

Thalyson Issac de Jesus Brito

**GERAÇÃO DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES
PARA ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO POR
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DISCRETA VIA
MÉTODO *GROUND STRUCTURE***

São Cristóvão, Sergipe

Fevereiro de 2026

Thalyson Issac de Jesus Brito

**GERAÇÃO DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES PARA
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO POR OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA DISCRETA VIA MÉTODO *GROUND STRUCTURE***

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe como cumprimento parcial dos requisitos para o grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientação:

Profa. Dra. Nilma Fontes de Araújo Andrade

Coorientação:

Profa. Dra. Rejane Martins Fernandes Canha

São Cristóvão, Sergipe

Fevereiro de 2026

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

B862g Brito, Thalyson Issac de Jesus.
Geração de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado por otimização topológica discreta via método *ground structure* / Thalyson Issac de Jesus Brito; orientadora Nilma Fontes de Araújo Andrade . – São Cristóvão, SE, 2026.
85 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, 2026.

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Construção subterrânea. 4. Otimização matemática. 5. Funções convexas. I. Andrade, Nilma Fontes de Araújo, orient. II. Título.

CDU 6241.012.45

RESUMO

O Modelo de Bielas e Tirantes (STM) é amplamente utilizado no dimensionamento de estruturas de concreto armado em Regiões-D, nas quais a hipótese de distribuição linear de deformações não é válida. Tradicionalmente, a definição do STM depende da interpretação subjetiva do fluxo de forças pelo engenheiro, o que pode conduzir a soluções conservadoras ou pouco eficientes. Nesse contexto, esta dissertação investiga o uso da otimização topológica discreta, via Método *Ground Structure*, como ferramenta auxiliar para a geração automatizada de modelos de bielas e tirantes. A metodologia emprega um modelo material bilinear que diferencia o comportamento em tração e compressão, associado a filtros discretos e geométricos para obtenção de topologias simplificadas e diretamente interpretáveis. Foram analisados cinco exemplos numéricos: uma viga biapoiada, utilizada como problema de referência, uma viga contínua e três estruturas representativas de Regiões-D — uma parede de cisalhamento acoplada, uma viga-parede com abertura e uma viga com extremidade entalhada. Os resultados demonstram que o método é capaz de identificar os mecanismos fundamentais de transferência de carga, produzindo modelos de bielas e tirantes fisicamente coerentes e compatíveis com soluções da literatura. A aplicação de filtros separados para elementos tracionados e comprimidos mostrou que a sensibilidade da topologia ótima depende da natureza estrutural do problema, permitindo explorar soluções alternativas sem comprometer a viabilidade estrutural. Conclui-se que a otimização topológica discreta via Método *Ground Structure* constitui ferramenta promissora para auxiliar a concepção de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado.

Palavras-chave: Concreto Armado; Regiões-D; Otimização Topológica; Método *Ground Structure*; Modelo de Bielas e Tirantes.

ABSTRACT

The Strut-and-Tie Model (STM) is widely used for the design of reinforced concrete structures in D-regions, where the assumption of linear strain distribution is no longer valid. Traditionally, the definition of a STM relies heavily on the engineer's experience and subjective interpretation of force flow, which may lead to conservative or inefficient solutions. In this context, this dissertation investigates the use of discrete topology optimization, based on the Ground Structure Method, as an auxiliary tool for the automated generation of strut-and-tie models. The proposed approach employs a bilinear material model that distinguishes between tensile and compressive behavior, combined with discrete and geometric filtering techniques to obtain simplified and directly interpretable topologies. Five numerical examples were analyzed: a simply supported beam used as a reference problem, a continuous beam and three structures representative of D-regions — a coupled shear wall, a deep beam with an opening, and a dapped beam. The results show that the method successfully identifies the fundamental load transfer mechanisms, producing physically consistent strut-and-tie models that are in good agreement with solutions reported in the literature. The application of separate filters for tension and compression elements revealed that the sensitivity of the optimal topology depends on the structural nature of the problem, allowing the exploration of alternative layouts without compromising structural feasibility. The study concludes that discrete topology optimization via the Ground Structure Method is a promising tool to support the design of strut-and-tie models in reinforced concrete structures.

Keywords: Reinforced Concrete; D-Regions; Topology Optimization; Ground Structure Method; Strut-and-Tie Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Identificação de regiões-B e regiões-D em um pórtico de concreto armado.	6
Figura 2: Problema de otimização estrutural.	8
Figura 3: a) função convexa; b) função não-convexa.	11
Figura 4: Problema de otimização estrutural dimensional.	12
Figura 5: Domínio de projeto estrutural com o contorno.	13
Figura 6: Otimização topológica de uma treliça.	14
Figura 7: Otimização topológica de uma viga biapoiada.	15
Figura 8: Microestrutura retangular.	17
Figura 9: Exemplos de discretizações do domínio de projeto ou <i>ground structure</i>	23
Figura 10: Principais etapas do procedimento de elementos finitos.	34
Figura 11: Elementos típicos.	35
Figura 12: Elemento de uma treliça plana.	36
Figura 13: Estrutura com apoio elástico na extremidade.	37
Figura 14: Estrutura com apoio inclinado.	38
Figura 15: Diferentes elementos de uma viga simétrica de concreto armado... ..	40
Figura 16: Relação tensão-deformação do modelo material bilinear.	42
Figura 17: Fluxograma do algoritmo de otimização estrutural.	47
Figura 18: Efeito do filtro geométrico na uniformização da topologia:.	54
Figura 19: a) malha base 2D para a viga biapoiada; b) malha <i>ground structure</i> inicial.	55
Figura 20: Resultados para viga biapoiada considerando diferentes condições de suporte.	57
Figura 21: a) malha base 2D para a viga contínua; b) malha <i>ground structure</i> inicial.	60
Figura 22: Resultados para viga contínua considerando diferentes condições de suporte	61
Figura 23: a) malha base 2D para a parede de cisalhamento acoplada;.....	63
Figura 24: Resultados para a parede de cisalhamento acoplada:.....	64
Figura 25: Viga-parede com abertura.	66
Figura 26: a) malha base 2D para a viga-parede com abertura;	67
Figura 27: Resultados para a viga-parede com abertura: (a) filtro único;	68
Figura 28: a) malha base 2D para a viga com extremidade entalhada;.	70
Figura 29: Resultados para a viga com extremidade entalhada:	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resultados para a viga biapoiada.	56
Tabela 2: Resultados para a viga contínua.	60
Tabela 3: Resultados para a parede de cisalhamento acoplada.	64
Tabela 4: Resultados para a viga-parede com abertura.....	67
Tabela 5: Resultados para a viga com extremidade entalhada.	70

LISTA DE SÍMBOLOS

α_f – Limiar do filtro discreto	Φ – Função de problema de otimização sem restrições
α_{fis} – Fator de redução devido a fissuração	$\mathbf{I}$ – Matriz identidade
$\alpha_{f,T}$ – Limiar do filtro discreto para elementos em tração	$\mathbf{K}$ – Matriz de rigidez global do sistema
$\alpha_{f,c}$ – Limiar do filtro discreto para elementos em compressão	γ – Parâmetro de passo (<i>move parameter</i>)
α_{Top} – Métrica de uniformidade estrutural	$\mathcal{L}$ - Função Lagrangiana
C – Flexibilidade estrutural/ <i>Complaine</i>	Lvl – Nível de conectividade da malha <i>ground structure</i> inicial
$\hat{C}$ – Aproximação da flexibilidade estrutural	λ – Parâmetro da regularização de Tikhonov
$\mathbf{C}$ – Matriz de restrições (MPC)	$\ln(\cdot)$ – Logaritmo natural
∂ – Derivada parcial	M – Limite de passo (<i>move limit</i>)
E – Energia de deformação	μ – Parâmetro de penalização para MPCs
E – Módulo de elasticidade	η – Fator de amortecimento
E_{ci} – Módulo de elasticidade inicial do concreto íntegro	Ω – Potencial das cargas externas
E_T – Módulo de elasticidade em tração	Π – Energia potencial total
E_C – Módulo de elasticidade em compressão	Π_R – Energia potencial total regularizada
ε – Deformação	R – Resíduo global normalizado
ε_i – Parâmetro da aproximação exponencial	ρ – Densidade variável
$\mathbf{F}$ – Vetor de forças	ϱ – Tolerância de equilíbrio
f_C – Multiplicador de ajuste para elementos em compressão	σ_i – Tensão axial da barra i
f_{ck} – Resistência do concreto à compressão	σ – Tensão
f_{ct} – Resistência do concreto à tração	tol – Tolerância de convergência prescrita
f_T – Multiplicador de ajuste para elementos em tração	$\mathbf{u}$ – Vetor de deslocamentos
φ – Conjunto de graus de liberdade	V^{max} – Volume máximo
ϕ – Multiplicador de Lagrange	$volfrac$ – Fração de volume
	$\mathbf{x}$ – Vetor de áreas seccionais
	y_i – Variável intermediária exponencial

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.2 JUSTIFICATIVA	3
1.3 OBJETIVOS	4
1.3.1 Objetivo geral	4
1.3.2 Objetivos específicos.....	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 CONCRETO ARMADO E REGIÕES DE DESCONTINUIDADE	5
2.1.1 Características do Concreto Armado.....	5
2.1.2 Regiões-B e Regiões-D	5
2.1.3 Desafios no Dimensionamento de Regiões-D.....	7
2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	8
2.2.1 Representação Matemática Geral de um Problema de Otimização Estrutural.....	9
2.2.2 Funções Convexas e Problemas Convexos	10
2.2.3 Classificação dos Problemas de Otimização Estrutural	12
2.3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	13
2.3.1 Método da Homogeneização	16
2.3.2 Método SIMP	17
2.3.3 Otimização Estrutural Evolucionária	19
2.3.4 Algoritmos Genéticos	20
2.4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DISCRETA	21
2.4.1 Método <i>Ground Structure</i>	22
2.4.2 Formulação Elástica Simultânea e Aninhada para o Método <i>Ground Structure</i>	24
2.4.3 Formulação Plástica para o Método <i>Ground Structure</i>	26
2.5 MÉTODOS DE CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE	26
2.6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	30
2.7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	32
2.7.1 Breve Histórico.....	32
2.7.2 Definição do Método dos Elementos Finitos	33
2.7.3 Elementos Lineares Típicos para a Otimização Estrutural.....	34
2.7.4 Formulação do Método dos Elementos Finitos para Elementos de Treliça	35
2.7.5 Apoios Elásticos	37
2.7.6 Apoios Inclinados.....	38
2.8 MODELO DE BIELAS E TIRANTES	40
2.8.1 Fundamentos do Modelo de Bielas e Tirantes	40
2.8.2 Modelo Material Bilinear para Concreto Armado.....	41
2.8.3 Limitações da Abordagem Manual	44
2.8.4 Geração Automatizada de Modelos de Bielas e Tirantes via <i>Ground Structure</i>	44
2.8.5 Interpretação de Resultados como Modelos de Bielas e Tirantes	45

3. METODOLOGIA.....	47
3.1 GERADOR DA MALHA DE BASE 2D E DA MALHA <i>GROUND STRUCTURE</i>	48
3.2 FORMULAÇÃO ELÁSTICA ANINHADA PROPOSTA	48
3.3 ANÁLISE ESTRUTURAL.....	49
3.3.1 Regularização de Tikhonov.....	50
3.3.2 Verificação de Equilíbrio Global da Estrutura	50
3.4 CRITÉRIO DE OTIMALIDADE.....	51
3.5 FILTRO DISCRETO	52
3.6 FILTROS SEPARADOS PARA ELEMENTOS TRACIONADOS E COMPRIMIDOS	53
3.7 FILTRO GEOMÉTRICO	54
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	55
4.1 VIGA BIAPOIADA.....	55
4.2 VIGA CONTÍNUA.....	59
4.3 PAREDE DE CISALHAMENTO ACOPLADA	63
4.4 VIGA-PAREDE COM ABERTURA	66
4.5 VIGA COM EXTREMIDADE ENTALHADA	69
5. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
5.1 CONCLUSÕES	73
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	74
REFERÊNCIAS.....	76

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O concreto armado consolidou-se como um dos materiais estruturais mais utilizados mundialmente devido à sua versatilidade, durabilidade e economia. A associação entre concreto e aço de armadura permite explorar as melhores propriedades de cada material: resistência à compressão do concreto e resistência à tração do aço. No entanto, o comportamento estrutural de elementos de concreto armado apresenta complexidades significativas, particularmente em regiões onde a distribuição de tensões não segue padrões lineares previstos pela teoria clássica de vigas – as chamadas Regiões-D.

Schlaich *et al.* [1] introduziram a distinção fundamental entre Regiões-B (Bernoulli) e Regiões-D (Descontinuidade) em estruturas de concreto armado. Regiões-B caracterizam-se por distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção transversal, permitindo aplicação direta de formulações analíticas clássicas. Regiões-D, por outro lado, ocorrem em proximidade de cargas concentradas, mudanças abruptas de geometria, aberturas ou apoios, onde as hipóteses de Bernoulli não são válidas. Nestas regiões, o fluxo de tensões torna-se complexo e tridimensional, exigindo abordagens alternativas de análise e dimensionamento.

O Modelo de Bielas e Tirantes (*Strut-and-Tie Model* - STM) surge como ferramenta fundamental para o dimensionamento de Regiões-D, sendo recomendado e normatizado por diversos códigos internacionais [2-4]. O STM consiste em idealizar a região estrutural como uma treliça discreta composta por elementos comprimidos (bielas), elementos tracionados (tirantes) e regiões nodais onde estes elementos se encontram. Esta representação simplificada permite aplicar equilíbrio estático e o dimensionamento individual dos elementos, fornecendo solução segura e conceitualmente clara para problemas complexos.

Apesar de sua sólida fundamentação teórica e ampla aceitação normativa, a construção de modelos de bielas e tirantes adequados permanece como desafio prático significativo. A definição da geometria do modelo - posicionamento de bielas, tirantes e nós - depende em grande medida da experiência e intuição do engenheiro, resultando em processo frequentemente subjetivo onde diferentes projetistas podem propor modelos distintos para o mesmo problema. Esta subjetividade torna-se mais crítica em geometrias complexas ou não convencionais, onde a inexperiência pode conduzir a modelos inadequados que comprometem segurança ou conduzem a soluções excessivamente conservadoras.

A otimização topológica apresenta-se como abordagem promissora para automatizar e sistematizar a geração de modelos de bielas e tirantes. Desenvolvida inicialmente por Bendsoe e Kikuchi [5] para aplicações gerais em projeto estrutural, a otimização topológica busca determinar a distribuição ótima de material em um domínio de projeto sujeito a restrições e objetivos específicos. Quando aplicada ao concreto armado com diferenciação entre comportamento em tração e compressão, a otimização topológica pode identificar automaticamente os caminhos preferenciais de fluxo de forças, fornecendo uma base objetiva para construção de modelos de bielas e tirantes.

Diversas abordagens metodológicas têm sido propostas para aplicar otimização topológica à geração de modelos de bielas e tirantes. Métodos baseados em densidade, como SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), distribuem material de forma contínua no domínio, requerendo posterior interpretação e discretização para converter campos de densidade em modelos de barras [6]. Métodos evolutivos, como ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), removem iterativamente material pouco solicitado até convergir para topologia ótima [7]. Em contraste com essas abordagens, o Método *Ground Structure*, originalmente proposto por Dorn *et al.* [8], adota abordagem fundamentalmente discreta partindo de uma malha inicial densa de elementos de treliça que conectam um conjunto predefinido de nós, a partir da qual o processo de otimização seleciona os elementos que compõem a solução final.

Essa característica confere ao Método *Ground Structure* vantagens particularmente relevantes para a geração de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado. Por resultar diretamente em uma topologia discreta, elimina-se a necessidade de procedimentos adicionais de interpretação de campos contínuos. Além disso, cada elemento estrutural apresenta propriedades mecânicas claramente definidas — como área, comprimento e esforço axial — o que permite a integração direta com os critérios usuais de verificação e dimensionamento de STMs. A distinção entre elementos submetidos à tração e à compressão emerge de forma natural do processo de otimização, e a própria formulação do método possibilita a incorporação de modelos constitutivos diferenciados para esses regimes, compatíveis com o comportamento mecânico do concreto armado.

1.2 JUSTIFICATIVA

A ampla adoção do Modelo de Bielas e Tirantes no dimensionamento de Regiões-D em estruturas de concreto armado, reconhecida por códigos internacionais como o ACI 318 [2], o Eurocode 2 [3] e o *fib Model Code* [4], bem como pela norma brasileira ABNT NBR 6118 [9], contrasta com a ausência de procedimentos sistemáticos para a definição da topologia do modelo estrutural. As normas fornecem diretrizes gerais relativas à resistência dos materiais e ao arranjo das armaduras, mas delegam ao projetista a concepção do modelo, frequentemente baseada em experiência prévia e processos de tentativa e erro. Essa lacuna metodológica pode resultar em inconsistências entre projetos e dificuldades na análise de geometrias complexas ou não convencionais.

