UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE ITABAIANA
CURSO DE MATEMÁTICA

EMILLY BEZERRA DE OLIVEIRA

Uma Introdução ao Funtor Tor

ITABAIANA/SE
2025

EMILLY BEZERRA DE OLIVEIRA

UMA INTRODUÇÃO AO FUNTOR TOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Samuel Brito Silva.

ITABAIANA/SE
2025

Emilly Bezerra de Oliveira

Uma Introdução ao Funtor Tor

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática de Itabaiana, Universidade Federal de Sergipe, como requisito avaliativo para obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

____

Prof. Primeiro, Dr.
Instituição xxxx

____

Prof. Segundo, Dr.
Instituição xxxx

____

Prof. Terceiro, Dr.
Instituição xxxx

Resultado ____________________ Data ______/______/______

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, pelas conquistas, pela força nos momentos difíceis e por sustentar minha saúde e esperança. Em cada passo, senti Sua presença ao meu lado.

Ao meu orientador, Samuel Brito, minha eterna gratidão. Desde o segundo período, você tem sido mais que um professor, foi um verdadeiro mestre, um guia e meu pai acadêmico. Com você aprendi mais do que matemática, aprendi a ser uma estudante melhor, a apresentar com segurança, a estudar com profundidade. Foi uma verdadeira inspiração para mim. Sua paciência, seus conselhos, as conversas, tudo isso foi essencial para minha formação. Que sorte a minha ter cruzado com um professor tão dedicado.

Agradeço aos professores do DMAI que fizeram parte da minha caminhada. Cada um, com seu jeito, sua paixão pelo ensino, deixou uma marca em mim. Obrigada pelos ensinamentos, pela inspiração e pela generosidade, foi uma honra ser aluna de vocês.

Meus pais, Elândia e Edvaldo, que são minha base. Obrigada por cada gesto de amor, por todo zelo, cuidado, incentivo e confiança. Tudo o que sou devo a vocês, que me ensinaram os valores mais importantes: respeito, empatia e bondade. Foram 23 anos de muito amor e aprendizado. Amo vocês profundamente. Ao meu irmão, Edney, obrigada por sempre me escutar, por ser meu porto seguro nas crises e nas alegrias dessa jornada. Em cada desabafo, você esteve lá, me acolhendo com carinho. Te amo, meu irmão.

A toda minha família, minha eterna gratidão. Um carinho especial à minha prima Fernanda e à minha tia Eli, que sempre celebraram comigo cada pequena conquista. Obrigada por torcerem tanto por mim e pelo apoio incondicional. À minha madrinha Maíra, obrigada pelo apoio constante e pela presença sempre atenta.

Aos meus amigos do colégio — Ellen, Gabriel, Joaquim, Sérgio e Whinoma — obrigada por estarem ao meu lado desde o ensino médio, acreditando no meu sonho e em mim. Vocês são parte importante dessa história. Cada risada, cada conversa e cada abraço foram combustível para continuar.

Ao meu namorado, José Antônio, meu companheiro dentro e fora da universidade. Entre cadernos e corredores, fomos colegas, até que o carinho se transformou em amor. Obrigada por todos os momentos compartilhados, pelas ideias leves nos dias pesados, pelo apoio, pela paciência, risadas, pelos conselhos e pelo amor constante. Obrigada por acreditar em mim, mesmo nos dias em que eu duvidava. Que alegria imensa foi viver esta experiência ao seu lado.

Por fim, aos amigos que fiz na universidade, meu grupinho: Geovania, Alyce, Albert, Cauã e Vinicius. Obrigada por cada momento. Estudamos muito, rimos demais, passeamos, comemos muita besteira, enfrentamos perrengues, dividimos alegrias e medos. Que maravilha foi viver tudo isso com vocês. Levo no coração todas as lembranças que criamos juntos.

A todos vocês, minha gratidão mais profunda. Vocês fizeram essa caminhada mais leve, mais rica e muito mais bonita.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal estudar o funtor Tor, uma importante ferramenta da álgebra homológica e geometria algébrica. O funtor $Tor_n^A(M, N)$ mede a falha do produto tensorial em preservar exatidão, revelando informações sobre a estrutura dos módulos envolvidos. Para isso, o trabalho é dividido em três capítulos. O primeiro apresenta conceitos preliminares como A-módulos, sequências exatas e o Lema da Serpente. O segundo capítulo aborda a construção do produto tensorial, com destaque para a sua propriedade exata. No terceiro capítulo, estuda-se o funtor Tor a partir de uma resolução projetiva e da homologia do complexo tensorizado, discutindo também suas principais propriedades e aplicações.

Palavras-chave: A-módulos; Sequências Exatas; Álgebra Homológica; Produto Tensorial; Módulos Planos; Funtor Tor.

ABSTRACT

This work aims to study the functor Tor, an tool important in homological algebra and algebraic geometry. The functor $Tor_n^A(M, N)$ measures the failure of the tensor product to preserve exactness, revealing information about the structure of the involved modules. To achieve this, the work is divided into three chapters. The first presents preliminary concepts such as A-modules, exact sequences, and the Snake Lemma. The second chapter discusses the construction of the tensor product, highlighting its exactness property. In the third chapter, the Tor functor is studied from a projective resolution and the homology of the tensorized complex, also discussing its main properties and applications.

Keywords: A-modules; Exact Sequences; Homological Algebra; Tensor Product; Flat Modules; Tor Functor.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo introdutório sobre o funtor Tor, um conceito fundamental na Álgebra Homológica, com aplicações relevantes tanto na Álgebra Comutativa quanto na Geometria Algébrica. O funtor Tor surge como uma ferramenta que mede a falha do produto tensorial em preservar a exatidão de sequências exatas, permitindo uma análise refinada da estrutura de módulos. Além disso, esse funtor ajuda a caracterizar vários outros invariantes algébricos.

Dividimos este trabalho em três capítulos. No primeiro, apresentamos as preliminares, reunindo diversos conceitos e resultados que servirão de base ao longo do texto. Neste capítulo, estudamos a teoria de A-módulos, fundamental na Álgebra Comutativa, destacando seu papel como uma generalização dos espaços vetoriais vistos em Álgebra Linear. Além disso, exploramos o conceito de sequências exatas, ferramenta essencial no desenvolvimento posterior, em conjunto com o Lema da Serpente.

O segundo capítulo, é dedicado à construção do produto tensorial, que por sua vez, é uma ferramenta central na teoria dos módulos. Estudamos sua definição, principais propriedades e aplicações. Destacamos especialmente a propriedade exata do produto tensorial, discutindo em detalhes como e por que o produto tensorial pode falhar em preservar a exatidão de uma sequência curta exata.

Por fim, no capítulo três, tratamos do tema principal deste trabalho: o funtor Tor. Após revisarmos conceitos fundamentais da Álgebra Homológica, como resoluções projetivas e homologia de complexos, apresentamos a construção do funtor Tor. Discutimos também suas principais propriedades, interpretações e a relação com outras ferramentas da Álgebra, consolidando os tópicos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos e resultados fundamentais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Em particular, abordaremos noções básicas sobre A-módulos, onde A será anel comutativo e com unidade, incluindo definições, exemplos e propriedades relevantes, bem como discutiremos aspectos centrais sobre sequências exatas e a demonstração do Lema da Serpente. Esses conteúdos são muito importantes em Álgebra Homológica e serão essenciais para a compreensão das construções e argumentos desenvolvidos nos capítulos seguintes, como o produto tensorial e o funtor Tor.

2.1 MÓDULOS E SUBMÓDULOS

Definição 1. Seja A um anel. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado da multiplicação escalar:

$$\begin{array}{rcl} A \times M & \to & M \\ (a, m) & \mapsto & am \end{array}$$

é dito um A-**módulo** se para todos $a_1, a_2 \in A$ e $m_1, m_2 \in M$:

1. $1m_1 = m_1$;
2. $(a_1a_2)m_1 = a_1(a_2m_1)$;
3. $(a_1 + a_2)m_1 = a_1m_1 + a_2m_1$;
4. $a_1(m_1 + m_2) = a_1m_1 + a_1m_2$.

Exemplo 1. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Na definição de A-módulo, podemos considerar o anel A como sendo o corpo $\mathbb{K}$, e o grupo M por V. Dessa forma, temos que V é um $\mathbb{K}$-módulo.

Exemplo 2. Todo anel A poder ser visto como A-módulo de forma natural.

Exemplo 3. Sejam A um anel e t inteiro positivo. Então $A^t = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : a_i \in A\}$ com a soma definida:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) + (a'_1, a'_2, \ldots, a'_t) = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \ldots, a_t + a'_t)$$

e a multiplicação por escalar:

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_t) = (aa_1, aa_2, \ldots, aa_t)$$

é um A-módulo.

Exemplo 4. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Dado um polinômio $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ da forma $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, indicamos por $p(T)$ o operador linear $p(T) = a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^n$, onde I é o operador identidade em V e $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k-vezes}$. Então, V é um $\mathbb{K}[X]$-módulo em relação a adição usual de V e a multiplicação por escalar dada por $p(X) \cdot v := p(T)(v)$.

Exemplo 5. Todo grupo abeliano $(G, +)$ pode ser considerado como um módulo sobre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. De fato, basta considerar, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $a \in G$, a seguinte multiplicação por escalar:

$$n \cdot a = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{n-vezes} & se \quad n > 0; \\ 0 & se \quad n = 0; \\ \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{|n|-vezes} & se \quad n < 0. \end{cases}$$

Definição 2. Sejam A um anel e M um A-módulo. Um subgrupo N de M é um A-**submódulo** de M se a propriedade abaixo é satisfeita.

$$an \in N, \forall\ a \in A \text{ e } n \in N.$$

Em outras palavras, N é um A-submódulo de M se for uma A-módulo com a multiplicação por escalar restrita a N.

Exemplo 6. Seja M um A-módulo. É imediato que, $N = \{0\}$ e $N = M$ são A-submódulos, chamados submódulos triviais de M.

Definição 3. Seja M um A-módulo e $v_1, \ldots, v_m \in M$. Dados $a_1, \ldots, a_m \in A$, chamamos a expressão

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

de **combinação linear** dos elementos $v_1, \ldots, v_m$ com coeficientes em A.

Seja $S \subseteq M$ um subconjunto de um A-módulo M. Denotamos por $\langle S \rangle$ o conjunto formado por todas as combinações lineares com coeficientes em A.

Proposição 1. O conjunto $\langle S \rangle$ é um submódulo de M.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_m = 0.$$

Logo, $0 \in \langle S \rangle$. Seja $x \in \langle S \rangle$. Por definição, existem $v_1, \ldots, v_k \in S$ e $a_1, \ldots, a_k \in A$ tal que

$$x = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k.$$

Então, dado $a \in A$ teremos

$$ax = aa_1 v_1 + \ldots + aa_k v_k$$

como $aa_i \in A$, com $i = 1, \ldots, k$. Temos uma combinação linear de elementos de S. Logo, $ax \in \langle S \rangle$. Assim, $\langle S \rangle$ é um submódulo de M. □

Todo submódulo N de M é da forma $N = \langle S \rangle$ para algum subconjunto S de N. Chamamos $\langle S \rangle$ de **submódulo gerado** de S. Se $M = \langle S \rangle$, dizemos que S é um conjunto **gerador** do A-módulo M.

Exemplo 7. Seja $G = M$ um A-módulo gerado por $m_1, \ldots, m_t$ e $I \subset A$ um ideal. Definimos IM como sendo o conjunto

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i m_i : a_i \in I \right\}.$$

Note que IM é um submódulo de M. Em primeiro lugar, é fácil ver que IM é subgrupo aditivo de M. Por outro lado, dados $a \in A$ e $m \in IM$ temos que

$$am = a \sum_{i=1}^{t} a_i m_i = \sum_{i=1}^{t} a a_i m_i.$$

Uma vez que I é ideal de A, $aa_i \in I$, logo $am \in IM$.

Proposição 2. (Soma de submódulos) Sejam M um A-módulo e $M_1, M_2, \ldots, M_t$ A-submódulos de M. O conjunto

$$\sum_{i=1}^{t} M_i = \left\{ \sum_{i=1}^{t} m_i : m_i \in M_i \right\}$$

é um A-submódulo de M.

Demonstração. De fato, temos que $\sum_{i=1}^{t} M_i$ é subgrupo de M. Sejam $m = m_1 + \ldots + m_t \in \sum_{i=1}^{t} M_i$ e $a \in A$. Daí, $am = a(m_1 + \ldots + m_t) = (am_1 + \ldots + am_t)$. Como M_i é A-submódulo, $am_i \in M_i$ $\forall i = 1, \ldots, t$. Logo, $am \in \sum_{i=1}^{t} M_i$. Portanto, $\sum_{i=1}^{t} M_i$ é A-submódulo de M. □

Proposição 3. (Interseção de submódulo) Sejam M um A-módulo e $M_1, ..., M_t$ A-submódulos de M. Então $M_1 \cap \ldots \cap M_t$ é um A-submódulo de M.

Demonstração. Sabemos que a interseção de subgrupos é um subgrupo. Nos resta mostrar que, dado $m \in M_1 \cap \ldots \cap M_t$ e $a \in A$, temos $am \in M_1 \cap \ldots \cap M_t$. Note que $am \in M_i$, para todo $i = 1, \ldots, t$, pois os $M_i^{'} s$ são A-submódulos de M. Logo, $am \in M_1 \cap \ldots \cap M_t$, concluindo que $M_1 \cap \ldots \cap M_t$ é A-submódulo de M. □

Definição 4. Seja M um A-módulo e sejam N, P submódulos de M. Definimos

$$(N : P) := \{a \in A : aP \subseteq N\}.$$

Em particular, $(0 : M)$ é o conjunto de todos os $a \in A$ tal que $aM = 0$. Este conjunto é chamado de **anulador** de M e é denotado por $Ann(M)$.

Proposição 4. Seja M um A-módulo e considere os A-submódulos N e P de M. Então $(N : P)$ é um ideal de A. Em particular, $Ann(M)$ é um ideal de A.

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $b, b^{'} \in (N : P)$. Como $b \in (N : P)$, temos $bP \subseteq N$. Logo,

$$(ab)P = a(bP) \subseteq aN \subseteq N,$$

o que mostra que $ab \in (N : P)$. Para todo $p \in P$, vale

$$(b - b^{'})p = bp - b^{'}p \in N,$$

pois $bp, b^{'}p \in N$. Assim, $b - b^{'} \in (N : P)$. Portanto, $(N : P)$ é um ideal de A. □

Exemplo 8. Sejam A um anel com unidade, $I \subseteq A$ um ideal e M um A-módulo tal que $IM = 0$. Então, podemos considerar M um (A/I)-módulo com o seguinte produto por escalar:

$$\begin{array}{ccc} (A/I) \times M & \rightarrow & M \\ (\bar{x}, m) & \mapsto & \bar{x} \cdot m := xm \end{array}$$

onde x é um representante de $\bar{x}$. Essa função está bem definida. De fato, sejam $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in A/I$ e $m \in M$ tais que $\overline{x_1} = \overline{x_2}$. Logo, $x_1 - x_2 \in I$. Como $IM = 0$, temos $(x_1 - x_2)m = 0$ para todo $m \in M$. Assim, $x_1 m = x_2 m$. Portanto, $\bar{x} \cdot m$ não depende do representante da classe.

Definição 5. Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. Como $(M, +)$ é um grupo abeliano e $(N, +)$ é subgrupo normal de M, faz sentido considerar o grupo quociente $(M/N, +)$, isto é, o conjunto $M/N = \{\overline{m} : m \in M\}$, das classes laterais de N em M munido da adição

$$\begin{array}{cccc} + : & (M/N) \times (M/N) & \rightarrow & M/N \\ & (\overline{m_1}, \overline{m_2}) & \mapsto & \overline{m_1 + m_2} \end{array}$$

o grupo $(M/N, +)$ com a multiplicação escalar:

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & A \times (M/N) & \rightarrow & M/N \\ & (a, \overline{m}) & \mapsto & a\overline{m} = \overline{am} \end{array}$$

Vamos mostrar que as operações acima estão bem definidas, ou seja, independem da escolha do representante da classe. De fato, como $(M/N, +)$ é grupo, a operação de soma já está bem definida. Por outro lado, sejam $(a, \overline{m})$, $(a, \overline{m'}) \in A \times M/N$ tais que $\overline{m} = \overline{m'}$. Logo, $m - m' \in N$. Dessa forma, $a(m - m') \in N$, então $am - am' \in N$. Ou seja, $\overline{am - am'} = \overline{0}$ que implica em $a\overline{m} = a\overline{m'}$. Portanto, M/N é um A-módulo, chamado **A-módulo quociente**.

Exemplo 9. Considere $M = \mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}$-módulo e $N = n\mathbb{Z}$ um $\mathbb{Z}$-submódulo de M. Então, temos o $\mathbb{Z}$-módulo quociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exemplo 10. Considere o conjunto $M_2(\mathbb{R})$, formado por todas as matrizes 2×2 reais, que por sua vez é um módulo sobre $\mathbb{R}$. Seja $N \subset M_2(\mathbb{R})$ o submódulo das matrizes cuja segunda coluna é zero. Então, temos o $\mathbb{R}$-módulo quociente $M_2(\mathbb{R})/N$.

Exemplo 11. Considere $A = \mathbb{Z}[x]$ o anel de polinômios com coeficientes inteiros e o A-módulo $M = A$. Seja $N = (x^2 + 1)$, o submódulo gerado pelo polinômio $x^2 + 1$. Temos assim, o módulo quociente $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$.

2.2 HOMOMORFISMOS DE A-MÓDULOS

Na Álgebra, os homomorfismos são fundamentais para conectar diferentes estruturas algébricas. Na Álgebra Linear, manifestam-se como transformações lineares, que preservam a adição de vetores e a multiplicação por escalares, refletindo as propriedades dos espaços vetoriais em suas imagens. De modo similar, na teoria de módulos, os homomorfismos de A-módulos generalizam as transformações lineares para estruturas onde os escalares pertencem a um anel A. Essa generalização é essencial para estudar relações e propriedades entre módulos sobre o mesmo anel.

Definição 6. Sejam M e $M^{'}$ dois A-módulos. Uma aplicação $f : M \to M^{'}$ é um **homomorfismo de A-módulos** se:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$; $\forall m_1, m_2 \in M$;
2. $f(am) = af(m)$; $\forall m \in M$ e $\forall a \in A$.

Se f for um homomorfismo bijetivo, então f será chamado de **isomorfismo** de A-módulos. Neste caso, diremos que M e $M^{'}$ são **isomorfos** como A-módulos e usaremos a notação $M \simeq M^{'}$.

Exemplo 12. Sejam M e N A-módulos. As funções f e g definidas da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & N \\ & m & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & M & \to & M \\ & m & \mapsto & m \end{array}$$

são homomorfismos de A-módulos conhecidos como mapa nulo e aplicação identidade, respectivamente.

Exemplo 13. Seja M um A-módulo e $m_1, \ldots, m_t$ geradores de M, vimos no Exemplo 3 que $A^t = \{(a_1, \ldots, a_t) : a_i \in A\}$ é um A-módulo. Vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} h: & A^t & \to & M \\ & (a_1, \ldots, a_t) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

é um homomorfismo de A-módulos.
Sejam $(a_1, \ldots, a_t)$, $(a'_1, \ldots, a'_t) \in A^t$ e $a \in A$. Então,

$$\begin{aligned} h(a(a_1, \ldots, a_t) + (a'_1, \ldots, a'_t)) &= h(aa_1 + a'_1, \ldots, aa_t + a'_t) \\ &= \sum_{i=1}^{t} (aa_i + a'_i)m_i \\ &= a\sum_{i=1}^{t} a_i m_i + \sum_{i=1}^{t} a'_i m_i \\ &= ah(a_1, \ldots, a_t) + h(a'_1, \ldots, a'_t). \end{aligned}$$

Definição 7. Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de A-módulos. O **núcleo** e a **imagem** de f são, respectivamente, $Ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ e $Im(f) = \{f(m) : m \in M\}$.

