentamos como essa representação se dá e como ela pode ser aplicada na construção de sequências finitas.

De acordo com [10], estamos habituados a representar os números usando o sistema decimal, o qual utiliza os símbolos: 0 a 9. Isto ocorre em razão ao nosso sistema ser baseado na base 10, isto é, cada posição de um número representa uma potência de 10. De fato, seja $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ a representação de n em termos de seus algarismos, isto é,

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0, \text{ com } a_i \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

ou seja, a cada número natural n , associamos uma sequência finita de números inteiros

entre 0 e 9, da seguinte forma o número

$$n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$$

está associada a sequência

$$(n)_{10} = (a_k, a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0).$$

Exemplo 5. *O número*

$$n = 123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

está associado a sequência

$$(n)_{10} = (1, 2, 3).$$

Além disso, os números podem ser representados em outras bases. Uma das mais relevantes é a base 2, chamada de sistema binário, que usamos apenas os números 0 e 1.

Teorema 5. *Todo inteiro positivo n pode ser representado de maneira única da seguinte forma:*

$$n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0,$$

com $k \geq 0$, $a_k \neq 0$ e $0 \leq a_i < 2$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, aplicando o algoritmo da divisão por 2, temos:

$$\begin{aligned} n &= 2q_0 + a_0, \\ q_0 &= 2q_1 + a_1, \\ q_1 &= 2q_2 + a_2, \\ &\vdots \\ q_{k-2} &= 2q_{k-1} + a_{k-1}, \\ q_{k-1} &= 2 \cdot 0 + a_k. \end{aligned}$$

com $0 \leq a_j < 2$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Substituindo o valor de q_0 descrito na segunda equação, na primeira equação e em seguida substituindo o valor de q_1 dado na terceira equação e assim por diante, temos:

$$\begin{aligned}
n &= 2q_0 + a_0 \\
&= 2(2q_1 + a_1) + a_0 \\
&= 2^2q_1 + a_12 + a_0 \\
&= 2^2(2q_2 + a_2) + a_12 + a_0 \\
&= 2^3q_2 + a_22^2 + a_12 + a_0 \\
&= 2^3(2q_3 + a_3) + a_22^2 + a_12 + a_0 \\
&= 2^4q_3 + a_32^3 + a_22^2 + a_12 + a_0 \\
&\vdots \\
&= 2^kq_{k-1} + a_k2^{k-1} + \cdots + a_22^2 + a_12 + a_0 \\
&= a_k2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_12^1 + a_02^0.
\end{aligned}$$

Para mostrar a unicidade, denotamos $d_2(n)$ o número de representações de n na base 2. Queremos mostrar que $d_2(n)$ é sempre igual a 1. Como alguns dos coeficientes a_j podem ser nulos, podemos supor que

$$n = a_r2^r + a_{r-1}2^{r-1} + \cdots + a_s2^s$$

seja uma representação de n na base 2, onde a_r e a_s são não nulos. Isso implica que

$$\begin{aligned}
n - 1 &= a_r2^r + a_{r-1}2^{r-1} + \cdots + a_s2^s - 1 \\
&= a_r2^r + \cdots + (a_s - 1)2^s + 2^s - 1 \\
&= a_r2^r + \cdots + (a_s - 1)2^s + (2 - 1) \sum_{j=0}^{s-1} 2^j \\
&= a_r2^r + \cdots + (a_s - 1)2^s + 1 \sum_{j=0}^{s-1} 2^j,
\end{aligned}$$

ou seja, a cada representação de n na base 2, é possível encontrar uma representação, na base 2, para $n - 1$.

$$d_2(n) \leq d_2(n - 1).$$

Então, se $m > n$, temos:

$$d_2(m) \leq d_2(m - 1) \leq \cdots \leq d_2(n).$$

Em particular, para $n > 1$, temos:

$$d_2(n) \leq d_2(1) = 1.$$

Portanto, $d_2(n) = 1$. □

Exemplo 6. *A representação decimal do número 26 na base 2 pode ser obtida a partir do Algoritmo da Divisão, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}
 26 &= 13 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= (6 \cdot 2 + 1) \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= 6 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= (3 \cdot 2 + 0) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= 3 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= (1 \cdot 2 + 1) \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$26 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow 26 = (11010)_2$$

Observamos que neste caso, denotamos a sequência $(1, 1, 0, 1, 0)$ por $(11010)_2$.

Observação 4. *O conjunto das sequências binárias é infinito porque para cada número natural é possível construir uma sequência de dígitos binários correspondente.*

Também podemos mostrar aos estudantes do ensino básico como obter a representação de um número natural na base 2 a partir de divisões sucessivas por 2. O exemplo anterior 6 utilizando as divisões sucessivas pode ser descrita de maneira mais didática da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l}
 26 & 2 \\
 \hline
 06 & 13 \\
 0 &
 \end{array}$$

Ou seja,

$$26 = 13 \times 2 \tag{1.1}$$

Prosseguindo com as divisões, dividindo 13 por 2, obtemos:

$$\begin{array}{r|l}
 13 & 2 \\
 \hline
 1 & 6
 \end{array}$$

Ou seja,

$$13 = 6 \times 2 + 1. \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} 26 &= (6 \times 2 + 1) \times 2 \\ &= 6 \times 2^2 + 1 \times 2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dividindo 6 por 2, temos:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Portanto,

$$6 = 3 \times 2 + 0. \tag{1.4}$$

Substituindo (1.4) em (1.3), obtemos:

$$\begin{aligned} 26 &= 3 \times 2 \times 2^2 + 1 \times 2 \\ &= 3 \times 2^3 + 1 \times 2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dividindo uma última vez pelo quociente anterior por 2, então temos:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Ou seja,

$$3 = 1 \times 2 + 1 \tag{1.6}$$

Por fim, substituindo (1.6) em (1.5)

$$\begin{aligned} 26 &= (1 \times 2 + 1) \times 2^3 + 1 \times 2 \\ &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 \\ &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0. \end{aligned}$$

Logo, a representação binária de 26 é composta pelo último quociente seguido dos restos, do último até o primeiro, respeitando essa ordem: 11010.

1.5 Conjuntos Enumeráveis

Ao estudarmos os conjuntos finitos, vimos que é possível enumerar seus elementos por meio de uma bijeção com um subconjunto dos números naturais. Já os conjuntos infinitos nem sempre é possível, porém existe uma divisão única de conjuntos infinitos chamados de enumeráveis.

Definição 10. *Um conjunto X é chamado de enumerável quando ele é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Neste contexto, f é conhecida como uma enumeração*

dos elementos de X . Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$, o conjunto X pode ser representado como $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Teorema 6. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X é um subconjunto finito, não nada há provar. Suponha que X seja infinito. Seja x_1 o menor elemento de X e considere

$$A_1 = X - \{x_1\}.$$

Como X é infinito, $A_1 \neq \emptyset$ e $A_1 \subset \mathbb{N}$, seja x_2 o menor elemento de $A_1 \subset X$. Dessa forma,

$$x_1 < x_2.$$

De forma indutiva, supondo que $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ com

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

definimos o conjunto

$$A_n = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Como X é infinito, então $A_n \neq \emptyset$. Assim, podemos definir recursivamente x_{n+1} como o menor elemento de A_n . Dessa forma, obtemos uma sequência infinita estritamente crescente

$$x_1 < x_2 < x_3 \dots$$

e afirmamos que

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

De fato, se existisse algum elemento $x \in X$ distinto de todos os x_n , então $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, x seria maior do que todos os elementos da sequência $\{x_n\}$, ou seja, uma cota superior para o conjunto infinito $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, contrariando o Corolário 6 e o Teorema 3.

□

Corolário 8. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetiva. Se Y é um conjunto enumerável então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. Se Y é finito, o resultado é imediato. Suponha, então que Y é um conjunto infinito enumerável, então existe uma bijeção

$$\varphi : Y \rightarrow \mathbb{N}.$$

Portanto, a composição

$$\varphi \circ f : X \rightarrow \mathbb{N}$$

é uma função injetiva. Logo, se considerarmos restrito a sua imagem, isto é,

$$\varphi \circ f : X \rightarrow (\varphi \circ f)(X),$$

temos uma bijeção de X em $(\varphi \circ f)(X) \subset \mathbb{N}$, o que garante que X é enumerável, conforme estabelecido pelo Teorema 6.