Nesse contexto, métodos de otimização topológica têm sido investigados como ferramentas auxiliares para a identificação objetiva dos caminhos preferenciais de fluxo de forças, oferecendo suporte à concepção de modelos de bielas e tirantes estruturalmente coerentes. A aplicação desses métodos ao concreto armado apresenta potencial para aprimorar a consistência estrutural dos modelos propostos, sem substituir os critérios normativos de verificação e dimensionamento.

Embora diversos estudos tenham explorado a utilização da otimização topológica na geração de modelos de bielas e tirantes, observa-se que muitas soluções requerem procedimentos adicionais de filtragem, simplificação e interpretação para se tornarem diretamente aplicáveis ao projeto estrutural, como demonstrado em avaliações comparativas de resultados de otimização frente aos requisitos do STM em concreto armado [10]. Nesse sentido, o Método *Ground Structure* destaca-se por sua formulação intrinsecamente discreta e por sua compatibilidade conceitual com a idealização de bielas e tirantes, reduzindo ambiguidades associadas à interpretação de soluções contínuas.

Assim, esta dissertação justifica-se pela aplicação, adaptação e avaliação de uma metodologia baseada em otimização topológica via Método *Ground Structure*, com a consideração de modelo material bilinear e a aplicação de estratégias de filtragem discreta, incluindo uma extensão para o tratamento separado de elementos em tração e compressão, visando à geração de modelos de bielas e tirantes sistemáticos, interpretáveis e compatíveis com os procedimentos usuais de dimensionamento de estruturas de concreto armado.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Aplicar e avaliar uma metodologia baseada em otimização topológica discreta via Método *Ground Structure* para a geração automatizada de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado, considerando um modelo material bilinear com diferenciação de rigidez em tração e compressão, por meio da adaptação e extensão de rotinas computacionais existentes implementadas na linguagem MATLAB®.

1.3.2 Objetivos específicos

- Aplicar o Método *Ground Structure* para otimização topológica de estruturas treliçadas com modelo material bilinear, de forma a simular o comportamento diferenciado do concreto armado em tração e compressão;
- Adaptar e estender rotinas computacionais existentes para a consideração de novas condições de contorno, incluindo apoios com molas elásticas e apoios inclinados;
- Propor, implementar e avaliar uma extensão da estratégia de filtro discreto, com tratamento separado para elementos submetidos à tração e à compressão;
- Aplicar os filtros discreto e geométrico com o objetivo de obter topologias estruturalmente simplificadas e compatíveis com a interpretação como modelos de bielas e tirantes;
- Aplicar a metodologia considerada a casos complexos de Regiões-D em estruturas de concreto armado;
- Comparar as soluções topológicas obtidas com modelos de bielas e tirantes propostos na literatura técnica e científica, visando à avaliação de sua consistência estrutural;
- Analisar os resultados obtidos em termos de número de elementos, flexibilidade estrutural, convergência numérica e interpretabilidade como modelos de bielas e tirantes para fins de dimensionamento.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONCRETO ARMADO E REGIÕES DE DESCONTINUIDADE

2.1.1 Características do Concreto Armado

O concreto armado constitui o material estrutural mais amplamente utilizado na construção civil mundial, sendo responsável por aproximadamente 70% das estruturas construídas globalmente [11]. Sua ampla adoção deve-se à combinação de propriedades complementares: o concreto apresenta elevada resistência à compressão e durabilidade, enquanto o aço da armadura fornece a resistência à tração necessária, resultando em um material compósito versátil, capaz de resistir a estados complexos de tensão e de ser moldado em diversas formas e tamanhos.

A interação entre concreto e aço fundamenta-se em três princípios básicos: (1) aderência entre os materiais, garantindo trabalho conjunto sob carregamento; (2) compatibilidade de deformações nas regiões não fissuradas; e (3) proteção do aço contra corrosão através do cobrimento de concreto. Esta combinação permite a execução de estruturas versáteis, desde edificações residenciais até grandes obras de infraestrutura como pontes, barragens e túneis.

Entretanto, o comportamento mecânico do concreto armado apresenta complexidades inerentes que desafiam as abordagens tradicionais de análise e dimensionamento. A natureza frágil do concreto em tração, caracterizada por resistências à tração em torno de 10-15% da resistência à compressão, resulta em fissuração nas regiões tracionadas sob cargas de serviço. Após a fissuração, a rigidez efetiva da seção é substancialmente reduzida, e a capacidade de resistir à tração é transferida quase integralmente para a armadura de aço, caracterizando um comportamento não-linear e dependente do histórico de carregamento.

2.1.2 Regiões-B e Regiões-D

Schlaich *et al.* [1], em trabalho pioneiro sobre projeto consistente de estruturas de concreto, estabeleceram a distinção fundamental entre dois tipos de regiões em elementos estruturais: regiões-B (*Bernoulli regions* ou *Beam regions*) e regiões-D (*Discontinuity regions* ou *Disturbed regions*).

Regiões-B são caracterizadas pela validade da hipótese de Bernoulli, onde seções planas permanecem planas após a deformação, resultando em distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção. Nestas regiões, a teoria clássica de flexão de vigas é aplicável, e métodos tradicionais de dimensionamento — como o dimensionamento à flexão simples ou composta — fornecem resultados satisfatórios. Regiões-B são tipicamente encontradas em trechos de vigas e

pilares distantes de descontinuidades, onde o fluxo de tensões é essencialmente paralelo ao eixo longitudinal do elemento.

Regiões-D, por sua vez, são caracterizadas por distribuições não-lineares de deformação, violando a hipótese de Bernoulli. Estas regiões surgem devido a:

1. **Descontinuidades estáticas:** Cargas concentradas, reações de apoio, forças de protensão, mudanças abruptas de esforços internos;
2. **Descontinuidades geométricas:** Variações bruscas de seção transversal, aberturas, reentrâncias, juntas, consolos, dentes de apoio, blocos sobre estacas.

A Figura 1 ilustra exemplos típicos de regiões-B e regiões-D em um pórtico de concreto armado, evidenciando como descontinuidades geométricas e estáticas alteram a distribuição de tensões e invalidam a aplicação da teoria clássica de flexão.

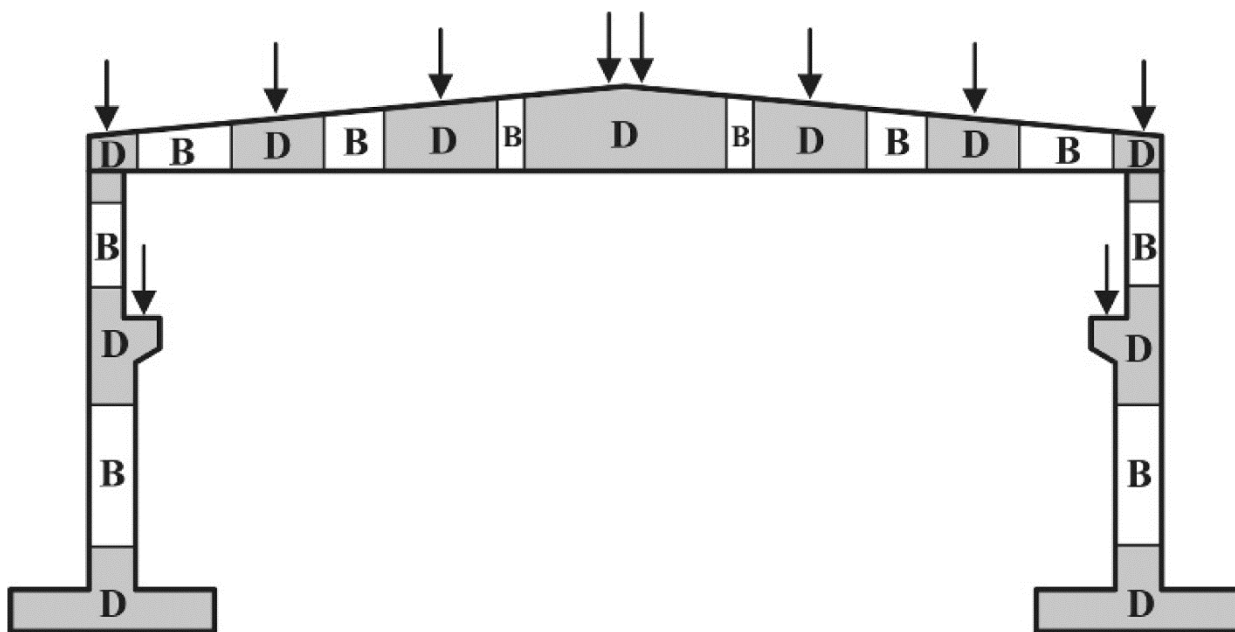


Figura 1: Identificação de regiões-B e regiões-D em um pórtico de concreto armado.

Fonte: Starčev-Ćurčin *et al.* [12].

A extensão aproximada de uma região-D pode ser estimada pelo princípio de Saint-Venant: perturbações locais afetam a distribuição de tensões em uma distância da ordem da altura da seção transversal. Assim, em uma viga de altura h , uma região-D se estende aproximadamente h em cada direção a partir da descontinuidade.

O dimensionamento de regiões-D por métodos tradicionais de flexão é inadequado, pois a distribuição real de tensões difere daquela assumida pela teoria de vigas. Métodos específicos, como o Modelo de Bielas e Tirantes, são necessários para capturar o comportamento estrutural dessas regiões, tema explorado na Seção 2.8.

2.1.3 Desafios no Dimensionamento de Regiões-D

O projeto de regiões-D em estruturas de concreto armado apresenta desafios tanto conceituais quanto práticos. Tradicionalmente, engenheiros desenvolvem modelos resistentes baseados em experiência e intuição, visualizando o fluxo de tensões na estrutura e propondo arranjos de armadura que materializem caminhos de carga identificados. Esta abordagem, embora eficaz nas mãos de projetistas experientes, apresenta limitações:

- **Subjetividade:** Para uma mesma geometria e carregamento, diferentes engenheiros podem propor diferentes soluções de armadura, todas potencialmente seguras, mas com diferentes eficiências estruturais e econômicas;
- **Conservadorismo:** Em face de incertezas sobre o caminho ótimo de cargas, projetistas frequentemente adotam margens de segurança adicionais, resultando em quantidades de armadura superiores ao estritamente necessário;
- **Complexidade geométrica:** Geometrias não convencionais — como blocos sobre estacas com múltiplos pilares, vigas-parede com aberturas irregulares, ou juntas complexas — tornam a visualização do fluxo de tensões muito desafiadora.

A otimização topológica surge como ferramenta promissora para auxiliar o dimensionamento de regiões-D, oferecendo uma abordagem sistemática para identificar caminhos ótimos de transmissão de cargas. Ao formular o problema de projeto como um problema de otimização matemática — buscando a distribuição ótima de material que minimiza uma função objetivo sujeita a restrições de equilíbrio e volume — é possível gerar topologias estruturais que representam soluções eficientes sem depender exclusivamente da intuição do projetista.

Particularmente, o Método *Ground Structure*, quando aplicado com consideração apropriada do comportamento bimodular característico do concreto armado (diferentes rigidezes em tração e compressão), pode gerar automaticamente modelos de bielas e tirantes que servem de base racional para o detalhamento da armadura. Para compreender como a otimização topológica pode ser aplicada ao dimensionamento de regiões-D, é necessário estabelecer os fundamentos teóricos e matemáticos dos métodos de otimização estrutural, apresentados nas seções seguintes.

2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Otimização estrutural é uma técnica que consiste em determinar a melhor distribuição de material dentro de um domínio especificado de volume físico, e, com segurança, transmitir ou resistir às condições de carregamento aplicadas à estrutura [13], como ilustrado na Figura 2, ao mesmo tempo em que todas as restrições impostas são satisfeitas.

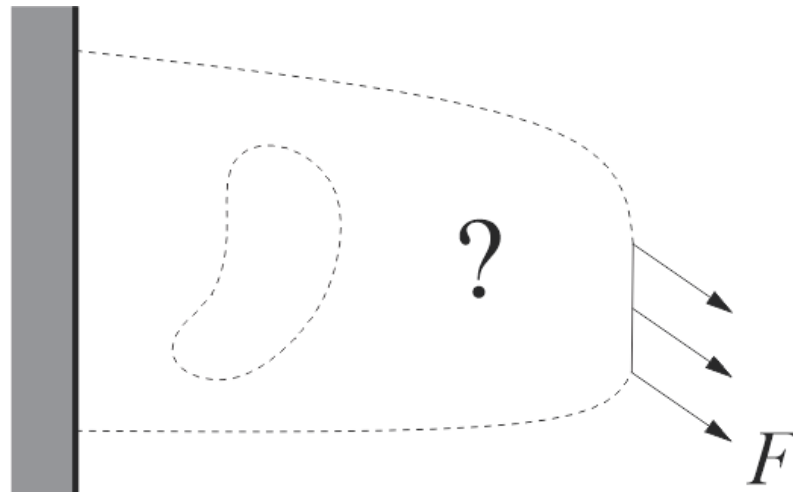


Figura 2: Problema de otimização estrutural.

Fonte: Adaptado de Christensen e Klarbring [14].

Para atingir a melhor distribuição de material e consequentemente a estrutura com melhor desempenho, o processo de otimização estrutural, de maneira eficiente, faz o uso de algoritmos de busca numérica programados para minimizar (ou maximizar) funções objetivo predefinidas, partindo de um conjunto de variáveis de projeto, em conformidade com as restrições de projeto relevantes [15], que convergem à solução ótima. O objetivo é uma resposta escalar que direciona a otimização estrutural para a melhor configuração das variáveis de projeto. A equação que relaciona o objetivo com as variáveis de projeto é chamada de função objetivo. A função objetivo é avaliada continuamente para monitorar a resposta do sistema, progredindo na otimização estrutural. As variáveis do projeto estrutural incluem pontos que definem características estruturais, parâmetros dimensionais e densidade do material em uma região estrutural [16]. Um terceiro componente, as restrições, deve ser levado em consideração de modo a impor certos critérios de desempenho em uma estrutura. As restrições podem ser comportamentais ou geométricas [17]. A seguir estão alguns exemplos de funções objetivo e restrições comportamentais:

- Volume ou peso da estrutura;
- Medidas globais de desempenho estrutural, como rigidez (ou flexibilidade), frequências naturais, cargas críticas de flambagem, etc.;
- Restrições globais, como deslocamento máximo, tensão, deformação ou densidade de energia de deformação em toda a estrutura;
- Restrições locais, como deslocamento, tensão ou deformação em um local específico na estrutura.

As restrições geométricas podem ser limitações de fabricação, tamanho máximo/mínimo de membros e eventual utilização da estrutura (restrições físicas).

O problema de otimização estrutural pode ser resolvido utilizando métodos analíticos [18] ou métodos numéricos tais como programação matemática [19] e critérios de otimalidade [20, 21].

2.2.1 Representação Matemática Geral de um Problema de Otimização Estrutural

Um problema de otimização estrutural na forma geral pode ser definido como procurar pelo mínimo (ou máximo) valor da função $f(\mathbf{x})$, na qual $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis. De acordo com Haftka e Gürdal [18], um problema de otimização pode ser expresso por:

$$(\text{OE}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar: } f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a: } \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) = 0 & i = 1:M \\ h_j(\mathbf{x}) \geq 0 & j = 1:N \end{cases} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $g(\mathbf{x})$ e $h(\mathbf{x})$ são as restrições de igualdade e de desigualdade, respectivamente, sendo M o número de restrições de igualdade e N o número de restrições de desigualdade. O problema de otimização é dito linear se ambas, função objetivo e restrições, são funções lineares das variáveis de projeto. Se a função objetivo ou uma das restrições for uma função não-linear das variáveis de projeto, a otimização é dita não-linear.