Note que tais conjuntos são A-submódulos. Dos conceitos da teoria de grupos, sabemos que, $Ker(f)$ é um subgrupo de M e $Im(f)$ é um subgrupo de N. Assim, seja $a \in A$ e $m \in Ker(f)$, temos:

$$f(am) = af(m) = a \cdot 0 = 0.$$

Logo, $am \in Ker(f)$, o que mostra que $Ker(f)$ é A-submódulo de M. Analogamente, seja $a \in A$ e $n \in Im(f)$. Por definição, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Assim,

$$an = af(m) = f(am),$$

e como $am \in M$, conclui-se que $an \in Im(f)$. Portanto, $Im(f)$ é A-submódulo de N.

Exemplo 14. Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. A projeção canônica $\pi : M \to M/N$ definida por $\pi(m) = \overline{m}$ é homomorfismo de A-módulos sobrejetor com núcleo igual a N. De fato, π é homomorfismo pois, sejam $m_1, m_2 \in M$ e $a \in A$.

$$\pi(am_1 + m_2) = \overline{(am_1 + m_2)} = a\overline{m_1} + \overline{m_2} = a\pi(m_1) + \pi(m_2).$$

Além disso, qualquer elemento de M/N é uma classe $\overline{m}$ para algum $m \in M$. Como $\pi(m) = \overline{m}$, segue que cada elemento de M/N é imagem de algum elemento de M. Portanto, π é sobrejetora. Agora, observe que

$$Ker(\pi) = \{m \in M : \pi(m) = \overline{0}\} = \{m \in M \mid \overline{m} = \overline{0}\}.$$

Por outro lado, como $\overline{m} = \overline{0}$, temos que $m \in N$. Assim, $m \in Ker(\pi)$ se, e só se, $m \in N$, ou seja, $Ker(\pi) = N$.

Observação 1. Dado $f : M \to N$ um homomorfismo de A-módulos. Uma vez que $Im(f)$ é A-submódulo de N, temos que $N/Im(f)$ é um A-módulo, que será chamado de **co-núcleo** de f e será denotado por $Coker(f)$.

Definição 8. Sejam M e N A-módulos. Vamos denotar o conjunto de todos os homomorfismos de A-módulos $f : M \to N$, por $Hom_A(M,N) = \{f : M \to N |\ f$ é homomorfismo$\}$. Note que as operações

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(M,N) \times Hom_A(M,N) & \to & Hom_A(M,N) \\ (f,g) & \mapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times Hom_A(M,N) & \to & Hom_A(M,N) \\ (a,f) & \mapsto & (af)(x) = af(x) \end{array}$$

tornam $Hom_A(M,N)$ um A-módulo.

Sejam $u : M' \to M$ e $v : N \to N'$ dois homomorfismos de A-módulos, então eles determinam as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{cccc} \overline{u}: & Hom_A(M,N) & \to & Hom_A(M',N) \\ & f & \mapsto & \overline{u}(f) = f \circ u \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \overline{v}: & Hom_A(M,N) & \to & Hom_A(M,N') \\ & f & \mapsto & \overline{v}(f) = v \circ f \end{array}$$

que são homomorfismos de A-módulos por ser composição de homomorfismos.

Lema 1. Sejam $f \in Hom_A(M,M')$ e $N \subseteq Ker(f)$. Então, existe um único homomorfismo de A-módulos $\overline{f} : M/N \to M'$ definido por $\overline{f}(\overline{m}) = f(m)$, de modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & M/N \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

ou seja, $f = \overline{f} \circ \pi$, onde π é a projeção canônica.

Demonstração. Seja $f : M \to M'$ homomorfismo de A-módulos tal que $N \subseteq Ker(f)$. Defina a função

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & M/N & \to & M' \\ & \overline{m} & \mapsto & \overline{f}(\overline{m}) = f(m). \end{array}$$

Mostraremos que $\overline{f}$ está bem definida e é homomorfismo de A-módulos com a propriedade que $f = \overline{f} \circ \pi$. Sejam $\overline{m_1}$ e $\overline{m_2} \in M/N$ tais que $\overline{m_1} = \overline{m_2}$. Dessa forma

$$\overline{m_1} - \overline{m_2} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{m_1 - m_2} = \overline{0} \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in N$$

como $N \subseteq Ker(f)$, segue que $m_1 - m_2 \in Ker(f)$. Logo, $f(m_1 - m_2) = 0$, e como f é homomorfismo

$$0 = f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) \Rightarrow f(m_1) = f(m_2).$$

Isto é, dados $\overline{m_1}$ e $\overline{m_2} \in M/N$ com $\overline{m_1} = \overline{m_2}$ mostramos que $\overline{f}(\overline{m_1}) = \overline{f}(\overline{m_2})$, portanto $\overline{f}$ está bem definida. O fato de f ser homomorfismo de A-módulos, implica em $\overline{f}$ ser homomorfismo de A-módulos, pois a composição de homomorfismos é também um homomorfismo. A comutatividade segue direto da definição

$$(\overline{f} \circ \pi)(m) = \overline{f}(\pi(m)) = \overline{f}(\overline{m}) = f(m), \text{para todo } m \in M.$$

Quanto a unicidade, agora suponha que exista $g : M/N \to M'$ tal que $g \circ \pi = f$. Sendo π sobrejetora existe uma inversa a direita. Assim,

$$g \circ \pi = f = \overline{f} \circ \pi \Rightarrow g \circ \pi \circ \pi^{-1} = \overline{f} \circ \pi \circ \pi^{-1} \Rightarrow g = \overline{f}.$$

Portanto, $\overline{f}$ é único. □

Teorema 1. (1° Teorema do Isomorfismo de A-módulos) Sejam M, M' dois A-módulos e N um A-submódulo de M. Seja $f : M \to M'$ homomorfismo de A-módulos tal que $Ker(f) = N$. Então, $M/N \simeq Im(f)$ como A-módulos. Em particular, se f é sobrejetora $M/N \simeq M'$ como A-módulos.

Demonstração. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} g: & M/N & \to & Im(f) \\ & \overline{m} & \mapsto & f(m). \end{array}$$

Pelo Lema 1, g está bem definida e é homomorfismo de A-módulos. Note que g é sobrejetiva, pois é o mesmo homomorfismo anterior $\overline{f}$ com contra-domínio restrito a sua imagem. Dessa forma, para concluirmos o Teorema basta mostrar que g é injetiva. Sejam $\overline{a}$ e $\overline{b} \in M/N$ tal que $g(\overline{a}) = g(\overline{b})$ note que,

$$g(\overline{a}) = g(\overline{b}) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(a - b) = 0 \Rightarrow (a - b) \in Ker(f) = N \Rightarrow (a - b) \in N.$$

Logo,

$$\overline{a - b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}.$$

□

Proposição 5. Sejam M um A-módulo e $N \subseteq M$ um A-submódulo. Existe uma correspondência bijetiva entre os A-submódulos de M/N e os A-submódulos de M que contém N.

Demonstração. Seja $\pi : M \to M/N$ projeção canônica. Sabemos que π é homomorfismo sobrejetivo com núcleo igual a N. Dado W um submódulo de M, a imagem de um homomorfismo sempre é submódulo do contradomínio, então $\pi(W)$ é um submódulo de M/N. Por outro lado, seja S submódulo de M/N, defina $W = \pi^{-1}(S) = \{m \in M | \pi(m) \in$

$S\}$. Vejamos que $\pi^{-1}(S)$ é de fato um submódulo de M, se $m_1, m_2 \in \pi^{-1}(S)$, então $\pi(m_1), \pi(m_2) \in S$. Como S é submódulo, temos

$$\pi(m_1) + \pi(m_2) = \pi(m_1 + m_2) \in S,$$

o que implica $m_1 + m_2 \in \pi^{-1}(S)$. Além disso, $N \subset W$. De fato, como S é submódulo de M/N, contém o elemento nulo $\overline{0}$. Para todo $n \in N$, temos $\pi(n) = \overline{n} = \overline{0}$. Logo, para todo n em N, $n \in \pi^{-1}(S) = W$. Note que π e π^{-1} são aplicações inversas. De fato, se $W \subseteq M$ é submódulo com $N \subseteq W$, então:

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \{m \in M : \pi(m) \in \pi(W)\} \supseteq W.$$

Mas se $m \in \pi^{-1}(\pi(W))$, então $\pi(m) = \pi(w)$ para algum $w \in W$, ou seja, $m - w \in Ker(\pi) = N \subseteq W$, e como $w \in W$, temos $m \in W$. Logo, $\pi^{-1}(\pi(W)) = W$. Do mesmo modo, se $S \subseteq M/N$, então:

$$\pi(\pi^{-1}(S)) = \{\pi(m) : m \in M; \pi(m) \in S\} = S.$$

Portanto, as aplicações são inversas entre si, estabelecendo uma bijeção entre os submódulos de M que contém N e os submódulos de M/N. □

2.3 A-MÓDULOS FINITAMENTE GERADOS

Seja M um A-módulo. M é dito **finitamente gerado** se existem finitos $m_1, m_2, \ldots, m_t \in M$ tais que

$$M = \langle m_1, \cdots, m_t \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{t} a_j m_j : a_j \in A \right\}.$$

Os elementos $m_1, m_2, \ldots, m_t$ são chamados de **geradores** de M. Se M é gerado por um único elemento diremos que M é **cíclico**. Observe que todo anel A pode ser visto como um A-módulo cíclico sobre A gerado por 1.

Exemplo 15. A^t é um A-módulo finitamente gerado.

De fato, dado o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$, com $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ elemento de A^t, onde a i-ésima coordenada é 1 e as demais coordenadas são zero, geram A^t. Pois, dado $(a_1, \ldots, a_t) \in A^t$ teremos

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_t(0, 0, \ldots, 1) = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i.$$

Proposição 6. Seja M um A-módulo. Então, M é finitamente gerado se, e somente se, existe N um A-submódulo de A^t, com $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que A^t/N é isomorfo a M como A-módulos.

Demonstração. Seja M um A-módulo finitamente gerado e $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ geradores de M. A função ϕ, definida da seguinte forma

$$\begin{array}{cccc} \phi: & A^t & \rightarrow & M \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_t) & \mapsto & a_1 m_1 + \ldots + a_t m_t = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

é homomorfismo. Temos que ϕ é sobrejetivo, pois para cada $m \in M$ temos que

$$m = a_1 m_1 + \ldots + a_t m_t = \phi(a_1, \ldots, a_t).$$

Logo, pelo Teorema 1 $A^t/Ker(\phi) \simeq M$. Como $Ker(\phi) = N$ é A-submódulo de A^t concluímos o que queríamos. Por outro lado, seja $\phi : A^t/N \rightarrow M$ um isomorfismo com N A-submódulo de A^t. Considere a projeção canônica $\pi : A^t \rightarrow A^t/N$. Então, $f = \phi \circ \pi : A^t \rightarrow M$ é sobrejetiva. Dessa forma, dado $m \in M$ existe $(a_1, \ldots, a_t) \in A^t$ tal que

$$m = f(a_1, \ldots, a_t) = f(\sum_{i=1}^{t} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{t} f(a_i e_i) = \sum_{i=1}^{t} a_i f(e_i)$$

ou seja, $f(e_1), \ldots, f(e_i)$ são geradores de M, portanto, M é finitamente gerado. □

Observação 2. Nem sempre um submódulo de um módulo finitamente gerado, é finitamente gerado. Por exemplo, considere o anel de polinômios $M = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]$, que é M-módulo finitamente gerado por $\{1\}$. No entanto, o submódulo $N = (x_1, x_2, \ldots)$ de M não é finitamente gerado, pois não admite um conjunto finito de geradores. Isso é sempre verdadeiro se o anel for "Noetheriano".

Definição 9. Seja M um A-módulo. Como nos Espaços Vetoriais, dizemos que os elementos $m_1, \ldots, m_t$ de M são **Linearmente Independentes (L.I.)** sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_j m_j = 0$, com $a_j \in A$, implicar que $a_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, t$. Caso contrário, diremos que $m_1, \ldots, m_t$ são **Linearmente Dependentes (L.D.)**.

Definição 10. Um A-módulo M é dito **livre** se admite um conjunto finito de geradores $m_1, \ldots, m_t$ que são L.I. Neste caso, diremos que $m_1, \ldots, m_t$ é uma base para M e escrevemos $M = Am_1 \oplus \ldots \oplus Am_t$.

Exemplo 16. Note que $(\mathbb{Z}_n, +)$ não é livre como $\mathbb{Z}$-módulo. Na verdade, é possível verificar que qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}_n$ é L.D. Considere, por exemplo, $\mathbb{Z}_6$ e o subconjunto $\{\overline{2}, \overline{5}\}$. Se $a\overline{2} + b\overline{5} = \overline{0}$ tome $a = 30$ e $b = 30$. De forma geral, podemos considerar os coeficientes sendo múltiplo de n.

Observação 3. Sejam M um A-módulo livre e $m \in M$. Então, existem únicos $a_1, ..., a_t \in A$ tais que

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i$$

onde $\{m_1, \ldots, m_t\}$ é base de M.

Observação 4. Nem sempre um submódulo de um módulo livre, é livre. Considere como exemplo o anel $\mathbb{Z}_6$ dos inteiros módulo 6, que é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre com base $\{\overline{1}\}$. Note que $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ é um $\mathbb{Z}_6$-submódulo de $\mathbb{Z}_6$ que não é livre. De fato, qualquer elemento não nulo de N é anulado por 3, ou seja, $3 \cdot n = 0$ para todo $n \in N$.

Observação 5. Note que se M é livre, de base $\{m_1, \ldots, m_t\}$, é equivalente a $M \simeq A^t$. Da Proposição 6, sabemos que M ser finitamente gerado é equivalente a dizer que existe A-submódulo N de A^t tal que $A^t/N \simeq M$. Na demonstração da mesma proposição $N = Ker(h)$

$$\begin{array}{rccc} h\colon & A^t & \rightarrow & M \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_t) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{t} a_i m_i \end{array}$$

note que, sendo M A-módulo livre $Ker(h) = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. De fato, se $(a_1, \ldots, a_t) \in Ker(h)$

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_t) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} a_i m_i = 0$$

como $m_1, \ldots, m_t$ é L.I. Logo, $a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, t$. Portanto, $M \simeq A^t$.

Observação 6. Sabemos que em um espaço vetorial, um vetor não nulo forma um conjunto L.I. No entanto, o mesmo não é válido para A-módulos. Por exemplo, considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Temos que:

$$2 \cdot (0, \overline{1}) = (0, \overline{0}).$$

Dessa forma, o conjunto $\{(0, \overline{1})\}$ é formado por um elemento não nulo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, e não é L.I.

Definição 11. Seja M um A-módulo. Dizemos que M é **livre de torção** se, para todo $a \in A$ e todo $m \in M$, vale que

$$am = 0 \quad \text{implica em} \quad a = 0 \text{ ou } m = 0.$$

Ou seja, nenhum elemento não nulo de M é anulado por um elemento não nulo de A.

Exemplo 17. Se o anel A é domínio de integridade, um A-módulo sobre si mesmo é livre de torção.

Exemplo 18. O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ é um módulo livre de torção.

Exemplo 19. O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}[x]$ (conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros) é livre de torção.

Definição 12. Um A-módulo P é **projetivo** se for um somando direto de um A-módulo livre, isto é, se existe um A-módulo N tal que $P \oplus N$ é livre.

Exemplo 20. Todo módulo livre é projetivo.

Exemplo 21. Nem todo módulo projetivo é livre. Considere $A = \mathbb{Z}_6$. O teorema chinês do resto nos garante que existe um isomorfismo entre $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. Como $\mathbb{Z}_6$ é um módulo sobre ele mesmo, então é um módulo livre. Ou seja, $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_6$-módulo projetivo, que não é livre, ja que todo $\mathbb{Z}_6$-módulo livre tem cardinalidade maior ou igual a 6.

Lema 2. Seja P um módulo projetivo. Se M e N são A-módulos e $f : P \to N$, $g : M \to N$ morfismos de A-módulos com g sobrejetor, então existe um morfismo $h : P \to M$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja Q um A-módulo tal que $P \oplus Q$ é livre. Tome uma base $(b_j)_{j \in I}$ de $P \oplus Q$, onde $b_j = (p_j, q_j)$. Como g é sobrejetiva, podemos escolher para cada $j \in I$, um elemento $m_j \in M$ de modo que $g(m_j) = f(p_j)$. Defina então o morfismo $\overline{h} : P \oplus Q \to M$ pondo $\overline{h}(p_j, q_j) = m_j$, para cada $j \in I$. Sendo $i : P \to P \oplus Q$ o morfismo inclusão, é imediato verificar que a composição $h = \overline{h} \circ i$ cumpre a igualdade $g \circ h = f$. $\square$

2.4 BREVE APANHADO HOMOLÓGICO

Nesta subseção, apresentaremos um breve panorama de conceitos da Álgebra Homológica, com foco na definição de sequências exatas e em algumas de suas propriedades mais relevantes. Ao final, abordaremos a demonstração do Lema da Serpente, a qual foi estruturada por meio de lemas auxiliares, com o objetivo de torná-la mais clara e organizada.

Definição 13. Uma sequência de homomorfismos de A-módulos

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

é dita exata em M_i se $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. A **sequência é exata** se é exata em cada M_i.

Proposição 7. Considere os A-módulos M', M e M'' e sejam $f : M' \to M$ e $g : M \to M''$ homomorfismos de A-módulos. Então, temos:

1. A sequência de A-módulos $0 \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{f} M$ é exata se, e somente se, f é injetiva.
2. A sequência de A-módulos $M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{g'} 0$ é exata se, e somente se, g é sobrejetiva.
3. A sequência de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata se, e somente se, f é injetiva, g é sobrejetiva e g induz um isomorfismo de $Coker(f) = M/f(M')$ com o A-módulo M''.