No caso particular em que $X \subsetneq Y$ basta considerar $f : X \rightarrow Y$ como sendo a aplicação inclusão, isto é, para todo $x \in X$, temos que $f(x) = x$. □

Corolário 9. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva. Se X é um conjunto enumerável, então Y também é.*

Demonstração. Considere para cada elemento $y \in Y$, podemos escolher um elemento $x_y \in X$ tal que

$$f(x_y) = y.$$

Essa escolha define uma função $g : Y \rightarrow X_Y$, onde associamos a cada y a $x_y = g(y)$ com a propriedade de que

$$f(g(y)) = f(x_y) = y$$

para todo $y \in Y$ e $X_Y = \{x_y; f(x_y) = y \text{ para algum } y \in Y\}$. Como consequência, g é injetiva. Logo, pelo Corolário 8, isso garante que Y é enumerável. □

Proposição 5. *Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Pelo Teorema 4, existe uma função

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X$$

injetiva, então

$$Im(f) = \{f(n); n \in \mathbb{N}\} \subseteq X.$$

e

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \rightarrow & Im(f) \\ n & \rightarrow & f(n) \end{array}$$

é uma bijeção e portanto $\{f(n); n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito enumerável de X . □

Observação 5. *Denotamos o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ como $P(\mathbb{N})$ (o conjunto das partes de $\mathbb{N}$).*

Proposição 6. *$P(\mathbb{N})$ é não enumerável.*

Demonstração. Cada subconjunto de $\mathbb{N}$ pode ser representado por uma sequência infinita de 0 e 1 da seguinte maneira: Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos uma sequência binária $a = (a_1, a_2, \dots)$, onde:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in A, \\ 0, & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Dessa forma, cada subconjunto de $\mathbb{N}$ corresponde a uma sequência de 0 e 1, e vice-versa. Ou seja, podemos identificar $P(\mathbb{N})$ com o conjunto de todas as sequências binárias infinitas.

Suponha por contradição que $P(\mathbb{N})$ seja enumerável. Isso significa que existe uma enumeração (ou seja, uma lista infinita) $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Cada subconjunto A_i pode ser representado por uma sequência binária correspondente $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \dots)$, onde $a_n^{(i)} \in \{0, 1\}$. Assim, podemos escrever todas essas sequências como uma matriz infinita, onde a sequência $a^{(i)}$ é a i -ésima linha:

$$\begin{array}{cccc} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & \dots \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & \dots \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

A partir dessa enumeração, construímos uma sequência $b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ que não pertence a nenhuma das sequências $a^{(i)}$, o que contradiz a suposição de que $P(\mathbb{N})$ é enumerável. Para construir b , definimos os termos b_n de forma que eles diferem dos elementos na diagonal da matriz:

$$b_n = (1 - a_n^{(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_n^{(n)} = 0, \\ 0, & \text{se } a_n^{(n)} = 1. \end{cases}$$

Em outras palavras, essa construção garante que a sequência b não pode coincidir com nenhuma sequência $a^{(i)}$ da enumeração, pois qualquer seja o n , $b_n \neq a_n^{(n)}$, logo $b \neq a_n$. Então, a sequência b corresponde a um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não está na enumeração $(A_1, A_2, \dots)$. Logo, isso contradiz a hipótese de que $P(\mathbb{N})$ é enumerável. O argumento utilizado nessa demonstração é conhecido como argumento de diagonalização de Cantor. $\square$

Observação 6. Denotamos o conjunto dos números reais como $\mathbb{R}$.

Teorema 7. $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Demonstração. Suponha que $\mathbb{R}$ seja enumerável, isso implica que $(0, 1)$ é enumerável. Observe que o conjunto dos números da forma:

$$\alpha_i = 0, \alpha_i^1 \alpha_i^2 \alpha_i^3 \dots$$

pertencem ao intervalo $(0, 1)$, com $\alpha_i^k \in \{0, 1\}$. Portanto, o conjunto

$$\{\alpha_i, i \in \mathbb{N}\}$$

é enumerável.

Podemos associar de forma biunívoca, cada número α_i a uma sequência a_i da seguinte maneira:

$$a_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3, \dots).$$

O que contraria o argumento da Proposição 6. Portanto o conjunto dos números reais não é enumerável. $\square$

1.6 Funções máximo e mínimo inteiro

A seguir apresentamos a definição das funções máximo e mínimo inteiro (ver [6] e [12]).

Definição 11. A função máximo inteiro é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = n, \text{ tal que } n \leq x < n + 1,$$

isto é, n é o maior inteiro menor ou igual a x .

A função mínimo inteiro é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \lceil x \rceil = m, \text{ tal que } m - 1 < x \leq m,$$

isto é, m é o menor inteiro maior ou igual a x .

Observação 7. As funções máximo e mínimo inteiro são também conhecidas como *piso* e *teto*, respectivamente.

A seguir, apresentamos os gráficos das funções mínimo e máximo inteiro.

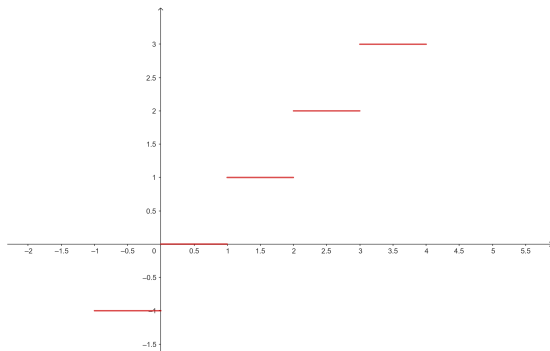


Figura 1.1: Função máximo inteiro
Fonte: Produzida pelas autoras.

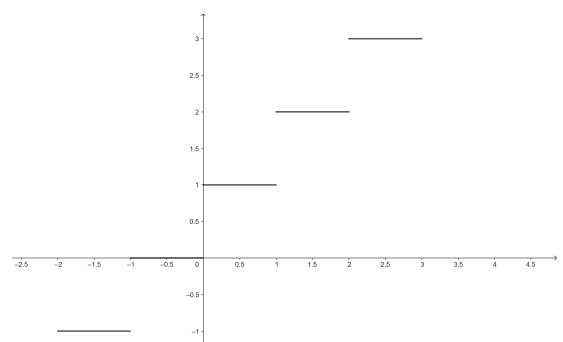


Figura 1.2: Função mínimo inteiro
Fonte: Produzida pelas autoras.

Proposição 7. *Seja n um número inteiro. As funções máximo e mínimo inteiro possuem as seguintes propriedades:*

- (i) $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$;
- (ii) $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \leq n < x + 1$;
- (iii) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$;
- (iv) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$;
- (v) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$;
- (vi) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Demonstração. (i) Por definição, temos:

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor = n &\Rightarrow n \leq x < n + 1 \\ &\Rightarrow n - 1 \leq x - 1 < n \\ &\Rightarrow x - 1 < n \end{aligned}$$

Além disso, $n \leq x$ e, portanto

$$x - 1 < n \leq x.$$

Por outro lado,

$$x - 1 < n \leq x \Rightarrow x < n + 1$$

Além disso, $n \leq x$ e portanto

$$n \leq x < n + 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = n.$$

(ii) Prova análoga ao item anterior.

(iii) Seja $x \in \mathbb{R}$ e pela definição da função piso:

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor = n &\Rightarrow n \leq x < n + 1 \\ &\Rightarrow -n \geq -x > -n - 1 \\ &\Rightarrow -n - 1 < -x \leq -n \\ \text{Definição da função teto} &\Rightarrow \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

(iv) Seja $x \in \mathbb{R}$ e pela definição da função teto:

$$\begin{aligned}
 \lceil x \rceil = n & \Rightarrow x \leq n < x + 1 \\
 & \Rightarrow -x \geq -n > -x - 1 \\
 & \Rightarrow -n - 1 < -x \leq -n \\
 \text{Definição da função piso} & \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil.
 \end{aligned}$$

(v) Seja $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, pela definição da função teto, temos:

$$\begin{aligned}
 \lceil x \rceil = m & \Leftrightarrow m - 1 < x \leq m, \text{ com } m \in \mathbb{Z} \\
 & \Leftrightarrow (m - 1) + n < x + n \leq m + n \\
 & \Leftrightarrow (m + n) - 1 < x + n \leq m + n \\
 & \Leftrightarrow \lceil x + n \rceil = m + n = \lceil x \rceil + n.
 \end{aligned}$$

(vi) Seja $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ e pela definição da função piso:

$$\begin{aligned}
 \lfloor x \rfloor = m & \Leftrightarrow m \leq x < m + 1, \text{ com } m \in \mathbb{Z} \\
 & \Leftrightarrow m + n \leq x + n < m + 1 + n \\
 & \Leftrightarrow \lfloor x + n \rfloor = m + n = \lfloor x \rfloor + n.
 \end{aligned}$$

□

A seguir, apresentamos exemplos práticos das funções máximo e mínimo inteiro.

Exemplo 7. Uma professora quer dividir 55 atividades entre 7 alunos de forma que ninguém receba mais atividades do que os outros. Qual o número máximo de atividades por aluno?

A função máximo inteiro se aplica para a solução deste problema, isto é, $\left\lfloor \frac{55}{7} \right\rfloor = \lfloor 7,8571 \dots \rfloor = 7$. Logo, serão distribuídas 7 atividades por aluno de modo a respeitar a condição imposta.