Naturalmente, existem muitas aplicações práticas onde o projetista pode necessitar otimizar duas ou mais funções objetivo simultaneamente, ou seja, podem haver não apenas uma, mas várias funções objetivo em um único problema de otimização estrutural, chamado de problema de otimização *multiobjetivo*, de *critérios múltiplos* ou *vetorial*. Assim, pode-se formular esse tipo de problema como:

$$\text{minimizar: } f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \quad (2.2)$$

onde k é o número de funções objetivo, e as restrições são as mesmas que para (OE). Entretanto, o processo para determinar a solução de um problema de otimização multiobjetivo é um pouco mais complexo e menos definido do que para problemas com uma única função objetivo. Nesses casos, a solução, predominantemente, é alcançada a partir do chamado conjunto Pareto-ótimo (*Pareto optimality*). A abordagem mais comum para se obter um conjunto Pareto-ótimo de um problema de otimização multiobjetivo é o método da *soma ponderada* [22]:

$$U = \sum_{k=1}^p w_k f_k(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

onde $w_k \geq 0$, $k = 1, \dots, p$, é chamado de vetor de pesos w que satisfaz $\sum_{k=1}^p w_k = 1$. Desta forma, o problema multiobjetivo se transforma em uma série de problemas mono-objetivos que definem uma série de soluções ótimas.

2.2.2 Funções Convexas e Problemas Convexos

No processo de formulação de um problema de otimização estrutural onde busca-se minimizar uma função, o engenheiro deve compreender quais restrições governam o projeto e quais podem ser negligenciadas, pois a escolha do objetivo e das restrições é essencial para uma análise numérica bem-sucedida que, caso contrário, pode não orientar a análise numérica a encontrar uma solução ótima para o problema [21].

Quando a solução do problema de otimização estrutural é obtida através de algum método numérico, geralmente, é muito difícil responder satisfatoriamente se a solução encontrada é um ótimo (mínimo) global ou apenas um ótimo (mínimo) local. Entretanto, em alguns casos o problema considerado pode ser demonstrado como possuindo certas propriedades de convexidade, o que implica concluir que um ótimo local também é um ótimo global [23].

A natureza da função objetivo e das restrições pode, então, ser determinada utilizando as definições de convexidade. Dessa maneira, garante-se que a solução encontrada é um ótimo global, já que nos casos de problemas convexos um ótimo local é automaticamente um ótimo global [24].

Uma função $f(x)$ é dita ser convexa se, na linha que conecta cada par de pontos x^1 e x^2 no domínio definido por essa função, o valor da função é menor ou igual a uma interpolação linear de $f(x^1)$ e $f(x^2)$ [25]. A Figura 3(a) mostra a representação geométrica de uma função convexa. A partir da geometria, a definição de uma função convexa pode ser expressa pela inequação:

$$f[\alpha x^2 + (1 - \alpha)x^1] \leq \alpha f(x^2) + (1 - \alpha)f(x^1), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.4)$$

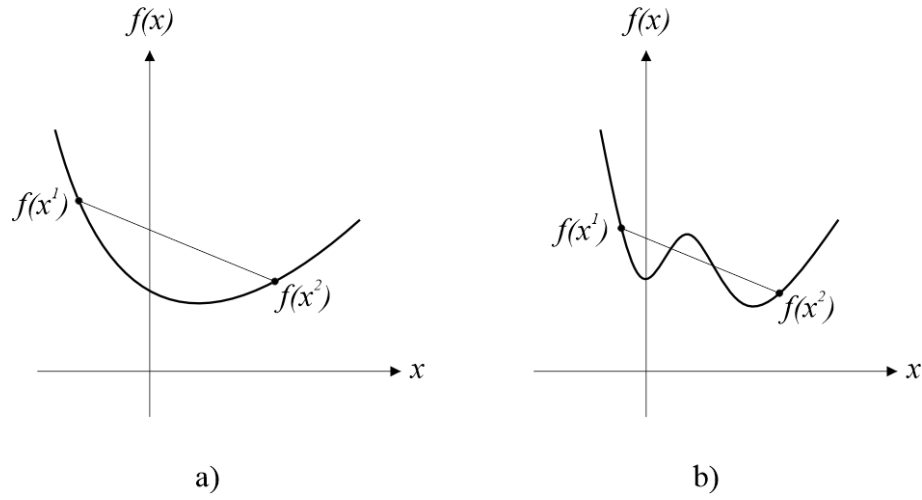


Figura 3: a) função convexa; b) função não-convexa.

Fonte: Autor.

Verificar a convexidade de uma dada função utilizando a definição é um processo custoso, porque exigiria a consideração de infinitos pontos. O modo mais direto de verificar se uma função é convexa ou não é, normalmente, calculando sua matriz Hessiana e estudando o sinal desta. A matriz Hessiana é expressa por:

$$H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde H é definido como Hessiano, e a matriz Hessiana como a matriz de segundas derivadas parciais da função $f(x)$.

Ao calcular o Hessiano, pode-se verificar a convexidade de uma função da seguinte forma:

- uma função $f(x)$ é convexa se seu Hessiano $\nabla^2 f(x)$ é pelo menos positivo semidefinido;
- uma função $f(x)$ é côncava se seu Hessiano $\nabla^2 f(x)$ é pelo menos negativo semidefinido;
- uma função $f(x)$ é não-convexa se seu Hessiano $\nabla^2 f(x)$ é indefinido.

Um problema de otimização é dito convexo quando sua função objetivo e todas as funções de restrição são convexas. Como funções lineares, predominantes em problemas estruturais, são naturalmente convexas, a maioria dos problemas de otimização estrutural satisfaz esse critério. Problemas convexas garantem que qualquer ótimo local seja também um ótimo global [25].

2.2.3 Classificação dos Problemas de Otimização Estrutural

Problemas de otimização estrutural podem ser classificados em três categorias principais, baseados nas variáveis de projeto e que diferem em grau de complexidade, apresentadas a seguir:

- **Otimização dimensional:** busca determinar as dimensões ideais da seção transversal de estruturas 1D ou 2D que atenderão a critérios específicos, como minimizar a deflexão ou maximizar a capacidade de suporte de carregamento da estrutura. Por exemplo, se o elemento estrutural a ser otimizado é uma viga engastada, o seu comprimento e posição (coordenadas) são fixados e busca-se as dimensões da seção transversal. Outro exemplo seria uma estrutura de treliça (Figura 4) onde suas dimensões gerais são conhecidas, mas não as áreas das seções transversais de cada elemento (barra) da treliça. Um último exemplo seria a distribuição da espessura de um elemento de parede fina [13].

Em engenharia civil, a otimização dimensional é geralmente empregada no projeto de seções transversais de estruturas aço e de elementos de concreto pré-fabricados. As listas de seções transversais otimizadas e suas respectivas informações estruturais são disponibilizadas em catálogos nos quais os engenheiros projetistas podem fazer a seleção da seção mais apropriada, o que garante a eficiência estrutural ao mesmo tempo que reduzem o custo do material [26].

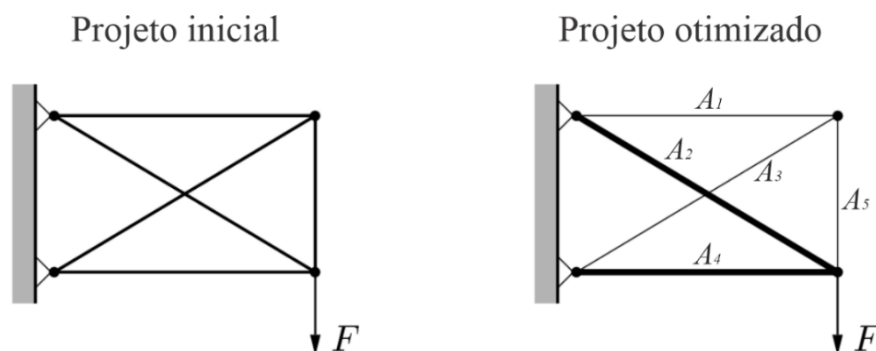


Figura 4: Problema de otimização estrutural dimensional.

Fonte: Adaptado de Christensen e Klarbring [14].

- **Otimização de forma:** envolve alterar a forma ou geometria (Figura 5) de parte do contorno (domínio) da estrutura a fim de melhorar seu desempenho [27]. Isso pode incluir ajustar as dimensões, curvas e ângulos para otimizar a distribuição do

carregamento e concentrações de tensão. O contorno pode ser representado por uma equação ou por um conjunto de pontos cujas localizações são desconhecidas [13].

Uma aplicação da otimização de forma é em um projeto de ponte, onde a geometria da seção pode ser otimizada para diversas restrições nas propriedades da seção, mas também considerando limitações de fabricação ou transporte [26].

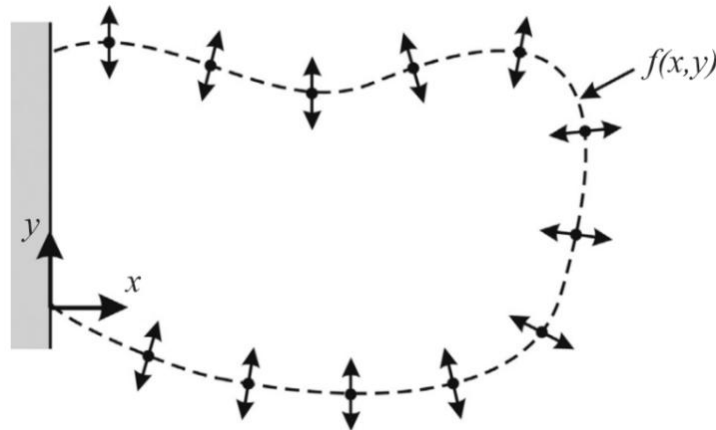


Figura 5: Domínio de projeto estrutural com o contorno representado como uma equação $f(x, y)$ ou como pontos de controle que podem se mover perpendicularmente (ou não) ao contorno.

Fonte: Adaptado de Querin *et al.* [13].

- **Otimização topológica:** essa é a forma mais geral de otimização estrutural [28]. Difere das otimizações dimensional e de forma, que focam em modificar uma estrutura existente, pois envolve determinar a disposição ótima de material a partir de um domínio de projeto especificado.

Essa técnica de otimização é crucial em vários setores, incluindo aeroespacial, automotivo e engenharia civil, pois permite a criação de estruturas leves e de alto desempenho que atendem aos requisitos funcionais.

2.3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

De modo geral, a otimização topológica pode ser considerada como um problema de distribuição de material com o objetivo de maximizar a rigidez ou minimizar o peso/volume [16]. Assim, o processo de otimização topológica inicia-se com a distribuição inicial do material no domínio de volume físico, ao qual se impõem as cargas externas, restrições e as condições de

contorno. À medida que a análise avança, o material que menos favorece o desempenho estrutural é removido e o processo é repetido até que a convergência à solução ótima seja atingida [29].

Em estruturas discretas, como uma treliça, a topologia é definida pelo número de elementos da estrutura e a conectividade entre esses elementos (ver Figura 6), e é alcançada permitindo que as variáveis de projeto, como por exemplo, a área da seção transversal das barras (elementos) da treliça, tenha um valor igual a zero ou um valor mínimo [13].

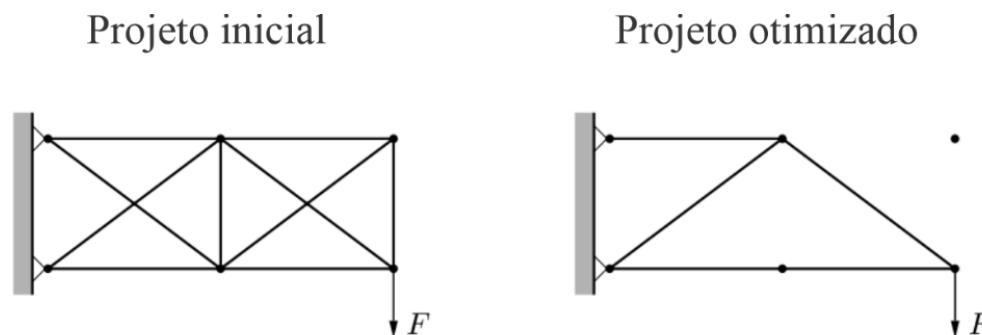


Figura 6: Otimização topológica de uma treliça.

Fonte: Adaptado de Christensen e Klarbring [14].

Em estruturas contínuas, a otimização topológica é definida pela localização de cavidades e a conectividade dos elementos, que podem ser bidimensionais (2D) ou tridimensionais (3D), do domínio de projeto. No caso de uma estrutura contínua em duas dimensões, uma chapa metálica por exemplo, a otimização topológica é alcançada permitindo que a espessura da chapa tenha um valor igual a zero em diferentes posições, desse modo determinando a quantidade e geometria das cavidades [13]. Em estruturas contínuas 3D, a otimização topológica pode ser alcançada da mesma forma que em estruturas contínuas 2D, tomando uma variável x , que representa a densidade do elemento, e que pode assumir os valores 0 ou 1, ou seja, não há material e há material em determinado elemento do domínio, respectivamente [14]. A Figura 7 ilustra um exemplo de otimização topológica contínua.

Os métodos de otimização topológica podem ser agrupados em duas categorias principais:

1. Métodos Baseados em Gradientes: são métodos de otimização estrutural indiretos [30].

Satisfazem um conjunto de critérios relacionados com o comportamento da estrutura e são, geralmente, baseados na condição de otimalidade Kuhn-Tucker [18], ou seja, são métodos mais rigorosos, pois são derivados de considerações matemáticas. São mais adequados para

problemas com um grande número de variáveis de projeto e algumas restrições. Exemplos de métodos de otimização topológica baseados em critérios de otimalidade são: Homogeneização [5, 6, 31], *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) [6, 32, 33], *Level Set Method* [34-36] e Método *Ground Structure*.

2. **Métodos Heurísticos ou Intuitivos:** são métodos derivados da intuição, de observações de processos de engenharia ou de observações de sistemas biológicos [13]. Esses métodos podem não garantir como resultado a solução ótima; no entanto, podem fornecer soluções viáveis e eficientes. Alguns exemplos de métodos de otimização topológica heurísticos são: *Evolutionary Structural Optimization* (ESO) [7, 37], *Bidirectional ESO* (BESO) [38, 39] e Algoritmos Genéticos [40].

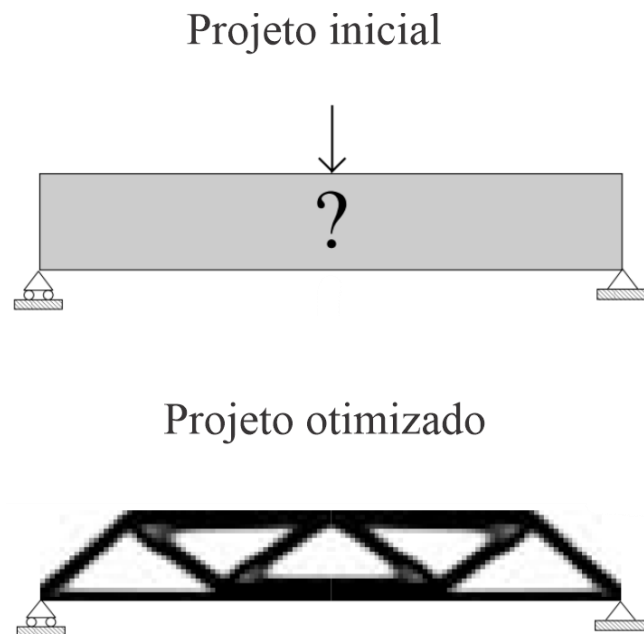


Figura 7: Otimização topológica de uma viga biapoada.

Fonte: Adaptado de Sigmund [41].

Embora o presente trabalho se concentre posteriormente na aplicação do Método *Ground Structure* – um método baseado em gradientes –, é fundamental compreender o panorama teórico no qual este é inserido, o que será feito por meio de uma revisão de alguns dos métodos mais amplamente utilizados. Para este fim, nas seções seguintes serão examinados o método da Homogeneização e o método SIMP, representantes clássicos dos métodos baseados em gradientes, bem como a Otimização Estrutural Evolucionária (ESO/BESO) e os Algoritmos Genéticos, como exemplos proeminentes de métodos heurísticos.

2.3.1 Método da Homogeneização

O método da homogeneização, em geral, baseia-se em uma teoria matemática para encontrar as propriedades efetivas (também chamadas de propriedades médias, homogeneizadas ou microscópicas) de determinado material. Por exemplo, pode ser usado para modelar materiais compósitos, isto é, materiais heterogêneos obtidos pela mistura de várias fases ou materiais constituintes em uma escala muito fina (ou microscópica) [42], pois, com o método da homogeneização, pode-se representar as propriedades macroscópicas do material compósito levando em consideração as propriedades microscópicas da estrutura [43].