Demonstração. 1. Suponha que f é injetiva. Então, $Ker(f) = \{0\}$. Note que $Im(f') = \{0\}$, e portanto, $Ker(f) = Im(f')$. Assim, a sequência é exata. Agora, suponha que a sequência é exata. Nesse caso, $Ker(f) = Im(f')$. Como sabemos que $Im(f') = \{0\}$, conclui-se que $Ker(f) = \{0\}$. Logo, f é injetiva.
2. Suponha que g é sobrejetiva. Então, $Im(g) = M''$. Note que $Ker(g') = M''$, de modo que $Im(g) = Ker(g')$. Portanto, a sequência é exata. Reciprocamente, suponha que a sequência é exata. Assim, $Im(g) = Ker(g')$. Como $Ker(g') = M''$, conclui-se que $Im(g) = M''$,ou seja, g é sobrejetiva.
3. Seja

$$\begin{array}{rcl} \overline{g} : M/f(M') & \to & M'' \\ \overline{u} & \mapsto & g(u). \end{array}$$

Suponha que a sequência é exata. Queremos mostrar que $\overline{g}$ está bem definida e é um isomorfismo de A-módulos. Como g, pelo item 2, é sobrejetiva, a aplicação $\tilde{g} : M/Ker(g) \to M''$ dada por $\tilde{g}(\overline{u}) = g(u)$ é isomorfismo. Além disso, dado que $f(M') = Ker(g)$, temos $\tilde{g} = \overline{g}$. Portanto, $\overline{g}$ é isomorfismo de A-módulos.
Suponha agora que g induz um isomorfismo e que $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ e $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ são exatas pelo item 1 e item 2. Resta mostrar que $Im(f) = Ker(g)$.
($\subseteq$): Seja $u \in Im(f)$. Então, temos

$$g(u) = \overline{g}(\overline{u}) = \overline{g}(\overline{0}) = 0_{M''}.$$

Isto é, $u \in Ker(g)$.
($\supseteq$): Seja $u \in Ker(g)$. Como $g(u) = 0$, temos que $\overline{g}(\overline{u}) = 0$. Isso significa que $\overline{u} \in Ker(\overline{g})$, mas como $\overline{g}$ é isomorfismo $Ker(\overline{g}) = \{0\}$. Logo, $\overline{u} = \overline{0}$, o que nos diz que $u \in Im(f)$. Portanto, $Im(f) = Ker(g)$, como queríamos demonstrar.

□

As sequências dos tipos 1, 2 e 3 são chamadas, respectivamente, de **sequência exata à esquerda**, **sequência exata à direita** e **sequência exata curta**.

Exemplo 22. Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. Consideremos o homomorfimo inclusão $i : N \hookrightarrow M$ e a projeção canônica $\pi : M \to M/N$. Então, a sequência

$$0 \to N \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$$

é exata, pois i é injetiva, π é sobrejetiva e $Im(i) = N = Ker(\pi)$.

Proposição 8. Sejam L, M e N A-módulos. A sequência de homomorfismos

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$$

é exata se, e somente se, β induz um isomorfismo de $Coker(\alpha)$ em N.

Demonstração. Suponha que a sequência é exata. Então, β é sobrejetiva e $Im(\alpha) = Ker(\beta)$. Pelo Teorema 1, temos

$$Im(\beta) \simeq M/Ker(\beta).$$

Como $Im(\beta) = N$, obtemos:

$$N \simeq M/Ker(\beta) = M/Im(\alpha).$$

Portanto, concluímos que $N = Coker(\alpha)$.
Agora, suponha que $N = Coker(\alpha) = M/Im(\alpha)$. Para demonstrar que a sequência é exata, devemos mostrar que β é sobrejetiva e que $Im(\alpha) = Ker(\beta)$. Como $N = M/Im(\alpha)$, o homomorfismo $\beta : M \to N$, definido por $\beta(x) = \overline{x}$, é sobrejetiva. Resta verificar que $Im(\alpha) = Ker(\beta)$.
($\subseteq$): Seja $x \in Ker(\beta)$. Então, $\beta(x) = \overline{0}$. Pela definição de β, isso implica que $\overline{x} = \overline{0}$, ou seja, $x \in Im(\alpha)$.
($\supseteq$): Seja $y \in Im(\alpha)$. Então, $\beta(y) = \overline{y} = \overline{0}$, o que implica $y \in Ker(\beta)$. Portanto, concluímos que $Ker(\beta) = Im(\alpha)$, o que garante a exatidão da sequência. □

Lema 3. Sejam X, Y, Z três A-módulos e $f : X \to Y$ um homomorfismo de A-módulos. Se, para quaisquer homomorfismos $g_1, g_2 : Y \to Z$ a igualdade $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implicar $g_1 = g_2$. Então, f é sobrejetivo.

Demonstração. Suponha por absurdo que f não é sobrejetivo. Então, existe algum $y \in Y$ tal que $y \notin Im(f)$. Defina dois homomorfismos $g_1, g_2 : Y \to Z$, onde $Z = Y/Im(f)$, da seguinte forma:

$$g_1(x) = x + Im(f) \text{ (projeção) e } g_2(x) = 0 \text{ (nulo)}.$$

Temos então

$$g_1(f(x)) = f(x) + Im(f) = 0 = g_2(f(x)),$$

isto é, $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. No entanto, $g_1 \neq g_2$, pois $g_1(y) = y + Im(f) \neq 0 = g_2(y)$, o que contradiz a hipótese. Logo, f deve ser sobrejetiva. □

Lema 4. Sejam X, Y, Z três A-módulos e $f : Y \to X$ um homomorfismo de A-módulos. Se, para quaisquer homomorfismos $g_1, g_2 : Z \to Y$ a igualdade $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implicar $g_1 = g_2$. Então, f é injetivo.

Demonstração. Suponha por contradição que f não é injetiva. Então, existe algum $0 \neq y \in Ker(f)$. Definimos dois homomorfismos $g_1, g_2 : Z \to Y$, onde $Z = A$, da seguinte forma:

$$g_1(a) = ay \text{ e } g_2(a) = 0.$$

Temos que ambos são homomorfismos de A-módulos e para todo $a \in A$

$$f(g_1(a)) = f(ay) = af(y) = a \cdot 0 = 0 = f(g_2(a)).$$

Assim, $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Porém, $g_1 \neq g_2$, pois $g_1(1) = y \neq 0 = g_2(1)$, o que contradiz a hipótese. Logo, f é injetivo. $\square$

Proposição 9. Sejam os A-módulos M', M e M''. A sequência $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ é exata se, e somente se, para todo A-módulo N a sequência

$$0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N)$$

é exata.

Demonstração. Suponha que a sequência $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ é exata. Vamos mostrar que a sequência

$$0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N)$$

também é exata, isto é, que $\overline{v}$ é injetiva e que $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$. Primeiro, mostraremos a injetividade de $\overline{v}$.
Seja $f \in Ker(\overline{v})$, ou seja, $\overline{v}(f) = 0$. Por definição,

$$\overline{v}(f) = f \circ v : M \to N,$$

daí $f \circ v = 0$. Como v é sobrejetiva, dado $x \in M''$, existe $m \in M$ tal que $v(m) = x$. Assim,

$$f(x) = f(v(m)) = 0.$$

Logo, $f \equiv 0$. Portanto, $Ker(\overline{v}) = \{0\}$ e concluímos que $\overline{v}$ é injetiva.
Agora, verifiquemos a igualdade $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$.
($\subseteq$): Seja $f \in Im(\overline{v})$. Então, existe um homomorfismo g tal que $\overline{v}(g) = f = g \circ v$. Temos que $\overline{u}(f) = f \circ u$. Substituindo f, obtemos $\overline{u}(f) = g \circ v \circ u$. Como $Ker(v) = Im(u)$, segue que $v \circ u = 0$, logo $\overline{u}(f) = 0$. Portanto, $f \in Ker(\overline{u})$.
($\supseteq$): Seja $g \in Ker(\overline{u})$, isto é, $g \circ u = 0$. Definimos $f : M'' \to N$, por $f(m'') = g(m)$, onde $v(m) = m''$. O homomorfismo f está bem definido, pois, se $m_1, m_2 \in M$ são tais que $v(m_1) = v(m_2)$, então

$$v(m_1) - v(m_2) = 0 \Rightarrow (m_1 - m_2) \in Ker(v) = Im(u).$$

Logo, existe $m' \in M'$ tal que $u(m') = m_1 - m_2$. Aplicando g, temos $g(u(m')) = g(m_1 - m_2) = 0$. Assim, $g(m_1) = g(m_2)$.
Verifiquemos que f é homomorfismo de A-módulos. Sejam $m_1', m_2' \in M''$ e $a \in A$. Então, existem m_1, m_2 tais que $v(m_1) = m_1''$, $v(m_2) = m_2''$. Daí, temos

$$m_1'' + m_2'' = v(m_1 + m_2) \text{ e } am_1'' = av(m_1) = v(am_1).$$

Dessa forma,

$$f(am_1'' + m_2'') = g(am_1 + m_2) = ag(m_1) + g(m_2) = af(m_1'') + f(m_2'').$$

Note que para todo $m \in M$,

$$(f \circ v)(m) = f(v(m)) = g(m),$$

pela definição de f. Logo $f \circ v = g$. Assim para qualquer $g \in Ker(\overline{u})$ construímos um $f \in Hom(M'', N)$ tal que $\overline{v}(f) = f \circ v = g$. Portanto, $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$.
Reciprocamente, suponha que a sequência

$$0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N)$$

é exata. Mostremos que v é sobrejetiva e que $Im(u) = Ker(v)$. Para provar a sobrejetividade de v, usaremos o Lema 3. Seja $g_1, g_2 : M'' \to N$ dois homomorfismos tais que

$$g_1 \circ v = g_2 \circ v.$$

Logo, $\overline{v}(g_1) = \overline{v}(g_2)$. Como $\overline{v}$ é injetiva, concluímos que $g_1 = g_2$. Portanto, v é sobrejetiva.
Agora, vamos mostrar $Im(u) = Ker(v)$.
($\subseteq$): Seja $m \in Im(u)$. Então, existe $m' \in M'$ tal que $u(m') = m$. Usando que $Im(\overline{v}) = Ker(\overline{u})$, e que para todo $f : M'' \to N$ temos $\overline{u} \circ \overline{v}(f) = f \circ v \circ u = 0$, segue que $v(u(m')) = 0$, com $m' \in M'$. Portanto, $m \in Ker(v)$.
($\supseteq$): Seja $m \in Ker(v)$, ou seja, $v(m) = 0$. Tome $N = M/Im(u)$ e π a projeção canônica. Daí,

$$\overline{u}(\pi) = \pi(u(m')) = \overline{0}.$$

Logo, $\pi \in Ker(\overline{u}) = Im(\overline{v})$, o que implica que existe $f : M'' \to N$ tal que $\overline{v}(f) = \pi$. Como $\overline{v}(f) = f \circ v$, então

$$\pi(m) = f(v(m)) = \overline{0},$$

concluindo que $Ker(v) \subset Ker(\pi)$ e sabemos que $Ker(\pi) \subset Im(u)$. Logo, $m \in Im(u)$. □

Proposição 10. A sequência $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ é exata se, e somente se, para todo A-módulo M a sequência

$$0 \to Hom(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N'')$$

é exata.

Demonstração. Suponha que a sequência $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ é exata. Para mostrar que a sequência

$$0 \to Hom(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N'')$$

também é exata, basta verificar que $\overline{u}$ é injetiva e que $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$.
Sejam $f, g : M \to N' \in Hom(M, N')$ tais que $\overline{u}(f) = \overline{u}(g)$. Pelo homomorfismo induzido, temos que $\overline{u}(f(m)) = u(f(m))$ e $\overline{u}(g)(m) = u(g(m))$. Assim, $u(f(m)) = u(g(m))$ para todo $m \in M$. Como u é injetora, então $f(m) = g(m)$ para todo $m \in M$. Portanto, $\overline{u}$ é

injetora. Agora, mostraremos que $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$.
($\subseteq$): Seja $f \in Im(\overline{u})$. Então, existe homomorfismo $g \in Hom(M, N')$ tal que $\overline{u}(g) = f = u \circ g$. Substituindo f em $\overline{v}(f) = v \circ f$, teremos $\overline{v}(f) = v \circ u \circ g = 0$, pois $Ker(v) = Im(u)$. Daí, $\overline{v}(f) = 0$. Portanto, $f \in Ker(\overline{v})$.
($\supseteq$): Seja $f \in Ker(\overline{v})$. Então, $\overline{v}(f(m)) = 0$, $\forall m \in M$. Pelo homomorfismo induzido, temos $\overline{v}(f(m)) = v(f(m)) = 0$, ou seja, $f(m) \in Ker(v) = Im(u)$. Daí, existe um $n' \in N'$ tal que $u(n') = f(m)$ para cada $m \in M$. Definimos então uma função $g : M \to N'$ por $g(m) = n'$, onde $u(n') = f(m)$. Verificamos a seguir que g está bem definida:
Suponha que existam $m_1, m_2 \in M$ tais que $m_1 = m_2$, $g(m_1) = n'_1$ e $g(m_2) = n'_2$. Assim, temos que $m_1 - m_2 = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 = f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) = u(n'_1) - u(n'_2) \\ \Rightarrow u(n'_1) = u(n'_2) \Rightarrow n'_1 = n'_2 \Rightarrow g(m_1) = g(m_2). \end{aligned}$$

Mostremos agora que g é um homomorfismo:
Sejam $m_1, m_2 \in M$, com $g(m_1) = n'_1$, $g(m_2) = n'_2$ e $g(m_1 + m_2) = n'$. Temos

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = u(n'_1) + u(n'_2) = u(n'_1 + n'_2).$$

Portanto, $g(m_1 + m_2) = n'_1 + n'_2 = g(m_1) + g(m_2)$. Além disso, para $a \in A$ e $m_1 \in M$

$$f(am_1) = af(m_1) = au(n'_1) = u(an'_1).$$

Assim, $g(am_1) = an'_1$. Assim, g é um homomorfismo. Como $u(g(m)) = f(m)$ para todo $m \in M$, temos que $f = \overline{u}(g)$, ou seja, $f \in Im(\overline{u})$.
Reciprocamente, suponha que a sequência

$$0 \to Hom(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N'')$$

é exata. Para mostrar que $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ é exata, basta verificar que u é injetiva e que $Im(u) = Ker(v)$. Para mostrar a injetividade de u, usaremos o Lema 4.
Suponha que existam homomorfismo $g_1, g_2 : M \to N'$ tais que $u \circ g_1 = u \circ g_2$. Pelo homomorfismo induzido temos que $u \circ g_1 = \overline{u}(g_1)$ e $u \circ g_2 = \overline{u}(g_2)$. Como $\overline{u}$ é injetiva, $g_1 = g_2$. Portanto, u é injetiva. Agora, mostraremos a igualdade $Im(u) = Ker(v)$.
($\subseteq$): Como $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$ e $(\overline{v} \circ \overline{u})(f(m)) = v \circ u \circ f$, $\forall f \in Hom(M, N')$. Temos que $f = id : N' \to N'$. O que implica em $v \circ u = 0$. Logo, $Im(u) \subseteq Ker(v)$.
($\supseteq$): Suponha, por absurdo, que existe $n \in Ker(v)$ tal que $n \notin Im(u)$. Então, $u(n') \neq n$, $\forall n' \in N'$. Assim, $v(u(n')) \neq v(n) = 0$. Logo, $v(u(n')) \neq 0$, $\forall n' \in N'$. Daí, $\overline{v} \circ \overline{u} \neq 0$ que é um absurdo, pois $Im(\overline{u}) = Ker(\overline{v})$. Portanto, $Ker(v) \subseteq Im(u)$. □

A partir deste ponto, apresentaremos a demonstração do Lema da Serpente. Com o objetivo de tornar a apresentação mais clara e organizada, estruturaremos a prova por meio de lemas auxiliares.

Lema 5. Considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "j'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

então, as restrições de g e j definem homomorfismos

$$g_1 : Ker(f') \to Ker(f) \quad \text{e} \quad j_1 : Ker(f) \to Ker(f'')$$

dados por $g_1(m') = g(m')$ e $j_1(m) = j(m)$, respectivamente.

Demonstração. Seja $m' \in Ker(f')$, ou seja, $f'(m') = 0$. Como o diagrama comuta, temos:

$$f(g(m')) = g'(f'(m')) = g'(0) = 0,$$

logo $g(m') \in Ker(f)$. Assim, g_1 está bem definido como $g_1(m') = g(m')$. Além disso, g_1 é um homomorfismo, pois é a restrição de g, que é homomorfismo.
Analogamente, seja $m \in Ker(f)$, ou seja, $f(m) = 0$. Pela comutatividade do diagrama, temos:

$$f''(j(m)) = j'(f(m)) = j'(0) = 0,$$

portanto $j(m) \in Ker(f'')$. Assim, $j_1(m) = j(m)$ está bem definido, e como j_1 é restrição de j, que é homomorfismo, então j_1 também é um homomorfismo. Com isso, os homomorfismos g_1 e j_1 estão bem definidos conforme o enunciado. $\square$

Lema 6. Considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "j'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Então, os homomorfismos g' e j' induzem homomorfismos

$$g_2 : Coker(f') \to Coker(f) \quad \text{e} \quad j_2 : Coker(f) \to Coker(f'')$$

dados, respectivamente, por $g_2(\overline{n'}) = \overline{g'(n')}$ e $j_2(\overline{n}) = \overline{j'(n)}$, onde as barras denotam as classes de equivalência nos cokernels correspondentes.

Demonstração. Sejam $\overline{n'_1} = \overline{n'_2} \in Coker(f')$, então $n'_1 - n'_2 \in Im(f')$. Assim, existe $m' \in M'$ tal que $f'(m') = n'_1 - n'_2$. Pela comutatividade do diagrama,

$$f(g(m')) = g'(f'(m')) = g'(n'_1 - n'_2) = g'(n'_1) - g'(n'_2)$$

e portanto $g'(n'_1) - g'(n'_2) \in Im(f)$, o que implica $\overline{g'(n'_1)} = \overline{g'(n'_2)}$. Logo, g_2 está bem definida.
Agora, verificaremos que g_2 é homomorfismo. Para $\overline{n'_1}, \overline{n'_2} \in Coker(f')$ e $a \in A$, temos:

$$g_2(a\overline{n'_1}+\overline{n'_2}) = g_2(\overline{an'_1+n'_2}) = \overline{g'(an'_1+n'_2)} = a\overline{g'(n'_1)}+\overline{g'(n'_2)} = ag_2(\overline{n'_1})+g_2(\overline{n'_2}).$$

Analogamente, sejam $\overline{n_1} = \overline{n_2} \in Coker(f)$, então $n_1 - n_2 \in Im(f)$. Logo, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n_1 - n_2$. Pela comutatividade do diagrama:

$$f''(j(m)) = j'(f(m)) = j'(n_1 - n_2) = j'(n_1) - j'(n_2),$$

e assim $j'(n_1) - j'(n_2) \in Im(f'')$, o que implica $\overline{j'(n_1)} = \overline{j'(n_2)}$. Logo, j_2 está bem definida.

Agora, note que j_2 é homomorfismo. De fato, sejam $\overline{n_1}, \overline{n_2} \in Coker(f)$ e $a \in A$.

$$j_2(a\overline{n_1}+\overline{n_2}) = j_2(\overline{an_1+n_2}) = \overline{j'(an_1+n_2)} = a\overline{j'(n_1)}+\overline{j'(n_2)} = aj_2(\overline{n_1})+j_2(\overline{n_2}).$$

□

Lema 7. Seja o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "j'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Então, existe um homomorfismo $\psi : Ker(f'') \to Coker(f')$ definido por $\psi(m'') = \overline{n'}$.

Demonstração. Seja $m'' \in Ker(f'') \subset M''$. Como j é sobrejetiva, existe $m \in M$ tal que $m'' = j(m)$. Pela comutatividade do diagrama,

$$j'(f(m)) = f''(j(m)) = f''(m'') = 0 \Rightarrow f(m) \in Ker(j') = Im(g').$$

Como g' é injetiva, existe único $n' \in N'$ tal que $f(m) = g'(n')$. Definimos então $\psi(m'') = \overline{n'}$, a classe de n' no quociente $Coker(f')$.