Exemplo 8. Um elevador suporta no máximo 480 kg. Suponha que cada pessoa pese em média 70 kg. Qual é o maior número de pessoas que podem entrar no elevador?

Do mesmo processo do exemplo anterior, ou seja, utilizando a função máximo inteiro, $\left\lfloor \frac{480}{70} \right\rfloor = \lfloor 6,8571 \dots \rfloor = 6$. Portanto, há um limite de 6 pessoas.

Exemplo 9. Para cobrir um chão de 47 m^2 com placas de $0,6 \text{ m}^2$ cada, qual é o mínimo número inteiro de placas necessárias?

Utilizando a função mínimo inteiro, isto é, $\left\lceil \frac{47}{0,6} \right\rceil = \lceil 78,3333 \dots \rceil = 79$. Logo, serão necessárias 79 placas.

Lema 4. Seja $k \in \mathbb{Z}$, então:

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = k.$$

Demonstração. Se k for um número par, então $k = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}$, daí temos:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{2m}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor \\ &= \lceil m \rceil + \lfloor m \rfloor \\ &= 2m \\ &= k. \end{aligned}$$

Por outro lado, se k for um número ímpar, então $k = 2m + 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = m + \frac{1}{2}$ com $m \in \mathbb{Z}$, daí temos:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor &= \left\lceil m + \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lfloor m + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= m + 1 + m \\ &= 2m + 1 \\ &= k. \end{aligned}$$

□

Lema 5. Se $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, então $(n + 1) - \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil \leq n - 1$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} n \geq 2 &\Rightarrow n + 1 \geq 3 \\ &\Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2 \\ &\Rightarrow -2 \geq -\left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil \\ &\Rightarrow (n+1) - 2 \geq (n+1) - \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil \\ &\Rightarrow n - 1 \geq (n+1) - \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

□

Essas funções são úteis em: arredondamentos de valores, divisão inteira, matemática discreta (divisibilidade e contagem).

Capítulo 2

Paradoxos e Contribuições ao Estudo do Infinito

No Capítulo 1, abordamos conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos, tais como conjuntos finitos e infinitos, enumerabilidade e a construção formal dos números naturais. Com base nessas noções, este capítulo tem como objetivo ampliar a compreensão do infinito a partir de contribuições históricas e paradoxos que marcaram a trajetória da matemática moderna, utilizando como referências [3], [4] [5] e [8].

2.1 Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

Uma das primeiras e mais conhecidas reflexões sobre o infinito feitas pelo ser humano remonta há aproximadamente 500 anos antes de Cristo, com o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, apresentado pelo filósofo grego Zenão de Eléia. Ele pode ser expresso da seguinte maneira: (ver [9])

Suponha que uma tartaruga, um dos animais mais lentos da natureza, desafie Aquiles, o lendário herói grego conhecido por sua velocidade, para uma corrida. Como Aquiles é significativamente mais rápido, a tartaruga recebe uma vantagem inicial, começando alguns metros à frente da linha de largada.

Segundo o paradoxo, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga, pois, ao atingir o ponto onde ela começou, ela já terá avançado um pouco mais. Quando ele alcançar essa nova posição, a tartaruga terá seguido adiante novamente. Esse processo se repetiria indefinidamente, mantendo sempre uma pequena distância entre os dois competidores.

Obviamente, no mundo real, sabemos que Aquiles ultrapassaria a tartaruga com facilidade. No entanto, isso não invalida o argumento de Zenão. A questão levantada pelo filósofo é que, para alcançar a tartaruga, Aquiles precisaria completar uma quantidade infinita de etapas, algo que, teoricamente, não poderia ser realizado dentro de um tempo finito.

Infelizmente, os escritos originais de Zenão se perderam, e o que conhecemos de seus paradoxos vem das obras de Aristóteles. Dessa forma, não podemos ter certeza absoluta sobre a formulação original. Aristóteles afirmou que Zenão queria provar que o movimento era impossível, mas essa interpretação não é unânime. Alguns filósofos acreditam que o paradoxo foi criado para questionar a ideia de que espaço e tempo podem ser infinitamente divididos. A intenção, nesse caso, seria demonstrar que a suposição de que o espaço pode ser fragmentado indefinidamente leva a uma conclusão absurda.

Para compreender melhor o paradoxo, podemos simplificá-lo com um exemplo numérico. Suponha que Aquiles corra exatamente duas vezes mais rápido que a tartaruga. Essa mudança não altera a essência do argumento. Além disso, vamos considerar que a tartaruga recebe uma vantagem inicial de dez metros e que Aquiles leva exatamente um segundo para percorrer essa distância e alcançar o ponto de partida dela. Com isso, a vantagem da tartaruga será reduzida para cinco metros. Como Aquiles corre a uma velocidade de dez metros por segundo e a tartaruga a metade dessa velocidade, a diferença entre eles continuará diminuindo. Dessa forma, Aquiles levará meio segundo para percorrer esses cinco metros, momento em que a tartaruga já terá avançado mais um pouco. A próxima etapa demandará um quarto de segundo, a seguinte um oitavo de segundo, e assim sucessivamente.

Posição	1	2	3	4	5	6	...
Tempo necessário (segundos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...

Se somarmos o tempo total decorrido até qualquer ponto da corrida, percebemos que, após duas etapas, o tempo acumulado é $\frac{3}{2}$ segundos após duas posições, $\frac{7}{4}$ segundos após três posições, $\frac{15}{8}$ após quatro, e assim por diante.

Posição	1	2	3	4	5	6	...
Tempo necessário (segundos)	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	...

Observamos então, que o tempo total tende cada vez mais a 2 segundos. No mundo real, Aquiles efetivamente alcançaria a tartaruga exatamente dentro desse intervalo de tempo, considerando as condições descritas.

Se Aquiles corresse a uma velocidade dez vezes maior que a da tartaruga, o desfecho seria similar. A única diferença seria que o tempo necessário para alcançar a tartaruga seria reduzido. De fato, pode-se demonstrar que, nesse caso, o tempo total gasto seria de $\frac{10}{9}$ segundos.

$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots = 1,1111\dots = \frac{10}{9}$$

À primeira vista, pode parecer que o paradoxo de Zenão pode ser facilmente resolvido com cálculos matemáticos simples. No entanto, uma análise mais cuidadosa revela

que a questão não é tão trivial. Zenão não afirmava que Aquiles jamais alcançaria a tartaruga em um tempo finito, ele sabia que isso aconteceria. O que ele realmente argumentava era que, para isso, Aquiles precisaria realizar uma sequência infinita de ações, o que, segundo ele, seria impossível.

2.2 Breve biografia de David Hilbert

A ideia de infinito tem intrigado filósofos e cientistas por séculos, talvez até milênios. Georg Cantor (1845–1918) desempenhou um papel essencial no desenvolvimento do entendimento matemático do infinito. Sua obra se baseia em um conceito simples, mas poderoso: dois conjuntos (mesmo que infinitos) têm o mesmo tamanho se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus elementos. Apesar de parecer intuitiva, essa noção traz implicações surpreendentes, por exemplo, um conjunto pode ter o mesmo tamanho que um de seus subconjuntos próprios, algo ilustrado pelo famoso paradoxo do Grande Hotel de Hilbert. Vamos explanar uma breve apresentação sobre o Paradoxo do Hotel de Hilbert, proposto pelo matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943).



Figura 2.1: David Hilbert.
Fonte: [5].

David Hilbert foi um matemático alemão de grande influência nos séculos XIX e XX. Ele teve um papel crucial na estruturação e formalização da matemática, especialmente nas áreas da teoria dos conjuntos e da geometria. Entre suas contribuições mais conhecidas está a formulação de 23 problemas desafiadores, que se tornaram uma referência para a matemática do século XX. Muitos desses problemas envolviam o conceito de infinito, que Hilbert explorava com profundidade.

Sua visão matemática era marcada por uma busca incessante por fundamentos sólidos e rigorosos, com especial atenção à lógica e ao estudo dos axiomas. Hilbert também contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos números, ajudando a compreender números transcendentais e a estruturar a axiomatização dos números reais. Suas ideias tiveram

um impacto duradouro na matemática moderna, influenciando gerações de estudiosos e estabelecendo bases para o entendimento do infinito.

Fiel às ideias de Cantor, Hilbert certa vez declarou: "Ninguém poderá nos privar do paraíso que Cantor criou para nós." Para ilustrar as ideias do infinito de Cantor, ele idealizou o famoso experimento mental conhecido como Hotel de Hilbert.

2.3 Hotel de Hilbert

Nesta seção, exploraremos os paradoxos e suas implicações, ligando-o aos fundamentos da Teoria dos Conjuntos e às ideias desenvolvidas nos capítulos anteriores (ver [4], [9]).