Em otimização estrutural, esse método consiste em resolver uma categoria de problema de otimização de forma onde a topologia é feita de um número infinito de microvazios (furos), que produzem uma estrutura porosa [13]. A primeira aplicação do método da homogeneização na otimização topológica foi feita por Kirsch [5], na qual são derivadas as propriedades efetivas do material para elementos finitos porosos. Ao assumir uma forma retangular para os furos (Figura 8), os elementos porosos podem ser modelados matematicamente usando três parâmetros geométricos, $a(x)$, $b(x)$ e $\theta(x)$, que representam a largura, altura e orientação do furo (microvazio) do elemento, respectivamente, permitindo uma densidade variável ($0 \leq \rho \leq 1$) para a região porosa [44]. Em seguida, tanto a densidade como o tensor de elasticidade podem ser definidos em função dos parâmetros geométricos das microestruturas:

$$\begin{cases} \rho(x) = \rho(a(x), b(x), \theta(x)) \\ E_{ijkl}(x) = \tilde{E}_{ijkl} \cdot \rho(a(x), b(x), \theta(x)) \\ Vol = \int_{\Omega} \rho(x) dx \end{cases} \quad (2.6)$$

onde as propriedades efetivas do material $E_{ijkl}(x)$ podem ser obtidas usando as fórmulas de homogeneização.

O problema de otimização consiste então em encontrar os valores ótimos dos parâmetros que representam a geometria dos furos (microvazios), que se tornam as variáveis de projeto [13], ou seja, ao implementar a suposição anterior, o problema complexo de otimização topológica pode ser simplificado para encontrar os parâmetros geométricos ideais dos furos em cada ponto do domínio de projeto.

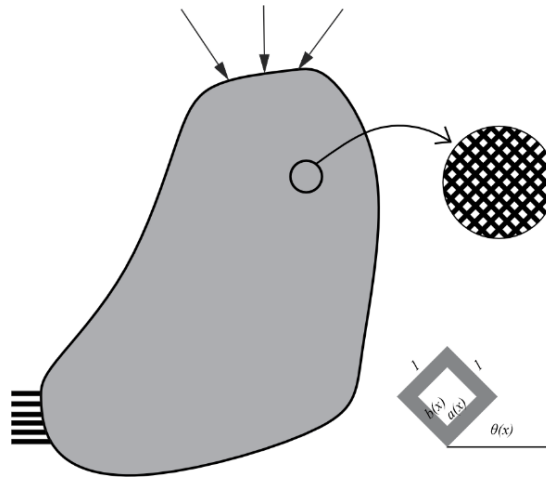


Figura 8: Microestrutura retangular.

Fonte: Adaptado de Abdi [45].

De acordo com Sigmund [41], do ponto de vista histórico, a vantagem do método da homogeneização reside em sua formulação com base teórica rigorosa, que estabeleceu a existência de soluções em otimização topológica e forneceu vínculos teóricos fundamentais ao desempenho das estruturas. Além disso, apresenta boa taxa de convergência. Entretanto, a determinação e avaliação das microestruturas ótimas são complicadas, e as soluções podem não ser diretamente construídas, uma vez que nenhuma escala de comprimento definida está associada à microestrutura. Na prática moderna, para problemas isotrópicos, métodos como o SIMP oferecem simplicidade conceitual equivalente sem a complexidade da análise multiescala.

2.3.2 Método SIMP

O método “SIMP” é o mais popular dentre os métodos de otimização topológica e tem sido extensivamente utilizado, especialmente depois da publicação de um *script* MATLAB completo de otimização topológica em apenas 99 linhas de código [41]. O termo “SIMP” significa Microestrutura (ou Material) Sólida Isotrópica com Penalização, do inglês *Solid Isotropic Microstructure (or Material) with Penalization*. A ideia básica dessa abordagem foi proposta por Bendsøe [6], enquanto o termo “SIMP” foi cunhado mais tarde pelo autor e introduzido pela primeira vez em um artigo de Rozvany *et al.* [46].

Diferentemente do método da homogeneização, que requer múltiplas variáveis contínuas (dimensões e orientação das microestruturas) para descrever o material, a interpretação física do método SIMP é assumir uma única variável contínua ρ , denominada “densidade”, por elemento.

Essa simplificação reduz o número de variáveis de projeto para apenas 1 por elemento, tornando ρ a variável principal de projeto. Implementando essa suposição na otimização topológica, a solução resultante pode ser representada não apenas por regiões sólidas ou vazias, mas também regiões de densidades intermediárias. Entretanto, a fabricação de elementos estruturais de densidades intermediárias é inviável, tratando-se apenas de um artifício computacional do processo de otimização, e por isso deve-se contornar esse problema aplicando uma abordagem popular e eficiente, denominada penalização ou lei de potência proposta por Bendsøe [6]. Essa abordagem orienta os elementos de densidades intermediárias ($0 < \rho < 1$) em direção a soluções binárias (0/1) penalizando as densidades intermediárias, utilizando a Equação (2.7):

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p \cdot E_{ijkl}^0, \quad p > 1, \quad (2.7)$$

onde p é a potência de penalização e E_{ijkl}^0 é o módulo de elasticidade do material sólido. A rigidez dos elementos de densidade intermediária pode ser reduzida à medida que a potência de penalização aumenta, resultando em soluções que se aproximam da solução discreta 0/1.

O problema de otimização topológica utilizando o método SIMP onde o objetivo é minimizar a flexibilidade (C), isto é, maximizar a rigidez, sujeita a uma fração de volume final, pode ser expresso por [41]:

$$\begin{cases} \text{Minimizar:} & C = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^n (\rho_e)^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \\ \text{Sujeito a:} & \frac{\sum_{e=1}^n \mathbf{v}_e \rho_e}{V^0} = V^c \\ & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{K}$ denotam o vetor de deslocamento global, o vetor de força global e a matriz de rigidez global, respectivamente. $\mathbf{u}_e$ e $\mathbf{k}_e$ representam o vetor de deslocamento e a matriz de rigidez do elemento, respectivamente, e ρ_e e $\mathbf{v}_e$ são os vetores de variáveis de projeto e de volume dos elementos, respectivamente. n é o número de elementos usados para discretizar o domínio de projeto, e V^0 e V^c denotam o volume do domínio de projeto e a fração de volume prescrita, respectivamente. ρ_{min} é um vetor de densidades relativas mínimas não-nulas, geralmente usado para evitar a singularidade dos elementos vazios (considerados sem material). O problema de otimização utilizando o método SIMP pode ser resolvido usando várias técnicas de busca numérica,

como os métodos dos Critérios de Otimalidade [31] e métodos de Programação Linear Sequencial [47].

O processo de otimização topológica inicia-se com uma distribuição inicial de densidades que obedece à restrição de fração de volume. A cada iteração, uma análise de elementos finitos é realizada na estrutura corrente, seguida por uma análise de sensibilidade, onde se calculam as derivadas da função objetivo (flexibilidade C) em relação às variáveis de projeto (densidades ρ_e). Essas sensibilidades, definidas por $S_e = \frac{\partial C}{\partial \rho_e}$, formam o gradiente que direciona a busca pelo ótimo e são obtidas de forma eficiente através de diferenciação analítica. Um esquema de filtro de sensibilidade [48, 49] é usado para garantir a existência de soluções e evitar instabilidades, como o padrão xadrez [50]. Este processo de análise de sensibilidade e atualização da estrutura baseado em elementos finitos é então repetido até que a convergência seja alcançada.

2.3.3 Otimização Estrutural Evolucionária

O método de Otimização Estrutural Evolucionária (ESO - *Evolutionary Structural Optimization*) representa uma abordagem heurística e intuitiva para a otimização topológica, proposta pela primeira vez por Xie e Steven [7, 51], cujo princípio fundamental é a remoção iterativa de material estrutural ineficiente ou subutilizado de um domínio inicialmente superdimensionado, até que se atinja uma estrutura eficiente e leve que satisfaça as restrições de projeto.

A cada iteração da análise por elementos finitos, um critério de rejeição é aplicado. Elementos que apresentam um baixo valor de uma certa medida de desempenho - por exemplo, tensão von Mises ou energia de deformação específica - são identificados e removidos do modelo.

Matematicamente, o critério de rejeição clássico do método ESO pode ser expresso por [37]:

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{\max}^{vm}} < RR_i \quad (2.9)$$

onde σ_e^{vm} é o valor da medida de tensão de von Mises no elemento i , $\sigma_{\max}^{vm}$ é o valor máximo dessa medida de tensão em toda a estrutura na iteração corrente, e RR_i é a Taxa de Rejeição (*Rejection Ratio*), um parâmetro crítico que é incrementado gradualmente a cada iteração, controlando a agressividade da remoção de material.

O método ESO possui uma limitação fundamental: a de que a remoção de material é um processo irreversível. Uma vez que um elemento é eliminado, ele não pode ser reintroduzido,

mesmo que se torne estruturalmente relevante em iterações futuras devido a uma redistribuição de cargas. Esta limitação pode conduzir a configurações subótimas [52, 53].

Para superar esta restrição, o método ESO Bidirecional (BESO - *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) foi desenvolvido por Querin *et al.* [38]. O método BESO introduz a capacidade de adicionar material em regiões onde ele se torna necessário, além de removê-lo onde é redundante, tornando o processo verdadeiramente evolucionário [54, 55].

Huang e Xie [39] definiram o problema de otimização para os métodos ESO/BESO da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar: } C = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \\ \text{Sujeito a: } \frac{\sum_{e=1}^n \mathbf{v}_e \rho_e}{V^0} = V^c \\ \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ \rho_e = \rho_{min} \text{ ou } 1 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

onde C é chamada de flexibilidade média ao invés de apenas flexibilidade ($\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$) como definido no SIMP.

As principais vantagens dos métodos ESO/BESO residem na sua conceituação intuitiva e facilidade de implementação em códigos de elementos finitos comerciais ou acadêmicos.

Contudo, suas desvantagens incluem a dependência de parâmetros (como a taxa de rejeição e a taxa de evolução), que requerem calibração para cada problema, e a falta de um rigor matemático formal de convergência, sendo classificados como métodos heurísticos que não garantem otimalidade global [56].

2.3.4 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AGs) representam uma classe de métodos de otimização heurística inspirados nos princípios da evolução natural proposta por Charles Darwin. Desenvolvidos inicialmente por John Holland em 1975 [40], os AGs pertencem à família mais ampla de Algoritmos Evolucionários e são particularmente adequados para problemas de otimização complexos, não-lineares e com espaços de busca discretos ou de alta dimensionalidade, onde métodos tradicionais baseados em gradiente podem se mostrar ineficazes [57].

O funcionamento dos AGs é análogo ao processo de seleção natural. Uma população de soluções candidatas (chamadas de indivíduos ou cromossomos) evolui ao longo de várias gerações

por meio da aplicação de operadores genéticos. Um AG inicia sua pesquisa com um conjunto aleatório de soluções, onde cada indivíduo tipicamente codifica a solução como uma *string* binária, em que cada gene (*bit*) representa a presença (1) ou ausência (0) de material em um elemento do domínio de projeto discretizado [58]. A qualidade de cada indivíduo é avaliada por uma função de aptidão (*fitness*), que incorpora o objetivo de projeto e as restrições.

A principal vantagem dos AGs reside na sua capacidade de exploração global do espaço de projeto, sem a necessidade de informações de gradiente, sendo robustos à presença de múltiplos ótimos locais (problemas não-convexos) e a funções objetivo descontínuas.

Contudo, a principal desvantagem é o seu alto custo computacional. Como cada avaliação de aptidão requer uma análise de elementos finitos completa, e centenas ou milhares de indivíduos devem ser avaliados ao longo de muitas gerações, os AGs são geralmente inviáveis para problemas de larga escala com muitas variáveis sem o uso de técnicas de aceleração, como computação paralela ou modelos substitutos (*surrogate models*) [59].

A aplicação dos AGs à otimização topológica foi pioneira por pesquisadores como Chapman e Jakiela [60] e Hajela e Lee [61], demonstrando sua capacidade de gerar topologias inovadoras para problemas de flexibilidade mínima.

2.4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DISCRETA

Gutkowski [62] define otimização estrutural discreta como:

No processo de otimização estrutural busca-se um conjunto de variáveis de projeto que garanta a condição de mínimo/máximo da função objetivo (custo, mérito), além de atender às restrições impostas, que levem ao projeto ótimo da estrutura. Isso significa que um projeto estrutural ótimo consiste em encontrar a “melhor” combinação dentre todas as combinações possíveis decorrente de um número finito de elementos estruturais e um número finito de parâmetros de projeto. Do ponto de vista matemático, a natureza combinatória de um problema de otimização, define-o como discreto. Por esta razão, esta parte da otimização estrutural é chamada de Otimização Estrutural Discreta.

Conforme apresentado por Gutkowski [62], a Otimização Estrutural Discreta caracteriza-se pela natureza combinatória de seus problemas, nos quais as variáveis de projeto assumem valores

em um conjunto finito. Quando este princípio é aplicado na determinação da configuração interna de uma estrutura, ou seja, à sua topologia, tem-se a Otimização Topológica Discreta. Neste contexto, estruturas de treliça são o exemplo mais representativo desse conceito, pois são constituídas por um número finito de elementos (barras) que podem ser convenientemente representados por variáveis binárias (presença ou ausência). O Método *Ground Structure* é a implementação clássica desta abordagem [63].

2.4.1 Método *Ground Structure*

O primeiro artigo que tratava de otimização estrutural topológica foi publicado há mais de um século pelo australiano Michell em 1904 [64] em que, utilizando um teorema desenvolvido anteriormente por Clerk Maxwell [65], Michell derivou seu método de critério de otimalidade para otimizar a disposição dos elementos de treliça, afim de que a estrutura otimizada apresentasse o menor peso possível [56]. As estruturas oriundas dos problemas estudados por Michell foram projetadas para o caso de haver apenas uma carga aplicada e dependem de uma especificação apropriada do campo de deformação. Apesar da importante contribuição para o estudo e desenvolvimento da otimização topológica, as estruturas de Michell são estaticamente determinadas e impraticáveis, consistindo em comprimentos não padronizados e um número infinito de barras [66].

Em 1964 Hemp e Chan [67, 68], e em trabalho paralelo, Dorn, Gomory and Greenberg [8], superaram as impraticabilidades das estruturas de Michell considerando que o domínio especificado de projeto é formado por uma malha de pontos que incluem os nós da estrutura e a posição dos apoios e carregamentos. A malha discretizada é conectada por muitos membros potenciais [69]. Dessa maneira, por Dorn *et al.* [8], foi introduzido o Método *Ground Structure*.

O Método *Ground Structure* é uma técnica amplamente utilizada em problemas de otimização topológica devido a sua simplicidade e flexibilidade. Este método envolve definir um domínio especificado composto de elementos (barras) de treliça ou conexões entre nós definidos pelo usuário, com base na preferência do projetista ou na viabilidade da construção. A estrutura ótima é, por fim, determinada como um subconjunto dos membros da discretização inicial do domínio de projeto ou da malha *ground structure* inicial [70].

O domínio discretizado ou *ground structure* (Figura 9) é considerado como um denso conjunto de nós e com um número potencial de conexões entre os nós. Durante o processo de otimização, a quantidade e dimensões dos elementos conectados podem mudar, mas a posição (coordenadas

cartesianas) e o número (índice) dos nós permanecem fixos. Se a área da seção transversal dos elementos reduzirem a zero durante o processo de otimização, os elementos são considerados como inexistentes, sendo, portanto, removidos e a topologia é modificada [17].

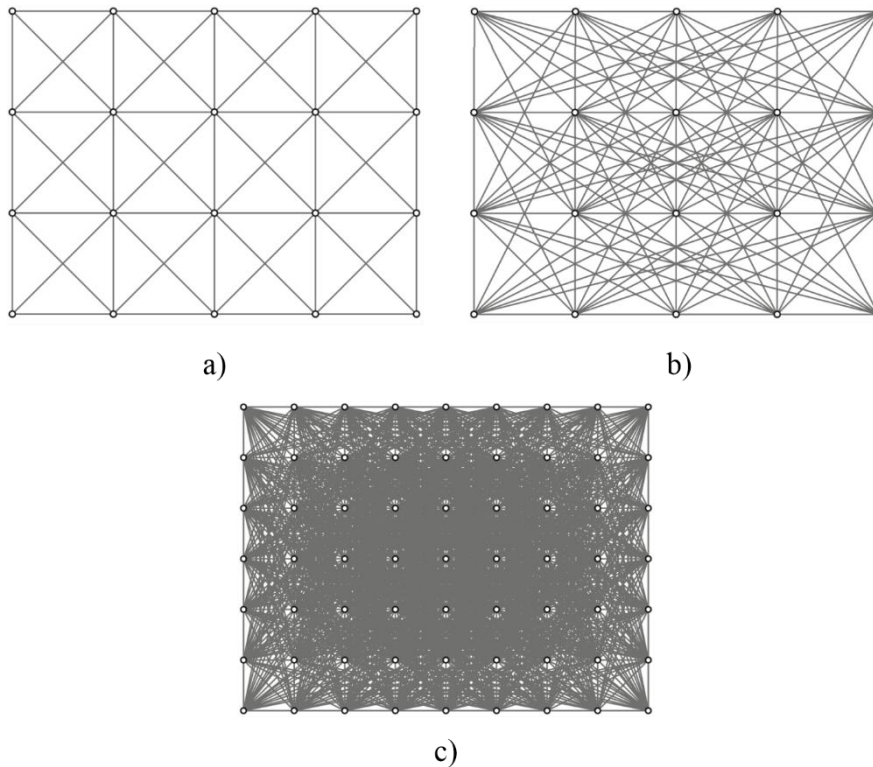


Figura 9: Exemplos de discretizações do domínio de projeto ou *ground structure* com diferentes profundidades de conexões internas: a) 4×3 - *ground structure* nível 1 - 55 elementos, b) 4×3 - *ground structure* nível 3 - 115 elementos, c) 8×6 - *full* - 1054 elementos.