Precisamos mostrar que ψ está bem definida. Suponha que existam m_1 e $m_2 \in M$ tais que $j(m_1) = j(m_2)$. Então,

$$j(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in Ker(j) = Im(g).$$

Como g é injetora, existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = m_1 - m_2$. Aplicando f, temos:

$$f(m_1 - m_2) = f(g(m')) = g'(f'(m')).$$

Mas também,

$$f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) = g'(n'_1) - g'(n'_2).$$

Portanto,

$$g'(n'_1 - n'_2 - f'(m')) = 0 \Rightarrow n'_1 - n'_2 - f'(m') \in Ker(g') = \{0\},$$

pois g' é injetiva. Assim, $n'_1 - n'_2 \in Im(f')$, e $\overline{n'_1} = \overline{n'_2}$.

Agora, mostraremos que ψ é homomorfismo. Sejam m''_1, $m''_2 \in Ker(f'')$ e $a \in A$. Sejam $m_1, m_2 \in M$ tais que $j(m_i) = m''_i$ e $f(m_i) = g'(n'_i)$ com $n'_i \in N'$, para $i = 1, 2$. Note que

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = g'(n'_1) + g'(n'_2) = g'(n'_1 + n'_2).$$

Como $j(m_1 + m_2) = m''_1 + m''_2$, temos:

$$\psi(m''_1 + m''_2) = \overline{n'_1 + n'_2} = \overline{n'_1} + \overline{n'_2} = \psi(m''_1) + \psi(m''_2).$$

Agora, seja $m_3 \in M$ tal que $j(m_3) = am''_1$, e suponha que $f(m_3) = g'(n')$. Então,

$$j(am_1) = aj(m_1) = am''_1 = j(m_3) \Rightarrow j(am_1 - m_3) = 0 \Rightarrow am_1 - m_3 \in Ker(j) = Im(g).$$

Logo, existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = am_1 - m_3$. Então

$$g'(an'_1 - n') = ag'(n'_1) - g'(n') = af(m_1) - f(m_3) = f(am_1 - m_3) = f(g(m')) = g'(f'(m'))$$

Portanto,

$$g'(an'_1 - n' - f'(m')) = 0 \Rightarrow an'_1 - n' \in Im(f') \Rightarrow \overline{n'} = \overline{an'_1}.$$

Assim, $\psi(am''_1) = \overline{n'} = \overline{an'_1} = a\psi(m''_1)$. □

Proposição 11. **(Lema da Serpente)** Sejam M', M, M'', N', N e N'' módulos sobre um anel A, onde existem sequências exatas e homomorfismos da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "j'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

no qual o diagrama é comutativo com as setas exatas. Então, existe uma sequência exata

$$0 \to Ker(f') \xrightarrow{g_1} Ker(f) \xrightarrow{j_1} Ker(f'') \xrightarrow{\psi} Coker(f') \xrightarrow{g_2} Coker(f) \xrightarrow{j_2} Coker(f'') \to 0 \tag{1}$$

onde g_1 e j_1 são restrições de g e j, g_2 e j_2 são induzidos por g' e j', respectivamente.

Demonstração. Suponha que o diagrama acima é comutativo e as sequências são exatas. Para provar que a sequência (1) existe e é exata, construiremos os homomorfismos indicados e verificaremos a exatidão em cada ponto. Assim, dividiremos a demonstração em nove etapas:

1. Definir g_1 e j_1 como restrições de g e j;
2. Mostrar que g_1 é injetivo;
3. Verificar que $Im(g_1) = Ker(j_1)$;
4. Definir g_2 e j_2 como homomorfismos induzidos;
5. Verificar que $Im(g_2) = Ker(j_2)$;
6. Mostrar que j_2 é sobrejetivo;
7. Definir o homomorfismo conector ψ;
8. Verificar que $Im(j_1) = Ker(\psi)$;

9. Verificar que $Im(\psi) = Ker(g_2)$.

1. Segue do Lema 5.
2. Como g_1 é restrição do homomorfismo injetivo g, segue que g_1 também é injetiva.
3. Mostraremos que $Im(g_1) \subseteq Ker(j_1)$:
Seja $m \in Im(g_1)$. Então, existe $m' \in Ker(f')$ tal que $m = g_1(m') = g(m')$. Como $Im(g) = Ker(j)$, segue que $j_1(m) = j(m) = j(g(m')) = 0$, ou seja, $m \in Ker(j_1)$, como queríamos.
Agora, mostraremos a inclusão contrária, isto é, $Ker(j_1) \subseteq Im(g_1)$:
Seja $m \in Ker(j_1)$. Então, $j_1(m) = j(m) = 0$. Como $ker(j) = Im(g)$, existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = m$. Queremos mostrar que $m' \in Ker(f')$, pois isso implicará que $m \in Im(g_1)$. De fato, pela comutatividade do diagrama e pela hipótese de que $Ker(j_1) \subset Ker(f)$, temos:

$$0 = f(m) = f(g(m')) = g'(f'(m')).$$

Como g' é injetivo, a equação acima implica

$$f'(m') = 0 \Rightarrow m' \in Ker(f').$$

Assim, concluimos que $Im(g_1) = Ker(j_1)$.
4. Segue do Lema 6.
5. Mostraremos que $Im(g_2) \subseteq Ker(j_2)$:
Seja $\overline{n} \in Im(g_2)$. Então, existe $\overline{n'} \in coker(f')$ tal que

$$g_2(\overline{n'}) = \overline{n} = \overline{g'(n')}.$$

Como o diagrama tem linhas exatas, temos $Im(g') = Ker(j')$, logo

$$j_2(\overline{n}) = j_2(\overline{(g'(n'))}) = \overline{j'(g'(n'))} = \overline{0} \in Coker(f'').$$

Portanto, $\overline{n} \in Ker(j_2)$.
Agora, mostraremos a inclusão oposta, ou seja, $Ker(j_2) \subseteq Im(g_2)$:
Seja $\overline{n} \in Ker(j_2)$. Então,

$$j_2(\overline{n}) = \overline{0} = \overline{j'(n)} \in Coker(f''),$$

o que implica $j'(n) \in Im(f'')$. Assim, existe $m'' \in M''$ tal que $f''(m'') = j'(n)$. Sabemos que j é sobrejetiva, logo existe $m \in M$ tal que $j(m) = m''$. Usando a comutatividade do diagrama, temos:

$$j'(f(m)) = f''(j(m)) = f''(m'') = j'(n) \Rightarrow j'(n - f(m)) = 0.$$

Portanto, $n - f(m) \in Ker(j') = Im(g')$, isto é, existe $n' \in N'$ tal que $g'(n') = n - f(m)$. Assim, $g_2(\overline{n'}) = \overline{g'(n')} = \overline{n - f(m)} = \overline{n}$. Logo, $\overline{n} \in Im(g_2)$. Concluímos que $Im(g_2) = Ker(j_2)$.
6. Seja $\overline{n''} \in coker(f'')$. Como j' é sobrejetiva, para todo $n'' \in N''$ existe $n \in N$ tal que $j'(n) = n''$. Assim,

$$\overline{n''} = \overline{j'(n')} = j_2(\overline{n}),$$

o que mostra que j_2 é sobrejetivo.
7. Segue do Lema 7.
8. Mostraremos que $Im(j_1) \subseteq Ker(\psi)$:
Seja $m'' \in Im(j_1)$. Então, existe $m \in Ker(f)$ tal que $j_1(m) = j(m) = m''$. Pela definição de ϕ e por $m \in Ker(f)$, temos que $f(m) = g'(n') = 0$, para algum $n' \in N'$. Como g' é injetiva, segue que $n' = 0$, logo $\psi(m) = \overline{n'} = \overline{0}$. Assim, $m'' \in Ker(\psi)$.
Agora, mostraremos a inclusão contrária $Ker(\psi) \subseteq Im(j_1)$:
Seja $m'' \in Ker(\psi)$. Então, $\psi(m'') = \overline{0} = \overline{n'} \in Coker(f')$, o que significa que $n' \in Im(f')$. Por outro lado, como j é sobrejetiva, existe $m \in M$ tal que $j(m) = m''$, e pela definição de ψ, temos $f(m) = g'(n')$, com $n' \in Im(f')$. Logo, existe $m' \in M'$ tal que $f'(m') = n'$, e então:

$$f(m) = g'(f'(m')) = f(g(m')) \Rightarrow f(m - g(m')) = 0 \Rightarrow m - g(m') \in Ker(f).$$

Portanto, $m - g(m') \in Ker(f)$ e

$$j_1(m - g(m')) = j(m) - j(g(m')) = j(m) - 0 = m'',$$

pois $j \circ g = 0$. Assim, $m'' \in Im(j_1)$. Então, concluímos que $Im(j_1) = Ker(\psi)$.
9. Mostraremos que $Im(\psi) \subseteq Ker(g_2)$:
Seja $\overline{n'} \in Im(\psi)$. Então, existe $m'' \in Ker(f'')$ tal que $\psi(m'') = \overline{n'}$, o que significa que existe $m \in M$ com $j(m) = m''$ e $f(m) = g'(n')$. Assim, temos $g_2(\overline{n'}) = \overline{g'(n')} = \overline{f(m)} = \overline{0}$, pois, $f(m) \in Im(f)$. Logo, $n' \in Ker(g_2)$.
Por último, mostraremos a inclusão oposta, ou seja, $Ker(g_2) \subseteq Im(\psi)$:
Seja $\overline{n'} \in Ker(g_2)$. Então, $g_2(\overline{n'}) = \overline{0} = \overline{g'(n')}$, o que implica que $g'(n') \in Im(f)$, ou seja, existe $m \in M$ tal que $f(m) = g'(n')$. Aplicando f'', temos

$$f''(j(m)) = j'(f(m)) = j'(g'(n')) = 0,$$

pois $j' \circ g' = 0$ pela exatidão das linhas do diagrama. Assim, $m'' = j(m) \in Ker(f'')$. Logo, $\psi(m'') = \overline{n'}$. Portanto, $\overline{n'} \in Im(\psi)$. Concluímos que $Im(\psi) = Ker(g_2)$. $\square$

3 PRODUTO TENSORIAL

Neste capítulo, estudaremos a construção de um A-módulo especial, conhecido como produto tensorial. Essa construção desempenha um papel central em diversos ramos da álgebra, por sua capacidade de combinar informações de dois módulos sobre um mesmo anel. Apresentaremos sua definição formal e propriedades fundamentais, juntamente a propriedade exata do produto tensorial. Essa propriedade investiga sob quais condições uma sequência exata de módulos permanece exata após ser tensorizada.

Definição 14. Sejam M, N e P três A-módulos. Uma função $f : M \times N \to P$ é bilinear se para todos $m, m' \in M$; $n, n' \in N$ e $a \in A$ vale:

1. $f(am + m', n) = f(am, n) + f(m', n) = af(m, n) + f(m', n)$;
2. $f(m, an + n') = f(m, an) + f(m, n') = af(m, n) + f(m, n')$.

Construiremos um A-módulo denotado por T, chamado de **produto tensorial** dos A-módulos M e N, o conjunto das aplicações bilineares $M \times N \to P$ está em correspondência biunívoca com o conjunto das aplicações lineares $T \to P$, para todo A-módulo P.

Teorema 2. Sejam M e N dois A-módulos. Então, existe um A-módulo T e uma aplicação bilinear $g : M \times N \to T$ com a seguinte propriedade universal: para todo A-módulo P e toda aplicação bilinear $f : M \times N \to P$, existe um único homomorfismo $f' : T \to P$ tal que $f = f' \circ g$. Além disso, T é único a menos de isomorfismo.

Demonstração. Construíremos T da seguinte forma: seja C o A-módulo livre $A^{(M \times N)}$, cujos elementos são combinações lineares de elementos de $M \times N$ com coeficientes em A, isto é, são expressões da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i); a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N.$$

Seja D o A-submódulo de C, gerado por todos os elementos de C do tipo:

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y); (x, y + y') - (x, y) - (x, y'); (ax, y) - a(x, y); (x, ay) - a(x, y).$$

Considere o A-módulo $T = C/D$. Para cada par $(x, y) \in C$, denote sua classe em T por $x \otimes y$. Uma vez que os geradores de D pertencem ao própio submódulo D, note que

$$(x + x') \otimes y - (x \otimes y) - (x' \otimes y) = 0 \in C/D \Rightarrow \quad (x + x') \otimes y = (x \otimes y) + (x' \otimes y) \quad (2)$$

analogamente,

$$\begin{aligned} x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y' \quad (3) \\ (ax) \otimes y &= a(x \otimes y) \\ x \otimes (ay) &= a(x \otimes y). \end{aligned}$$

Dessa forma, defina

$$\begin{array}{rccc} g: & M \times N & \to & T \\ & (x,y) & \mapsto & x \otimes y \end{array}$$

segue então de (2) e (3) que g é aplicação bilinear. Agora, seja $f : M \times N \to P$ uma aplicação bilinear qualquer. Essa aplicação pode ser estendida por linearidade a um homomorfismo de A-módulos $\overline{f} : C \to P$, tal que $\overline{f}|_{M \times N} = f$. Observe que

$$\begin{aligned} \overline{f}((x+x',y)-(x,y)-(x',y)) &= \quad f((x+x',y)-(x,y)-(x',y)) \\ &= f(x,y)+f(x',y)-f(x,y)-f(x',y) \quad = 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, conclui-se que $\overline{f}$ se anula sobre os demais geradores de D, isto é, $D \subseteq Ker(\overline{f})$. Então, pelo Lema 1, existe um único homomorfismo $f' : C/D \to P$ que torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & C/D \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ P & \end{tikzcd}$$

dessa forma, temos $\overline{f} = f' \circ \pi$. Restringindo esses homomorfismos, temos $\overline{f}|_{M \times N} = f' \circ \pi|_{M \times N}$, o que implica em $f = f' \circ g$. Consequentemente, o A-módulo T e a aplicação g satisfazem as hipóteses do Teorema.

Unicidade: Suponha que existam T' A-módulo e $g' : M \times N \to T'$ aplicação bilinear que satisfazem as hipóteses do Teorema. Tomando $P = T'$ e $f = g'$, o Teorema garante a existência de uma única transformação bilinear $j : T \to T'$ tal que $g' = j \circ g$. Analogamente, aplicando o Teorema 2 com $P = T$ e $f = g$, obtemos um único homomorfismo $j' : T' \to T$ tal que $g = j' \circ g'$, como sugere os diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & T \arrow[dl, dashed, "j"] \\ T' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & T' \arrow[dl, dashed, "j'"] \\ T & \end{tikzcd}$$

disso, temos:

$$(j' \circ j) \circ g = j' \circ (j \circ g) = j' \circ g' = g \text{ e } (j \circ j') \circ g' = j \circ (j' \circ g') = j \circ g = g'.$$

Portanto, $j' \circ j = id : T \to T$, o que mostra que j e j' são isomorfismos inversos entre si. Assim, $T \simeq T'$, e o isomorfismo é único. $\square$

Observação 7. O A-módulo T construído no Teorema 2 é chamado de **produto tensorial** de M por N e será denotado por $M \otimes_A N$. Esse módulo é gerado pelos elementos da forma $x \otimes y$, com $x \in M$ e $y \in N$, os quais chamamos de **tensores elementares**. Se $(x_i)_{i \in I}$ e $(y_j)_{j \in J}$ são famílias de geradores de M e N, respectivamente, então os tensores $x_i \otimes y_j$ geram $M \otimes_A N$. De fato, seja $(x \otimes y) \in M \otimes_A N$, segue que

$$
\begin{aligned}
(x \otimes y) &= (\sum_{i \in I} a_i x_i \otimes \sum_{j \in J} a'_j y_j) \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i a'_j (x_i \otimes y_j).
\end{aligned}
$$

Logo, se M e N são finitamente gerados, então $M \otimes_A N$ também é.

Observação 8. A notação $x \otimes y$ pode gerar ambiguidade, a menos que especifiquemos o produto tensorial ao qual pertence. Pode acontecer, por exemplo, que $M' \subseteq M$ e $N' \subseteq N$ sejam submódulos, e que $x \otimes y = 0$ em $M \otimes N$, mas $x \otimes y \neq 0$ em $M' \otimes N'$, com $x \in M'$ e $y \in N'$.

Como exemplo, considere $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}_2$ e $M' = 2\mathbb{Z}$. Note que, em $M \otimes N$, temos:

$$2 \otimes \overline{1} = 2(1 \otimes \overline{1}) = (1 \otimes \overline{2}) = (1 \otimes \overline{0}) = 0.$$

No entanto, esse mesmo elemento é não-nulo em $M' \otimes N$. Sabemos que se M e N são A-módulos finitamente gerados, então $M \otimes N$ também é. Nesse caso, $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 = \langle 2 \otimes \overline{1} \rangle$, pois $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$ e $\mathbb{Z}_2 = \langle \overline{1} \rangle$. Além disso, temos $\langle 2 \otimes \overline{1} \rangle \neq 0$, pois $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ não é o módulo nulo. Para justificar essa afirmação, podemos definir a seguinte aplicação bilinear:

$$
\begin{array}{rcl}
f : 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \\
(x, y) & \mapsto & \overline{(\frac{xy}{2})}
\end{array}
$$

assim, podemos aplicar o Teorema 2, que nos leva ao diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & 2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
\mathbb{Z}_2 &
\end{tikzcd}
$$

como f e g são aplicações sobrejetivas, segue que f' também é. Além disso, como $\mathbb{Z}_2$ não é o módulo nulo, concluímos que $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ também não é módulo nulo. Portanto, $(2 \otimes \overline{1}) \neq 0$ em $M' \otimes N$.

Observação 9. Podemos definir uma aplicação multilinear $f : M_1 \times \ldots \times M_t \rightarrow P$ de modo análogo à Definição 14, isto é, linear em cada coordenada. Seguindo a ideia da prova do Teorema 2, obtemos a existência de um **produto multitensorial** $T = M_1 \otimes \ldots \otimes M_t$, gerado pelos elementos $x_1 \otimes \ldots \otimes x_t$, com $x_i \in M_i$ para cada $1 \leq i \leq t$.

Proposição 12. Sejam $\mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_n$ dois $\mathbb{Z}$-módulos. Então, o produto tensorial $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ é o módulo nulo sempre que m e n são primos entre si.

Demonstração. Sejam m e n relativamente primos, então existe $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $mr+ns = 1$. Assim, dado $x \otimes y \in \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ temos

$$\begin{aligned} x \otimes y &= (mr+ns) \cdot (x \otimes y) \\ &= (mrx) \otimes y + x \otimes (nsy) \\ &= 0 \otimes y + x \otimes 0 \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$. □

A seguir, frisamos alguns dos vários ”isomorfismos canônicos” existentes:

Proposição 13. Sejam M, N e P A-módulos. Então existem isomorfismos

1. $M \otimes N \simeq N \otimes M$;
2. $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$;
3. $(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$;
4. $A \otimes M \simeq M$.

Demonstração. 1. Defina a aplicação bilinear $f : M \times N \to N \otimes M$ da seguinte forma, $f(m,n) = n \otimes m$. Assim, pelo Teorema 2, existe um único homomorfismo tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \otimes M \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ M \otimes N & \end{tikzcd}$$

ou seja, temos:

$$g(m,n) = f'(f(m,n)) = f'(n \otimes m).$$

O que implica em $f'(n \otimes m) = m \otimes n$. Analogamente, aplicando o Teorema 2, agora para a aplicação g, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes N \arrow[dl, dashed, "j"] \\ N \otimes M & \end{tikzcd}$$

Dessa forma, temos

$$f(m,n) = j(g(m,n)) = j(m \otimes n).$$

O que implica em $j(m \otimes n) = n \otimes m$. Agora, note que

$$(f' \circ j) \circ g = f' \circ (j \circ g) = f' \circ f = g \text{ e } (j \circ f') \circ f = j \circ (f' \circ f) = j \circ g = f.$$

Portanto, $j \circ f' = id = f' \circ j$, o que mostra que f' e j são isomorfismos inversos entre si. Assim, concluímos que $M \otimes N \simeq N \otimes M$.

