



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Prescrição de Curvaturas Gaussiana e Geodésica em Superfícies Compactas com Característica de Euler Não Positiva

Junior Tavares de Santana

São Cristóvão – SE, Brasil

7 de março de 2025



Prescrição de Curvaturas Gaussiana e Geodésica em Superfícies Compactas com Característica de Euler Não Positiva

Junior Tavares de Santana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática - PRO-MAT, da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão – SE, Brasil

7 de março de 2025

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S232p Santana, Junior Tavares de
Prescrição de curvaturas gaussiana e geodésica em superfícies compactas com característica de Euler não positiva / Junior Tavares de Santana ; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2025
138 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2025.

1. Geometria diferencial. 2. Curvatura. 3. Geometria riemanniana. I. Santos, Almir Rogério Silva orient. II. Título.

CDU 514.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Prescrição de Curvaturas Gaussiana e Geodésica em
Superfícies Compactas com Característica de Euler Não
Positiva**

por

Junior Tavares de Santana

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br ALMIR ROGERIO SILVA SANTOS
Data: 07/03/2025 13:45:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
Orientador

**Sergio de Moura
Almaraz** Assinado de forma digital por
Sergio de Moura Almaraz
Dados: 2025.03.07 19:43:50 -03'00'

Prof. Dr. Sergio de Moura Almaraz - UFF
Primeiro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br MARIA DE ANDRADE COSTA E SILVA
Data: 07/03/2025 13:59:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 07 de Março de 2025

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me permitido chegar até aqui.

Aos meus pais, Josefa e Valmir, que sempre prezaram por minha educação e felicidade. Tenho tanto a agradecer que não caberia aqui.

À toda a minha família, por todo o apoio, especialmente à minha irmã Vandilma, por ter cuidado tanto de mim, e às minhas sobrinhas Ariane e Isabela, por serem as criaturinhas que são e alegrarem minha vida.

À minha namorada, Viviane, por toda a paciência, por estar sempre me apoiando, por acreditar em mim mesmo quando eu não acreditava e por tudo.

Agradeço ao professor Almir Rogério por ter aceitado me orientar durante o mestrado, por todo o apoio, paciência, dedicação, conselhos, ensinamentos e conversas. Sua contribuição se estende para além deste trabalho.

A todos os meus amigos, desde os da infância até os que conheci recentemente, especialmente aos meus amigos do mestrado: Adriana, Jardel, Samorane, Lucas, Dalton, Jeverson, Gerônimo, Jamisson, Lays, Edivangel, Gabriel e Angelina.

A todos os meus professores da educação básica.

A todos os professores do PROMAT, especialmente à professora Maria e aos professores Zaqueu, Jonison, Cayo e Arlúcio.

Ao pessoal do PROMAT, ao pessoal do DMA e aos demais professores da UFS que contribuíram para minha graduação, especialmente ao professor Lucas Valeriano.

Agradeço também à banca examinadora, formada pela professora Maria de Andrade e pelos professores Sérgio Almaraz e Cícero Cruz, por cederem seu tempo à apreciação deste trabalho e por suas contribuições.

Agradeço a Igor e Neto, por sempre ajudarem em questões burocráticas e pelo serviço prestado na secretaria do PROMAT. Também agradeço a Marilene e

a todos os demais funcionários pelos serviços prestados.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para que eu chegasse até aqui.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001."

Resumo da Dissertação apresentada ao PROMAT/UFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre (Me.)

Prescrição de Curvaturas Gaussiana e Geodésica em Superfícies Compactas com Característica de Euler Não Positiva

Junior Tavares de Santana

7 de março de 2025

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

Esta dissertação, baseada no artigo [30], aborda o problema de prescrever curvaturas Gaussiana e geodésica em uma superfície Riemanniana compacta com fronteira (Σ, g) . O objetivo deste trabalho é, em linhas gerais, mostrar a existência de uma métrica conforme $\bar{g} = e^u g$ de modo que as curvaturas Gaussiana e geodésica com respeito à métrica $\bar{g}$ sejam prescritas. O problema é reduzido a encontrar uma solução para uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem com condições de fronteira. Além disso, o trabalho explora o funcional energia associado a esse problema e suas propriedades variacionais, abordando questões de coercividade e existência de pontos de mínimos. O estudo se concentra em diferentes cenários, os quais incluem os casos onde a característica de Euler de Σ é negativa e nula. Além disso, existe uma função definida em $\partial\Sigma$ denotada por $\mathfrak{D}$ que desempenha um papel fundamental no estudo. Quando $\mathfrak{D}(q) > 1$ para algum ponto de $\partial\Sigma$, a análise revelou-se mais delicada. O trabalho utiliza conceitos de Geometria Riemanniana, Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais para desenvolver as demonstrações dos teoremas principais. Além disso, métodos avançados como análise de blow-up e o índice de Morse de soluções são empregados para lidar com situações mais refinadas.

Palavras-chaves: Análise de Blow-Up, Curvatura Gaussiana, Curvatura Geodésica, Métricas Conformes, Prescrição de Curvaturas.

Abstract of Dissertation presented to PROMAT/UFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master

Prescription of Gaussian and Geodesic Curvatures on Compact Surfaces with Non-Positive Euler Characteristic

Junior Tavares de Santana

March 7, 2025

Advisor: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

This dissertation, based on the article [30], addresses the problem of prescribing Gaussian and geodesic curvatures on a compact Riemannian surface with boundary (Σ, g) . The main goal of this work is to prove, in broad terms, the existence of a conformal metric $\bar{g} = e^u g$ such that the Gaussian and geodesic curvatures with respect to $\bar{g}$ are prescribed. The problem is reduced to finding a solution for a second-order elliptic partial differential equation with boundary conditions. Furthermore, the work explores the energy functional associated with this problem and its variational properties, addressing issues of coercivity and the existence of minimizers. The study focuses on different scenarios, including cases where the Euler characteristic of Σ is negative or zero. Additionally, there exists a function defined on $\partial\Sigma$, denoted by $\mathfrak{D}$, which plays a fundamental role in the study. When $\mathfrak{D}(q) > 1$ for some point $q \in \partial\Sigma$, the analysis becomes more delicate. The work employs concepts from Riemannian Geometry, Functional Analysis, and Partial Differential Equations to develop the proofs of the main theorems. Moreover, advanced methods such as blow-up analysis and the Morse index of solutions are used to handle more refined situations.

Keywords: Blow-Up Analysis, Gaussian Curvature, Geodesic Curvature, Conformal Metrics, Curvature Prescription.

Lista de ilustrações

Figura 1	–	Figura usada para auxiliar na obtenção dos limites de integração.	32
Figura 2	–	Figura usada para ilustrar a situação do Caso 1.	53
Figura 3	–	Figura usada para ilustrar a situação do Caso 2.	59

Sumário

Lista de ilustrações	I
Introdução	2
1 Preliminares	10
1.1 Notações	10
1.2 Variedades Riemannianas	12
1.3 A Curvatura Gaussiana	16
1.4 Geodésicas	18
1.5 A Curvatura Geodésica	19
1.6 Operadores Diferenciáveis	20
1.7 Geometria Conforme	21
1.8 Análise Funcional e EDP's	23
1.9 Espaços de Funções	24
1.10 Regularidade Elíptica	26
1.11 Desigualdades importantes	28
1.12 O Funcional Energia	29
1.13 O Índice de Morse	41
1.14 O Teorema do Passo da Montanha	43
1.15 O Problema Limite	45
2 Resultados de Existência e Unicidade de Soluções	49
2.1 Um Teorema de Rigidez	49
2.2 Demonstração do Teorema 1	60
2.3 Demonstração do Teorema 2	67
2.4 Demonstração do Teorema 3	71
3 Análise de Blow-Up	79
3.1 Índice de Morse das Soluções do Problema Limite	79
3.2 O Conjunto Singular	88

3.3	Exemplo de Infinitos Pontos de Blow-Up	93
3.4	Lemas Auxiliares	94
3.5	Caso de Massa Ilimitada	100
3.6	Demonstração do Teorema 4	110
Referências		126

Introdução

O problema de prescrição de curvaturas em variedades Riemannianas foi inicialmente abordado por Berger em [5], que tratou da prescrição da curvatura Gaussiana em superfícies fechadas com característica de Euler negativa. Posteriormente, Kazdan e Warner expandiram a investigação para a prescrição de curvaturas Gaussiana e escalar em variedades fechadas, obtendo resultados significativos em [22, 23, 24, 25, 26]. Na década de 1990, Ding e Liu investigaram em [13] o problema de prescrever a curvatura Gaussiana em superfícies fechadas com característica de Euler negativa. Alguns tempo depois, na década de 2010, Borer, Galimberti e Struwe redemonstraram o resultado de Ding e Liu em [6] e, em 2024, Rodrigues [12] escreveu uma dissertação de mestrado baseada neste trabalho. Mais recentemente, no início desta década, Cruz-Blázquez et al estudaram o problema de prescrever curvaturas escalar e média em variedades Riemannianas compactas de dimensão maior ou igual a 3 em [10]. Poucos anos depois, em 2024, Gomes [11] escreveu uma dissertação de mestrado baseada neste trabalho. Em particular, os resultados obtidos em [10] são parecidos com os resultados obtidos em [30], levando em conta que o primeiro trabalha com variedades de dimensão maior ou igual a 3 e o segundo trabalha com superfícies. Consequentemente, esta dissertação de mestrado apresenta resultados parecidos com os expostos em [11].

Neste trabalho, consideramos uma superfície Riemanniana compacta com fronteira, denotada por (Σ, g) . As curvaturas Gaussiana e geodésica associadas à métrica g são representadas, respectivamente, por K_g e κ_g . O objetivo principal é investigar o seguinte problema: dadas as funções suaves $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$, existe uma função suave u tal que K e h correspondam, respectivamente, às curvaturas Gaussiana e geodésica associadas à métrica $\bar{g} := e^u g$? Nos resultados principais deste trabalho, apresentaremos condições suficientes para fornecer uma resposta parcial a essa questão.

Dada uma superfície compacta com fronteira (Σ, g) e uma métrica Riemanniana $\bar{g} = e^u g$ conforme a g , é um resultado bem conhecido que as curvaturas

Gaussiana e geodésica de g e $\bar{g}$ estão relacionadas pelas equações

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2K_g = 2K_{\bar{g}}e^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\kappa_g = 2\kappa_{\bar{g}}e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1)$$

Aqui, $K_{\bar{g}}$ é a curvatura Gaussiana de $\bar{g}$ e $\kappa_{\bar{g}}$ sua curvatura geodésica.

Neste trabalho, apresentaremos a solução de [30] para

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2K_g = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\kappa_g = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2)$$

onde $K \in C^\infty(\Sigma)$, $K < 0$, $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ e Σ tem característica de Euler não positiva.

Integrando (2) e usando o Teorema de Gauss-Bonnet, obtemos

$$\int_{\Sigma} Ke^u dv_g + \int_{\partial\Sigma} he^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler. O que impõe condições necessárias para a existência de solução para o problema de prescrição de curvatura. Por exemplo, quando as funções K e h são positivas e $\chi(\Sigma) < 0$, não há solução para o problema (3). Pois, se existisse uma métrica $\bar{g}$ tal que K fosse a curvatura Gaussiana e h fosse a curvatura geodésica com respeito à métrica $\bar{g}$, teríamos, pelo Teorema de Gauss-Bonnet que

$$0 < \int_{\Sigma} K dv_{\bar{g}} + \int_{\partial\Sigma} h d\sigma_{\bar{g}} = 2\pi\chi(\Sigma) < 0,$$

o que é uma contradição.

É uma consequência do Teorema 1 de [31] que a equação (2) sempre possui solução com $K = \text{sgn}\chi(\Sigma)$ e $h = 0$, onde $\text{sgn}(t) = 1$, se $t > 0$, $\text{sgn}(t) = -1$, se $t < 0$ e $\text{sgn}(0) = 0$. Dessa forma, como nosso problema é conformemente invariante, podemos considerar que a métrica inicial g possui curvatura geodésica nula e curvatura Gaussiana $K_g = \tilde{K} = \text{sgn}\chi(\Sigma)$. Assim, a equação (2) passa a ser

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2\tilde{K} = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (3)$$

com $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$.

O problema (3) é a equação de Euler-Lagrange do funcional energia $I : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$I(u) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2\tilde{K}u - 2Ke^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g, \quad (4)$$

ou seja, u é solução de (3) se, e somente se, u é ponto crítico de I .

Observe que, quando $K < 0$ e $h > 0$, os termos que possuem a exponencial em (4) competem entre si, já que eles possuem sinais opostos. Consequentemente, não é evidente se o funcional I é limitado inferiormente ou superiormente. Essa questão é relevante, pois a limitação de I é importante para a aplicação de técnicas variacionais. Tais técnicas permitem buscar pontos de mínimo ou máximo do funcional I , o que, por sua vez, leva à obtenção de uma solução para o problema (3).

O quociente entre as curvaturas prescritas será muito importante para estudarmos o funcional energia I . Defina a função $\mathfrak{D} : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathfrak{D}(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{|K(x)|}}. \quad (5)$$

Veremos posteriormente que, se $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \partial\Sigma$, o funcional I é limitado inferiormente, e portanto, podemos aplicar técnicas de minimização para o funcional I . Porém, quando $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum ponto $p \in \partial\Sigma$, isso já não é possível, pois o funcional I é ilimitado inferiormente.

O primeiro resultado principal de [30] será enunciado abaixo.

Teorema 1. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira, com $\chi(\Sigma) < 0$, $K_g = -1$ e $\kappa_g = 0$. Sejam $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ tais que $K < 0$ e $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \partial\Sigma$. Então, existe uma métrica $\bar{g} = e^u g$ com $K_{\bar{g}} = K$ e $\kappa_{\bar{g}} = h$. Se $h \leq 0$, então a métrica $\bar{g}$ é única.*

A ideia da demonstração deste teorema consiste em mostrar que o funcional I é limitado inferiormente, mostrando que I é coercivo. Daí, consideramos uma sequência minimizante para o funcional I e mostramos que alguma subsequência

converge para um ponto de mínimo. Para a unicidade, mostramos que o funcional I é estritamente convexo se $h \leq 0$.

O Teorema a seguir, também demonstrado em [30], está relacionado com o caso em que $\chi(\Sigma) = 0$.

Teorema 2. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira, com $K_g = \kappa_g = 0$. Sejam $K \in C^\infty(\Sigma)$, $K < 0$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ tais que*

$$(a) \quad \mathfrak{D}(p) < 1 \text{ para todo } p \in \Sigma;$$

$$(b) \quad \int_{\partial\Sigma} h \, d\sigma_g > 0.$$

Então, existe uma métrica $\bar{g} = e^u g$ tal que $K_{\bar{g}} = K$ e $\kappa_{\bar{g}} = h$.

Novamente, a demonstração do Teorema 2 consiste em mostrar que I é limitado inferiormente e possui um ponto de mínimo. Observe que tanto o Teorema 1 quanto o Teorema 2 possuem a hipótese que $\mathfrak{D} < 1$. Essa hipótese fez com que as demonstrações desses teoremas fossem menos árduas, se comparadas com os próximos dois resultados. O teorema abaixo trata do caso em que $\mathfrak{D}$ deixa de ser estritamente menor que 1. Em contrapartida, precisamos assumir outras hipóteses.

Para simplificar a notação, considere que $\mathfrak{D}_\tau$ denota a derivada de $\mathfrak{D}$ na direção tangente ao longo de $\partial\Sigma$. Enunciaremos agora o terceiro resultado principal de [30].

Teorema 3. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira tal que $K_g = \kappa_g = 0$. Suponha que $K \in C^\infty(\Sigma)$, $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ são tais que $K < 0$ e*

$$(a) \quad \mathfrak{D}(p) > 1 \text{ para algum } p \in \partial\Sigma;$$

$$(b) \quad \int_{\partial\Sigma} h \, d\sigma < 0;$$

$$(c) \quad \mathfrak{D}_\tau(p) \neq 0 \text{ para todo } p \in \partial\Sigma \text{ com } \mathfrak{D}(p) = 1.$$

Então, existe uma métrica $\bar{g} = e^u g$ com $K_{\bar{g}} = K$ e $\kappa_{\bar{g}} = h$.

Aqui, não conseguimos garantir a existência de um mínimo local para o funcional energia I . A estratégia para a demonstração do Teorema 3 consiste em encontrar uma solução para um problema perturbado, a qual será uma solução do tipo de sela. Em seguida, será feita uma análise de blow-up para extrair uma subsequência convergente. Para isso, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_g u_n + 2\tilde{K}_n = 2K_n e^{u_n}, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + 2\tilde{h}_n = 2h_n e^{\frac{u_n}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (6)$$

onde $\tilde{K}_n, K_n \in C^1(\Sigma)$ e $\tilde{h}_n, h_n \in C^1(\partial\Sigma)$ são tais que $\tilde{K}_n \rightarrow \tilde{K}$, $K_n \rightarrow K$, $\tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}$ no sentido C^1 .

Considere uma sequência $(u_n)_n$ de soluções do problema (6) e defina o conjunto singular relacionado a essa sequência (ou conjunto dos pontos de blow-up) como

$$S = \{p \in \Sigma : \text{existe } (x_n)_n \text{ em } \Sigma \text{ com } x_n \rightarrow p \text{ e } u_n(x_n) \rightarrow +\infty\}. \quad (7)$$

Esse conjunto será bastante explorado em nosso trabalho. Sob as hipóteses do Teorema 3, mostraremos que este conjunto é vazio. Defina

$$\chi_n = \int_{\Sigma} \tilde{K}_n dv_g + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n d\sigma_n. \quad (8)$$

Observe que quando $\tilde{K}_n = K_g$ e $\tilde{h}_n = \kappa_g$, tem-se que $\chi_n = 2\pi\chi(\Sigma)$.

O último resultado da dissertação, demonstrado em [30], será enunciado a seguir.

Teorema 4. *Sejam (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira e $(u_n)_n$ uma sequência de soluções do problema (6). Considere o conjunto singular S associado a essa sequência como definido em (7) e χ_n como em (8). Suponha que $K < 0$. Sob essas hipóteses, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $S \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) \geq 1\}$.

(b) Se $\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g\right)_n$ é limitada, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$S = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) > 1\}.$$

Neste caso,

$$|K_n| e^{u_n} \rightharpoonup \sum_{i=1}^m \beta_i \delta_{p_i} \quad e \quad h_n e^{\frac{u_n}{2}} \rightharpoonup \sum_{i=1}^m (\beta_i + 2\pi) \delta_{p_i},$$

com $\beta_i > 0$, onde a convergência acima é no sentido de medida e $\delta_{p_i} \phi = \phi(p_i)$. Em particular, $\chi_n \rightarrow 2\pi m$.

(c) Se $\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g\right)_n$ é ilimitada, existe uma medida positiva σ em Σ tal que:

$$(i) \quad \frac{|K_n| e^{u_n}}{\int_{\Sigma} |K_n| e^{u_n}} \rightharpoonup \sigma \quad e \quad \frac{h_n e^{\frac{u_n}{2}}}{\int_{\partial\Sigma} h_n e^{\frac{u_n}{2}}} \rightharpoonup \sigma|_{\partial\Sigma};$$

$$(ii) \quad \text{supp } \sigma \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) \geq 1 \text{ e } \mathfrak{D}_{\tau}(p) = 0\}.$$

(d) Se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{ind}(u_n) \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $S = S_0 \cup S_1$, onde $\text{ind}(u_n)$ é o índice de Morse,

$$S_0 = S \cap \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) = 1 \text{ e } \mathfrak{D}_{\tau}(p) = 0\} \quad e$$

$$S_1 = \{p_1, \dots, p_k\} = S \cap \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) > 1\},$$

com $k \leq m$. Se, além disso, $\chi_n \leq 0$, então S_1 é vazio.

A demonstração do item (a) do Teorema 4 baseia-se no Princípio Variacional de Ekeland, que permite concluir que uma função v , definida em $\mathbb{R} \times (-t_0, +\infty)$, é não positiva e satisfaz $v(0) = 0$. A partir daí, a prova é dividida em dois casos:

1. No primeiro caso, mostramos que $t_0 = 0$, o que implica que $p \in \partial\Sigma$.
2. No segundo caso, utilizamos o Princípio do Máximo para obter uma contradição, mostrando que não pode existir um ponto de blow-up $p \notin \partial\Sigma$.

Além disso, o Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1) garante que $\mathfrak{D}(p) \geq 1$ para todo $p \in S$.

Para o item (b) do Teorema 4, demonstramos que $S \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) > 1\}$ por meio de uma demonstração por contradição, utilizando o Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1). Para garantir que S é finito, mostramos que cada ponto

de blow-up está associado a uma única bolha e que a quantidade de tais pontos deve ser finita. Caso contrário, isso contradiria a hipótese de que a sequência $\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g\right)_n$ é limitada. As convergências em medida mencionadas neste item são obtidas observando que, pelo Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1), cada ponto de blow-up contribui com um termo do somatório, uma vez que cada um está associado a uma única bolha.

O subitem (i) do item (c) é demonstrado estabelecendo uma igualdade específica, dada em (3.35), e mostrando que um dos lados dessa igualdade decai a zero numa certa ordem. Em seguida, consideramos dois casos:

- O suporte das funções está contido no interior de Σ .
- O suporte das funções está contido na fronteira de Σ .

O resultado segue da definição de convergência fraca em medida e da igualdade (3.35). Para o subitem (ii) do item (c), mostramos que uma determinada medida é nula, o que implica que $\mathfrak{D}_{\tau}(p) = 0$ para todo $p \in \text{supp } \sigma$. O resultado segue da inclusão $\text{supp } \sigma \subset S$ e do item (a) do Teorema 4.

No item (d) do Teorema 4, demonstramos que, se a sequência $(\text{ind}(u_n))_n$ for limitada, então a sequência $\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g\right)_n$ também será limitada. Para isso, utilizamos os lemas da Seção 3.6. Além disso, para mostrar que S_1 é vazio quando $\chi_n \leq 0$, empregamos (3.65) da Proposição 3.6.2 e o item (b) do Lema 3.4.1 em uma demonstração por contradição.

A dissertação é baseada no artigo [30] e está estruturada em três capítulos. No Capítulo 1, abordaremos ferramentas fundamentais que serão usadas ao longo deste trabalho. Inicialmente, apresentaremos algumas notações e introduziremos alguns conceitos essenciais da Geometria Riemanniana. Em seguida, discutiremos definições relevantes da Análise Funcional, das Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e Regularidade Elíptica. O capítulo também dedicará atenção ao tema central da dissertação, que é a Geometria Conforme, incluindo um breve estudo do funcional energia e a apresentação de resultados importantes do Cálculo Variacional.

O Capítulo 2 da dissertação será dedicado à demonstração dos Teoremas 1, 2 e 3. As demonstrações dos Teoremas 1 e 2 serão conduzidas sob uma abordagem variacional, utilizando os resultados discutidos até aquele ponto do trabalho. Para a demonstração do Teorema 3, será necessário empregar resultados que serão apresentados no Capítulo 3, e também resultados citados no Capítulo 1, como o Teorema do Passo da Montanha e o Método de Monotonicidade de Struwe.

No Capítulo 3, investigaremos o comportamento dos pontos de blow-up do problema descrito em (6), que está relacionado ao conjunto singular S definido em (7). Este capítulo abordará conceitos importantes, como o índice de Morse de uma solução, e fará uso de resultados do Cálculo Variacional, incluindo o Princípio Variacional de Ekeland. O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o Teorema 4.

1 Preliminares

Este capítulo tem como objetivo fornecer as ferramentas e conceitos necessários para a compreensão dos capítulos subsequentes. Inicialmente, fixaremos algumas notações na Seção 1.1. Em seguida, nas Seções 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6, abordaremos conceitos fundamentais de Geometria Riemanniana. A geometria conforme será brevemente discutida na Seção 1.7.

As Seções 1.8, 1.9 e 1.10 são dedicadas a elementos de Análise Funcional, com foco em espaços de funções e resultados de regularidade elíptica. Na Seção 1.11, exploraremos algumas desigualdades importantes que serão utilizadas ao longo do trabalho.

Na Seção 1.12, estudaremos o funcional energia I . Mostraremos que, quando $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum ponto $p \in \partial\Sigma$, o funcional energia é ilimitado inferiormente. Em seguida, na Seção 1.13, definiremos o índice de Morse e, na Seção 1.14, apresentaremos resultados variacionais relacionados ao Teorema do Passo da Montanha.

Por fim, na Seção 1.15, trataremos de um problema em $\mathbb{R}_+^2$, denominado Problema Limite. Além disso, enunciaremos um resultado crucial para o desenvolvimento deste trabalho, o qual chamaremos de Teorema de Classificação.

1.1 Notações

Com esta seção, pretendemos tornar a compreensão do leitor mais fácil no que diz respeito as notações e definições usadas. Como veremos nas próximas seções, reservaremos o uso do símbolo Σ para denotar uma superfície Riemanniana compacta de dimensão 2.

- No decorrer deste trabalho, iremos abreviar somas tais como $\sum_i u_i v^i$ para a forma $u_i v^i$, ou seja, índices repetidos em diferentes termos, aparecendo uma vez acima outra abaixo, representam uma soma. Essa notação é conhecida como notação de Einstein para o somatório ou convenção de soma de Eins-

tein. Geralmente, o índice varia de 1 a dimensão da variedade, que em nosso caso é 2. Em momentos oportunos, poderemos fazer um abuso de notação ao interpretar como uma soma índices repetidos com ambos estando acima ou abaixo, por exemplo $\sum_i u_i v_i = u_i v_i$.

- Sejam M um conjunto e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Defina

$$f^+(p) = \max \{f(p), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(p) = \min \{f(p), 0\}.$$

As funções f^+ e f^- são chamadas, respectivamente, de parte positiva e parte negativa de f .

- $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$.

Sejam (Σ, g) uma superfície Riemanniana com fronteira, $p \in \Sigma$ e $r > 0$. Defina

- $B_r(p) = \{x \in \Sigma : d(x, p) < r\}$.
- $B_r^+(p) = B_r(p) \cap \Sigma$, se $p \in \partial\Sigma$.
- $\Gamma_r(p) = \partial B_r^+(p) \cap \partial\Sigma$.
- $\partial^+ B_r(p) = \partial B_r^+(p) \setminus \Gamma_r(p)$.
- Defina

$$B_r^+(0) = \{(s, t) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}.$$

- $A(0; r, R) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : r < |x| < R\}$.
- Sejam X um espaço topológico e uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o suporte de f , denotado por $\text{supp } f$, como o fecho do conjunto dos pontos de X que não anulam f , isto é,

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

- Sejam (X, d) um espaço métrico e Y um subconjunto limitado de X . Definimos o diâmetro de Y como

$$\text{diam } Y = \sup_{x, y \in Y} d(x, y) < +\infty.$$

- Definimos a média de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\oint_M f dv_g = \frac{1}{\text{vol}(M, g)} \int_M f dv_g.$$

- Dado $m \in \mathbb{R}$, dizemos que uma função real f é da ordem $O(|x|^m)$ quando $x \rightarrow 0$ ou ∞ , e escrevemos $f = O(|x|^m)$, se existe $\delta > 0$ e $C > 0$ tal que $|f| \leq C|x|^m$, para todo $|x| < \delta$ ou $|x| > \frac{1}{\delta}$, respectivamente.
- Dizemos que $f = o(|x|^m)$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^m} = 0.$$

1.2 Variedades Riemannianas

Nesta seção abordaremos alguns conceitos de Geometria Riemanniana que usaremos no decorrer deste trabalho. Usamos como principais referências os conhecidos textos [14] e [27]. Começamos com a definição de métrica e variedade Riemanniana.

Definição 1.2.1. *Seja M uma variedade suave com ou sem fronteira. Uma **métrica Riemanniana** em M é um tensor suave g do tipo $(2, 0)$ tal que em cada ponto $p \in M$, a aplicação associada $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno em $T_p M$. Uma **variedade Riemanniana** é um par (M, g) , onde M é uma variedade suave e g é uma métrica Riemanniana em M .*

Quando a métrica Riemanniana está implícita, dizemos simplesmente que M é uma variedade Riemanniana. Além disso, dados $u, v \in T_p M$, é comum denotar $g_p(u, v)$ como $\langle u, v \rangle$. O teorema a seguir nos diz que qualquer variedade suave pode ser munida com uma métrica Riemanniana.

Teorema 1.2.2 (Existência de Métricas Riemannianas). *Toda variedade suave M com ou sem fronteira possui uma métrica Riemanniana.*

Dada uma variedade Riemanniana orientada (M, g) de dimensão n , existe uma única n -forma diferenciável dv_g , chamada de **forma de volume Riemanni-**

ana (ou elemento de volume) de M que satisfaz

$$dv_g(E_1, \dots, E_n) = 1,$$

para todo referencial ortonormal local orientado $(E_1, \dots, E_n)$ de M . Em coordenadas, dv_g pode ser escrita como

$$dv_g = \sqrt{|g|} dx,$$

onde $|g| = \det(g_{ij})$ e g_{ij} são as componentes da métrica g nestas coordenadas. Definimos a integral de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\int_M f dv_g.$$

Em particular, considerando f constante e igual a 1, o volume de uma variedade Riemanniana compacta (M, g) é dado por

$$\text{vol}(M, g) = \int_M dv_g.$$

Na definição abaixo, $\mathfrak{X}(M)$ denota o conjunto de todos os campos vetoriais suaves definidos em M .

Definição 1.2.3. *Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade suave M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

denotada por $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$, tal que

(a) $\nabla_X Y$ é $C^\infty(M)$ -linear em X , ou seja,

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y, \text{ para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

(b) $\nabla_X Y$ é $\mathbb{R}$ -linear em Y , ou seja,

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a \nabla_X Y_1 + b \nabla_X Y_2, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \text{ para todo } f \in C^\infty(M).$$

$\nabla_X Y$ é chamada a **derivada covariante** de Y na direção de X para a conexão ∇ .

Teorema 1.2.4 (Conexão de Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim ∇ satisfazendo as condições:*

- (a) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (simétrica);
- (b) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (compatível com a métrica).

A conexão dada pelo Teorema 1.2.4 é chamada de **conexão de Levi-Civita** ou **conexão Riemanniana**. A menos que seja mencionado o contrário, a partir daqui, serão consideradas apenas conexões Riemannianas.

Os **símbolos de Christoffel** Γ_{ij}^k de uma conexão afim ∇ são definidos, em um sistema de coordenadas, como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Por simplicidade, podemos usar a notação ∂_i para denotar $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Das definições de Γ_{ij}^k e g_{ij} obtemos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}) .

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) e uma conexão Riemanniana ∇ , a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida como

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.1)$$

é $C^\infty(M)$ -multilinear em X , Y e Z . Suas componentes em coordenadas são dadas por

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ijk}^l \partial_l.$$

É possível mostrar que

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

Podemos observar que R é um tensor do tipo $(3, 1)$. O tensor R definido em (1.1) é chamado de **endomorfismo curvatura** da variedade Riemanniana (M, g) . Através da métrica g , definimos o **tensor curvatura de (Riemann)** Rm , do tipo $(4, 0)$, como

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} = Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g_{lm} R_{ijk}^m,$$

Terminamos esta seção com um resultado que revela algumas simetrias do tensor curvatura:

Proposição 1.2.5. *Para quaisquer campos de vetores X, Y, Z, W tem-se que*

- (a) $Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(Y, X, Z, W)$.
- (b) $Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(X, Y, W, Z)$.
- (c) $Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y)$.
- (d) $Rm(X, Y, Z, W) + Rm(Y, Z, X, W) + Rm(Z, X, Y, W) = 0$ (*primeira identidade de Bianchi*).

O resultado a seguir é de suma importância para esta dissertação e serão usados repetidamente no capítulo seguinte. Eles podem ser encontrados em [28].

Lema 1.2.6 (Lema de Simetria). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma aplicação suave. Então,*

$$D_s \partial_t A = D_t \partial_s A.$$

Além disso, para todo campo suave V ao longo de $A((-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b])$, tem-se

$$D_s D_t V = D_t D_s V + R(\partial_s A, \partial_t A)V.$$

1.3 A Curvatura Gaussiana

Sejam $M \subset \tilde{M}$ uma subvariedade de uma variedade suave $\tilde{M}$. Considere $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ extensões suaves de X e Y , respectivamente. Decompondo $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ em suas componentes tangente e normal, respectivamente, obtemos

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^{\top} + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^{\perp}. \quad (1.2)$$

É possível mostrar que $\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^{\top}$ independe das extensões de X e Y . Assim, podemos simplesmente denotar as extensões como os próprios X e Y .

Definição 1.3.1. A **segunda forma fundamental** de M é a aplicação $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow NM$, dada por

$$II(X, Y) := \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp}, \quad (1.3)$$

onde NM é o fibrado normal de M .