Fonte: Adaptado de Sokól [71].

Como enfatizado por Savsani [70], é importante limitar o número de elementos de treliça da discretização inicial do domínio de projeto (limitar a profundidade de conexões internas) para evitar o aumento da complexidade do problema de otimização ou resultar em estruturas impraticáveis.

Após a discretização do domínio de projeto e geração da malha *ground structure*, é necessário realizar a análise estrutural do problema, pois é a parte principal de qualquer formulação e solução de um projeto otimizado. Para a otimização de uma estrutura de treliça, as formulações mais comumente utilizadas são: a formulação elástica e a formulação plástica, sendo esta primeira a utilizada neste trabalho.

2.4.2 Formulação Elástica Simultânea e Aninhada para o Método *Ground Structure*

A análise elástica de uma estrutura é importante para o estudo do seu desempenho, especialmente durante seu período de serviço, submetida ao carregamento para o qual a estrutura foi projetada. Na análise elástica, assume-se que os efeitos elásticos (deslocamentos, rotações, esforços internos e reações de apoio) variam linearmente com as forças aplicadas, isto é, qualquer incremento nos deslocamentos é proporcional à força que o causa. Assim, de modo a formular um problema de otimização estrutural baseado na análise elástica de uma estrutura, é preciso definir um objetivo, uma medida ou *benchmark*, ou seja, uma grandeza que quantifique e relaciona-se com esse fenômeno como função objetivo do problema de otimização. Como explicado por Zegard [72], as opções para função objetivo (medidas) são infinitas, mas apenas algumas são de interesse prático para a engenharia, tais como minimização do volume, minimização do caminho das cargas, minimização da flexibilidade (*compliance*) e minimização de deslocamentos.

Dado que a topologia ótima gerada pelo Método *Ground Structure* configura uma estrutura treliçada, a formulação do problema de otimização apresenta diferentes escolhas quanto à definição da função objetivo e das restrições. Minimizar a flexibilidade e minimizar deslocamentos são formulações equivalentes para uma mesma carga aplicada, uma vez que a flexibilidade representa o trabalho externo das forças, diretamente relacionado aos deslocamentos. A opção que se apresenta ao projetista está entre adotar como objetivo a minimização de uma medida de deslocamento/flexibilidade (maximizando a rigidez) sujeita a uma restrição de volume, ou a minimização do volume sujeita a restrições de deslocamento/tensão. A primeira abordagem - minimizar a flexibilidade com restrição de volume - é a mais popular na literatura, não por ser mais adequada em termos conceituais, mas por oferecer maior facilidade de implementação computacional e convergência numérica robusta.

Existem duas formulações elásticas principais para o Método *Ground Structure* que tem como objetivo minimizar a flexibilidade estrutural: a formulação elástica simultânea e a formulação elástica aninhada. A diferença está na forma como as variáveis de projeto (áreas das seções transversais) e as respostas estruturais (deslocamentos) são incorporadas à formulação.

Na formulação elástica simultânea, as variáveis de projeto e os deslocamentos nodais são tratadas como variáveis de decisão simultâneas no problema de otimização. Nesse caso, o processo de otimização busca encontrar, de forma conjunta, o vetor de variáveis de projeto e a resposta estrutural que minimizam a função objetivo, satisfazendo as restrições físicas do problema. Já a

formulação elástica aninhada trata as variáveis de projeto e os deslocamentos de maneira separada e sequencial. Neste caso, a análise estrutural é resolvida como um subproblema interno, para cada conjunto fixo de variáveis de projeto. A otimização, por sua vez, atua apenas sobre as variáveis de projeto, utilizando os resultados da análise para avaliar a função objetivo e as restrições.

Existem pelo menos duas razões para se adotar a formulação elástica aninhada em problemas de otimização voltados à minimização da flexibilidade estrutural. A primeira, como demonstrado por Svanberg [73], é que a flexibilidade, expressa em função das áreas da seção transversal das barras da treliça, constitui uma função convexa nas variáveis de projeto. Isso significa que um problema de minimizar a flexibilidade, sujeito a uma restrição de volume (função linear das variáveis de projeto), é um problema de otimização convexo, ou seja, um problema onde cada ótimo (mínimo) local é também um ótimo (mínimo) global. Uma segunda razão para adotar a formulação aninhada é que, na solução ótima do problema de minimização da flexibilidade, surge uma propriedade conhecida como *Fully Stressed Design*. Como demonstrado por Christensen e Klarbring [14], todas as barras ativas na treliça ótima apresentam o mesmo valor absoluto de tensão ($|\sigma_i| = \text{constante}$). Isso significa que, na configuração ótima, o material é distribuído de forma que as barras tracionadas e comprimidas estão igualmente e maximamente tensionadas em termos de magnitude, o que caracteriza um aproveitamento uniforme e eficiente do material.

A formulação elástica aninhada para o Método *Ground Structure* busca minimizar a flexibilidade de uma treliça sujeita a uma restrição de volume. Os deslocamentos são definidos implicitamente através das equações de equilíbrio e as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras [14]:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \mathbf{L}^T \mathbf{x} \leq V^{max} \\ & 0 < x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max} \\ \text{com} & \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde C é a flexibilidade estrutural, $\mathbf{F}$ é o vetor de forças externas, $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\mathbf{x}$ é o vetor de áreas, $\mathbf{L}$ é o vetor de comprimento das elementos, V^{max} é o limite superior prescrito de volume estrutural total, x_i^{min} e x_i^{max} são os limites inferiores e superiores das áreas das seções transversais dos elementos, respectivamente, x_i representa a área da barra i -ésima e $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global.

Atualmente, o método dos elementos finitos é a técnica computacional mais comumente utilizada na análise de estruturas de treliça a fim de determinar tensões elementares e deslocamentos nodais [74].

2.4.3 Formulação Plástica para o Método *Ground Structure*

Enquanto formulações baseadas em análise elástica focam no comportamento em serviço, a análise plástica permite determinar a capacidade última da estrutura, considerando a redistribuição de esforços após o escoamento do material. A formulação clássica do problema de otimização baseado na análise plástica é estabelecida como um problema de minimização de volume, sujeito a condições de equilíbrio e limites de resistência plástica dos elementos. Neste contexto, o Método *Ground Structure* beneficia-se dessa abordagem para identificar topologias que não apenas minimizam o volume de material, mas também garantem uma resistência última adequada.

De acordo com Kirsch [25], em comparação com a formulação elástica, a formulação plástica impõe o equilíbrio, mas não exige explicitamente condições de compatibilidade ou relações tensão-deformação. Assim, para uma estrutura de treliça, o problema de minimização de volume pode ser expresso por:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}}: & V = \mathbf{L}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeito a:} & \mathbf{B}^T \mathbf{n} = \mathbf{F} \\ & -\sigma_C x_i \leq n_i \leq \sigma_T x_i \quad i = 1, 2, \dots, N_b \end{cases} \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz de equilíbrio nodal construída a partir dos cossenos diretores dos elementos, $\mathbf{n}$ é um vetor contendo a força interna (axial) de todos os elementos da estrutura de treliça, e σ_C e σ_T as tensões limites de compressão e tração, respectivamente.

Utilizando a formulação plástica, Zegard e Paulino [75] desenvolveram o algoritmo GRAND (*Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains*), demonstrando sua eficácia integrada ao Método *Ground Structure* para a geração de topologias ótimas de treliças em domínios bidimensionais complexos, garantindo soluções que satisfazem os critérios de resistência última com volume mínimo de material.

2.5 MÉTODOS DE CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE

Critérios de Otimalidade representam o conjunto de condições matemáticas necessárias e/ou suficientes que uma função objetivo deve satisfazer em seu ponto ótimo (mínimo global ou local), garantindo a convergência do algoritmo de otimização. Métodos de otimização que buscam

soluções diretas para as condições de otimalidade são frequentemente denominados Métodos de Critério de Otimalidade [22].

De acordo com Rozvany [76], os Métodos dos Critérios de Otimalidade apresentam as seguintes aplicações práticas em projetos estruturais:

1. Sistemas Idealizados de Pequena Escala: Soluções analíticas exatas com o objetivo de determinar:
 - características fundamentais da solução ótima;
 - o intervalo de validade e aplicabilidade de métodos numéricos; e
 - o custo-benefício relativo de projetos realistas (base de comparação).
2. Sistemas Reais em Larga Escala: Os critérios de otimalidade podem ser utilizados para:
 - verificar a otimalidade de soluções obtidas por outros métodos; e
 - desenvolver estratégias de redimensionamento eficientes em otimização numérica iterativa (esquema de atualização de variáveis).

Um componente essencial em muitos *frameworks* de otimização topológica é um esquema confiável e eficiente para atualização das variáveis de projeto. No contexto de métodos baseados em Critérios de Otimalidade, como o abordado neste trabalho, tal esquema é derivado de condições matemáticas rigorosas [77]. A formulação prática dos Métodos de Critérios de Otimalidade para atualização iterativa das variáveis de projeto foi consolidada a partir dos trabalhos pioneiros de Zhou e Rozvany [78], que propuseram o Critério de Otimalidade Discreto e Contínuo (*Discrete and Continuous Optimality Criteria* - DCOC) como uma abordagem eficiente para problemas estruturais de grande porte.

Esse método parte da premissa de que, em um ponto ótimo, as derivadas parciais da função objetivo, ponderadas por restrições e multiplicadores de Lagrange, devem manter uma relação de proporcionalidade entre todos os elementos ativos do projeto. Posteriormente, Fadel *et al.* [79] introduziram o método de Aproximação Exponencial de Dois Pontos (*Two-Point Exponential Approximation* – TPEA), que aprimorou a estabilidade e a precisão do processo iterativo por meio da introdução de uma variável intermediária não-linear.

Essa formulação, posteriormente generalizada e formalizada por Groenwold e Etman [80], mostrou-se particularmente adequada para problemas de otimização topológica baseados no Método *Ground Structure*.

Nessa perspectiva, Ramos Jr. e Paulino [81], formularam um esquema de atualização de variáveis baseado nos Critérios de Otimalidade usuais [32, 78, 80], para ser utilizado em problemas de otimização topológica convexa baseado no Método *Ground Structure*.

A derivação do esquema de atualização de variáveis de projeto é baseada em uma sequência de subproblemas separáveis e explícitos que são aproximações do problema original. Para construir uma aproximação iterativa do problema de otimização, a função objetivo e as funções de restrições são substituídas pelas respectivas aproximações em torno do ponto atual de projeto, utilizando uma variável intermediária exponencial y_i . Essa variável intermediária exponencial é definida para cada elemento i por [80, 82]:

$$y_i = \left(\frac{x_i - x_i^{\min}}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} \right)^{\varepsilon_i} \quad (2.13)$$

onde x_i é a área da seção transversal do elemento i (variável de projeto), $x_i^{\min}$ e $x_i^{\max}$ são os limites inferior e superior da área da seção transversal do elemento i , respectivamente, e ε_i é um parâmetro de ajuste da aproximação.

A variável intermediária y_i normaliza a área x_i no intervalo $[0,1]$ e permite controlar a curvatura da aproximação através do parâmetro ε_i , melhorando a estabilidade e convergência do processo iterativo.

Considerando C como uma função objetivo de variáveis intermediárias $y(\mathbf{x})$, ou seja, $C(y(\mathbf{x}))$, onde $C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x})$ representa a flexibilidade estrutural em modelos lineares, sua linearização pode ser obtida expandindo-a em uma série de Taylor utilizando o valor atual das variáveis de projeto em $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$:

$$C(\mathbf{x}) \cong \hat{C}(\mathbf{x}) = C(y(\mathbf{x}^k)) + \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}^T (\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}^k)) \quad (2.14)$$

Aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y_i} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^k} = \left(\frac{\partial C}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dy_i} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^k}$$

Substituindo essa relação na Equação (2.14) e fazendo uso da Equação (2.13), obtém-se a aproximação explícita da função objetivo:

$$\hat{C}(\mathbf{x}) = C(y(\mathbf{x}^k)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \frac{1}{\varepsilon_i} (x_i^k - x_i^{\min}) \left[\left(\frac{x_i - x_i^{\min}}{x_i^k - x_i^{\min}} \right)^{\varepsilon_i} - 1 \right] \quad (2.15)$$

É importante destacar que, embora a aproximação $\hat{C}(\mathbf{x})$ seja expressa explicitamente em termos das variáveis de projeto x_i , a função objetivo original $C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x})$ é implícita, pois os deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ são obtidos pela solução do sistema de equilíbrio estrutural $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$. A cada iteração do processo de otimização, portanto, é necessário resolver o sistema de equilíbrio estrutural para obter $\mathbf{u}(\mathbf{x}^k)$, calcular a flexibilidade $C(\mathbf{x}^k) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}^k)$ e determinar as sensibilidades $\frac{\partial C}{\partial x_i}$ através da análise de sensibilidade estrutural (detalhada na Seção 2.6).

Assim, pode-se formular um problema aproximado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \hat{C}(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } \begin{cases} g(\mathbf{x}) = \sum_i^n x_i L_i - V_{\max} = 0 \\ x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{cases} \quad (2.16)$$

Em problemas convexos, pode-se utilizar a dualidade Lagrangiana. A função Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \phi) = \hat{C}(\mathbf{x}) + \phi g(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

onde ϕ é um multiplicador de Lagrange. As condições de otimalidade são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial \hat{C}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \left(\frac{x_i - x_i^{\min}}{x_i^k - x_i^{\min}} \right)^{\varepsilon_i - 1} + \phi L_i = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \sum_i^n x_i L_i - V_{\max} = 0 \quad (2.19)$$

Resolvendo a Equação (2.18) para $x_i(\phi)$, é obtida:

$$x_i(\phi) = x_i^* = x_i^{\min} + (B_i(\phi))^{\frac{1}{1-\varepsilon_i}} (x_i^k - x_i^{\min}) \quad (2.20)$$

e substituindo o resultado na Equação (2.19), o multiplicador de Lagrange ϕ é obtido, por exemplo, através do método da bisseção, onde B_i é dado por:

$$B_i = - \frac{\frac{\partial C}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}}{\phi L_i} \quad (2.21)$$

Após calcular ϕ e x_i^* é necessário satisfazer as verificações de restrição e então definir o próximo ponto de projeto x_i^{new} como:

$$x_i^{new} = \begin{cases} x_i^+, & x_i^* \geq x_i^+ \\ x_i^-, & x_i^* \leq x_i^- \\ x_i^*, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.22)$$

onde x_i^+ e x_i^- são os limites da região de busca definidos por:

$$x_i^- = \max(x_i^{min}, x_i^k - M) \quad (2.23)$$

$$x_i^+ = \min(x_i^{max}, x_i^k + M) \quad (2.24)$$

onde M é o limite de passo (*move limit*), geralmente especificado como uma fração de $(x_i^{max} - x_i^{min})$. A grandeza $\eta = 1/(1 - \varepsilon_i)$ é chamada fator de amortecimento (*damping factor*), e para $\varepsilon_i = -1$, obtém-se uma aproximação recíproca. O valor de ε_i é estimado utilizando uma abordagem de aproximação de dois pontos baseada no trabalho de Fadel *et al.* [79] e apresentado por Groenwold e Etman [80]. Nesta abordagem, $\varepsilon_i^{(k)}$ por:

$$\varepsilon_i^{(k)} = 1 + \frac{\ln\left(\left|\frac{\partial C}{\partial x_i}\right|_{x=x^{k-1}} / \left|\frac{\partial C}{\partial x_i}\right|_{x=x^k}\right)}{\ln(x_i^{k-1}/x_i^k)} \quad (2.25)$$

onde $\ln(\cdot)$ é o logaritmo natural. Na primeira iteração, é utilizado $\varepsilon_i = -1$ e nas iterações subsequentes o valor de ε_i é restringido ao intervalo $-15 \leq \varepsilon_i \leq -0,1$. Por fim, o critério de convergência adotado é:

$$\max\left(\frac{|x_i^k - x_i^{k-1}|}{1 + x_i^{k-1}}\right) \leq tol \quad (2.26)$$

onde tol é a tolerância de convergência das variáveis de projeto.

