

Airton Santos Alves

A teoria dos jogos e uma aplicação em sala de aula

Itabaiana

2025

Airton Santos Alves

A teoria dos jogos e uma aplicação em sala de aula

Dissertação de mestrado apresentada ao
PROFMAT como parte dos requisitos exi-
gidos para a obtenção do título de Mestre em
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Charles Braga Amorim

Coorientador: Prof^a. Dr^a. Marta Lizeth Calvache Hoyos

Itabaiana

2025

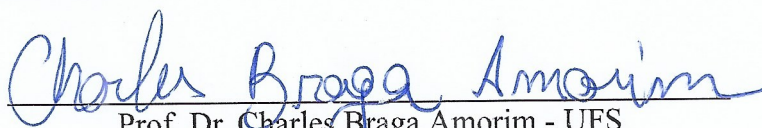
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

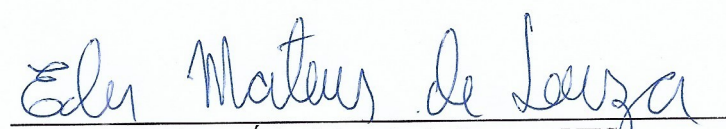
Teoria dos jogos e uma aplicação em sala de aula

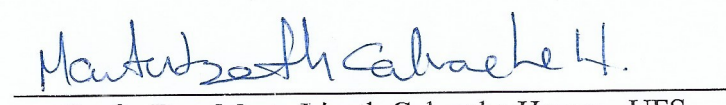
por

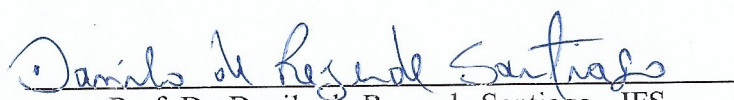
Airton Santos Alves

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Charles Braga Amorim - UFS
Orientador


Prof. Dr. Éder Mateus de Souza - UFS
Primeiro Examinador


Profa. Dra. Marta Lizeth Calvache Hoyos - UFS
Segundo Examinador


Prof. Dr. Danilo de Rezende Santiago - IFS
Terceiro Examinador

São Cristóvão, 22 de Agosto de 2025.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

A474t Alves, Airton Santos.
 A teoria dos jogos e uma aplicação em sala de aula / Airton
 Santos Alves; orientador Charles Braga Amorim. – Itabaiana, SE,
 2025.
 69 f.: il.

 Dissertação (mestrado profissional em Matemática) –
 Universidade Federal de Sergipe, 2025.

 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos jogos. 3. Espaços
 topológicos. 4. Funções convexas. 5. Didática (Ensino médio). I.
 Amorim, Charles Braga, orient. II. Título.

CDU 51-8

Agradecimentos

A **Deus**, meu pai eterno, que me abençoa todos os dias;

A minha esposa, **Maria Letícia**, por toda parceria, compreensão e apoio em todos os momentos;

Ao meu filho amado, **Leonhard Euler**, meu maior presente de **Deus**, a luz da minha vida, que traz tanto amor e alegria aos meus dias;

Aos meus pais, **Jairton** e **Arlete**, por todo apoio e incentivo aos estudos;

Aos meus irmãos, **Andressale**, **Andressa**, **Andrey** e **Alexis**, por sempre estarem na torcida pelo meu sucesso;

A meu amigo **Mateus**, por toda parceria e cumplicidade nesses dois anos de luta no PROFMAT, e nas escolas que lecionamos. Como também aos amigos **Delano**, **Arlan**, **Luiz Carlos** e **Anselmo**, que convivem comigo semanalmente em Alagoas, e tornam os dias de trabalho mais prazerosos e felizes, apesar das dificuldades e adversidades do nosso ofício;

A meu orientador **Prof. Dr. Charles** e a coorientadora **Prof^a. Dr^a. Marta Lizeth**, por toda confiança e apoio no desenvolvimento do trabalho;

A todos os professores do PROFMAT, campus Itabaiana-SE, por todos ensinamentos e incentivos;

Aos colegas do mestrado, pela cooperação e troca de conhecimentos;

Aos alunos da Escola Estadual Professor José Félix de Carvalho Alves, das turmas 2ºMA, 2ºMB, 2ºTC e 2ºTD, que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho;

A todos que me ajudaram direta ou indiretamente, sou muito grato.

*"Senhor, agradeço-Te pela dádiva da vida, pela
força nos desafios e pela luz que guia meus passos.
Que esta jornada reflita Tua graça e sabedoria."*

Resumo

O trabalho aborda um panorama histórico da teoria dos jogos, destacando as contribuições de importantes matemáticos para o desenvolvimento dessa área. Seu objetivo é apresentar diferentes tipos de jogos, suas soluções por meio de estratégias dominantes ou do Equilíbrio de Nash, além de resolver exemplos clássicos, como o Dilema do Prisioneiro. Adicionalmente, são expostos os resultados de uma aplicação didática realizada em uma escola da rede estadual de Alagoas, seguidos das conclusões obtidas.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos; Estratégias Dominantes; Equilíbrio de Nash.

Abstract

The work presents a historical overview of game theory, highlighting the contributions of prominent mathematicians to the development of this field. Its objective is to introduce different types of games, their solutions through dominant strategies or Nash Equilibrium, as well as to solve classic examples, such as the Prisoner's Dilemma. Additionally, the results of an educational application conducted at a public school in Alagoas are presented, followed by the conclusions drawn.

Keywords: Game theory; Dominant Strategies; Nash equilibrium

Sumário

1	PRELIMINARES	1
1.1	Espaços Topológicos e Continuidade	1
1.2	Funções Convexas e Côncavas	5
2	A HISTÓRIA DA TEORIA DOS JOGOS	9
2.1	O que é um jogo?	11
2.2	Tipos de jogos	13
2.2.1	Simétricos e Assimétricos	14
2.2.2	Jogos de soma zero	14
2.2.3	Jogos simultâneos	15
2.2.4	Jogos sequenciais	15
2.2.5	Jogos repetitivos	15
2.2.6	Jogos cooperativos e não cooperativos	16
2.2.7	Jogos de informação perfeita e imperfeita	16
3	SOLUÇÕES DE UM JOGO	17
3.1	Estratégia dominante	17
3.2	Teorema do equilíbrio de Nash	19
4	SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ATIVIDADES APLICADAS NO ENSINO MÉDIO	25
5	CONCLUSÃO	36
	REFERÊNCIAS	37
	APÊNDICE A – ATIVIDADES APLICADAS NA ESCOLA	39

Lista de ilustrações

Figura 1 – Função Convexa	5
Figura 2 – Função Côncava	7
Figura 3 – Ernst Zermelo	9
Figura 4 – John Von Neumann	10
Figura 5 – Oscar Morgenstern	10
Figura 6 – John Forbes Nash	11
Figura 7 – Atividade 1	39
Figura 8 – Atividade 1	40
Figura 9 – Alunos realizando a 1ª atividade	41
Figura 10 – Reprodução do vídeo da 1ª atividade	41
Figura 11 – Reprodução do vídeo da 1ª atividade	42
Figura 12 – Reprodução do vídeo da 2ª atividade	42
Figura 13 – Reprodução do vídeo da 2ª atividade	43
Figura 14 – Dilema do prisioneiro 2ºMA	44
Figura 15 – Dilema do prisioneiro 2ºMA	45
Figura 16 – Dilema do prisioneiro 2ºMB	46
Figura 17 – Dilema do prisioneiro 2ºTC	47
Figura 18 – Dilema do prisioneiro 2ºTD	48
Figura 19 – Jogo do mercado 2ºMA	49
Figura 20 – Jogo do mercado 2ºMA	50
Figura 21 – Jogo do mercado 2ºMB	51
Figura 22 – Jogo do mercado 2ºTC	52
Figura 23 – Jogo do mercado 2ºTD	53
Figura 24 – Turma 2ºMA	54
Figura 25 – Turma 2ºMB	54
Figura 26 – Turma 2ºTC	55
Figura 27 – Turma 2ºTD	55

Lista de tabelas

Tabela 1 – Matriz de <i>Payoffs</i> (Batalha dos sexos)	12
Tabela 2 – Matriz de <i>Payoffs</i> (Jogo do mercado)	13
Tabela 3 – Matriz de <i>Payoffs</i> (Jogo Do Mercado)	18
Tabela 4 – Matriz de <i>Payoffs</i> (Dilema do prisioneiro)	20
Tabela 5 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºMA	27
Tabela 6 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºMB	28
Tabela 7 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºTC	29
Tabela 8 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºTD	30
Tabela 9 – Matriz de Payoffs	30
Tabela 10 – Jogo Do Mercado - 2ºMA	32
Tabela 11 – Jogo Do Mercado - 2ºMB	33
Tabela 12 – Jogo Do Mercado - 2ºTC	34
Tabela 13 – Jogo Do Mercado - 2ºTD	35

Introdução

A teoria dos jogos é um ramo da Matemática que estuda a tomada de decisões entre dois ou mais agentes em situações de interação estratégica. Seu campo de aplicação é amplo, abrangendo áreas como economia, política, sociologia, biologia, ciência da computação e até mesmo contextos cotidianos. Fundamentada em conceitos lógicos e probabilísticos, a teoria dos jogos busca compreender e modelar comportamentos racionais ou otimizados diante de conflitos ou cooperação entre participantes.

O objetivo central dessa teoria é oferecer uma base analítica para a compreensão das decisões individuais e coletivas, considerando que os resultados de cada escolha dependem não apenas da decisão própria, mas também das decisões dos demais envolvidos. Um dos conceitos mais relevantes nesse contexto é o *equilíbrio de Nash*, o qual representa um estado onde nenhum jogador tem incentivo para alterar sua estratégia, dado o conhecimento das escolhas dos demais participantes.

Com o avanço das aplicações dessa teoria, percebe-se sua influência crescente em diversas áreas do conhecimento (ver, por exemplo, Berlekamp et al.(1984) e Honig(1986)). A razão de sua aplicabilidade tão abrangente está na natureza estrutural da Matemática, que permite definir rigorosamente os conceitos, verificar a consistência interna das ideias e analisar as implicações lógicas dos resultados obtidos. O uso de modelos matemáticos, portanto, torna a teoria dos jogos uma poderosa ferramenta para explorar e prever comportamentos em contextos interativos e competitivos.

Esta dissertação visa apresentar os fundamentos da teoria dos jogos, destacando seu desenvolvimento histórico, principais contribuições matemáticas, e conceitos essenciais, como as estratégias dominantes e o equilíbrio de Nash. Além disso, propõe uma sequência didática baseada em jogos clássicos como o Dilema do Prisioneiro e o Jogo do Mercado, aplicada em turmas do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual Professor José Félix de Carvalho Alves. O intuito dessa abordagem prática é oferecer aos alunos uma nova perspectiva sobre a matemática, demonstrando sua relevância para o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a tomada de decisões em diversas situações do dia a dia.

O trabalho está organizado em quatro capítulos, além desta introdução e da conclusão. Cada capítulo foi construído com o objetivo de articular o rigor teórico da matemática com a aplicabilidade pedagógica, respeitando os objetivos de um mestrado profissional em matemática.

O Capítulo 1 é dedicado à apresentação de resultados preliminares da análise matemática que servirão de base para a demonstração do Teorema do equilíbrio de Nash. São tratados conceitos fundamentais da topologia e da análise matemática, como

compacidade, continuidade, Teoremas de Weierstrass, Rolle, valor médio e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Esses conceitos são essenciais para garantir a existência do equilíbrio em jogos com estratégias contínuas, e sua introdução neste capítulo tem a finalidade de preparar o leitor para a formalização do teorema no capítulo seguinte.

No Capítulo 2, apresenta-se um panorama histórico da teoria dos jogos, resgatando as principais contribuições de matemáticos que fundamentaram esse campo. A narrativa inicia com James Waldegrave, passa por Ernst Zermelo, Emile Borel, John von Neumann, Oscar Morgenstern e culmina com John Forbes Nash Jr., cujo trabalho estabeleceu as bases do conceito de equilíbrio em jogos não cooperativos. Além da biografia dos autores, são destacados seus principais resultados e aplicações matemáticas, com exemplos ilustrativos como a Batalha dos Sexos e o Jogo do Mercado. Ainda neste capítulo, discute-se a classificação dos jogos segundo critérios como simetria, soma zero, simultaneidade, repetição e informação perfeita ou imperfeita, permitindo ao leitor uma compreensão abrangente da diversidade de modelos possíveis.