Suponha que a dimensão de M é $\dim \tilde{M} - 1$ e que existe um campo normal N ao longo de M . A **segunda forma fundamental escalar** é o tensor h do tipo $(2, 0)$ definido como

$$h(X, Y) = \langle II(X, Y), N \rangle.$$

Uma propriedade importante é que II é simétrico. Consequentemente,

$$h(X, Y) = h(Y, X), \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Segue da definição da segunda forma fundamental que

$$II(X, Y) = h(X, Y)N. \quad (1.4)$$

Além disso, existe um campo tensorial A do tipo $(1, 1)$, que podemos pensar como um endomorfismo de TM , denominado de **operador de forma** de M , tal que

$$h(X, Y) = \langle X, A(Y) \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Desde que h é simétrico, A é autoadjunto, isto é,

$$\langle X, A(Y) \rangle = \langle A(X), Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Observe que os sinais de h e A dependem da escolha de N . De (1.2), (1.3) e (1.4), obtemos a **fórmula de Gauss para hipersuperfícies**, dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) N.$$

Além disso, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, usando que $\langle Y, N \rangle = 0$, obtemos

$$\langle A(X), Y \rangle = h(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle. \quad (1.5)$$

Como $\langle \tilde{\nabla}_X N, N \rangle = \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_X |N|^2 = 0$, segue que $\tilde{\nabla}_X N$ é tangente a M . Então, (1.5) implica que

$$A(X) = -\tilde{\nabla}_X N.$$

Agora considere $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Como $\tilde{R}\tilde{m} = 0$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, a **equação de Gauss para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$** é

$$Rm(X, Y, Z, W) = h(X, W)h(Y, Z) - h(X, Z)h(Y, W).$$

Em cada ponto $p \in M$, o operador de forma $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é uma transformação linear auto-adjunta. Portanto, existe uma base ortonormal de auto-vetores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_p M$, ou seja, $A_p(e_i) = k_i e_i$, com $k_i \in \mathbb{R}$. Chamamos os autovalores k_i de A_p de **curvaturas principais** de M em p , e os correspondentes autoespaços são chamados de **direções principais**.

A **curvatura Gaussiana** de M em p é definida como

$$K(p) = \det A_p = k_1 \cdot \dots \cdot k_n.$$

O célebre resultado que será enunciado a seguir, pode ser visto em [27].

Teorema 1.3.2 (Teorema Egregium de Gauss). *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e g a métrica induzida em M . Para todo ponto $p \in M$ e qualquer base $\{X, Y\}$ de $T_p M$, a curvatura Gaussiana de M em p é dada por*

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (1.6)$$

Portanto, a curvatura Gaussiana é um invariante por isometrias de (M, g) .

Com o teorema acima como motivação, definimos a **curvatura Gaussiana** de uma variedade Riemanniana (M, g) de dimensão 2 (não necessariamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$) pela fórmula (1.6).

1.4 Geodésicas

Antes de definir a curvatura geodésica, definiremos um tipo especial de curva, a qual inspira o nome desse tipo de curvatura.

Em geral, uma **curva** em uma variedade suave M é uma aplicação suave $\gamma : I \rightarrow M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

Um **campo vetorial ao longo de uma curva** $\gamma : I \rightarrow M$ é uma aplicação suave $V : I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ para todo $t \in I$. Vamos denotar por $\mathfrak{J}(\gamma)$ o espaço dos campos de vetores ao longo de γ . Um exemplo de campo de vetores ao longo de uma curva γ é o seu vetor velocidade $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M$ para todo $t \in I$.

Dada uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ e um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos um campo vetorial suave V ao longo de γ fazendo $V(t) := X_{\gamma(t)}$.

Um campo vetorial V ao longo de uma curva γ é dito **estendível** se existe um campo vetorial X definido em uma vizinhança de $\gamma(I)$ tal que $V(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$. Como é possível encontrar uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ tal que existem $t_0, t_1 \in I$ distintos com $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \gamma'(t_1)$, temos que nem todo campo vetorial ao longo de uma curva é estendível (pois, neste caso, $\gamma'(t_0) = V(t_0) \neq V(t_1) = \gamma'(t_1)$ e, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que $X_{\gamma(t_0)} = X_{\gamma(t_1)}$).

Considere que ∇ é a conexão Riemanniana em uma variedade Riemanniana (M, g) . É um resultado bem conhecido que, para cada curva $\gamma : I \rightarrow M$, ∇ determina um único operador

$$D_t : \mathfrak{J}(M) \rightarrow \mathfrak{J}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades

(a) Linearidade sobre $\mathbb{R}$:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) Regra do Produto:

$$D_t(fV) = f'V + D_tV, \text{ para toda } f \in C^\infty(I).$$

(c) Se V é estendível, então qualquer extensão $\tilde{V}$ de V satisfaz

$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}.$$

Definimos o campo vetorial $D_t\gamma'$ ao longo de uma curva γ em M como a aceleração de γ . Uma curva é uma **geodésica** se sua aceleração é nula, ou seja, $D_t\gamma' = 0$ para todo t . O teorema a seguir, que pode ser encontrado em [14], garante a existência e unicidade de geodésicas.

Teorema 1.4.1 (Existência e Unicidade de Geodésicas). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$, $v \in T_pM$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ satisfazendo $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Além disso, duas geodésicas com essas mesmas condições coincidem em seus domínios em comum.*

1.5 A Curvatura Geodésica

Na seção anterior discutimos um pouco sobre um tipo de curvas especialmente importante para a Geometria Diferencial: as geodésicas. Agora definiremos

uma curvatura que guarda estreita relação com as geodésicas, não sendo atoa que ela recebe o nome de curvatura geodésica.

Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 2. Considere que γ é uma curva parametrizada por comprimento de arco. Dessa forma, existe um único campo vetorial unitário N ao longo de α tal que $\{\gamma'(s), N(s)\}$ é uma base ortonormal orientada de $T_{\gamma(s)}M$ para todo s . A **curvatura geodésica** k_g de γ em pontos suaves de γ é definida como

$$k_g(s) = \langle D_s \gamma'(s), N(s) \rangle.$$

Como $|\gamma'(s)| = 1$, segue que $D_s \gamma'(s)$ é ortogonal a $\gamma'(s)$. Logo, podemos escrever $D_s \gamma'(s) = k_g(s)N(s)$. Dessa forma, uma curva é geodésica se, e somente se, sua curvatura geodésica é identicamente nula.

1.6 Operadores Diferenciáveis

Nesta seção definiremos alguns operadores diferenciáveis bem conhecidos, que serão bastante usados no decorrer do texto.

Definição 1.6.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana com ou sem fronteira e $f \in C^\infty(M)$. Defina o **gradiente** de f , denotado por $\nabla_g f$, como o único campo vetorial que satisfaz*

$$g(\nabla_g f, X) = Xf = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas, temos que

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Definição 1.6.2. *Defina o **operador divergente** $\text{div}_g : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ como*

$$\text{div}_g X = \text{tr}_g(Y \longrightarrow \nabla_Y X).$$

Em coordenadas,

$$\operatorname{div}_g X = g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) = \partial_i v^i + v^j \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(v^i \sqrt{|g|} \right),$$

com $X = v^i \partial_i$.

Definição 1.6.3. O **Laplaciano** de uma função $f \in C^\infty(M)$ com respeito à métrica g , denotado por $\Delta_g f$, é definido como

$$\Delta_g f = \operatorname{div}_g (\nabla_g f).$$

Em coordenadas, o Laplaciano é dado por

$$\Delta_g f = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right) = \sum_{k=1}^n \left(\partial_k^2 - \Gamma_{kk}^i \partial_i f \right). \quad (1.7)$$

A menos que seja dito explicitamente o contrário, a partir daqui, usaremos ∇f e Δf para denotar, respectivamente, o gradiente e o laplaciano na métrica euclidiana (denotada por δ).

Agora apresentaremos um resultado que será usado frequentemente neste texto.

Teorema 1.6.4 (Teorema da Divergência). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada. Se X é um campo vetorial suave com suporte compacto e $f \in C^\infty(M)$ então*

$$\int_M f \operatorname{div}_g X dv_g = - \int_{\partial M} \langle \nabla_g f, X \rangle dv_g + \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle dv_h,$$

onde N é o campo vetorial normal unitário apontando para fora ao longo de ∂M e h é a métrica Riemanniana induzida em ∂M .

1.7 Geometria Conforme

Definição 1.7.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma métrica Riemanniana $\tilde{g}$ é conforme a g se existe uma função positiva diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = fg$. Essa função f é chamada de fator conforme.*

Observe que a relação

$$\tilde{g} \sim g \text{ se, e somente se, } \tilde{g} \text{ é conforme a } g$$

é uma relação de equivalência. Denotamos por $[g]$ a classe (família) de métricas conformes a g em M .

Além disso, dadas duas superfícies Riemannianas (M, g) e $(N, \bar{g})$, as métricas g e $\bar{g}$ são **conformemente equivalentes** se existe um difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ e uma função suave $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente positiva, tal que

$$F^*\bar{g} = e^\varphi g.$$

Aqui, $F^*\bar{g}$ representa o **pullback** da métrica $\bar{g}$ por F , ou seja, $F^*\bar{g}$ é a métrica em M obtida ao puxar $\bar{g}$ de N via F .

É conhecido que dada uma superfície Riemanniana compacta (Σ, g) , para cada ponto $p \in \Sigma$, existe uma vizinhança coordenada U tal que a métrica g nessas coordenadas é conforme a métrica Euclidiana, ou seja, $g = e^v \delta$ em U , onde δ é a métrica Euclidiana em $\mathbb{R}_+^2$.

O seguinte resultado é bem conhecido e muito importante para nossos estudos.

Teorema 1.7.2. *Sejam g e $\bar{g}$ duas métricas Riemannianas em uma superfície Σ tais que $\bar{g} = e^u g$, para alguma função suave u definida em Σ . Então,*

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2K_g = 2K_{\bar{g}}e^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_g} + 2\kappa_g = 2\kappa_{\bar{g}}e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Onde K_g e $K_{\bar{g}}$ são as curvaturas Gaussianas das métricas g e $\bar{g}$, respectivamente, e κ_g e $\kappa_{\bar{g}}$ são as curvaturas geodésicas de $\partial\Sigma$ com respeito às métricas g e $\bar{g}$, respectivamente.

Uma consequência do Teorema 1 de [31] é o seguinte resultado:

Proposição 1.7.3. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta. Então existe $u \in C^\infty(\Sigma)$ tal que a curvatura Gaussiana é igual a K e a curvatura geodésica h é identicamente nula, onde*

$$K = 0 \text{ se } \chi(\Sigma) = 0, \quad K = -1 \text{ se } \chi(\Sigma) < 0, \quad K = 1 \text{ se } \chi(\Sigma) = 1.$$

A solução é única a menos de uma constante no primeiro caso, única no segundo caso, e única a menos de uma transformação de Möbius no terceiro caso.

Dessa forma, sempre podemos assumir que a métrica g é a métrica dada pela Proposição 1.7.3.

1.8 Análise Funcional e EDP's

Aqui, descreveremos sobre fatos de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais. Maiores detalhes podem ser vistos em [7] e [2].

Definição 1.8.1. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Defina uma métrica d em X como $d(x, y) = \|x - y\|$. Dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um **espaço de Banach** se o (X, d) é completo.*

Definição 1.8.2. *Seja X um espaço com produto interno. Dizemos que X é um espaço de Hilbert quando X é um espaço de Banach com a norma proveniente do produto interno.*

Definição 1.8.3. *Seja X um espaço de Hilbert. Uma sequência $(x_n)_n$ em X converge fracamente para x , e denotamos como $x_n \rightharpoonup x$, se*

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle,$$

para todo $y \in X$.

Lema 1.8.4. *Se $x_n \rightharpoonup x$ em um espaço de Hilbert, então*

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

Definição 1.8.5. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear entre espaços de Banach. T é dita compacta se para todo compacto $A \subset X$, temos que $\overline{T(A)} \subset Y$ é compacto em Y .*

Lema 1.8.6. *Seja H um espaço de Hilbert e X um espaço de Banach tal que $H \subset X$ seja uma inclusão compacta, ou seja, a aplicação inclusão $i : H \rightarrow X$ é compacta. Então, dada uma sequência limitada $(x_n)_n$ em H existem uma sub-sequência $(x_{n_k})_k$ e $x \in H$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em H e $x_{n_k} \rightarrow x$ em X .*

O resultado a seguir pode ser encontrado na Seção 8 de [2].

Teorema 1.8.7 (Princípio do Máximo). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $h \in C^\infty(M)$ não positiva. Suponha que $u \in C^2(M)$ satisfaz*

$$\Delta_g u + \langle X, \nabla_g u \rangle + h(x)u \geq 0.$$

Se $u \leq m$, onde $m \geq 0$, então

(a) $u \equiv m$, ou

(b) $u(x) < m$, para todo $x \in M$.

Além disso, se $p \in \partial M$, u é contínua e $u(p) = m \geq 0$, então a derivada normal para fora em p , se existir, satisfaz $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p) > 0$, desde que p pertença à fronteira de uma bola contida em M . Mais ainda, se $h \equiv 0$, a mesma conclusão é verdadeira para $m < 0$.

1.9 Espaços de Funções

Esta seção irá abordar alguns espaços vetoriais que serão usados do decorrer deste trabalho. Em particular, ela servirá de suporte para a seção seguinte. Para mais detalhes, ver [4] e [16].

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Para cada $1 \leq p < \infty$, defina o espaço

$$L^p(M) = \left\{ u : M \rightarrow \mathbb{R} : \int_M |u|^p dv_g < \infty \right\} / \sim,$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é tal que duas funções são equivalentes se elas são iguais a menos de um conjunto de medida nula. A norma $\|\cdot\|_{L^p}$ é definida como

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Antes de definir o espaço $L^\infty(M)$, precisamos definir o supremo essencial de uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{ess sup } u := \inf \{c \in \mathbb{R} : \text{a medida } \mu(\{p \in M : u(p) > c\}) = 0\}.$$

Definimos o espaço $L^\infty(M)$ como

$$L^\infty(M) = \{u : M \rightarrow \mathbb{R} : \|u\|_{L^\infty} < \infty\},$$

com a norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ dada por

$$\|u\|_{L^\infty} = \text{ess sup } |u|.$$

Dentre todos os espaços $L^p(M)$, com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $L^2(M)$ possui a propriedade especial de somente ele ser um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_M uv dv_g,$$

que induz a norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

Dadas funções $u \in L^p(M)$ e $v \in L^q(M)$ com $1 \leq p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a **Desigualdade de Hölder** é um resultado bastante conhecido que nos diz que

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $k \geq 0$ inteiro. O **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(M)$ é o completamento do espaço $C^\infty(M)$ em $L^p(M)$ com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{j=1}^k \int_M |\nabla^j u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usualmente, denotamos o espaço $W^{k,2}(M)$ como $H^k(M)$. Trabalharemos bastante com o espaço de Sobolev $H^1(M)$, munido com a norma

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_M u^2 dv_g + \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g.$$

É um fato conhecido que uma função $u \in W^{k,p}(M)$ se, e somente se, as derivadas de u existem, a menos de um conjunto de medida nula, até a ordem k e

$$u, |\nabla u|, \dots, |\nabla^k u| \in L^p(M).$$

O espaço $H_0^1(M)$ é o completamento de $C_0(M)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{H^1}$, onde $C_0(M)$ é o conjunto das funções $C^\infty(M)$ com suporte compacto contido no interior de M .

1.10 Regularidade Elíptica

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados relacionados a regularidade elíptica.

Definição 1.10.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Um **operador diferenciável linear** A de ordem $2m$ em M , escrito em relação a uma carta coordenada (U, φ) , é uma expressão da forma*

$$A(u) = \sum_{l=0}^{2m} a_{i_1 \dots i_l} \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_l} u,$$

onde $a_{i_1 \dots i_l}$ são funções suaves em U e $u \in C^{2m}(M)$. Os termos de maior ordem, que são os termos de ordem $2m$, são chamados de **termos líder** (assumindo que a_{2m} é não nulo). Dizemos que o operador A é **elíptico** em um ponto $x \in U$ se existe $\lambda(x) \geq 1$, tal que

$$\|w\|^{2m} \lambda(x)^{-1} \leq a_{i_1 \dots i_{2m}} w_{i_1} \dots w_{i_{2m}} \leq \lambda(x) \|w\|^{2m},$$

para todos os vetores w . O operador A é **uniformemente elíptico** em U se é possível escolher $\lambda(x)$ constante.

Teorema 1.10.2 (Mergulhos de Sobolev). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n . Então*

$$(a) \quad W^{k,p}(M) \subset L^{\frac{np}{n-kp}}, \text{ se } 1 \leq k < \frac{n}{p} \text{ (inclusão contínua).}$$

$$(b) \quad W^{1,p}(M) \subset C^{0,\alpha}(M), \alpha = 1 - \frac{n}{p}, \text{ se } p > n \text{ (inclusão contínua).}$$

(c) $W^{k,p}(M) \subset C^{k-1,\alpha}(M)$, para todo $k \geq 1$.

(d) Se $kp > n$, então

$$W^{k,p}(M) \subset C^{k-\frac{n}{p}-1,\alpha}(M) \text{ (inclusão contínua).}$$

(e) Se $u \in W^{k,p}(M)$ para todo $k \geq 1$, então $u \in C^\infty(M)$.

Em [9], encontramos o seguinte resultado:

Teorema 1.10.3. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira. Então, o traço do operador $u \in H^1(\Sigma) \rightarrow u|_{\partial\Sigma} \in L^p(\partial\Sigma)$ é contínuo e compacto, para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.10.4 (Teorema de Compacidade). *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n .*

(a) $W^{k,q}(M) \subset L^r(M)$, se $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$. (Inclusão contínua).

(b) Se $n \geq 3$, então $W^{k,q}(M) \subset\subset L^r(M)$, para $\frac{1}{r} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$. (Inclusão compacta).

(c) Se $n = 2$, então $W^{1,2}(M) \subset\subset L^p$, para todo $1 \leq p < \infty$. (Inclusão compacta).

(d) $W^{k,n}(M) \subset\subset C^\alpha(M)$, se $\frac{1}{q} \leq \frac{k-\alpha}{n}$ e $\alpha \in (0, 1)$. (Inclusão compacta).

Além disso, segundo a seção 3.2 de [9], se (Σ, g) é uma superfície com bordo, então o operador traço, que associa uma função $u \in H^1(\Sigma)$ a $u|_{\partial\Sigma} \in L^p(\partial\Sigma)$, é contínuo e compacto, para todo $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.10.5 (Desigualdade de Poincaré). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_M \left(u - \int_M u \right)^2 dv_g \leq C \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g,$$

para toda $u \in H^1(M)$.

O resultado a seguir é uma versão mais geral da proposição acima no contexto em que estamos trabalhando, superfícies compactas, ele pode ser encontrado na seção 3.2 de [9].

Teorema 1.10.6 (Desigualdade de Sobolev-Poincaré). *Seja (Σ, g) uma superfície compacta. Então, para qualquer $1 \leq p < +\infty$, existe $C > 0$, que depende somente de Σ e p , tal que*

$$\left(\int_{\Sigma} \left| u - \oint_{\Sigma} u \right|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para toda $u \in H^1(\Sigma)$.

1.11 Desigualdades importantes

Lema 1.11.1 (Desigualdade de Young). *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ não negativos e $\xi > 0$, vale*

$$ab \leq \frac{\xi^p}{p} a^p + \frac{1}{q\xi^q} b^q.$$

Lema 1.11.2 (Desigualdade de Jensen). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então,*

$$\varphi \left(\frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M f dv_g \right) \leq \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M \varphi \circ f dv_g.$$

O resultado a seguir nos fornece algumas desigualdades importantes, conhecidas como desigualdades de Moser-Trudinger, esse resultado pode ser encontrado nos Corolários 3.5 e 3.7 de [9].

Teorema 1.11.3. *Seja (Σ, g) uma superfície compacta. Existem constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, dependendo somente de Σ , tal que*

$$(a) \log \int_{\Sigma} e^u dv_g \leq \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 + C_1, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Sigma).$$

$$(b) \log \int_{\Sigma} e^u dv_g \leq \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 dv_g + \oint_{\Sigma} u + C_1, \text{ para todo } u \in H^1(\Sigma).$$

$$(c) \log \int_{\partial\Sigma} e^u d\sigma_g \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 + \int_{\partial\Sigma} u + C_2, \text{ para todo } u \in H^1(\Sigma).$$

Também usaremos o seguinte resultado clássico da teoria de medida e integração:

Lema 1.11.4 (Lema de Fatou). *Sejam μ uma medida e $(u_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então,*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

1.12 O Funcional Energia

Sejam (Σ, g) uma superfície Riemanniana, $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$. Se $\bar{g}$ é uma métrica Riemanniana em Σ tal que $\bar{g} = e^u g$, para alguma função suave u , com curvatura Gaussiana e geodésica K e h , respectivamente, do Teorema 1.7.2, temos

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2K_g = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\kappa_g = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1.8)$$

Defina o funcional energia $I : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$I(v) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g v|^2 + 2K_g v - 2Ke^v \right) dv_g + 2 \int_{\partial\Sigma} \left(\kappa_g v - 2he^{\frac{v}{2}} \right) d\sigma_g.$$

Note que, dados $u, v \in H^1(\Sigma)$, temos

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} I(u + tv) = \int_{\Sigma} (\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle + 2K_g v - 2Kve^u) dv_g + 2 \int_{\partial\Sigma} \left(\kappa_g - he^{\frac{u}{2}} \right) v d\sigma_g.$$

Isso implica que se u é solução Riemanniana de (1.8), então $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} I(u + tv) = 0, \forall v \in H^1(\Sigma)$. Além disso, se $u \in H^1(\Sigma)$ satisfaz essa condição, dizemos que u é uma solução fraca de (1.8). Em particular, da teoria de regularidade elíptica, u é suave.

Para o lema a seguir, considere um ponto p em $\partial\Sigma$.

Seja $q = p + q_2\eta(p)$, onde η é o vetor normal e unitário apontando para fora ao longo de $\partial\Sigma$ e $q_2 > 0$ pequeno o suficiente para que q pertença a uma extensão regular de Σ .

Dado um parâmetro μ tal que $\mu d(x, q) > 1$ para todo $x \in \Sigma$, defina as funções

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu,q} : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} & \varphi_{\mu,q}(x) &= \log \left(\frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^2} \right), \\ \tilde{\varphi}_{\mu,q} : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} & \tilde{\varphi}_{\mu,q} &= \varphi_{\mu,q} - \log |K|.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Lema 1.12.1. *Seja $p \in \partial\Sigma$ tal que $\mathfrak{D}(p) > 1$ e seja $I : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$I(u) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2\tilde{K}u - 2Ke^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g.$$

Então, supondo $K < 0$, existe $q_2 > 0$ tal que

$$I(\tilde{\varphi}_{\mu,q}) \rightarrow -\infty \quad e \quad \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{\tilde{\varphi}_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \rightarrow +\infty \quad \text{quando } \mu \searrow \frac{1}{d(p, q)} = \frac{1}{q_2}.$$

Onde $\tilde{\varphi}_{\mu,q}$ foi definida em (1.9).

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}I(\tilde{\varphi}_{\mu,q}) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 + 2\tilde{K}\tilde{\varphi}_{\mu,q} - 2Ke^{\tilde{\varphi}_{\mu,q}} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{\tilde{\varphi}_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \\ &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 + 2\tilde{K}\tilde{\varphi}_{\mu,q} - 2Ke^{\varphi_{\mu,q} - \log |K|} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2} - \frac{\log |K|}{2}} d\sigma_g \\ &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 + 2\tilde{K}\tilde{\varphi}_{\mu,q} + 2e^{\varphi_{\mu,q}} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} \frac{h}{\sqrt{|K|}} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \\ &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 + 2\tilde{K}\tilde{\varphi}_{\mu,q} + 2e^{\varphi_{\mu,q}} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}|\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 &= |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 + |\nabla_g \log |K||^2 - 2\langle \nabla_g \varphi_{\mu,q}, \nabla_g \log |K| \rangle \\ &\leq |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 + |\nabla_g \log |K||^2 + 2|\nabla_g \varphi_{\mu,q}| |\nabla_g \log |K||.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Young (Lema 1.11.1), temos que

$$2|\nabla_g \varphi_{\mu,q}| |\nabla_g \log |K|| \leq 2\varepsilon |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 + \frac{1}{8\varepsilon^2} |\nabla_g \log |K||^2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 &\leq |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 + |\nabla_g \log |K||^2 + 2\varepsilon |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 + \frac{1}{8\varepsilon^2} |\nabla_g \log |K||^2 \\ &= (1 + 2\varepsilon) |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 + \left(1 + \frac{1}{8\varepsilon^2}\right) |\nabla_g \log |K||^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 dv_g \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \int_{\Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g + C_{\varepsilon}, \quad (1.10)$$

onde $C_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{8\varepsilon^2}\right) \int_{\Sigma} |\nabla_g \log |K||^2 dv_g$.

Afirmação 1.12.2. $\int_{\Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g \leq \frac{8\pi(1 + o_{\delta}(1) + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + C.$

Note que

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g = \int_{\Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g + \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} |\varphi_{\mu,q}|^2 dv_g.$$

Usando a definição de $\varphi_{\mu,q}$, para todo $x \in \Sigma$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}(x)| &= \left| \frac{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^2}{4\mu^2} \cdot \frac{8\mu^4 \nabla_g d^2(x, q)}{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^3} \right| \\ &= 2\mu^2 \frac{|\nabla_g d^2(x, q)|}{\mu^2 d^2(x, q) - 1} = \frac{4\mu^2 d(x, q) |\nabla_g d(x, q)|}{\mu^2 d^2(x, q) - 1} \\ &\leq 4\mu^2 \frac{d(x, q)}{\mu^2 d^2(x, q) - 1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

pois $|\nabla_g d(x, q)| \leq 1$ e $\mu d(x, q) > 1$.

Considere coordenadas normais centradas em q e note que

$$dv_g = (1 + O(q_2^2)) dx, \quad d(q, x) = |x|, \quad \text{para } x \in B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma.$$

Além disso, por (1.11) temos

$$\int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g \leq \int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{16\mu^4 |x|^2}{(\mu^2 |x|^2 - 1)^2} (1 + Cq_2^2) dx, \quad (1.12)$$

onde

$$B_{(1+\delta)q_2}^+(0) = \{x \in B_{(1+\delta)q_2}(0) : x_2 > \delta q_2\}$$

em coordenadas normais centradas em q . Note que nestas coordenadas, o ponto p corresponde ao ponto $(0, q_2)$.

Como $x \in B_{(1+\delta)q_2}(0)$, então $\mu |x| \leq 1 + o_\delta(1)$ quando $\mu \rightarrow \frac{1}{q_2}$. Dessa forma, de (1.12), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g &\leq \int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{16\mu^4 |x|^2}{(\mu^2 |x|^2 - 1)^2} (1 + Cq_2^2) dx \\ &\leq 16(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2)) \int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{\mu^2}{(\mu^2 |x|^2 - 1)^2} dx. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Como estamos interessados em integrar sobre a região correspondente a $B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma$, precisamos integrar a região de $B_{(1+\delta)q_2}(q)$ que situa-se acima do segmento de reta que passa por p . Vamos usar a Figura 1 para determinar os limites de integração em coordenadas polares. Note que o ângulo deve variar de α

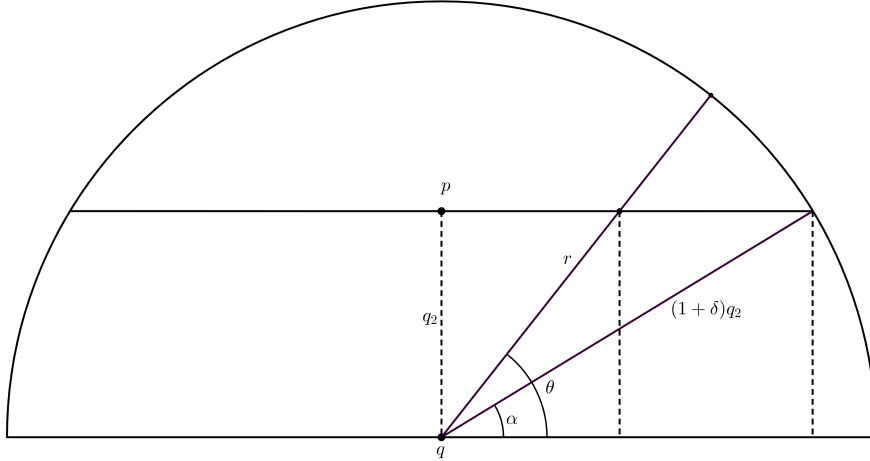


Figura 1 – Figura usada para auxiliar na obtenção dos limites de integração.

a $\pi - \alpha$. Mas, devido à simetria do problema, vamos considerar o ângulo variando de α a $\frac{\pi}{2}$ e multiplicar a integral por 2. Para calcular α , basta perceber que $\sin \alpha = \frac{q_2}{(1+\delta)q_2} = \frac{1}{1+\delta}$. Donde segue que $\alpha = \arcsin \frac{1}{1+\delta}$. Além disso, para

deduzir os valores que r pode assumir, basta observar que, para cada ângulo θ , $\sin \theta = \frac{q_2}{r}$. Donde obtemos que $r = \frac{q_2}{\sin \theta}$. Dessa forma,

$$\int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{\mu^2}{(\mu^2|x|^2 - 1)^2} = 2 \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{q_2}{\sin \theta}}^{(1+\delta)q_2} \frac{\mu^2 \rho}{(\mu^2 \rho^2 - 1)^2} d\rho d\theta. \quad (1.14)$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \mu^2 \rho^2 - 1$, obtemos que $dt = 2\mu^2 \rho d\rho$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{q_2}{\sin \theta}}^{(1+\delta)q_2} \frac{\mu^2 \rho}{(\mu^2 \rho^2 - 1)^2} d\rho d\theta \\ &= \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\mu^2 q_2^2}{\sin^2(\theta)} - 1}^{(1+\delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1} \frac{dt d\theta}{t^2} \\ &= - \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} \Big|_{\frac{\mu^2 q_2^2}{\sin^2(\theta)} - 1}^{(1+\delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1} d\theta \\ &= - \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1} d\theta + \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\theta)}{\mu^2 q_2^2 - \sin^2(\theta)} d\theta \\ &\leq \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\theta)}{\mu^2 q_2^2 - \sin^2(\theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pois $\mu q_2 > 1$ implica $(1+\delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1 > (1+\delta)^2 - 1$. E assim,

$$0 < \frac{1}{(1+\delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1} < \frac{1}{(1+\delta)^2 - 1}.$$

Donde,

$$0 \leq \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1} d\theta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{1+\delta} \right) \frac{1}{(1+\delta)^2 - 1} = C(\delta).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\theta)}{\mu^2 q_2^2 - \sin^2(\theta)} d\theta \\
& \leq \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mu^2 q_2^2 - \sin^2(\theta)} d\theta \\
& = \frac{1}{\mu q_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}}{\mu q_2} \tan(\theta) \right) \right]_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \\
& = \frac{1}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}}{\mu q_2} \tan \left(\arcsin \frac{1}{1+\delta} \right) \right) \right), \\
& \leq \frac{\pi}{2\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}}. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

Onde na penúltima linha usamos que $\lim_{\theta \searrow \frac{\pi}{2}} \tan(\theta) = +\infty$ e $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \arctan(\theta) = \frac{\pi}{2}$.

E, na última linha, usamos que $\lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}}{\mu q_2} \tan \left(\arcsin \frac{1}{1+\delta} \right) \right)$ se aproxima de zero com valores maiores que zero.

Logo, de (1.13), (1.14), (1.15) e (1.16), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g & \leq 16(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2)) \int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{\mu^2}{(\mu^2 |x|^2 - 1)^2} dx. \\
& \leq 32(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2)) \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sin \theta}{q_2}}^{2q_2} \frac{\mu^2 \rho}{(\mu^2 \rho^2 - 1)^2} d\rho d\theta. \\
& \leq 16(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2)) \int_{\arcsin \frac{1}{1+\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\theta)}{\mu^2 q_2^2 - \sin^2(\theta)} d\theta + C \\
& \leq \frac{8\pi(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + C \tag{1.17}
\end{aligned}$$

Observe que para todo $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)$, temos que

$$d(x, q) \geq (1 + \delta)q_2.$$

Daí,

$$\frac{1}{\mu^2 d^2(x, q) - 1} \leq \frac{1}{(1 + \delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1} \leq \frac{1}{(1 + \delta)^2 - 1}, \tag{1.18}$$

pois $\mu^2 q_2^2 > 1$.

Usando (1.11) e (1.18), temos que

$$|\nabla_g \varphi_{\mu,q}(x)| \leq \frac{4\mu^2 d(x,q)}{\mu^2 d^2(x,q) - 1} \leq \frac{4\mu^2 d(x,q)}{(1+\delta)^2 - 1},$$

para todo $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)$. Donde segue que

$$\int_{\Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g \leq C(\delta). \quad (1.19)$$

De (1.17) e (1.19), segue que

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g \leq \frac{8\pi(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + C(\delta).$$

Provando a Afirmação 1.12.2.

Afirmação 1.12.3. $\int_{\Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g \leq \frac{2\pi(1 + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + C(\delta).$

Sabemos que

$$\int_{\Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g = \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g + \int_{\Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g.$$

Pela definição de $\varphi_{\mu,q}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g &= \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} e^{\log\left(\frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x,q) - 1)^2}\right)} dv_g \\ &= \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} \frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x,q) - 1)^2} dv_g. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Assim como na prova da afirmação anterior, passando para coordenadas normais centradas em q e identificando q com a origem de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$\int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} \frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x,q) - 1)^2} dv_g \leq 4(1 + O(q_2^2)) \int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{\mu^2}{(\mu^2 |x|^2 - 1)^2} dx \quad (1.21)$$

Por (1.20), (1.21), (1.14), (1.15) e (1.16), segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g &= \int_{B_{(1+\delta)q_2}(q) \cap \Sigma} \frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^2} dv_g \\
 &\leq 4(1 + O(q_2^2)) \int_{B_{(1+\delta)q_2}^+(0)} \frac{\mu^2}{(\mu^2 |x|^2 - 1)^2} dx \\
 &\leq 4 \frac{\pi(1 + O(q_2^2))}{2\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \\
 &= \frac{2\pi(1 + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}}.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Se $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)$, temos que

$$d(x, q) \geq (1 + \delta)q_2.$$

Daí,

$$e^{\varphi_{\mu,q}(x)} = \frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^2} \leq \frac{4\mu^2}{((1 + \delta)^2 \mu^2 q_2^2 - 1)^2},$$

para todo $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)$.