2.6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Na resolução de problemas de otimização estrutural através de métodos iterativos como o Critério de Otimalidade, torna-se necessário obter informações sobre como a função objetivo e as restrições variam em relação às variáveis de projeto. Esse processo requer a diferenciação da função objetivo e de todas as funções de restrição em relação às variáveis de projeto, gerando derivadas que indicam a "sensibilidade" de cada função às mudanças nas variáveis. Este procedimento de obtenção das derivadas é denominado análise de sensibilidade [14]. A formulação

matemática da análise de sensibilidade para o Método *Ground Structure* apresentada a seguir é baseada em Ramos Jr. e Paulino [83].

Os resultados da análise de sensibilidade fornecem informações explícitas sobre como modificar uma estrutura de modo a garantir a satisfação das condições de projeto governantes — ou seja, as restrições ativas que efetivamente limitam a solução ótima — bem como o quanto modificar a estrutura para alcançar um projeto ótimo.

Na presente abordagem, a análise de sensibilidade é realizada sobre a *ground structure* e não na estrutura filtrada. Assume-se que a *ground structure* tem um modelo estrutural associado em equilíbrio, ou seja, o gradiente da energia potencial total é zero:

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{u}|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{eq}}} = 0$$

onde $\mathbf{u}_{eq}$ representa o vetor de deslocamentos da topologia em equilíbrio.

A flexibilidade estrutural, definida como o trabalho realizado pelas forças externas nos deslocamentos de equilíbrio, relaciona-se com a energia potencial mínima através da seguinte expressão:

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -2 \min_u \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = -2 \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x})) \quad (2.27)$$

Portanto, a sensibilidade da flexibilidade em relação à variável de projeto x_n é dada por:

$$\frac{dC(\mathbf{x})}{dx_n} = -2 \frac{\partial \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}))}{\partial x_n} - 2 \frac{\partial \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{eq}} \frac{\partial \mathbf{u}_{eq}}{\partial x_n} \quad (2.28)$$

Aplicando a condição de equilíbrio $\partial \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) / \partial \mathbf{u}|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{eq}} = 0$, obtém-se:

$$\frac{dC(\mathbf{x})}{dx_n} = -2 \frac{\partial \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}))}{\partial x_n} = -2 \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}))}{\partial x_n} - 2 \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}))}{\partial x_n} \quad (2.29)$$

onde $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ é o potencial das cargas externas e $E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ é a energia de deformação, dada por:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^N E_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (\mathbf{u}_k)^T \mathbf{k}_k \mathbf{u}_k \quad (2.30)$$

onde $\mathbf{u}_k$ e $\mathbf{k}_k$ representam o vetor de deslocamento e a matriz de rigidez em coordenadas locais do elemento k , respectivamente. O vetor de deslocamento local $\mathbf{u}_k$ relaciona-se com o vetor de deslocamento global $\mathbf{u}$ através da matriz de conectividade definida por $\mathbf{u}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{u}$ [14].

A matriz de rigidez do elemento $\mathbf{k}_k$ em coordenadas locais é dada por:

$$\mathbf{k}_k = x_k \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{pp}] & [\mathbf{k}_{pq}] \\ [\mathbf{k}_{qp}] & [\mathbf{k}_{qq}] \end{bmatrix}^{(k)} = x_k \mathbf{k}_k^0 \quad (2.31)$$

Com $\mathbf{k}_{pp} = \mathbf{k}_{qq} = -\mathbf{k}_{qp} = -\mathbf{k}_{pq} = (E/\ell)\mathbf{n}\mathbf{n}^T$, onde E é o módulo de elasticidade do material, ℓ é o comprimento do elemento e $\mathbf{n}$ é o vetor unitário associado ao elemento k .

Substituindo as equações (2.30) e (2.31) obtém-se:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} x_k (\mathbf{u}_k)^T \mathbf{k}_k^0 \mathbf{u}_k \quad (2.32)$$

Considerando que o potencial das cargas externas é explicitamente independente de $\mathbf{x}$, ou seja, $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \Omega(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = -\mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}$ (forças de corpo desprezadas), tem-se $\partial \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))/\partial x_n = 0$. Portanto, a partir das equações (2.29) e (2.32) obtém-se:

$$\frac{dC(\mathbf{x})}{dx_n} = -2 \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))}{\partial x_n} = -(\mathbf{u}_n)^T \mathbf{k}_n^0 \mathbf{u}_n \quad (2.36)$$

Este resultado mostra que a sensibilidade é sempre não-positiva e independente da área do elemento. Consequentemente, mesmo elementos da *ground structure* com área nula podem apresentar uma sensibilidade finita e, portanto, podem retornar à topologia com área positiva.

Entretanto, quando o critério de otimalidade é utilizado, os elementos com área nula não retornam para a topologia devido a forma recorrente do método de Critérios de Otimalidade, que aplica um fator multiplicador nas áreas anteriores. Do ponto de vista prático, valores relativamente pequenos de filtro são de maior interesse, uma vez que o retorno das barras não é frequente. Portanto, a aplicação do método de Critérios de Otimalidade constitui uma aproximação aceitável, sendo esta a abordagem utilizada neste trabalho.

2.7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.7.1 Breve Histórico

O Método dos Elementos Finitos envolve o processo de subdividir um sistema complexo em componentes individuais, os quais podem ter seu comportamento físico facilmente determinado, e assim reconstruir o sistema original a partir desses componentes para estudar seu comportamento global [84]. Este método é resultado de uma evolução gradual de métodos numéricos. Ritz [85] propôs uma abordagem eficaz para resolver problemas na mecânica de sólidos deformáveis, porém com limitações de uso. Apenas muitos anos depois, a partir dos anos 1940, que o desenvolvimento

moderno do Método dos Elementos Finitos no campo da engenharia estrutural começou, com os trabalhos de Hrennikoff em 1941 [86] e McHenry em 1943 [87]. Ainda em 1943, Courant [88], numa tentativa de aumentar as possibilidades do método de Ritz, utilizou um conjunto de elementos triangulares e o princípio da energia potencial total mínima para estudar o problema de torção de St. Venant [89]. Embora certas características-chave do método dos elementos finitos possam ser encontradas nos trabalhos de Hrennikoff [86] e Courant [88], sua apresentação formal é atribuída a Argyris e Kelsey [90] e Turner *et al.* [91]. O termo “elemento finito” foi usado pela primeira vez por Clough [92]. Desde sua concepção, a literatura sobre aplicações de elementos finitos cresceu exponencialmente, e hoje existem vários livros e periódicos que são principalmente dedicados à teoria e aplicação do método.

A aplicação do Método dos Elementos Finitos desenvolveu-se rapidamente devido, em grande parte, à capacidade dos computadores de realizar os dispendiosos cálculos exigidos pelo método. O primeiro livro sobre método dos elementos finitos foi publicado em 1967 por Zienkiewicz e Cheung, intitulado “*The Finite Element Method in Structural & Continuum Mechanics*”. Ainda que o método tenha sido amplamente utilizado para resolver problemas de mecânica estrutural, atualmente também é usado para analisar problemas de transferência de calor, dinâmica de fluidos, campos elétrico e magnético, entre outros [93].

2.7.2 Definição do Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é um dos métodos numéricos utilizado para obter a solução aproximada de problemas que são matematicamente representados por equações diferenciais ordinárias ou parciais, ou que podem ser formulados como minimização de um funcional. A ideia básica do Método dos Elementos Finitos é discretizar o domínio de projeto em vários domínios mais simples chamados elementos. Uma solução aproximada é assumida para cada elemento e são escritas em termos de soluções desconhecidas em pontos selecionados denominados nós. As soluções desconhecidas dos nós são geralmente designadas como os graus de liberdade dos nós [94]. O Método dos Elementos Finitos define as funções de aproximação (funções de forma) em termos de valores nodais do campo físico que está sendo estudado.

A premissa é transformar um problema físico contínuo em um problema de elementos finitos discretizado com valores nodais desconhecidos. No caso de problemas lineares, um sistema de equações algébricas lineares deve ser usado para representar o problema físico. Uma vez que os valores nodais são determinados, os valores do campo físico dentro de elementos finitos podem ser

obtidos usando as funções de forma [95]. Os principais passos do Método dos Elementos Finitos podem ser resumidos como na Figura 10.



Figura 10: Principais etapas do procedimento de elementos finitos.

Fonte: Adaptado de Nikishkov [95].

2.7.3 Elementos Lineares Típicos para a Otimização Estrutural

A escolha do tipo de elemento finito é determinada pela dimensão e geometria do domínio de interesse [96]. A geometria do problema físico governa o tipo de equação diferencial que descreve seu comportamento e, conseqüentemente, define a forma geométrica apropriada do elemento finito a ser empregado.

Para problemas unidimensionais (1D), regidos por equações diferenciais ordinárias, os elementos são em linha reta ou curva. Exemplos incluem distribuição de temperatura em uma haste e deslocamentos em uma barra axialmente carregada.

Problemas bidimensionais (2D), governados por equações diferenciais parciais em duas variáveis, requerem elementos com formato triangular ou quadrilátero. As arestas dos elementos podem ser retas ou curvas, sendo elementos com arestas curvas úteis para modelar com precisão geometrias complexas, comuns em aplicações como estruturas de casca e carrocerias de automóveis.

Problemas tridimensionais (3D) requerem elementos tetraédricos ou hexaédricos [94]. As formas típicas dos elementos para problemas uni-, bi- e tridimensionais são mostradas na Figura 11.

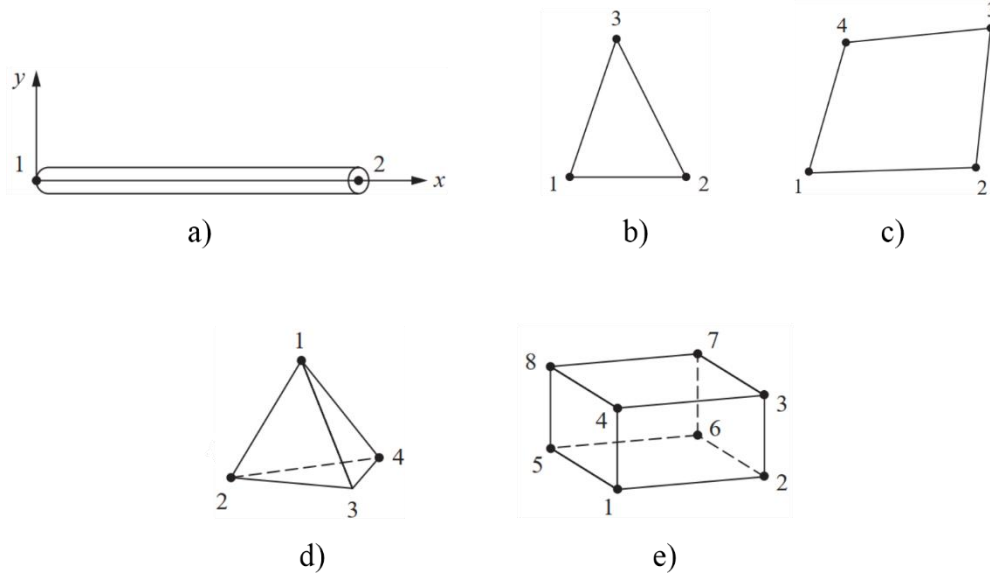


Figura 11: Elementos típicos. a) elemento linear primário (1D), b) elemento triangular (2D), c) elemento quadrilateral (2D), d) elemento tetraédrico (3D), e) elemento hexaédrico (3D).

Fonte: Adaptado de Logan [97].

2.7.4 Formulação do Método dos Elementos Finitos para Elementos de Treliça

No Método *Ground Structure*, onde o domínio é discretizado em uma rede de elementos de treliça, emprega-se a formulação de elementos finitos para esse tipo específico de elemento. Caracterizado por suportar apenas esforços axiais de tração ou compressão, este elemento requer que as cargas externas sejam aplicadas apenas nos nós de conexão ao longo dos eixos centroidais.

Assumindo um elemento (Figura 12) de comprimento L , seção transversal de área A , módulo de elasticidade E e rigidez k , pode-se expressar de modo conveniente na forma matricial, as equações para a sua análise, conforme a Equação (2.37).

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde,

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$c = \cos \alpha = \frac{(x_2 - x_1)}{L}$$

$$s = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha = \frac{(y_2 - y_1)}{L}$$

ou, na forma matricial simplificada

$$\mathbf{k}\mathbf{u}_e = \mathbf{f} \quad (2.38)$$

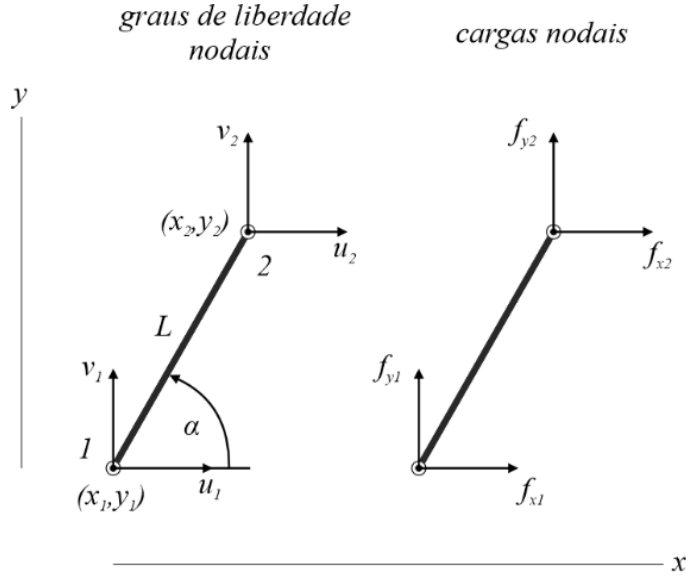


Figura 12: Elemento de uma treliça plana.

Fonte: Adaptado de Bhatti [94].

onde, $\mathbf{k}$ é a matriz de rigidez local, $\mathbf{u}_e$ é o vetor local de deslocamentos nodais e $\mathbf{f}$ é o vetor local de forças nodais do elemento.

É importante perceber que as equações (2.37) e (2.38) referem-se ao equilíbrio de um único elemento. Portanto, para resolver os graus de liberdade nodais para toda uma estrutura deve-se considerar as contribuições de todos os elementos, cargas e condições de apoio antes de resolver as incógnitas nodais [94]. Assim, para obter a matriz de rigidez de toda a estrutura, é preciso somar as matrizes de rigidez de cada elemento, isto é,

$$\sum_{e=1}^N \mathbf{k} = \mathbf{K} \quad (2.39)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global e N é o número total de elementos.

De forma semelhante, os vetores de forças nodais de cada elemento podem ser somados tal que

$$\sum_{e=1}^N \mathbf{f} = \mathbf{F} \quad (2.40)$$

Dessa maneira, $\mathbf{K}$ associa o vetor global de forças nodais $\mathbf{F}$ com o vetor global de deslocamentos nodais $\mathbf{u}$ para toda a estrutura por:

$$Ku = F \quad (2.41)$$

2.7.5 Apoios Elásticos

Em situações práticas de projeto estrutural, os apoios podem apresentar deformabilidade não desprezível, caracterizando-se como apoios elásticos (Figura 13). Exemplos incluem viga que serve de apoio para outra viga, o solo de suporte da estrutura ou qualquer elemento cuja deformabilidade é proporcional à força introduzida pela estrutura nesse elemento.

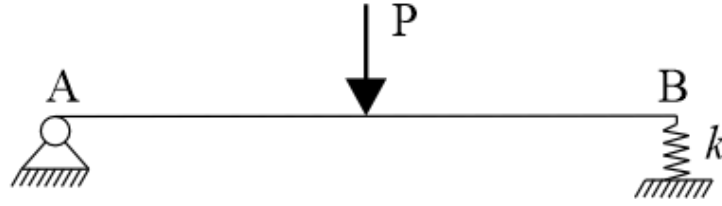


Figura 13: Estrutura com apoio elástico na extremidade.

Fonte: Autor.

Nesses casos, na modelagem de elementos finitos é necessário considerar a influência que esse tipo de apoio tem no comportamento da estrutura. Isto é feito adicionando-se a rigidez do apoio elástico à rigidez da estrutura.