O Capítulo 3 trata das soluções possíveis para um jogo, com foco nas estratégias dominantes e no equilíbrio de Nash. Inicialmente, é definida a noção de estratégia dominante, aquela que sempre proporciona um resultado melhor para o jogador, independentemente das ações dos demais. Em seguida, o conceito de equilíbrio de Nash é apresentado, acompanhado de exemplos clássicos como o Dilema do Prisioneiro, a Batalha dos Sexos e o jogo da Barganha com Ultimato. O capítulo também inclui uma demonstração detalhada do Teorema do Equilíbrio de Nash, utilizando hipóteses simplificadoras como a concavidade das funções de utilidade.

O Capítulo 4 apresenta a sequência didática elaborada e aplicada com estudantes do segundo ano do ensino médio da Escola Estadual Professor José Félix de Carvalho Alves, localizada no município de São Sebastião, Alagoas. As atividades foram desenvolvidas em quatro turmas com diferentes níveis de proficiência matemática, totalizando cerca de 160 alunos. A sequência foi dividida em três momentos de 50 minutos cada. No primeiro momento, os alunos assistiram a um vídeo introdutório sobre os conceitos da teoria dos jogos. No segundo e terceiro, participaram de atividades práticas inspiradas no Dilema do Prisioneiro e no Jogo do Mercado, organizadas em grupos e com utilização de matrizes de *payoff*. Os resultados foram analisados e discutidos em sala de aula, com ênfase na identificação de estratégias dominantes e no raciocínio lógico por trás das decisões tomadas. Essa experiência prática evidenciou o potencial da teoria dos jogos como ferramenta pedagógica para desenvolver habilidades matemáticas argumentativas nos estudantes.

Ao longo da dissertação, busca-se conciliar o rigor teórico da matemática com sua função educativa. Por meio da abordagem da teoria dos jogos, é possível mostrar aos alunos que a matemática não é apenas um conjunto de fórmulas abstratas, mas uma linguagem poderosa para compreender o mundo, tomar decisões racionais e resolver conflitos de forma

ética e estratégica. Essa perspectiva contribui para a valorização da disciplina no contexto escolar e para o fortalecimento da aprendizagem significativa.

1 Preliminares

Neste capítulo veremos alguns resultados que serão úteis na demonstração do Teorema do equilíbrio de Nash. Na Seção 1.1 apresentamos as definições de espaço topológico, cobertura, subcobertura e subconjunto compacto, e vários teoremas. A Seção 1.2 é dedicada ao estudo das funções côncavas e convexas, e explicitamos a definição de função convexa e alguns resultados sobre as funções.

1.1 Espaços Topológicos e Continuidade

Definição 1.1.1. Um **espaço topológico** é um par (E, τ) , onde E é um conjunto não-vazio e τ é uma coleção de subconjuntos de E , chamada de topologia em E , que satisfaz:

1. $\emptyset \in \tau$ e $E \in \tau$;
2. a união arbitrária de elementos de τ pertence a τ ;
3. a interseção finita de elementos de τ pertence a τ .

Os elementos de τ são chamados de abertos de E .

Definição 1.1.2. Seja (E, τ) um espaço topológico e X um subconjunto de E . Uma cobertura de X é uma coleção $A = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos do espaço topológico E , tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Uma cobertura é dita aberta se os elementos de A são abertos em E :

$$(A_\lambda, \lambda \in \gamma; X \subset \bigcup_{\lambda \in \gamma} A_\lambda).$$

Definição 1.1.3. Seja $A = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de X . Uma subcobertura de A é uma subcoleção $A' = (A_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de X , isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} A_{\lambda'}$. Uma subcobertura é finita se a quantidade de subconjuntos é finita.

Definição 1.1.4. Um subconjunto K de um espaço topológico E é dito compacto quando toda cobertura aberta de K admitir uma subcobertura finita.

O seguinte teorema mostra que qualquer intervalo fechado da reta é um conjunto compacto.

Teorema 1.1.5. (Borel-Lebesgue): Seja $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado. Dada uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ de intervalos abertos tais que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$, existe um número finito deles, $I_{\lambda_1}, \dots, I_{\lambda_n}$, tais que $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$.

Demonstração: Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ pode ser coberto por um número finito dos I_λ , isto é, $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$. Temos $X \neq \emptyset$, pois $a \in X$.

Seja $c = \sup X$. Evidentemente, $c \in [a, b]$, pois $X \subset [a, b]$. Afirmamos que $c \in X$. De fato, existe algum $I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$ tal que $c \in I_{\lambda_0}$. Sendo $\alpha < c$, deve existir $x \in X$ tal que $\alpha < x \leq c$. Logo $x \in I_{\lambda_0}$. Mas como $x \in X$, temos $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$ e daí $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$, o que prova que $c \in X$.

Mostraremos agora que $c = b$. Se fosse $c < b$, existiria algum $c' \in I_{\lambda_0}$ com $c < c' < b$. Então $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ donde $c' \in X$, o que é absurdo, pois $c' > c$ e c é o supremo do conjunto X . Vemos, portanto, que o intervalo $[a, b]$ está contido numa reunião finita de I_λ , o que prova o teorema.

Agora vamos apresentar três Teoremas básicos da teoria das funções contínuas. O primeiro resultado garante que a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua também é um conjunto compacto. O segundo, Teorema de Weierstrass, endossa que função contínua definida num conjunto compacto é limitada e atinge seus extremos. O terceiro, Teorema de Rolle, atesta que se a função é contínua e derivável em um intervalo aberto, com imagens iguais nos extremos, então existe algum ponto no domínio tal que a função derivada nesse ponto é igual a zero.

Teorema 1.1.6. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração: Dada uma cobertura aberta $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, podemos, para cada $x \in X$, escolher $A_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in A_{\lambda(x)}$. Em virtude da continuidade de f , cada ponto $x \in X$ pode ser posto num intervalo aberto I_x tal que $y \in X \cap I_x$ implica $f(y) \in A_{\lambda(x)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$. Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$. Consequentemente, $f(X) \subset A_{\lambda(x_1)} \cup \dots \cup A_{\lambda(x_n)}$, o que prova a compacidade de $f(X)$.

Teorema 1.1.7. *(Weierstrass): Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos (isto é, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$).*

Demonstração: Sendo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e X é um conjunto compacto, temos que $f(X)$ também é compacto, conforme ao Teorema 1.1.6. Sendo assim, $f(X)$ é limitado e fechado. Logo $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Portanto existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $\inf f(X) = f(x_1)$ e $\sup f(X) = f(x_2)$.

Teorema 1.1.8. *(Teorema de Rolle): Dada uma função f contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) e se $f(a) = f(b)$, então existe c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que, se f é uma função constante para todo x no intervalo $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ no interior do intervalo. Logo, c pode ser qualquer ponto do intervalo (a, b) .

Suponhamos então que f é uma função não constante em $[a, b]$. Como f , por hipótese, é contínua no intervalo fechado, então, pelo Teorema de Weierstrass 1.1.7, existem x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, uma vez que f é não constante em $[a, b]$, segue que x_1 ou x_2 é interior ao intervalo $[a, b]$.

Logo, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. Portanto, existe um ponto $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.1.9. (Teorema do valor médio): *Se uma função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Consideremos primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Essa reta é o gráfico da função $T(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Definindo a função g como a diferença entre as funções f e T , isto é: $g(x) = f(x) - T(x)$. Temos que:

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right].$$

Quando $x = a$, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) \right] = f(a) - f(a) = 0.$$

E quando $x = b$, temos:

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

Além disso, como a função g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) , g também é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Logo, podemos usar o Teorema de Rolle 1.1.8 para a função g , concluindo que existe um número c no intervalo (a, b) , tal que $g'(c) = 0$.

Assim, como

$$g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right],$$

temos

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right],$$

e, portanto,

$$f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0,$$

isto é,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O resultado do teorema a seguir é um componente essencial na prova do equilíbrio de Nash que será feita Capítulo 3.

Teorema 1.1.10. (*Ponto fixo de Brouwer*): Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e convexo. Se $f : B \rightarrow B$ é uma aplicação contínua, então existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

A demonstração do teorema segue do resultado apresentado por (MUNKRES, 2014) na página 347, e por isso será omitida.

O resultado do próximo teorema é uma caracterização da continuidade de funções usando sequências.

Teorema 1.1.11. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um intervalo I é contínua em um ponto $c \in I$ se, e só se, para toda sequência (x_n) em I , tivermos que, se x_n converge para c , então $f(x_n)$ converge para $f(c)$.

Demonstração: Suponhamos que f seja contínua em c . Então f tem limite no ponto c , e

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Se (x_n) é uma sequência convergindo para c , tal que para $n > n_0$, temos $x_n \in I - \{c\}$, então f tem limite no ponto c , seguir-se-á que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$

Se não existir tal n_0 , então (x_n) é formada de duas subsequências (x_{n_j}) , tal que $(x_{n_j}) = c$, para todo j , e (x_{m_j}) , tal que $x_{m_j} \in I - \{c\}$ para todo j . É claro que $f(x_{n_j}) \rightarrow f(c)$, pois $f(x_{n_j}) = f(c)$. Logo, $f(x_{m_j}) \rightarrow f(c)$. E por conseguinte, $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Reciprocamente, se para qualquer sequência $(x_n) \subset I - \{c\}$ convergindo para c , tivermos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c),$$

então seguir-se-á que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Isto prova a continuidade de f em c .

1.2 Funções Convexas e Côncavas

Nesta seção, estudaremos sobre as funções convexas e suas propriedades, que serão fundamentais para demonstrar o teorema do equilíbrio de Nash no próximo capítulo.

Definição 1.2.1. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* se, para quaisquer $x, y \in [a, b]$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$, tem-se:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemplo 1.2.2. A função $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ é uma função convexa.

Vejamos agora a representação geométrica da função do exemplo anterior:

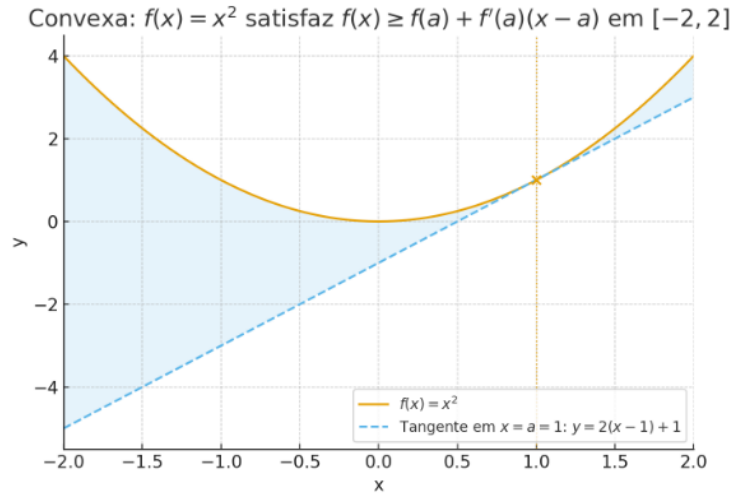


Figura 1 – Função Convexa

Teorema 1.2.3. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo (a, b) . A função f é convexa se, e só se, a derivada f' é não-decrescente.

Demonstração: Sendo $a < b$, então a reta que liga $f(a)$ e $f(b)$ é formada pelos pontos (u, v) , onde

$$v = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(u - a).$$

Assim, f é convexa se, e somente se, para qualquer $a < x < b$,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou seja,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por outro lado, podemos descrever a reta que liga $f(a)$ e $f(b)$ pelos pontos (u, v) da forma

$$v = f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(b - u).$$

Assim, f será convexa se, e somente se, para qualquer $a < x < b$,

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(b - x).$$

Ou seja,

$$\frac{f(b) - f(x)}{x - b} \leq \frac{f(a) - f(b)}{b - a}.$$

Multiplicando a desigualdade por (-1) , obtemos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Logo, temos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Como f é diferenciável, fazendo $x \rightarrow a$ e $x \rightarrow b$, temos que:

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b),$$

ou seja, f' é crescente.