Como vamos fazer $\mu \searrow \frac{1}{q_2}$, podemos supor $\frac{2}{q_2} > \mu > \frac{1}{q_2}$. Dessa forma, $4\mu^2 \leq \frac{16}{q_2^2}$ e

$$\int_{\Sigma \setminus B_{2q_2}(q)} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g \leq \frac{16}{q_2^2((1 + \delta)^2 - 1)^2} \text{vol}(\Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)).$$

Assim,

$$\int_{\Sigma \setminus B_{(1+\delta)q_2}(q)} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g \leq C(\delta). \tag{1.23}$$

Portanto, de (1.22) e (1.23), segue que

$$\int_{\Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g \leq \frac{2\pi(1 + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + C(\delta),$$

provando a Afirmação 1.12.3.

Afirmção 1.12.4. $\int_{\partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \geq \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + O(1).$

Primeiro, dividimos a integral como

$$\int_{\partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g = \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\varphi_{\mu,q}} d\sigma_g + \int_{\partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g.$$

Desde que $\mathfrak{D}(x) \geq \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D}(x)$ para todo $x \in B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma$, temos que

$$\int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \geq \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D}(x) \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g.$$

Pela definição de $\varphi_{\mu,q}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g &= \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} e^{\log\left(\frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x,q)-1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} d\sigma_g \\ &= \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \frac{2\mu}{\mu^2 d^2(x,q) - 1} d\sigma_g. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas normais, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \frac{2\mu}{\mu^2 d^2(x,q) - 1} d\sigma_g &= \int_{-q_2}^{q_2} \frac{2\mu}{\mu^2(x_1^2 + q_2^2) - 1} dx_1 \\ &= 2 \int_0^{q_2} \frac{2\mu}{\mu^2(x_1^2 + q_2^2) - 1} dx_1 \\ &= \int_0^{q_2} \frac{4\mu}{\mu^2(x_1^2 + q_2^2) - 1} dx_1, \end{aligned}$$

pois em coordenadas normais $d^2(x,q) = d^2(x,p) + d^2(p,q) = x_1^2 + q_2^2$, onde $x = (x_1, 0)$.

Fazendo a mudança de variáveis $y = \mu x_1$ e considerando $c^2 = \mu^2 q_2^2 - 1 > 0$, obtemos

$$\int_0^{q_2} \frac{4\mu}{\mu^2(x_1^2 + q_2^2) - 1} dx_1 = 4 \int_0^{\mu q_2} \frac{dy}{y^2 + c^2} = \frac{4}{c} \arctan\left(\frac{\mu q_2}{c}\right).$$

Observe que na primeira desigualdade estamos considerando μ suficientemente próximo de $\frac{1}{q_2}$, pois

$$\lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} \arctan \left(\frac{\mu q_2}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{q_2} \frac{4\mu}{\mu^2(x_1^2 + q_2^2) - 1} dx_1 &= \frac{4}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \arctan \left(\frac{\mu q_2}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \right) \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\geq \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g &\geq \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \\ &= \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} \int_0^{q_2} \frac{4\mu}{\mu^2(x_1^2 + q_2^2) - 1} dx_1 \\ &\geq \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + O(1). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Por outro lado, se $x \in \partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)$, temos que

$$\mathfrak{D}(x) \geq \inf_{y \in \partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)} \mathfrak{D}(y).$$

Como $d^2(x, q) = d^2(p, q) + d^2(x, p)$ e $d(p, q) = q_2$, temos que $d^2(x, q) \geq 2q_2^2$ sempre que $x \in \partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)$. Daí,

$$e^{\frac{\varphi_{\mu,q}(x)}{2}} = \frac{2\mu}{\mu^2 d^2(x, q) - 1} \leq \frac{2\mu}{2\mu^2 q_2^2 - 1} \leq 2\mu \leq \frac{4}{q_2},$$

para todo $x \in \partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)$. Na segunda desigualdade, utilizamos que $\mu > \frac{1}{q_2}$ e,

na terceira desigualdade, utilizamos o fato de podermos supor que $\mu < \frac{2}{q_2}$, já que

$$\mu \searrow \frac{1}{q_2}.$$

A desigualdade acima implica que

$$\int_{\partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \leq C. \quad (1.25)$$

Logo, por (1.24) e (1.25), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\mu,q}{2}} d\sigma_g &= \int_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\mu,q}{2}} d\sigma_g + \int_{\partial\Sigma \setminus B_{q_2}(p)} \mathfrak{D} e^{\frac{\mu,q}{2}} d\sigma_g \\ &\geq \min_{x \in B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D}(x) \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + C, \end{aligned}$$

provando a Afirmação 1.12.4.

Afirmação 1.12.5. $\int_{\Sigma} \tilde{K} \tilde{\varphi}_{\mu,q} dv_g \leq C.$

Considere $c := \text{diam}(\Sigma) + q_2$ e observe que, para todo $x \in \Sigma$, vale

$$d(x, q) \leq d(x, p) + d(p, q) \leq \text{diam}(\Sigma) + q_2 = c.$$

Daí, como podemos supor $\mu < \frac{2}{q_2}$, obtemos que

$$\frac{1}{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^2} \geq \frac{1}{\left(\frac{4c^2}{q_2^2} - 1\right)^2}.$$

E usando o fato de $\frac{1}{q_2} < \mu$, podemos concluir que

$$\frac{4\mu^2}{(\mu^2 d^2(x, q) - 1)^2} \geq \frac{4}{q_2^2 \left(\frac{4c^2}{q_2^2} - 1\right)},$$

para todo $x \in \Sigma$. Donde segue que

$$\varphi_{\mu,q}(x) \geq \log \left(\frac{4}{q_2^2 \left(\frac{4c^2}{q_2^2} - 1\right)} \right), \quad (1.26)$$

para todo $x \in \Sigma$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \tilde{K} \tilde{\varphi}_{\mu,q} dv_g &= \int_{\Sigma} \tilde{K} (\varphi_{\mu,q} - \log |K|) dv_g \\ &\leq \tilde{K} \int_{\Sigma} \varphi_{\mu,q} dv_g + \left(- \int_{\Sigma} \tilde{K} \log |K| dv_g \right) \\ &\leq \tilde{K} \int_{\Sigma} \log \left(\frac{4}{q_2^2 \left(\frac{4c^2}{q_2^2} - 1\right)} \right) dv_g - \int_{\Sigma} \tilde{K} \log |K| dv_g \\ &\leq C, \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é consequência de (1.26) e por $\tilde{K}$ ser menor que zero. Isto prova a Afirmação 1.12.5.

Finalmente, de (1.10) e das Afirmações 1.12.2, 1.12.3, 1.12.4 e 1.12.5, temos que

$$\begin{aligned}
I(\tilde{\varphi}_{\mu,q}) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g \tilde{\varphi}_{\mu,q}|^2 + 2\tilde{K} \tilde{\varphi}_{\mu,q} + 2e^{\varphi_{\mu,q}} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \int_{\Sigma} |\nabla \varphi_{\mu,q}|^2 dv_g + C_\varepsilon + 2 \int_{\Sigma} \tilde{K} \tilde{\varphi}_{\mu,q} dv_g \\
&\quad + 2 \int_{\Sigma} e^{\varphi_{\mu,q}} dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} \mathfrak{D} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{8\pi(1 + o_\delta(1) + O(q_2^2))}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + \frac{4\pi + O(q_2^2)}{\mu q_2 \sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \\
&\quad - \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} \frac{8\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + O(1) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \left(4\pi + 8\pi\varepsilon + 4\pi + o_\delta(1) + O(q_2^2) - 8\pi \min_{B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D} \right) + O(1) \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \left(\varepsilon + o_\delta(1) + O(q_2^2) - b \right) + O(1).
\end{aligned}$$

Sendo que em usamos o fato de $\mu q_2 > 1$ na terceira desigualdade. Além disso, na última igualdade, usamos a continuidade de $\mathfrak{D}$ e o fato de $\mathfrak{D}(p) > 1$ para considerar q_2 pequeno o suficiente de modo que $\min_{x \in B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D}(x) > 1$, ou ainda, $\min_{x \in B_{q_2}(p) \cap \partial\Sigma} \mathfrak{D}(x) = 1 + b$, com $b > 0$.

Fazendo ε, δ e q_2 pequenos o suficiente para $\varepsilon + o_\delta(1) + O(q_2^2) < b$, obtemos que

$$\lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} I(\tilde{\varphi}_{\mu,q}) \leq \lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} \frac{8\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} \left(\varepsilon + o_\delta(1) + O(q_2^2) - b \right) + O(1) = -\infty.$$

Ou seja,

$$\lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} I(\tilde{\varphi}_{\mu,q}) = -\infty. \tag{1.27}$$

Como $\tilde{\varphi}_{\mu,q} = \varphi_{\mu,q} - \log |K|$, usamos (1.24) e (1.25) para obter

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{\tilde{\varphi}_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g &= \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{\sqrt{|K|}} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \geq \min_{x \in \partial\Sigma} \frac{1}{\sqrt{|K(x)|}} \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{\varphi_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \\ &\geq \min_{x \in \partial\Sigma} \frac{1}{\sqrt{|K(x)|}} \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + O(1), \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{\tilde{\varphi}_{\mu,q}}{2}} d\sigma_g \geq \min_{x \in \partial\Sigma} \frac{1}{\sqrt{|K(x)|}} \lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 q_2^2 - 1}} + O(1) = +\infty.$$

Isto é,

$$\lim_{\mu \searrow \frac{1}{q_2}} \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{\tilde{\varphi}_{\mu,q}}{2}} dv_g = +\infty.$$

Concluimos a demonstração do lema. $\square$

1.13 O Índice de Morse

Retomando a discussão iniciada na seção anterior, defina a forma quadrática $Q : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$Q(v) := \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} I(u + tv) = \int_{\Sigma} (|\nabla_g v|^2 - 2Kv^2 e^u) dv_g - \int_{\partial\Sigma} hv^2 e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g. \quad (1.28)$$

A partir da análise real, sabemos que, se t_0 é um ponto de mínimo local de uma função suave f , então $f'(t_0) = 0$ e $f''(t_0) \geq 0$. Nesse contexto, o funcional Q desempenha um papel análogo à segunda derivada do funcional energia I , sendo associado à solução u de (1.8), que é um ponto crítico de I . Portanto, a definição a seguir é motivada pela busca de caracterizar o comportamento de uma solução de um problema do tipo (1.8), no sentido de avaliar em que medida ela se afasta de ser um ponto de mínimo do funcional energia.

Definição 1.13.1. *O índice de Morse de uma solução v de (1.8) é definido como*

$$\text{ind}(v) = \sup \left\{ \dim(E) : E \subset H_0^1(\mathbb{R}_+^2) \text{ espaço vetorial com } Q(\psi) < 0, \forall \psi \in E \right\}.$$

Defina $F : H^1(\Sigma) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(v) = \frac{1}{2} \frac{Q(v)}{\int_{\Sigma} v^2 dv_g}.$$

Uma função $v \in H^1(\Sigma) \setminus \{0\}$ é ponto crítico de F se, e somente se, $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(v + t\psi) = 0$ para todo $\psi \in H^1(\Sigma)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(v + t\psi) &= \frac{\int_{\Sigma} (\langle \nabla_g v, \nabla_g \psi \rangle - 2Kv\psi e^u) dv_g - \int_{\partial\Sigma} hv\psi e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g}{\int_{\Sigma} v^2 dv_g} \\ &\quad - Q(v) \frac{\int_{\Sigma} v\psi dv_g}{\left(\int_{\Sigma} v^2 dv_g \right)^2} \end{aligned}$$

Desta forma, quando $v \in C^2(\Sigma)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(v + t\psi) &= \frac{\int_{\Sigma} (-\Delta_g v - 2Kve^u - 2F(v)v) \psi dv_g - \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - hv e^{\frac{u}{2}} \right) \psi d\sigma_g}{\int_{\Sigma} v^2 dv_g} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade é consequência do Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4) e da definição de F .

Portanto, obtemos o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} \Delta_g v + 2Kve^u + \lambda v = 0, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = hv e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (1.29)$$

onde $\lambda = 2F(v)$.

Isso implica que o $\text{ind}(v)$ conta o número de autovalores negativos de (1.29) (com multiplicidade).

1.14 O Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, abordaremos algumas definições e resultados que estão relacionados com o Teorema do Passo da Montanha, que veremos adiante. Para mais detalhes, recomendamos ler [8] e [1].

Definição 1.14.1. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Dizemos que um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ possui a **geometria do passo da montanha** se $I(0) = 0$ e ele satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) *Existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que $I(u) \geq \varepsilon$ sempre que $\|u\| = \delta$;*
- (b) *Existe $v \in X$, com $\|v\| > \delta$, tal que $I(v) \leq 0$.*

Suponha que I possui a geometria do passo da montanha e seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\}$$

o conjunto dos caminhos que liga a origem a $v \in X$ dado pelo item (b) da definição acima. O valor c definido como

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)) > 0 \tag{1.30}$$

é chamado de **nível do passo da montanha** do funcional I .

Definição 1.14.2. *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que uma sequência $(u_n)_n$ em X é uma **sequência de Palais-Smale** do funcional I se $(I(u_n))_n$ é limitada e $I'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* , quando $n \rightarrow +\infty$. Onde X^* é o espaço dual de X , ou seja, o espaço dos funcionais lineares contínuos $L : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Observe que se $(I(u_n))_n$ é limitada, podemos obter uma subsequência convergente. Desta forma, quando assumirmos que uma sequência é de Palais-Smale, já iremos supor que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $I(u_n) \rightarrow a$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Definição 1.14.3. *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que o funcional I satisfaz a **condição de Palais-Smale** se toda sequência de Palais-Smale de I possui uma subsequência convergente em X .*

Teorema 1.14.4 (Passo da Montanha). *Suponha que o funcional $I \in C^1(X; \mathbb{R})$ possui a geometria do passo da montanha. Seja $c \in \mathbb{R}$ como definido em (1.30) e suponha que toda sequência $(u_n)_n$ de Palais-Smale em X satisfazendo $I(u_n) \rightarrow c$ possui uma subsequência convergente. Então existe $x \in X$ tal que $I(x) = c$ e $I'(x) = 0$.*

O resultado a seguir pode ser encontrado como o Teorema 1.1 de [20].

Teorema 1.14.5 (Monotonicidade de Struwe). *Sejam X um espaço de Banach e $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Considere uma família $(I_\alpha)_{\alpha \in J}$ de funcionais de classe $C^1(X; \mathbb{R})$ da forma*

$$I_\alpha(u) = A(u) - \alpha B(u), \text{ para todo } \alpha \in J, \quad (1.31)$$

onde $A(u) \geq 0$ ou $B(u) \geq 0$ para todo $u \in X$ e tais que $A(u) \rightarrow +\infty$ ou $B(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow +\infty$. Assuma que I_α possui a geometria do passo da montanha para todo $\alpha \in J$, e denote por c_α o nível do passo da montanha de I_α , definido em (1.30). Então, para quase todo $\alpha \in J$ existe uma sequência $(u_n)_n$ em X tal que

- (a) $I_\alpha(u_n) \rightarrow c_\alpha$;
- (b) $I'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* , e;
- (c) $(u_n)_n$ é limitada.

Em [30] é argumentado que o resultado acima continua válido se considerarmos $I_\alpha = A(u) + \alpha B(u)$ em (1.31).

O seguinte resultado pode ser encontrado como o Corolário 1 de [17].

Proposição 1.14.6. *Sejam H um espaço de Hilbert, $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $u, v \in H$ tais que:*

$$\max \{ \varphi(u), \varphi(v) \} < c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \{ \gamma \in C([0, 1]; H) : \gamma(0) = u \text{ e } \gamma(1) = v \}.$$

Suponha que φ' e φ'' são Hölder contínuas em uma vizinhança de $\{\varphi = c\}$. Então, existe uma sequência $(x_n)_n$ em H tal que

$$(a) \lim \varphi(x_n) = c;$$

$$(b) \lim \varphi'(x_n) = 0;$$

$$(c) \text{ Para cada } n, \text{ se } \langle \varphi''(x_n)u, u \rangle < -\frac{1}{n}\|u\|^2 \text{ para toda } u \text{ em um subespaço } E \text{ de } H, \text{ então } \dim(E) \leq 1.$$

1.15 O Problema Limite

Seja $u \in C^\infty(\Sigma)$ uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2K_g = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\kappa_g = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1.32)$$

Onde $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$. Para cada $p \in \partial\Sigma$ fixado, considere um sistema de coordenadas normais centradas em p definidas em $B_r^+(0)$ para algum $r > 0$. Dado $\lambda > 0$, defina

$$v_\lambda(x) = u(\lambda x) + 2\log(\lambda) \text{ para } x \in B_{\frac{r}{\lambda}}^+(0), \quad (1.33)$$

onde $B_{\frac{r}{\lambda}}^+(0) = B_{\frac{r}{\lambda}}(0) \cap \mathbb{R}_+^2$.

Lembre-se de (1.7) que

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j u \right) = g^{ij} \partial_i \partial_j u + \frac{\partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij})}{\sqrt{|g|}} \partial_j u.$$

Para simplificar a notação, faça $F^j = \frac{\partial_i \sqrt{|g|} g^{ij}}{\sqrt{|g|}}$. De (1.33), segue que

$$\partial_j v_\lambda(x) = \lambda \partial_j u(\lambda x)$$

e

$$\partial_i \partial_j v_\lambda(x) = \lambda^2 \partial_i \partial_j u(\lambda x).$$

Assim,

$$\Delta_g u(\lambda x) = \lambda^{-2} g^{ij}(\lambda x) \partial_i \partial_j v_\lambda(x) + \lambda^{-1} F^j(\lambda x) \partial_j v_\lambda(x).$$

Consequentemente,

$$-\Delta_g u(\lambda x) + 2K_g(\lambda x) = -\lambda^2 g^{ij}(\lambda x) \partial_i \partial_j v_\lambda(x) - \lambda^{-1} F^j(\lambda x) \partial_j v_\lambda(x) + 2K_g(\lambda x).$$

Além disso,

$$e^{u(\lambda x)} = \lambda^{-2} e^{v_\lambda(x)}.$$

De (1.32) obtemos

$$-g^{ij}(\lambda x) \partial_i \partial_j v_\lambda(x) - \lambda F^j(\lambda x) \partial_j v_\lambda(x) + 2\lambda^2 K_g(\lambda x) = 2K(\lambda x) e^{v_\lambda(x)}, \quad (1.34)$$

para todo $x \in B_{\frac{r}{\lambda}}^+(0)$.

Observe que, quando $\lambda \rightarrow 0$, temos que $B_{\frac{r}{\lambda}}^+(0) \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, e $g^{ij}(\lambda x) \rightarrow g^{ij}(0) = \delta_{ij}$. Admita que

$$v_\lambda \rightarrow v \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}_+^2)$$

quando $\lambda \rightarrow 0$. Dessa forma, fazendo $\lambda \rightarrow 0$, obtemos da equação (1.34) que

$$-\Delta v = 2K(0)e^v \text{ em } \mathbb{R}_+^2. \quad (1.35)$$

Agora analisaremos (1.32) na fronteira. Note que

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial \eta}(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial \eta} u(\lambda x) = 2\lambda h(\lambda x) e^{\frac{u(\lambda x)}{2}} - 2\lambda \kappa_g(\lambda x) = 2h(\lambda x) e^{\frac{v_\lambda(x)}{2}} - 2\lambda \kappa_g(\lambda x),$$

para todo $x \in B_{\frac{r}{\lambda}}^+(0)$. Assim como no caso anterior, estamos supondo que

$$v_\lambda \rightarrow v \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

Dessa forma, fazendo $\lambda \rightarrow 0$, obtemos que

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 2h(0)e^{\frac{v}{2}} \text{ em } \partial \mathbb{R}_+^2. \quad (1.36)$$

Portanto, com as equações (1.35) e (1.36), obtemos que o problema limite é dado por

$$\begin{cases} -\Delta v &= 2Ke^v \text{ em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 2he^{\frac{v}{2}} \text{ em } \partial\mathbb{R}_+^2, \end{cases} \quad (1.37)$$

com K e h constantes.

Note que se v é uma solução de (1.37), então $v_\lambda(x) = v(\lambda x) + 2 \log \lambda$ também é uma solução, para todo $\lambda > 0$.

O resultado a seguir, que pode ser encontrado em [18] e [33], classifica todas as soluções de (1.37).

Teorema 1.15.1 (Teorema de Classificação). *Defina $\mathfrak{D} = \frac{h}{\sqrt{|K|}}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *Se $\mathfrak{D} < 1$, então (1.37) não admite nenhuma solução.*

(b) *Se $\mathfrak{D} = 1$, as únicas soluções de (1.37) são dadas por:*

$$v_\lambda(s, t) = 2 \log \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda t} \right) - \log |K|, \quad \lambda > 0. \quad (1.38)$$

(c) *Se $\mathfrak{D} > 1$, existe um holomorfismo localmente univalente $\phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow D_R \subset \mathbb{H}^2$, onde D_R é um disco de raio R contido no disco de Poincaré $\mathbb{H}^2$, de modo que a curvatura geodésica em D_R seja $\mathfrak{D}$ e*

$$v(z) = 2 \log \left(\frac{2|\phi'(z)|}{1 - |\phi(z)|^2} \right) - \log |K|.$$

Lembramos que $\mathbb{H}^2$ é o disco unitário em $\mathbb{C}$ equipado com a métrica $\frac{4}{(1-|z|^2)^2} dz$.

Além disso, ϕ é uma aplicação Möbius se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx < +\infty \text{ ou } \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} dl < +\infty. \quad (1.39)$$

Neste caso, podemos escrever v como:

$$v_\lambda(s, t) = 2 \log \left(\frac{2\lambda}{(s - s_0)^2 + (t + t_0)^2 - \lambda^2} \right) - \log |K|, \quad (1.40)$$

onde $\lambda > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 = \mathfrak{D}\lambda$. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |K| e^{v_\lambda} dx = \beta, \quad \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} h e^{\frac{v_\lambda}{2}} dl = \beta + 2\pi, \quad (1.41)$$

com

$$\beta = 2\pi \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + K}} - 1 \right).$$

Observação 1.15.2. Observe, no item (c) do Teorema acima, que se (1.39) é verdadeiro, então (1.41) também se verifica. Isso implica que ambas as integrais em (1.39) são finitas. Assim, sempre que estivermos no caso $\mathfrak{D} > 1$ e assumirmos a validade de (1.39), também teremos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx < \infty \quad e \quad \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} dl < \infty.$$

Vale ressaltar que é comum chamar as soluções do Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1) de bolhas.

2 Resultados de Existência e Unicidade de Soluções

Iniciaremos este capítulo apresentando um resultado de rigidez na Seção 2.1, o qual, de certa forma, justifica a hipótese sobre $\mathfrak{D}$ nos Teoremas 1, 2 e 3. As Seções 2.2, 2.3 e 2.4 serão dedicadas, respectivamente, às demonstrações dos Teoremas 1, 2 e 3, juntamente com seus resultados auxiliares.

2.1 Um Teorema de Rigidez

Sejam (Σ, g) uma superfície Riemanniana, $\gamma : [0, L] \rightarrow \Sigma$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow \Sigma$ uma variação de γ tal que $A(0, t) = \gamma(t)$. Defina o campo variacional de A como

$$V(t) = \partial_s A(0, t)$$

e

$$\ell(s) = \int_0^L |\partial_t A(s, t)| dt.$$

Observação 2.1.1. *É um fato bem conhecido que dado um campo vetorial V ao longo de γ , existe uma variação A cujo campo variacional é V . De fato, basta considerar*

$$A(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sV(t)).$$

Lema 2.1.2. *A primeira variação de ℓ é*

$$\ell'(0) = - \int_0^L \langle V(t), D_t \gamma'(t) \rangle dt + \langle V, \gamma' \rangle(L) - \langle V, \gamma' \rangle(0),$$

para todo campo vetorial V ao longo de γ .

Demonstração. De um cálculo direto, temos

$$\ell'(s) = \int_0^L \frac{\langle D_s \partial_t A, \partial_t A \rangle}{|\partial_t A|} (s, t) dt, \quad (2.1)$$

Observe que, pelo Lema de Simetria (Lema 1.2.6), temos que

$$D_s \partial_t A(s, t) = D_t \partial_s A(s, t).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle D_s \partial_t A, \partial_t A \rangle (s, t) &= \langle D_t \partial_s A, \partial_t A \rangle (s, t) \\ &= \partial_t \langle \partial_s A, \partial_t A \rangle (s, t) - \langle \partial_s A, D_t \partial_t A \rangle (s, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1) e fazendo $s = 0$, obtemos

$$\ell'(0) = - \int_0^L \langle V(t), D_t \gamma'(t) \rangle dt + \langle V, \gamma' \rangle (L) - \langle V, \gamma' \rangle (0),$$

com $V(t) = \partial_s A(0, t)$. □

Agora suponha que γ minimiza a distância entre duas curvas fechadas disjuntas. O Lema 2.1.2 implica que $D_t \gamma' \equiv 0$, ou seja, γ é uma geodésica, e γ encontra as curvas ortogonalmente.

Lema 2.1.3. *Suponha que $\gamma : [0, L] \rightarrow \Sigma$ minimiza a distância entre duas curvas fechadas disjuntas e $|\gamma'| = 1$. Seja A uma variação cujo campo variacional V é ortogonal a γ' . Então,*

$$\ell''(0) = \langle D_s \partial_s A, \partial_t A \rangle (0, t)|_0^L + \int_0^L ((f')^2 - Kf) dt.$$

Onde $V = fN$, $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e N é um campo normal unitário ao longo de γ .

Demonstração. Um cálculo direto, de (2.1), resulta em

$$\ell''(0) = \int_0^L \left(\langle D_s D_s \partial_t A, \partial_t A \rangle + |D_s \partial_t A|^2 - \langle D_s \partial_t A, \partial_t A \rangle^2 \right) (0, t) dt. \quad (2.3)$$

Pelo Lema de Simetria (Lema 1.2.6), sabemos que

$$D_s D_s \partial_t A = D_s D_t \partial_s A = D_t D_s \partial_s A + R(\partial_s A, \partial_t A) \partial_s A. \quad (2.4)$$

Além disso, como γ é uma geodésica, temos que $D_t \partial_t A(0, t) = D_t \gamma'(t) = 0$. Daí,

$$\int_0^L \langle D_t D_s \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t) dt = \int_0^L \partial_t \langle D_s \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t) dt \quad (2.5)$$

$$= \langle D_s \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t)|_0^L. \quad (2.6)$$

Pelo Teorema 1.3.2, temos

$$\langle R(\partial_s A, \partial_t A) \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t) = -K(|\partial_s A|^2 |\partial_t A|^2 - \langle \partial_s A, \partial_t A \rangle^2)(0, t) \quad (2.7)$$

$$= -K(|V|^2 - \langle V, \gamma' \rangle^2)(t) \quad (2.8)$$

$$= -K|V|^2(t), \quad (2.9)$$

onde $K(t) = K(A(0, t))$. Dessa forma, de (2.3), (2.4), (2.5) e (2.7), obtemos

$$\ell''(0) = \langle D_s \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t)|_0^L + \int_0^L (|D_s \partial_t A|^2 - \langle D_s \partial_t A, \partial_t A \rangle^2 - K|V|^2)(0, t) dt. \quad (2.10)$$

Novamente pelo Lema de Simetria (Lema 1.2.6), temos que

$$D_s \partial_t A(0, t) = D_t \partial_s A(0, t) = D_t V(t)$$

Seja N um campo tangente unitário ao longo de γ tal que $\langle N, \gamma' \rangle = 0$. Como $\{\gamma'(t), N(t)\}$ forma uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}\Sigma$ para cada t e $D_t \gamma' = 0$, segue que $D_t N = 0$. Assim, $V = fN$, para alguma função diferenciável $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ e $D_t V = f'N$. Além disso,

$$\langle D_s \partial_t A, \partial_t A \rangle(0, t) = \langle D_t \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t) = \langle D_t V, \gamma' \rangle = 0.$$

De (2.10), temos

$$\ell''(0) = \langle D_s \partial_s A, \partial_t A \rangle(0, t)|_0^L + \int_0^L ((f')^2 - Kf^2) dt.$$

□

Corolário 2.1.4. *Sob as condições do lema anterior, para a variação $A(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sf(t)N(t))$, tem-se que*

$$\ell''(0) = \int_0^L \left((f')^2 - Kf^2 \right) dt \geq 0,$$

para toda função $f \in C^1([0, L])$.

Demonstração. De fato, basta ver que $s \mapsto A(s, t)$ é uma geodésica para todo t fixo. $\square$

As hipóteses nos Teoremas 1, 2 e 3 são naturais em vista do resultado que será enunciado abaixo. Vale a pena ressaltar que as hipóteses a seguir sobre as funções K e h no Teorema 2.1.5 são mais fortes do que simplesmente supor que $\mathfrak{D}(p) > 1$ para todo ponto em $\partial\Sigma$, pois, neste teorema, assumimos que $\min_{x \in \partial\Sigma} h(x) > \max_{p \in \Sigma} \sqrt{|K^-(p)|}$.

Teorema 2.1.5. *Sejam (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira $\partial\Sigma$, h a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ e K a curvatura Gaussiana de Σ . Suponha que*

$$h(x) > \sqrt{|K^-(p)|} \text{ para todo } x \in \partial\Sigma, p \in \Sigma.$$

Então Σ é homeomorfa a um disco.

Demonstração. Suponha por absurdo que Σ não é homeomorfa a um disco. Vamos dividir a demonstração em dois possíveis casos:

Caso 1. $\partial\Sigma$ não é conexa.

Sejam Λ_0 uma componente conexa de $\partial\Sigma$ e γ uma curva minimizando a distância entre Λ_0 e $\partial\Sigma \setminus \Lambda_0$, ou seja, γ atinge o seguinte ínfimo

$$\inf \{ \ell(\alpha) : \alpha : [0, L] \rightarrow \Sigma, \alpha(0) \in \Lambda_0, \alpha(L) \in \partial\Sigma \setminus \Lambda_0 \},$$

onde $\ell(\alpha)$ é o comprimento da curva α . Podemos assumir que $\gamma : [0, L] \rightarrow \Sigma$ está parametrizada por comprimento de arco com $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(L)$.

Considere uma vizinhança $O \subset \Sigma$ de $\gamma([0, L])$ e defina $\Lambda_l \subset O$ como a curva paralela a Λ_0 a uma distância $l \in [0, L]$, isto é,

$$\Lambda_l = \{x \in O : d(x, \Lambda_0) = l\},$$

onde d denota a distância em Σ . Para uma melhor compreensão deste caso, veja a Figura 2.

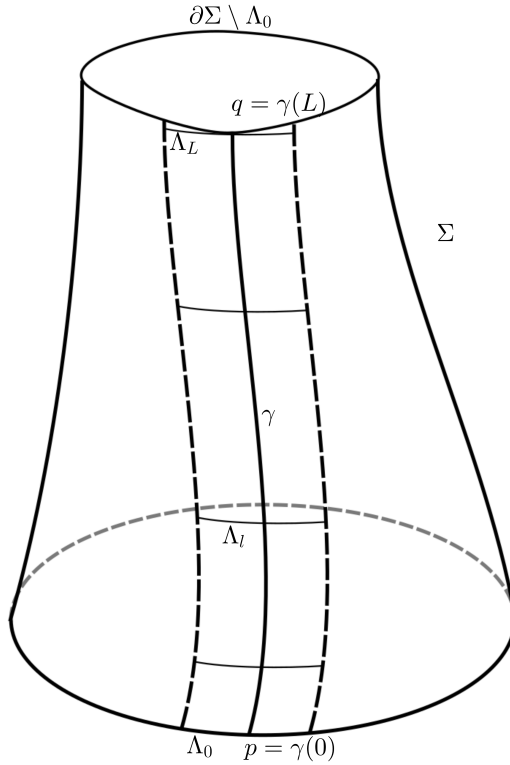


Figura 2 – Figura usada para ilustrar a situação do Caso 1.

Afirmção. Λ_l é uma curva regular se O é suficientemente pequeno.

De fato, seja $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Lambda_0$, com $\varepsilon > 0$ e $\phi(0) = p$, uma parametrização por comprimento de arco. Denote o vetor normal a Λ_0 no ponto $\phi(s)$ por $n(s)$. Vamos assumir que a orientação é escolhida de modo que $\gamma'(0) = n(0)$.

Defina uma aplicação $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow \Sigma$ como $A(s, t) = \exp_{\phi(s)}(tn(s))$. Por simplicidade, também denotaremos $\gamma_s(t) := A(s, t)$. Note que $A(0, t) = \gamma(t)$.

Iremos mostrar que

$$\partial_s A(0, t) \neq 0, \text{ para todo } t \in [0, L].$$

Para isso, suponha por absurdo que existe $\tilde{t} \in (0, L]$ tal que

$$\partial_s A(0, \tilde{t}) = 0.$$

Defina o campo variacional de A como $V(t) = \partial_s A(0, t)$. Daí, $V(0) = \phi'(0)$ e $V(\tilde{t}) = 0$.