Seja $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz de rigidez global da estrutura (sem os apoios elásticos), $\varphi = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ o conjunto de graus de liberdade onde há apoios elásticos e k_i^e a rigidez do apoio elástico no grau de liberdade i_k . A matriz de rigidez modificada, com os apoios elásticos incorporados, é expressa por:

$$K_{total} = K + K_s \quad (2.42)$$

onde $K_s \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz diagonal esparsa de rigidez dos apoios elásticos.

Se houver n apoios elásticos com rigidezes distintas $k_1^e, \dots, k_n^e$ nos graus de liberdade $\varphi = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, tem-se que a matriz de rigidez dos apoios elásticos é dada por:

$$[K_s(i_k, i_k)] = k_k^e, \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n \quad (2.43)$$

onde o índice $k = 1, \dots, n$, é referente ao grau de liberdade do nó que está associado ao apoio elástico. A adição de K_s modifica apenas os termos da diagonal principal de K correspondentes aos graus de liberdade em φ .

2.7.6 Apoios Inclinados

Estruturas podem apresentar condições de apoio cujas restrições não coincidem com os eixos globais do sistema de coordenadas, caracterizando apoios inclinados (Figura 14). Exemplos típicos incluem estruturas apoiadas sobre planos inclinados, tirantes ou escoras com orientação arbitrária, e sistemas com restrições direcionais específicas.

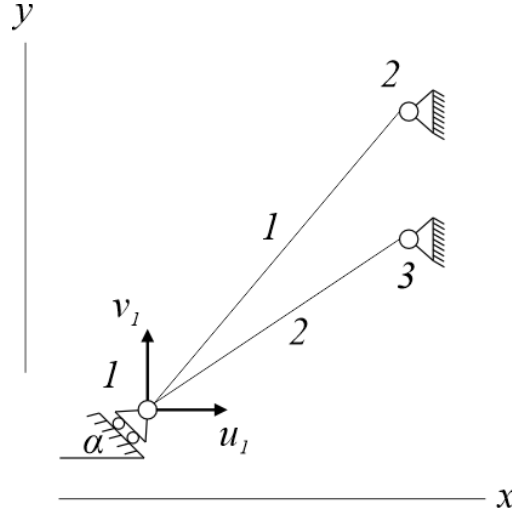


Figura 14: Estrutura com apoio inclinado.

Fonte: Adaptado de Bhatti [94].

Para modelar apoios inclinados na formulação do Método dos Elementos Finitos, é necessário introduzir restrições que relacionam diferentes e múltiplos graus de liberdade simultaneamente, denominadas *multipoint constraint* [94].

De forma geral, uma *multipoint constraint* pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \dots + c_{1n}d_n &= q_1 \\ c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \dots + c_{2n}d_n &= q_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, e q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são constantes conhecidas e d_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são os graus de liberdade nodais. Na forma matricial, as equações de restrições podem ser expressas por:

$$\mathbf{C}\mathbf{d} = \mathbf{q} \quad (2.45)$$

onde, com m restrições, $\mathbf{C}$ é uma matriz de dimensões $m \times n$ e $\mathbf{q}$ é um vetor de dimensão $m \times 1$.

Na presença de restrições de múltiplos pontos, as soluções das equações globais do sistema de equações (2.11) tornam-se complicadas. Para determinar essas soluções pode-se utilizar a seguinte técnica de otimização padrão destinada a problemas com restrições, em que [94]:

Resolver o sistema de equações (2.41) e substituindo a notação $\mathbf{u}$ por $\mathbf{d}$,

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$$

É equivalente a minimizar a seguinte função quadrática:

$$\min f(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{Kd} - \mathbf{d}^T \mathbf{F}$$

Assim, pode-se formular o seguinte problema de otimização para determinar o vetor global de deslocamentos $\mathbf{d}$, ou a solução dos graus de liberdade nodais:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \mathbf{d} \text{ para} \\ \text{Minimizar:} & f = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{Kd} - \mathbf{d}^T \mathbf{F} \\ \text{Sujeito a:} & \mathbf{Cd} - \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

A solução para o problema em (2.46) pode ser encontrada utilizando o chamado método da Função de Penalização.

Para esse método as funções de restrições são reescritas da seguinte forma:

$$t = \mathbf{Cd} - \mathbf{q} \quad (2.47)$$

tal que $t = 0$ implica que as restrições estão completamente satisfeitas. Adicionando o termo de penalização (μ), um problema de otimização sem restrições é definido por:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \mathbf{d} \text{ para} \\ \text{Minimizar: } \Phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{Kd} - \mathbf{d}^T \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mu (\mathbf{Cd} - \mathbf{q})^T (\mathbf{Cd} - \mathbf{q}) \end{cases} \quad (2.48)$$

O valor de μ é determinado pelo projetista e deve ser grande o suficiente, assim o processo de minimização irá forçar as restrições a serem satisfeitas. As condições necessárias para se alcançar o resultado mínimo de um problema de otimização utilizando o método da Função de Penalização são que suas derivadas com relação a d_i sejam zero. Assim,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{d}} = 0 \Rightarrow \mathbf{Kd} - \mathbf{F} + \mu (\mathbf{C}^T \mathbf{Cd} - \mathbf{C}^T \mathbf{q}) = 0 \quad (2.49)$$

Reorganizando os termos, o sistema de equações lineares pode ser expresso da seguinte forma:

$$(K + \mu C^T C) d = F + \mu C^T q \quad (2.50)$$

O desempenho do método depende do valor escolhido para o parâmetro de penalização μ . Números grandes, na ordem de $\mu = 10^{10}$, resultam em soluções precisas; entretanto pode acontecer de o sistema de equações estar mal-condicionado. Uma regra geral é definir μ igual a 10^5 vezes o maior número presente na matriz de rigidez global [98].

2.8 MODELO DE BIELAS E TIRANTES

2.8.1 Fundamentos do Modelo de Bielas e Tirantes

O Modelo de Bielas e Tirantes (*Strut-and-Tie Model* - STM) constitui uma ferramenta amplamente empregada na análise e dimensionamento de estruturas de concreto armado, fundamentado em uma analogia de treliça que idealiza o comportamento resistente através de elementos discretos. Neste modelo, regiões comprimidas do concreto são representadas por bielas (*struts*), barras de armadura tracionadas são representadas por tirantes (*ties*), e a interação entre esses elementos ocorre em zonas nodais (*nodes*) que sustentam estados multiaxiais de tensão (Figura 15).

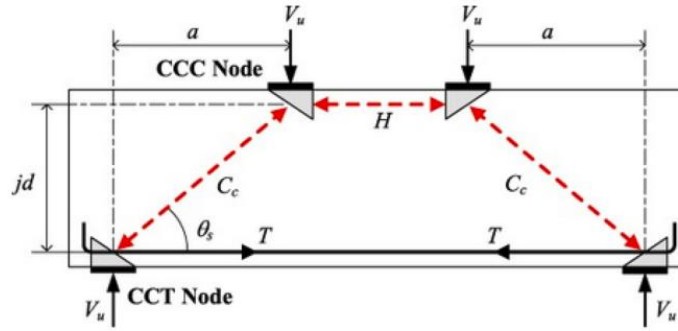


Figura 15: Diferentes elementos de uma viga simétrica de concreto armado onde, C_c são as forças de compressão diagonais (bielas), H são forças horizontais, T são forças de tração (tirantes) e θ_s é o ângulo da biela em relação ao eixo horizontal.

Fonte: Adaptado de Abbood [99].

A aplicação do método STM é particularmente relevante em regiões de descontinuidade, denominadas regiões-D, onde a hipótese de Bernoulli de distribuição plana de deformações não é válida, conforme discutido na Seção 2.1.2. Exemplos típicos de aplicação incluem vigas-parede, consolos curtos, blocos sobre estacas, nós de pórticos e regiões de ancoragem.

O reconhecimento do método STM por normas internacionais consolida sua relevância na prática de projeto. O código americano ACI 318 [2] incorpora o STM desde sua edição de 2002 através do Appendix A, estabelecendo procedimentos de projeto e verificação. O Eurocode 2 [3] inclui disposições para o método, destacando sua aplicação em regiões de descontinuidade e elementos especiais. A norma brasileira ABNT NBR 6118 [9] também reconhece o uso de modelos de bielas e tirantes como alternativa válida para o dimensionamento de regiões com distribuição não-linear de deformações.

Recentemente, a segunda geração do Eurocode 2 ampliou o tratamento do STM, incorporando campos de tensão (*stress fields*) e sua combinação com modelos clássicos de bielas e tirantes, conforme discutido por Fernández Ruiz *et al.* [100].

O STM fundamenta-se no teorema do limite inferior da plasticidade, o que garante que qualquer modelo que satisfaça as condições de equilíbrio estático e respeite os limites de resistência dos materiais conduza a uma solução estruturalmente segura, ainda que não necessariamente única ou ótima. Em razão dessa característica, diferentes modelos podem ser propostos para uma mesma estrutura, todos válidos do ponto de vista da segurança.

Embora o método admita múltiplas soluções equivalentes em termos de segurança, modelos que conduzem a caminhos de transmissão de cargas mais diretos e a uma utilização mais eficiente dos materiais tendem a resultar em soluções estruturalmente mais econômicas e mais compatíveis com o comportamento resistente esperado do elemento.

2.8.2 Modelo Material Bilinear para Concreto Armado

Para fins de análise estrutural e otimização topológica, o comportamento global do concreto armado pode ser representado, de forma simplificada, por meio de um modelo material bilinear, caracterizado por diferentes módulos de elasticidade em tração (E_T) e compressão (E_C). Este modelo idealiza o comportamento mecânico complexo do concreto armado em uma relação constitutiva bilinear que captura a assimetria fundamental entre as respostas em tração e compressão.

A idealização adotada para a rigidez axial dos elementos pode ser expressa de forma simplificada como:

$$E = \begin{cases} E_T & \text{se } \sigma_i > 0 \quad (\text{tração}) \\ E_C & \text{se } \sigma_i < 0 \quad (\text{compressão}) \end{cases} \quad (2.51)$$

onde σ representa a tensão axial no elemento. A Figura 16 ilustra o comportamento tensão-deformação do modelo material bilinear, evidenciando os diferentes módulos de elasticidade em tração e compressão.

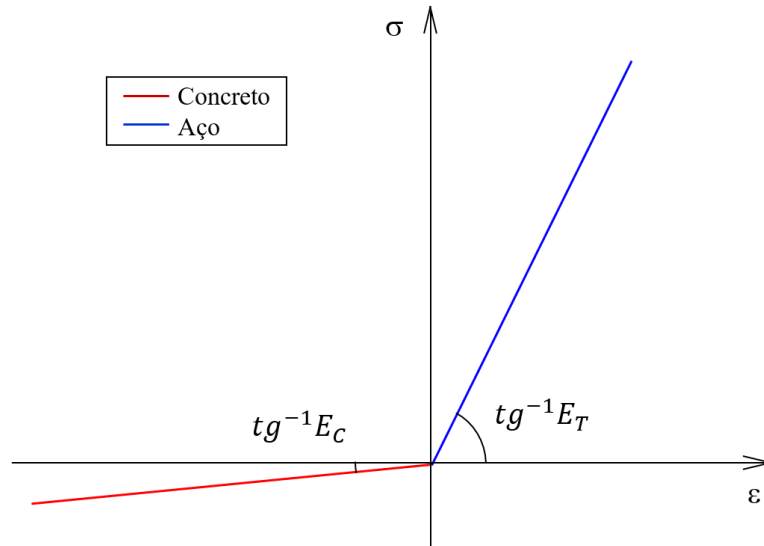


Figura 16: Relação tensão-deformação do modelo material bilinear.

Fonte: Autor.

Este modelo reflete características físicas do concreto armado: a natureza frágil do concreto em tração, com resistências à tração da ordem de 10-15% da resistência à compressão ($f_{ct} \approx 0,1 \times f_{ck}$ a $0,15 \times f_{ck}$), e a transferência de capacidade resistente à tração para a armadura de aço após a fissuração. Para o concreto, observa-se tipicamente uma relação $E_T \ll E_C$ após a fissuração, com razões E_C/E_T variando entre 2 e 10 dependendo do nível de fissuração e da taxa de armadura presente.

Este modelo não busca reproduzir o comportamento tensão-deformação real do concreto armado, mas capturar, de forma eficiente, a assimetria fundamental entre tração e compressão que governa a formação de bielas e tirantes.

A incorporação do modelo material bilinear em métodos de otimização topológica é crucial para a obtenção de resultados realistas e aplicáveis a estruturas de concreto armado. Quando módulos de elasticidade distintos são atribuídos a elementos tracionados e comprimidos no processo de otimização, a solução tende naturalmente a separar regiões onde o concreto trabalha eficientemente (compressão) daquelas onde a armadura é necessária (tração).

Querin *et al.* [101] foram pioneiros ao desenvolver métodos de otimização topológica para estruturas tipo treliça com diferentes propriedades materiais em tração e compressão, reconhecendo que esta característica é fundamental para representar o comportamento do concreto armado. Victoria *et al.* [102] demonstraram que a adoção de um modelo material bilinear permite caracterizar com precisão bielas e tirantes em modelos otimizados, gerando distribuições de armadura mais eficientes do que aquelas obtidas com modelos que não consideram a assimetria tração-compressão.

Gaynor *et al.* [103] aplicaram otimização topológica com modelo material bilinear para visualização de forças e dimensionamento de estruturas de concreto armado, mostrando que a consideração deste modelo permite identificar claramente quais elementos devem ser dimensionados como bielas (concreto comprimido) e quais devem ser detalhados como tirantes (armadura tracionada). Esta separação natural entre elementos tracionados e comprimidos constitui a base para a geração automatizada de modelos de bielas e tirantes a partir de otimização topológica.

No contexto do Método *Ground Structure* aplicado a estruturas de concreto armado, a incorporação do comportamento bilinear é implementada através de um processo iterativo onde, a cada iteração: (1) a análise de equilíbrio é realizada com os módulos de elasticidade atualizados (E_T para elementos tracionados, E_C para elementos comprimidos); (2) as tensões axiais em cada elemento são calculadas; (3) os módulos de elasticidade são reatribuídos com base no sinal da tensão; (4) o processo é repetido até convergência.

A escolha dos valores de E_T e E_C tem impacto significativo nos resultados de otimização. Para o concreto armado, valores típicos incluem E_C igual ao módulo de elasticidade inicial do concreto íntegro (E_{ci}) para a modelagem de elementos comprimidos, e para E_T , na literatura, duas abordagens principais são observadas para modelagem de elementos tracionados: (i) modelar o concreto fissurado com rigidez reduzida, utilizando $E_T = \alpha_{fis} \times E_{ci}$, onde α_{fis} é um fator de redução tipicamente entre 0,01 e 0,3 como em Victoria *et al.* [102], Bruggi [104] e Almeida *et al.* [105]; ou modelar diretamente o comportamento da armadura de aço, com $E_T = 200$ GPa.

Neste trabalho, adotou-se a segunda abordagem: $E_C = 30$ GPa representando o concreto em compressão e $E_T = 200$ GPa representando o aço, refletindo a premissa de que, no Modelo de Bielas e Tirantes, os tirantes são materializados como armadura. Essa escolha é consistente com a

prática de dimensionamento de STM, onde bielas são verificadas como elementos de concreto comprimido e tirantes são dimensionados como armadura de aço.

2.8.3 Limitações da Abordagem Manual

Na abordagem tradicional, a construção de modelos de bielas e tirantes depende em grande medida da intuição e experiência do engenheiro, que deve interpretar, de forma heurística, o fluxo de tensões na estrutura e propor um arranjo apropriado de bielas, tirantes e nós. Este processo manual, embora eficaz quando conduzido por projetistas experientes, apresenta limitações inerentes que têm motivado pesquisas em métodos automatizados de geração de STMs.

A principal limitação do processo manual reside na subjetividade da escolha do modelo. Para uma mesma geometria e carregamento, diferentes engenheiros podem propor diferentes configurações de treliça, todas estaticamente admissíveis, mas com diferentes implicações para o detalhamento da armadura e eficiência estrutural. Abbood [99], em revisão abrangente sobre STM aplicado a vigas-parede de concreto armado, destaca que esta subjetividade frequentemente conduz a soluções conservadoras, onde o excesso de armadura é utilizado como margem de segurança para compensar incertezas no modelo adotado.

Outra dificuldade significativa surge em geometrias complexas. Enquanto elementos como consolos ou vigas-parede com cargas concentradas possuem modelos STM bem estabelecidos na literatura, estruturas com múltiplas aberturas, carregamentos distribuídos, ou geometrias irregulares apresentam desafios consideráveis para a identificação manual de caminhos de transmissão de cargas estruturalmente eficientes.