Agora, suponha f' crescente. Dado $a < x < b$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Pelo teorema do valor médio, existem y_1 e y_2 tais que $a < y_1 < x < y_2 < b$ tais que

$$f'(y_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e

$$f'(y_2) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Como f' é crescente, $f'(y_1) \leq f'(y_2)$.

Corolário 1.2.4. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivada segunda no intervalo (a, b) . A função f é convexa se, e só se, $f''(x) \geq 0$, para todo x em (a, b) .*

Demonstração: Se f é convexa, então sua derivada f' é monótona crescente. Logo, f' é diferenciável, e sua derivada $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Se f'' é contínua, então

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Agora, queremos provar que, se $f''(x) \geq 0$, então a função f é convexa. Para isso, sabemos que se $f''(x) \geq 0$, então f' é monótona não decrescente, pois f'' é a derivada de f' . Isso implica que para quaisquer $x < y$ em (a, b) ,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq f'(x).$$

O que indica que a função está acima de todas as suas retas tangentes, condição equivalente à convexidade.

Definição 1.2.5. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *côncava* se, para quaisquer $x, y \in [a, b]$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$, tem-se:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Exemplo 1.2.6. A função $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2$ é uma função côncava.

Vejamos agora a representação geométrica da função do exemplo anterior:

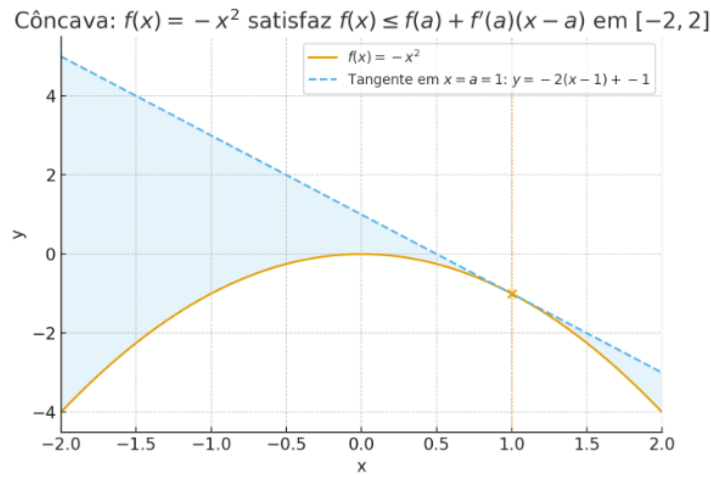


Figura 2 – Função Côncava

Teorema 1.2.7. Uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava se, para qualquer par de pontos x e y fixados em (a, b) , tivermos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Demonstração: Suponha que $f \in C^2(a, b)$ e que $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Desejamos mostrar que, sob essa hipótese, a função f é côncava no intervalo (a, b) , ou seja, satisfaz a desigualdade do enunciado.

Sabemos que, sendo $f''(x) \leq 0$, a função derivada f' é não crescente em (a, b) . Isso significa que, para quaisquer $x, y \in (a, b)$ com $x < y$, tem-se:

$$f'(x) \geq f'(y).$$

Por consequência, a função f encontra-se abaixo de todas as suas tangentes, isto é, para qualquer ponto $x \in (a, b)$ e qualquer $y \in (a, b)$, vale:

$$f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x).$$

Essa desigualdade caracteriza geometricamente a côncavidade da função, pois expressa que o gráfico de f está situado abaixo de suas retas tangentes.

Para concluir a demonstração, fixemos $x, y \in (a, b)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Seja $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Como f' é não crescente, tem-se:

$$f'(x) \geq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \quad \text{e} \quad f'(y) \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Manipulando essas expressões e combinando-as de forma adequada, pode-se deduzir:

$$f(z) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

isto é,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

o que mostra que f é côncava, conforme queríamos demonstrar.

Corolário 1.2.8. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava. Existe um único $x \in (a, b)$ tal que*

$$f(x) > f(z), \quad \text{para todo } z \in (a, b).$$

Demonstração: Suponhamos x e $y \in (a, b)$ tal que $x \neq y$, ambos pontos de máximo de f , portanto,

$$f(x) = f(y) \geq f(z) \quad \text{para todo } z \in (a, b).$$

Dado $0 < \lambda < 1$, pelo teorema 1.2.7, sendo f côncava,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

temos por hipótese que $f(x) = f(y)$ e que x e y são pontos de máximos de f , um absurdo, já que esta última equação nos mostra que uma média ponderada qualquer de x e y possui imagem de valor maior que $f(x) = f(y)$. Portanto, a função f só pode ter um máximo em (a, b) se f for côncava.

2 A história da teoria dos jogos

A origem da teoria dos jogos se deu no século XVIII com base em registros históricos. James Waldegrave em correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, após análise a um jogo de cartas chamado “Le Her”, propõe uma solução estratégica, mas não se aprofundou em sua análise teórica para uma teoria mais geral. Em 1838, o matemático francês Antoine Augustin Cournot publicou seu famoso trabalho duopólio, onde formaliza um conceito específico de equilíbrio, sendo mais tarde generalizado por John Forbes Nash Jr.

O primeiro teorema matemático sobre a teoria dos jogos foi publicado em 1913, por Ernst Zermelo. O teorema afirma que o jogo de xadrez é *estritamente determinado*, ou seja, em cada estágio do jogo para qualquer que seja a jogada de um dos participantes, seu oponente tem uma estratégia que lhe conduzirá a vitória ou ao empate.



Figura 3 – Ernst Zermelo

O matemático Emile Borel, publicou quatro artigos sobre jogos estratégicos entre os anos de 1921 e 1927, intitulados como "Sur les systèmes de jeux où intervient l'hasard", "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique", "Une méthode pour la résolution des jeux de guerre", e "Sur les systèmes de choix simultanés". Esses artigos são considerados os precursores da Teoria dos Jogos e estabeleceram as bases para o desenvolvimento da área por outros matemáticos, como John Von Neumann e Oscar Morgenstern. Além disso, reinventou as soluções *minimax* e acreditava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de maneira semelhante.

No século XX, a teoria dos jogos teve uma enorme evolução do ponto de vista teórico com o matemático John Von Neumann, mais precisamente em 1928, com a publicação de uma série de trabalhos, ele provou utilizando topologia e análise que todo jogo finito

de soma zero (jogos nos quais um perde para que o outro ganhe) com duas pessoas possuía uma solução em estratégias mistas. Essa demonstração era muito complicada de se acompanhar, e anos depois, em 1937, ele divulgou uma nova demonstração com o mesmo resultado, baseado no Teorema do ponto fixo de Brouwer.



Figura 4 – John Von Neumann

Em 1944, John von Neumann junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o clássico *“The Theory of Games and Economic Behaviour”*. A obra teve enorme impacto no estudo da matemática aplicada e economia.



Figura 5 – Oscar Morgenstern

Em 1950, com a publicação de quatro artigos, John Forbes Nash Júnior teve grande contribuição na teoria dos jogos, e provou a existência de equilíbrio para jogos não-cooperativos de estratégia mista, denominado equilíbrio de Nash. Os resultados foram publicados nos artigos *“Equilibrium Points in n -Person Games”* e *“Non-cooperative games”*. Nash também criou a teoria de barganha, e nos artigos *“The Bargaining Problem”*

e “*Two-Person Cooperative Games*”, provou a existência de solução para o problema da barganha de Nash.

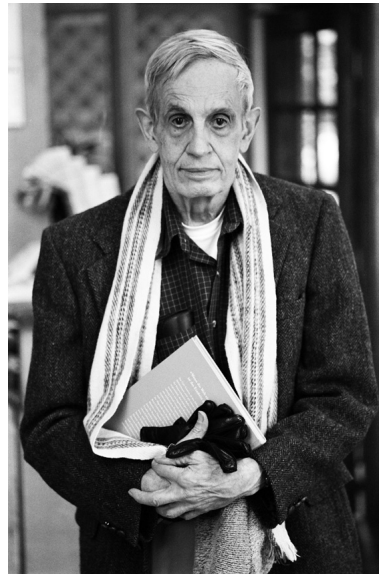


Figura 6 – John Forbes Nash

Em 1994, por suas contribuições à teoria dos jogos, John Forbes Nash Júnior, John Harsanyi, Reinhard Selten, receberam o prêmio Nobel de economia.

2.1 O que é um jogo?

Um jogo é uma situação em que os jogadores tomam decisões estratégicas sob condições de conflito, em busca de determinados benefícios, e que afetam os resultados de todos os outros participantes. Cada jogador tem um conjunto de estratégias, e para cada situação no jogo tem interesses ou preferências particulares. Os resultados dos jogos são os *payoff*, e o conjunto de ganhos ou benefícios para cada combinação de estratégias e decisões é denominado de matriz de *payoff*.

De maneira formal, um jogo tem alguns elementos básicos:

- Um conjunto finito de jogadores definido por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.
- Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito de $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ de ações, denominadas *estratégias puras* do jogador g_i ($m_i \geq 2$).
- Um vetor $\mathbf{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$, é denominado *perfil de estratégia pura*.

O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam, portanto, o produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^n s_i = s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n,$$

denominado *espaço de estratégia pura* do jogo. Para cada jogador $g_i \in G$, existe uma função utilidade

$$u_i : S \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa o ganho (*payoff*) $u_i(\mathbf{s})$ do jogador g_i a cada perfil de estratégia pura $\mathbf{s} \in S$.

Exemplo 2.1.1. (Batalha dos sexos): Um casal deseja sair à noite para passear, e devem decidir se irão ao jogo de futebol, preferência do homem, ou ao cinema, preferência da mulher. Ambos preferem ir juntos a ir sozinhos, para qualquer um dos lugares. Se ambos forem para o futebol, o homem terá satisfação maior do que a mulher. Por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, a mulher terá maior satisfação do que o homem. Finalmente, se eles saírem sozinhos, ambos ficam igualmente insatisfeitos. Podemos modelar a situação como um jogo estratégico e representar através de uma matriz de *payoffs*, apresentada na Tabela 1. Os *payoffs* expressam o nível de satisfação de cada um com as diferentes combinações de decisão, por exemplo, 10 significa muito satisfeito, 5 significa apenas satisfeito, zero significa que não há nenhuma satisfação. Assim, temos:

$$G = \{Homem, Mulher\},$$

$$S_{Homem} = \{Futebol, Cinema\},$$

$$S_{Mulher} = \{Futebol, Cinema\},$$

$$S = \{(Futebol, Futebol), (Futebol, Cinema), (Cinema, Cinema), (Cinema, Futebol)\}.$$

Assim, os ganhos do homem (g_1) dados pela função utilidade u_1 são:

$$u_1(Futebol, Futebol) = 10, \quad u_1(Futebol, Cinema) = 0,$$

$$u_1(Cinema, Futebol) = 0, \quad u_1(Cinema, Cinema) = 5.$$

E os ganhos da mulher (g_2) dados pela função utilidade u_2 são:

$$u_2(Futebol, Futebol) = 5, \quad u_2(Futebol, Cinema) = 0,$$

$$u_2(Cinema, Futebol) = 0, \quad u_2(Cinema, Cinema) = 10.$$

Sendo assim, conseguimos montar a matriz de *payoffs* a seguir

		Mulher	
		Futebol	Cinema
Homem	Futebol	(10,5)	(0,0)
	Cinema	(0,0)	(5,10)

Tabela 1 – Matriz de *Payoffs* (Batalha dos sexos)

Exemplo 2.1.2. Jogo do mercado (Preço alto *vs* Preço baixo): Duas empresas, A e B, concorrentes, devem decidir simultaneamente entre praticar "Preço alto" ou "Preço baixo", sem conhecer a decisão uma da outra, visando maximizar seus lucros. Se ambas escolhem preços altos, elas compartilham um mercado lucrativo, e juntas lucram 5 milhões de reais cada. Se uma escolhe preço baixo, essa ganha vantagem competitiva e atrai mais clientes, lucrando 7 milhões de reais, e seu concorrente somente 2 milhões. Se ambas escolhem preço baixo, os lucros são reduzidos por causa da guerra de preços, e juntas lucram 3 milhões de reais cada. Podemos representar essa situação através de uma matriz de *payoffs*, dada na Tabela 2.