Por definição, γ minimiza o comprimento entre um ponto de Λ_0 e um ponto de $\partial\Sigma \setminus \Lambda_0$. Consequentemente,

$$\ell'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \ell''(0) \geq 0,$$

onde

$$\ell(s) = \int_0^L |\gamma'_s(t)| dt = \int_0^L |\partial_t A(s, t)| dt.$$

Defina $J = \partial_t^2 + K$ e considere o problema de autovalor

$$\begin{cases} J(f) + \lambda f = 0, & \text{em } (0, L) \\ f'(0) = f'(L) = 0. \end{cases}$$

O menor autovalor desse problema é

$$\lambda_0 = \inf Q(f),$$

onde

$$Q(f) = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L ((f')^2 - K f^2) dt}{\int_0^L f^2 dt}$$

e o ínfimo é sobre todas as funções não nulas $f \in H^1([0, L])$ com $f'(0) = f'(L) = 0$. Do Corolário 2.1.4, $\lambda_0 \geq 0$. Além disso, se ϕ_0 é uma autofunção associada a λ_0 , então $\lambda_0 = Q(\phi_0)$. É claro que $Q(f) = Q(|f|)$ para toda função não nula. Então,

podemos supor $\phi_0 \geq 0$. Pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.8.7), segue que $\phi_0 > 0$ em $(0, L)$.

Defina a função $\psi(t) := \langle \partial_s A(0, t), N(t) \rangle$. Como $D_t \partial_t A = 0$ e $D_t N = 0$, segue do Lema 1.2.6 que

$$\partial_t \psi(t) = \langle D_t \partial_s A(0, t), N(t) \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \psi(t) &= \langle D_t D_t \partial_s A(0, t), N(t) \rangle = \langle D_t D_s \partial_t A(0, t), N(t) \rangle \\ &= \langle D_s D_t \partial_t A(0, t) - R(\partial_s A(0, t), \partial_t A(0, t)) \partial_t A(0, t), N(t) \rangle \\ &= -Rm(\partial_s A(0, t), \partial_t A(0, t), \partial_t A(0, t), N(t)) \\ &= -Rm(\psi(t)N(t), \gamma'(t), \gamma'(t), N(t)) \\ &= -\psi(t)K(t), \end{aligned}$$

já que $\{\gamma', N\}$ é uma base ortonormal. Logo,

$$(\partial_t^2 + K)\psi = 0.$$

Observe que

$$\psi(0) = \langle \partial_s A(0, 0), N(0) \rangle = \langle \phi'(0), \phi'(0) \rangle = 1,$$

pois $N(0) = \phi'(0) = \partial_s A(0, 0)$. Além disso, como $V(t) = \partial_s A(0, t) = fN(t)$, e $D_t N = 0$, então

$$\partial_t \psi(0) = \langle D_t \partial_s A(0, 0), N(0) \rangle = 0.$$

Também podemos observar, tendo $\partial_s A(0, \tilde{t}) = 0$ por hipótese, que $\psi(\tilde{t}) = 0$. Se $\lambda_0 = 0$, teríamos que ϕ_0 e ψ são soluções de

$$\begin{cases} \theta'' + K\theta = 0 \\ \theta'(0) = 0. \end{cases}$$

Daí, ϕ_0 e ψ seriam colineares. O que é uma contradição, pois $\phi_0 > 0$ em $(0, L)$ e $\psi(\tilde{t}) = 0$. Logo, $\lambda_0 > 0$.

Como $\psi(0) = 1$, $\psi(\tilde{t}) = 0$ e $\phi_0 > 0$ em $(0, L)$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{[0, \tilde{t}]} (\phi_0 - \varepsilon\psi) = 0.$$

Além disso, desde que $[0, \tilde{t}]$ é compacto, esse ínfimo é atingido em algum $t_0 \in [0, \tilde{t}]$. Então,

$$(\partial_t^2 + K)(\phi_0 - \varepsilon\psi)(t_0) \geq 0. \quad (2.11)$$

Como $(\partial_t^2 + K)\psi = 0$, $\lambda_0 > 0$ e $\phi_0 > 0$ em $(0, L)$, temos

$$(\partial_t^2 + K)(\phi_0 - \varepsilon\psi) = (\partial_t^2 + K)\phi_0 = -\lambda_0\phi_0 < 0 \text{ em } (0, L)$$

o que é uma contradição com (2.11). Logo,

$$\partial_s A(0, t) \neq 0, \text{ para todo } t \in [0, L].$$

O Teorema da função Inversa nos garante a existência de $\varepsilon > 0$ de modo que a aplicação $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow \Sigma$ seja um difeomorfismo sobre sua imagem. Dessa forma, Λ_l é regular se $O \subset A((-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L])$, provando a afirmação.

Como, para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \mapsto A(s, t)$ é uma geodésica, segue que, na imagem de A , podemos considerar a métrica

$$A^*g = dt^2 + f^2 ds^2, \quad (2.12)$$

com $f(s, t) = |\partial_s A(s, t)|$. Dessa forma, usando o Lema 1.2.6, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t f(s, 0) &= \langle D_t \partial_s A(s, 0), \partial_s A(s, 0) \rangle = \langle D_s \partial_t A(s, 0), \partial_s A(s, 0) \rangle \\ &= \partial_s \langle \partial_t A(s, 0), \partial_s A(s, 0) \rangle - \langle \partial_t A(s, 0), D_s \partial_s A(s, 0) \rangle \\ &= -\langle \partial_t A(s, 0), D_s \phi'(s) \rangle \\ &= -\langle n(s), D_s \phi'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $\gamma_t(s) := A(s, t)$ para cada $t \in [0, L]$ e $\alpha_s(u) = \gamma_t(s(u)) = A(s(u), t)$ uma parametrização por comprimento de arco de γ_t . Note que $s'(u) = \frac{1}{|\gamma'_t(s(u))|}$ e

$$\alpha'_t(u) = \frac{\partial_s A(s, t)}{|\partial_s A(s, t)|}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} D_u \alpha'_t(u) &= \frac{D_s \partial_s A(s, t)}{|\partial_s A(s, t)|} s'(u) - \frac{\partial_s A(s, t)}{|\partial_s A(s, t)|^2} \langle \partial_s A(s, t), D_s \partial_s A(s, t) \rangle s'(u) \\ &= \frac{D_s \partial_s A(s, t)}{|\partial_s A(s, t)|^2} - \frac{\partial_s A(s, t)}{|\partial_s A(s, t)|^3} \langle \partial_s A(s, t), D_s \partial_s A(s, t) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, a curvatura geodésica ao longo da curva γ_t é dada por

$$\begin{aligned} \kappa_g(s(u), t) &= - \langle N^t(u), D_u \alpha'_t(u) \rangle = - \frac{\langle N^t(u), D_s \partial_s A(s(u), t) \rangle}{|\partial_s A(s(u), t)|^2} \\ &= - \frac{\langle \partial_t A, D_s \partial_s A \rangle}{|\partial_s A|^2}(s(u), t) = - \frac{\langle D_s \partial_t A, \partial_s A \rangle}{|\partial_s A|^2}(s(u), t) \\ &= - \frac{\langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle}{|\partial_s A|^2}(s(u), t) = - \frac{1}{2} \frac{\partial_t |\partial_s A|^2}{|\partial_s A|^2}(s(u), t) \\ &= - \left(\frac{f \partial_t f}{f^2} \right) (s(u), t) = - \left(\frac{\partial_t f}{f} \right) (s(u), t). \end{aligned}$$

Observe que, na terceira igualdade, utilizamos que $\left\{ \partial_t A, \frac{\partial_s A}{f} \right\}$ é uma base ortonormal para $T_{A(s,t)} \Sigma$. Na quarta igualdade, utilizamos que $\partial_t \langle \partial_t A, \partial_s A \rangle = 0$. E, a quinta igualdade segue do Lema de Simetria (Lema 1.2.6).

Isto é,

$$\kappa_g = - \frac{\partial_t f}{f}. \quad (2.13)$$

Agora, como $\left\{ \partial_t A, \frac{\partial_s A}{f} \right\}$ forma uma base ortonormal para $T_{A(s,t)} \Sigma$, temos que a curvatura gaussiana no ponto $A(s, t)$, denotada por $K(s, t)$, é dada por

$$K(s, t) = Rm \left(\partial_t A, \frac{\partial_s A}{f}, \frac{\partial_s A}{f}, \partial_t A \right) (s, t). \quad (2.14)$$

Pela definição de f em (2.12), sabemos que

$$f \partial_t f = \langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle.$$

Derivado em relação a t em ambos os lados da igualdade acima e usando o Lema 1.2.6 na segunda igualdade, temos que

$$\begin{aligned} (\partial_t f)^2 + f \partial_t^2 f &= \langle D_t D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle + \langle D_t \partial_s A, D_t \partial_s A \rangle \\ &= \langle D_s D_t \partial_t A, \partial_s A \rangle + Rm(\partial_t A, \partial_s A, \partial_t A, \partial_s A) + |D_t \partial_s A|^2 \\ &= -f^2 K + |D_t \partial_s A|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Onde usamos $D_t \partial_t A = 0$ e a equação (2.14) na terceira igualdade. Por outro lado, observe que

$$(\partial_t f)^2 = \frac{\langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle^2}{f^2} = \left\langle D_t \partial_s A, \frac{\langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle \partial_s A}{f^2} \right\rangle. \quad (2.16)$$

Considere funções a e b tais que

$$D_t \partial_s A = a \partial_t A + b \partial_s A.$$

Como $\langle \partial_t A, \partial_s A \rangle = 0$ e $D_t \partial_t A(s, t) = 0$, temos que

$$\langle D_t \partial_s A, \partial_t A \rangle = -\langle \partial_s A, D_t \partial_t A \rangle = 0.$$

O que implica em $a = 0$. Dessa forma,

$$b |\partial_s A|^2 = \langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle.$$

Donde segue que

$$b = \frac{\langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle}{f^2}.$$

Ou seja,

$$D_t \partial_s A = \frac{\langle D_t \partial_s A, \partial_s A \rangle}{f^2} \partial_s A.$$

Substituindo a equação acima na equação (2.16), obtemos

$$(\partial_t f)^2 = |D_t \partial_s A|^2.$$

Assim, usando a equação acima em (2.15), inferimos que

$$K(s, t) = -\frac{\partial_t^2 f}{f}(s, t). \quad (2.17)$$

Agora, usando a hipótese de que $\inf \kappa_g > \sup \sqrt{|K^-|}$ e as equações (2.13) e (2.17), obtemos que

$$\partial_t \kappa_g = \partial_t \left(-\frac{\partial_t f}{f} \right) = -\frac{\partial_t^2 f}{f} + \frac{(\partial_t f)^2}{f^2} = K + \kappa_g^2 = K^+ + K^- + \kappa_g^2 > 0.$$

A desigualdade acima implica que κ_g é crescente em relação a t . Em particular,

$$\kappa_g(0, L) > \kappa_g(0, 0) = h(p). \quad (2.18)$$

Por outro lado, como γ minimiza a distância de Λ_0 a $\partial\Sigma \setminus \Lambda_0$, a curva Λ_L tangencia $\partial\Sigma \setminus \Lambda_0$ no ponto $q = \gamma(L)$. Donde segue que $-h(q) \geq \kappa_g(0, L)$. Daí, por (2.18), temos que $h(p) < \kappa_g(0, L) \leq -h(q)$. Mas como $h(x) \geq 0$, para todo $x \in \partial\Sigma$, obtemos uma contradição.

Caso 2. $\partial\Sigma$ é conexo.

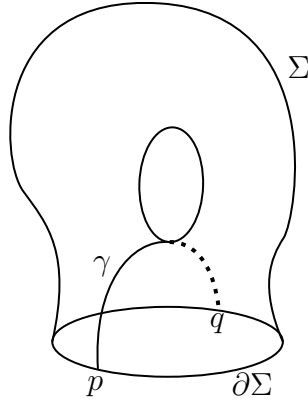


Figura 3 – Figura usada para ilustrar a situação do Caso 2.

Denote por $\tilde{\Sigma}$ a superfície obtida através da identificação de $\partial\Sigma$ com um ponto. Se Σ não é homeomorfa a um disco, então $\tilde{\Sigma}$ não é homeomorfa a uma esfera. Consequentemente, $\tilde{\Sigma}$ não é simplesmente conexa. Como $\tilde{\Sigma}$ não é simplesmente conexa, o ínfimo

$$\inf \{ \ell(\gamma) : \gamma : [0, L] \rightarrow \Sigma, \{ \gamma(0), \gamma(L) \} \subset \partial\Sigma, [\gamma] \text{ não é trivial} \}$$

é positivo. Onde $[\gamma]$ denota a classe de homotopia de γ . Sabendo que esse ínfimo é atingido, podemos usar argumentos análogos aos usados no Caso 1 para encontrar uma contradição. $\square$

2.2 Demonstração do Teorema 1

Nesta seção, apresentamos a demonstração do Teorema 1 por meio de um estudo variacional do funcional energia. O objetivo é mostrar que, sob as hipóteses do Teorema 1, o funcional energia I é coercivo, ou seja,

$$\lim_{\|u\|_{H^1} \rightarrow +\infty} I(u) = \infty,$$

e, conseqüentemente, é limitado inferiormente.

Para isso, utilizamos o Lema 2.2.1 (apresentado adiante), a Desigualdade de Jensen (Lema 1.11.2) e a hipótese de que $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \partial\Sigma$. Esses elementos permitem deduzir a desigualdade (2.25) (cuja demonstração será fornecida posteriormente), da qual se conclui a coercividade do funcional I .

Em seguida, consideramos uma sequência minimizante para I e demonstramos que seu ínfimo é atingido em $H^1(\Sigma)$. A unicidade da solução decorre da estrita convexidade de I quando $h \leq 0$. Além disso, o Lema 2.2.1 a seguir estabelece uma desigualdade fundamental para demonstrar a coercividade de I no contexto do Teorema 1.

Como visto na introdução desta dissertação, o problema de garantir a existência de uma métrica $\bar{g}$ conforme a g , de modo que as funções $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ sejam curvaturas prescritas, é resumido a resolver a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} -\Delta_g u + 2\tilde{K} = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\tilde{K} = K_g$ é constante, $K \in C^\infty(\Sigma)$, $K < 0$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$.

Antes do próximo resultado, lembre-se que $\mathfrak{D} : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ foi definido em (5) como

$$\mathfrak{D}(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{|K(x)|}}.$$

Defina $\overline{\mathfrak{D}} = \max \{\mathfrak{D}^+(x) : x \in \partial\Sigma\}$, onde $\mathfrak{D}^+$ denota a parte positiva de $\mathfrak{D}$.

Lema 2.2.1. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $C > 0$ e $a(\varepsilon) > 0$ tais que

$$4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \leq (\overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K|e^u \right) dv_g + \varepsilon^2 C \int_{\Sigma} e^u dv_g + C(\varepsilon),$$

onde $K < 0$ e $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \partial\Sigma$.

Demonstração. Considere $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ uma partição da unidade finita de $\partial\Sigma$ tal que para todo j tem-se que $\text{diam}(\text{supp } \phi_j) < \delta$ para algum $\delta > 0$ fixado.

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, denote

$$M_j = \text{supp } \phi_j.$$

Seja N um campo vetorial suave em Σ tal que $N(x) = \nu(x)$ em $\partial\Sigma$ e $|N(x)| \leq 1$, onde ν é normal a $\partial\Sigma$.

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \phi_j e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g &= \int_{\partial\Sigma} \phi_j e^{\frac{u}{2}} \langle N, \nu \rangle d\sigma_g = \int_{\Sigma} \text{div}_g (\phi_j e^{\frac{u}{2}} N) dv_g \\ &= \int_{\Sigma} \left[\phi_j e^{\frac{u}{2}} \text{div}_g N + \left\langle e^{\frac{u}{2}} \nabla_g \phi_j + \frac{1}{2} \phi_j e^{\frac{u}{2}} \nabla_g u, N \right\rangle \right] dv_g \\ &= \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} \left[\langle \nabla_g \phi_j, N \rangle + \phi_j \text{div}_g N + \frac{1}{2} \phi_j \langle \nabla_g u, N \rangle \right] dv_g \\ &\leq C \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} dv_g + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} |\nabla_g u| \phi_j dv_g. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sendo que na primeira igualdade usamos que $N = \nu$ em $\partial\Sigma$, na segunda igualdade aplicamos o Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4) e, na última desigualdade, $C = \max \{ (\langle \nabla_g \phi_j, N \rangle + \phi_j \text{div}_g N)(x); x \in \Sigma \}$ e $\langle \nabla_g u, N \rangle \leq |\nabla_g u| |N| \leq |\nabla_g u|$.

Defina $\bar{h}_j = \sup_{x \in M_j} \{h^+(x)\}$. Se o diâmetro de M_j é pequeno o suficiente, temos que

$$\bar{h}_j \leq (\overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \sqrt{|K(x)|} \quad \text{para todo } x \in M_j. \quad (2.21)$$

De fato, a função $f : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{|K(x)|}}$ é contínua, e $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{|K(x)|}} \leq \overline{\mathfrak{D}} < \overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon$.

Note que

$$\begin{aligned} 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g &= 4 \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Sigma} \phi_j h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = 4 \sum_{j=1}^n \int_{M_j} \phi_j h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \\ &\leq 4 \sum_{j=1}^n \bar{h}_j \int_{M_j} \phi_j e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = 4 \sum_{j=1}^n \bar{h}_j \int_{\partial\Sigma} \phi_j e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g. \end{aligned}$$

Substituindo (2.20) na desigualdade acima, obtemos que

$$4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \leq 4 \sum_{j=1}^n \bar{h}_j \left[C \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} |\nabla u| \phi_j dv_g \right] \quad (2.22)$$

Usando (2.21), obtemos que

$$\begin{aligned} 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g &\leq 4 \sum_{j=1}^n \bar{h}_j \left[C \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} |\nabla u| \phi_j dv_g \right] \\ &\leq 4C \left(\sum_{j=1}^n \bar{h}_j \right) \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g + (\overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \sum_{j=1}^n 2 \int_{\Sigma} \sqrt{|K|} \phi_j e^{\frac{u}{2}} |\nabla u| dv_g \\ &\leq C \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g + (\overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \sum_{j=1}^n \left(2 \int_{\Sigma} |K| \phi_j e^u dv_g + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \phi_j |\nabla u|^2 dv_g \right) \\ &= C \int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g + (\overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \left(2 \int_{\Sigma} |K| e^u dv_g + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 dv_g \right). \quad (2.23) \end{aligned}$$

Veja que usamos a Desigualdade de Young (Lema 1.11.1) na segunda desigualdade, com $\xi = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{|K|} \sqrt{\phi_j} e^{\frac{u}{2}}$ e $b = \sqrt{\phi_j} \sqrt{|\nabla_g u|}$.

Usando novamente a Desigualdade de Young (Lema 1.11.1) para $a = 1$, $b = e^{\frac{u}{2}}$, e considerando $\xi = \frac{1}{2\varepsilon}$, obtemos que

$$e^{\frac{u}{2}} \leq \frac{1}{8\varepsilon^2} + 2\varepsilon^2 e^u.$$

Donde segue que

$$\int_{\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \leq \frac{1}{8\varepsilon^2} \int_{\Sigma} d\sigma_g + 2\varepsilon^2 \int_{\Sigma} e^u d\sigma_g.$$

Usamos as equações (2.22) e (2.23) para concluir que

$$4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \leq (\overline{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K| e^u \right) dv_g + a(\varepsilon) \int_{\Sigma} e^u dv_g + C(\varepsilon),$$

com $a(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^2}{C}$.

□

Agora, apresentaremos a demonstração dada em [30] para o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.2 (Teorema 1). *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira, com $\chi(\Sigma) < 0$, $K_g = -1$ e $\kappa_g = 0$. Sejam $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ tais que $K < 0$ e $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \partial\Sigma$. Então, existe uma métrica $\bar{g} = e^u g$ com $K_{\bar{g}} = K$ e $\kappa_{\bar{g}} = h$. Se $h \leq 0$, então a métrica $\bar{g}$ é única.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\bar{\mathfrak{D}} = \max_{x \in \partial\Sigma} \{\mathfrak{D}^+(x)\} < 1$, então podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{\mathfrak{D}} + \varepsilon < 1 - \varepsilon$. Substituindo essa desigualdade no Lema 2.2.1 e usando (4), temos que

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2u - 2K e^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \\
 &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2u - 2K e^u \right) dv_g \\
 &\quad - (\bar{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K| e^u \right) dv_g - \varepsilon^2 C \int_{\Sigma} e^u dv_g - C(\varepsilon) \\
 &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2\tilde{K}u + (2|K| - \varepsilon^2 C) e^u \right) dv_g \\
 &\quad - (1 - \varepsilon) \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K| e^u \right) dv_g - C(\varepsilon) \\
 &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u|^2 + (2\varepsilon|K| - \varepsilon^2 C) e^u + 2\tilde{K}u \right) dv_g - C(\varepsilon), \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 2.2.1 na primeira desigualdade e, na segunda desigualdade, usamos que $\bar{\mathfrak{D}} + \varepsilon < 1 - \varepsilon$.

Vamos verificar a coercividade de I . Para isso, como $K < 0$, escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $2\varepsilon \inf |K| - \varepsilon^2 C > 0$.

Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $H^1(\Sigma)$ tal que $\|u_n\|_{H^1} \rightarrow \infty$. Como $\|u_n\|_{H^1}^2 = \|u_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla_g u_n\|_{L^2}^2$, então $\|u_n\|_{L^2}^2 \rightarrow \infty$ ou $\|\nabla_g u_n\|_{L^2}^2 \rightarrow \infty$.

Fazendo $b = 2\varepsilon \inf |K| - \varepsilon^2 C$ e $d = 2|\tilde{K}|$, de (2.24) obtemos

$$\begin{aligned} I(u_n) &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u_n|^2 + (2\varepsilon |K| - \varepsilon^2 C) e^{u_n} + 2\tilde{K} u_n \right) dv_g - C. \\ &\geq \int_{\Sigma} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u_n|^2 dv_g + b \int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g - d \int_{\Sigma} u_n dv_g - C \\ &\geq \int_{\Sigma} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u_n|^2 dv_g + b \operatorname{vol}(\Sigma) e^{\frac{1}{\operatorname{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} u_n dv_g} - d \int_{\Sigma} u_n dv_g - C. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sendo que na primeira linha usamos (2.24), a terceira linha segue da Desigualdade de Jensen (Lema 1.11.2).

Dessa forma, se $\|\nabla_g u_n\|_{L^2} \rightarrow +\infty$, por (2.25) segue que $I(u_n) \rightarrow +\infty$.

Agora considere o caso em que $\|u_n\|_{L^2} \rightarrow +\infty$. Da Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.10.6), temos que

$$\int_{\Sigma} \left(u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2 dv_g \leq C \|\nabla_g u_n\|_{L^2}^2.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left(u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2 dv_g &= \int_{\Sigma} u_n^2 dv_g - 2 \left(\int_{\Sigma} u_n dv_g \right) \int_{\Sigma} u_n dv_g \\ &\quad + \left(\int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2 \int_{\Sigma} dv_g \\ &= \int_{\Sigma} u_n^2 dv_g - 2 \operatorname{vol}(\Sigma) \left(\int_{\Sigma} u_n dv_g \right) \frac{1}{\operatorname{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} u_n dv_g \\ &\quad + \operatorname{vol}(\Sigma) \left(\int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2 \\ &= \int_{\Sigma} u_n^2 dv_g - \operatorname{vol}(\Sigma) \left(\int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|u_n\|_{L^2}^2 \leq C \|\nabla_g u_n\|_{L^2}^2 + \operatorname{vol}(\Sigma) \left(\int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2.$$

Então, $\|\nabla_g u_n\|_{L^2} \rightarrow +\infty$ ou $\int_{\Sigma} u_n \rightarrow +\infty$. Se $\|\nabla_g u_n\|_{L^2} \rightarrow +\infty$, recaímos no caso acima e concluímos que $I(u_n) \rightarrow +\infty$. Caso $\int_{\Sigma} u_n \rightarrow +\infty$, via (2.25) segue que $I(u_n) \rightarrow +\infty$.

Logo, I é coercivo.

Como I é coercivo, I é limitado inferiormente. Dessa forma, podemos considerar uma sequência minimizante $(u_n)_n$ de I em $H^1(\Sigma)$, ou seja,

$$I(u_n) \rightarrow a := \inf_{u \in H^1(\Sigma)} I(u).$$

Observe que, como $(u_n)_n$ é minimizante para I , $|I(u_n)| < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, como I é coercivo, temos que $(u_n)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$.

Do item (c) do Teorema 1.10.4, temos que a aplicação inclusão $H^1(\Sigma) \hookrightarrow L^2(\Sigma)$ é compacta. Do Lema 1.8.6, segue que existem uma subsequência de $(u_n)_n$, que iremos denotar como a própria $(u_n)_n$, e $u_0 \in H^1(\Sigma)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Sigma). \quad (2.26)$$

Pelo Lema 1.8.4, isso implica que

$$\|u_0\|_{H^1}^2 \leq \liminf \|u_n\|_{H^1}^2. \quad (2.27)$$

De (2.27), temos que

$$\|u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2} \leq \liminf \|u_n\|_{L^2} + \liminf \|\nabla u_n\|_{L^2}. \quad (2.28)$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int_{\Sigma} 1 \cdot (u_n - u_0)_n \, dv_g \right| \leq C \|u_n - u_0\|_{L^2}^2 \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

O que implica que $\int_{\Sigma} u_n \, dv_g \rightarrow \int_{\Sigma} u_0 \, dv_g$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Sigma} K(e^{u_n} - e^{u_0}) \, dv_g \right| &\leq C \int_{\Sigma} (e^{u_n} - e^{u_0}) \, dv_g \\ &= C \int_{\Sigma} \int_0^1 \frac{d}{dt} (e^{tu_n + (1-t)u_0}) \, dt \, dv_g \\ &= C \int_{\Sigma} (u_n - u_0) \int_0^1 e^{tu_n + (1-t)u_0} \, dt \, dv_g \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como $|tu_n + (1-t)u_0| \leq |u_n| + |u_0|$, $t \in [0, 1]$, temos que

$$C \int_{\Sigma} (u_n - u_0) \int_0^1 e^{tu_n + (1-t)u_0} dt dv_g \leq C \int_{\Sigma} (u_n - u_0) e^{|u_n| + |u_0|} dv_g \quad (2.31)$$

Pela Desigualdade de Hölder, inferimos que

$$C \int_{\Sigma} (u_n - u_0) e^{|u_n| + |u_0|} dv_g \leq C \|u_n - u_0\|_{L^2}^2 \int_{\Sigma} e^{2|u_n| + 2|u_0|} dv_g \quad (2.32)$$

Como $(u_n)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$, obtemos que

$$\int_{\Sigma} \nabla_g (2|u_n|^2 + 2|u_0|^2) dv_g \leq C \text{ e } \int_{\Sigma} (2|u_n| + 2|u_0|)^2 dv_g \leq C.$$

Obtemos do Teorema 1.11.3 que

$$\int_{\Sigma} e^{2|u_n| + 2|u_0|} dv_g \leq C. \quad (2.33)$$

Segue de (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) e de (2.29) que

$$\left| \int_{\Sigma} K(e^{u_n} - e^{u_0}) dv_g \right| \leq C \|u_n - u_0\|_{L^2}^2 \rightarrow 0.$$

Donde,

$$\int_{\Sigma} K e^{u_n} dv_g \rightarrow \int_{\Sigma} K e^{u_0} dv_g. \quad (2.34)$$

De maneira análoga ao caso acima, concluímos que

$$\int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \rightarrow \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_0}{2}} d\sigma_g. \quad (2.35)$$

Usando (2.26) e (2.28), obtemos que

$$\|\nabla_g u_0\|_{L^2} \leq \liminf \|\nabla_g u_n\|_{L^2}. \quad (2.36)$$

Logo, por (2.29), (2.34), (2.35) e (2.36), segue que

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{2} \|\nabla_g u_0\|_{L^2}^2 - 2 \int_{\Sigma} (u_0 + K e^{u_0}) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_0}{2}} d\sigma_g \\ &\leq \liminf \left(\frac{1}{2} \|\nabla_g u_n\|_{L^2}^2 - 2 \int_{\Sigma} (u_n + K e^{u_n}) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \right) \\ &\leq \liminf I(u_n) \\ &= a. \end{aligned}$$

Assim, $I(u_0) = a := \inf I$ e, conseqüentemente, I atinge seu ínfimo.

Portanto, o problema (2.19) admite solução.

Agora, para cada $u, v \in H^1(\Sigma)$, note que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} I(u + tv) &= \int_{\Sigma} (|\nabla_g v|^2 - 2K e^u v^2) dv_g - \int_{\partial\Sigma} h e^u v^2 d\sigma_g \\ &= \int_{\Sigma} (|\nabla v|^2 + 2|K| e^u v^2) dv_g - \int_{\partial\Sigma} h e^u v^2 d\sigma_g, \end{aligned}$$

pois $K < 0$.

Dessa forma, se $h \leq 0$, então

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} I(u + tv) > 0,$$

para todo $v \in H^1(\Sigma)$ não nulo.

Portanto, neste caso, I é estritamente convexo e, conseqüentemente, o problema (2.19) admite única solução. $\square$

2.3 Demonstração do Teorema 2

Em linhas gerais, a demonstração do Teorema 2 segue a mesma abordagem da demonstração do Teorema 1. No entanto, ao contrário do que ocorre no Teorema 1, não provamos que o funcional energia I é coercivo sob as hipóteses do Teorema 2. Apesar disso, mostramos que ele é limitado inferiormente.

Para isso, utilizamos o fato de que $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \partial\Sigma$ e aplicamos o Lema 1.12.1 para obter a estimativa

$$I(u) \geq -C(\varepsilon), \quad \forall u \in H^1(\Sigma),$$

onde $C(\varepsilon)$ é uma constante dependente de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, usando a hipótese $\int_{\Sigma} h d\sigma_g > 0$, mostramos que $\inf I < 0$.

Para concluir a demonstração, consideramos uma sequência minimizante $(u_n)_n$ para I em $H^1(\Sigma)$ e utilizamos a desigualdade de Poincaré (Teorema 1.10.6),

o Teorema 1.10.4 e o Lema 1.8.6 para obter que $(u_n)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$. A conclusão deste teorema segue de maneira análoga à do Teorema 1.

Recapitulando, estamos interessados em encontrar uma solução para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_g u = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Onde $K \in C^\infty(\Sigma)$, $K < 0$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$.

Apresentaremos abaixo a demonstração de [30] para o Teorema 2.

Teorema 2.3.1 (Teorema 2). *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira, com $K_g = \kappa_g = 0$. Sejam $K \in C^\infty(\Sigma)$, $K < 0$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ tais que*

(a) $\mathfrak{D}(p) < 1$ para todo $p \in \Sigma$;

(b) $\int_{\partial\Sigma} h \, d\sigma_g > 0$.

Então, existe uma métrica $\bar{g} = e^u g$ tal que $K_{\bar{g}} = K$ e $\kappa_{\bar{g}} = h$.

Demonstração. Inicialmente, note que (4) e o Lema 2.2.1 implicam que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2Ke^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} he^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \\ &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2Ke^u \right) dv_g - (\bar{\mathfrak{D}} + \varepsilon) \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K|e^u \right) dv_g \\ &\quad - \varepsilon^2 C \int_{\Sigma} e^u dv_g - C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Desde que $\mathfrak{D}(p) < 1$, para todo $p \in \partial\Sigma$, podemos supor $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\bar{\mathfrak{D}} + \varepsilon < 1 - \varepsilon$. Com isso, usando a desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2Ke^u \right) dv_g - (1 - \varepsilon) \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K|e^u \right) dv_g \\ &\quad - \varepsilon^2 C \int_{\Sigma} e^u dv_g - C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Daí, usando que $K < 0$ implica $-K = |K|$, obtemos

$$I(u) \geq \int_{\Sigma} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u|^2 + (2\varepsilon|K| - \varepsilon^2 C) e^u \right) dv_g - C(\varepsilon).$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon^2 C < 2\varepsilon \inf |K|$. Assim,

$$I(u) \geq \int_{\Sigma} \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u|^2 + (2\varepsilon|K| - \varepsilon^2 C) e^u \right] dv_g - C(\varepsilon) \geq -C(\varepsilon). \quad (2.37)$$

Isso implica que I é limitado inferiormente.

Agora observe que $\inf I < 0$. De fato, considere $u = -c$, com $c > 0$ constante. Então,

$$I(-c) = e^{-c} \left(\int_{\Sigma} 2|K| dv_g - 4e^{\frac{c}{2}} \int_{\partial\Sigma} h d\sigma_g \right)$$

é negativo para c suficientemente grande, já que $\int_{\partial\Sigma} h d\sigma_g > 0$.

Seja $(u_n)_n$ uma sequência minimizante para I . Por (2.37),

$$d + 1 \geq \int_{\Sigma} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla_g u_n|^2 + (2\varepsilon|K| - \varepsilon^2 C) e^{u_n} \right) dv_g - C(\varepsilon) \geq -C(\varepsilon), \quad (2.38)$$

onde $d = \sup I(u_n) < +\infty$, já que $(u_n)_n$ é minimizante.

Dessa forma, $\left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 \right)_n$ é limitada. Vamos mostrar que $\left(\int_{\Sigma} u_n \right)_n$ é limitada.

Do Teorema 1.10.6, temos que

$$\int_{\Sigma} \left(u_n - \int_{\Sigma} u_n \right)^2 dv_g \leq C \int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g, \quad (2.39)$$

que é limitado. Além disso,

$$\int_{\Sigma} \left| \nabla_g \left(u_n - \int_{\Sigma} u_n \right) \right|^2 dv_g = \int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g$$

é limitado. Logo, $\left(u_n - \int_{\Sigma} u_n \right)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$.