Paradoxo 1. *Imagine um hotel com infinitos quartos numerados $1, 2, 3, \dots$, todos ocupados. Se um novo hóspede chegar, como é possível acomodá-lo sem expulsar nenhum hóspede existente?*

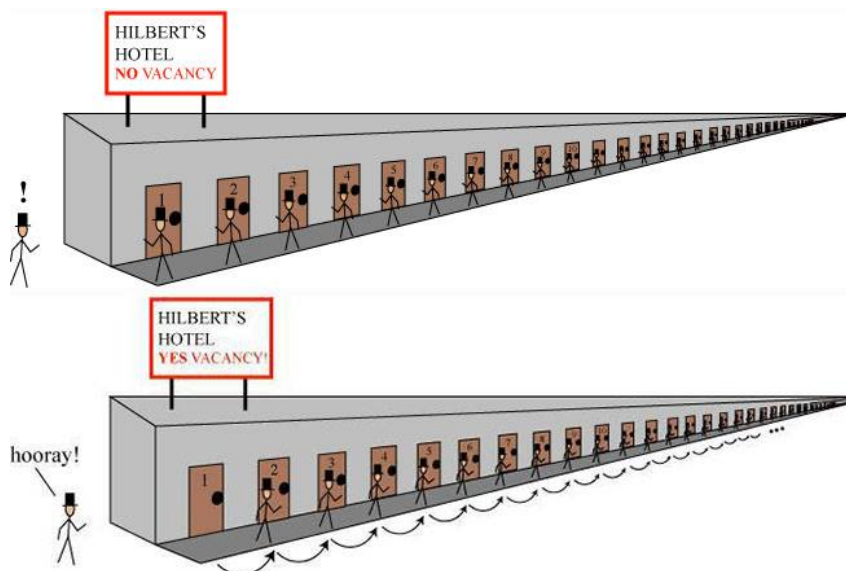


Figura 2.2: Ilustração do Hotel de Hilbert.

Fonte: [2]

Se um novo hóspede chega ao Hotel de Hilbert, onde todos os quartos infinitos estão ocupados, basta mover cada hóspede do quarto n para o quarto $n + 1$. Isso libera o quarto 1 para o novo hóspede.

Esse raciocínio funciona pois construímos uma bijeção entre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{N} - \{1\}$. Isso demonstra que um conjunto infinito enumerável pode "acomodar mais" sem crescer em tamanho, daí o nome paradoxo.

Paradoxo 2. *Pense que o hotel recebe um ônibus trazendo uma excursão com uma quantidade infinita de passageiros cada um identificado com um número natural $(1, 2, 3, \dots)$,*

o gerente do Hotel de Hilbert, embora o hotel já esteja totalmente ocupado, encontra uma solução criativa para acomodar todos os novos hóspedes.

Aparentemente, não há mais espaço. Todos os quartos estão ocupados. Porém o gerente, entendendo as propriedades do infinito, sugere que cada hóspede que está no quarto de número n será movido para o quarto de número $2n$. Com isso, todos os quartos com números pares passam a ser ocupados pelos hóspedes antigos, enquanto os novos hóspedes da excursão infinita podem ser acomodados nos quartos ímpares disponíveis.

Logo, esse paradoxo desafia a intuição e ressalta o jeito próprio dos conjuntos infinitos, cuja maneira permite a inclusão de infinitos adicionais sem alteração de sua estrutura cardinal.

Paradoxo 3. *Neste momento o Hotel de Hilbert já está completamente ocupado com todos os quartos numerados por $\mathbb{N}$ cheios. No entanto, chega uma excursão com infinitos ônibus, e cada ônibus leva infinitos passageiros, numerados por seus assentos: $1, 2, 3, \dots$.*

Para acomodar todos, o gerente criou uma regra: os passageiros do primeiro ônibus serão acomodados nos quartos cujos números seguem a forma 3^n , ou seja, potência de 3. Isto é, o passageiro do assento 1 será acomodado no quarto de número 3, o passageiro do assento 2 será acomodado no quarto de número 9, o passageiro do assento 3 será acomodado no quarto de número 27 e etc.

Já os passageiros do segundo ônibus vão para quartos numerados por potências de 5, ou seja, 5^n , isto é, o passageiro de assento 1 será acomodado no quarto de número 5, o passageiro do assento 2 será acomodado no quarto de número 25, o passageiro do assento 3 será acomodado no quarto de número 125 e assim por diante.

Assim, O mesmo ocorre com os demais ônibus: o terceiro usa potências de 7, o quarto de 11, o quinto de 13 e assim por diante. Portanto, cada ônibus recebe como base um número primo diferente. Logo, dessa forma, cada passageiro teria seu lugar garantido sem invadir o espaço do outro.

A dúvida que pode surgir é: será que dois passageiros de ônibus distintos podem ser enviados ao mesmo quarto? A resposta é não, isso se deve a escolha das potências de primos diferentes, isto é, suponha que dois hóspedes diferentes fossem parar no mesmo quarto, um vindo do ônibus com base p outro do ônibus com base q , com $p \neq q$.

Isso implicaria que $p^n = q^m$ para certos n, m o que representaria que p^n seria divisível por q ou q^m seria divisível por p . Porém como p e q são números primos distintos, isso é impossível, por exemplo, 3^2 e 5^3 , não existe nenhum número que seja potência de 3 e também potência de 5.

Portanto, a estratégia assegura que nenhum quarto seja ocupado por mais de um hóspede.

Após acomodar todos os infinitos passageiros de todos os infinitos ônibus, ainda sobram quartos vazios, pois os passageiros foram alocados apenas em quartos cujos números são potências de primos, isto é, p^n .

Contudo, muitos números naturais não são potências puras de primos, como os números: $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$ e etc. Portanto, isso significa que os quartos múltiplos de dois ou mais primos ao mesmo tempo não foram ocupados. Logo, esses quartos permanecem desocupados, o que mostra que mesmo após infinitas alocações, ainda há espaço infinito sobrando.

2.4 Leopold Kronecker: o matemático finitista

Leopold Kronecker nasceu em 1823 na cidade de Liegnitz, próxima a Breslau (atualmente Wrocław, na Polônia). Estudou inicialmente com Kummer, durante sua juventude, no ginásio de sua cidade natal. Mais tarde, ingressou na Universidade de Berlim, onde teve aulas com grandes nomes da matemática como Jacobi, Dirichlet, Steiner e novamente Kummer, que se tornou uma figura decisiva em sua formação.



Figura 2.3: Leopold Kronecker (1823 - 1891).

Fonte: [5].

Por algum tempo, Kronecker afastou-se da vida acadêmica para atuar no setor financeiro, onde teve bastante sucesso, acumulando uma considerável fortuna entre os anos de 1844 e 1855, devido à sua notável habilidade nos negócios. Em 1855, retornou à vida acadêmica e mudou-se definitivamente para Berlim, onde passou a lecionar na universidade local a partir de 1861.

Nesse período, formou-se um trio importante na matemática alemã: Kummer, Weierstrass e o próprio Kronecker, todos atuando na Universidade de Berlim. Kronecker especializou-se em áreas como teoria das equações, funções elípticas e teoria dos números algébricos. Sua visão filosófica da matemática, no entanto, marcou fortemente sua trajetória: era um defensor convicto do finitismo. Rejeitava o uso de entidades infinitas e criticava duramente a Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor, a quem se opôs frontalmente.

Para Kronecker, apenas os números inteiros tinham existência matemática legítima, sendo todo o restante uma construção humana — uma visão sintetizada em sua

famosa frase: "Deus fez os números inteiros; todo o resto é obra do homem." Por essa razão, considerava os métodos de Cantor mais próximos da teologia do que da matemática rigorosa, e acreditava que a matemática deveria se restringir a métodos finitos derivados dos inteiros.

Leopold Kronecker faleceu em Berlim no ano de 1891, deixando um legado marcado por grandes contribuições algébricas e uma forte influência na discussão sobre os fundamentos da matemática.

2.5 A trajetória e contribuições de Georg Cantor

Georg Cantor (1845-1918) foi um matemático nascido em São Petersburgo, Rússia, e posteriormente estabelecido na Alemanha. Inicialmente, dedicou-se ao estudo da teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas, áreas que o levaram a aprofundar os fundamentos da análise matemática. A partir dessas investigações, desenvolveu uma nova concepção dos números irracionais, baseada em sequências convergentes de números racionais, diferenciando-se da abordagem de Richard Dedekind.

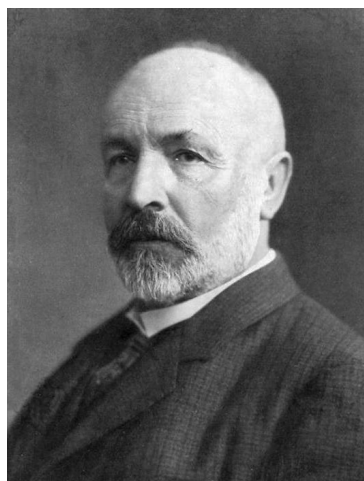


Figura 2.4: Georg Cantor (1845 - 1918).
Fonte: [5].