2.Da mesma forma, devemos buscar uma aplicação bilinear. Assim, para cada $w \in P$ defina

$$\begin{array}{rcl} f_w : M \times N & \to & M \otimes (N \otimes P) \\ (u, v) & \mapsto & u \otimes (v \otimes w) \end{array}$$

Note que f_w é bilinear:
$f_w(au + u', v) = (au + u') \otimes (v \otimes w) = (au \otimes (v \otimes w)) + (u' \otimes (v \otimes w)) = a(u \otimes (v \otimes w)) + (u' \otimes (v \otimes w)) = af_w(u, v) + f_w(u', v)$;
$f_w(u, av+v') = u\otimes((av+v')\otimes w) = u\otimes(av\otimes w+v'\otimes w) = u\otimes(a(v\otimes w))+u\otimes(v'\otimes w)) = a(u \otimes (v \otimes w)) + (u \otimes (v' \otimes w)) = af_w(u, v) + f_w(u, v')$.
Então, pelo Teorema 2 temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_w"'] & M \otimes N \arrow[dl, dashed, "f'_w"] \\ M \otimes (N \otimes P) & \end{tikzcd}$$

Para cada $w \in P$, existe único homomorfismo f'_w tal que $f_w = f'_w \circ j$.
$\Rightarrow f_w(u, v) = f'_w(j(u, v)) = f'_w(u \otimes v) \Rightarrow f'_w(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w)$.
Agora, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : (M \otimes N) \times P & \to & M \otimes (N \otimes P) \\ (h, w) & \mapsto & f'_w(h) \end{array}$$

Cuja aplicação é bilinear, de fato
$f(ah_1 + h_2, w) = f'_w(ah_1 + h_2) = af'_w(h_1) + f'_w(h_2) = af(h_1, w) + f(h_2, w)$;
$f(h, aw_1 + w_2) = f'_{aw_1+w_2}(h) = f'_{aw_1+w_2}(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes (aw_1 + w_2)) =$
$= u\otimes(v\otimes(aw_1)+(v\otimes w_2)) = u\otimes(v\otimes(aw_1))+u\otimes(v\otimes w_2) = a(u\otimes(v\otimes(w_1))+u\otimes(v\otimes w_2)$
$= (af'_{w_1} + f'_{w2})(u \otimes v)$.
Então, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} (M \otimes N) \times P \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f"'] & (M \otimes N) \otimes P \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ M \otimes (N \otimes P) & \end{tikzcd}$$

tal que $f'(h \otimes w) = f(h, w)$, com $h \in M \otimes N$ e $w \in P$. Em particular, para $u \in M$ e $v \in N$ temos $f'((u \otimes v) \otimes w) = f(u \otimes v, w) = f'_w(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w)$. Analogamente, considere a função bilinear

$$\begin{array}{rcl} f_u : N \times P & \to & (M \otimes N) \otimes P \\ (u, w) & \mapsto & (u \otimes v) \otimes w \end{array}$$

De fato:
$f_u(av+v', w) = (u\otimes(av+v'))\otimes w = (u\otimes(av)+(u\otimes v'))\otimes w = (u\otimes(av))\otimes w+(u\otimes v')\otimes w$

$= a((u \otimes v) \otimes w) + (u \otimes v') \otimes w = af_u(v, w) + f_u(v', w);$
$f_u(v, aw + w') = (u \otimes v) \otimes (aw + w') = (u \otimes v) \otimes aw + (u \otimes v) \otimes w' =$
$a((u \otimes v) \otimes w) + (u \otimes v) \otimes w' = af_u(v, w) + f_u(v, w').$
Logo, pelo Teorema 2 temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} N \times P \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f_u"'] & N \otimes P \arrow[dl, dashed, "f'_u"] \\ (M \otimes N) \otimes P & \end{tikzcd}$$

tal que $f'_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Considere,

$$\begin{array}{rcl} g : M \times (N \otimes P) & \rightarrow & (M \otimes N) \otimes P \\ (u, l) & \mapsto & g(u, l) = f'_u(l) \end{array}$$

função bilinear:
$g(u, al + l') = f'_u(al + l') = af'_u(l) + f'_u(l') = ag(u, l) + g(u, l');$
$g(au + u', l) = f'_{au+u'}(l) = f'_{au+u'}(v \otimes w) = ((au + u') \otimes v) \otimes w = (au \otimes v + u' \otimes v) \otimes w$
$= (au \otimes v) \otimes w + (u' \otimes v) \otimes w = (af'_u + f'_{u'})(l) = ag(u, l) + g(u', l).$
Assim, pelo Teorema 2, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times (N \otimes P) \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "g"'] & M \otimes (N \otimes P) \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ (M \otimes N) \otimes P & \end{tikzcd}$$

tal que $g'(u \otimes l) = f'_u(l) = (u \otimes v) \otimes w$. Portanto, $(g' \circ f') = f' \circ g' = id$.
$\Rightarrow M \otimes (N \otimes P) \simeq (M \otimes N) \otimes P$.
3. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : (M \oplus N) \times P & \rightarrow & (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \\ ((u, v), w) & \mapsto & (u \otimes w, v \otimes w). \end{array}$$

Note que f é bilinear. Para verificar isso, tomemos $a \in A$; $(u, v); (u', v') \in M \times N$ e $w, w' \in P$. Então,

$$\begin{array}{rcl} f(a(u, v) + (u', v'), w) & = & ((au + u') \otimes w, (av + v') \otimes w) \\ & = & (au \otimes w + u' \otimes w, av \otimes w + v' \otimes w) \\ & = & a(u \otimes w, v \otimes w) + (u' \otimes w, v' \otimes w) \\ & = & af((u, v), w) + f((u', v'), w). \end{array}$$

De forma análoga,

$$\begin{array}{rcl} f((u, v), aw + w') & = & (u \otimes (aw + w'), v \otimes (aw + w')) \\ & = & (u \otimes aw + u \otimes w', v \otimes w + v \otimes w') \\ & = & a(u \otimes w, v \otimes w) + (u \otimes w', v \otimes w') \\ & = & af((u, v), w) + f((u, v), w'). \end{array}$$

Aplicando o Teorema 2, obtemos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(M \oplus N) \times P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & (M \oplus N) \otimes P \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
(M \otimes P) \oplus (N \otimes P) &
\end{tikzcd}$$

onde $f = f' \circ g$. Assim, f' é definida por $f'((u,v) \otimes w) = (u \otimes w, v \otimes w)$. Agora, para $x = \sum_i u_i \otimes w_i \in M \otimes P$ e $y = \sum_j v_j \otimes z_j \in N \otimes P$ defina

$$\begin{array}{rccc} g' : & (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) & \to & (M \oplus N) \otimes P \\ & (x, y) & \mapsto & \sum_i (u_i, 0) \otimes w_i + \sum_j (0, v_j) \otimes z_j. \end{array}$$

A aplicação g' está bem definida, pois as somas acima são finitas e a expressão independe da forma de escrita dos tensores simples. Observe que

$$(g' \circ f')((u,v) \otimes w) = g'(u \otimes w, v \otimes w) = (u,v) \otimes w$$
$$\text{e}$$
$$(f' \circ g')(u \otimes w, v \otimes w) = f'((u,v) \otimes w) = (u \otimes w, v \otimes w)$$

Portanto, temos que $f' \circ g' = g' \circ f' = id$. Assim, concluímos

$$(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P).$$

4. Seja a aplicação bilinear

$$\begin{array}{rcl} f : A \times M & \to & M \\ (a, v) & \mapsto & av \end{array}$$

pelo Teorema 2, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \times M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes M \arrow[dl, dashed, "j"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

com $f = j \circ g$. Assim, j é a aplicação dada por $j(a \otimes v) = av$. Queremos encontrar uma aplicação j', tal que $(j \circ j')(v) = v$. Considere então

$$\begin{array}{rcl} j' : M & \to & A \otimes M \\ v & \mapsto & 1 \otimes v \end{array}$$

note que,

$$(j \circ j')(v) = j(1 \otimes v) = v$$
$$\text{e}$$
$$(j' \circ j)(a \otimes v) = j'(av) = 1 \otimes av = a(1 \otimes v) = a \otimes v.$$

Logo, $j \circ j' = id = j' \circ j$. Portanto, $A \otimes M \simeq M$. $\square$

Lema 8. Sejam M um A-módulo e L um ideal de A. Então, existe o isomorfismo $M \otimes A/L \simeq M/LM$.

Demonstração. Defina
$$\begin{array}{rccc} f: & M \times A/L & \to & M/LM \\ & (m, a+L) & \mapsto & am + LM. \end{array}$$
Vamos verificar se f está bem definida. Tome $a + L, a' + L \in A/L$ tal que $a + L = a' + L$, então $a - a' \in L$. Observe que
$$f(m, a+L) - f(m, a'+L) = (am - a'm) + LM = (a - a')m + LM,$$
como $a - a' \in L$ e $m \in M$, temos que $(a - a')m \in LM$. Assim, $(a-a')m + LM = 0 + LM$, ou seja, f está bem definida.
Pelo Teorema 2, temos o seguinte diagrama comutativo:
$$\begin{tikzcd} M \times A/L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes A/L \arrow[dl, dashed, "j"] \\ M/LM & \end{tikzcd}$$
com $f = j \circ g$. Assim j é a aplicação definida por $j(m \otimes (a+L)) = am + LM$. Agora defina
$$\begin{array}{rccc} j': & M/LM & \to & M \otimes A/L \\ & (m+LM) & \mapsto & m \otimes (1+L). \end{array}$$
Seja $m - m' \in LM$, então $m = m' + \Sigma a_j n_j$, onde $a_j \in L$ e $n_j \in M$. Assim,
$$j'(m+LM) - j'(m'+LM) = j'(\Sigma a_j n_j + LM) = \Sigma a_j n_j \otimes (1+L) = \Sigma n_j \otimes (\Sigma a_j + L) = 0.$$
Note que
$$(j \circ j')(m + LM) = j(m \otimes (1+L)) = m \cdot 1 + LM = m + LM$$
e
$$(j' \circ j)(m \otimes (a+L)) = j'(am + LM) = am \otimes (1+L) = m \otimes (a+L).$$
Logo, $j \circ j' = j' \circ j$. Portanto, $M \otimes A/L \simeq M/LM$. $\square$

A partir deste ponto, definiremos alguns conceitos fundamentais relacionados à restrição e à extensão de escalares.

Definição 15. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis e seja N um B-módulo. Podemos fornercer a N uma estrutura de A-módulo da seguinte maneira: dado $a \in A$ e $x \in N$, definimos o produto ax como $f(a)x$. Essa estrutura de A-módulo em N é chamada de **restrição por escalares**. Em particular, f induz uma estrutura de A-módulo em B.

Observação 10. Note que N, com tal definição, realmente é um A-módulo. Dados $a, a' \in A$ e $x, y \in N$, temos

1. $1_A x := f(1_A)x = 1_B x = x$;
2. $(a + a')x := f(a + a')x = f(a)x + f(a')x = ax + a'x$;
3. $(aa')x := f(aa')x = af(a')x = a(a'x)$;
4. $a(x + y) := f(a)(x + y) = f(a)x + f(a)y = ax + ay$.

Então, N é A-módulo. De maneira análoga, temos que B é A-módulo.

Proposição 14. Suponha que N seja finitamente gerado como B-módulo e que B seja finitamente gerado como A-módulo. Então, N é finitamente gerado como A-módulo.

Demonstração. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_t$ geradores de N sobre B, e $x_1, \ldots, x_r$ geradores de B como A-módulo. Então, $n \in N$ pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{t} b_i y_i$ e cada b_i é escrito como $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j$. Daí,

$$n = b_1 y_1 + \ldots + b_t y_t = (\sum_{j=1}^{r} a_{1j} x_j) y_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{r} a_{tj} x_j) y_t$$

olhando N por meio de restrições por escalares

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} f(a_{ij}) x_j y_i.$$

Portanto, N é finitamente gerado como A-módulo. □

Definição 16. Seja M um A-módulo. Como vimos, se existir um homomorfismo de anéis $f : A \to B$, então B pode ser considerado como um A-módulo. Dessa forma, podemos considerar o A-módulo $M_B = B \otimes_A M$. Observe que M_B possui uma estrutura de B-módulo definida por

$$b(b' \otimes x) = (bb') \otimes x$$

$\forall b, b' \in B$ e $\forall x \in M$. Dizemos que o B-módulo M_B é obtido por **extensão de escalares**.

Proposição 15. Se M é finitamente gerado como A-módulo, então M_B é finitamente gerado como B-módulo.

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_t$ geradores de M como A-módulo. Seja $m \in M_B = B \otimes_A M$. Então, existe $b \in B$ e pela Definição 16, temos

$$m = \sum_{i=1}^{t} a_i (b \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{t} a_i b (1 \otimes x_i).$$

Ou seja, os elementos $(1 \otimes x_i)$ geram M_B como B-módulo. Note que os coeficientes a_i estão sendo identificados como $f(a_i)$. □

3.1 PROPRIEDADE EXATA DO PRODUTO TENSORIAL

Nesta subseção, exploraremos as consequências da aplicação do produto tensorial a sequências exatas de homomorfismos de A-módulos. Antes de prosseguirmos, demonstraremos o seguinte isomorfismo canônico entre A-módulos, o qual será fundamental para o desenvolvimento dos resultados subsequentes.

Proposição 16. Sejam M, N e P módulos sobre um anel A, temos então que o módulo $Hom(M \otimes N, P)$ é isomorfo ao módulo $Hom(M, Hom(N, P))$.

Demonstração. Consideremos a função $\phi : Hom(M \otimes N, P) \to Hom(M, Hom(N, P))$ definida por:

$$\begin{array}{rccccc} \phi(f): & M & \to & Hom(N,P) & & \\ & u & \mapsto & \phi(f)(u): N & \to & P \\ & & & v & \mapsto & f(u \otimes v) \end{array}$$

Afirmamos que ϕ é um isomorfismo. Antes de demonstrar isso, é necessário verificar que ϕ está bem definida como função. Para isso, começaremos mostrando que, para cada $f \in Hom(M \otimes N, P)$ e $u \in M$, a aplicação $\phi(f)(u) : N \to P$ é um homomorfismo. De fato, sejam $v_1, v_2 \in N$ e $a \in A$, temos:

$$\phi(f)(u)(av_1+v_2) = f(u\otimes(av_1+v_2)) = af(u\otimes v_1)+f(u\otimes v_2) = a\phi(f)(u)(v_1)+\phi(f)(u)(v_2)$$

para todo u em M. Assim, $\phi(f) : M \to Hom(N, P)$ está bem definida. Vamos agora verificar que $\phi(f) : M \to Hom(N, P)$ é também um homomorfismo. Dados $u_1, u_2 \in M$, $a \in A$ e $v \in N$, temos:

$$\phi(f)(au_1+u_2)(v) = f((au_1+u_2)\otimes v) = af(u_1\otimes v)+f(u_2\otimes v) = a\phi(f)(u_1)(v)+\phi(f)(u_2)(v)$$

logo $\phi(f)$ é homomorfismo de M em $Hom(N, P)$. Finalmente, verficaremos que ϕ é homomorfismo de módulos. Sejam f, $g \in Hom(M \otimes N, P)$ e $a \in A$. Então, para todo $u \in M$ e $v \in N$,

$$\begin{aligned} \phi(af + g)(u)(v) &= (af + g)(u \otimes v) \\ &= af(u \otimes v) + g(u \otimes v) \\ &= a\phi(f)(u)(v) + \phi(g)(u)(v) \\ &= (a\phi(f) + \phi(g))(u)(v). \end{aligned}$$

Por seguinte, vamos verificar a injetividade. Seja $f \in Ker(\phi)$, ou seja, $\phi(f) = 0$. Então, para todo $u \in M$, $\phi(f)(u) = 0$, o que implica que

$$(\phi(f)(u))(v) = f(u \otimes v) = 0, \forall v \in N.$$

Portanto, $f(u \otimes v) = 0$, para todo $u \in M$ e $v \in N$. Como os tensores $u \otimes v$ geram $M \otimes N$, segue que $f = 0$. Logo, ϕ é injetiva. Por fim, mostraremos que ϕ é sobrejetiva.

Seja $g \in Hom(M, Hom(N, P))$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{g} : M \times N &\rightarrow P \\ (u, v) &\mapsto g(u)(v). \end{aligned}$$

Como g é um homomorfismo, a aplicação $\tilde{g}$ é bilinear. Assim, pelo Teorema 2, existe único homomorfismo $f : M \otimes N \rightarrow P$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & M \otimes N \arrow[dl, "\exists ! f"] \\ P & \end{tikzcd}$$

deste modo,

$$f(u \otimes v) = \tilde{g}(u, v) = g(u)(v), \forall u \in M \text{ e } v \in N.$$

Logo, para todo $u \in M$ e $v \in N$, temos então:

$$g(u)(v) = f(u \otimes v) = \phi(f)(u)(v),$$

o que implica $g(u) = \phi(f)(u)$, e portanto $g = \phi(f)$. Assim, ϕ é sobrejetiva. Dessa forma, temos o isomorfismo canônico

$$Hom(M \otimes N, P) \simeq Hom(M, Hom(N, P)).$$

□

Na proposição a seguir, demonstraremos que ao tensorizar uma sequência exata curta à direita, ela permanece exata à direita.

Proposição 17. Sejam $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata de homomorfismos de A-módulos e N um A-módulo qualquer. Então, a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Suponha que a sequência $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ é exata. Seja P um A-módulo arbitrário. Pela Proposição 9, temos que a sequência

$$0 \rightarrow Hom(M'', P) \rightarrow Hom(M, P) \rightarrow Hom(M', P)$$

é exata. Agora, tomando um A-módulo qualquer N, podemos aplicar a Proposição 10, obtendo a exatidão da sequência:

$$0 \rightarrow Hom(N, Hom(M'', P)) \rightarrow Hom(N, Hom(M, P)) \rightarrow Hom(N, Hom(M', P)).$$

Contudo, vimos anteriormente que existem isomorfismos naturais:

$$Hom(N, Hom(M', P)) \simeq Hom(M' \otimes N, P),$$

$$Hom(N, Hom(M, P)) \simeq Hom(M \otimes N, P),$$

$$Hom(N, Hom(M'', P)) \simeq Hom(M'' \otimes N, P).$$

Portanto, a sequência

$$0 \to Hom(M'' \otimes N, P) \to Hom(M \otimes N, P) \to Hom(M' \otimes N, P)$$

é exata. Assim, pela Proposição 9, concluímos que a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

é exata. □

Observação 11. Em geral, a exatidão não é preservada pelo produto tensorial. Ou seja, se temos uma sequência exata de homomorfismos de A-módulos $M' \to M \to M''$, então a sequência $M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N$ obtida ao tensorizar com um A-módulo arbitrário N, pode não ser exata. O exemplo a seguir ilustra essa falha de exatidão.