Do item (c) do Teorema 1.10.4, temos que a inclusão $H^1(\Sigma) \hookrightarrow L^1(\Sigma)$ é compacta. Do Lema 1.8.6, segue que existem $\bar{u} \in H^1(\Sigma)$ e uma subsequência de $(u_n)_n$, que iremos denotar como a própria $(u_n)_n$, tais que

$$u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } H^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad u_n - \int_{\partial\Sigma} u_n d\sigma_g \rightarrow \bar{u} \text{ em } L^1(\Sigma).$$

De maneira análoga ao que foi feito para mostrar (2.34) e (2.35), inferimos que

$$|K| e^{u_n - f_\Sigma u_n} \rightarrow |K| e^{\bar{u}} \text{ em } L^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad h e^{\frac{(u_n - f_\Sigma u_n)}{2}} \rightarrow h e^{\frac{\bar{u}}{2}} \text{ em } L^1(\partial\Sigma). \quad (2.40)$$

Se $\int_\Sigma u_n dv_g \rightarrow +\infty$, usamos (2.40) para obter

$$\int_\Sigma |K| e^{u_n} = e^{\int_\Sigma u_n dv_g} \int_\Sigma |K| e^{u_n - f_\Sigma u_n} dv_g \rightarrow +\infty.$$

Por (2.37), isso implica que $I(u_n) \rightarrow +\infty$. O que é uma contradição, pois $(u_n)_n$ é minimizante para I .

Agora, considere o caso em que $\int_\Sigma u_n dv_g \rightarrow -\infty$. Observe que

$$\int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g = e^{\frac{\int_\Sigma u_n dv_g}{2}} \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n - f_\Sigma u_n}{2}} d\sigma_g \rightarrow 0.$$

Dessa forma, usando a convergência acima e a definição de I , teríamos que

$$\begin{aligned} \lim I(u_n) &= \lim \left[\int_\Sigma \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u_n|^2 - 2K e^{u_n} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \right] \\ &= \lim \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u_n|^2 - 2K e^{u_n} \right) dv_g \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

já que $K < 0$. Ou seja,

$$\liminf I(u_n) \geq 0.$$

Mas isso contradiz o fato de $I(-c) < 0$ para c suficientemente grande.

Dessa forma, $(\int_\Sigma u_n)_n$ e $(\|\nabla_g u_n\|_{L^2(\Sigma)})_n$ são limitadas. Segue de (2.39) que

$$\|u_n\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C \|\nabla_g u_n\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \text{vol}(\Sigma) \left(\int_\Sigma u_n \right)^2.$$

Daí, $(u_n)_n$ é limitada em $L^2(\Sigma)$. Assim, $(u_n)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$. Donde, pelo item (c) do Teorema 1.10.4 e pelo Lema 1.8.6, segue que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Sigma),$$

para alguma função $u_0 \in H^1(\Sigma)$. Com o mesmo argumento ao usado na demonstração do Teorema 1, concluímos que o ínfimo de I é atingido. $\square$

2.4 Demonstração do Teorema 3

Relembre que, no contexto do Teorema 3, estamos interessados em resolver o problema

$$\begin{cases} \Delta_g u = 2Ke^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 2he^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.41)$$

onde $K \in C^\infty(\Sigma)$, $K < 0$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$. Além disso, $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum $p \in \partial\Sigma$. Lembre-se também que o funcional energia I associado a (2.41) é dado por

$$I(u) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2Ke^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} he^{\frac{u}{2}} d\sigma_g.$$

Pelo Lema 1.12.1, se $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum $p \in \partial\Sigma$, então existe uma sequência $(u_n)_n$ em $H^1(\Sigma)$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \rightarrow +\infty.$$

Dessa forma, o funcional energia não é limitado inferiormente, o que impede a aplicação da mesma estratégia utilizada nos Teoremas 1 e 2. Além disso, encontrar diretamente soluções para o problema (2.41) pode ser uma tarefa desafiadora.

Para contornar essa dificuldade, consideraremos um problema perturbado (a saber, o problema (2.48), que será introduzido posteriormente) que converge para (2.41). Mostraremos que é possível obter soluções do tipo sela para (2.48). Assim, para cada $\varepsilon_n > 0$, encontramos uma solução u_n de (2.48) e, ao fazer $\varepsilon_n \rightarrow 0$, garantimos que alguma subsequência de $(u_n)_n$ converge para uma solução de (2.41).

Lema 2.4.1. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira tal que $K_g = \kappa_g = 0$. Suponha que $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\Sigma)$ são tais que $K < 0$ e $\int_{\partial\Sigma} h d\sigma_g < 0$. Então, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$I(u) > \varepsilon \text{ para todo } u \in H^1(\Sigma) \text{ com } \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = \delta.$$

Demonstração. Considere a seguinte afirmação:

Afirmação. Para qualquer $\delta > 0$, o ínfimo

$$\alpha_\delta = \inf \left\{ I(u); u \in H^1(\Sigma) \text{ com } \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = \delta \right\}$$

é atingido.

De fato, usando a Desigualdade de Jensen (Lema 1.11.2) na última linha, note que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K|e^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \\ &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2|K|e^u \right) dv_g - 4 \max h \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \\ &\geq \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 + 2 \min |K|e^u \right) dv_g - 4\delta \max h \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 dv_g + 2 \min |K| \text{vol}(\Sigma) e^{\frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} u dv_g} - 4\delta \max h \end{aligned} \quad (2.42)$$

Logo, $\alpha_\delta \neq -\infty$ para cada $\delta > 0$.

Seja $(u_n)_n$ uma sequência minimizante para I sobre o conjunto

$$\left\{ u \in H^1(\Sigma); \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = \delta \right\}.$$

Por (2.42), a sequência $\left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g \right)_n$ é limitada.

Vamos mostrar que $(u_n)_n$ é limitada em $L^2(\Sigma)$. Para isso, usamos a Desigualdade de Poincaré para ver que $(u_n - \oint_{\Sigma} u_n)_n$ é limitada em $L^2(\Sigma)$. Além disso, desde que $(|\nabla_g u_n|)_n$ é limitada em $L^2(\Sigma)$, segue que $(|\nabla_g (u_n - \oint_{\Sigma} u_n dv_g)|)_n$ é limitada em $L^2(\Sigma)$. Logo, $(u_n - \oint_{\Sigma} u_n dv_g)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$.

Pelo item (c) do Teorema 1.10.4 e pelo Lema 1.8.6, passando para uma subsequência se necessário, existe $\bar{u} \in H^1(\Sigma)$ tal que

$$u_n - \oint_{\Sigma} u_n dv_g \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } H^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad u_n - \oint_{\Sigma} u_n dv_g \rightarrow \bar{u} \text{ em } L^1(\Sigma).$$

Como na demonstração do Teorema 1, temos

$$e^{u_n - \oint_{\Sigma} u_n dv_g} \rightarrow e^{\bar{u}} \text{ em } L^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad e^{\frac{u_n - \oint_{\Sigma} u_n dv_g}{2}} \rightarrow e^{\frac{\bar{u}}{2}} \text{ em } L^1(\partial\Sigma). \quad (2.43)$$

Observe que

$$0 < \delta = \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g = e^{\frac{f_\Sigma u_n dv_g}{2}} \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u_n - f_\Sigma u_n dv_g}{2}} d\sigma_g. \quad (2.44)$$

Se $\int_\Sigma u_n dv_g \rightarrow +\infty$, de (2.44) teríamos $\int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u_n - f_\Sigma u_n dv_g}{2}} d\sigma_g \rightarrow 0$, contradizendo (2.43). De modo análogo, mostra-se que não podemos ter $\int_\Sigma u_n dv_g \rightarrow -\infty$. Logo, $\left(\int_\Sigma u_n dv_g\right)_n$ é limitada.

Da Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\int_\Sigma u_n^2 dv_g \leq C \int_\Sigma |\nabla_g u_n|^2 dv_g + \text{vol}(\Sigma) \left(\int_\Sigma u_n dv_g \right)^2.$$

Donde segue que $(u_n)_n$ é limitada em $L^2(\Sigma)$.

Assim, $(u_n)_n$ é limitada em $H^1(\Sigma)$. Do Teorema 1.10.4 e do Lema 1.8.6, existe $u_0 \in H^1(\Sigma)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^1(\Sigma).$$

Dessa forma, temos que

$$\|u_0\|_{H^1} \leq \liminf \|u_n\|_{H^1}. \quad (2.45)$$

Além disso, também temos

$$e^{u_n} \rightarrow e^{u_0} \text{ em } L^1(\Sigma) \quad \text{e} \quad e^{\frac{u_n}{2}} \rightarrow e^{\frac{u_0}{2}} \text{ em } L^1(\partial\Sigma).$$

Como $u_n \rightarrow u_0$ em $L^2(\Sigma)$, segue de (2.45) que

$$\|\nabla_g u_0\|_{L^2} \leq \liminf \|\nabla_g u_n\|_{L^2}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u_0|^2 + 2|K|e^{u_0} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_0}{2}} d\sigma_g \\ &\leq \liminf \left(\int_\Sigma \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u_n|^2 + 2|K|e^{u_n} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \right) \\ &= \alpha_\delta. \end{aligned}$$

Pela definição de α_δ segue que $I(u_0) = \alpha_\delta$ e a afirmação está provada.

Suponha por absurdo que para cada $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, existe $u_{\varepsilon,\delta} \in H^1(\Sigma)$ tal que

$$I(u_{\varepsilon,\delta}) \leq \varepsilon \text{ e } \int_{\partial\Sigma} e^{u_{\varepsilon,\delta}} d\sigma_g = \delta.$$

Em particular, existe $(u_n)_n$ em $H^1(\Sigma)$ tal que

$$\liminf I(u_n) \leq 0 \text{ e } \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \rightarrow 0. \quad (2.46)$$

Usando (2.46) e a definição de I , concluímos que $\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g \rightarrow 0$. Como consequência disso e da Desigualdade de Poincaré, temos que $u_n - f_{\Sigma} u_n \rightarrow 0$ em $H^1(\Sigma)$. Donde segue que

$$\int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n - f_{\Sigma} u_n}{2}} d\sigma_g \rightarrow \int_{\partial\Sigma} h d\sigma_g < 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u_n|^2 + 2|K|e^{u_n} \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \\ &\geq -4e^{\frac{f_{\Sigma} u_n}{2}} \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u_n - f_{\Sigma} u_n}{2}} d\sigma_g \\ &> 0, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. O que é uma contradição com (2.46). Portanto, obtemos o resultado. $\square$

Proposição 2.4.2. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira tal que $K_g = \kappa_g = 0$. Suponha que $K \in C^\infty(\Sigma)$ e $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ são tais que $K < 0$, $\int_{\partial\Sigma} h d\sigma_g < 0$ e $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum $p \in \partial\Sigma$. Então existem $u_0, u_1 \in H^1(\Sigma)$ tais*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \{I(\gamma(t))\} > \max \{I(u_0), I(u_1)\} > 0,$$

onde $\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow H^1(\Sigma) \text{ contínua} ; \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1\}$.

Demonstração. Usando o Lema 2.4.1, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$I(u) > \varepsilon \text{ para todo } u \in H^1(\Sigma) \text{ com } \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g = \delta. \quad (2.47)$$

Escolha uma constante $c > 0$ grande o suficiente para que

$$I(-c) = 2 \int_{\Sigma} |K| e^{-c} dv_g - \int_{\partial\Sigma} h e^{-\frac{c}{2}} d\sigma_g \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Sigma} e^{-\frac{c}{2}} d\sigma_g < \delta.$$

Defina $u_0 = -c$. Pelo Lema 1.12.1, existe $u_1 \in H^1(\Sigma)$ tal que

$$I(u_1) < 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Sigma} e^{\frac{u_1}{2}} d\sigma_g > \delta.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, para qualquer $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\int_{\partial\Sigma} e^{\frac{\gamma(t_0)}{2}} d\sigma_g = \delta.$$

De (2.47), segue que

$$\max_{t \in [0,1]} \{I(\gamma(t))\} \geq I(\gamma(t_0)) > \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} > I(-c) = I(u_0).$$

Como $I(u_1) < 0$, segue que

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \{I(\gamma(t))\} > \max \{I(u_0), I(u_1)\} > 0.$$

□

Para a próxima proposição, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_g u - \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} = \frac{2K+\varepsilon}{1+2\varepsilon} e^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{2h}{1+2\varepsilon} e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (2.48)$$

Onde $K \in C^1(\Sigma)$ e $h \in C^1(\partial\Sigma)$, com $K < 0$ e $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Defina o funcional $I_\varepsilon : H^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{1+2\varepsilon} I(u) + \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} J(u),$$

onde

$$I(u) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\nabla_g u|^2 - 2K e^u \right) dv_g - 4 \int_{\partial\Sigma} h e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g$$

e

$$J(u) = \int_{\Sigma} (|\nabla_g u|^2 + e^u - u) dv_g.$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} I_{\varepsilon}(u + tv) &= \int_{\Sigma} \left(\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle - \frac{2K + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} v e^u - \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \right) dv_g \\ &\quad - \frac{2}{1 + 2\varepsilon} \int_{\partial\Sigma} h v e^{\frac{u}{2}} d\sigma_g \end{aligned}$$

O que implica que um ponto crítico de I_{ε} é uma solução fraca de (2.48). Além disso, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o problema (2.48) tende para

$$\begin{cases} -\Delta_g u = 2K e^u, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 2h e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (2.49)$$

Dessa forma, queremos encontrar uma solução de (2.49) encontrando uma solução u_{ε} de (2.48) e então mostrar que u_{ε} converge a uma solução de (2.49) quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para o próximo resultado, lembre-se que $\mathfrak{D}_{\tau}(q)$ denota a derivada tangente de $\mathfrak{D}$ no ponto $q \in \partial\Sigma$.

Proposição 2.4.3. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira tal que $K_g = \kappa_g = 0$. Suponha que*

- (i) $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum $p \in \partial\Sigma$;
- (ii) $\int_{\partial\Sigma} h d\sigma_g < 0$;
- (iii) $\mathfrak{D}_{\tau}(q) \neq 0$ para $q \in \partial\Sigma$ com $\mathfrak{D}(q) = 1$.

Então, existe uma sequência $(\varepsilon_n)_n$ com $\varepsilon_n \searrow 0$ e soluções $(u_n)_n$ de (2.48). Além disso, $\text{ind}(u_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Com o mesmo argumento utilizado para mostrar a coercividade de I no Teorema 1, mostra-se que J é coercivo em $H^1(\Sigma)$.

Para algum $\varepsilon_0 > 0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, podemos imitar a prova da Proposição 2.4.2 para encontrar $u_0, u_1 \in H^1(\Sigma)$ tais que

$$c_\varepsilon := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\varepsilon(\gamma(t)) > \max\{I_\varepsilon(u_0), I_\varepsilon(u_1)\} + \delta > \delta, \quad (2.50)$$

onde $\delta > 0$ é fixado e

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0, 1]; H^1(\Sigma)) ; \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1 \right\}.$$

Segue do Teorema 1.14.5 que, para quase todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe uma sequência de Palais-Smale limitada $(u_n)_n$ tal que $I_\varepsilon(u_n) \rightarrow c_\varepsilon$. Como na demonstração do Teorema 2, mostramos que $(u_n)_n$ possui uma subsequência convergente em $H^1(\Sigma)$. Como o limite é um ponto crítico de I_ε , segue que (2.48) possui uma solução. $\square$

O teorema abaixo é um dos principais resultados desta dissertação, também encontrado em [30]. Ele está relacionado ao caso em que $\chi(\Sigma) = 0$.

Teorema 2.4.4 (Teorema 3). *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta com fronteira tal que $\chi(\Sigma) = 0$ e $K_g = \kappa_g = 0$. Suponha que $K \in C^\infty(\Sigma)$, $h \in C^\infty(\partial\Sigma)$ são tais que $K < 0$ e*

- (a) $\mathfrak{D}(p) > 1$ para algum $p \in \partial\Sigma$;
- (b) $\int_{\partial\Sigma} h \, d\sigma < 0$;
- (c) $\mathfrak{D}_\tau(q) \neq 0$ para todo $q \in \partial\Sigma$ com $\mathfrak{D}(q) = 1$.

Então, existe uma métrica $\bar{g} = e^u g$ com $K_{\bar{g}} = K$ e $\kappa_{\bar{g}} = h$.

Demonstração. Considere a sequência $(u_n)_n$ de soluções de (2.48) dada pela Proposição 2.4.3, com $\varepsilon_n \searrow 0$. Note que

$$\chi_n = \int_{\Sigma} \tilde{K}_n dv_g + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n d\sigma_g = - \int_{\Sigma} \frac{\varepsilon_n}{1 - 2\varepsilon_n} dv_g \leq 0,$$

onde $\tilde{K}_n = \frac{\varepsilon_n}{1 - 2\varepsilon_n}$ e $\tilde{h}_n = 0$.

Pelo Teorema 4, o conjunto dos pontos de blow-up S da sequência $(u_n)_n$ pertence ao conjunto $\{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) \geq 1\}$. Pelo item (d) do Teorema 4, temos $S = \emptyset$, já que $\mathfrak{D}(q) \neq 0$ para todo $q \in \partial\Sigma$ com $\mathfrak{D}(q) = 1$. Isso implica que existe $C > 0$ tal que

$$u_n \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Multiplicando a primeira equação de (2.48) por u_n , segue do Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4) que

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g = \frac{1}{1 - 2\varepsilon_n} \left[\int_{\Sigma} ((2K + \varepsilon_n) e^{u_n} - \varepsilon_n) u_n dv_g + 2 \int_{\partial\Sigma} h u_n e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \right].$$

Como $u_n \leq C$, segue que $\left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g \right)_n$ é limitada.

Pela Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.10.6) e da limitação de $\left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g \right)_n$, segue que

$$\int_{\Sigma} \left(u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \right)^2 dv_g \leq C \int_{\Sigma} |\nabla_g u_n|^2 dv_g \leq C.$$

Assim, $\left(u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \right)$ é limitada em $H^1(\Sigma)$. Como antes, segue que $\left(u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \right)_n$ converge em $H^1(\Sigma)$ para alguma $w \in H^1(\Sigma)$.

Suponha por contradição que $\inf u_n \rightarrow -\infty$. Então, como $(u_n)_n$ é limitada superiormente, $\int_{\Sigma} u_n dv_g \rightarrow -\infty$. Consequentemente,

$$e^{u_n} = e^{u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g} e^{\int_{\Sigma} u_n dv_g} \rightarrow 0.$$

Por (2.49), isso implica que w é harmônica em Σ e $\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Sigma$. Da convergência de $\left(u_n - \int_{\Sigma} u_n dv_g \right)_n$ para w segue que $\int_{\Sigma} w dv_g = 0$. Daí,

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g w|^2 dv_g = - \int_{\Sigma} w \Delta_g w dv_g = 0,$$

o que implica que w é constante. Como $\int_{\Sigma} w dv_g = 0$, segue que $w \equiv 0$. Porém, do que foi feito anteriormente, temos que $I_{\varepsilon}(u_n) \rightarrow 0$, o que contradiz (2.50). Logo, $|u_n| \leq C$. Da teoria de regularidade elíptica, segue que $(u_n)_n$ converge para alguma solução suave de (2.49). $\square$

3 Análise de Blow-Up

Dedicaremos nossos esforços neste capítulo para demonstrar o Teorema 4. Inicialmente, vamos estudar um resultado que nos auxiliará a demonstrar lemas importantes para nosso objetivo principal, na Seção 3.1. Em seguida, iniciaremos uma discussão sobre o conjunto dos pontos de blow-up (também chamado de conjunto singular) na Seção 3.2, onde o item (a) do Teorema 4 será demonstrado. Daí, na Seção 3.3, mostraremos um exemplo de que o conjunto dos pontos de blow-up pode ser infinito. Dando prosseguimento, mostraremos alguns lemas auxiliares na Seção 3.4. A Seção 3.5 fornece resultados que garantem a veracidade do item (c) do Teorema 4. Por fim, concluiremos a demonstração do resultado principal deste capítulo com os itens (b) e (d), na Seção 3.6.

3.1 Índice de Morse das Soluções do Problema Limite

Neste capítulo, estudaremos o índice de Morse das soluções do problema limite (veja a Seção 1.15):

$$\begin{cases} -\Delta\psi &= 2Ke^\psi, \text{ em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} &= 2he^{\frac{\psi}{2}}, \text{ em } \partial\mathbb{R}_+^2 \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $K < 0$ e h são constantes. As soluções deste problema são dadas pelo Teorema 1.15.1.

Inicialmente, note que se ψ é uma solução de (3.1), então $v = \psi + \log|K|$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= -2e^v, \text{ em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial v}{\partial\eta} &= 2\mathfrak{D}e^{\frac{v}{2}}, \text{ em } \partial\mathbb{R}_+^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\mathfrak{D} = \frac{h}{\sqrt{|K|}}$. Além disso, os índices de Morse destas soluções são iguais. Desta forma, iremos analisar o problema (3.2).

Da Seção 1.12, temos que o funcional energia associado a (3.2) é dado por

$$I(\psi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + 2e^\psi \right) dx - 4\mathfrak{D} \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{\frac{\psi}{2}} dl.$$

Da Seção 1.13, sabemos que, para calcular o índice de Morse de uma solução de (3.2), precisamos estudar a forma quadrática

$$Q(\psi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} (|\nabla \psi|^2 + 2\psi^2 e^\psi) dx - \mathfrak{D} \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} \psi^2 e^{\frac{\psi}{2}} dl, \quad (3.3)$$

onde $\psi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^2)$, o conjunto das funções com suporte compacto (não necessariamente nulas na fronteira de $\mathbb{R}_+^2$).

Teorema 3.1.1. *Seja v uma solução do problema (3.2).*

- (a) *Se $\mathfrak{D} = 1$, então $\text{ind}(v) = 0$. Neste caso, dizemos que v é estável;*
- (b) *Se $\mathfrak{D} > 1$, então: Se (1.39) é satisfeita, então $\text{ind}(v) = 1$. Caso contrário, $\text{ind}(v) = +\infty$.*

Demonstração. Para provar o item (a), seguiremos a ideia da prova da Proposição 1.2.1 de [15]. Para isso, usando o item (b) do Teorema 1.15.1, considere uma solução v_λ da forma,

$$v_\lambda(s, t) = 2 \log \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda t} \right).$$

Observe que $v_\lambda(s, \frac{\lambda-1}{\lambda}) = 0$. Como $v_\lambda(s, t) = v_1(\lambda(s, t)) + 2 \log \lambda$, podemos assumir $\lambda = 1$.

Observe que $\psi(s, t) = \psi(t) = (1 + t)^{-1}$ é uma autofunção associada ao autovalor nulo do problema (1.29), ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta \psi + 2 \frac{1}{(1+t)^2} \psi = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \psi, & \text{em } \partial \mathbb{R}_+^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

De fato,

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 2(1+t)^{-3} = 2\frac{1}{(1+t)^2}\psi$$

e, em $\partial\mathbb{R}_+^2$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \langle \nabla\psi, \eta \rangle = \langle (0, -1), (0, -1) \rangle = 1 = \psi(s, 0).$$

Usando equação (3.4) e aplicando o Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4) segue, para toda $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}_+^2)$, que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(-\Delta\psi + 2\frac{1}{(1+t)^2}\psi \right) \frac{\varphi^2}{\psi} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\left\langle \nabla\psi, \nabla \frac{\varphi^2}{\psi} \right\rangle + 2\frac{1}{(1+t)^2}\varphi^2 \right) dx - \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \frac{\varphi^2}{\psi} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} dl \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(2\frac{\varphi}{\psi} \langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle - \frac{\varphi^2}{\psi^2} |\nabla\psi|^2 + 2\frac{1}{(1+t)^2}\varphi^2 \right) dx - \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \varphi^2 dl \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(2\left| \frac{\varphi}{\psi} \right| |\nabla\psi| |\nabla\varphi| - \frac{\varphi^2}{\psi^2} |\nabla\psi|^2 + 2\frac{1}{(1+t)^2}\varphi^2 \right) dx - \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \varphi^2 dl \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{\varphi^2}{\psi^2} |\nabla\psi|^2 + |\nabla\varphi|^2 - \frac{\varphi^2}{\psi^2} |\nabla\psi|^2 + 2\frac{1}{(1+t)^2}\varphi^2 \right) dx - \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \varphi^2 dl \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(|\nabla\varphi|^2 + 2\frac{1}{(1+t)^2}\varphi^2 \right) dx - \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \varphi^2 dl \\ &= Q(\varphi). \end{aligned}$$

Onde as duas desigualdades seguem das Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, respectivamente. E, na terceira igualdade, usamos a equação (3.4). Com isso, o item (a) está provado.

Agora mostraremos o item (b). Seja v uma solução de (3.2).

Seja ϕ o holomorfismo localmente univalente do item (c) do Teorema 1.15.1. Composto com uma isometria de $\mathbb{H}^2$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi(\mathbb{R}_+^2)$ é um disco $D_R \subset \mathbb{H}^2$ centrado na origem e raio $R > 0$. Lembre-se que $\mathbb{H}^2$ corresponde ao modelo do disco de Poincaré que é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$ com a métrica $g_{\mathbb{H}^2} = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} \delta = e^u \delta$, onde $u = \log \left(\frac{4}{(1-|x|^2)^2} \right)$.

Assim, as variedades Riemannianas $(\mathbb{R}_+^2, e^v \delta)$ e $(D_R, g_{\mathbb{H}^2})$ são isométricas, cuja isometria é dada por ϕ , e possuem curvatura Gaussiana -1 e curvatura geodésica $\mathfrak{D}$. Com isso, o índice de v é igual ao índice da função nula na variedade $(D_R, g_{\mathbb{H}^2})$. Desta forma, vamos estudar o funcional (1.28), que nesta situação passa a ser

$$Q_R(\psi) = \int_{D_R} \left(|\nabla_{g_{\mathbb{H}^2}} \psi|^2 + \psi^2 \right) dv_{g_{\mathbb{H}^2}} - \mathfrak{D} \int_{\partial D_R} \psi^2 d\sigma_{g_{\mathbb{H}^2}}.$$

Escreva $\rho(s) = \frac{4}{(1-s^2)^2}$ e $\tilde{\rho}(z) = \rho(|z|)$, para todo $z \in D_R$. Note que $g_{\mathbb{H}^2} = \tilde{\rho}\delta$. Como $|\nabla_{g_{\mathbb{H}^2}} \psi|^2 = g_{\mathbb{H}^2}^{ij} \partial_i \psi \partial_j \psi = \tilde{\rho}^{-1} |\nabla \psi|^2$, $dv_{g_{\mathbb{H}^2}} = \tilde{\rho} dx$ e $d\sigma_{g_{\mathbb{H}^2}} = \sqrt{\tilde{\rho}} dl$, segue que

$$Q_R(\psi) = \int_{D_R} \left(|\nabla \psi|^2 + 2\psi^2 \tilde{\rho} \right) dx - \mathfrak{D} \int_{\partial D_R} \psi^2 \sqrt{\tilde{\rho}} dl.$$

Dessa forma, o problema de autovalor associado (1.29) é dado por

$$\begin{cases} -\Delta \psi + 2\tilde{\rho}\psi = \lambda\psi, & \text{em } D_R \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \mathfrak{D}\sqrt{\tilde{\rho}}\psi, & \text{em } \partial D_R. \end{cases} \quad (3.5)$$

Agora, vamos mostrar que $R = \mathfrak{D} - \sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1}$. Para isso, defina $\gamma : [0, 2\pi R] \rightarrow D_R$ por $\gamma(t) = R \left(\cos \left(\frac{t}{R} \right), \sin \left(\frac{t}{R} \right) \right)$. Dessa forma,

$$\gamma'(t) = \left(-\sin \left(\frac{t}{R} \right), \cos \left(\frac{t}{R} \right) \right)$$

e

$$D_t \gamma'(t) = \gamma''(t) = \frac{1}{R} \left(-\cos \left(\frac{t}{R} \right), -\sin \left(\frac{t}{R} \right) \right) = -\frac{1}{R^2} \gamma(t).$$

Além disso, o campo normal N ao longo de γ apontando para dentro é dado por

$$N(\gamma(t)) = -\frac{1}{R} \gamma(t).$$

Consequentemente,

$$k_\delta = \langle D_t \gamma', N \rangle = \frac{1}{R},$$

onde k_δ denota a curvatura geodésica da curva γ com respeito à métrica euclidiana.

Note que

$$\nabla u = \frac{4x}{1 - |x|^2}$$

e a normal a D_R apontando para fora de D_R é dada por $\frac{x}{R}$.

Assim, a derivada normal de u é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = \left\langle \nabla u, \frac{x}{R} \right\rangle = \frac{4R}{1 - R^2},$$

pois estamos calculando ao longo de ∂D_R , onde $|x| = R$.

Como $g_{\mathbb{H}^2} = e^u \delta$, segue do Teorema 1.7.2

$$\frac{4R}{1 - R^2} + \frac{2}{R} = \mathfrak{D} \frac{4}{1 - R^2}.$$

Daí, obtemos que

$$\mathfrak{D} = \frac{1 + R^2}{2R}.$$

Logo,

$$R = \mathfrak{D} - \sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1} < 1.$$

Afirmção 1. $\dim \left\{ \psi \in H^1(\overline{D}_R) : Q_R(\psi) < 0 \right\} = 1$.

Seja $f_1(x) = \frac{x_1}{1 - |x|^2}$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{1 + x_1^2 - x_2^2}{(1 - |x|^2)^2}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{2x_1 x_2}{(1 - |x|^2)^2}, & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} &= \frac{2x_1(x_1^2 + 3 - 3x_2^2)}{(1 - |x|^2)^3}, \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} &= \frac{2x_1(3x_2^2 - x_1^2 + 1)}{(1 - |x|^2)^3}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = \frac{8x_1}{(1 - |x|^2)^3} = 2 \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \frac{x_1}{1 - |x|^2} = 2\tilde{\rho}(x)f_1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \eta} &= \langle \nabla f_1, \eta \rangle = \frac{1}{|x|} \frac{1}{(1 - |x|^2)^2} \left\langle (1 + x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2), (x_1, x_2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{|x|} \frac{1}{(1 - |x|^2)^2} x_1 (1 + |x|^2) = \frac{1 + R^2}{2R} \frac{x_1}{1 - R^2} \frac{2}{1 - R^2} \\ &= 2\mathfrak{D}\sqrt{\tilde{\rho}(x)}f_1(x).\end{aligned}$$

Portanto, f_1 é uma autofunção de (3.5) associada ao autovalor $\lambda = 0$. Analogamente, mostra-se que $f_2(x) = \frac{x_2}{1 - |x|^2}$ também é uma autofunção associada a $\lambda = 0$.

Lembre-se que o Laplaciano euclidiano em coordenadas polares (r, θ) é dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta.$$

Sejam $\{e_i\}$ as autofunções do Laplaciano no círculo unitário $\mathbb{S}^1$ associadas aos autovalores $\{\lambda_i\}$, ou seja, $\Delta_\theta e_i + \lambda_i e_i = 0$. Note que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_i > 1$ quando $i > 2$.

Seja ψ uma solução de (3.5). Daí, se escrevemos $\psi(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(r) e_i(\theta)$, tem-se

$$\begin{cases} \psi_i'' + \frac{1}{r}\psi_i' - (\lambda_i + 2\rho(r) - \lambda)\psi_i = 0, & \text{em } D_R \\ \psi_i'(R) = \mathfrak{D}\sqrt{\rho(R)}\psi_i(R), & \text{em } \partial D_R, \end{cases}$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots$. Note que $f_i(r, \theta) = \alpha(r)\theta_i$, onde $\alpha(r) = \frac{r}{1 - r^2}$ é solução da EDO com $\lambda = 0$ e $\lambda_i = 1$. Isso implica que existe uma única solução radialmente simétrica de (3.5), a menos das condições de fronteira.

Vamos verificar que

$$\gamma(x) = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}. \quad (3.6)$$

é uma dessas soluções.

Desde que $0 < R < 1$, γ é limitada em D_R . Agora, note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} &= \frac{4x_1}{(1 - |x|^2)^2}, & \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} &= \frac{4x_2}{(1 - |x|^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} &= \frac{4(3x_1^2 - x_2^2 + 1)}{(1 - |x|^2)^3}, & \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} &= \frac{4(3x_2^2 - x_1^2 + 1)}{(1 - |x|^2)^3}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$-\Delta \gamma + \tilde{\rho} \gamma = 0, \text{ em } D_R.$$

Além disso, em ∂D_R tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} &= \langle \nabla \gamma, \eta \rangle = \left\langle 4 \frac{x}{(1 - R^2)^2}, \frac{x}{R} \right\rangle = 4 \frac{R}{(1 - R^2)^2} = \frac{2R}{1 + R^2} \frac{2}{1 - R^2} \frac{1 + R^2}{1 - R^2} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{D}} \sqrt{\rho(R)} \gamma.\end{aligned}$$

Logo, γ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \gamma + 2\tilde{\rho} \gamma = 0, & \text{em } D_R \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathfrak{D}} \sqrt{\rho(R)} \gamma, & \text{em } \partial D_R. \end{cases}$$

Dessa forma, $\tilde{Q}_R(\gamma) = 0$, onde

$$\tilde{Q}_R(\psi) := \int_{D_R} (|\nabla \psi|^2 + 2\psi^2 \tilde{\rho}) dx - \frac{1}{\mathfrak{D}} \int_{\partial D_R} \psi^2 \sqrt{\tilde{\rho}} dl.$$

Além disso, observe que $Q_R < \tilde{Q}_R$. Logo,

$$Q_R(\gamma) < 0.$$

Dessa forma, temos que $\dim \{ \psi \in H^1(\overline{D}_R) : Q_R(\psi) < 0 \} \geq 1$. Porém, se essa desigualdade fosse estrita, teríamos que o autoespaço associado ao autovalor nulo teria dimensão maior que 1. Mas esse autoespaço é o das funções radialmente simétricas, as quais correspondem às funções constantes em $\mathbb{S}^1$. Donde segue a Afirmação 1.