$$G = \{\text{Empresa A}, \text{Empresa B}\},$$

$$S_{\text{Empresa A}} = \{\text{Preço alto}, \text{Preço baixo}\},$$

$$S_{\text{Empresa B}} = \{\text{Preço alto}, \text{Preço baixo}\},$$

$$S = \{(P. \text{alto}, P. \text{alto}), (P. \text{alto}, P. \text{baixo}), (P. \text{baixo}, P. \text{alto}), (P. \text{baixo}, P. \text{baixo})\}.$$

Assim, os ganhos da empresa A (g_1):

$$u_1(P. \text{alto}, P. \text{alto}) = 5, \quad u_1(P. \text{alto}, P. \text{baixo}) = 2,$$

$$u_1(P. \text{baixo}, P. \text{alto}) = 7, \quad u_1(P. \text{baixo}, P. \text{baixo}) = 3.$$

E os ganhos da empresa B (g_2):

$$u_2(P. \text{alto}, P. \text{alto}) = 5, \quad u_2(P. \text{alto}, P. \text{baixo}) = 7,$$

$$u_2(P. \text{baixo}, P. \text{alto}) = 2, \quad u_2(P. \text{baixo}, P. \text{baixo}) = 3.$$

Dessa forma, chegamos a matriz de *payoffs* a seguir

		Empresa B	
		Preço alto	Preço baixo
Empresa A	Preço alto	(5,5)	(2,7)
	Preço baixo	(7,2)	(3,3)

Tabela 2 – Matriz de *Payoffs* (Jogo do mercado)

2.2 Tipos de jogos

Na teoria dos jogos, existem diversos tipos de jogos, classificados com base em critérios como o número de jogadores, a forma como a informação é distribuída, a possibilidade de cooperação e a forma como as estratégias são escolhidas. Nesta seção, apresentamos uma síntese das principais categorias de jogos, acompanhada de exemplos ilustrativos.

2.2.1 Simétricos e Assimétricos

Definição 2.2.1. (*Jogos Simétricos*): *As estratégias são equivalentes para os jogadores, os recursos são iguais para todos, e a diferença se dá no nível de habilidade de cada um. O jogo simétrico deve garantir que não haja uma forma de um dos jogadores obter uma condição inicial mais vantajosa do que o outro, e que não exista uma estratégia na qual o movimento inicial garante uma vitória certa para o jogador.*

Exemplo 2.2.2. O jogo de dama e xadrez são jogos simétricos, pois as regras são conhecidas e valem para ambos os jogadores, e para evitar qualquer suspeita de favorecimento podem ser jogadas duas partidas, sendo uma iniciada por um jogador e a outra pelo seu adversário. Um outro exemplo é o dilema do prisioneiro, problema criado em 1950 por Albert Tucker, no qual dois suspeitos são presos em celas distintas, e devem decidir por confessar ou negar o crime, conhecendo quais serão as possíveis penalidades aplicadas a cada um, a depender de suas decisões. O problema é proposto a ambos sob as mesmas condições e será melhor exposto posteriormente quando tratarmos de estratégias dominantes.

Definição 2.2.3. (*Jogos Assimétricos*): *As estratégias são divergentes, regras e objetivos são diferentes para cada jogador, o que possibilita vantagem a um ou alguns dos jogadores, aumentando a possibilidade de vitória.*

Exemplo 2.2.4. As apostas esportivas referem-se a uma situação em que apostadores tem informações ou habilidades desiguais em relação às casas de apostas ou outros apostadores, em casos de informações privilegiadas ou manipulação de resultados, a assimetria fica ainda mais evidente entre as casas de apostas e os jogadores, gerando prejuízos financeiros aos apostadores.

2.2.2 Jogos de soma zero

Definição 2.2.5. *São jogos em que o ganho de um jogador é equivalente à perda do outro. Esse mesmo princípio também se aplica para jogos com mais de dois jogadores, como por exemplo, no pôquer, o ganho de um é a soma da perda dos demais jogadores.*

Exemplo 2.2.6. Existem diversos jogos de soma zero, alguns deles são: xadrez, dama, jogo da velha, pôquer. Exemplos do "mundo real" que podem ser utilizados, são as disputas eleitorais e situações de guerras, como a Batalha do Mar de Bismarck, ocorrida em 1943 durante a Segunda Guerra Mundial no sudoeste do Pacífico, que opôs a Marinha Imperial Japonesa às forças aéreas aliadas, predominantemente norte-americanas e australianas. Nesse confronto, os Aliados destruíram quase toda a frota japonesa envolvida, consolidando uma das mais expressivas vitórias aéreas e navais da Campanha do Pacífico.

2.2.3 Jogos simultâneos

Definição 2.2.7. *São jogos em que os jogadores tomam decisões ao mesmo tempo, ou seja, decide sobre suas jogadas sem dispor de informações sobre as decisões do(s) outro(s) jogador(es).*

Exemplo 2.2.8. Os jogos de futebol são simultâneos, pois os jogadores adversários se movimentam em campo mesmo não sabendo exatamente qual será a decisão a ser tomada pela equipe que está com posse da bola. Outro exemplo é a concorrência entre empresas do seguimento de academia de musculação, as quais estão simultaneamente, considerando introduzir ou não uma oferta especial aos seus clientes, reduzindo o valor da mensalidade. Se uma delas faz a oferta, e as outras não, a empresa que fez a oferta irá ganhar alguns clientes das outras academias e uma popularidade maior. Mas, se todas fazem a oferta, não ganham clientes das outras, embora ganhem maior popularidade. Como qualquer aumento de clientes gera aumento de receitas para as empresas, as decisões a serem tomadas em relação aos concorrentes é primordial para a sobrevivência do negócio no mercado.

2.2.4 Jogos sequenciais

Definição 2.2.9. *Nesses jogos, os jogadores tomam suas decisões de forma sequencial, e diferente dos simultâneos, o jogador seguinte tem conhecimento da jogada do anterior. A representação é feita através de árvores de decisões composta por ramos e nós ou de forma estendida.*

Exemplo 2.2.10. Dama, xadrez, leilões, concorrência entre empresas, são alguns dos vários jogos sequenciais que existem. Tomemos como exemplo a competição entre duas empresas, Alfa e Beta, que precisam decidir se reduzirão ou não os preços de seus produtos. Nesse cenário, a empresa Alfa toma sua decisão primeiro (reduzir ou manter os preços), e, com base nessa escolha, a empresa Beta define sua própria estratégia de precificação.

2.2.5 Jogos repetitivos

Definição 2.2.11. *São jogos que exigem dos jogadores repetidas jogadas no mesmo estágio do jogo. As estratégias que os jogadores usam podem ser alteradas a cada repetição.*

Exemplo 2.2.12. Em um jogo de futebol, uma disputa de cobranças de pênaltis é um jogo repetitivo, pois os jogadores podem ajustar suas estratégias com base em rodadas anteriores. Outro exemplo, a barganha repetida, um comprador e um vendedor barganham sobre um preço. Se a barganha não termina, ela é repetida com possível perda ou aumento de valor, pois os jogadores podem fazer concessões ou endurecer as propostas com base nas rodadas anteriores.

2.2.6 Jogos cooperativos e não cooperativos

Definição 2.2.13. (*Jogos Cooperativos*): *Se os jogadores estão autorizados a se comunicar, ou estabelecem acordos entre si previamente, decidindo cooperar um com os outros.*

Exemplo 2.2.14. O jogo "sala de escape" é um jogo no qual é estipulado um tempo máximo para os participantes escaparem da sala, respondendo a perguntas e enigmas. Para conseguir lograr êxito no jogo, o fator primordial é a cooperação entre os participantes.

Definição 2.2.15. (*Jogos não Cooperativos*): *Quando os jogadores são impedidos de fazer acordos, e tomam suas decisões de forma independente, sem conhecimento das decisões dos outros jogadores. Geralmente são jogos competitivos, visando seu próprio resultado, em detrimento dos outros.*

Exemplo 2.2.16. A concorrência entre empresas, as quais competem em preços ou quantidades sem colusão. Outro exemplo são as corridas eleitorais, na qual os candidatos escolhem estratégias para maximizar votos em uma eleição, e devem decidir entre focar em seus redutos eleitorais ou tentar conquistar eleitores indecisos de áreas concorridas.

2.2.7 Jogos de informação perfeita e imperfeita

Definição 2.2.17. (*Informação Perfeita*): *Quando todas as jogadas e estratégias já adotadas são conhecidas por todos os jogadores, antes de realizarem suas decisões.*

Exemplo 2.2.18. No xadrez, cada jogador pode ver todas as peças do tabuleiro em qualquer momento, e acompanhar cada movimento das peças do adversário, tendo acesso a todas as informações sobre o jogo. Outro exemplo que podemos considerar é o jogo da velha.

Definição 2.2.19. (*Informação Imperfeita*): *Quando pelo menos um dos jogadores ao decidir, não conhece o que os outros jogadores decidiram antes dele, e não possui todas as informações disponíveis.*

Exemplo 2.2.20. No pôquer, os jogadores não têm conhecimento completo sobre o jogo, não conhecem as estratégias dos adversários, e não sabem as decisões dos outros jogadores até o momento em que devem tomar as suas próprias decisões. Outro exemplo são os leilões de lances simultâneos, pois cada um dos participantes desconhecem o valor dos lances dos outros.

3 Soluções de um jogo

A Teoria dos Jogos busca fornecer ferramentas e métodos para analisar e resolver problemas estratégicos. Ao aplicar esses conceitos e instrumentos na formalização de um problema, é possível obter uma visão abrangente do jogo, ao mesmo tempo em que se permite uma análise detalhada dos diferentes cenários que o constituem. A solução de um jogo possui um caráter interativo, uma vez que pode variar conforme as decisões de um jogador em relação às escolhas do outro. Essa dinâmica torna impossível encontrar uma solução exata, como em problemas matemáticos de aritmética ou álgebra. Contudo, é possível identificar uma tendência do jogo a se direcionar para um resultado particular. Uma abordagem para encontrar a solução de um jogo é analisar as estratégias que podem resultar nos seus equilíbrios possíveis. Nesse contexto, existem dois tipos principais de equilíbrio: a estratégia dominante e o equilíbrio de Nash.

3.1 Estratégia dominante

Uma estratégia é chamada de dominante quando, independentemente das decisões dos demais jogadores, ela sempre oferece o melhor resultado possível ao jogador. Quando uma estratégia é estritamente dominante em relação a outra, os resultados gerados por ela são consistentemente mais vantajosos do que os obtidos com a outra opção. Denote por

$$\mathbf{s}_{-i} = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n}) \in \mathbf{S}_{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$$

uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador g_i . Desta maneira, um perfil de estratégia pode ser convenientemente denotado por

$$\mathbf{s} = (s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}) = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n})$$

Definição 3.1.1 (Estratégia Pura Estritamente Dominada). *Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é **estritamente dominada** pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se*

$$u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i}),$$

*para todo $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$. A estratégia $s_{ik} \in S_i$ é **fracamente dominada** pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se $u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i})$, para todo $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$.*

Exemplo 3.1.2. Resolvendo o Exemplo 2.1.2, jogo do mercado, temos que o conjunto de jogadores é $G = \{\text{Empresa A}, \text{Empresa B}\}$, g_1 e g_2 respectivamente.

O conjunto de estratégias de cada empresa são iguais, ambas possuem duas opções $S_{\text{Empresa A}} = \{\text{Preço alto}, \text{Preço baixo}\}$, $S_{\text{Empresa B}} = \{\text{Preço alto}, \text{Preço baixo}\}$.

O espaço de estratégias $S = \{(\text{Preço alto}, \text{Preço alto}), (\text{Preço alto}, \text{Preço baixo}), (\text{Preço baixo}, \text{Preço alto}), (\text{Preço baixo}, \text{Preço baixo})\}$.