Exemplo 23. Considere $A = \mathbb{Z}$ e a sequência exata curta $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$, onde $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Essa sequência é exata, pois f é injetiva. Agora, tensorizando com o módulo $N = \mathbb{Z}_2$, obtemos a sequência

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2.$$

Vamos analisar a aplicação $f \otimes 1$. Para qualquer elemento $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$, temos

$$(f \otimes 1)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0.$$

Portanto, $f \otimes 1$ é o homomorfismo nulo. Contudo, o módulo $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ não é nulo, na verdade, é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Assim, $Ker(f \otimes 1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \neq 0$. Logo, $f \otimes 1$ não é injetivo e a sequência tensorizada não é exata. Esse exemplo mostra que o produto tensorial pode destruir a injetividade, e portanto não preserva, em geral, a exatidão à esquerda.

Como vimos, ao tensorizar uma sequência exata de homomorfismos de A-módulos, a exatidão nem sempre é preservada. No entanto, se toda sequência exata de A-módulos permanece exata após ser tensorizada com um dado A-módulo N, então dizemos que N é um **módulo plano**.

Proposição 18. As seguintes condições são equivalentes, para um A-módulo N:

i. N é plano;

ii. Se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata qualquer de A-módulos, a sequência tensorizada $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ é exata;

iii. Se $f : M' \to M$ é injetiva, então $f \otimes id : M' \otimes N \to M \otimes N$ é injetiva.

Demonstração. $i) \Rightarrow iii)$:
Seja $f : M' \to M$ homomorfismo injetivo de A-módulos. Então, a sequência $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ é exata. Como N é plano, obtemos a sequência exata:

$$0 \to M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes id} M \otimes N.$$

Logo, $f \otimes id$ é injetivo.
$iii) \Rightarrow ii)$:
Seja a sequência $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exata. Como f é injetiva e, por hipótese, o homomorfismo $f \otimes id$ também é, e como g é sobrejetivo, pela Proposição 17, a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

é exata.
$ii) \Rightarrow i)$:
Seja

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots$$

uma sequência exata de A-módulos. Para cada i, defina $N_i := Im(f_{i-1})$. Temos então a sequência curta exata:

$$0 \to N_i \xrightarrow{j_i} M_i \xrightarrow{\tilde{f}_i} N_{i+1} \to 0,$$

em que j_i é a inclusão e $\tilde{f}_i$ é a restrição de f_i. Por hipótese, temos a sequência exata

$$0 \to N_i \otimes N \xrightarrow{j_i \otimes id} M_i \otimes N \xrightarrow{\tilde{f}_i \otimes id} N_{i+1} \otimes N \to 0.$$

Dessa forma, $Im(j_i \otimes id) = Ker(\tilde{f}_i \otimes id)$. Queremos mostrar que $Im(f_{i-1} \otimes id) = Ker(f_i \otimes id)$.
Como $f_i \circ f_{i-1} = 0$, segue que

$$(f_i \otimes id) \circ (f_{i-1} \otimes id) = (f_i \circ f_{i-1}) \otimes (id \circ id) = 0 \otimes id = 0,$$

então $Im(f_{i-1} \otimes id) \subseteq Ker(f_i \otimes id)$.
Agora, seja $u \in Ker(f_i \otimes id)$. Como $\tilde{f}_i$ coincide com f_i em M_i, temos

$$(\tilde{f}_i \otimes id)(u) = (f_i \otimes id)(u) = 0,$$

então $u \in ker(\tilde{f}_i \otimes id) = Im(j_i \otimes id)$. Logo, existe $v \in N_i \otimes N$ tal que $u = (j_i \otimes id)(v)$. Como $N_i = Im(f_{i-1})$, podemos escrever $v = \sum_{l=1}^{r} w_l \otimes v_l$, com $w_l = f_{i-1}(u_l)$, $u_l \in M_{i-1}$, $n_l \in N$. Assim,

$$u = (j_i \otimes id)\left(\sum_{l=1}^{r} f_{i-1}(u_l) \otimes v_l\right) = \sum_{l=1}^{r} (f_{i-1}u_l) \otimes v_v = \sum_{l=1}^{r} (f_{i-1} \otimes id)(u_l \otimes v_l).$$

O que mostra que $u \in Im(f_{i-1} \otimes id)$. Portanto, $Ker(f_i \otimes id) \subseteq Im(f_{i-1} \otimes id)$. □

Proposição 19. Se N é um A-módulo livre, então N é plano.

Demonstração. Seja $f : M' \to M$ um homomorfismo de A-módulos injetivo. Como N é livre, então existe um isomorfismo de módulos $\phi : N \to A^{\oplus 1}$. Pela Proposição 13, existem isomorfismos de A-módulos

$$\gamma' : M' \otimes A^{\oplus} \to (M' \otimes A)^{\oplus} \text{ e } \gamma : M \otimes A^{\oplus} \to (M \otimes A)^{\oplus}$$

dados por:

$$\gamma'(u' \otimes (a_i)_i) = (u' \otimes (a_i)_i) \text{ e } \gamma(u \otimes (a_i)_i) = (u \otimes (a_i)_i),$$

para todo $u \in M$, $u' \in M'$ e $(a_i)_i \in A^{\oplus}$. Como $M' \otimes A \simeq M'$ e $M \otimes A \simeq M$, então existem isomorfismos

$$\varphi' : (M' \otimes A)^{\oplus} \to (M')^{\oplus} \text{ e } \varphi : (M \otimes A)^{\oplus} \to (M)^{\oplus},$$

tais que $\varphi'((u_i' \otimes a_i)) = (a_i u_i')_{i \in \wedge}$ e $\varphi((u_i \otimes a_i)) = (a_i u_i)$. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes N \arrow[r, "f \otimes id_N"] \arrow[d, "id_{M'} \otimes \phi"] & M \otimes N \arrow[d, "id_M \otimes \phi"] \\
M' \otimes A^{\oplus} \arrow[r, "f \otimes id_{A^{\oplus}}"] \arrow[d, "\gamma'"] & M \otimes A^{\oplus} \arrow[d, "\gamma"] \\
(M' \otimes A)^{\oplus} \arrow[r, "(f \otimes id_A)^{\oplus}"] \arrow[d, "\varphi'"] & (M \otimes A)^{\oplus} \arrow[d, "\varphi"] \\
(M')^{\oplus} \arrow[r, "f^{\oplus}"] & (M)^{\oplus}
\end{tikzcd}$$

Como f é injetivo, a aplicação $f^{\oplus}$ também é injetiva. Além disso, todos os morfismos verticais do diagrama acima são isomorfismos. Como o diagrama comuta, segue que a composição $f \otimes id_N$ é injetiva. Portanto, pela Proposição 18 N é um A-módulo plano. □

Proposição 20. Seja A um anel e $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ uma sequência exata de módulos, com M'' plano.

1. Então, $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ é exata para qualquer módulo N.
2. Então, M é plano se e somente se M' é plano.

Demonstração. 1. Como o produto tensorial é exato à direita, $M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ é exata. Então, nos resta mostrar que

$$0 \to M' \otimes N \xrightarrow{\gamma} M \otimes N$$

é exata, nesse caso devemos mostrar que γ é injetiva. Pela Proposição 7, item 3, a sequência

$$0 \to Ker(t) \xrightarrow{h} A^{\oplus \wedge} \xrightarrow{t} N \to 0$$

[1] $A^{\oplus}$ denota a soma direta de cópias do anel A.

é exata. Tensorizando as sequências e aplicando a Proposição 17, obtemos as seguintes sequências exatas:

$$M' \otimes Ker(t) \xrightarrow{\beta'} M \otimes Ker(t) \xrightarrow{j} M'' \otimes Ker(t) \to 0,$$

$$0 \to M' \otimes A^{\oplus\wedge} \xrightarrow{\beta} M \otimes A^{\oplus\wedge} \xrightarrow{\alpha'} M'' \otimes A^{\oplus\wedge} \to 0,$$

sendo β injetiva, pois $A^{\oplus\wedge}$ é plano (pela Proposição 19);

$$0 \to M'' \otimes Ker(t) \xrightarrow{\alpha} M'' \otimes A^{\oplus\wedge},$$

e com α injetiva, pois M'' é plano. Além disso, as sequências

$$M' \otimes Ker(t) \xrightarrow{f'} M' \otimes A^{\oplus\wedge} \to M' \otimes N \to 0,$$

$$M \otimes Ker(t) \xrightarrow{g'} M \otimes A^{\oplus\wedge} \to M \otimes N \to 0$$

também são exatas, pela Proposição 17. Com isso, obtemos o seguinte diagrama comutativo de módulos e homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & M' \otimes Ker(t) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f'"] & M \otimes Ker(t) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g'"] & M'' \otimes Ker(t) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes A^{\oplus\wedge} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & M \otimes A^{\oplus\wedge} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & M'' \otimes A^{\oplus\wedge} \arrow[r] & 0 \\
 & M' \otimes N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & M \otimes N \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

A comutatividade do diagrama pode ser verificada diretamente. De fato, sejam $g' = id \otimes h$, $\beta' = f \otimes id$, $f' = id \otimes h$ e $\beta = f \otimes id$. Então, dados $m' \in M'$ e $x \in Ker(t)$, temos

$$g'(\beta'(m' \otimes x)) = g'(f(m') \otimes x) = f(m') \otimes h(x)$$

por outro lado,

$$\beta(f'(m' \otimes x)) = \beta(m' \otimes h(x)) = f(m') \otimes h(x).$$

Assim, $g'(\beta'(m' \otimes x)) = \beta(f'(m' \otimes x))$. Agora, sejam $\alpha = id \otimes h$, $j = g \otimes id$, $g' = id \otimes h$ e $\alpha' = g \otimes id$. Dados $m \in M$ e $a \in Ker(t)$, temos

$$\alpha(j(m \otimes a)) = \alpha(g(m) \otimes a) = g(m) \otimes h(a)$$

por outro lado,

$$\alpha'(g'(m \otimes a)) = \alpha'(m \otimes h(a)) = g(m) \otimes h(a).$$

Portanto, o diagrama é comutativo. Como $M' \otimes N = Coker(f')$ e $M \otimes N = Coker(g')$, pela Proposição 8, podemos aplicar o Lema da Serpente (Proposição 11), obtendo a sequência exata $Ker(\alpha) \to Coker(f') \to Coker(g')$. Como α é injetiva, temos $Ker(\alpha) = 0$, e portanto a sequência se reduz a:

$$0 \to M' \otimes N \xrightarrow{\gamma} M \otimes N.$$

Concluímos, assim, que γ é injetiva. Portanto, a sequência

$$0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

é exata.

2. Seja $h' : N' \to N$ um homomorfismo injetivo. Vamos tensorizar esse morfismo com os módulos da sequência exata curta

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0.$$

Pelo item 1 da proposição, as sequências

$$0 \to M' \otimes N' \to M \otimes N' \to M'' \otimes N' \to 0,$$

$$0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

são exatas. Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \otimes N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \otimes N' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \otimes N' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes N \arrow[r, "\beta"] & M \otimes N \arrow[r, "j'"] & M'' \otimes N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

vamos verificar a comutatividade do diagrama. Sejam $\beta' = f \otimes id$, $\alpha = id \otimes h'$, $\beta = f \otimes id$ e $\alpha' = id \otimes h'$. Dados $m' \in M'$ e $n' \in N'$

$$\alpha(\beta'(m' \otimes n')) = \alpha(f(m') \otimes n') = f(m') \otimes h'(n')$$

por outro lado,

$$\beta(\alpha'(m' \otimes n')) = \beta(m' \otimes h'(n')) = f(m') \otimes h'(n').$$

Portanto, o quadrado à esquerda comuta. Agora, sejam $\alpha'' = id \otimes h'$, $j = g \otimes id$, $\alpha = id \otimes h'$ e $j' = g \otimes id$. Dados $m \in M$ e $n' \in N'$

$$\alpha''(j(m \otimes n')) = \alpha''(g(m) \otimes n') = g(m) \otimes h'(n')$$

de outro modo,

$$j'(\alpha(m \otimes n')) = j'(m \otimes h'(n')) = g(m) \otimes h'(n').$$

Logo, o quadrado à direita também comuta, e o diagrama é de fato comutativo.

$\Rightarrow$) Suponha que M é plano, então α é injetiva. Como o diagrama é comutativo, temos $\alpha \circ \beta' = \beta \circ \alpha'$. Seja $m \in Ker(\alpha')$, ou seja, $\alpha'(m) = 0$. Então

$$\alpha(\beta'(m)) = \beta(\alpha'(m)) = \beta(0) = 0.$$

Como α é injetiva, segue que $\beta'(m) = 0$, ou seja, $m \in Ker(\beta')$. Como β' é injetiva, $Ker(\beta') = 0$, então $m = 0$. Logo, $Ker(\alpha') = 0$, ou seja, α' é injetiva. Portanto, M' é plano.

$\Leftarrow$) Suponha que M' é plano e α' é injetiva. Como temos o diagrama comuta, podemos aplicar o Lema da Serpente. Isso nos fornece a sequência exata

$$Ker(\alpha') \to Ker(\alpha) \to Ker(\alpha'').$$

Como M'' é plano, α'' é injetiva e por hipótese α' é injetiva. A sequência se reduz a

$$0 \to Ker(\alpha) \to 0,$$

e concluímos que $Ker(\alpha) = 0$, ou seja, α é injetiva. Portanto, M é plano.

$\square$

4 FUNTOR TOR

Chegamos ao capítulo principal deste trabalho, no qual trataremos de conceitos fundamentais que sustentam a definição do funtor Tor. Iniciaremos com noções importantes para o entendimento dessa definição, que se baseia na tensorização de uma resolução projetiva. Em seguida, apresentaremos as propriedades mais relevantes do funtor Tor, com destaque para suas invariâncias e seu comportamento diante da exatidão. Além disso, outras ferramentas serão introduzidas ao longo do capítulo, fornecendo o suporte conceitual e técnico necessário para o desenvolvimento da teoria.

Definição 17. Um **complexo** é uma sequência de homomorfismos de A-módulos

$$K_\bullet : \cdots \to K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

tais que $d_n \circ d_{n+1} = 0$, ou seja, $Im(d_{n+1}) \subset Ker(d_n)$, para todo n. Os homomorfismos d_n são chamados de **diferenciais do complexo**. A n-ésima **homologia** do complexo é o A-módulo quociente $H_n(K_\bullet) = Ker(d_n)/Im(d_{n+1})$. O complexo é dito **exato** quando $H_n(K_\bullet) = 0$, para todo n.

Exemplo 24. Consideremos a seguinte sequência de $\mathbb{Z}$-módulo

$$K_\bullet : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{-6}{9}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(3 \quad 2)} \mathbb{Z} \to 0.$$

Para mostrar que este é um complexo, precisamos apenas mostrar que os produtos dos pares de matrizes adjacentes são zero;

$$(3 \quad 2)\binom{-6}{9} = (0).$$

Calculando os módulos de homologia em cada grau, obtemos

$$H_0(K_\bullet) = \frac{Ker(\mathbb{Z} \to 0)}{Im\left(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(3 \quad 2)} \mathbb{Z}\right)} = \frac{\mathbb{Z}}{< 3, 2 > \mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = 0,$$

$$H_1(K_\bullet) = \frac{Ker\left(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(3 \quad 2)} \mathbb{Z}\right)}{Im\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{-6}{9}} \mathbb{Z}^2\right)} = \frac{\binom{-2}{3}\mathbb{Z}}{\binom{-6}{9}\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3,$$

$$H_2(K_\bullet) = \frac{Ker\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{-6}{9}} \mathbb{Z}^2\right)}{Im(0 \to \mathbb{Z})} = \frac{0\mathbb{Z}}{0\mathbb{Z}} = 0.$$

Note que as demais homologias $H_i(K_\bullet)$ são nulas, pelo fato que os $M_i = 0$ para todo $i \neq 0, 1, 2$.

Usualmente, também usaremos a notação $(K_\bullet, d_\bullet)$, para deixar claro a diferencial de um complexo, em vez de apenas $K_\bullet$.
A versão dual de um complexo de A-módulos é denominada *cocomplexo*.

Definição 18. Um **cocomplexo** é uma sequência de homomorfismos de A-módulos

$$K^\bullet : \cdots \to K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

tais que $d^n \circ d^{n-1} = 0$, para todo n. A n-ésima cohomologia do cocomplexo é o A-módulo quociente $H^n(K^\bullet) = Ker(d^n)/Im(d^{n-1})$. O cocomplexo é dito exato quando $H^n(K^\bullet) = 0$, para todo n.

As noções que discutiremos a seguir para complexos de A-módulos podem ser definidas, de modo análogo, para cocomplexos.

Definição 19. Sejam $K_\bullet$ e $K'_\bullet$ dois complexos de A-módulos. Um homomorfismo $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ de complexos é uma sequência $f = (f_n)_n$ de homomorfismos $f_n : K_n \to K'_n$, tal que, para cada n, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & K_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ K'_n \arrow[r, "d'_n"] & K'_{n-1} \end{tikzcd}$$

Observação 12. A sequência $(id_{K_n})_n$ define o homomorfismo identidade $f : K_\bullet \to K_\bullet$, o qual denotaremos por $id_{K_\bullet}$. Podemos, de forma natural, definir a composição entre homomorfismos de complexos. Mais precisamente, se $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ e $g : K'_\bullet \to K''_\bullet$ são homomorfismos de complexos, então a composição $g \circ f = (g_n \circ f_n)_n : K_n \to K''_n$ é um homomorfismo de complexos.

Observação 13. Não é difícil verificar, que um homomorfismo $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ induz homomorfismos $f_{*n} : H_n(K_\bullet) \to H_n(K'_\bullet)$ definidos por $f_{*n}(\overline{x}) = \overline{f_n(x)}$. Note que faz sentido definirmos f_{*n} dessa forma, pois, dado $\overline{x} = x + Im(d_{n+1}) \in H_n(K_\bullet)$, temos $x \in Ker(d_n)$. Como f torna os diagramas comutativos, obtemos

$$d'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = 0,$$

de modo que $f_n(x) \in Ker(d'_n)$. Portanto, f_{*n} de fato aplica $H_n(K_\bullet)$ em $H_n(K'_\bullet)$. Agora, verificaremos que está bem definida. Sejam $x, x' \in Ker(d_n)$ tais que $\overline{x} = \overline{x'}$. Então, $x - x' \in Im(d_{n+1})$, de modo que existe $y \in K_{n+1}$ com $d_{n+1}(y) = x - x'$. Como os diagramas comutam, temos

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(y)) = f_n(d_{n+1}(y)) = f_n(x - x') = f_n(x) - f_n(x'),$$

assim, $f_n(x) - f_n(x') \in Im(d'_{n+1})$. Portanto, $\overline{f_n(x)} = \overline{f_n(x')}$.

Definição 20. Dois homomorfismos de complexos $f, g : (K_\bullet, d_\bullet) \to (K'_\bullet, d'_\bullet)$ são ditos **homotópicos** se, para cada n, existe um homomorfismo $h_n : K_n \to K'_{n+1}$ tal que

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n.$$

Usamos a notação $f \sim g$ para indicar que f e g são homotópicos.

Proposição 21. Se $f, g : (K_\bullet, d_\bullet) \to (K'_\bullet, d'_\bullet)$ são homomorfismos homotópicos, então $f_{*n} = g_{*n}$, para cada n.