Veja que esta afirmação não é suficiente para provar o primeiro caso do item (b) deste teorema, pois precisamos considerar funções em $H_0^1(\mathbb{R}_+^2)$.

Agora, defina $\psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\psi = \gamma \circ \phi, \quad (3.7)$$

onde γ foi definida em (3.6) e $\phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow D_R \subset \mathbb{H}^2$ é a aplicação definida no Teorema 1.15.1. Note que ψ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\psi + 2e^v\psi = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{1}{\mathfrak{D}_0}e^{\frac{v}{2}}\psi, & \text{em } \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases} \quad (3.8)$$

A afirmação a seguir completa a prova do primeiro caso do item (b) deste teorema.

Afirmção 2. Se (1.39) é satisfeita, então $\text{ind}(v) = 1$.

De fato, desde que $\phi(\mathbb{R}_+^2) = D_R$ e $R < 1$, segue que ψ é limitada em $\mathbb{R}_+^2$. Como, por hipótese, $e^v \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$ ou $e^{\frac{v}{2}} \in L^1(\partial\mathbb{R}_+^2)$ e, como ψ tem limite no infinito, podemos encontrar funções com suporte compacto φ tais que $Q(\varphi) < 0$. Consequentemente, $\text{ind}(v) \geq 1$.

Suponha por absurdo que $\text{ind}(v) > 1$. Então, podemos encontrar um subespaço bidimensional E de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ em que $Q < 0$ em E . Desde que ϕ é uma isometria, considere o subespaço bidimensional $E_R \subset C_0^\infty(D_R)$ definido como

$$E_R = \{\xi \circ \phi^{-1} : \xi \in E\},$$

que satisfaz $Q_R(\hat{\xi}) < 0$, para toda $\hat{\xi} \in E_R$. Mas isso é uma contradição com a Afirmção 1. Portanto, concluímos que $\text{ind}(v) = 1$.

Afirmção 3. Se (1.39) não é satisfeita, então $\text{ind}(v) = +\infty$.

Pela Observação 1.15.2, podemos supor que $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} dl = +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx = +\infty$. A estratégia usada para mostrar que $\text{ind}(v) = +\infty$ consiste em mostrar que existem funções com suporte disjuntos de modo que Q em cada uma dessas funções seja positivo.

Considere M_0 fixado e $M > 2M_0$ qualquer. Escolha uma função corte não

negativa φ_M tal que

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B_{M_0}^+(0) \\ 1, & \text{se } x \in A(0; 2M_0, M) \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{2M}^+(0) \end{cases} \quad (3.9)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla \varphi_M|^2 dx \leq C,$$

onde C é uma constante que não depende de M , já que $|\nabla \phi_M| \leq r^{-1}$. Multiplique (3.8) por $\psi \varphi_M^2$, com ψ definida em (3.7), e integre em ambos os lados da igualdade para obter

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (-\psi \varphi^2 \Delta \psi + 2e^v \psi^2 \varphi^2) dx = 0.$$

Aplicando o Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4) na equação acima e usando novamente (3.8), temos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (\langle \nabla \psi, \nabla (\psi \varphi_M^2) \rangle + 2e^v \varphi_M^2 \psi^2) dx - \frac{1}{\mathfrak{D}} \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} \varphi_M^2 \psi^2 dl = 0. \quad (3.10)$$

Agora, note que

$$\nabla (\psi \varphi_M) = \psi \nabla \varphi_M + \varphi_M \nabla \psi.$$

Daí,

$$|\nabla (\psi \varphi_M)|^2 = \psi^2 |\nabla \varphi_M|^2 + \varphi_M^2 |\nabla \psi|^2 + 2\psi \varphi_M \langle \nabla \psi, \nabla \varphi_M \rangle. \quad (3.11)$$

Além disso,

$$\nabla (\psi \varphi_M^2) = 2\psi \varphi_M \nabla \varphi + \varphi_M^2 \nabla \psi.$$

Donde,

$$\langle \nabla \psi, \nabla (\psi \varphi_M^2) \rangle = 2\psi \varphi_M \langle \nabla \psi, \nabla \varphi_M \rangle + \varphi_M^2 |\nabla \psi|^2. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.11), obtemos

$$|\nabla(\psi\varphi_M)|^2 = \langle \nabla\psi, \nabla(\psi\varphi_M^2) \rangle + \psi^2 |\nabla\varphi_M|^2. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.10), chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \psi^2 |\nabla\varphi_M|^2 dx = \int_{\mathbb{R}_+^2} (|\nabla(\psi\varphi_M)|^2 + 2e^v (\psi\varphi_M)^2) dx - \frac{1}{\mathfrak{D}} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} (\psi\varphi_M)^2 dl.$$

Somando e subtraindo $\mathfrak{D} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} (\psi\varphi_M)^2 dl$ na equação acima e usando a definição de Q dada em (3.3), temos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \psi^2 |\nabla\varphi_M|^2 dx = Q(\psi\varphi_M) + \left(\mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}}\right) \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} (\psi\varphi_M)^2 dl.$$

Ou seja,

$$Q(\psi\varphi_M) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \psi^2 |\nabla\varphi_M|^2 dx - \left(\mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}}\right) \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} (\psi\varphi_M)^2 dl.$$

Observe que $\left(\mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}}\right) > 0$, desde que $\mathfrak{D} > 1$. Além disso, como $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} = +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}_+^2} \psi^2 |\nabla\varphi_M|^2 dx$ é limitado, podemos escolher $M > 0$ grande o suficiente de modo que

$$Q(\psi\varphi_M) < 0.$$

Repetindo o mesmo argumento com M fazendo o papel de M_0 , podemos encontrar φ_{M_1} definida como em (3.9) com suporte disjunto a φ_M com $Q(\psi\varphi_{M_1}) < 0$. Logo, existem infinitas funções suaves com suportes compactos e disjuntos $(\varphi_{M_n})_n$ satisfazendo $Q(\psi\varphi_{M_n}) < 0$. Portanto, $\text{ind}(v) = +\infty$. $\square$

3.2 O Conjunto Singular

Lembre de (6) que estamos tratando do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_g u_n + 2\tilde{K}_n = 2K_n e^{u_n}, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + 2\tilde{h}_n = 2h_n e^{\frac{u_n}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde $\tilde{K}_n, \tilde{h}_n, K_n, h_n$ são funções C^1 tais que $\tilde{K}_n \rightarrow \tilde{K}, K_n \rightarrow K, \tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}$ no sentido C^1 . Daqui por diante, considere uma sequência $(u_n)_n$ de soluções de (3.14). Além disso, a menos que seja dito explicitamente o contrário, estamos supondo $K < 0$. Lembre-se que o conjunto singular é definido em (7) como

$$S = \{p \in \Sigma : \text{existe } (x_n)_n \text{ em } \Sigma \text{ com } x_n \rightarrow p \text{ e } u_n(x_n) \rightarrow +\infty\} \quad (3.15)$$

A fim de o usarmos na proposição seguinte, considere o seguinte resultado do cálculo variacional que pode ser encontrado na Seção 5 do Capítulo 1 de [32]:

Teorema 3.2.1 (Princípio Variacional de Ekeland). *Seja (X, d) um espaço métrico completo e considere uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ que é semicontínua inferiormente, limitada por baixo e não identicamente $+\infty$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ dados e seja $x \in X$ tal que $\varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + \varepsilon$. Então, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que*

- (a) $\varphi(x_\varepsilon) \leq \varphi(x)$;
- (b) $d(x_\varepsilon, x) \leq \lambda$;
- (c) $\varphi(x_\varepsilon) < \varphi(z) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_\varepsilon, z)$ para todo $z \neq x_\varepsilon$.

A proposição a seguir implica no item (a) do Teorema 4.

Proposição 3.2.2. *O conjunto S definido em (3.15) satisfaz*

$$S \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) \geq 1\}.$$

Demonstração. Seja $p \in S$. É conhecido que em uma vizinhança de p , a métrica g pode ser escrita como $g = e^w \delta$, onde δ é a métrica Euclidiana. Assim, o problema passa a ser no conjunto B , onde $B = B_r^+(0) \subset \mathbb{R}_+^2$ (se $p \in \partial\Sigma$) ou $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ (se $p \in \text{int}(\Sigma)$), com a métrica canônica, onde p é associado à origem.

Considere uma sequência $(y_n)_n$ em B tal que

$$y_n \rightarrow 0 \text{ e } u_n(y_n) \rightarrow +\infty,$$

e defina

$$\varepsilon_n = e^{-\frac{u_n(y_n)}{2}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, aplique o Teorema 3.2.1 com

$$\varphi = e^{-\frac{u_n}{2}} \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{\varepsilon_n},$$

para encontrar uma sequência $(x_n)_n$ em B tal que

$$(a) \quad e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} \leq e^{-\frac{u_n(y_n)}{2}}, \text{ o que implica } u_n(y_n) \leq u_n(x_n);$$

$$(b) \quad |x_n - y_n| \leq \sqrt{\varepsilon_n};$$

(c)

$$e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} < e^{-\frac{u_n(z)}{2}} + \sqrt{\varepsilon_n}|x_n - z|, \quad (3.16)$$

para todo $z \neq x_n$.

Desde que $y_n \rightarrow 0$ e $u_n(y_n) \rightarrow +\infty$, temos como consequência de (a) e (b) que $u_n(x_n) \rightarrow +\infty$ e $x_n \rightarrow 0$, respectivamente.

Agora, defina

$$\delta_n = e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} \rightarrow 0, \quad B_n = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \cap B, \quad (3.17)$$

$$v_n(x) = u_n(\delta_n x + x_n) + 2 \log \delta_n, \quad (3.18)$$

para $x \in \tilde{B}_n := \frac{1}{\delta_n} B_n$. Observe que

$$v_n(0) = u_n(x_n) + 2 \log e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} = 0. \quad (3.19)$$

Afirmção. Dados quaisquer $R > 0$ e $\varepsilon > 0$, se n for suficientemente grande, temos

$$v_n(x) < \varepsilon \quad (3.20)$$

para todo $x \in \tilde{B}$ com $|x| < R$.

De fato, se $0 < |z - x_n| < R\delta_n$, então

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{\varepsilon_n}R) e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} &< (1 - \sqrt{\varepsilon_n}R) \left(e^{-\frac{u_n(z)}{2}} + \sqrt{\varepsilon_n}|x_n - z| \right) \\ &< (1 - \sqrt{\varepsilon_n}R) \left(e^{-\frac{u_n(z)}{2}} + \sqrt{\varepsilon_n}R e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} \right) \\ &\leq (1 - \sqrt{\varepsilon_n}R) (1 + \sqrt{\varepsilon_n}R) e^{-\frac{u_n(z)}{2}} \\ &< e^{-\frac{u_n(z)}{2}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

para n suficientemente grande, pois R é fixado e $\varepsilon_n = e^{-\frac{u_n(y_n)}{2}} \rightarrow 0$. Observe que a primeira e segunda desigualdades seguem, respectivamente, de (3.16) e do fato de $|z - x_n| < \delta_n R$. Assim, (3.21) implica

$$u_n(z) < u_n(x_n) - 2 \log(1 - \sqrt{\varepsilon_n} R), \quad (3.22)$$

se $|z - x_n| < R\delta_n$.

Daí, se $|z| < R$, temos que

$$\begin{aligned} v_n(z) &= u_n(\delta_n z + x_n) + 2 \log \delta_n \\ &< u_n(x_n) - 2 \log(1 - \sqrt{\varepsilon_n} R) - 2 \log e^{-\frac{u_n(x_n)}{2}} \\ &= -\log(1 - \sqrt{\varepsilon_n} R) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Com a primeira desigualdade sendo dada por (3.22) e pelo fato de $|\delta_n z + x_n - x_n| = \delta_n |z| < \delta_n R$. Já a última desigualdade é dada pelo fato de $\log(1 - \sqrt{\varepsilon_n} R) < 0$ e $\lim \log(1 - \sqrt{\varepsilon_n} R) = 0$, pois $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Provando a afirmação.

Agora, iremos considerar dois casos:

Caso 1. assando para uma subsequência,

$$\frac{d(x_n, \Gamma_r(0))}{\delta_n} \rightarrow t_0 \geq 0, \quad (3.23)$$

onde

$$\Gamma_r(p) = \{(s, t) \in \partial B_r^+(p) : t = 0\}.$$

Obtemos, para todo $x \in \tilde{B}_n = \frac{1}{\delta_n} B_n$, de (3.14) que

$$\begin{aligned} -\Delta v_n(x) &= -\delta_n^2 \Delta u_n(\delta_n x + x_n) \\ &= 2\delta_n^2 K_n(\delta_n x + x_n) e^{u_n(\delta_n x + x_n)} - 2\delta_n^2 \tilde{K}_n(\delta_n x + x_n) \\ &= 2e^{2 \log \delta_n} K_n(\delta_n x + x_n) e^{u_n(\delta_n x + x_n)} - 2\delta_n^2 \tilde{K}_n(\delta_n x + x_n) \\ &= 2K_n(\delta_n x + x_n) e^{v_n(x)} - 2\delta_n^2 \tilde{K}_n(\delta_n x + x_n). \end{aligned}$$

Além disso, em $\tilde{\Gamma}_n = \tilde{B}_n \cap \{(s, 0) \in \mathbb{R}_+^2\}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial \eta}(x) &= \delta_n \frac{\partial u_n}{\partial \eta}(\delta_n x + x_n) = 2\delta_n h_n(\delta_n x + x_n) e^{\frac{u_n(\delta_n x + x_n)}{2}} - 2\delta_n \tilde{h}_n(\delta_n x + x_n) \\ &= 2h_n(\delta_n x + x_n) e^{\frac{v_n(x)}{2}} - 2\delta_n \tilde{h}_n(\delta_n x + x_n). \end{aligned}$$

Dessa forma, v_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_n + 2\delta_n^2 \tilde{K}_n(\delta_n x + x_n) = 2K_n(\delta_n x + x_n) e^{v_n}, & \text{em } \tilde{B}_n \\ \frac{\partial v_n}{\partial \eta} + 2\delta_n \tilde{h}_n(\delta_n x + x_n) = 2h_n(\delta_n x + x_n) e^{\frac{v_n}{2}}, & \text{em } \tilde{\Gamma}_n. \end{cases}$$

Usando (3.20) e estimativas de regularidade elíptica, obtemos, a menos de uma subsequência, que

$$v_n \rightarrow v \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R} \times (-t_0, +\infty)).$$

Além disso, por meio de um cálculo parecido com o feito na Seção 1.15, temos que v é uma solução da equação

$$\begin{cases} -\Delta v = 2K(0)e^v, & \text{em } \mathbb{R} \times (-t_0, +\infty) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 2h(0)e^{\frac{v}{2}}, & \text{em } t = -t_0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Pelo Teorema 1.15.1, sabemos que o problema acima admite solução somente se $\mathfrak{D}(0) \geq 1$.

De (3.20), obtemos que $v \leq 0$. Além disso, a partir de (3.19), temos que $v(0) = 0$. Aplicando o Princípio do Máximo (Teorema 1.8.7), concluímos que $0 \in \mathbb{R} \times \{-t_0\}$. Isso implica que $t_0 = 0$. De (3.23), temos

$$d(x_n, \Gamma_r(0)) = o(\delta_n).$$

Daí, $p \in \partial\Sigma$.

Caso 2. $\frac{d(x_n, \Gamma_r(0))}{\delta_n} \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Nessa situação, $\tilde{B}_n$, definido em (3.17), exaure todo $\mathbb{R}^2$. Seguindo de maneira análoga ao caso anterior, temos que

$$v_n \rightarrow v \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^2).$$

Além disso, v satisfaz a equação

$$-\Delta v = K(0)e^v, \text{ em } \mathbb{R}^2. \quad (3.25)$$

Considere a restrição de v a $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$. Lembre de que $v \leq 0$ e $v(0) = 0$. Pela equação (3.25), sabemos que $\Delta v > 0$ em $B_r(0)$, já que $K(0) < 0$. Aplicando o Princípio do Máximo (Teorema 1.8.7), concluímos que v não pode atingir seu máximo em $B_r(0)$. Em particular, isso implica que $v(0) < 0$, o que contraria o fato de que $v(0) = 0$. Portanto, o Caso 2 não pode ocorrer.

Assim, concluímos que $p \in \partial\Sigma$ e que $\mathfrak{D}(p) \geq 1$, como queríamos demonstrar. $\square$

3.3 Exemplo de Infinitos Pontos de Blow-Up

Posteriormente, veremos, por meio do Lema 3.6.1 e da Proposição 3.6.2, que, se a sequência $\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g\right)_n$ for limitada, então o conjunto dos pontos de blow-up S será finito. No entanto, o exemplo a seguir demonstra que esse conjunto, também chamado de conjunto singular, nem sempre é finito.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -2e^u, & \text{em } A(0; r, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2 = 2h_1 e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } |x| = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{2}{r} = 2h_2 e^{\frac{u}{2}}, & \text{em } |x| = r \end{cases}. \quad (3.26)$$

Onde h_1 e h_2 são constantes reais. A classificação das soluções explícitas do problema (3.26) é dada em [21].

Exemplo 1. Por um cálculo direto, para cada $\lambda \notin [0, -2 \log r]$, as funções

$$u_{\lambda}(x) = \log \left(\frac{4}{|x|^2 (\lambda + 2 \log |x|)^2} \right)$$

são soluções do problema (3.26) com $h_1 = -\frac{|\lambda|}{\lambda}$ e $h_2 = \frac{|\lambda + \log r^2|}{\lambda + \log r^2}$. Em particular, $h_1 = 1$ e $h_2 = -1$, se $\lambda < 0$, e $h_1 = -1$ e $h_2 = 1$, $\lambda > -2 \log r$. Note que se $|x| = 1$,

então $u_\lambda(x) = \log \frac{4}{\lambda^2}$ e, se $|x| = r$, então $u_\lambda(x) = \log \left(\frac{4}{r^2(\lambda + 2 \log r)^2} \right)$. Assim, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda(x) = +\infty$, no caso em que $|x| = 1$ e $\lim_{\lambda \rightarrow -2 \log r} u_\lambda(x) = +\infty$, no caso em que $|x| = r$.

Dessa forma, o conjunto dos pontos de blow-up é $\partial A(0; r, 1)$, que é um conjunto infinito.

Note que, neste caso, a sequência $\left(\int_{A(0; r, 1)} e^{u_{\lambda_n}} dx \right)_n$ não é limitada. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{A(0; r, 1)} e^{u_{\lambda_n}} dx &= 4 \int_0^\pi \int_r^1 \frac{1}{\rho(\lambda_n + 2 \log \rho)^2} d\rho d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2 \log r + \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

se $\lambda_n \nearrow 0$ ou $\lambda_n \searrow -2 \log$.

3.4 Lemas Auxiliares

Lema 3.4.1. *Seja $(u_n)_n$ uma sequência de soluções de (3.14). Então,*

- (a) *Para qualquer $q \in (1, 2)$, $\int_\Sigma |\nabla_g u_n^-|^q dv_g < O(1)$;*
- (b) *Se, além disso, $\chi_n \leq 0$ (veja (8)), então $\int_\Sigma |\nabla_g u_n^-|^2 dv_g < O(1)$;*
- (c) *Para qualquer $M \subset \Sigma$ compacto com $M \cap S = \emptyset$, temos que:*

$$\sup_M u_n - \inf_M u_n = O(1) \text{ e } \int_M |\nabla_g u_n|^2 dv_g = O(1).$$

Aqui $u_n^- = \min \{u_n, 0\}$.

Demonstração. Defina uma função $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} w(t) = t, & \text{se } t \leq 0; \\ w(t) = 1, & \text{se } t \geq 1; \\ w'(t) \geq 0, & \text{para todo } t \in \mathbb{R}; \\ w''(t) \leq 0, & \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $w_n := w \circ u_n : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Observe que $\nabla_g w_n(x) = w'(u_n(x))\nabla_g u_n(x)$ e $\nabla_g^2 w_n(x) = w''(u_n(x))\nabla_g u_n(x) \otimes \nabla_g u_n(x) + w'(u_n(x))\nabla_g^2 u_n(x)$. Daí, como $\Delta_g w_n = \text{tr} \nabla_g^2 w_n$, segue de (3.14) que

$$\begin{aligned} \Delta_g w_n &= w''(u_n) |\nabla_g u_n|^2 + w'(u_n) \Delta_g u_n \\ &= w''(u_n) |\nabla_g u_n|^2 + 2w'(u_n) (\tilde{K}_n - K_n e^{u_n}), \end{aligned}$$

em Σ . Além disso,

$$\frac{\partial w_n}{\partial \eta_g} = w'(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial \eta_g} = -2w'(u_n) \tilde{h}_n + 2w'(u_n) h_n e^{\frac{u_n}{2}}.$$

Ou seja, cada w_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_g w_n = -w''(u_n) |\nabla_g u_n|^2 - 2w'(u_n) (\tilde{K}_n + |K_n| e^{u_n}), & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial w_n}{\partial \eta_g} = 2w'(u_n) (h_n e^{\frac{u_n}{2}} - \tilde{h}_n), & \text{em } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (3.28)$$

De (3.28) e lembrando que $w_n'' \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq - \int_{\Sigma} w''(u_n) |\nabla_g u_n|^2 dv_g \\ &= \int_{\Sigma} [-\Delta_g w_n + 2w'(u_n) (\tilde{K}_n + |K_n| e^{u_n})] dv_g \\ &= 2 \int_{\Sigma} w'(u_n) (\tilde{K}_n + |K_n| e^{u_n}) - 2 \int_{\partial \Sigma} w'(u_n) (h_n e^{\frac{u_n}{2}} - \tilde{h}_n) dv_g \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade foi obtida usando o Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4) e a equação (3.28). Na última desigualdade, usamos a definição de w dada em (3.27) para garantir que $w'(u_n) = 0$ sempre que $u_n > 1$. Assim, os termos que envolvem a exponencial de u_n são controlados. Além disso, $(\tilde{K}_n)_n$ e $(K_n)_n$ são limitadas.

Consequentemente, o lado direito da primeira equação de (3.28) é limitada em $L^1(\Sigma)$ e o lado direito da segunda equação é limitada em $L^\infty(\partial \Sigma)$. Pela teoria de regularidade elíptica, segue que

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g w_n|^q < O(1),$$

para todo $q \in (1, 2)$. Da definição de w_n , segue o item (a).

Agora provaremos o item (b).

Multiplicando (6) por u_n^- e integrando, obtemos que

$$\int_{\Sigma} \langle \nabla_g u_n^-, \nabla_g u_n \rangle dv_g - \int_{\partial\Sigma} u_n^- \frac{\partial u_n}{\partial \eta_g} d\sigma_g + 2 \int_{\Sigma} u_n^- \tilde{K}_n dv_g = 2 \int_{\Sigma} u_n^- K_n e^{u_n} dv_g.$$

Usando a segunda equação de (3.14) e observando que $\int_{\Sigma} \langle \nabla_g u_n^-, \nabla_g u_n \rangle dv_g = \int_{\Sigma} |\nabla_g u_n^-|^2 dv_g$, obtemos

$$\int_{\Sigma} \left[|\nabla_g u_n^-|^2 + 2u_n^- \left(\tilde{K}_n + |K_n| e^{u_n} \right) \right] dv_g = 2 \int_{\partial\Sigma} u_n^- \left(h_n e^{\frac{u_n}{2}} - \tilde{h}_n \right) d\sigma_g.$$

Como as função $u_n^- e^{u_n}$ e $u_n^- e^{\frac{u_n}{2}}$ são limitadas em L^∞ (pois quando $u_n > 0$, $u_n^- = 0$), temos que

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n^-|^2 dv_g = -2 \left[\int_{\Sigma} \tilde{K}_n u_n^- dv_g + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n u_n^- d\sigma_g \right] + O(1). \quad (3.29)$$

Note que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Sigma} \tilde{K}_n \left(u_n - \int_{\Sigma} u_n^- dv_g \right) dv_g \right| &\leq \|\tilde{K}_n\|_p \left\| u_n^- - \int_{\Sigma} u_n^- dv_g \right\|_q \\ &\leq C \left\| u_n^- - \int_{\Sigma} u_n^- dv_g \right\|_q \\ &\leq C \left\| \nabla_g u_n^- \right\|_q \\ &= C \left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n^-|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq O(1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Onde a primeira desigualdade segue da desigualdade de Hölder, a segunda segue de $\tilde{K}_n \rightarrow \tilde{K}$, a terceira deve-se a desigualdade de Poincaré, na penúltima usamos que $q \in (1, 2)$ e, na última, usamos o item (a). Analogamente,

$$\left| \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n \left(u_n^- - \int_{\Sigma} u_n^- dv_g \right) d\sigma_g \right| \leq O(1). \quad (3.31)$$

Além disso, colocando $\oint_{\Sigma} u_n^-$ em evidência e usando a definição de χ_n em (8), obtemos

$$-2 \left[\int_{\Sigma} \tilde{K}_n dv_g \oint_{\Sigma} u_n^- + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n d\sigma_g \oint_{\Sigma} u_n^- \right] = -2\chi_n \oint_{\Sigma} u_n^- \leq 0, \quad (3.32)$$

pois $\chi_n \leq 0$ e $\oint_{\Sigma} u_n^- \leq 0$.

Logo, escrevendo $u_n^- = (u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^-) + \oint_{\Sigma} u_n^-$, segue, de (3.30), (3.31) e (3.32), que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla_g u_n^-|^2 dv_g &= -2 \left[\int_{\Sigma} \tilde{K}_n u_n^- dv_g + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n u_n^- d\sigma_g \right] + O(1) \\ &= -2 \left[\int_{\Sigma} \tilde{K}_n \left(u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^- \right) dv_g + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n \left(u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^- \right) d\sigma_g \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Sigma} \tilde{K}_n dv_g \oint_{\Sigma} u_n^- + \int_{\partial\Sigma} \tilde{h}_n d\sigma_g \oint_{\Sigma} u_n^- \right] + O(1) \\ &\leq O(1). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Agora provaremos (c).

Podemos assumir que $M = \overline{B_r(p)}$, com $B_{4r}(p) \cap S = \emptyset$. Além disso,

(1) $B_{4r}(p) \subset \text{int}(\Sigma)$ ou;

(2) $p \in \partial\Sigma$.

Passando o problema para uma bola na métrica Euclidiana, temos que $g = e^v \delta$ em $B_{4r}(0) \subset \mathbb{R}^2$ ou $B_{4r}^+(0) \subset \mathbb{R}_+^2$. Desta forma, a função $v_n = u_n + v$ satisfaz a equação

$$-\Delta v_n = f_n \text{ em } B_{4r}(0),$$

no caso (1). Ou

$$\begin{cases} -\Delta v_n = f_n, & \text{em } B_{4r}^+(0) \\ \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = h_n, & \text{em } \partial B_{4r}^+(0), \end{cases}$$

no caso (2). Aqui, $f_n := 2K_n e^{v_n} - 2e^v(\tilde{K}_n - K_g)$ e $h_n := 2h_n e^{\frac{v_n}{2}} - e^{\frac{v}{2}}(\tilde{h}_n - \kappa_g)$ são funções limitadas em L^∞ , já que $B_{4r}(0) \cap S = \emptyset$ ou $B_{4r}(0) \cap S = \emptyset$, conforme for o caso. Como $B_{4r}(p) \cap S = \emptyset$, pela definição de S , temos que existe $C > 0$ tal que $u_n \leq C$ em $B_{2r}(p)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De maneira análoga a demonstração do item (a), obtemos que

$$\int_{\Sigma} |\nabla_g v_n|^q dv_g = O(1),$$

para todo $q \in [1, 2)$, onde $v_n = \min \{u_n, C\}$.

Agora, defina $\tilde{u}_n = u_n - \int_{B_{2r}(p)} u_n$. Da Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.10.6) tem-se que $\tilde{u}_n$ é limitada em $L^{q'}(B_{2r}(p))$, para todo $q' > 1$. No caso (1), $-\Delta \tilde{u}_n = f_n$ com $f_n \in L^\infty(B_{2r}(0))$. Daí, pelos Teoremas 8.17 e 8.3 de [19], segue o resultado. No caso (2), o resultado segue do Teorema 5.36 e do Lema 5.51 de [29]. $\square$

Lema 3.4.2. *Seja u uma solução de*

$$-\Delta_g u + 2\tilde{K} = 2Ke^u, \text{ em } \Sigma. \quad (3.33)$$

Então, dado qualquer campo vetorial $F : \Sigma \rightarrow T\Sigma$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Sigma} \left[4Ke^u \langle F, \nu \rangle + 2 \langle \nabla_g u, \nu \rangle \langle \nabla_g u, F \rangle - |\nabla_g u|^2 \langle F, \nu \rangle \right] d\sigma_g \\ &= \int_{\Sigma} \left[4\tilde{K} \langle \nabla_g u, F \rangle + 4e^u (\langle \nabla_g K, F \rangle + K \operatorname{div}_g F) + 2DF(\nabla_g u, \nabla_g u) \right. \\ & \quad \left. - |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F \right] dv_g. \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_g \left(2 \langle \nabla_g u, F \rangle \nabla_g u - |\nabla_g u|^2 F \right) \\ &= 2 \langle \nabla_g \langle \nabla_g u, F \rangle, \nabla_g u \rangle + 2 \langle \nabla_g u, F \rangle \Delta_g u - \langle \nabla_g |\nabla_g u|^2, F \rangle - |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_g u, F \rangle \Delta_g u &= \operatorname{div}_g \left(2 \langle \nabla_g u, F \rangle \nabla_g u - |\nabla_g u|^2 F \right) - 2 \langle \nabla_g \langle \nabla_g u, F \rangle, \nabla_g u \rangle \\ & \quad + \langle \nabla_g |\nabla_g u|^2, F \rangle + |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F. \end{aligned}$$

Calculemos $-2 \langle \nabla_g \langle \nabla_g u, F \rangle, \nabla_g u \rangle + \langle \nabla_g |\nabla_g u|^2, F \rangle$ em um referencial ortonormal local $\{e_i\}$. Como $\nabla_g u = \sum_i \partial_i u e_i$ e $F = F^l \partial_l$, temos que $\langle \nabla_g u, F \rangle = F^i \partial_i u$. Daí, obtemos

$$\nabla_g \langle \nabla_g u, F \rangle = \partial_k (F^i \partial_i u) e_k = (\partial_k F^i \partial_i u + F^i \partial_k \partial_i u) e_k.$$

Donde segue que

$$\langle \nabla_g \langle \nabla_g u, F \rangle, \nabla_g u \rangle = \sum_l \partial_l u (\partial_l F^i \partial_i u + F^i \partial_l \partial_i u).$$

Além disso, desde que $\langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle = \sum_j (\partial_j u)^2$, temos que

$$\nabla_g \langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle = 2 \partial_j u \partial_l \partial_j u e_l. \text{ Dessa forma,}$$

$$\langle \nabla_g \langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle, F \rangle = 2 \sum_j F^l \partial_j u \partial_l \partial_j u.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -2 \langle \nabla_g \langle \nabla_g u, F \rangle, \nabla_g u \rangle + \langle \nabla_g \langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle, F \rangle &= -2 \sum_k \partial_k F^i \partial_i u \partial_k u \\ &=: -2DF(\nabla_g u, \nabla_g u). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Com isso, obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} 2\Delta_g u \langle \nabla_g, F \rangle &= \operatorname{div}_g \left(2 \langle \nabla_g u, F \rangle \nabla_g u - |\nabla_g u|^2 F \right) \\ &\quad - 2DF(\nabla_g u, \nabla_g u) + |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F. \end{aligned}$$

Integrando e usando o Teorema da Divergência, obtemos que

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Sigma} \Delta_g u \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_g \left(2 \langle \nabla_g u, F \rangle \nabla_g u - |\nabla_g u|^2 F \right) dv_g \\ &\quad - 2 \int_{\Sigma} DF(\nabla_g u, \nabla_g u) dv_g + \int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F dv_g \\ &= \int_{\partial \Sigma} \left\langle 2 \langle \nabla_g u, F \rangle \nabla_g u - |\nabla_g u|^2 F, \nu \right\rangle dv_g \\ &\quad - 2 \int_{\Sigma} DF(\nabla_g u, \nabla_g u) dv_g + \int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F dv_g. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.33) temos que

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Sigma} \Delta_g u \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g &= 4 \int_{\Sigma} \tilde{K} \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g - 4 \int_{\Sigma} K e^u \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g \\
&= 4 \int_{\Sigma} \tilde{K} \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g - 4 \int_{\Sigma} \langle \nabla_g e^u, KF \rangle dv_g \\
&= 4 \int_{\Sigma} \tilde{K} \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g + 4 \int_{\Sigma} e^u \operatorname{div}_g (KF) - 4 \int_{\partial \Sigma} e^u K \langle F, \nu \rangle \\
&= 4 \int_{\Sigma} \tilde{K} \langle \nabla_g u, F \rangle dv_g + 4 \int_{\Sigma} e^u (\langle \nabla_g K, F \rangle + K \operatorname{div}_g F) dv_g \\
&\quad - 4 \int_{\partial \Sigma} e^u K \langle F, \nu \rangle.
\end{aligned}$$

Igualando as identidades acima, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial \Sigma} [4K e^u \langle F, \nu \rangle + 2 \langle \nabla_g u, \nu \rangle \langle \nabla_g u, F \rangle - |\nabla_g u|^2 \langle F, \nu \rangle] d\sigma_g \\
&= \int_{\Sigma} [4\tilde{K} \langle \nabla_g u, F \rangle + 4e^u (\langle \nabla_g K, F \rangle + K \operatorname{div}_g F) + 2DF(\nabla_g u, \nabla_g u) \\
&\quad - |\nabla_g u|^2 \operatorname{div}_g F] dv_g.
\end{aligned}$$

□

3.5 Caso de Massa Ilimitada

Lembre-se que estamos considerando uma sequência de soluções $(u_n)_n$ do problema (3.14), com $K < 0$. Vale ressaltar que, doravante, vamos considerar $\chi_n \leq 0$, com χ_n definida em (8). Do Teorema de Gauss-Bonnet, segue que

$$\chi_n = \int_{\Sigma} K_n e^{u_n} dv_g + \int_{\partial \Sigma} h_n e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Defina

$$\rho_n := \int_{\partial \Sigma} h_n e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g = \int_{\Sigma} |K_n| e^{u_n} dv_g + O(1).$$

Suponha que $\rho_n \rightarrow \infty$. Passando para uma subsequência se necessário, obtemos que

$$(a) \quad \rho_n^{-1} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \rightharpoonup \sigma;$$

(b) $\rho_n^{-1}|K_n|e^{u_n} \rightharpoonup \xi$,

onde σ e ξ são medidas unitárias positivas definidas em $\partial\Sigma$ e Σ , respectivamente. As convergências fracas acima são no sentido de medidas, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Sigma} \varphi \rho_n^{-1} h_n e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g = \int_{\partial\Sigma} \varphi d\sigma$$

para toda $\varphi \in C(\partial\Sigma)$. A convergência de ξ é análoga.