Assim, os ganhos da empresa A (g_1):

$$u_1(P. \text{alto}, P. \text{alto}) = 5, \quad u_1(P. \text{alto}, P. \text{baixo}) = 2,$$

$$u_1(P. \text{baixo}, P. \text{alto}) = 7, \quad u_1(P. \text{baixo}, P. \text{baixo}) = 3.$$

E os ganhos da empresa B (g_2):

$$u_2(P. \text{alto}, P. \text{alto}) = 5, \quad u_2(P. \text{alto}, P. \text{baixo}) = 7,$$

$$u_2(P. \text{baixo}, P. \text{alto}) = 2, \quad u_2(P. \text{baixo}, P. \text{baixo}) = 3.$$

Dessa forma, chegamos a matriz de *payoffs* a seguir

		Empresa B	
		Preço alto	Preço baixo
Empresa A	Preço alto	(5,5)	(2,7)
	Preço baixo	(7,2)	(3,3)

Tabela 3 – Matriz de *Payoffs* (Jogo Do Mercado)

Neste jogo, analisando os ganhos da empresa A, temos que:

- Se B escolhe preço alto, A prefere preço baixo. De fato, note que $u_1(P. \text{baixo}, P. \text{alto}) > u_1(P. \text{alto}, P. \text{alto})$, pois $(7 > 5)$.
- Se B escolhe preço baixo, A prefere preço baixo. Com efeito, $u_1(P. \text{baixo}, P. \text{baixo}) > u_1(P. \text{alto}, P. \text{baixo})$, pois $(3 > 2)$.

Logo, para a empresa A, preço baixo é dominante. Agora, analisando os ganhos da empresa B, temos que:

- Se A escolhe preço alto, B prefere preço baixo. Sem dúvida, $u_2(P. \text{alto}, P. \text{baixo}) > u_2(P. \text{alto}, P. \text{alto})$, pois $(7 > 5)$.
- Se A escolhe preço baixo, B prefere preço baixo. Certamente, $u_2(P. \text{baixo}, P. \text{baixo}) > u_2(P. \text{baixo}, P. \text{alto})$, pois $(3 > 2)$.

Assim, para a empresa B, preço baixo é dominante. Portanto, a metodologia de dominância estrita iterada indicou um único perfil estratégico como a solução para o jogo, no caso, o perfil (preço baixo, preço baixo).

3.2 Teorema do equilíbrio de Nash

O conceito de solução mais amplamente aceito e utilizado na Teoria dos Jogos é o chamado **equilíbrio de Nash**, introduzido formalmente por John Nash em 1950. Trata-se de uma situação em que cada jogador, conhecendo as estratégias dos demais, escolhe sua própria estratégia de forma a maximizar seu ganho, não tendo incentivo para alterar unilateralmente sua decisão. Em outras palavras, no equilíbrio de Nash, as expectativas dos jogadores em relação ao comportamento dos adversários são corretas, e cada um age racionalmente diante dessas expectativas. Esse conceito representa um estado de estabilidade estratégica no qual nenhuma das partes envolvidas tem vantagem em desviar de sua escolha atual, desde que os outros também mantenham suas decisões.

Definição 3.2.1 (Equilíbrio de Nash). *Dizemos que um perfil de estratégia*

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \in S$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij}, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e para todo $j_i = 1, \dots, m_i$, com $m_i \geq 2$.

Intuitivamente, o equilíbrio de Nash pode ser compreendido como uma situação em que cada jogador escolheu uma estratégia levando em conta as escolhas dos demais participantes, de tal forma que nenhum deles tem incentivo para mudar sua decisão de forma unilateral. Ou seja, dado o conhecimento das estratégias dos outros jogadores, cada um está fazendo o melhor que pode. Se algum jogador decidisse alterar sua estratégia individualmente, mantendo as estratégias dos demais fixas, ele não obteria um resultado melhor. Assim, o equilíbrio de Nash representa uma espécie de “ponto de repouso” nas interações estratégicas, no qual todos os jogadores estão satisfeitos com suas decisões, considerando o comportamento dos outros. Essa estabilidade decorre da racionalidade de todos os participantes e da consistência entre suas expectativas e ações.

Exemplo 3.2.2. (Dilema do prisioneiro) Em 1950, os matemáticos Merrill Flood e Melvin Dresher, da Rand Corporation, propuseram um jogo que mais tarde foi utilizado por Albert W. Tucker, orientador de Nash na Universidade de Princeton. Tucker apresentou esse jogo a uma plateia de psicólogos da Universidade de Stanford como uma forma de demonstrar a aplicação prática da Teoria dos Jogos.

Dois suspeitos, Antônio e Bruno, são presos e acusados de cometer um crime grave. Como a polícia não possui provas suficientes para condená-los pelo crime principal, eles são mantidos em celas separadas, sem possibilidade de comunicação, e recebem uma proposta

do delegado ou promotor: cada um pode escolher entre confessar o crime ou negar. Se ambos negarem, serão condenados a dois anos de prisão cada um por um crime menor. Se ambos confessarem, cada um receberá uma pena de cinco anos de prisão. No entanto, se um confessar e o outro negar, o que confessar será libertado, enquanto o que negar será condenado a dez anos de prisão. Esse dilema ilustra a tensão entre cooperação e traição, central no chamado “Dilema do Prisioneiro”. Nesse contexto, temos

$$G = \{Ant\tilde{onio}, Bruno\}.$$

$$S_{Ant\tilde{onio}} = \{Confessar, Negar\}, \quad S_{Bruno} = \{Confessar, Negar\}.$$

$$S = \{(Confessar, Confessar), (Confessar, Negar), (Negar, Confessar), (Negar, Negar)\}.$$

As duas funções utilidade

$$u_{Ant\tilde{onio}} : S \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad u_{Bruno} : S \rightarrow \mathbb{R},$$

são dadas por

$$u_{Ant\tilde{onio}}(Confessar, Confessar) = -5, \quad u_{Ant\tilde{onio}}(Confessar, Negar) = 0,$$

$$u_{Ant\tilde{onio}}(Negar, Confessar) = -10, \quad u_{Ant\tilde{onio}}(Negar, Negar) = -2,$$

que representam os ganhos (*payoffs*) de Antônio, e

$$u_{Bruno}(Confessar, Confessar) = -5, \quad u_{Bruno}(Confessar, Negar) = -10,$$

$$u_{Bruno}(Negar, Confessar) = 0, \quad u_{Bruno}(Negar, Negar) = -2,$$

que representam os ganhos (*payoffs*) de Bruno. Representando os ganhos de cada jogador em uma matriz de *payoffs* temos que:

		Bruno	
		Confessar	Negar
Antônio	Confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	Negar	(-10,0)	(-2,-2)

Tabela 4 – Matriz de *Payoffs* (Dilema do prisioneiro)

Considerando que as decisões de ambos são estritamente racionais, e que um desconhece a decisão do outro, cada um deles deve escolher a opção que irá maximizar seu ganho individual.

Analisando os possíveis ganhos de Antônio, temos que:

- Se Bruno confessar, a melhor estratégia para Antônio é também confessar, pois $(-5 > -10)$.

- Se Bruno negar, a melhor estratégia para Antônio é confessar, pois $(0 > -2)$.

Logo, para Antônio, a estratégia dominante é confessar. Agora, analisando de maneira análoga os ganhos de Bruno, temos que:

- Se Antônio confessar, a melhor estratégia para Bruno é também confessar, pois $(-5 > -10)$.
- Se Antônio negar, a melhor estratégia para Bruno é confessar, pois $(0 > -2)$.

Assim, para Bruno, a estratégia dominante também é confessar. Portanto, temos um único perfil estratégico como a solução para o dilema do prisioneiro, no caso, o perfil (Confessar, Confessar). Esse perfil estratégico é justamente o Equilíbrio de Nash, pois é a melhor opção para os dois prisioneiros.

Exemplo 3.2.3. Resolvendo o Exemplo 2.1.1 (Batalha dos sexos), temos que quando o casal opta por realizar atividades separadas, mesmo que cada um esteja envolvido em seus programas favoritos, eles não alcançam plena satisfação. No entanto, quando decidem fazer algo juntos, há um aumento no nível de contentamento simplesmente por estarem em companhia um do outro, o que é ainda mais reforçado se a atividade escolhida for do agrado de ambos. Observamos que os pares {Cinema, Cinema} e {Futebol, Futebol}, que são Equilíbrios de Nash, representam as soluções ideais para esse jogo. Este cenário é mais um exemplo de interação estratégica, semelhante ao dilema dos prisioneiros, onde os participantes obtêm melhores resultados quando conseguem coordenar suas escolhas de forma harmoniosa.

Exemplo 3.2.4. (Barganha com ultimato) Dois indivíduos participam do jogo: Léo que atua como proponente, e Pedro, que assume o papel de respondente. Léo inicia o jogo com R\$10,00 (sendo 10 moedas de R\$ 1,00). Ele deve propor a Pedro uma divisão desse valor, podendo oferecer qualquer quantia entre R\$ 1,00 e R\$ 10,00, com o valor mínimo de oferta sendo R\$ 1,00. Caso Pedro aceite a proposta, ele fica com o valor oferecido, e Léo retém o restante. Por outro lado, se Pedro recusar a oferta, nenhum dos dois recebe qualquer quantia.

Para resolver o problema e encontrar o equilíbrio de Nash no jogo descrito, precisamos analisar as estratégias disponíveis para Léo (o proponente) e Pedro (o respondente), considerando que ambos são racionais e buscam maximizar seus próprios ganhos. O equilíbrio de Nash ocorre quando nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia, dada a estratégia do outro jogador. As estratégias disponíveis são:

- Léo pode escolher qualquer valor entre R\$ 1,00 e R\$ 10,00 para oferecer a Pedro.

- Pedro pode escolher entre aceitar ou recusar a oferta feita por Léo.

Analisando o comportamento de Pedro, considerando que é um ser racional e busca maximizar seu ganho, independente do valor ofertado por Léo, a melhor estratégia para Pedro é aceitar, pois a oferta mínima é R\$ 1,00 e rejeitar resultaria em R\$ 0,00.

Por outro lado, analisando o comportamento de Léo, considerando também um ser racional e visa maximizar seu ganho, sabendo que Pedro aceitará qualquer oferta, deve oferecer o mínimo possível, ou seja, R\$ 1,00.

Deste modo, nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia, pois Léo não pode oferecer menos que R\$ 1,00, e Pedro não tem motivo para rejeitar, pois R\$ 1,00 é melhor que R\$ 0,00. Portanto, o perfil de estratégias do equilíbrio de Nash é o proponente oferecer R\$ 1,00 e o respondente aceitar qualquer oferta, resultando em, Léo recebe R\$ 9,00 e Pedro recebe R\$ 1,00. Esse é o único equilíbrio de Nash do jogo, pois nenhum jogador pode melhorar seu resultado unilateralmente mudando sua estratégia.

Exemplo 3.2.5. Suponha um jogo com dois jogadores, que escolhem estratégias no intervalo $[0, 1]$.

$$S_1 = [0, 1] \quad S_2 = [0, 1]$$

e o domínio será $S_1 \times S_2$ o quadrado compacto de lado 1. A função utilidade de cada jogador, que associa o ganho a cada perfil de estratégia é dada por

$$u_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad u_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

A análise da estrutura dos jogos revela uma interdependência estratégica, na qual o *payoff* de cada agente é função tanto de suas escolhas quanto das decisões tomadas pelos demais participantes do jogo. A partir dessas funções de *payoff*, definimos

$$\phi_1 : S_2 \rightarrow S_1 \quad e \quad \phi_2 : S_1 \rightarrow S_2$$

como funções que, quando aplicadas à jogada de um participante, ϕ_i orienta o adversário a escolher a alternativa que proporciona seu maior benefício possível. Por exemplo: ϕ_1 leva x_2^* no único $\bar{x}_1$ que maximize a utilidade do jogador 1, ou seja, o ponto $(\phi_1(x_2^*), x_2^*)$ será tal que

$$U_1(\bar{x}_1, x_2^*) \geq U_1(x_1, x_2^*) \quad \forall x_1 \in S_1,$$

e, equivalentemente, o ponto $(x_1^*, \phi_2(x_1^*))$ será tal que

$$U_2(x_1^*, \bar{x}_2) \geq U_2(x_1^*, x_2) \quad \forall x_2 \in S_2.$$

Observa-se claramente que a estratégia $\bar{x}_i$ domina todas as demais alternativas disponíveis para o jogador i , quando o oponente opta por x_j^* .