Em 1874, Cantor iniciou seus estudos sobre a teoria dos conjuntos, introduzindo uma nova visão sobre o infinito. Ele demonstrou que existem diferentes tamanhos de infinito e desenvolveu a teoria dos números transfinitos, estabelecendo conceitos como cardinalidade e ordinais transfinitos, fundamentais para a matemática moderna. Apesar da originalidade de seu trabalho, suas ideias enfrentaram forte resistência, principalmente de Leopold Kronecker, que rejeitava a teoria dos conjuntos e dificultou a ascensão acadêmica de Cantor, impedindo que ele conseguisse um cargo na Universidade de Berlim.

Além de seu trabalho matemático, Cantor tinha grande interesse pela teologia medieval, o que influenciou sua visão sobre o infinito e a continuidade. Apesar da oposição

que enfrentou, sua teoria tornou-se essencial para áreas como análise, topologia e lógica matemática. Nos últimos anos, sofreu crises depressivas e passou períodos em um hospital psiquiátrico em Halle, onde faleceu em 1918. Hoje, suas contribuições são reconhecidas como um marco na história da matemática.

2.6 O Conjunto de Cantor

Nesta seção, abordamos o processo de construção do Conjunto de Cantor, bem como algumas de suas propriedades notáveis, como o fato de ser um conjunto infinito, não enumerável e formado por um procedimento simples, mas profundamente contraintuitivo.

Definição 12. *O conjunto de Cantor K é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$, construído a partir da remoção progressiva de intervalos abertos de acordo com o seguinte processo: (ver [8]).*

- (i) **Passo inicial:** Começa-se com o intervalo $[0, 1]$ e remove-se o terço central aberto, ou seja, o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. O que sobra é a união dos dois intervalos:



Figura 2.5: Nível 1.
Fonte: [8].

$$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

- (ii) **Passo seguinte:** Em cada um dos intervalos restantes $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, remove-se novamente o terço central aberto. Isso resulta nos intervalos:



Figura 2.6: Nível 2.
Fonte: [8].

$$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

- (iii) **Repetição:** Este processo de remoção do terço central aberto é repetido indefinidamente em cada intervalo resultante.

No final desse processo infinito, o conjunto K é formado pelos pontos do intervalo $[0, 1]$ que nunca são removidos. Este é o **conjunto de Cantor**,

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Uma outra forma de abordar é geometricamente. Associamos n iterações da construção do Conjunto de Cantor em termos de níveis.

O Conjunto de Cantor também conhecido como "Poeira de Cantor" é o primeiro objeto reconhecido como Fractal. Foi desenvolvido pelo matemático Georg Cantor e é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário $[0, 1]$.

Vejamos a figura abaixo da representação do conjunto de Cantor: (ver [11])



Figura 2.7: O Conjunto de Cantor.
Fonte: [11].

Para a construção seguimos os passos propostos na Definição 12, isto é,

- No nível 0, consideramos o intervalo fechado $[0, 1]$.
- No nível 1, removemos a parte central $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, restando dois intervalos: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$.
- No nível 2, removemos o terço central de cada intervalo restante, resultando em quatro intervalos: $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$, $[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$.
- No nível 3, repetimos o processo, removendo os terços centrais de cada um dos quatro intervalos do nível anterior, o que gera oito novos intervalos: $[0, \frac{1}{27}]$, $[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}]$, $[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}]$, $[\frac{26}{27}, 1]$.

Esse processo continua indefinidamente, sempre removendo o terço central de cada intervalo restante. Vejamos a tabela:

Iterações	Quantidade de Segmentos
0	1
1	2
2	4
3	8
...	...

Tabela 2.1: Iterações - Conjunto de Cantor

Ao observar os números $(2, 4, 8, \dots)$, que representam a quantidade de segmentos no Conjunto de Cantor em cada etapa de sua construção, percebe-se que essa sequência numérica apresenta uma característica importante: a razão entre um termo e o anterior (a partir do segundo termo) é sempre constante. Esse padrão caracteriza uma Progressão Geométrica (PG), cuja razão é igual a 2.

Em outras palavras, a cada nova iteração do processo de construção do Conjunto de Cantor, o número de segmentos se multiplica por 2. Dessa forma, para determinar quantos segmentos existirão após um determinado número de iterações (nível n), pode-se utilizar a fórmula do termo geral de uma PG.

Proposição 8. *O Conjunto de Cantor K não é enumerável.*[3]

Demonstração. Seja $k \subset [0, 1]$, definido como o conjunto dos números cujas expansões ternárias contêm apenas os dígitos $\{0, 2\}$. Então, qualquer $p \in K$, pode se escrito por:

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i},$$

com $x_i \in \{0, 2\}$.

Definimos uma função $f : K \rightarrow [0, 1]$ da seguinte forma: $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \{0, 2\}$ a uma sequência de dígitos ternários de p . Agora construímos uma nova sequência $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots) \in \{0, 1\}$, em que:

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i = 0 \\ 1, & \text{se } x_i = 2. \end{cases}$$

Com isso, definimos:

$$f(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_i}{2^i},$$

$f(p) \in [0, 1]$.

Para mostrar que f é sobrejetiva, temos $a \in [0, 1]$ um número real qualquer. Podemos escrever a expansão binária assim:

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i},$$

$y_i \in [0, 1]$.

Com base nisso, definimos uma nova sequência $(x_i) \in \{0, 2\}$ como:

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 0, & \text{se } y_i = 0 \\ 2, & \text{se } y_i = 1 \end{cases}$$

Essa nova sequência estabelece um ponto $p \in K$ pois todos os $x_i \in \{0, 2\}$. Aplicando a

função f a esse ponto p , temos:

$$f(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} = a.$$

Portanto, para todo $a \in [0, 1]$, existe $p \in K$. Isso implica que $f(p) = a$, então f é sobrejetiva.

Do modo que $f : K \rightarrow [0, 1]$ é sobrejetiva, então:

$$|K| \geq |[0, 1]|.$$

No entanto, como $K \subset [0, 1]$, temos $|K| \leq |[0, 1]|$. Logo,

$$|K| = |[0, 1]|$$

Como $[0, 1]$ não é enumerável, concluímos que K também não é enumerável. $\square$

Capítulo 3

Jogos de Diagonalização

Noga Alon e colaboradores, em [1], analisam diferentes variações de um jogo combinatório inspirado no argumento da diagonalização de Cantor. A dinâmica envolve dois participantes, chamados Kronecker e Cantor, nomes que remetem a conhecida controvérsia histórica entre Leopold Kronecker e Georg Cantor. Kronecker, crítico das ideias de Cantor sobre o infinito, chegou a desqualificá-lo publicamente, referindo-se a ele como um "charlatão científico".

No jogo, Kronecker tem uma lista de m sequências binárias, cada um com n elementos, isto é,

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(n)}) \\ v_2 &= (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_2^{(n)}) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ v_m &= (v_m^{(1)}, v_m^{(2)}, \dots, v_m^{(n)}), \end{aligned}$$

sendo $v_i^{(j)} \in \{0, 1\}$ e $m < 2^n$.

O objetivo de Cantor é encontrar uma sequência binária que seja diferente de todas as sequências da lista de Kronecker. Cantor, no entanto, não tem acesso direto às sequências de Kronecker, mas pode fazer perguntas específicas, como:

Qual é o j -ésimo dígito binário da sequência v_i ? Ou seja, quem é $v_i^{(j)}$?

A questão central é determinar o número mínimo de perguntas que Cantor precisa fazer para alcançar seu objetivo. Além disso, qual é a vantagem de Cantor escolher suas perguntas de forma adaptativa, ou seja, baseando-se nas respostas anteriores de Kronecker.

O caso especial em que $m = n$ pode ser resolvido pelo método da diagonalização de Cantor, que requer n perguntas, sem a necessidade de adaptação. Neste caso, as

sequências são descritas por:

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(n)}) \\ v_2 &= (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_2^{(n)}) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ v_n &= (v_n^{(1)}, v_n^{(2)}, \dots, v_n^{(n)}). \end{aligned}$$

As perguntas feitas por Cantor são: "Quais são os dígitos $v_1^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_n^{(n)}$?" Neste caso, a sequência escolhida por Cantor, diferente de $v_1, v_2, \dots, v_n$ é dada por

$$u = (1 - v_1^{(1)}, 1 - v_2^{(2)}, \dots, 1 - v_n^{(n)}).$$

Exemplo 10. Considere que a lista de Kronecker é dada por

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 0) = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_1^{(3)}), \\ v_2 &= (0, 1, 1) = (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_2^{(3)}) \\ v_3 &= (1, 1, 1) = (v_3^{(1)}, v_3^{(2)}, v_3^{(3)}). \end{aligned}$$

Aplicando a estratégia de Cantor, podemos escolher u conhecendo $v_1^{(1)}, v_2^{(2)}$ e $v_3^{(3)}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u &= (1 - v_1^{(1)}, 1 - v_2^{(2)}, 1 - v_3^{(3)}) \\ &= (1 - 0, 1 - 1, 1 - 1) \\ &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Ou seja, com 3 perguntas, Cantor foi capaz de apresentar uma sequência u que não estava na lista de Kronecker.