Proposição 3.5.1. *Temos que $\xi|_{\text{int}(\Sigma)} = 0$ e $\xi|_{\partial\Sigma} = \sigma$.*

Demonstração. Fixe $\phi \in C^2(\Sigma)$. Multiplicando (3.14) por ϕ e usando o Teorema da Divergência (Teorema 1.6.4), temos que

$$\int_{\Sigma} (\phi \Delta_g u_n - u_n \Delta_g \phi) dv_g = \int_{\partial\Sigma} \left(\phi \frac{\partial u_n}{\partial \eta} - u_n \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\sigma_g.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Sigma} (|K_n|e^{u_n} + \tilde{K}_n) \phi dv_g - 2 \int_{\partial\Sigma} (h_n e^{\frac{u_n}{2}} - \tilde{h}_n) \phi d\sigma_g &= \int_{\Sigma} u_n \Delta_g \phi dv_g \\ &\quad - \int_{\partial\Sigma} u_n \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\sigma_g. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Vamos estimar o lado direito levando em conta a parte positiva e a parte negativa de u_n , lembrando que elas são definidas por $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$ e $u_n^- = \min\{u_n, 0\}$, respectivamente. Note que $u_n = u_n^+ + u_n^-$ e

$$\left| \int_{\Sigma} u_n^+ \Delta_g \phi dv_g - \int_{\partial\Sigma} u_n^+ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\sigma_g \right| \leq C_1 \int_{\Sigma} u_n^+ dv_g + C_2 \int_{\partial\Sigma} u_n^+ d\sigma_g, \quad (3.36)$$

onde $C_1 = \sup_{\Sigma} |\Delta_g \phi|$ e $C_2 = \sup_{\partial\Sigma} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|$.

Da Desigualdade de Jensen (Lema 1.11.2), sabemos que

$$\int_{\Sigma} u_n^+ dv_g \leq C \log \int_{\Sigma} e^{u_n^+} dv_g + C.$$

Note que, para A, B constantes (ou funções limitadas), $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(t+B)}{t+A} = 0$.

Dessa forma, considerando $\Sigma = \Sigma_{1n} + \Sigma_{2n}$, com $\Sigma_{1n} = \{p \in \Sigma; u_n(p) < 0\}$ e $\Sigma_{2n} = \{p \in \Sigma : u_n(p) \geq 0\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\Sigma} u_n^+ dv_g}{\rho_n} &= \frac{\int_{\Sigma} u_n^+ dv_g}{\int_{\Sigma} |K_n| e^{u_n} dv_g + O(1)} \\
&\leq \frac{C \log \int_{\Sigma} e^{u_n^+} dv_g + C}{\min |K_n| \int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g + O(1)} \\
&= \frac{C \log \int_{\Sigma_{2n}} e^{u_n^+} dv_g + C}{C \int_{\Sigma_{1n}} e^{u_n^+} dv_g + C \int_{\Sigma_{2n}} e^{u_n^+} dv_g + O(1)} \\
&\leq \frac{C \log \int_{\Sigma_{2n}} e^{u_n^+} dv_g + C}{C \int_{\Sigma_{2n}} e^{u_n^+} dv_g + O(1)} \\
&\rightarrow 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Onde, na primeira desigualdade, usamos o fato de $K_n \rightarrow K$, $K < 0$.

De maneira análoga, concluimos que

$$\frac{\int_{\partial\Sigma} u_n^+ dv_g}{\rho_n} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(C_1 \int_{\Sigma} u_n^+ dv_g + C_2 \int_{\partial\Sigma} u_n^+ d\sigma_g \right) = 0.$$

Assim, de (3.36), segue que

$$\left| \int_{\Sigma} u_n^+ \Delta_g \phi dv_g - \int_{\partial\Sigma} u_n^+ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\sigma_g \right| = o(\rho_n). \tag{3.38}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} u_n^- \Delta_g \phi dv_g - \int_{\partial\Sigma} u_n^- \frac{\partial\phi}{\partial\eta} d\sigma_g \right| \\ &= \left| \int_{\Sigma} \left(u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^- \right) \Delta_g \phi dv_g - \int_{\partial\Sigma} \left(u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^- \right) \frac{\partial\phi}{\partial\eta} d\sigma_g \right| \\ &\leq C \left(\int_{\Sigma} \left| u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^- \right| dv_g + \int_{\partial\Sigma} \left| u_n^- - \oint_{\Sigma} u_n^- \right| d\sigma_g \right), \end{aligned}$$

onde $C = \max \left\{ \sup_{\Sigma} |\Delta_g \phi|, \sup_{\partial\Sigma} \left| \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right| \right\}$. Segue do Teorema 1.10.3, do Teorema de Poincaré (Teorema 1.10.6) e do item (b) do Lema 3.4.1 que

$$\left| \int_{\Sigma} u_n^- \Delta_g \phi dv_g - \int_{\partial\Sigma} u_n^- \frac{\partial\phi}{\partial\eta} d\sigma_g \right| \leq C \left(\int_{\Sigma} |\nabla_g u_n^-|^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} < O(1). \quad (3.39)$$

De (3.38) e (3.39) segue que

$$\left| \int_{\Sigma} u_n \Delta_g \phi dv_g - \int_{\partial\Sigma} u_n \frac{\partial\phi}{\partial\eta} d\sigma_g \right| = o(\rho_n). \quad (3.40)$$

Se $\text{supp } \phi \subset \text{int}(\Sigma)$, de (3.35) e de (3.40), temos que

$$\rho_n^{-1} \int_{\Sigma} |K_n| e^{u_n} \phi dv_g \rightarrow 0.$$

Donde segue que $\xi|_{\text{int}(\Sigma)} = 0$. De maneira análoga, se $\text{supp } \phi \subset \partial\Sigma$, (3.35) e (3.40) implicam em

$$\left| \rho_n^{-1} \int_{\Sigma} |K_n| e^{u_n} \phi dv_g - \rho_n^{-1} \int_{\partial\Sigma} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \phi d\sigma_g \right| \rightarrow 0.$$

Logo, $\xi|_{\partial\Sigma} = \sigma$. □

Proposição 3.5.2. *Temos que $\text{supp } \sigma \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}_{\tau}(p) = 0\}$.*

Demonstração. Seja Λ_0 uma componente conexa de $\partial\Sigma$ tal que $\sigma|_{\Lambda_0} \neq 0$, e considere uma vizinhança suave Σ_0 de Λ_0 em Σ . É conhecido que podemos passar, via uma aplicação conforme, para um problema no anel $A(0; r, 1)$ para algum $0 < r < 1$, a qual identificamos Λ_0 com $\partial_1 B(0)$. Assim, podemos escrever $g = e^v \delta$, para alguma função suave v em $A(0; r, 1)$.

Defina $w_n := u_n + v$ e $g_n = e^{u_n} \delta = e^{u_n} g$. Sabemos que u_n satisfaz (3.14) e

$$\begin{cases} -\Delta_g u_n + 2K_g = 2K_{g_n} e^{u_n}, & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + 2\kappa_g = 2\kappa_{g_n} e^{\frac{u_n}{2}}, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases}$$

De (3.14) e da equação acima inferimos que

$$2K_{g_n} = e^{-u_n} (2K_n e^{u_n} - 2\tilde{K}_n + 2K_g) = 2K_n + 2e^{-u_n} (K_g - \tilde{K}_n). \quad (3.41)$$

Além disso, w_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_n = 2K_{g_n} e^{w_n}, & \text{em } A(0; r, 1) \\ \frac{\partial w_n}{\partial \eta} = 2\kappa_{g_n} e^{\frac{w_n}{2}}, & \text{em } \partial A(0; r, 1). \end{cases} \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) em (3.42), obtemos

$$-\Delta w_n + 2\hat{K}_n = 2K_n e^{w_n}, \quad (3.43)$$

onde $\hat{K}_n = e^v (\tilde{K}_n - K_g)$ é uma função suave para cada $n \in \mathbb{N}$. De maneira análoga, concluímos que

$$\frac{\partial w_n}{\partial \eta} + 2\hat{h}_n = 2h_n e^{\frac{w_n}{2}}, \quad (3.44)$$

onde $\hat{h}_n = e^{\frac{v}{2}} (\tilde{h}_n - h_g)$ é uma função suave para cada $n \in \mathbb{N}$.

De (3.43) e (3.44), obtemos que as funções w_n satisfazem

$$\begin{cases} -\Delta w_n + 2\hat{K}_n = 2K_n e^{w_n}, & \text{em } A(0; r, 1) \\ \frac{\partial w_n}{\partial \eta} + 2\hat{h}_n = 2h_n e^{\frac{w_n}{2}}, & \text{em } \Lambda_0, \end{cases} \quad (3.45)$$

Considere uma função analítica $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(p) = f(p)\tau(p)$, onde τ é o vetor tangente unitário. Para r suficientemente próximo de 1, podemos estender F analiticamente para uma função holomorfa $F : A(0; r, 1) \rightarrow \mathbb{C}$. Defina $\tilde{F}(p) = F(p)\phi(p)$, onde ϕ é uma função corte ϕ tal que $\phi = 1$ em $A(0; r_0, 1)$ e $\phi = 0$ em $A(0; r, r_1)$, com $r < r_1 < r_0$.

Vamos aplicar o Lema 3.4.2 com $A(0; r, 1)$ no lugar de Σ e $\tilde{F}$ no lugar de F . Como $\partial A(0; r, 1) = \partial B_r(0) \cup \partial B_1(0)$ e $\tilde{F}$ se anula em $A(0; r, r_1)$, segue que

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial A(0; r, 1)} \left[4K_n e^{w_n} \langle \tilde{F}, \eta \rangle + 2 \langle \nabla w_n, \eta \rangle \langle \nabla w_n, \tilde{F} \rangle - |\nabla w_n|^2 \langle \tilde{F}, \eta \rangle \right] \\
&= \int_{\Lambda_0} \left[4K_n e^{w_n} \langle F, \eta \rangle + 2 \frac{\partial w_n}{\partial \eta} \langle \nabla w_n, F \rangle - |\nabla w_n|^2 \langle F, \eta \rangle \right] \\
&= \int_{\Lambda_0} \left[4K_n e^{w_n} \langle f\tau, \eta \rangle + 2 \frac{\partial w_n}{\partial \eta} \langle \nabla w_n, f\tau \rangle - |\nabla w_n|^2 \langle f\tau, \eta \rangle \right] \\
&= 2 \int_{\Lambda_0} \frac{\partial w_n}{\partial \eta} f (w_n)_\tau = 4 \int_{\Lambda_0} f \left(h_n e^{\frac{w_n}{2}} - \hat{h}_n \right) (w_n)_\tau, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

já que $\langle \tau, \eta \rangle = 0$ e w_n satisfaz (3.45).

Como F é holomorfa, F satisfaz as Equações de Cauchy-Riemann. Isso implica $\partial_1 F^1 = \partial_2 F^2$ e $\partial_2 F^1 = -\partial_1 F^2$. Usando (3.34) e o explicitado neste parágrafo, segue que

$$\begin{aligned}
DF(\nabla w_n, \nabla w_n) &= \partial_k F^i \nabla_i w_n \nabla_k w_n \\
&= \partial_1 F^1 \nabla_1 w_n \nabla_1 w_n + \partial_1 F^2 \nabla_2 w_n \nabla_1 w_n \\
&\quad + \partial_2 F^1 \nabla_1 w_n \nabla_2 w_n + \partial_2 F^2 \nabla_2 w_n \nabla_2 w_n \\
&= \partial_1 F^1 (\nabla_1 w_n \nabla_2 w_n + \nabla_2 w_n \nabla_2 w_n) = \frac{1}{2} (\partial_1 F^1 + \partial_2 F^2) |\nabla w_n|^2 \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{div} F |\nabla w_n|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$2DF(\nabla w_n, \nabla w_n) - \operatorname{div} F |\nabla w_n|^2 = 0. \tag{3.47}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \int_{A(0; r_0, 1)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, F \rangle + 4e^{w_n} (\langle \nabla K_n, F \rangle + K_n \operatorname{div} F) + 2DF(\nabla w_n, \nabla w_n) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{div} F |\nabla w_n|^2 \right] dx \\
&= \int_{A(0; r_0, 1)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, F \rangle + 4e^{w_n} (\langle \nabla K_n, F \rangle + K_n \operatorname{div} F) \right] dx. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Agora, mostraremos que

$$\int_{A(0;r_1,r_0)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, \tilde{F} \rangle + 4e^{w_n} (\langle \nabla K_n, \tilde{F} \rangle + K_n \operatorname{div} \tilde{F}) + 2D\tilde{F}(\nabla w_n, \nabla w_n) - \operatorname{div} \tilde{F} |\nabla w_n|^2 \right] dx = O(1). \quad (3.49)$$

De fato, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Hölder, a convergência C^1 de $(\hat{K}_n)_n$ e aplicando o item (c) do Lema 3.4.1 no conjunto compacto $A(0; r_1, r_0)$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{A(0;r_1,r_0)} (\hat{K}_n \langle \nabla_g w_n, \tilde{F} \rangle + 2D\tilde{F}(\nabla w_n, \nabla w_n) - 2 \operatorname{div} \tilde{F} |\nabla w_n|^2) dx \\ & \leq C \int_{A(0;r_1,r_0)} |\nabla_g w_n|^2 dx = O(1). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Além disso, desde $A(0, r_1, r_0)$ é um compacto que não intersecta $\partial\Sigma$, a Proposição 3.2.2 garante que $(w_n)_n$ é limitada em $A(0, r_1, r_0)$. Dessa forma,

$$\int_{A(0,r_1,r_0)} e^{w_n} (\langle \nabla K_n, \tilde{F} \rangle + K_n \operatorname{div} \tilde{F}) dx \leq C \int_{A(0,r_1,r_0)} e^{w_n} dx = O(1). \quad (3.51)$$

De (3.50) e (3.51) segue (3.49). Portanto, pela definição de $\tilde{F}$, por (3.48) e (3.49), temos que

$$\begin{aligned} & \int_{A(0;r,1)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, \tilde{F} \rangle + 4e^{w_n} (\langle \nabla K_n, \tilde{F} \rangle + K_n \operatorname{div} \tilde{F}) + 2D\tilde{F}(\nabla w_n, \nabla w_n) - \operatorname{div} \tilde{F} |\nabla w_n|^2 \right] dx \\ & = \int_{A(0;r_0,1)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, F \rangle + 4e^{w_n} (\langle \nabla K_n, F \rangle + K_n \operatorname{div} F) \right] dx + O(1). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aplicando o Lema 3.4.2 a $\tilde{F}$ e usando (3.46) e (3.52), obtemos que

$$\begin{aligned} 4 \int_{\Lambda_0} f \left(h_n e^{\frac{w_n}{2}} - \hat{h}_n \right) (w_n)_\tau & = \int_{A(0;r_0,1)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, F \rangle + 4e^{w_n} (\langle \nabla K_n, F \rangle + K_n \operatorname{div} F) \right] dx + O(1). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Agora, analisaremos o termo

$$\int_{A(0;r_0,1)} 4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, F \rangle dx = \int_{A(0;r_0,1)} 4\hat{K}_n \langle \nabla w_n^+ + \nabla w_n^-, F \rangle dx.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Hölder, a convergência de $\hat{K}_n$, e o Lema 3.4.1, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{A(0;r_0,1)} 4\hat{K}_n \langle \nabla w_n^-, F \rangle dx &\leq C \int_{A(0;r_0,1)} |\nabla w_n^-| dx \\ &\leq C \int_{A(0;r_0,1)} |\nabla w_n^-|^2 dx = O(1). \end{aligned}$$

Além disso, usando o Teorema 1.6.4, temos que

$$\begin{aligned} 4 \left| \int_{A(0;r_0,1)} \hat{K}_n \langle \nabla w_n^+, F \rangle dx \right| &\leq 4 \left| \int_{A(0;r_0,1)} w_n^+ \operatorname{div} (\hat{K}_n F) dx + \int_{\Lambda_0} \hat{K}_n w_n^+ \langle F, \eta \rangle dl \right| \\ &\quad + 4 \left| \int_{\{|x|=r_0\}} \hat{K}_n w_n^+ \langle F, \eta \rangle dl \right| \\ &\leq 4 \left| \int_{A(0;r_0,1)} w_n^+ \operatorname{div} (\hat{K}_n F) dx + \int_{\Lambda_0} \hat{K}_n w_n^+ \langle F, \eta \rangle dl \right| \\ &\quad + O(1). \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade segue pela Proposição 3.2.2, que nos diz que o conjunto $\{|x| = r_0\}$ não possui pontos de blow-up, já que é um compacto que não intersecta $\partial\Sigma$. Além disso, como $(K_n)_n$ converge no sentido de C^1 , $(\hat{K}_n)_n$ também converge no sentido de C^1 . Daí,

$$\begin{aligned} 4 \left| \int_{A(0;r_0,1)} \hat{K}_n \langle \nabla w_n^+, F \rangle dx \right| &\leq 4 \left| \int_{\Lambda_0} \hat{K}_n w_n^+ \langle F, \eta \rangle dl \right| + 4 \left| \int_{A(0;r_0,1)} w_n^+ \operatorname{div} (\hat{K}_n F) dx \right| \\ &\quad + O(1) \\ &\leq C \left(\int_{\Lambda_0} w_n^+ dl + \int_{A(0;r_0,1)} w_n^+ dx \right) + O(1) \\ &= o(\rho_n). \end{aligned}$$

Onde, na segunda desigualdade, usamos o mesmo argumento usado em (3.37), na demonstração da Proposição 3.5.1. Logo,

$$\int_{A(0;r_0,1)} 4\hat{K}_n \langle \nabla w_n, F \rangle dv_g = o(\rho_n). \quad (3.54)$$

Agora, para quaisquer funções suaves φ e ψ , note que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Lambda_0} \varphi \psi_\tau d\sigma_g &= \int_{\Lambda_0} \varphi \langle \nabla_g \psi, \tau \rangle d\sigma_g = \int_{\Lambda_0} \langle \varphi \nabla_g \psi, \tau \rangle d\sigma_g \\
 &= \int_{\Lambda_0} \langle \nabla_g (\varphi \psi) - \psi \nabla_g \varphi, \tau \rangle d\sigma_g \\
 &= - \int_{\Lambda_0} \psi \langle \nabla_g \varphi, \tau \rangle d\sigma_g + \int_{\Lambda_0} \langle \nabla_g (\varphi \psi), \tau \rangle d\sigma_g \\
 &= - \int_{\Lambda_0} \psi \varphi_\tau d\sigma_g + \int_{\Lambda_0} (\varphi \psi)_\tau d\sigma_g \\
 &= - \int_{\Lambda_0} \psi \varphi_\tau d\sigma_g.
 \end{aligned}$$

Onde usamos o Teorema Fundamental do Cálculo na última igualdade. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Lambda_0} f \hat{h}_n (w_n^-)_\tau d\sigma_g &= \int_{\Lambda_0} f \hat{h}_n \left(w_n^- - \oint_{\Lambda_0} w_n^- \right)_\tau d\sigma_g \\
 &= - \int_{\Lambda_0} (f \hat{h}_n)_\tau \left(w_n^- - \oint_{\Lambda_0} w_n^- \right) d\sigma_g.
 \end{aligned}$$

Daí, usando a Desigualdade de Hölder, o Lema 3.4.1 e a Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.10.6), obtemos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Lambda_0} f \hat{h}_n (w_n^-)_\tau d\sigma_g \right| &\leq C \int_{\Lambda_0} \left| w_n^- - \oint_{\Lambda_0} w_n^- \right| d\sigma_g \\
 &\leq C \int_{\Lambda_0} \left| w_n^- - \oint_{\Lambda_0} w_n^- \right|^2 d\sigma_g = O(1).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Lambda_0} f \hat{h}_n (w_n^-)_\tau d\sigma_g = O(1).$$

De maneira análoga ao feito em (3.37), segue que

$$\int_{\Lambda_0} f \hat{h}_n (w_n^+)_\tau d\sigma_g = o(\rho_n).$$

Assim,

$$\int_{\Lambda_0} f \hat{h}_n (w_n)_\tau d\sigma_g = o(\rho_n). \tag{3.55}$$

Por (3.53), (3.54) e (3.55), segue que

$$\int_{\Lambda_0} f h_n e^{\frac{w_n}{2}} (w_n)_\tau d\sigma_g = \int_{A(0:r_0,1)} e^{w_n} (\langle \nabla K_n, F \rangle + K_n \operatorname{div} F) dv_g + o(\rho_n). \quad (3.56)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_0} f h_n e^{\frac{w_n}{2}} (w_n)_\tau d\sigma_g &= 2 \int_{\Lambda_0} f h_n \left(e^{\frac{w_n}{2}} \right)_\tau d\sigma_g = -2 \int_{\Lambda_0} (f h_n)_\tau e^{\frac{w_n}{2}} d\sigma_g \\ &= -2 \int_{\Lambda_0} (f_\tau h_n + f (h_n)_\tau) e^{\frac{w_n}{2}} d\sigma_g \\ &= -2 \int_{\Lambda_0} \left(f_\tau + f \frac{(h_n)_\tau}{h_n} \right) h_n e^{\frac{w_n}{2}} d\sigma_g. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Veja que podemos considerar h_n no denominador, pois, para todo $p \in \operatorname{supp} \sigma$, $\mathfrak{D}(p) \geq 1$. Isso implica que $h(p) \geq 1$. Como a sequência $(h_n)_n$ converge para h em C^1 , podemos supor que $h_n(p) > 0$ para n suficientemente grande. Considere um referencial ortonormal $\{\tau, \eta\}$. Daí, $\operatorname{div} F = \partial_1 F^1 + \partial_2 F^2 = 2\partial_1 F^1 = 2f_\tau$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{A(0:r_0,1)} e^{w_n} (\langle \nabla K_n, F \rangle + K_n \operatorname{div} F) dv_g &= \int_{A(0:r_0,1)} (f (K_n)_\tau + 2K_n f_\tau) e^{w_n} dv_g \\ &= \int_{A(0:r_0,1)} \left(-f \frac{(K_n)_\tau}{K_n} - 2f_\tau \right) |K_n| e^{w_n} dv_g. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Onde, na última igualdade usamos que $K < 0$ e a convergência em C^1 de $(K_n)_n$ para K .

Usando (3.56), a Proposição 3.5.1 e o comentário logo acima dela, ao dividir (3.57) e (3.58) por ρ_n , e passar o limite, obtemos que

$$-2 \int_{\Lambda_0} \left(f_\tau + f \frac{h_\tau}{h} \right) d\sigma = \int_{\Lambda_0} \left(-f \frac{K_\tau}{K} - 2f_\tau \right) d\sigma.$$

Após manipulações algébricas, temos que

$$\int_{\Lambda_0} \left(2 \frac{h_\tau}{h} - \frac{K_\tau}{K} \right) f d\sigma = 0,$$

para toda função analítica $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Como o conjunto das funções analíticas é denso no conjunto das funções contínuas, segue que

$$2\frac{h_\tau}{h} - \frac{K_\tau}{K} = 0,$$

em $\text{supp } \sigma$. Através de um cálculo direto, verificamos que

$$2\frac{\mathfrak{D}_\tau}{\mathfrak{D}} = 2\frac{h_\tau}{h} - \frac{K_\tau}{K}.$$

Consequentemente,

$$\mathfrak{D}_\tau(p) = 0,$$

para todo $p \in \text{supp } \sigma$. □

3.6 Demonstração do Teorema 4

Nesta seção, consideremos as sequências $(u_n)_n$, $(x_n)_n$, $(\delta_n)_n$ e $(v_n)_n$, onde $(u_n)_n$ é uma sequência de soluções de (3.14). Assim como na Proposição 3.2.2, a sequência $(x_n)_n$ satisfaz $x_n \rightarrow 0$, com $\delta_n = e^{-\frac{x_n}{2}}$ e $v_n(x) = u_n(\delta_n x + x_n) + 2 \log \delta_n$ para $x \in \tilde{B}_n := B_{\frac{r}{2}}(x_n) \cap B_r^+(0)$. A partir dessa proposição, obtemos que $S \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) \geq 1\}$. Consequentemente, podemos decompor S como $S = S_0 \cup S_1$, onde $S_0 = S \cap \{\mathfrak{D} = 1\}$ e $S_1 = S \cap \{\mathfrak{D} > 1\}$.

Lema 3.6.1. *Assuma que a sequência $\left(\int_\Sigma e^{u_n} dv_g\right)_n$ é limitada. Então,*

$$S \subset \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) > 1\}.$$

Demonstração. Seja $p \in S$. Fazendo a mudança de variáveis $x = \delta_n y + x_n$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma e^{u_n} dv_g &\geq \int_{B_r^+(p)} e^{u_n} dv_g = \int_{B_r^+(0)} e^{u_n(x)} \sqrt{|g|(x)} dx \\ &= \int_{\tilde{B}_n} e^{u_n(\delta_n y + x_n) + 2 \log \delta_n} \sqrt{|g|(\delta_n y + x_n)} dy \\ &= \int_{\tilde{B}_n} e^{v_n(y)} \sqrt{|g_n|(y)} dy, \end{aligned} \tag{3.59}$$

onde $\tilde{B}_n = \frac{1}{\delta_n} B_{\frac{r}{2}}(x_n) \cap B_r^+(0)$, $v_n(y) = u_n(\delta_n y + x_n) + 2 \log \delta_n$ e $g_n(y) = g(\delta_n y + x_n)$. Pelo Lema de Fatou (Lema 1.11.4) segue que

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\tilde{B}_n} e^{v_n} \sqrt{|g_n|} dy &= \liminf \int_{\mathbb{R}_+^2} \chi_{\tilde{B}_n} e^{v_n} \sqrt{|g_n|} dy \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \liminf \chi_{\tilde{B}_n} e^{v_n} \sqrt{|g_n|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde v é uma solução do problema limite (3.24). Assim, por (3.59) e (3.60), temos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx \leq \int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g. \quad (3.61)$$

Suponha por absurdo que $\mathfrak{D}(p) = 1$. Então, v é da forma (1.38) dada pelo Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1). Isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx = +\infty,$$

o que, conforme a desigualdade (3.61), contradiz a hipótese de que a sequência $\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g \right)_n$ seja limitada. Portanto, $\mathfrak{D}(p) > 1$. $\square$

Os próximos lemas serão provados visando obter o resultado que será enunciado abaixo.

Proposição 3.6.2. *Seja $(u_n)_n$ uma sequência de soluções de (3.14), sob as condições do Teorema 4. Suponha que*

$$\left(\int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g \right)_n \quad \text{ou} \quad (ind(u_n))_n \quad \text{é limitada.} \quad (3.62)$$

Então, o conjunto dos pontos de blow-up S pode ser expresso como $S = S_0 \cup S_1$, com:

$$\begin{aligned} S_0 &= S \cap \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) = 1 \text{ e } \mathfrak{D}_{\tau}(p) = 0\}, \\ S_1 &= \{p_1, \dots, p_m\} = S \cap \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) > 1\}. \end{aligned}$$

Além disso, as seguintes sentenças são verdadeiras:

(a) Se $p \in S_0$, existem $\lambda_n \rightarrow +\infty$ e $x_n \rightarrow p$, tais que $d(x_n, \partial\Sigma) = o(\lambda_n)$ e

$$u_n(s, t) = v_{\lambda_n}(0, t) + o_n(1), \quad y \in B_{r\delta_n}(x_n), \quad (3.63)$$

onde v_{λ_n} é a solução dada em (1.38), $t = d(y, \partial\Sigma)$.

(b) Se $p \in S_1$, existem $(s_n, t_n) \rightarrow 0$ e $\lambda_n \rightarrow 0$ tais que

$$u_n(s, t) = 2 \log \left(\frac{2\lambda_n}{(s - s_n)^2 + (t + t_n)^2 - \lambda_n^2} \right) + O(1), \quad (3.64)$$

em $B_r^+(p) \subset \mathbb{R}_+^2$ com $d(p, p_j) > 2r$ para qualquer $j = 1, \dots, m$, com $p \neq p_j$, onde (s, t) são coordenadas isotérmicas centradas em p . Além disso,

$$\nabla_g u_n(x) = -4 \frac{x - p}{|x - p|^2} + o \left(\frac{1}{|x - p|^2} \right), \quad (3.65)$$

em $B_r^+(p) \setminus B_{\lambda_n \log \frac{1}{\lambda_n}}^+(p)$.

(c) Se $\chi_n \leq 0$ (veja (8)), então S_1 é vazio.

Para evitar repetições exaustivas, assuma as hipóteses da proposição acima nos próximos lemas.

Lema 3.6.3. *Sob as hipóteses da Proposição 3.6.2, o conjunto $S_1 = S \cap \{p \in \partial\Sigma : \mathfrak{D}(p) > 1\}$ é finito. Além disso, para cada $p \in S_1$ e para cada bolha v em p , $(\mathbb{R}_+^2, e^v \delta)$ tem volume finito.*

Demonstração. Como na demonstração da Proposição 3.5.2, pela equivalência conforme, considere a função $w_n := u_n + v_0$ que satisfaz (3.45), porém em $B_r^+(0)$, para algum $r > 0$ suficientemente pequeno. Aqui v_0 é a função dada pela equivalência conforme, isto é, $g = e^{v_0} \delta$ em $B_r^+(0)$. Defina $v_n(x) = w_n(\delta_n x + x_n) + 2 \log \delta_n$. Assim, como fizemos na Seção 1.15, cada v_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_n + 2\delta_n^2 \bar{K}_n(\delta_n x + x_n) = 2K_n(\delta_n x + x_n) e^{v_n}, & \text{em } \tilde{B}_n \\ \frac{\partial v_n}{\partial \eta} + 2\delta_n \bar{h}_n(\delta_n x + x_n) = 2h_n(\delta_n x + x_n) e^{\frac{v_n}{2}}, & \text{em } \tilde{\Gamma}_n, \end{cases}$$

onde $\bar{K}_n \in C^1(\Sigma)$ e $\bar{h}_n \in C^1(\partial\Sigma)$ são funções que convergem em C^1 . Como na demonstração da Proposição 3.2.2, a menos de uma subsequência, podemos supor que $v_n \rightarrow v$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}_+^2)$, onde v satisfaz (3.24) com $t_0 = 0$.

Lembre-se da Seção 3.1 que o índice de Morse de cada u_n é dado por

$$\text{ind}(u_n) = \sup \left\{ \dim(E) : E \subset H^1(\Sigma) \text{ e } Q_n < 0 \text{ em } E \right\},$$

onde Q_n é a forma quadrática dada por

$$Q_n(\psi) = \int_{\Sigma} \left(|\nabla_g \psi|^2 + 2|K_n| e^{u_n} \psi^2 \right) dv_g - \int_{\partial\Sigma} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \psi^2 d\sigma_g.$$

Note que (3.62) implica que $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx < \infty$ e $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} dx < \infty$. Pois, caso contrário, assim com feito em (3.61), segue do Lema de Fatou (Lema 1.11.4) que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g = +\infty.$$

Pela demonstração do item (b) do Teorema 3.1.1, podemos encontrar funções $\psi_1, \dots, \psi_{m+1}$, definidas em $\mathbb{R}_+^2$, com suportes compactos e disjuntos em $\tilde{B}_n = \frac{1}{\delta_n} B_r^+(0) \cap B_{\frac{r}{2}}^+(x_n)$, tais que

$$a_i := \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(|\nabla \psi_i|^2 + 2|K(p)| e^v \psi_i^2 \right) dx - \frac{\sqrt{|K(p)|}}{h(p)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} \psi_i^2 dl < 0,$$

para todo $i = 1, \dots, m+1$.