Se considerarmos o produto $\phi_1 \times \phi_2$ obteremos uma aplicação

$$\phi : S_1 \times S_2 \rightarrow S_1 \times S_2,$$

que associa o par (x_1^*, x_2^*) ao par $(\phi_1(x_2^*), \phi_2(x_1^*))$; os pontos fixos desta aplicação serão os equilíbrios de Nash no jogo. Desse modo, comprovar a existência de um equilíbrio de Nash reduz-se à identificação de um ponto fixo da aplicação $\phi_1 \times \phi_2$.

Teorema 3.2.6. (*Teorema Do Equilíbrio De Nash*) *Todo jogo finito, isto é, com finitos jogadores e um conjunto compacto e convexo de estratégias, tem uma solução em estratégias mistas.*

A demonstração deste teorema requer ferramentas matemáticas complexas. Para fins didáticos, introduziremos uma suposição auxiliar (a concavidade na própria estratégia), que simplificará significativamente a compreensão do processo demonstrativo, preservando praticamente intacta a validade do resultado principal - a existência do equilíbrio de Nash.

Precisamos garantir que as funções ϕ_i estejam bem-definidas. Para isso, as funções-utilidade U_1 e U_2 devem ser contínuas, pois segue então pelo *Teorema de Weierstrass* 1.1.7 que existem pontos que maximizam U_1 e U_2 , já que S_1 e S_2 são compactos. Entretanto, a propriedade de continuidade das funções-utilidade, isoladamente, é insuficiente para assegurar a boa definição de ϕ_i , dado que podem ocorrer diversos pontos de máximo para ϕ_i nos domínios analisados. Torna-se necessário, portanto, estabelecer um critério que assegure a unicidade do maximizador da função utilidade. A concavidade das funções de *payoff* em cada estratégia cumpre esse papel. Convém ressaltar que a demonstração clássica de Nash não depende desta hipótese, visto que jogos finitos em estratégias mistas sempre admitem solução. Contudo, para nossa abordagem, tal pressuposto traz significativas vantagens em termos de simplificação metodológica.

Uma vez fixadas as escolhas de todos os outros jogadores $-i$ a função $U_i(x_i, \bar{x}_{-i}) : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ que associa exclusivamente as estratégias do jogador i ao seu *payoff* deve apresentar concavidade em S_1 .

Para garantir a concavidade, bastará para nossos objetivos supor que a segunda derivada de U_i seja negativa no intervalo $[0, 1]$, uma vez fixada a escolha do outro jogador. Portanto, como demonstrado no Corolário 1.2.7, se $U_i'' \leq 0$, implica que U_i é côncava, e desse fato podemos concluir pelo Corolário 1.2.8 a unicidade do maximizador da função utilidade.

Tendo sido estabelecidas as condições necessárias para a existência de ϕ_1 e ϕ_2 , passa-se, neste momento, à análise da exigência de sua continuidade. Nos termos das hipóteses que fundamentam a construção das funções ϕ_i , demonstraremos que tais funções são necessariamente contínuas. Utilizando agora a notação $x \in S_1$ e $y \in S_2$, no caso de ϕ_1 , teremos:

$$\phi_1(y^*) = \bar{x} \in S_1 / U_1(\bar{x}, y^*) \geq U_1(x, y^*) \forall x \in S_1.$$

Afirmção: $\phi_1 : S_2 \rightarrow S_1$ é contínua. Supondo que a afirmação é falsa, ou seja, $\phi_1 : S_2 \rightarrow S_1$ não é contínua, temos que existe uma sequência $y_n \in S_2$ tal que

$$y_n \rightarrow y \text{ mas } \phi_1(y_n) \not\rightarrow \phi_1(y)$$

Tomando uma subsequência y_k de y_n temos $\phi_1(y_k) \rightarrow x$ em que x não é maximizante. Concluimos que, pelo Teorema 1.1.11,

$$U_1(\phi_1(y), y) \geq U_1(x, y)$$

e também que

$$U_1(\phi_1(y), y_n) \rightarrow U_1(\phi_1(y), y),$$

já que $U_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Logo, vemos que para n suficientemente grande:

$$U_1(\phi_1(y), y_n) \rightarrow U_1(\phi_1(y), y)$$

e

$$U_1(\phi_1(y_k), y_k) \rightarrow U_1(x, y), \text{ com } U_1(\phi_1(y), y) \geq U_1(x, y),$$

o que é um absurdo, já que ϕ_1 foi construída como função maximizadora. De forma análoga, constata-se que ϕ_2 também satisfaz a condição de continuidade, o que permite concluir que as funções ϕ_i são contínuas.

Dessa forma, considerando que cada função U_i é contínua e côncava em sua própria variável x_i , a aplicação que associa a cada estratégia do adversário $x_j \in S_j$, a melhor resposta $\phi_i(x_j) \in S_i$, estará bem definida para cada jogador i . Com isso, a função conjunta

$$\phi(x_1, x_2) = (\phi_1(x_2), \phi_2(x_1))$$

é uma aplicação contínua de um conjunto compacto e convexo $S_1 \times S_2$ em si mesmo. Pelo **Teorema do Ponto Fixo de Brouwer** 1.1.10, sabemos que toda função contínua de um conjunto compacto e convexo em si mesmo admite pelo menos um ponto fixo. Assim, existe um ponto

$$(x_1^*, x_2^*) \in S_1 \times S_2,$$

tal que

$$(x_1^*, x_2^*) = (\phi_1(x_2^*), \phi_2(x_1^*)).$$

Este ponto fixo é exatamente um perfil de estratégias no qual cada jogador está escolhendo sua melhor resposta à estratégia do outro. Portanto, esse ponto é um **Equilíbrio de Nash**.

Observação: Note que esse resultado afirma que um jogo estratégico que satisfaz certas condições possui pelo menos um equilíbrio de Nash; mas, um jogo pode ter mais de um equilíbrio como vimos no Exemplo 3.2.3

4 Sequência didática de atividades aplicadas no ensino médio

O trabalho foi desenvolvido em 4 turmas da 2ª série do ensino médio da Escola Estadual Professor José Félix De Carvalho Alves, localizada no município de São Sebastião, estado de Alagoas. As turmas tem média de 40 alunos, com diferentes níveis de conhecimento e domínio em matemática. A aplicação foi realizada nos dias 13 e 14 de fevereiro de 2025, primeira semana do ano letivo.

A atividade foi dividida em três momentos, e cada um deles foi realizado em 50 minutos.

1º momento: Inicialmente o objetivo foi apresentar a teoria dos jogos através de um vídeo protagonizado por dois jovens, e um deles que está estudando a Teoria dos Jogos passa a exemplificar conceitos básicos dessa teoria. No vídeo ele cita várias tipologias e exemplos de jogos e situações para cada uma delas, a saber, jogos de soma zero com exemplo de uma partida de bolinhas de gude; jogos de soma não zero com exemplo de banco imobiliário; jogos simétricos com exemplo do jogo de damas; jogos assimétricos com exemplo de eleições para o grêmio escolar; jogos simultâneos com exemplo de uma partida de futebol; jogos sequenciais com exemplo de leilões; jogos de informações perfeitas com exemplo do xadrez; jogos de informações imperfeitas com exemplo do futebol; jogos de informações completas com exemplo do xadrez; jogos de informações incompletas com exemplo de investimentos no mercado financeiro; jogos cooperativos com exemplo da cooperação de concorrentes na venda de sanduíches na escola.

Após a execução do vídeo, foi distribuído uma ficha para que os alunos preenchessem, citando 3 tipos de jogos, um exemplo para cada tipologia e o motivo pelo qual o exemplo citado se encaixa naquela tipologia.

Tipos de jogos	Exemplos	Por que o exemplo se encaixa nessa tipologia?

A atividade foi desenvolvida nas quatro turmas sem dificuldades, os alunos conseguiram compreender bem os vários tipos de jogos e exemplos apresentados no vídeo. Todos os alunos conseguiram citar três tipos de jogos e exemplos, mas alguns não conseguiram justificar o motivo pelo qual o exemplo citado se encaixava na tipologia.

2º momento: Após recolher as fichas, apresentei o dilema do prisioneiro a partir da utilização de um vídeo, no qual simula uma conversa entre dois detentos, um deles já estava privado de liberdade por motivação desconhecida, e o outro era suspeito de integrar

uma dupla de hackers (Cebolão e Pimentinha) que recebeu a proposta do promotor para estabelecer os anos de prisão de cada um da dupla. Presos em celas separadas e sem comunicação, o suspeito teria que decidir entre confessar ou negar o crime. Assim, o detento mais antigo, explica todas as possibilidades propostas pelo promotor e todas as combinações possíveis, alertando sobre tudo que está em jogo ao tomar sua decisão.

Após a exibição do vídeo, a turma foi dividida em dois grupos, cada grupo representavam os personagens Cebolão e Pimentinha. O grupo que representava o Cebolão ficou na sala e o outro saiu por um breve momento. Para cada aluno do grupo que ficou na sala, foi distribuído uma ficha enumerada entre 1 e 21, para os alunos preencherem, tomando a decisão de confessar ou negar. Em seguida, as fichas foram recolhidas e todos os alunos saíram da sala. A mesma dinâmica foi feita com o grupo de alunos Pimentinha, que receberam novas fichas, também enumeradas de 1 a 21, de maneira aleatória, para garantir que não houve comunicação e conhecimento da decisão tomada pelo aluno do grupo Cebolão. Veja a seguir, um exemplo das fichas que foram distribuídas para cada aluno de cada grupo:

Aluno Cebolão N° 1:	
☐ Confessar	☐ Negar

Aluno Pimentinha N° 1:	
☐ Confessar	☐ Negar

Logo após, organizei os pares de fichas com a mesma numeração, e fiz contabilização junto com a turma, registrando na lousa o número de duplas que confessaram, negaram, e divergiram nas decisões.

Na turma 2ºMA havia 42 alunos presentes, formando assim 21 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Aluno Cebolão	Aluno Pimentinha
1	Confessar	Negar
2	Confessar	Negar
3	Negar	Confessar
4	Negar	Negar
5	Negar	Negar
6	Negar	Confessar
7	Negar	Confessar
8	Negar	Confessar
9	Negar	Negar
10	Confessar	Confessar
11	Negar	Negar
12	Negar	Confessar
13	Negar	Confessar
14	Negar	Negar
15	Negar	Negar
16	Confessar	Negar
17	Negar	Confessar
18	Negar	Negar
19	Confessar	Negar
20	Negar	Confessar
21	Negar	Negar

Tabela 5 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºMA

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que confessaram: 1
- Duplas que negaram: 8
- Duplas que divergiram: 12

Podemos notar que apenas 14 alunos optaram por confessar, o que representa $\frac{1}{3}$ ou pouco mais de 33% do total de alunos da turma.

Na turma 2ºMB havia 34 alunos presentes, formando assim 17 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Aluno Cebolão	Aluno Pimentinha
1	Confessar	Negar
2	Confessar	Confessar
3	Negar	Negar
4	Confessar	Negar
5	Negar	Confessar
6	Negar	Confessar
7	Negar	Negar
8	Negar	Negar
9	Confessar	Negar
10	Confessar	Negar
11	Negar	Negar
12	Confessar	Negar
13	Negar	Negar
14	Negar	Confessar
15	Negar	Confessar
16	Confessar	Negar
17	Negar	Negar

Tabela 6 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºMB

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que confessaram: 1
- Duplas que negaram: 6
- Duplas que divergiram: 10

Podemos notar que apenas 12 alunos optaram por confessar, o que representa $\frac{6}{17}$ ou pouco mais de 35% do total de alunos da turma.

Na turma 2ºTC havia 32 alunos presentes, formando assim 16 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Aluno Cebolão	Aluno Pimentinha
1	Confessar	Negar
2	Confessar	Confessar
3	Negar	Negar
4	Confessar	Negar
5	Negar	Negar
6	Negar	Negar
7	Negar	Negar
8	Negar	Negar
9	Negar	Confessar
10	Negar	Confessar
11	Negar	Confessar
12	Negar	Negar
13	Negar	Negar
14	Negar	Negar
15	Negar	Confessar
16	Negar	Negar

Tabela 7 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºTC

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que confessaram: 1
- Duplas que negaram: 9
- Duplas que divergiram: 6

Podemos notar que apenas 8 alunos optaram por confessar, o que representa $\frac{1}{4}$ ou 25% do total de alunos da turma.