Nosso objetivo é adaptar o argumento de diagonalização de Cantor descrito anteriormente para obter o número mínimo de perguntas necessárias no cenário adaptativo.

A diagonalização trata de um dos resultados mais interessantes e simples da teoria dos conjuntos, que é utilizado para mostrar que nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo "tamanho" ou, mais precisamente, a mesma cardinalidade. Essa técnica foi desenvolvida por Georg Cantor (ver Proposição 6).

O Jogo Cantor-Kronecker se baseia em variantes finitas da diagonalização de Cantor, uma técnica usada na teoria da complexidade para separar classes de problemas computacionais. No trabalho citado, Vyas e Williams introduzem uma variante específica chamada problema da Cadeia Faltante. A ideia principal dessa ferramenta é minimizar o número de consultas necessárias para identificar uma entrada específica associada a uma

sequência que não está na lista.

O jogo Cantor-Kronecker envolve dois participantes:

- (i) Kronecker: Mantém um conjunto de sequências $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, onde cada sequência v_i é binária e tem comprimento n .
- (ii) Cantor: Deve produzir uma sequência binária u de comprimento n , diferente de todas as sequências v_i do conjunto V .

Observe que para que o jogo seja bem posto, é necessário que existam sequência de tamanho n que não estejam em V , ou seja, a cardinalidade de V , dada por m , tem que ser menor que 2^n . Para atingir seu objetivo, Cantor pode fazer perguntas a Kronecker, no formato:

Qual é o j -ésimo dígito binário da sequência número i ?

onde $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq i \leq m$.

Logo, o objetivo de Cantor é minimizar o número de perguntas necessárias para determinar u e o de Kronecker é maximizar o número de perguntas necessárias para Cantor atingir sua meta.

No jogo vamos analisar a versão adaptativa onde Cantor decide sua próxima pergunta com base nas respostas anteriores de Kronecker e é possível ajustar a estratégia ao longo do jogo.

Teorema 8. *Seja $g(n, m)$ o menor número de perguntas que Cantor precisa fazer quando ele pode usar estratégias adaptativas. Então,*

$$g(n, m) = \begin{cases} m, & \text{se } m \leq n, \\ 2m - n, & \text{se } n < m < 2^n. \end{cases}$$

O resultado para $m = n$ foi discutido anteriormente e a resposta foi dada pelo processo de diagonalização. O caso $m < n$ é respondido de forma similar. De fato, considere a lista de sequências descritas a seguir:

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(n)}) \\ v_2 &= (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_2^{(n)}) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_m &= (v_m^{(1)}, v_m^{(2)}, \dots, v_m^{(n)}). \end{aligned}$$

Neste caso, a sequência u escolhida por Cantor, diferente de $v_1, v_2, \dots, v_m$ pode ser dada por

$$u = (1 - v_1^{(1)}, 1 - v_2^{(2)}, \dots, 1 - v_m^{(m)}, \overbrace{0, \dots, 0}^{(n-m) \text{ termos}})$$

ou

$$u = (1 - v_1^{(1)}, 1 - v_2^{(2)}, \dots, 1 - v_m^{(m)}, \overbrace{1, \dots, 1}^{(n-m) \text{ termos}})$$

Note que $u \neq v_i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Observe que os últimos $n - m$ termos da sequência podem ser escolhidos quaisquer. Em resumo, quando o número de sequências m é menor ou igual ao comprimento das sequências n , o número mínimo de perguntas necessário para Cantor determinar u é exatamente m .

Exemplo 11. Considere que a lista de Kronecker é dada por

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 0, 0) = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, v_1^{(4)}), \\ v_2 &= (0, 1, 1, 1) = (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_2^{(3)}, v_2^{(4)}), \\ v_3 &= (1, 1, 1, 1) = (v_3^{(1)}, v_3^{(2)}, v_3^{(3)}, v_3^{(4)}). \end{aligned}$$

Note que pelo argumento anterior, Cantor pode escolher u conhecendo $v_1^{(1)}$, $v_2^{(2)}$ e $v_3^{(3)}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= (1 - v_1^{(1)}, 1 - v_2^{(2)}, 1 - v_3^{(3)}, 0) \\ &= (1 - 0, 1 - 1, 1 - 1, 0) \\ &= (1, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Outra possibilidade para u usando a estratégia de diagonalização seria $u^{(4)} = 1$, isto é,

$$u = (1, 0, 0, 1).$$

Resta analisar a estratégia para o caso $m > n$. Inicialmente, consideramos o caso $m = n + 1$, com $n \geq 2$.

Para $n = 2$, isso implica $m = 2 + 1 = 3$, daí temos:

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) \\ v_2 &= (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}) \\ v_3 &= (v_3^{(1)}, v_3^{(2)}) \end{aligned}$$

O objetivo é encontrar $u \neq v_1, v_2$ e v_3 . Analisando os primeiros dígitos binários de v_1, v_2 e v_3 , ou seja, $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ e $v_3^{(1)}$, temos que ter 2 dígitos binários iguais a ϵ . Cantor define o primeiro dígito binário de u , como sendo:

$$u^{(1)} = 1 - \epsilon$$

e removemos 2 sequências dentre v_1, v_2 e v_3 cuja a primeira entrada seja ϵ , sobra 1 sequência dentre v_1, v_2 e v_3 e descrevemos o seguinte dígito binário utilizamos o processo de di-

agonalização, isto é, se a sequência que sobra for $v_k = (v_k^{(1)}, v_k^{(2)})$, então Cantor pergunta qual o segundo dígito binário de v_k e define a sequência u da seguinte forma:

$$u = (1 - \epsilon, 1 - v_k^{(2)}).$$

Dessa forma, foram necessárias $4 = 2 \cdot 3 - 2$ perguntas.

No caso $m = n + 1$, com $n \geq 2$, procedemos de forma similar ao caso $n = 2$ e $m = 3$.

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(n)}) \\ v_2 &= (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_2^{(n)}) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ v_{n+1} &= (v_{n+1}^{(1)}, v_{n+1}^{(2)}, \dots, v_{n+1}^{(n)}) \end{aligned}$$

Analisando os primeiros dígitos binários $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_{n+1}^{(1)}$ de $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, existem, pelo Princípio da Casa dos Pombos, ao menos $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dígitos binários iguais a ϵ . Escolhemos o primeiro dígito binário de u como sendo $u^{(1)} = 1 - \epsilon$ e removemos da lista $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$ sequências que possuem o primeiro dígito binário ϵ . Restam $n + 1 - \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$ sequências e portanto sobram menos que $n - 1$ sequências na lista, como mostramos no Lema 5.

Dessa forma, Cantor tem que escolher $n - 1$ dígitos binários de u diferente de no máximo $n - 1$ sequências. Logo, o processo de diagonalização, se aplica.

Para demonstrar o caso geral, $m > n$, utilizamos o método de indução finita no tamanho das sequências, n , ou seja, assumimos que o resultado é válido para as sequências binárias com $n - 1$ dígitos, e consideramos m sequências binárias com n dígitos,

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(n)}) \\ v_2 &= (v_2^{(1)}, \dots, v_2^{(n)}) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ v_m &= (v_m^{(1)}, \dots, v_m^{(n)}) \end{aligned}$$

Seja k o número de sequências binárias entre $v_1, \dots, v_m$ com o primeiro dígito 0 (zero) e s com o primeiro dígito 1. Como $v_k^{(1)} \in \{0, 1\}$, com $k \in \{1, \dots, m\}$, então

$$k + s = m.$$

Logo, existem ao menos $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ sequências binárias com o primeiro dígito iguais. De

fato, caso contrário, teríamos:

$$k < \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \leq \frac{m}{2} \text{ e } s < \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \leq \frac{m}{2} \implies k + s < m$$

o que seria uma contradição.

Afirmção 1. *Existe um número inteiro x que satisfaz:*

(i) $1 \leq x \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$;

(ii) $n - 1 \leq m - x \leq 2^{n-1}$.