Defina

$$\psi_{i,n}(x) = \psi_i \left(\frac{x - x_n}{\delta_n} \right).$$

Note que, para n suficientemente grande, as funções $\psi_{i,n}$'s têm suportes compactos e disjuntos em $B_r^+(0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
Q_n(\psi_{i,n}) &= \int_{\Sigma} (|\nabla_g \psi_{i,n}|^2 + 2|K_n| e^{u_n} \psi_{i,n}^2) dv_g - \int_{\partial \Sigma} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \psi_{i,n}^2 d\sigma_g \\
&= \int_{B_r^+(p)} (|\nabla_g \psi_{i,n}|^2 + 2|K_n| e^{u_n} \psi_{i,n}^2) dv_g - \int_{\Gamma_r(p)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \psi_{i,n}^2 d\sigma_g \\
&= \int_{B_r^+(0)} (e^{-v_0(x)} |\nabla \psi_{i,n}(x)|^2 + 2|K_n(x)| e^{u_n(x)} \psi_{i,n}^2(x)) e^{v_0(x)} dx \\
&\quad - \int_{\Gamma_r(0)} h_n(x) e^{\frac{u_n(x)}{2}} \psi_{i,n}^2(x) e^{\frac{v_0(x)}{2}} dl \\
&= \int_{B_r^+(0)} (|\nabla \psi_{i,n}(x)|^2 + 2|K_n(x)| e^{w_n(x)} \psi_{i,n}^2(x)) dx \\
&\quad - \int_{\Gamma_r(0)} h_n(x) \psi_{i,n}^2(x) e^{\frac{w_n(x)}{2}} dl,
\end{aligned}$$

onde $w_n = u_n + v_0$, como observado no início desta demonstração. Fazendo $y = \frac{x - x_n}{\delta_n}$, obtemos que $x = \delta_n y + x_n$, $dx = \delta_n^2 dy$ e, no termo de fronteira, $ds = \delta_n dl$. Assim,

$$\begin{aligned}
Q_n(\psi_{i,n}) &= \int_{\tilde{B}_n} (|\nabla \psi_i(y)|^2 + 2|K_n(y\delta_n + x_n)| e^{w_n(y\delta_n + x_n) + 2 \log \delta_n} \psi_i^2(y)) dy \\
&\quad - \int_{\tilde{\Gamma}_n} h_n(y\delta_n + x_n) \psi_i^2(y\delta_n + x_n) e^{\frac{w_n(y\delta_n + x_n) + 2 \log \delta_n}{2}} ds \\
&= \int_{\tilde{B}_n} (|\nabla \psi_i(y)|^2 + 2|K_n(y\delta_n + x_n)| e^{v_n(y)} \psi_i^2(y)) dy \\
&\quad - \int_{\tilde{\Gamma}_n} h_n(y\delta_n + x_n) \psi_i^2(y\delta_n + x_n) e^{\frac{v_n(y)}{2}} ds
\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
Q_n(\psi_{i,n}) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} (|\nabla \psi_i|^2 + 2|K(p)| e^v \psi_i^2) dy - h(p) \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} \psi_i^2 ds + o_n(1) \\
&< a_i + o_n(1), \quad i = 1, \dots, m+1,
\end{aligned}$$

já que $\mathfrak{D}(p) > 1$ implica que $-h(p) < -\frac{|K(p)|}{h(p)}$. Como as funções $\psi_{i,n}$ possuem suportes compactos e disjuntos para n suficientemente grande e para $i = 1, \dots, m+1$, concluímos que $\text{ind}(u_n) \geq m+1$. Assim, como m é um número natural arbitrário, isso implica que a sequência $(\text{ind}(u_n))_n$ é ilimitada, o que contraria nossa hipótese

de que (3.62) seja verdadeira. Logo, $\mathbb{R}_+^2$ com a métrica $e^{v_p}\delta$ tem volume finito, onde v_p é o limite da sequência associada a cada ponto de blow-up $p \in S_1$.

Agora mostraremos que S_1 é finito. Inicialmente, para cada $p \in S_1$, note que

$$\frac{h(p)}{\sqrt{h^2(p) + K(p)}} = \frac{h(p)}{\sqrt{|K(p)|}} \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2(p)}{|K(p)|} - 1}} = \frac{\mathfrak{D}(p)}{\sqrt{\mathfrak{D}^2(p) - 1}}.$$

Daí, se existe uma sequência $(q_n)_n$ em S_1 tal que $\mathfrak{D}(q_n) \rightarrow 1$, o quociente acima tende a $+\infty$. Como $\mathfrak{D}$ é uma função contínua em um conjunto compacto, segue que $\mathfrak{D}$ é limitada. Dessa forma, existe $\delta > 0$ tal que

$$2\pi \left(\frac{h(p)}{\sqrt{h^2(p) + K(p)}} - 1 \right) > \delta, \quad (3.66)$$

para cada $p \in S_1$.

Pela primeira parte da demonstração deste lema, para cada $p \in S_1$, podemos considerar uma bolha v tal que o volume de Σ com a métrica $e^v\delta$ é finito. Pelo Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1), por (3.66) e através de um cálculo análogo ao usado para obter (3.61), temos

$$\liminf \int_{B_r^+(p)} |K_n| e^{u_n} dv_g \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} |K(p)| e^v dx = 2\pi \left(\frac{h(p)}{\sqrt{h^2(p) + K(p)}} - 1 \right) > \delta,$$

para algum $\delta > 0$ fixado e $r > 0$ suficientemente pequeno. Se S_1 fosse infinito, poderíamos construir uma sequência $(p_k)_k$ em S_1 . Dessa forma,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} |K_n| e^{u_n} dv_g \geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf \int_{B_{r_k}^+(p_k)} |K_n| e^{u_n} dv_g > \sum_{k=1}^{\infty} \delta = +\infty, \quad (3.67)$$

onde $r_k \rightarrow 0$ são tais que as bolas $B_{r_k}(p_k)$ são disjuntas. Porém, isso contradiz (3.62). Portanto, S_1 é finito. $\square$

O próximo resultado pode ser encontrado em [30, Lema 7.4].

Lema 3.6.4. *Seja $p \in S_1$. Então, existem constantes fixadas $C, r > 0$ tais que*

$$\int_{B_r(p) \cap \Sigma} e^{u_n} dv_g \leq C ; \quad \int_{B_r(p) \cap \partial \Sigma} e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \leq C, \quad u_n \rightarrow -\infty \text{ em } \partial B_r(p) \cap \Sigma.$$

Lema 3.6.5. *Sob as condições da Proposição 3.6.2, o comportamento assintótico dado em (3.63) e (3.64) vale. Além disso, se $\chi_n \leq 0$ (veja (8)), então S_1 é vazio.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que $p \in S_0$. Considere v_n dada por (3.18). Assim, do caso 1 da demonstração da Proposição 3.2.2, veja página 91, temos que

$$v_n \rightarrow v \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}_+^2),$$

onde v é dada por (1.38), ou seja,

$$v_\lambda(s, t) = 2 \log \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda t} \right) - \log |K(p)|, \text{ para algum } \lambda > 0.$$

Note que v_n está definida em $\tilde{B}_n = \frac{1}{\delta_n} B_{\frac{r}{2}}(x_n) \cap B_r^+(0)$. Ao realizar a mudança de variável $y = \delta_n x + x_n$, obtemos de (3.18) que

$$\begin{aligned} u_n(y) &= v_n \left(\frac{y - x_n}{\delta_n} \right) - 2 \log \delta_n = v_\lambda \left(\frac{y - x_n}{\delta_n} \right) - 2 \log \delta_n + o_n(1) \\ &= 2 \log \left(\frac{\lambda \delta_n^{-1}}{1 + \lambda \delta_n^{-1} (t - x_n^2)} \right) - \log |K(p)| + o_n(1) \\ &= 2 \log \left(\frac{\lambda \delta_n^{-1}}{1 + \lambda \delta_n^{-1} t} \right) - \log |K(p)| + o_n(1). \end{aligned}$$

Na última igualdade, utilizamos o fato de que $d(x_n, \Gamma_r(0)) = o(\delta_n)$, conforme demonstrado na Proposição 3.2.2. Dessa forma,

$$u_n(y) = v_{\lambda_n}(y) + o_n(1),$$

com $\lambda_n = \lambda \delta_n^{-1} \rightarrow +\infty$ e $y \in B_{r\delta_n}(x_n)$. O que conclui a demonstração do item (a) da Proposição 3.6.2.

Agora, considere que $p \in S_1$. Inicialmente, vamos mostrar que cada ponto de blow-up tem somente uma bolha. A princípio, observe que a quantidade de bolhas associadas a um ponto de blow-up p é finita, pois, caso contrário, com um argumento análogo ao usado em (3.67), teríamos que

$$\liminf \int_{\Sigma} e^{u_n} dv_g = +\infty,$$

o que contradiz (3.62). Assim, a quantidade de bolhas associadas é finita. Vamos mostrar que há somente uma bolha associada a cada ponto de blow-up $p \in S_1$.

Em uma vizinhança de p , a métrica g pode ser escrita como $g = e^v \delta$, onde δ é a métrica Euclidiana. Assim como em (3.45), podemos considerar que u_n está definida no conjunto $B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica canônica, onde p é associado à origem, e satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\Delta u_n + 2\hat{K}_n = 2K_n e^{u_n}, & \text{em } B_r^+(0) \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + 2\hat{h}_n = 2h_n e^{\frac{u_n}{2}}, & \text{em } \Gamma_r(0), \end{cases} \quad (3.68)$$

onde as seqüências $(\hat{K}_n)_n$ e $(\hat{h}_n)_n$ convergem para funções $\hat{K} \in C^\infty(B_r^+(0))$ e $\hat{h} \in C^\infty(\partial B_r^+(0))$, respectivamente.

Seja $m \in \mathbb{N}$ a quantidade de bolhas associadas a p . Por (1.41) dada pelo Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1), temos que

$$\int_{B_r^+(p)} |K_n| e^{u_n} dv_g \rightarrow m\beta \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_r(p)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g \rightarrow m(\beta + 2\pi), \quad (3.69)$$

onde

$$\beta = 2\pi \left(\frac{h(p)}{\sqrt{h^2(p) + K(p)}} - 1 \right).$$

Escolha $r > 0$ tal que $B_r^+(0) \cap S = \{0\}$. Aplicando o Lema 3.4.2, com $F(x) = x$ em $B_r^+(0)$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_r^+(0)} \left[4K_n e^{u_n} \langle x, \nu \rangle + 2 \langle \nabla u_n, x \rangle \langle \nabla u_n, \nu \rangle - |\nabla u_n|^2 \langle x, \nu \rangle \right] dx \\ &= \int_{B_r^+(0)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla u_n, x \rangle + 8K_n e^{u_n} + 4 \langle \nabla K_n, x \rangle e^{u_n} \right] dx. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pois, neste caso, $DF(\nabla u_n, \nabla u_n) = |\nabla u_n|^2$ e $\text{div } F = 2$. Agora, vamos decompor a integral na fronteira em $\Gamma_r(0)$ e $\partial^+ B_r(0)$. Para isso, note que, em $\Gamma_r(0)$, temos que $\langle x, \nu \rangle = 0$ e $\eta = \nu$. Usando (3.68), obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_r(0)} \left[4K_n e^{u_n} \langle x, \nu \rangle + 2 \langle \nabla u_n, x \rangle \langle \nabla u_n, \nu \rangle - |\nabla u_n|^2 \langle x, \nu \rangle \right] dl \\
&= 2 \int_{\Gamma_r(0)} \langle \nabla u_n, x \rangle \frac{\partial u_n}{\partial \eta} dl \\
&= 4 \int_{\Gamma_r(0)} \left[h_n e^{\frac{u_n}{2}} \langle \nabla u_n, x \rangle - \hat{h}_n \langle \nabla u_n, x \rangle \right] dl. \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Além disso, como $x = r\nu$ em $\partial^+ B_r(0)$, neste caso, temos que $\langle x, \nu \rangle = r$. Daí,

$$\langle \nabla u_n, \nu \rangle \langle \nabla_g u_n, x \rangle = \left\langle \nabla u_n, \frac{x}{r} \right\rangle \langle \nabla_g u_n, x \rangle = \frac{\langle \nabla u_n, x \rangle^2}{r} = r \left(\frac{\langle \nabla u_n, x \rangle}{r} \right)^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial^+ B_r(0)} \left[4K_n e^{u_n} \langle x, \nu \rangle + 2 \langle \nabla u_n, x \rangle \langle \nabla u_n, \nu \rangle - |\nabla u_n|^2 \langle x, \nu \rangle \right] dl \\
&= r \int_{\partial^+ B_r(0)} \left[4K_n e^{u_n} + 2 \left(\frac{\langle \nabla u_n, x \rangle}{r} \right)^2 - |\nabla u_n|^2 \right] dl. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Por (3.70), (3.71) e (3.72), segue que

$$\begin{aligned}
& 4 \int_{\Gamma_r(0)} \left[h_n e^{\frac{u_n}{2}} \langle \nabla u_n, x \rangle - \hat{h}_n \langle \nabla u_n, x \rangle \right] dl \\
&+ r \int_{\partial^+ B_r(0)} \left[4K_n e^{u_n} + 2 \left(\frac{\langle \nabla u_n, x \rangle}{r} \right)^2 - |\nabla u_n|^2 \right] dl \\
&= \int_{B_r^+(0)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla u_n, x \rangle + 8K_n e^{u_n} + 4 \langle \nabla K_n, x \rangle e^{u_n} \right] dx. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Desde que $(K_n)_n$ é limitada e $|x| \leq r$ em $B_r^+(0)$, segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e do Lema 3.6.4 que

$$\int_{B_r^+(0)} \langle \nabla K_n, x \rangle e^{u_n} \leq r \int_{B_r^+(0)} |\nabla K_n| e^{u_n} dx = O(r). \tag{3.74}$$

Analogamente, obtemos que

$$\int_{\Gamma_r(0)} \langle \nabla h_n, x \rangle e^{\frac{u_n}{2}} dl = O(r). \tag{3.75}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
4 \int_{\Gamma_r(0)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \langle \nabla u_n, x \rangle &= 8 \int_{\Gamma_r(0)} h_n \langle \nabla e^{\frac{u_n}{2}}, x \rangle dl \\
&= 8 \int_{\Gamma_r(0)} h_n \left(\operatorname{div} \left(e^{\frac{u_n}{2}} x \right) - e^{\frac{u_n}{2}} \right) dl \\
&= 8 \int_{\Gamma_r(0)} h_n \operatorname{div} \left(e^{\frac{u_n}{2}} x \right) dl - 8 \int_{\Gamma_r(0)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} dl \\
&= \left[8 h_n e^{\frac{u_n}{2}} x_1 \right]_{-r}^r - 8 \int_{\Gamma_r(0)} \langle \nabla h_n, x \rangle e^{\frac{u_n}{2}} dl \\
&\quad - 8 \int_{\Gamma_r(0)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} dl.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Onde, na última igualdade, utilizamos o Teorema da Divergência 1.6.4. Além disso, o Lema 3.6.4 nos diz que $u_n \rightarrow -\infty$ em $\partial^+ B_r(0)$. Daí,

$$\left[h_n e^{\frac{u_n}{2}} x_1 \right]_{-r}^r \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial^+ B_r(0)} K_n e^{u_n} dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \tag{3.77}$$

Da teoria de equações diferenciais parciais, existem funções v_n tais que

$$\begin{cases} -\Delta v_n + 2\hat{K}_n = 2K_n e^{u_n}, & \text{em } B_r^+(0) \\ \frac{\partial v_n}{\partial \eta} + 2\hat{h}_n = 2h_n e^{\frac{u_n}{2}}, & \text{em } \Gamma_r(0) \\ v_n = 0, & \text{em } \partial^+ B_r(0). \end{cases} \tag{3.78}$$

Defina $w_n = u_n - v_n - \inf_{\partial^+ B_r(0)} u_n$. De (3.68) e (3.78), segue que

$$\begin{cases} \Delta w_n = 0, & \text{em } B_r^+(0) \\ \frac{\partial w_n}{\partial \eta} = 0, & \text{em } \Gamma_r(0) \\ w_n = u_n - \inf_{\partial^+ B_r(0)} u_n, & \text{em } \partial^+ B_r(0). \end{cases}$$

Pela fórmula de representação de Green para v_n (ver demonstração do Teorema 1.6 em [3]), sabemos que

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{B_r^+(0)} \log |x - y| \left(2K_n(y) e^{u_n(y)} - 2\hat{K}_n(y) \right) dy \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_r(0)} \log |x - y| \left(2h_n(y) e^{\frac{u_n(y)}{2}} - 2\hat{h}_n(y) \right) dy + G_n(x),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

onde $(G_n(x))_n$ é uniformemente limitada.

Agora, defina a função

$$\phi_n = u_n - \inf_{B_r^+(0)} u_n, \text{ em } B_r^+(0). \quad (3.80)$$

Note que $\phi_n \geq 0$. Pelo item (c) do Lema 3.4.1 e pela representação de Green para ϕ_n , temos que

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{B_r^+(0)} \log |x-y| \left(2K_n(y)e^{u_n(y)} - 2\hat{K}_n(y) \right) dy \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_r(0)} \log |x-y| \left(2h_n(y)e^{u_n(y)} - 2\hat{h}_n(y) \right) dy + O(1). \end{aligned}$$

Usando a ideia da demonstração do Teorema 1.6 em [3], mais especificamente, no Passo 2, que usa o Princípio do Máximo e uma fórmula de representação de Green, e usando o Passo 3 da demonstração deste mesmo Teorema, conclui-se que

$$\phi_n \rightarrow \phi := -4\tilde{m} \log |x| + \varphi \text{ uniformemente em } C^2(B_r^+(0) \setminus \{0\}),$$

onde $\varphi \in C^2(B_r^+(0))$. Segue da definição de ϕ_n em (3.80) que $\nabla u_n = \nabla \phi_n$. Dessa forma, derivando a expressão acima e usando a convergência uniforme em $C^2(B_r^+(0) \setminus \{0\})$, obtemos que

$$\nabla u_n = \nabla \phi_n \rightarrow -4m \frac{x}{|x|^2} + \nabla \varphi.$$

Daí,

$$\langle \nabla u_n, x \rangle \rightarrow -4m + \langle \nabla \varphi, x \rangle. \quad (3.81)$$

e

$$|\nabla u_n|^2 \rightarrow \frac{16m^2}{r^2} - \frac{8m}{r^2} \langle x, \varphi \rangle + |\nabla \varphi|^2 = \frac{16m^2}{r^2} + O(r^{-1}).$$

Consequentemente,

$$r \int_{\partial^+ B_r(0)} |\nabla u_n|^2 dl = 16m^2\pi + O(r). \quad (3.82)$$

Aqui, utilizamos que o comprimento de $\partial^+ B_r(0)$ é igual a πr . Outra consequência de (3.81) é que

$$\left(\frac{\langle \nabla u_n, x \rangle}{r} \right)^2 \rightarrow \frac{16m^2}{r^2} - \frac{8m}{r^2} \langle \nabla \varphi, x \rangle + \frac{\langle \nabla \varphi, x \rangle^2}{r^2} = \frac{16m^2}{r^2} + O(r^{-1}).$$

Donde segue que

$$2r \int_{\partial^+ B_r(0)} \left(\frac{\langle \nabla u_n, x \rangle}{r} \right)^2 dl = 32m^2\pi + O(r). \quad (3.83)$$

Novamente, utilizamos que o comprimento de $\partial^+ B_r(0)$ é igual a πr para obter a expressão acima.

Como $(\hat{K}_n)_n$ e $(\hat{h}_n)_n$ são limitadas, e $|x| \leq r$ em $\partial B_r^+(0)$, podemos usar (3.81) para inferir que

$$\int_{B_r^+(0)} \hat{K}_n \langle \nabla u_n, x \rangle dx \leq Cr = O(r). \quad (3.84)$$

E também,

$$\int_{\Gamma_r(0)} \hat{h}_n \langle \nabla u_n, x \rangle dx = O(r). \quad (3.85)$$

Substituindo (3.76) em (3.73), temos que

$$\begin{aligned} & \left[8h_n e^{\frac{u_n}{2}} x_1 \right]_{-r}^r - 8 \int_{\Gamma_r(0)} \langle \nabla h_n, x \rangle e^{\frac{u_n}{2}} dl - 8 \int_{\Gamma_r(0)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} dl - 4 \int_{\Gamma_r(0)} \hat{h}_n \langle \nabla u_n, x \rangle dl \\ & + r \int_{\partial^+ B_r(0)} \left[4K_n e^{u_n} + 2 \left(\frac{\langle \nabla u_n, x \rangle}{r} \right)^2 - |\nabla u_n|^2 \right] dl \\ & = \int_{B_r^+(0)} \left[4\hat{K}_n \langle \nabla u_n, x \rangle + 8K_n e^{u_n} + 4 \langle \nabla K_n, x \rangle e^{u_n} \right] dx. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$ segue de (3.69), (3.74), (3.75), (3.76), (3.77), (3.82), (3.83), (3.84) e (3.85) que

$$16m^2\pi - 8(\beta + 2\pi)m = -8\beta m.$$

Assim, $m(m-1) = 0$. Como o item (b) do Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1) garante a existência de ao menos uma bolha, concluímos que $m = 1$. Portanto, para cada ponto de blow-up $p \in S_1$, há somente uma bolha.

Estamos agora preocupados com estimativas pontuais para as funções u_n , ou seja, (3.64). Para isso, basta seguir os argumentos para a demonstração do Teorema 1.6 em [3], que utiliza a fórmula de representação de Green e uma identidade de tipo de Pohozaev. Levando em conta o problema limite dado em (3.24) com $t_0 = 0$, para a função v_n definida em (3.18), obtém-se

$$v_n(s, t) = 2 \log \left(\frac{2\lambda}{(s - s_0)^2 + (t + t_0)^2 - \lambda_0^2} \right) + O(1).$$

Lembre-se que v_n está definida em $\tilde{B}_n = \frac{1}{\delta_n} B_{\frac{r}{2}}(x_n) \cap B_r^+(0)$. Através da mudança de variáveis $y = \delta_n x + x_n$, de (3.18), temos que

$$\begin{aligned} u_n(y) &= v_n \left(\frac{y - x_n}{\delta_n} \right) - 2 \log \delta_n = v_\lambda \left(\frac{y - x_n}{\delta_n} \right) - 2 \log \delta_n + O(1) \\ &= 2 \log \left(\frac{2\lambda \delta_n^{-1}}{(\frac{y^1 - x_n^1}{\delta_n} - s_0)^2 + (\frac{y^2 - x_n^2}{\delta_n} + t_0)^2 - \lambda^2} \right) + O(1) \\ &= 2 \log \left(\frac{2\lambda \delta_n}{(y_1 - x_n^1 - \delta_n s_0)^2 + (y^2 - x_n^2 + \delta_n t_0)^2 - (\delta_n \lambda_0)^2} \right) + O(1), \end{aligned}$$

onde $\left(\frac{y^1 - x_n^1}{\delta_n}, \frac{y^2 - x_n^2}{\delta_n} \right) := \frac{y - x_n}{\delta_n}$ e $\lambda > 0$. Como $x_n = (x_n^1, x_n^2) \rightarrow 0$, temos que

$$u_n(y) = 2 \log \frac{2\lambda_n}{(s - s_n)^2 + (t + t_n)^2 - \lambda_n^2} + O(1),$$

com $s_n = x_n^1 + \delta_n s_0$, $t_n = -x_n^2 + \delta_n t_0$, $\lambda_n = \delta_n \lambda_0$ e $y = (s, t) \in B_{r\delta_n}^+(0)$. Desta forma, obtemos (3.64). Como s_n , t_n e δ_n tendem a zero, com δ_n^2 tendendo a zero mais rápido que δ_n , segue que

$$u_n(y) = 2 \log \frac{2\lambda_n}{|y|^2} + O(1), \quad (3.86)$$

para $|y| \geq \delta_n \log \frac{1}{\delta_n}$. Note que, se $|y| \geq \delta_n \log \frac{1}{\delta_n}$, então $\frac{\lambda_n}{|y|^2} \leq \frac{\lambda}{\log \delta_n^{-1}} \rightarrow 0$. Onde segue que

$$u_n(y) \rightarrow -\infty, \text{ em } B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0).$$

Ou seja, para n suficientemente, $u_n < 0$ em $B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)$.

A estimativa do gradiente de u_n é obtida seguindo a mesma ideia usada para concluir (3.86). Dessa forma, conclui-se que

$$\nabla u_n(y) = -4 \frac{y}{|y|^2} + o\left(\frac{1}{|y|^2}\right), \text{ em } B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0). \quad (3.87)$$

O que prova (3.65).

Por fim, mostraremos o item (c) da Proposição 3.6.2. Suponha por absurdo que existe $p \in S_1$. Desde que $u_n < 0$ em $B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)$, obtemos de (3.87) que

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)} |\nabla u_n^-|^2 dy &= \int_{B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)} |\nabla u_n|^2 dy \\ &= \int_{B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)} \left[\frac{16}{|y|^2} + o\left(\frac{1}{|y|^3}\right) + o\left(\frac{1}{|y|^4}\right) \right] dx, \end{aligned}$$

onde o termo de ordem $o\left(\frac{1}{|y|^4}\right)$ é não negativo. Daí, escolha n_0 suficientemente grande, de modo que $o\left(\frac{1}{|y|^4}\right) + o\left(\frac{1}{|y|^3}\right) \geq 0$ em $B_{\delta_{n_0} \log \frac{1}{\delta_{n_0}}}^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)$, para $n > n_0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)} |\nabla u_n^-|^2 dy &\geq 16 \int_{B_r^+(0) \setminus B_{\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}}^+(0)} \frac{1}{|y|^2} dy \\ &\quad + \int_{B_r^+(0) \setminus B_{\delta_{n_0} \log \frac{1}{\delta_{n_0}}}^+(0)} \left[o\left(\frac{1}{|y|^4}\right) + o\left(\frac{1}{|y|^3}\right) \right] dx \\ &\geq -16\pi \log\left(\delta_n \log \frac{1}{\delta_n}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{B_r^+(0)} |\nabla u_n^-|^2 dx \rightarrow +\infty.$$

Mas isso contradiz o item (b) do Lema 3.4.1, caso $\chi_n \leq 0$. Neste caso, S_1 é vazio. $\square$

Com o lema a seguir, concluímos a demonstração da Proposição 3.6.2.

Lema 3.6.6. *Se $p \in S_0$, então $\mathfrak{D}_\tau(p) = 0$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $p \in S_0$ tal que $\mathfrak{D}_\tau(p) \neq 0$. Neste caso, $p \in \partial\Sigma$ é um ponto isolado de S_0 . Pelo Lema 3.6.3, temos que S_1 é finito. Dessa forma, existe $r > 0$ tal que $B_r^+(p) \cap S = \{p\}$. Em uma vizinhança de p , temos que $g = e^w \delta$, onde δ é a métrica Euclidiana. Dessa forma, o problema passa a ser no conjunto $B_r^+(0) \subset \mathbb{R}_+^2$ com a métrica canônica, de modo que a origem é o único ponto de blow-up em $B_r^+(0)$. Pelo Teorema de Classificação (Teorema 1.15.1), temos que cada bolha v dos pontos de S_0 são da forma (1.38). Daí,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v dx = +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{\frac{v}{2}} dl = +\infty.$$

Isso implica que $\rho_n \rightarrow +\infty$, onde ρ_n é definido como

$$\rho_n = \int_{\Gamma_r(p)} h_n e^{\frac{u_n}{2}} d\sigma_g = \int_{B_r^+(p)} |K_n| e^{u_n} dv_g + O(1) \rightarrow \infty.$$

De maneira análoga ao que foi feito no início da Seção 3.5, considere uma medida unitária positiva σ definida em $\Gamma_r(p)$, de modo que $\rho_n^{-1} h_n e^{\frac{u_n}{2}} \rightharpoonup \sigma$, no sentido de medida. Daí, seguindo como na demonstração da Proposição 3.5.2, mas agora restringido-se ao conjunto $B_r^+(p)$, onde p é o único ponto de blow-up desse conjunto, obtêm-se que

$$\text{supp } \sigma \subset \{q \in \Gamma_r(p) : \mathfrak{D}_\tau(q) = 0\}.$$

Também sabemos que $\text{supp } \sigma \subset S$. Assim,

$$\text{supp } \sigma \subset S \cap \{q \in \Gamma_r(p) : \mathfrak{D}_\tau(q) = 0\}.$$

Como σ é uma medida unitária positiva e p é o único ponto de blow-up de $\Gamma_r(p)$, segue que $\text{supp } \sigma = \{p\}$. Portanto, $\mathfrak{D}_\tau(p) = 0$. $\square$

Como a demonstração do Teorema 4 está bastante dispersa neste capítulo, vamos a resumir citando os principais resultados que resultaram neste teorema.

Demonstração do Teorema 4. A Proposição 3.2.2 implica o item (a). O item (b) segue do Lema 3.6.1 e da demonstração do Lema 3.6.5, mais especificamente, de

um argumento análogo ao usado em (3.69). Obtemos o item (c) da discussão feita na Seção 3.5, mais especificamente, das Proposições 3.5.1 e 3.5.2. A Proposição 3.6.2 finaliza a demonstração do Teorema 4 fornecendo o item (d). $\square$

Referências

- [1] Ambrosetti, A., and Malchiodi, A. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, vol. 104. Cambridge university press, 2007. Citado na página 43.
- [2] Aubin, T. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Science & Business Media, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- [3] Bao, J., Wang, L., and Zhou, C. Blow-up analysis for solutions to neumann boundary value problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 418, 1 (2014), 142–162. Citado 3 vezes nas páginas 119, 120 e 122.
- [4] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 24.
- [5] Berger, M. S. Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds. *J. Differential Geometry* 5 (1971), 325–332. Citado na página 2.
- [6] Borer, F., Galimberti, L., and Struwe, M. “Large” conformal metrics of prescribed Gauss curvature on surfaces of higher genus. *Comment. Math. Helv.* 90, 2 (2015), 407–428. Citado na página 2.
- [7] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012. Citado na página 23.
- [8] Costa, D. G. *An invitation to variational methods in differential equations*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Citado na página 43.
- [9] Cruz Blázquez, S., et al. Curvature prescription problems on manifolds with boundary. *Tese de Doutorado* (2020). Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- [10] Cruz-Blázquez, S., Malchiodi, A., and Ruiz, D. Conformal metrics with prescribed scalar and mean curvature. *J. Reine Angew. Math.* 789 (2022), 211–251. Citado na página 2.

- [11] Da Silva Gomes, D. Existência e análise de blow-up de métricas conformes com curvaturas escalar e média prescritas. Master's thesis, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, Brasil, Agosto 2024. Citado na página 2.
- [12] De Oliveira Rodrigues, L. Curvatura gaussiana prescrita em superfícies com característica de euler negativa. Master's thesis, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, Brasil, Setembro 2024. Citado na página 2.
- [13] Ding, W. Y., and Liu, J. Q. A note on the problem of prescribing Gaussian curvature on surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 347, 3 (1995), 1059–1066. Citado na página 2.
- [14] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*, 5 ed. Projeto Euclides. [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 19.
- [15] Dupaigne, L. *Stable solutions of elliptic partial differential equations*, vol. 143 of *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2011. Citado na página 80.
- [16] Evans, L. C. *Partial differential equations*, second ed., vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Citado na página 24.
- [17] Fang, G., and Ghoussoub, N. Second order information on palais-smale sequences in the mountain pass theorem. *Manuscripta mathematica* 75, 1 (1992), 81–95. Citado na página 44.
- [18] Gálvez, J. A., and Mira, P. The Liouville equation in a half-plane. *J. Differential Equations* 246, 11 (2009), 4173–4187. Citado na página 47.
- [19] Gilbarg, D., and Trudinger, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*, vol. Vol. 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Citado na página 98.

- [20] Jeanjean, L. On the existence of bounded palais–smale sequences and application to a landesman–lazer-type problem set on $\mathbb{R}^n$. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 129, 4 (1999), 787–809. Citado na página 44.
- [21] Jiménez, A. The Liouville equation in an annulus. *Nonlinear Anal.* 75, 4 (2012), 2090–2097. Citado na página 93.
- [22] Kazdan, J. L. Deformation to positive scalar curvature on complete manifolds. *Math. Ann.* 261, 2 (1982), 227–234. Citado na página 2.
- [23] Kazdan, J. L., and Warner, F. W. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math. (2)* 99 (1974), 14–47. Citado na página 2.
- [24] Kazdan, J. L., and Warner, F. W. A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions. *Invent. Math.* 28 (1975), 227–230. Citado na página 2.
- [25] Kazdan, J. L., and Warner, F. W. Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures. *Ann. of Math. (2)* 101 (1975), 317–331. Citado na página 2.
- [26] Kazdan, J. L., and Warner, F. W. Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure. *J. Differential Geometry* 10 (1975), 113–134. Citado na página 2.
- [27] Lee, J. M. *Riemannian manifolds*, vol. 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.
- [28] Lee, J. M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, vol. 176. Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 15.
- [29] Lieberman, G. M. *Oblique derivative problems for elliptic equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013. Citado na página 98.

- [30] López-Soriano, R., Malchiodi, A., and Ruiz, D. Conformal metrics with prescribed Gaussian and geodesic curvatures. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 55, 5 (2022), 1289–1328. Citado 12 vezes nas páginas 6, 7, 2, 3, 4, 5, 8, 44, 63, 68, 77 e 115.
- [31] Osgood, B., Phillips, R., and Sarnak, P. Extremals of determinants of laplacians. *Journal of functional analysis* 80, 1 (1988), 148–211. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 22.
- [32] Struwe, M. *Variational methods*, fourth ed., vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Citado na página 89.
- [33] Zhang, L. Classification of conformal metrics on $\mathbb{R}_+^2$ with constant Gauss curvature and geodesic curvature on the boundary under various integral finiteness assumptions. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 16, 4 (2003), 405–430. Citado na página 47.