Na turma 2ºTD havia 34 alunos presentes, formando assim 17 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Aluno Cebolão	Aluno Pimentinha
1	Negar	Confessar
2	Confessar	Negar
3	Negar	Confessar
4	Confessar	Confessar
5	Negar	Confessar
6	Confessar	Confessar
7	Negar	Confessar
8	Negar	Confessar
9	Confessar	Confessar
10	Confessar	Confessar
11	Confessar	Confessar
12	Negar	Negar
13	Negar	Negar
14	Negar	Confessar
15	Negar	Negar
16	Negar	Negar
17	Negar	Negar

Tabela 8 – Dilema Do Prisioneiro - 2ºTD

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que confessaram: 5
- Duplas que negaram: 5
- Duplas que divergiram: 7

Podemos notar que 17 alunos optaram por confessar, o que representa $\frac{1}{2}$ ou 50% do total de alunos da turma.

Em seguida, logo após a contabilização das decisões de cada dupla, em cada turma, montei a matriz de payoffs do “Dilema do prisioneiro”, e definir a estratégia dominante para cada jogador

		Pimentinha	
		Confessar	Negar
Cebolão	Confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	Negar	(-10,0)	(-2,-2)

Tabela 9 – Matriz de Payoffs

Cebolão analisa as possíveis decisões de Pimentinha;

- Se Pimentinha confessar, a melhor estratégia para Cebolão é também confessar, pois $(-5 > -10)$.

- Se Pimentinha negar, a melhor estratégia para Cebolão é confessar, pois ($0 > -2$).

Logo, para Cebolão, a estratégia dominante é confessar. E de maneira análoga, a melhor estratégia para Pimentinha também é confessar. Portanto, a estratégia dominante para o "Dilema do prisioneiro" é ambos confessarem.

Analisando as combinações de respostas de cada turma, percebe-se que a turma 2ºTD foi a que melhor compreendeu o dilema, e metade da turma conseguiu tomar a melhor decisão considerando todas as possibilidades de pena. Já as outras três turmas, o número de alunos que optaram pela melhor estratégia foi bem inferior, uma delas com apenas 25%, e outra próxima dos 36%.

3º momento: Já conhecendo o conceito de estratégias dominantes, e com objetivo de testar os conhecimentos dos alunos, adquiridos na análise feita no dilema do prisioneiro, propus para as turmas o jogo do mercado, no qual os alunos simularam serem donos de supermercados, e decidiram por aumentar ou baixar os preços dos produtos. Foi feita na lousa a matriz de payoffs do jogo do mercado 3, e expliquei todos os ganhos de cada combinação de estratégias da matriz. Novamente a turma foi dividida em dois grupos, cada grupo representavam as empresas A e B. O grupo que representava a Empresa A ficou na sala e o outro saiu por um breve momento. Para cada aluno do grupo que ficou na sala, foi distribuído uma ficha enumerada entre 1 e 20, para os alunos preencherem, tomando a decisão de aumentar ou baixar o preço de seus produtos. Em seguida, as fichas foram recolhidas e todos os alunos saíram da sala. A mesma dinâmica foi feita com o grupo de alunos da Empresa B, que receberam novas fichas também enumeradas de 1 a 20 de maneira aleatória, para garantir que não houve comunicação e conhecimento da decisão tomada pelo aluno da Empresa A. Veja a seguir, um exemplo das fichas que foram distribuídas para cada aluno de cada grupo:

Empresa A Nº 1:	
☐ Aumentar o preço	☐ Baixar o preço

Empresa B Nº 1:	
☐ Aumentar o preço	☐ Baixar o preço

Logo após, organizei os pares de fichas com a mesma numeração, e fiz a contabilização junto com a turma, registrando na lousa o número de duplas que aumentaram, baixaram, e divergiram nas decisões.

Na turma 2ºMA tinha 40 alunos presentes, formando assim 20 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Empresa A	Empresa B
1	Baixar	Aumentar
2	Baixar	Aumentar
3	Baixar	Baixar
4	Baixar	Baixar
5	Baixar	Baixar
6	Baixar	Baixar
7	Aumentar	Baixar
8	Baixar	Baixar
9	Baixar	Baixar
10	Baixar	Baixar
11	Aumentar	Aumentar
12	Aumentar	Baixar
13	Baixar	Aumentar
14	Baixar	Aumentar
15	Baixar	Baixar
16	Baixar	Baixar
17	Baixar	Baixar
18	Baixar	Aumentar
19	Baixar	Baixar
20	Baixar	Baixar

Tabela 10 – Jogo Do Mercado - 2ºMA

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que aumentaram: 1
- Duplas que baixaram: 12
- Duplas que divergiram: 7

Podemos notar que 31 alunos optaram por baixar os preços, o que representa $\frac{31}{40}$ ou 77,5% do total de alunos da turma. Comparando com as escolhas no jogo dilema do prisioneiro 5, no qual menos de 34% dos alunos optaram por confessar, houve uma melhora bastante significativa na tomada de decisão, utilizando estratégias dominantes.

Na turma 2ºMB tinha 34 alunos presentes, formando assim 17 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Empresa A	Empresa B
1	Baixar	Baixar
2	Aumentar	Baixar
3	Baixar	Aumentar
4	Baixar	Aumentar
5	Aumentar	Aumentar
6	Aumentar	Baixar
7	Aumentar	Aumentar
8	Aumentar	Aumentar
9	Baixar	Aumentar
10	Baixar	Aumentar
11	Baixar	Baixar
12	Aumentar	Baixar
13	Aumentar	Baixar
14	Baixar	Aumentar
15	Baixar	Aumentar
16	Baixar	Aumentar
17	Baixar	Baixar

Tabela 11 – Jogo Do Mercado - 2ºMB

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que aumentaram: 3
- Duplas que baixaram: 3
- Duplas que divergiram: 11

Podemos notar que 17 alunos optaram por baixar os preços, o que representa $\frac{1}{2}$ ou 50% do total de alunos da turma. Comparando com as escolhas com o jogo anteriormente aplicado [6](#), no qual menos de 36% dos alunos optaram por confessar, houve uma pequena melhora na tomada de decisão, utilizando estratégias dominantes.

Na turma 2ºTC tinha 30 alunos presentes, formando assim 15 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Empresa A	Empresa B
1	Baixar	Baixar
2	Baixar	Baixar
3	Baixar	Baixar
4	Baixar	Baixar
5	Baixar	Baixar
6	Baixar	Aumentar
7	Baixar	Baixar
8	Baixar	Baixar
9	Baixar	Aumentar
10	Baixar	Baixar
11	Baixar	Baixar
12	Baixar	Baixar
13	Aumentar	Baixar
14	Aumentar	Baixar
15	Baixar	Baixar

Tabela 12 – Jogo Do Mercado - 2ºTC

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que aumentaram: 0
- Duplas que baixaram: 11
- Duplas que divergiram: 4

É possível observar que 26 alunos optaram por baixar os preços, o que representa $\frac{26}{30}$ ou quase 87% do total de alunos da turma. Comparando com as escolhas no jogo dilema do prisioneiro 7, no qual somente 25% dos alunos optaram por confessar, houve uma melhora bastante significativa na tomada de decisão, utilizando estratégias dominantes.

Na turma 2ºTD tinha 32 alunos presentes, formando assim 16 duplas. Veja na tabela a seguir, as respostas de cada uma das duplas:

Dupla	Empresa A	Empresa B
1	Baixar	Baixar
2	Baixar	Baixar
3	Baixar	Baixar
4	Baixar	Baixar
5	Baixar	Aumentar
6	Baixar	Baixar
7	Baixar	Baixar
8	Aumentar	Baixar
9	Baixar	Baixar
10	Baixar	Baixar
11	Baixar	Baixar
12	Baixar	Baixar
13	Baixar	Aumentar
14	Aumentar	Baixar
15	Aumentar	Baixar
16	Baixar	Baixar

Tabela 13 – Jogo Do Mercado - 2ºTD

Logo, as combinações das respostas resultaram em:

- Duplas que aumentaram: 0
- Duplas que baixaram: 11
- Duplas que divergiram: 5

Percebe-se que 27 alunos decidiram por baixar os preços, o que representa $\frac{27}{32}$ ou quase 85% do total de alunos da turma. Ao analisar as decisões, é possível identificar que houve uma melhora significativa na tomada de decisão no jogo do mercado em comparação com o dilema do prisioneiro 8, no qual 50% dos alunos optaram por confessar.

Posteriormente, logo após contabilizarmos as estratégias de cada dupla, em cada turma, resolvi o Jogo Do Mercado através da matriz de payoffs 3, utilizando estratégias dominantes.

Empresa A analisa as possíveis decisões da Empresa B;

- Se a empresa B baixar os preços, a melhor estratégia para a empresa A é também baixar, pois $(3 > 2)$.
- Se a empresa B aumentar os preços, a melhor estratégia para a empresa A é baixar, pois $(7 > 5)$.

Portanto, a metodologia de dominância estrita iterada indicou um único perfil estratégico como a solução para o jogo, no caso, o perfil (preço baixo, preço baixo).

5 Conclusão

Neste trabalho, foi apresentada a teoria dos jogos sob uma abordagem histórica, conceitual e didática. Foram discutidos os principais tipos de jogos, suas classificações, bem como métodos para resolução de conflitos estratégicos com o uso de estratégias dominantes e do equilíbrio de Nash. A parte final do trabalho foi dedicada à aplicação prática da teoria em sala de aula, por meio da sequência didática com os jogos “Dilema do Prisioneiro” e “Jogo do Mercado”, desenvolvida com quatro turmas do 2º ano do ensino médio.

A atividade teve como principal objetivo aproximar os alunos de um campo da matemática pouco explorado na educação básica, mas extremamente relevante para o desenvolvimento do pensamento lógico, crítico e estratégico. Através da simulação de situações de conflito e cooperação, os estudantes puderam vivenciar na prática o processo de tomada de decisão em cenários interativos. Observou-se uma evolução significativa nas decisões tomadas pelos alunos entre os dois jogos propostos, indicando a assimilação dos conceitos trabalhados.

Comparando os dados obtidos nas atividades, destaca-se que no primeiro jogo, o Dilema do Prisioneiro, a maioria dos alunos apresentou comportamento aleatório ou impulsivo, refletindo a ausência de uma estratégia estruturada. Após a mediação teórica e a introdução das estratégias dominantes, houve uma mudança no padrão decisório, como evidenciado pelos resultados no Jogo do Mercado, em que a grande maioria dos alunos passou a adotar a melhor decisão estratégica.

Dessa forma, conclui-se que a proposta didática alcançou seus objetivos, promovendo um ambiente de aprendizagem significativo e interativo. A utilização da teoria dos jogos no ensino médio mostrou-se eficaz não apenas como ferramenta pedagógica, mas também como recurso motivador, capaz de despertar o interesse dos alunos pela matemática e por sua aplicação em situações reais. Este trabalho reforça a importância de metodologias inovadoras no processo de ensino-aprendizagem, especialmente aquelas que envolvem experimentação, reflexão e conexão com o cotidiano dos estudantes.

Referências

- MUNKRES, J. *Topology*. 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2014. Citado na página 4.
- LIMA, Elon Lages. *Elementos de Topologia Geral*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. p. 1–5.
- LIMA, Elon Lages. *Análise Real – Volume 1: Funções de uma variável*. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 13. ed., 2020. 216 p.
- LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. v. 1. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. 344 p.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise I*. v. 1. 2. ed. Campinas, 1996. 256 p.
- SARTINI, Brígida Alexandre; GARBUGIO, Gilmar; BORTOLOSSI, Humberto José; SANTOS, Polyane Alves; BARRETO, Larissa Santana. Uma introdução à teoria dos jogos. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal da Bahia, 25 a 29 de outubro de 2004.
- CÂMARA, Samuel Façanha. *Teoria dos jogos*. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2011. 92 p. ISBN 978-85-7988-113-8.
- PEREIRA, Emanuel Fabiano Menezes. *Teoria dos Jogos com Aplicações no Ensino Médio*. 2014. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014.
- SIMÕES, Pedro Henrique de Castro. *O teorema de equilíbrio de Nash*. 2007. Relatório de Iniciação Científica – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.
- CORDEIRO, Yuri Vieira. *Teoria dos Jogos: Uma Introdução com Aplicações*. 2017. 53 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.
- LEANDRO, Gilmar dos Santos. *Uma introdução da teoria dos jogos para turmas finais do ensino médio*. 2018. 52 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Seropédica, 2018.
- FRANÇA, Lucas da Silva. *Oficinas de matemática experimental: teoria dos jogos e a batalha dos trezentos*. 2018. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET, Ilhéus, 2018.