Demonstração. Sejam

$$\begin{array}{rccc} f_{*n}: & H_n(K_\bullet) & \to & H_n(K'_\bullet) \\ & \overline{x} & \mapsto & \overline{f_n(x)} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} g_{*n}: & H_n(K_\bullet) & \to & H_n(K'_\bullet) \\ & \overline{x} & \mapsto & \overline{g_n(x)}. \end{array}$$

Devemos provar que $f_{*n}(\overline{x}) = g_{*n}(\overline{x})$ para todo $x \in H_n(K_\bullet)$. Isso equivale a mostrar que $f_n(x) - g_n(x) \in Im(d'_{n+1})$. Como $x \in Ker(d_n)$ e, por hipótese, $f \sim g$, temos

$$f_n(x) - g_n(x) = d'_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x)) = d'_{n+1}(h_n(x)) \in Im(d'_{n+1}).$$

Assim, concluímos o que queríamos demonstrar. □

Definição 21. Dois complexos $K_\bullet$ e $K'_\bullet$ são ditos **homotopicamente equivalentes** se existem homomorfismos de complexos $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ e $g : K'_\bullet \to K_\bullet$ tais que $g \circ f \sim id_{K_\bullet}$ e $f \circ g \sim id_{K'_\bullet}$.

Proposição 22. Dois complexos $(K_\bullet, d_\bullet)$ e $(K'_\bullet, d'_\bullet)$ que são homotopicamente equivalentes possuem as mesmas homologias, a menos de isomorfismo.

Demonstração. Sejam $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ e $g : K'_\bullet \to K_\bullet$ homomorfismos de complexos tais que $g \circ f \sim id_{K_\bullet}$ e $f \circ g \sim id_{K'_\bullet}$. Então, existem homomorfismos $h_n : K_n \to K'_{n+1}$ e $h'_n : K'_n \to K_{n+1}$ cumprindo

$$g_n \circ f_n - id_{K_\bullet} = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$$

e

$$f_n \circ g_n - id_{K'_\bullet} = d_{n+1} \circ h'_n + h'_{n-1} \circ d'_n.$$

Dado $\overline{x} \in H_n(K_\bullet)$, tomamos um representante $x \in Ker(d_n)$ e aplicamos a primeira relação:

$$g_n(f_n(x)) - id_{K_\bullet}(x) = d'_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x)).$$

Assim, $g_n(f_n(x)) - x = d'_{n+1}(h_n(x))$. Logo, $g_n(f_n(x)) - x \in Im(d'_{n+1})$, o que implica $\overline{g_n(f_n(x))} = \overline{x}$. De maneira análoga, demonstra-se que $f_{*n} \circ g_{*n} = id_{H_n(K'_\bullet)}$. Portanto, concluímos que $H_n(K_\bullet) \simeq H_n(K'_\bullet)$. □

Definição 22. Uma sequência de complexos

$$0 \to K'_\bullet \xrightarrow{f} K_\bullet \xrightarrow{g} K''_\bullet \to 0$$

é exata se, para cada n, a sequência

$$0 \to K'_n \xrightarrow{f} K_n \xrightarrow{g} K''_n \to 0$$

é exata.

Observação 14. Com isso, podemos definir um homomorfismo conector

$$\delta_n : H_n(K''_\bullet) \to H_{n-1}(K'_\bullet)$$

de forma que se obtenha a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \to H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{*n}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{*n}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K'_\bullet) \to \cdots$$

Note que faz sentido definirmos δ_n dessa forma. Para verificar isso, analisemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"] & K_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & K''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & K_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & K''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dado $\overline{x} \in H_n(K''_\bullet)$, temos $x \in Ker(d''_n) \subset K''_n$. Sendo g_n sobrejetiva, existe $k_n \in K_n$ tal que $x = g_n(k_n)$. Além disso,

$$g_{n-1}(d_n(k_n)) = d''_n(g_n(k_n)) = 0$$

logo, $d_n(k_n) \in Ker(g_{n-1}) = Im(f_{n-1})$. Assim, existe, e é único pela injetividade de f_{n-1}, um elemento $k'_{n-1} \in K'_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(k'_{n-1}) = d_n(k_n)$. Precisamos mostrar agora que $k'_{n-1} \in Ker(d'_{n-1})$. De fato, pela comutatividade do diagrama e pela injetividade de f_{n-2},

$$f_{n-2}(d'_{n-1}(k'_{n-1})) = d_{n-1}(f_{n-1}(k'_{n-1})) = d_{n-1}(d_n(k_n)) = 0.$$

Logo, $d'_{n-1}(k'_{n-1}) = 0$, e assim $k'_{n-1} \in Ker(d'_{n-1})$. Portanto, é natural definirmos

$$\delta_n(\overline{x}) = \overline{k'_{n-1}}.$$

Agora, vamos verificar que δ_n está bem definida. Inicialmente, precisamos mostrar que essa construção não depende da escolha de k_n. Suponha que também tenhamos $x = g_n(\tilde{k}_n)$. Seja p único elemento de K'_{n-1} tal que $f_{n-1}(p) = d_n(\tilde{k}_n)$. Como

$$k_n - \tilde{k_n} \in Ker(g_n) = Im(f_n),$$

existe único $k'_n \in K'_n$ tal que $k_n - \tilde{k_n} = f_n(k'_n)$. Pela comutatividade do diagrama, temos

$$f_{n-1}(d'_n(k'_n)) = d_n(f_n(k'_n)) = d_n(k_n - \tilde{k_n}) = f_{n-1}(k'_{n-1} - p).$$

Pela injetividade de f_{n-1}, concluímos que $k'_{n-1} - p = d'_n(k'_n)$. Portanto, $k'_{n-1} - p \in Im(d'_n)$. De forma análoga, devemos mostrar que a construção não depende da escolha do representante x. Sejam $\overline{x}, \overline{x'} \in H_n(K''_\bullet)$ tais que $\overline{x} = \overline{x'}$. Então, $x - x' \in Im(d''_{n+1})$, logo, existe $k''_{n+1} \in K''_{n+1}$ tal que $d''_{n+1}(k''_{n+1}) = x - x'$. Supondo que $x = g_n(k_n)$ e $x' = g_n(\tilde{k}_n)$, obtemos

$$g_n(k_n - \tilde{k}_n) = g_n(k_n) - g_n(\tilde{k}_n) = x - x' = d''_{n+1}(k''_{n+1}).$$

Como g_{n+1} é sobrejetiva, existe $k_{n+1} \in K_{n+1}$ tal que $g_{n+1}(k_{n+1}) = k''_{n+1}$. Note que

$$\begin{aligned} g_n(k_n - \tilde{k}_n - d_{n+1}(k_{n+1})) &= g_n(k_n - \tilde{k}_n) - d''_{n+1}(g_{n+1}(k_{n+1})) \\ &= d''_{n+1}(k''_{n+1}) - d''_{n+1}(k''_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Assim, $k_n - \tilde{k}_n - d_{n+1}(k_{n+1}) \in Ker(g_n) = Im(f_n)$. Portanto, existe $k'_n \in K'_n$ tal que $f_n(k'_n) = k_n - \tilde{k}_n - d_{n+1}(k_{n+1})$. Seja $y, y' \in K'_{n-1}$ definidos por $f_{n-1}(y) = d_n(k_n)$ e $f_{n-1}(y') = d_n(\tilde{k}_n)$. Então

$$f_{n-1}(d'_n(k'_n)) = d_n(f_n(k'_n)) = d_n(k_n - \tilde{k}_n) = f_{n-1}(y - y'),$$

pela injetividade de f_{n-1}, concluímos $d'_n(k'_n) = y - y'$, ou seja, $y - y' \in Im(d'_n)$.

Proposição 23. Com as noções anteriores, temos que o complexo

$$\cdots \to H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{*n}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{*n}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K'_\bullet) \to \cdots$$

é exato.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $Im(f_{*n}) = Ker(g_{*n})$. A inclusão $Im(f_{*n}) \subset Ker(g_{*n})$ é imediata, pois temos $Im(f_n) = Ker(g_n)$. Assim, para qualquer $\overline{x} \in H_n(K'_\bullet)$,

$$g_{*n}(f_{*n}(\overline{x})) = \overline{g_n(f_n(x))} = \overline{0}.$$

Para a inclusão oposta, seja $\overline{y} \in Ker(g_{*n})$. Então, $g_n(y) \in Im(d''_{n+1})$, de modo que existe $k''_{n+1} \in K''_{n+1}$ satisfazendo $g_n(y) = d''_{n+1}(k''_{n+1})$. Como g_{n+1} é sobrejetiva, existe $k_{n+1} \in K_{n+1}$ tal que $k''_{n+1} = g_{n+1}(k_{n+1})$. Pela comutatividade do diagrama, temos

$$g_n(d_{n+1}(k_{n+1})) = d''_{n+1}(g_{n+1}(k_{n+1})) = g_n(y)$$

portanto, $g_n(y - d_{n+1}(k_{n+1})) = 0$. Logo,

$$y - d_{n+1}(k_{n+1}) \in Ker(g_n) = Im(f_n).$$

De modo que, existe único $k'_n \in K'_n$ tal que $y - d_{n+1}(k_{n+1}) = f_n(k'_n)$. Assim, $y - f_n(k'_n) \in Im(d_{n+1})$, ou seja, $\overline{y} = \overline{f_n(k'_n)}$ em $H_n(K_\bullet)$. Portanto, $\overline{y} \in Im(f_{*n})$.

Agora, mostraremos que $Im(g_{*n}) = Ker(\delta_n)$. Para a inclusão $Im(g_{*n}) \subset Ker(\delta_n)$, seja $\overline{x} \in H_n(K_\bullet)$, com $x \in Ker(d_n)$. Note que,

$$g_{n-1}(d_n(x)) = d''_n(g_n(x)) = 0,$$

o que implica que $d_n(x) \in Ker(g_{n-1}) = Im(f_{n-1})$. Logo, existe único $p \in K'_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(p) = d_n(x) = 0$, como f_{n-1} é injetiva temos $p = 0$. Portanto, $\delta_n(g_{*n}(\overline{x})) = \overline{p} = \overline{0}$. Para a inclusão oposta, seja $\overline{x} \in Ker(\delta_n)$. Então, existe $k_n \in K_n$ tal que $x = g_n(k_n)$, e existe $k'_{n-1} \in K'_{n-1}$ tal que $d_n(k_n) = f_{n-1}(k'_{n-1})$. Como $\delta_n(\overline{x}) = \overline{k'_{n-1}} = \overline{0}$, temos $k'_{n-1} \in Im(d'_n)$, ou seja, $k'_{n-1} = d'_n(k'_n)$. Pela comutatividade do diagrama, temos

$$d_n(f_n(k'_n)) = f_{n-1}(d'_n(k'_n)) = d_n(k_n)$$

portanto, $d_n(k_n - f_n(k'_n)) = 0$, isto é, $k_n - f_n(k'_n) \in Ker(d_n)$. Como $g_n \circ f_n = 0$, temos

$$x = g_n(x) = g_n(k_n - f_n(k'_n)).$$

Logo, $\overline{x} = g_{*n}(\overline{k_n - f_n(k'_n)})$. Concluindo que $\overline{x} \in Im(g_{*n})$. □

Definição 23. Sejam $(K_\bullet, d_\bullet)$ e $(L_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de A-módulos. O produto tensorial destes complexos $K_\bullet \otimes L_\bullet$ é definido por

$$(K_\bullet \otimes L_\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} K_p \otimes L_q$$

juntamente com as diferenciais

$$\begin{array}{rccc} \delta_n : & (K_\bullet \otimes L_\bullet)_n & \rightarrow & (K_\bullet \otimes L_\bullet)_{n-1} \\ & x \otimes y & \mapsto & d(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d'(y). \end{array}$$

Note que as diferenciais definidas asseguram que o produto tensorial forme um complexo. De fato,

$$\begin{aligned} \delta_{n-1}(\delta_n(x \otimes y)) &= \delta_{n-1}\Big(d(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d'(y)\Big) \\ &= \delta_{n-1}(d(x) \otimes y) + \delta_{n-1}\Big((-1)^p x \otimes d'(y)\Big) \\ &= d(d(x)) \otimes y + (-1)^{p+1} d(x) \otimes d'(y) \\ &\quad + (-1)^p d(x) \otimes d'(y) + (-1)^{p+1} x \otimes d'(d'(y)) \\ &= 0 + (-1)^{p+1} d(x) \otimes d'(y) + (-1)^p d(x) \otimes d'(y) + 0 = 0. \end{aligned}$$

Agora apresentaremos o conceito do funtor Tor e desenvolveremos resultados fundamentais a ele relacionados, que descrevem suas propriedades.

Definição 24. Seja M um A-módulo. Um complexo exato

$$P_\bullet : \cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0,$$

onde cada P_i é um módulo projetivo, é dito uma **resolução projetiva** de M. A resolução projetiva é dita finita se existe $n \geq 0$ tal que $P_n \neq 0$ e $P_i = 0$, para todo $i > n$.

Definição 25. Seja o complexo de A-módulos projetivos

$$P_\bullet : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to 0$$

onde $H_i(P_\bullet) = 0$, para $i > 0$ e $H_0(P_\bullet) = M$. Nestes termos, chamamos $P_\bullet$ de **resolução projetiva deletada** de M.

Proposição 24. Todo A-módulo admite uma resolução projetiva.

Demonstração. Seja M um A-módulo. Vamos construir uma resolução projetiva de M. Inicialmente, vamos construir F_0 e o homomorfismo $F_0 \to M$. Escolha um conjunto gerador $S = \{m_i | i \in I\}$ de M. Defina $F_0 = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$, um A-módulo livre com base $\{e_i | i \in I\}$. Em seguida, defina o homomorfismo $\phi_0 : F_0 \to M$ por $\phi_0(e_i) = m_i$. Como S gera M, ϕ_0 é sobrejetivo e obtemos a sequência exata curta à direita $F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0$.
Prosseguindo, vamos construir F_1 e o homomorfismo $F_1 \to F_0$. Considere o $Ker(\phi_0)$. Assim, temos a sequência exata curta

$$0 \to Ker(\phi_0) \to F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0.$$

Escolha o conjunto gerador $T = \{x_j | j \in J\}$ de $Ker(\phi_0)$ e defina $F_1 = \bigoplus_{j \in J} Af_j$, um A-módulo livre com base $\{f_j | j \in J\}$. Defina agora $\phi_1 : F_1 \to F_0$ por $\phi_1(f_j) = x_j$. Dessa forma, a imagem de ϕ_1 é exatamente o núcleo de ϕ_0, e obtemos a sequência exata

$$0 \to F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0.$$

Repetindo o procedimento para $Ker(\phi_1)$, escolhemos um conjunto gerador e construímos um módulo livre F_2 com homomorfismo $F_2 \to F_1$. Continuando indefinidamente, obtemos a sequência

$$\ldots \to F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0.$$

Por construção, cada F_i é livre, que por sua vez, é projetivo e a sequência é exata em todos os termos. Portanto, M admite uma resolução projetiva. □

Definição 26. (**Funtor covariante**) Sejam A e A' anéis. Um funtor aditivo de A-módulos para A'-módulos é entendido como sendo

$$F = F(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \to (F(M) \xrightarrow{F(h)} F(N)),$$

o qual, cada A-módulo M é levado a um A'-módulo $F(M)$ e cada A-homomorfismo $h : M \to N$ é levado a um A'-homomorfismo $F(h) : F(M) \to F(N)$ tal que valem as seguintes propriedades:

1. $F(id_M) = id_{F(M)}$, para cada A-módulo M;
2. $F(l \circ h) = F(l) \circ F(h)$, onde $h \in Hom(M, N)$ e $l \in Hom(N, P)$;

3. $F(l+h) = F(l) + F(h)$, onde $h, l \in Hom(M, N)$.

Proposição 25. Considere A-módulos M e N. Sejam ainda $f \in Hom(M, N)$,

$$P_\bullet : \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

uma resolução projetiva de M e

$$C_\bullet : \cdots \to C_2 \to C_1 \to C_0 \to N \to 0$$

um complexo exato. Então, existe um homomorfismo de complexos $\varphi = (\varphi_n)_n : P_\bullet \to C_\bullet$ tal que $\varphi_{-1} = f$. Além disso, φ é único a menos de homotopia.

Demonstração. Devemos construir $\varphi_n : P_n \to C_n$ de modo que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\delta_1"] & C_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como δ_0 é sobrejetiva, a existência de φ_0 satisfazendo $f \circ d_0 = \delta_0 \circ \varphi_0$ segue da projetividade de P_0. Suponhamos que já foram construídos os homomorfismos $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$. Vamos construir φ_{n+1}. Por hipótese de indução, temos

$$\delta_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n.$$

Compondo ambos os lados à direita por d_{n+1}, obtemos

$$\delta_n \circ \varphi_n \circ d_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0.$$

Assim, $Im(\varphi_n \circ d_{n+1}) \subset Ker(\delta_n) = Im(\delta_{n+1})$. Logo, considerando os homomorfismos $\varphi_n \circ d_{n+1} : P_{n+1} \to Im(\delta_{n+1})$ e $\delta_{n+1} : C_{n+1} \to Im(\delta_{n+1})$, a existência de φ_{n+1} satisfazendo $\delta_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ d_{n+1}$ segue da projetividade de P_{n+1}.
Agora, vamos provar a unicidade de φ a menos de homotopia. Seja $g = (g_n)_n : P_\bullet \to C_\bullet$ um homomorfismo de complexos com $g_{-1} = f$. Assim, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\delta_1"] & C_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

por definição de homotopia, devemos construir homomorfismos $s_n : P_n \to C_{n+1}$ tais que

$$\varphi_n - g_n = \delta_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n.$$

Inicialmente, definimos $s_{-1} : M \to C_0$ como sendo o homomorfismo nulo. Nosso objetivo agora é construir $s_0 : P_0 \to C_1$ satisfazendo $\varphi_0 - g_0 = \delta_1 \circ s_0$. Note que

$$\delta_0 \circ (\varphi_0 - g_0) = f \circ d_0 - f \circ d_0 = 0,$$

de modo que $Im(\varphi_0 - g_0) \subset Ker(\delta_0) = Im(\delta_1)$. Assim, considerando os homomorfismos $\varphi_0 - g_0 : P_0 \to Im(\delta_1)$ e $\delta_1 : C_1 \to Im(\delta_1)$, a existência de s_0 segue da projetividade de P_0. Suponhamos agora que já foram construídos $s_0, \ldots, s_n$ satisfazendo

$$\varphi_k - g_k = \delta_{k+1} \circ s_k + s_{k-1} \circ d_k \quad 0 \leq k \leq n.$$

Nosso objetivo é construir $s_{n+1} : P_{n+1} \to C_{n+2}$ verificando

$$\varphi_{n+1} - g_{n+1} = \delta_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ d_{n+1}$$

ou equivalentemente,

$$\delta_{n+2} \circ s_{n+1} = \varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} \circ (\varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) &= (\varphi_n - g_n - \delta_{n+1} \circ s_n) \circ d_{n+1} \\ &= (s_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Logo, $Im(\varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \subset Ker(\delta_{n+1}) = Im(\delta_{n+2})$. Portanto, considerando os homomorfismos $\varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1} : P_{n+1} \to Im(\delta_{n+2})$ e $\delta_{n+2} : C_{n+2} \to Im(\delta_{n+2})$, a existência de s_{n+1} segue da projetividade de P_{n+1}. □

Corolário 1. Quaisquer duas resoluções projetivas de um A-módulo de M são homotopicamente equivalentes.