Demonstração. (da Afirmção) Separamos em dois casos:

Caso 1: $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil > n - 1$. Considerando $x = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$, segue do Lema 4 que

$$m - x = m - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

e como

$$m < 2^n \implies \frac{m}{2} < 2^{n-1} \implies \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < 2^{n-1},$$

logo,

$$n - 1 < m - x < 2^{n-1}$$

e portanto satisfaz (ii). Além disso,

$$m > n \geq 2 \implies \frac{m}{2} > 1 \implies 1 \leq x = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

Portanto, satisfaz (i).

Caso 2: $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \leq n - 1$. Consideremos

$$x = m - n + 1 \implies m - x = n - 1.$$

Portanto,

$$n - 1 = m - x < 2^{n-1},$$

já que $x < 2^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a condição (ii) é satisfeita.

Além disso, $m > n$, então $m - n > 0$, o que implica que:

$$x = m - n + 1 > 1.$$

Além disso,

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \leq n - 1 \implies -\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq -(n - 1)$$

Portanto,

$$m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq m - (n - 1)$$

Logo,

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \geq x.$$

O que confirma que a condição (i) é satisfeita. Concluindo assim a prova da Afirmação. $\square$

Considerando x satisfazendo (i) e (ii), Cantor inicia perguntando o primeiro dígito de cada uma das sequências:

$$v_1, v_2, \dots, v_{2x-1}$$

e assim foram feitas $2x - 1$ perguntas.

Observe que é possível tais escolhas já que

$$2x - 1 \leq m.$$

De fato, se m é par, temos

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2} \Rightarrow 2x \leq m \Rightarrow 2x - 1 \leq m - 1 < m.$$

Se m é ímpar:

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = 2 \cdot \frac{(m-1)}{2} = m-1$$

Portanto,

$$2x \leq m-1 \Rightarrow 2x-1 \leq m-2 < m.$$

Nesta lista deve existir um dígito binário $\epsilon \in \{0, 1\}$ tal que ao menos x sequências tenham o primeiro dígito binário igual a ϵ . Cantor define então,

$$u_1^{(1)} = 1 - \epsilon,$$

removendo do conjunto V exatamente x sequências que tenham primeira entrada ϵ , e define V' o conjunto dos $m-x$ sequências restantes restritos as $n-1$ últimas coordenadas. Portanto, $n-1 \leq m-x < 2^{n-1}$ e por hipótese de indução, temos:

$$g'(m-x, n-1) = 2(m-x) - (n-1), \text{ se } m-x \geq n-1$$

Como já tinha sido feitas $2x-1$ perguntas, então

$$\begin{aligned} g(n, m) &= 2x-1 + 2(m-x) - (n-1) \\ &= 2x-1 + 2m-2x-n+1 \\ &= 2m-n. \end{aligned}$$

Exemplo 12. Considere o conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ com $m = 7$ seqüências binárias de comprimento $n = 4$ descritas a seguir

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 0, 0) & v_2 &= (0, 0, 1, 1) & v_3 &= (0, 1, 0, 1) & v_4 &= (0, 1, 1, 0) \\ v_5 &= (1, 0, 1, 0) & v_6 &= (1, 1, 0, 1) & v_7 &= (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Cantor consulta o primeiro dígito binário das seqüências de V , ou seja, $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1$, daí temos que $\epsilon = 0$. Com isso, Cantor define o primeiro dígito binário de u , sendo $u^{(1)} = 1 - \epsilon$, então temos:

$$u^{(1)} = 1 - 0 = 1,$$

assim o primeiro dígito é 1.

Reduzindo o conjunto V , Cantor remove todas as seqüências de V cujo o primeiro dígito binário seja $\epsilon = 0$, então restam as seqüências $W = (w_1, w_2, w_3)$ abaixo:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 1, 0, 1) \\ w_2 &= (1, 0, 1, 0) \\ w_3 &= (1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Então, Cantor trabalha apenas com W , onde cada seqüência $n - 1 = 3$ dígitos binários restantes:

$$\begin{aligned} w'_1 &= (1, 0, 1) = (w_{11}, w_{12}, w_{13}) \\ w'_2 &= (0, 1, 0) = (w_{21}, w_{22}, w_{23}) \\ w'_3 &= (1, 1, 1) = (w_{31}, w_{32}, w_{33}). \end{aligned}$$

Logo, utilizamos o processo de diagonalização de Cantor, isto é,

$$\begin{aligned} v^{(2)} &= 1 - w_{11}, \\ v^{(3)} &= 1 - w_{22}, \\ v^{(4)} &= 1 - w_{33}. \end{aligned}$$

Portanto, $u = (1, 0, 0, 0) \notin V$.

Exemplo 13. Suponha que temos um conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ com $m = 7$ seqüências binárias de comprimento $n = 3$, ou seja,

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 0) & v_2 &= (0, 0, 1) & v_3 &= (0, 1, 0) & v_4 &= (0, 1, 1) \\ v_5 &= (1, 0, 0) & v_6 &= (1, 0, 1) & v_7 &= (1, 1, 0) \end{aligned}$$

Cantor, consulta o primeiro dígito binário das seqüências de V , isto é, $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$, daí temos que $\epsilon = 0$, pois aparece no mínimo 4 vezes. Com isso, Cantor define o primeiro

dígito binário de u , sendo $u = 1 - \epsilon$, então temos:

$$u^{(1)} = 1 - 0 = 1,$$

assim o primeiro dígito binário começa por 1.

Reduzindo o conjunto V , Cantor remove todas as sequências de V cujo o primeiro dígito binário seja $\epsilon = 0$, então restam as sequências $W = (w_1, w_2, w_3)$ abaixo:

$$w_1 = (1, 0, 0)$$

$$w_2 = (1, 0, 1)$$

$$w_3 = (1, 1, 0)$$

Então, Cantor trabalha apenas com W , onde cada sequência $n - 1 = 2$ dígitos binários restantes:

$$w'_1 = (0, 0)$$

$$w'_2 = (0, 1)$$

$$w'_3 = (1, 0)$$

Entretanto, não podemos utilizar o processo da diagonalização de Cantor, pois precisamos reduzir novamente a sequência. Daí, consultamos o segundo dígito binário de W , isto é, $(0, 0, 1)$, assim $\epsilon = 0$, pois aparece no mínimo 2 vezes. Logo, o segundo dígito binário de u é:

$$u^{(2)} = 1 - 0 = 1.$$

Reduzindo o conjunto W , Cantor remove todas as sequências de W cujo o segundo dígito binário seja $\epsilon = 0$, então resta a sequência $T = (t_1)$ abaixo:

$$t_1 = (1, 0).$$

Assim, consultamos o terceiro dígito binário de T , temos $\epsilon = 0$. Logo, o terceiro dígito binário de u é:

$$u(3) = 1 - 0$$

Portanto, $u = (1, 1, 1) \notin V$.

Considere $m = 2^n - 1$, ou seja, só existe uma sequência que não está na lista. Este é o caso em que Cantor deve fazer o maior número de perguntas para obter a sequência que não está na lista.

Seja b_j o número de perguntas feitas por Cantor referentes as coordenadas j de algumas sequências v_i . Kronecker escolhe suas respostas garantindo que para cada j , as

respostas sobre os primeiros dígitos nas posições j são balanceadas, isto é, no máximo $\left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil$ das respostas sejam 0 e no máximo $\left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil$ das respostas sejam 1.

Considerando u a sequência produzido por Cantor. Para cada $1 \leq j \leq n$, existe no máximo $\left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil$ sequências v_i conhecidos sendo diferentes de u na coordenada j . Portanto, ao todo existe no máximo

$$\sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil$$

sequências v_i que são conhecidos por Cantor diferentes de u . Note que:

$$\left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{b_j}{2}, & \text{se } b_j \text{ é par} \\ \frac{b_j + 1}{2}, & \text{se } b_j \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Então,

$$\sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil \leq \sum_{j=1}^n \frac{b_j + 1}{2}$$

Para garantir que u seja de fato diferente de cada v_i , esse número precisa ser pelo menos m , isto é,

$$m \leq \sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil.$$

Logo,

$$\begin{aligned} m &\leq \sum_{j=1}^n \frac{b_j + 1}{2} \\ 2m &\leq \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^n 1 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n b_j \geq 2m - n. \end{aligned}$$

Exemplo 14. Em um jogo da diagonalização de Cantor, considere sequências com 3 dígitos (valores 0 ou 1).

Isso significa que o conjunto total de sequências é:

$$2^n = 2^3 = 8.$$

Suponha que Kronecker fornece 7 sequências, isto é:

$$m = 2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7.$$

Assim, Cantor precisa fazer um número mínimo de perguntas b_j de tal modo que

a soma total das perguntas satisfaça:

$$\sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{b_j}{2} \right\rceil \geq 2m - n = 2 \cdot 7 - 3 = 11$$

Logo, segue o mesmo raciocínio do Exemplo 13.