SANTOS, Cleverton Souza. Introdução à teoria dos jogos para o ensino médio. 2016. 179 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2016.

PEREIRA, Silvio Barros. Introdução à teoria dos jogos e a matemática no ensino médio. 2014. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, 2014.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Equilíbrio de Nash. Campinas: Matemática Multimídia – UNICAMP, 2010. 1 vídeo (10 min). Disponível em: <<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1123>>. Acesso em: 12 nov. 2024.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Dilema do prisioneiro. Campinas: Matemática Multimídia – UNICAMP, 2010. 1 vídeo (10 min). Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1089>>. Acesso em: 12 nov. 2024.

APÊNDICE A – Atividades aplicadas na escola

Registros da 1ª atividade

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Soma zero	bolinha de vidro	A perda de um, é o ganho do outro.
Simétrico	Dama	Se depende da jogada do adversário.
Assimétrico	Eleição	A identidade dos jogadores determina a estratégia.

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Soma zero	bolinha de vidro	um tem que perder para outro ganhar
Sequencial	Deixão	o jogador toma atitude após o outro jogar
Simultâneo	Intelectual	jogadores tomam decisão ao mesmo tempo

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Jogo simultâneo	Futebol	um jogador não espera o outro para jogar
Jogo sequencial	Deixão	cada um age após o outro de forma sequencial
Jogo sequencial de forma peripetiva	Xadrez	um age após o outro em perfeita formação

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Simétrico	Dama	cada jogador age de forma simétrica ao outro
Jogo sequencial	Deixão	pois um jogador dá um lance antes do outro.
Jogo Simultâneo	Futebol	um jogador não espera o outro jogar.

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Jogo sequencial	Dama e Deixão	Porque um dá o lance de que o outro joga.
Jogo assimétrico	Eleição	Porque é assimétrico
Jogo simétrico	Xadrez	Porque todos sabem a estratégia

Figura 7 – Atividade 1

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Soma zero	Domino	um ganha e outro perde
Simultâneo	Futebol	agora ao mesmo tempo
Sequencial	xadrez	um só toma a decisão depois que vê o do outro

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Simultâneo	futebol	A decisão é tomada antes do adversário saber.
Sequencial	beibão	cada jogador toma sua decisão com base no que o outro fez.
Informação perfeita	xadrez	Estratégias e ganhos conhecidos.

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Soma zero	Bolinha de gude	As jogadas começam com a mesma quantidade de bolinhas para os jogadores, e para vencer um dos dois precisa perder.
Jogo Simultâneo	Vôlei	É algo que você só planeja na hora, é algo simultâneo.
Jogo Sequencial	Leilão	É algo onde sua decisão se baseia na do outro.

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Soma zero	Basquete	Um ganha e o outro perde
Jogo simultâneo	Futebol	Aqui ao mesmo tempo
Jogo sequencial	Dama	Só decide depois do outro

Tipos de jogos	Exemplo	Motivo (Porque seu exemplo se encaixa nessa tipologia)
Simétrico	Damas	As próximas jogadas não baseadas no anterior.
Soma zero	Bolinha de gude	Um dos dois jogadores ganha.
Sequencial	Leilão	Tem uma ordem nas jogadas.

Figura 8 – Atividade 1

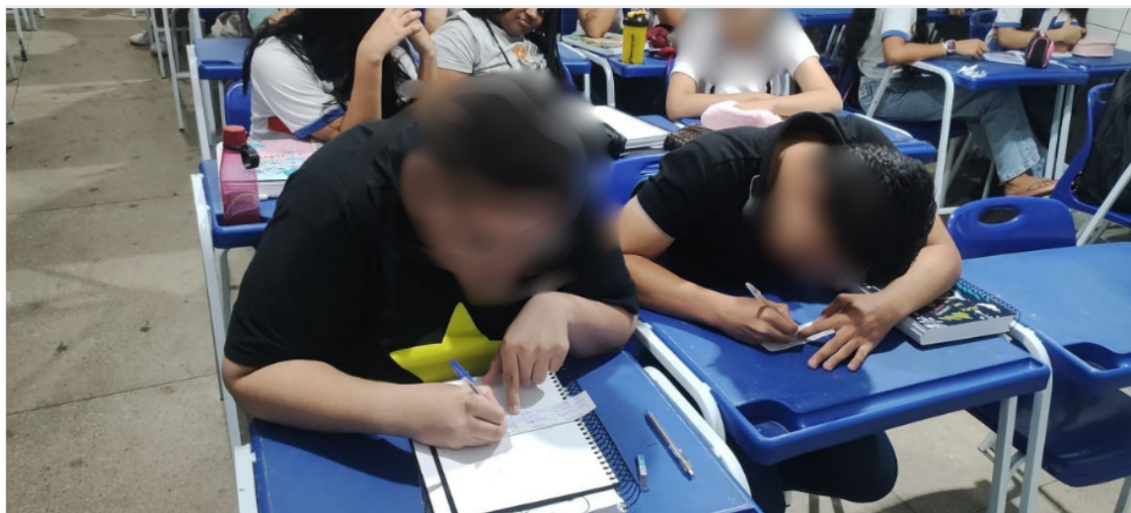


Figura 9 – Alunos realizando a 1ª atividade



Figura 10 – Reprodução do vídeo da 1ª atividade



Figura 11 – Reprodução do vídeo da 1ª atividade

Registros da 2ª atividade (Dilema do prisioneiro)



Figura 12 – Reprodução do vídeo da 2ª atividade



Figura 13 – Reprodução do vídeo da 2ª atividade

Aluno Cebolão Nº 1: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 1: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 2: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 2: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 3: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 3: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 4: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 4: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 5: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 5: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 6: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 6: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 7: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 7: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 8: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 8: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 9: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 9: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 10: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 10: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 11: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 11: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 12: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 12: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 13: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 13: ☒ Confessar ☐ Negar

Figura 14 – Dilema do prisioneiro 2ºMA

Aluno Cebolão Nº 14:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Cebolão Nº 15:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Cebolão Nº 16:	
☒ Confessar	☐ Negar

Aluno Cebolão Nº 17:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Cebolão Nº 18:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Cebolão Nº 19:	
☒ Confessar	☐ Negar

Aluno Cebolão Nº 20:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Cebolão Nº 21:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Cebolão Nº 22:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 14:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 15:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 16:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 17:	
☒ Confessar	☐ Negar

Aluno Pimentinha Nº 18:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 19:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 20:	
☒ Confessar	☐ Negar

Aluno Pimentinha Nº 21:	
☐ Confessar	☒ Negar

Aluno Pimentinha Nº 22:	
☐ Confessar	☒ Negar

Figura 15 – Dilema do prisioneiro 2ºMA

Aluno Cebolão Nº 1: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 1: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 2: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 2: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 3: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 3: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 4: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 4: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 5: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 5: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 6: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 6: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 7: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 7: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 8: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 8: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 9: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 9: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 10: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 10: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 11: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 11: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 12: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 12: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 13: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 13: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 14: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 14: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 15: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 15: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 16: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 16: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 17: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 17: ☐ Confessar ☒ Negar

Figura 16 – Dilema do prisioneiro 2ºMB

Aluno Cebolão Nº 1: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 1: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 2: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 2: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 3: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 3: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 4: ☒ Confessar ☐ Negar	Aluno Pimentinha Nº 4: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 5: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 5: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 6: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 6: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 7: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 7: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 8: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 8: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 9: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 9: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 10: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 10: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 11: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 11: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 12: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 12: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 13: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 13: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 14: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 14: ☐ Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 15: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 15: ☒ Confessar ☐ Negar
Aluno Cebolão Nº 16: ☐ Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 16: ☐ Confessar ☒ Negar

Figura 17 – Dilema do prisioneiro 2ºTC

Aluno Cebolão Nº 1: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 1: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 2: ☒ Confessar () Negar	Aluno Pimentinha Nº 2: () Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 3: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 3: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 4: ☒ Confessar () Negar	Aluno Pimentinha Nº 4: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 5: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 5: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 6: ☒ Confessar () Negar	Aluno Pimentinha Nº 6: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 7: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 7: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 8: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 8: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 9: ☒ Confessar () Negar	Aluno Pimentinha Nº 9: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 10: ☒ Confessar () Negar	Aluno Pimentinha Nº 10: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 11: ☒ Confessar () Negar	Aluno Pimentinha Nº 11: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 12: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 12: () Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 13: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 13: () Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 14: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 14: ☒ Confessar () Negar
Aluno Cebolão Nº 15: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 15: () Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 16: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 16: () Confessar ☒ Negar
Aluno Cebolão Nº 17: () Confessar ☒ Negar	Aluno Pimentinha Nº 17: () Confessar ☒ Negar

Figura 18 – Dilema do prisioneiro 2ºTD

Registros da 3ª atividade (Jogo do mercado)

Empresa A Nº 1: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 1: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 2: () Aumentar o preço (x) Baixar o preço	Empresa B Nº 2: (x) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 3: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 3: () Aumentar o preço (x) Baixar o preço
Empresa A Nº 4: () Aumentar o preço (x) Baixar o preço	Empresa B Nº 4: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 5: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 5: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 6: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 6: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 7: (X) Aumentar o preço (x) Baixar o preço	Empresa B Nº 7: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 8: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 8: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 9: () Aumentar o preço (●) Baixar o preço	Empresa B Nº 9: () Aumentar o preço (●) Baixar o preço
Empresa A Nº 10: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 10: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 11: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 11: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 12: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 12: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 13: () Aumentar o preço (x) Baixar o preço	Empresa B Nº 13: (x) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 14: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 14: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço

Figura 19 – Jogo do mercado 2ºMA

Empresa A Nº 15: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 15: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 16: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 16: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 17: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 17: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 18: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 18: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 19: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 19: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 20: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 20: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 21: () Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 21: () Aumentar o preço () Baixar o preço

Figura 20 – Jogo do mercado 2ºMA

Empresa A Nº 1: ☒ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 1: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 2: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 2: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 3: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 3: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 4: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 4: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 5: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 5: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 6: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 6: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 7: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 7: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 8: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 8: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 9: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 9: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 10: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 10: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 11: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 11: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 12: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 12: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 13: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 13: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 14: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 14: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 15: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 15: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 16: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 16: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 17: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 17: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço

Figura 21 – Jogo do mercado 2ºMB

Empresa A Nº 1: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 1: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 2: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 2: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 3: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 3: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 4: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 4: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 5: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 5: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 6: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 6: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 7: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 7: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 8: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 8: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 9: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 9: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço
Empresa A Nº 10: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 10: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 11: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 11: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 12: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 12: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 13: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 13: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 14: ☒ Aumentar o preço ☐ Baixar o preço	Empresa B Nº 14: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço
Empresa A Nº 15: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço	Empresa B Nº 15: ☐ Aumentar o preço ☒ Baixar o preço

Figura 22 – Jogo do mercado 2ºTC

Empresa A Nº 1: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 1: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 2: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 2: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 3: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 3: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 4: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 4: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 5: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 5: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 6: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 6: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 7: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 7: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 8: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 8: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 9: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 9: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 10: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 10: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 11: () Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 11: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 12: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 12: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 13: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 13: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço
Empresa A Nº 14: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 14: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 15: (X) Aumentar o preço () Baixar o preço	Empresa B Nº 15: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço
Empresa A Nº 16: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço	Empresa B Nº 16: () Aumentar o preço (X) Baixar o preço

Figura 23 – Jogo do mercado 2ºTD

Registros de toda a turma no desenvolvimento das atividades



Figura 24 – Turma 2ºMA



Figura 25 – Turma 2ºMB



Figura 26 – Turma 2ºTC



Figura 27 – Turma 2ºTD