Demonstração. Sejam $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ duas resoluções projetivas de M. Pela proposição anterior, existem homomorfismos de complexos $f : P_\bullet \to Q_\bullet$ e $g : Q_\bullet \to P_\bullet$ tais que $f_{-1} = g_{-1} = id_M$. Pela unicidade garantida por essa mesma proposição, concluímos que $g \circ f \sim id_{P_\bullet}$ e $f \circ g \sim id_{Q_\bullet}$, ou seja, $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são homotopicamente equivalentes. □

Corolário 2. Sejam $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ resoluções projetivas de um A-módulo M e F um funtor aditivo. Então, $F(P_\bullet)$ e $F(Q_\bullet)$ são homotopicamente equivalentes.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que F é um funtor covariante. Pelo corolário anterior, existem homomorfismos $f : P_\bullet \to Q_\bullet$ e $g : Q_\bullet \to P_\bullet$ tais que $f \circ g \sim id_{Q_\bullet}$ e $g \circ f \sim id_{P_\bullet}$. A aditividade de F é fundamental neste ponto, pois garante que F preserva somas e diferenças de homomorfismos. Como a relação de homotopia entre complexos é expressa por igualdades que envolvem somas de composições. Assim, a aditividade de F garante que $F(g) \circ F(f) \sim id_{F(P_\bullet)}$ e $F(f) \circ F(g) \sim id_{F(Q_\bullet)}$. Logo, $F(P_\bullet)$ e $F(Q_\bullet)$ são homotopicamente equivalentes. □

Definição 27. Considere A-módulos M e N. Seja $P_\bullet$ uma resolução projetiva deletada de M. Definimos

$$Tor_n^A(M, N) = H_n(P_\bullet \otimes N).$$

Como o funtor $-\otimes N$ é aditivo na categoria dos A-módulos, e pelo Corolário 1, quaisquer resoluções projetivas de M são homotopicamente equivalentes, segue da Proposição 22 que os complexos resultantes possuem a mesma homologia. Assim, a definição acima é bem definida, independentemente da resolução projetiva escolhida. Segue imediatamente da definição que $Tor_0^A(M,N) = M \otimes N$ e $Tor_n^A(M,N) = 0$, se $n < 0$.

Corolário 3. Se M é um A-módulo projetivo, então $Tor_n^A(M,N) = 0$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Seja M um A-módulo projetivo. Considere a resolução projetiva

$$P_\bullet : \cdots \to 0 \to M \xrightarrow{id_M} M \to 0,$$

onde, como M é projetivo, todos os A-módulos à esquerda de M na resolução podem ser tomados como nulos. Assim, ao aplicarmos o funtor $-\otimes N$, obtemos o complexo de cadeias

$$(P_\bullet \otimes N) : \cdots \to M \otimes N \to 0,$$

cuja homologia é nula em todos os graus positivos. Logo, concluímos que $Tor_n^A(M,N) = 0$, para todo $n \geq 1$. □

Observação 15. Dado $f : M \to N$, considere resoluções projetivas $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet, \delta_\bullet)$ de M e N, respectivamente. Pela Proposição 25, existe um homomorfismo de complexos $\varphi_\bullet : (P_\bullet, d_\bullet) \to (Q_\bullet, \delta_\bullet)$ tal que $\varphi_{-1} = f$. Em particular, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & Q_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dado um A-módulo T, aplicando o funtor $-\otimes T$ em cada linha do complexo acima e tomando os homomorfismos induzidos nas homologias do complexo resultante, obtemos morfismos $Tor_n^A(M,T) \to Tor_n^A(N,T)$, que estão bem definidos, pois $\varphi_\bullet$ é único a menos de homotopia. Isto nos fornece a descrição completa dos funtores $Tor_n^A(-,T)$, para cada n.

Lema 9. Considere M' e M'' com resoluções projetivas $(P_\bullet, d'_\bullet)$ e $(Q_\bullet, d''_\bullet)$. Suponha que $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é uma sequência exata. Então, existe uma resolução projetiva $C_\bullet$ de M juntamente com uma sequência exata de complexos

$$0 \to P_\bullet \to C_\bullet \to Q_\bullet \to 0.$$

Demonstração. Seja $C_n = P_n \oplus Q_n$. Isso nos fornece a sequência exata curta

$$0 \to P_n \to C_n \to Q_n \to 0$$

a qual é exata pelo Exemplo 22. Nosso próximo passo é definir as diferenciais em $C_\bullet$. Para isso, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d''_2"] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r, "d''_1"] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r, "d''_0"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M''}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d'_1"] & P_0 \arrow[r, "f\circ d'_0"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

pela Proposição 25, existem $t_0 : Q_0 \to M$ e $t_n : Q_n \to P_{n-1}$ que tornam o diagrama acima comutativo. Definimos então as diferenciais em $C_\bullet$ por

$$\begin{array}{rccc} d_0 : & C_0 & \to & M \\ & (p_0, q_0) & \mapsto & f \circ d'_0(p_0) + t_0(q_0) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} d_n : & C_n & \to & C_{n-1} \\ & (p_n, q_n) & \mapsto & (d'_n(p_n) + (-1)^n t_n(q_n), d''_n(q_n)). \end{array}$$

Verifiquemos que essas diferenciais definem de fato um complexo.

$$\begin{aligned} d_{n-1}(d_n(p_n, q_n)) =& d_{n-1}(d'_n(p_n + (-1)^n t_n(q_n), d''_n(q_n)) \\ =& (d'_{n-1}(d'_n(p_n + (-1)^n t_n(q_n)) + (-1)^{n-1} t_{n-1}(d''_n(q_n)), d''_{n-1}(d''_n(q_n))) \\ =& ((-1)^n d'_{n-1}(t_n(q_n)) + (-1)^{n-1} t_{n-1}(d''_n(q_n)), 0) = (0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, $C_\bullet$ é de fato um complexo. □

Definição 28. Dizemos que uma sequência exata $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ **cinde** se existe homomorfismo $j : M'' \to M$ tal que $g \circ j = id_{M''}$. Analogamente, a sequência exata $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ cinde se existe $j' : M \to M'$ tal que $j' \circ f = id_{M'}$. Dizemos que a sequência exata curta $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ cinde se ela cinde em f e em g.

Corolário 4. Seja $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ uma sequência exata de A-módulos. Então, para cada A-módulo N, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \to Tor^A_{n+1}(M'', N) \to Tor^A_n(M', N) \to Tor^A_n(M, N) \to Tor^A_n(M'', N) \to \cdots$$

Demonstração. Tome resoluções projetivas deletadas $P'_\bullet$ e $P''_\bullet$ de M' e M'', respectivamente. Pelo Lema 9, existe uma resolução projetiva deletada $P_\bullet$ de M, juntamente com a sequência exata de complexos

$$0 \to P'_\bullet \to P_\bullet \to P''_\bullet \to 0.$$

Além disso, para cada n, a sequência $0 \to P'_n \xrightarrow{f} P_n \to P''_n \to 0$ é exata. Como P''_n é projetivo, essa sequência cinde. Em particular, pela Definição 28, existe $g : P_n \to P'_n$ tal que $g \circ f = id_{P_n}$. Consequentemente, considerando os homomorfismos induzidos $f \otimes N : P'_n \otimes N \to P_n \otimes N$ e $g \otimes N : P_n \otimes N \to P'_n \otimes N$, temos

$$(g \otimes N) \circ (f \otimes N) = id_{P'_n \otimes N}.$$

Segue que $f \otimes N$ é injetora, e portanto a sequência

$$0 \to P'_n \otimes N \to P_n \otimes N \to P''_n \otimes N \to 0$$

é exata. Isso nos fornece uma sequência exata de complexos

$$0 \to P'_\bullet \otimes N \to P_\bullet \otimes N \to P''_\bullet \otimes N \to 0.$$

Logo, o resultado segue da Proposição 23. □

Exemplo 25. Sejam I e J ideais em um anel comutativo A. Então,

$$Tor_1^A(A/I, A/J) \simeq (I \cap J)/IJ,$$

e para todo $i \geq 1$, $Tor_{i+1}^A(A/I, A/J) \simeq Tor_i^A(I, A/J)$.

Considere a sequência exata $0 \to I \to A \to A/I \to 0$. Pelo Corolário 4, existe a sequência exata longa

$$\cdots \to Tor_1^A(A, A/J) \to Tor_1^A(A/I, A/J) \to Tor_0^A(I, A/J) \to Tor_0^A(A, A/J) \to Tor_0^A(A/I, A/J) \to 0.$$

Como a sequência longa é exata, se tomarmos uma parte ela continuará sendo exata. Sabemos que todo A-módulo sobre si mesmo é livre e, portanto, projetivo. Assim, pelo Corolário 3, temos $Tor_1^A(A, A/J) = 0$. Dessa forma, ao considerarmos apenas uma parte da sequência e utilizando a definição do funtor Tor, a sequência exata longa se reduz a

$$0 \to Tor_1^A(A/I, A/J) \to I \otimes A/J \to A \otimes A/J \to A/I \otimes A/J \to 0.$$

Como A/J é um A-módulo, segue que $A \otimes A/J \simeq A/J$. Do Exemplo 8, temos os isomorfismos $I \otimes A/J \simeq I/IJ$ e $A/I \otimes A/J \simeq A/(I+J)$. Assim, temos a sequência exata curta

$$0 \to Tor_1^A(A/I, A/J) \xrightarrow{g} I/IJ \xrightarrow{f} A/J \to A/(I+J) \to 0.$$

O homomorfismo f tem como núcleo o quociente $(I \cap J)/IJ$. De fato, seja $a + IJ \in I/IJ$, com $a \in I$. A imagem de $a + IJ$ sob o homomorfismo f é $a + J \in A/J$. Esse elemento é nulo se, e somente se, $a \in J$. Como $a \in I$, isso implica $a \in I \cap J$. Portanto, $Ker(f) = (I \cap J)/IJ$. Pela exatidão da sequência, temos $Im(g) = Ker(f)$ e $Ker(g) = Im(0 \to Tor_1^A(A/I, A/J))$. Desse modo, usando o Teorema 1 temos

$$Tor_1^A(A/I, A/J) \simeq (I \cap J)/IJ.$$

Para a parte final, vamos usar novamente o Corolário 4 para obtermos a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \to Tor_{i+1}^A(A, A/J) \to Tor_{i+1}^A(A/I, A/J) \to Tor_i^A(I, A/J) \to Tor_i^A(A, A/J) \to \cdots$$

Novamente vamos tomar uma parte da sequência e usar o fato que A é um A-módulo projetivo, então ficamos com a sequência exata

$$0 \to Tor_{i+1}^A(A/I, A/J) \xrightarrow{f'} Tor_i^A(I, A/J) \to 0.$$

Note que

$$Ker(f') = \quad Im(0 \to Tor^A_{i+1}(A/I, A/J)) \quad = 0$$
$$\text{e}$$
$$Im(f') = \quad Ker(Tor^A_i(I, A/J) \to 0) \quad = Tor^A_i(I, A/J).$$

Então, f' é bijetiva. Portanto, $Tor^A_{i+1}(A/I, A/J) \simeq Tor^A_i(I, A/J)$.

Exemplo 26. Sejam x um elemento A-regular e M um A-módulo. Então,

$$Tor^A_i(A/(x), M) = \begin{cases} M/xM, & i = 0 \\ (0 :_M x), & i = 1 \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Considere a sequência exata curta

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to A/(x) \to 0.$$

Pelo Corolário 4, temos a sequência exata longa
$\cdots \to Tor^A_1(A, M) \to Tor^A_1(A/(x), M) \to Tor^A_0(A, M) \to Tor^A_0(A, M) \to Tor^A_0(A/(x), M) \to 0.$
Tomando uma parte da sequência, usando o Corolário 3 e a definição de Tor, esta sequência se reduz a

$$0 \to Tor^A_1(A/(x), M) \to A \otimes M \to A \otimes M \to A/(x) \otimes M \to 0.$$

Usando isomorfismos, temos a sequência exata

$$0 \to Tor^A_1(A/(x), M) \to M \to M \to M/(x)M \to 0.$$

Portanto, concluímos que $Tor^A_0(A/(x), M) \simeq M/(x)M$, $Tor^A_1(A/(x), M) \simeq (0 :_M x)$ e para $i > 1$ temos $Tor^A_i(A/(x), M) = 0$, porque a resolução projetiva de $A/(x)$ tem comprimento 1, e portanto o complexo tensorizado só tem homologia nos graus 0 e 1.

Definimos $Tor^A_n(M, N)$ a partir de uma resolução projetiva de M. De modo análogo, se utilizarmos uma resolução projetiva de N, obtemos o mesmo resultado.

Teorema 3. Considere A-módulos M e N e seja $Q_\bullet$ uma resolução projetiva de N. Defina

$$\overline{Tor^A_n}(M, N) = H_n(M \otimes Q_\bullet).$$

Então,

$$Tor^A_n(M, N) = \overline{Tor^A_n}(M, N).$$

Em particular, $Tor^A_n(M, N) = Tor^A_n(N, M)$.

Demonstração. O resultado é imediato se $n \leq 0$. Para $n > 0$, escolhemos módulos M_1 e N_1 de forma a obter as seguintes sequências exatas curtas:

$$0 \to M_1 \to P_0 \to M \to 0 \quad \text{e} \quad 0 \to N_1 \to Q_0 \to N \to 0.$$

Consideremos, então, o diagrama comutativo a seguir, cujas linhas e colunas são exatas:

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{Tor_1}(M_1, Q_0) = 0 \arrow[d] & & \overline{Tor_1}(M, Q_0) = 0 \arrow[d] & \\
 & & \overline{Tor_1}(M_1, N) \arrow[d] & & \overline{Tor_1}(M, N) \arrow[d] & \\
0 = Tor_1(P_0, N_1) \arrow[r] & Tor_1(M, N_1) \arrow[r] & M_1 \otimes N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & P_0 \otimes N_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & M \otimes N_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & M_1 \otimes Q_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P_0 \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M_1 \otimes N \arrow[r] & P_0 \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N \arrow[r] & 0 \\
 & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Note que as três sequências que envolvem Tor são exatas pelo Corolário 4. A sequência

$$M_1 \otimes N \to P_0 \otimes N \to M \otimes N \to 0$$

é exata pela Proposição 17. As demais sequências são exatas, pois resultam da tensorização de sequências exatas por módulos projetivos. Pelo Lema da Serpente, obtemos a seguinte sequência exata:

$$Ker(\beta) \to Ker(\gamma) \to Coker(\alpha) \to Coker(\beta) \to Coker(\gamma) \to 0.$$

Como β é injetiva, e pela Proposição 8, temos a sequência exata

$$0 \to \overline{Tor_1}(M, N) \to M_1 \otimes N \to P_0 \otimes N \to M \otimes N \to 0.$$

Por outro lado, aplicando o Corolário 4, obtemos a sequência exata

$$0 \to Tor_1(M, N) \to M_1 \otimes N \to P_0 \otimes N \to M \otimes N \to 0.$$

Portanto, conclui-se que $\overline{Tor_1}(M, N) \simeq Tor_1(M, N)$. Ainda pelo Lema da Serpente, temos

$$\overline{Tor_1}(M, N) \simeq Ker(\alpha) \text{ e } Tor_1(M, N) \simeq Ker(f).$$

Logo,

$$\overline{Tor_1}(M, N) \simeq Ker(\alpha) = Ker(g \circ \alpha) = Ker(\beta \circ f) = Ker(f) \simeq Tor_1(M, N),$$

confirmando novamente que $\overline{Tor_1}(M, N) \simeq Tor_1(M, N)$. Agora tomando

$$M_n = Ker(P_{n-1} \to P_{n-2}) \text{ e } N_n = Ker(Q_{n-1} \to Q_{n-2}),$$

e considerando as seguintes sequências exatas:

$$0 \to M_n \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \text{ e } 0 \to N_n \to Q_{n-1} \to Q_{n-2} \to \cdots$$

é possível obter os mesmos isomorfismos para os Tor já estabelecidos anteriormente. Portanto, temos a cadeia de isomorfismos:

$$\begin{aligned}\overline{Tor_1^A}(M,N) &\simeq \overline{Tor_1^A}(M,N_{n-1})\\ &\simeq Tor_1^A(M,N_{n-1})\\ &\simeq \overline{Tor_1^A}(M_1,N_{n-2})\\ &\ \vdots\\ &\simeq Tor_1^A(M_{n-1},N)\\ &\simeq Tor_n^A(M,N).\end{aligned}$$

□

Corolário 5. Se M ou N for um A-módulo plano, então $Tor_n^A(M,N) = 0$ para todo $n > 0$. Em particular, se

$$0 \to M \to N \to K \to 0$$

é uma sequência exata e K é plano, então a sequência

$$0 \to M \otimes T \to N \otimes T \to K \otimes T \to 0$$

também é exata, para todo módulo T.

Demonstração. A primeira igualdade segue imediatamente do teorema anterior. Quanto ao segundo fato, basta considerar a sequência exata

$$\ldots \to Tor_1^A(K,T) \to M \otimes T \to N \otimes T \to K \otimes T \to 0$$

e usar o fato de que $Tor_1^A(K,T) = 0$. □

Corolário 6. Dado M um A-módulo, são equivalentes:

1. M é um A-módulo plano;
2. $Tor_n^A(M,N) = 0$, para todo módulo N e $n > 0$;
3. $Tor_1^A(M,N) = 0$, para todo módulo N.

Demonstração. As implicações $1 \Rightarrow 2$ e $2 \Rightarrow 3$ são imediatas a partir do corolário anterior. Para provar $3 \Rightarrow 1$, seja $f : N \to K$ um homomorfismo injetivo. Então, temos a sequência exata

$$0 \to N \to K \to Coker(f) \to 0.$$

a partir da qual se obtém a sequência exata longa

$$\cdots \to Tor_1^A(M, Coker(f)) \to M \otimes N \to M \otimes K \to 0$$

Pela hipótese, $Tor_1^A(M, Coker(f)) = 0$. Logo, segue o resultado. □

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo apresentar o funtor Tor, partindo do estudo dos A-módulos e do produto tensorial, até alcançar sua construção via resoluções projetivas. Ao longo do desenvolvimento, foi possível compreender de forma mais profunda como esse funtor surge naturalmente no contexto da Álgebra Homológica.

Além disso, queremos destacar alguns de seus desdobramentos e aplicações em outros ambientes. Pois, o funtor Tor aparece, por exemplo, na caracterização de módulos planos e no cálculo de alguns invariantes homológicos, como o posto do n-ésimo módulo livre de uma resolução livre minimal de M, quando A é um anel local. Aparece também no cálculo da *dimensão projetiva* de um A-módulo M.

A realização deste estudo contribuiu significativamente para minha formação acadêmica, uma vez que exigiu o contato com conceitos avançados, muitas vezes presentes apenas em cursos de pós-graduação. Essa experiência possibilitou não apenas o aprofundamento teórico, mas também a consolidação de uma postura investigativa diante de temas mais abstratos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALTMAN, Allen. KLEIMAN, Steven. **A Term of Commutative Algebra.** Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2013.

[2] ATIYAH, M. F. MACDONALD, I. G. **Introduction to Commutative Algebra.** Addison-Wesley Publishing Company. 1969.

[3] DOSEA, André. **Uma jornada aos anéis de Gorenstein.** São Cristóvão, 2019.

[4] GARCIA, Arnaldo. LEQUAIN, Yves. **Elementos de álgebra.** 4ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2006.

[5] PÉREZ, Victor Hugo. **Introdução a Álgebra Homologica e Módulos Cohen-Macaulay.** Brasília, 2019.

[6] SILVA, Ewellyn Carolaine Rodrigues. **Introdução à Álgebra Comutativa: um estudo sobre tensores e sequências exatas.** Univ. Federal Rural de Pernambuco, 2019.