Capítulo 4

Uma proposta para o ensino da diagonalização

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta didática baseada no argumento de diagonalização desenvolvida por Georg Cantor. A intenção é mudar esse conceito para uma abordagem acessível e significativa no contexto da Educação Básica, por meio da elaboração de um jogo matemático. A atividade proposta busca favorecer uma compreensão mais intuitiva e significativa de conceitos como conjuntos não enumeráveis, infinito e cardinalidade, ao mesmo tempo em que promove a articulação entre o rigor lógico ao lúdico presente na dinâmica do jogo. Além disso, promover a aprendizagem por meio da problematização e da investigação, permitindo que os alunos entrem em contato com as ideias principais da matemática de forma dinâmica e contextualizada.

Como parte da proposta pedagógica deste trabalho, foi desenvolvida uma atividade didática voltada para a construção e compreensão de conceitos fundamentais da matemática, como a noção de infinito, ao sistema binário de numeração e ao argumento de diagonalização de Georg Cantor. A atividade foi pensada com base em uma abordagem investigativa e lúdica, promovendo o envolvimento ativo dos estudantes na construção do conhecimento.

A atividade foi organizada tendo os seguintes objetivos:

- Promover a compreensão do sistema binário de numeração, favorecendo a conversão entre diferentes bases numéricas;
- Estimular a reflexão sobre a extensão do conjunto dos números naturais;
- Desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de observação de padrões;
- Introduzir, de forma acessível e concreta, o argumento de diagonalização de Cantor, associando-o à noção de conjuntos infinitos não enumeráveis;
- Estimular a aprendizagem por meio de recursos lúdicos, como o uso do jogo de dominó com números binários.

4.1 Atividade Proposta

A atividade inicia com perguntas investigativas simples: os alunos serão solicitados a listar cinco números naturais e refletir se seria possível listar todos os números naturais. Essa questão inicial serve como ponto de partida para introduzir a ideia de infinito enumerável, mostrando que, embora os números naturais não tenham fim, é possível listá-los de forma ordenada (exemplo de infinito enumerável).

Na etapa seguinte, apresentamos aos alunos como representar um número natural na base 2, como proposto no Exemplo 6 e em seguida, encorajamos os alunos a escreverem alguns números decimais (como 5, 10, 23 e 50) na base binária.

Compreendida a representação dos números naturais na base 2 por meio de dígitos 0 e 1, podemos nesta ocasião ampliar essa ideia para o estudo de sequência. Essa atividade reforça o conteúdo de sistema de numeração e serve como preparação para a próxima fase: a construção de uma tabela contendo quatro sequências binárias com 4 dígitos.

Com base na tabela construída, os alunos serão orientados a observar a diagonal principal (o 1º dígito da 1ª linha, o 2º da 2ª linha, e assim por diante) e, em seguida, a criar uma nova sequência alterando cada um desses dígitos (por exemplo, trocando 0 por 1 e vice-versa). Ao final, verificar se essa nova sequência aparece na lista original. Essa observação leva à discussão de que, não importa quantos elementos estejam listados, sempre é possível construir uma nova sequência diferente de todas. Esse é o princípio fundamental da prova do argumento da diagonalização de Cantor, como já foi demonstrado que o conjunto dos números reais é não enumerável 7.

A atividade será complementada por um recurso lúdico: um jogo de dominó cujas peças contêm números binários de 3 dígitos. A regra básica do jogo é que uma peça só pode ser encaixada na outra se o final de uma corresponder ao início da próxima. Essa etapa promove a resolução de problemas, a visualização de padrões e a atenção a regras formais, além de tornar a aprendizagem mais dinâmica.

No desfecho, os alunos serão novamente convidados a construir uma nova sequência binária pela diagonal, desta vez a partir da ordem das peças encaixadas. Observamos que nesse caso, nem sempre será possível construir tal sequência pois o tamanho da sequência é finito. Por fim, repetiu-se a análise: a nova sequência criada pertence à lista original de peças? Essa reflexão reforça o argumento lógico já discutido anteriormente, agora num contexto mais visual e prático.

Essa atividade promove uma abordagem investigativa ao permitir que o aluno participe ativamente da descoberta de conceitos abstratos por meio da experimentação. Do ponto de vista conceitual, introduzir o argumento de diagonalização de Cantor em um contexto escolar é uma forma de mostrar que temas geralmente abordados em níveis superiores podem ser explorados de forma significativa na educação básica, quando adaptados a partir de uma metodologia ativa.

A utilização de atividade como essa mostra-se eficaz para introduzir noções avançadas de forma significativa e engajadora. Ao final da experiência, espera-se observar que os alunos consigam compreender intuitivamente a impossibilidade de listar todos os elementos de certos conjuntos. Além disso, a atividade integra conceitos matemáticos, pensamento lógico, linguagem binária e lúdico, promovendo uma aprendizagem integrada e contextualizada.

ATIVIDADE PROPOSTA

1. Liste 5 números naturais e, em seguida, responda:

(a) Você conseguiria listar todos os números naturais?

() Sim () Não

(b) O conjunto dos números naturais termina?

() Sim () Não

(c) Ele é infinito? Justifique:

2. Faça a representação binária dos seguintes números decimais:

(a) $5 =$ _____

(b) $10 =$ _____

(c) $23 =$ _____

(d) $50 =$ _____

3. Liste na tabela abaixo 4 sequências binárias com 4 dígitos.

Depois, destaque os dígitos da diagonal principal: o 1º dígito da 1ª linha, o 2º da 2ª linha, e assim por diante.

Construa uma nova sequência alterando cada dígito da diagonal (0 vira 1, 1 vira 0). Verifique se essa nova sequência aparece na lista original.

Sequência	1º dígito	2º dígito	3º dígito	4º dígito
1				
2				
3				
4				

Sequência construída pela diagonalização: _____

A nova sequência aparece na tabela original? () Sim () Não

Se não aparecer, isso confirma que é possível construir uma sequência fora de qualquer lista proposta. Essa é a estrutura do argumento de diagonalização de Cantor.

4. É um dominó binário com 3 dígitos. Seguem as instruções e a seguir, as peças:

Instruções do Jogo:

- Cada peça de dominó contém dois números binários de 3 dígitos.
- Para encaixar uma peça na outra, o último número da anterior deve ser igual ao primeiro número da nova.
- Ao final, escolha uma sequência de peças e construa um número binário infinito pela diagonal: pegue o 1º dígito da 1ª peça, o 2º dígito da 2ª peça, o 3º da 3ª, e assim por diante.

Pergunta: Se você tentar mudar cada dígito dessa diagonal (0 vira 1, 1 vira 0), será que o novo número ainda está na sequência?

Por quê?

Peças de Dominó com 3 Bits

000	000	000	001	000	010
000	011	000	100	000	101
000	110	000	111	001	001
001	010	001	011	001	100
001	101	001	110	001	111
010	010	010	011	010	100
010	101	010	110	010	111
011	011	011	100	011	101
011	110	011	111	100	100
100	101	100	110	100	111
101	101	101	110	101	111
110	110	110	111	111	111

Referências Bibliográficas

- [1] N. ALON, O. BOUSQUET, K. G. LARSEN, S. MORAN, AND S. M. AND, *Diagonalization games*, The American Mathematical Monthly, 131 (2024), pp. 866–879.
- [2] X. CHEN, S. WANG, C. YOU, O. S. M. LOAIZA, AND R.-B. JIN, *Experimental implementation of the fractional-vortex hilbert hotel*, Physical Review A, 106 (2022), p. 033521.
- [3] C. DA PIEDADE MACEIRAS BARREIRAS, *O conjunto de cantor*, dissertação de mestrado em matemática para o ensino, Universidade de Évora, Escola de Ciências e Tecnologia, Évora, Portugal, Apr. 2011.
- [4] P. S. DE FERMAT VIEIRA, *Elaboração de uma apostila para apresentar o infinito no ensino médio*, dissertação de mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2023. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
- [5] H. EVES, *Introdução à historia da Matematica*, vol. 3, UNICAMP, 2004.
- [6] G. IEZZI, C. MURAKAMI, AND N. J. MACHADO, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 8, Atual, 2013.
- [7] E. L. LIMA, *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1, SBM, 2003.
- [8] ———, *Análise Real: Funções de uma variável*, vol. 1, IMPA, 2014.
- [9] T. MOREIRA, *Existem infinitos maiores que outros infinitos?*, dissertação de mestrado profissional, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Campus de Rio Claro, Rio Claro - SP, 2022.
- [10] U. L. PARENTE, *Material teórico – módulo sistemas de numeração e paridade: Sistemas de numeração – parte i*, 2021. Revisão: Prof. Antonio Caminha M. Neto.
- [11] C. E. S. D. PAULA AND T. M. R. D. SOUZA, *Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio*, Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 10 (2017), pp. 375–384. Edição Ermac.

- [12] E. R. SCHEINERMAN, *Matemática Discreta: Uma Introdução*, Thomson Learning, São Paulo, 2006.