A otimização topológica, particularmente através do Método *Ground Structure*, surge como ferramenta auxiliar promissora para mitigar parte dessas limitações. O trabalho pioneiro de Liang *et al.* [106] aplicou procedimentos evolucionários para otimização topológica de modelos de bielas e tirantes, mostrando que algoritmos computacionais podem identificar configurações eficientes sem intervenção manual intensiva. Xia *et al.* [10] conduziram avaliação crítica de resultados de otimização topológica para modelagem STM, identificando tanto potencialidades quanto desafios na tradução direta de topologias otimizadas em modelos simplificados para dimensionamento.

2.8.4 Geração Automatizada de Modelos de Bielas e Tirantes via *Ground Structure*

O Método *Ground Structure* apresenta compatibilidade conceitual e estrutural natural com o Modelo de Bielas e Tirantes, uma vez que ambos fundamentam-se em representações discretas

através de treliças. Na otimização por *Ground Structure*, um domínio de projeto é discretizado por uma malha densa de elementos de treliça conectando todos os nós possíveis, e o processo de otimização identifica quais elementos devem permanecer na solução final e quais devem ser removidos.

Esta abordagem possui uma correspondência direta com modelos STM: elementos da treliça otimizada sujeitos a tensões de tração representam tirantes, enquanto elementos comprimidos representam bielas. Querin *et al.* [101] desenvolveram métodos de otimização topológica para treliças com diferentes propriedades materiais em tração e compressão, reconhecendo que o modelo material bilinear é fundamental para representar adequadamente a assimetria tração–compressão do concreto armado.

A geração automatizada oferece vantagens significativas. Primeiro, a objetividade: o algoritmo produz uma solução determinística para um conjunto definido de parâmetros de modelagem, eliminando a variabilidade do processo manual. Segundo, a eficiência: o algoritmo minimiza a flexibilidade da estrutura, resultando em configurações que utilizam quantidades reduzidas de material, compatíveis com critérios de eficiência estrutural.

Zhao *et al.* [77] apresentaram metodologia para geração de modelos de bielas e tirantes utilizando otimização multi-material, onde diferentes módulos de elasticidade são atribuídos a elementos tracionados (representando o concreto fissurado com armadura) e comprimidos (concreto íntegro). Esta diferenciação permite que o algoritmo identifique naturalmente regiões onde a armadura é necessária (tirantes) e regiões onde o concreto sozinho é suficiente (bielas), fornecendo informação direta para o detalhamento estrutural.

Jewett e Carstensen [107] avançaram esta linha de pesquisa ao conduzirem investigações experimentais de leiautes de bielas e tirantes em vigas-parede de concreto armado dimensionadas com base em otimização topológica híbrida bilinear, demonstrando que elementos projetados seguindo topologias otimizadas apresentam comportamento estrutural consistente com as previsões do modelo.

2.8.5 Interpretação de Resultados como Modelos de Bielas e Tirantes

A tradução de resultados de otimização topológica em modelos de bielas e tirantes passíveis de utilização no projeto estrutural requer critérios claros de interpretação e simplificação. A partir da solução otimizada obtida pelo Método *Ground Structure*, cada elemento da treliça final pode ser classificado de acordo com o sinal de sua tensão axial:

- **Elementos tracionados** ($\sigma_i > 0$): representam regiões onde a presença de armadura tracionada é necessária, podendo ser interpretados como tirantes no contexto do STM. As forças axiais associadas a esses elementos fornecem uma estimativa das solicitações internas que devem ser resistidas pela armadura, servindo como referência para o dimensionamento segundo critérios normativos.
- **Elementos comprimidos** ($\sigma_i < 0$): representam fluxos de compressão no concreto, sendo interpretados como bielas. As forças nesses elementos indicam a intensidade do caminho compressivo, devendo posteriormente ser verificadas de acordo com as prescrições normativas quanto à resistência do concreto, geometria da biela e condições de confinamento.

Essa interpretação fornece informações qualitativas sobre o posicionamento de bielas e tirantes e quantitativas sobre a ordem de grandeza dos esforços envolvidos, constituindo um suporte racional para a concepção de modelos de bielas e tirantes. As zonas nodais, caracterizadas pela convergência de múltiplos elementos, demandam avaliação específica em etapas posteriores de projeto, especialmente quanto à ancoragem das armaduras e às tensões de compressão no concreto.

Para que a topologia otimizada seja convertida em um modelo STM simplificado e interpretável, técnicas de filtragem e pós-processamento tornam-se necessárias. Filtros geométricos permitem a consolidação de elementos aproximadamente colineares em bielas ou tirantes equivalentes, enquanto a remoção de elementos pouco solicitados ou desconectados dos principais caminhos de carga contribui para a obtenção de modelos estruturalmente claros e compatíveis com a prática de projeto.

A incorporação do modelo material bilinear na formulação do Método *Ground Structure* — por meio da atribuição de módulos de elasticidade distintos para tração e compressão — favorece a separação natural entre regiões predominantemente tracionadas e comprimidas. Essa característica aproxima os resultados da otimização do comportamento físico do concreto armado, facilitando sua interpretação no contexto do modelo de bielas e tirantes.

Neste trabalho, essa abordagem é empregada como ferramenta de apoio à geração sistemática de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado em regiões-D. A formulação matemática adotada, bem como as estratégias de filtragem e interpretação, são apresentadas no Capítulo 3, enquanto a análise dos resultados obtidos é discutida no Capítulo 4.

3. METODOLOGIA

A metodologia utilizada no presente trabalho envolve o código computacional desenvolvido por Sanders *et al.* [108], fundamentado na formulação de Ramos Jr. e Paulino [83]. O algoritmo consiste na implementação do Método *Ground Structure* com a formulação elástica aninhada e a aplicação dos filtros discreto e geométrico resultando em soluções de otimização topológica para estruturas de treliça com comportamento diferente sob tração e compressão. A Figura 17 apresenta o fluxograma do algoritmo de análise e otimização estrutural. Todas as rotinas foram implementadas na linguagem de programação MATLAB®.

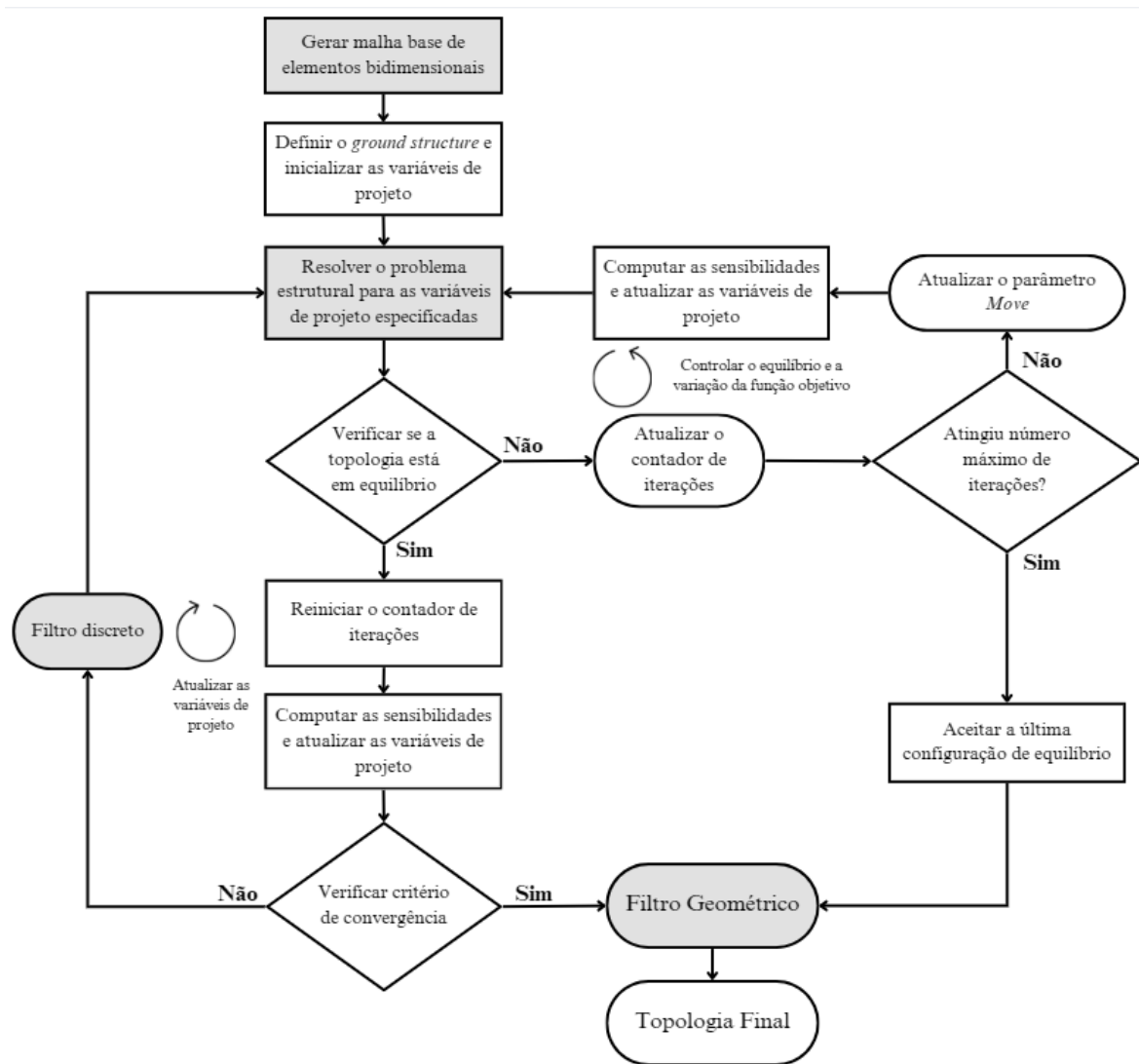


Figura 17: Fluxograma do algoritmo de otimização estrutural.

Fonte: Adaptado de Ramos Jr. e Paulino [83].

3.1 GERADOR DA MALHA DE BASE 2D E DA MALHA *GROUND STRUCTURE*

A malha *ground structure* inicial é obtida a partir da discretização do domínio de projeto em elementos bidimensionais quadriláteros, denominada malha de base. Essa malha pode ser gerada por meio do *PolyMesher* [109], o qual cria malhas compostas por elementos poligonais, ou, no caso de domínios regulares, por meio do *RegMesher*, ferramenta desenvolvida pela coorientadora deste trabalho, que gera malhas uniformes com elementos finitos quadriláteros, definidas por n_{elx} elementos na direção do eixo x e n_{ely} elementos na direção do eixo y .

Nessa etapa, também são definidas as condições de contorno da estrutura, incluindo os apoios e os carregamentos aplicados, os quais serão utilizados nas análises subsequentes.

Com a malha de elementos bidimensionais definida é então gerada a malha *ground structure* inicial que depende do nível de profundidade de conexões entre os nós do domínio de projeto, denominado pelo parâmetro de entrada *Lvl* definido pelo usuário ou projetista. Nesta etapa, o algoritmo identifica e remove barras colineares que fazem parte da malha *ground structure* inicial, resultando em uma malha sem elementos sobrepostos. Caso o domínio de projeto possua alguma peculiaridade como uma área vazada, é também nesta etapa que são fornecidas as coordenadas que formam a geometria que será considerada como uma restrição no domínio de projeto.

3.2 FORMULAÇÃO ELÁSTICA ANINHADA PROPOSTA

A formulação elástica aninhada mostrada em (2.11) requer um limite inferior positivo mínimo, x_i^{min} , nas áreas das seções transversais para evitar singularidade ou mal condicionamento da matriz de rigidez à medida que as áreas dos elementos tendem a zero. Dessa forma, (2.11) constitui um problema de otimização dimensional de treliças, e não um problema de otimização topológica, além disso a estrutura globalmente ótima resultante a partir de (2.11) contém todos os elementos presentes na *ground structure* inicial.

Para abordar o problema de otimização topológica, Ramos Jr. e Paulino [83] propuseram regularizar o problema estrutural ao invés de regularizar o problema de otimização. Esse mecanismo permite que os elementos de treliça possam ser removidos das soluções intermediárias de projeto, onde os deslocamentos nodais são implicitamente definidos por meio da regularização de Tikhonov aplicada à energia potencial.

Apesar de eficaz ao resolver o problema de problemas singulares, a regularização de Tikhonov, por si só, apenas permite que elementos sejam atribuídos com área nula durante a otimização, mas não garante a remoção de todas as barras finas. Para alcançar tal objetivo de projeto, Ramos Jr. e

Paulino [83] formularam o filtro discreto, que é aplicado às soluções intermediárias e remove as barras finas durante as iterações de otimização. O filtro define as áreas das seções transversais dos elementos como zero caso sejam inferiores a uma determinada fração, α_f (o valor do filtro), da maior área de seção transversal presente na topologia atual.

Assim, a formulação elástica aninhada modificada com a regularização de Tikhonov e a imposição do filtro discreto torna-se [83]:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}}: & C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \begin{cases} \mathbf{L}^T \mathbf{x} - V^{máx} \leq 0 \\ 0 \leq x_i \leq x_i^{máx} \end{cases} \\ \text{com} & \min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ \text{e} & x_i = \text{Filtro}(\mathbf{x}, \alpha_f) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde

$$x_i = \text{Filtro}(\mathbf{x}, \alpha_f) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{x_i}{\max(\mathbf{x})} < \alpha_f \\ x_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.3 ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural em cada iteração do processo de otimização é realizada utilizando o MEF para elementos de treliça, como apresentado na Seção 2.7.4 deste trabalho. O equilíbrio da estrutura é determinado pela Equação (2.41), mostrada a seguir:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de rigidez simétrica semidefinida positiva, $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\mathbf{F}$ é o vetor de forças aplicadas. A matriz $\mathbf{K}$ é obtida pela montagem das matrizes de rigidez elementares das barras da *ground structure*, considerando suas áreas da seção transversal atualizadas a cada iteração.

Durante o processo de otimização topológica, elementos podem ter suas áreas reduzidas a valores muito próximos de zero ou ainda valores nulos, o que pode resultar em matriz de rigidez singular ou mal-condicionada. Este problema é tratado pela regularização de Tikhonov, descrita a seguir.

3.3.1 Regularização de Tikhonov

Permitir que elementos sejam removidos da topologia durante o processo de otimização significa impor o limite inferior mínimo (x^{min}) das variáveis de projeto igual a zero. Essa imposição pode levar a um problema mal-posto, pois elementos com área nula não contribuem para a rigidez da estrutura, resultando em matriz de rigidez $\mathbf{K}$ singular ou mal-condicionada.

Para prevenir este problema, Ramos Jr. e Paulino [83] propuseram regularizar o problema estrutural aplicando a regularização de Tikhonov para a energia potencial total. A expressão regularizada para a energia potencial total é dada por:

$$\begin{aligned}\Pi_R(\mathbf{u}) &= \Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{F} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{u}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde λ é o parâmetro da regularização de Tikhonov, um valor positivo pequeno. A regularização é equivalente a adicionar uma rigidez mínima λ a todos os graus de liberdade da estrutura, ou, de forma análoga, conectar cada nó a um apoio fictício através de uma mola de rigidez λ . Isso assegura que a matriz de rigidez regularizada $\mathbf{K} + \lambda \mathbf{I}$ seja sempre positiva definida e inversível, mesmo quando elementos possuam área nula.

A minimização de Π_R resulta no sistema linear modificado:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

O parâmetro λ deve ser pequeno o suficiente para não alterar significativamente a solução física, mas grande o suficiente para garantir estabilidade numérica. Seguindo Ramos Jr. e Paulino [83], neste trabalho adotou-se:

$$\lambda = \lambda_0 \times \text{média}(\text{diag}(\mathbf{K})) \quad (3.5)$$

onde $\lambda_0 = 10^{-12}$ e $\text{diag}(\mathbf{K})$ representa a diagonal principal da matriz de rigidez não regularizada.

3.3.2 Verificação de Equilíbrio Global da Estrutura

O comportamento diferenciado sob tração e compressão das estruturas de treliça (módulos de elasticidade distintos, $E_T \neq E_C$) introduz não-linearidade no problema de equilíbrio, mesmo que as deformações sejam pequenas e a geometria permaneça inalterada. Esta não-linearidade decorre

do fato de que o estado de tensão em cada elemento não é conhecido a priori, sendo necessário um processo iterativo para determinar quais elementos estão tracionados ou comprimidos e, conseqüentemente, qual módulo de elasticidade deve ser utilizado.

Portanto, dentro de cada iteração do *loop* de otimização, é necessário um *loop* interno para resolver o equilíbrio não-linear da estrutura com a topologia atual. Neste processo, os elementos classificados segundo seus estados de tensão ($\sigma_i > 0$ para tração, $\sigma_i < 0$ para compressão), os módulos de elasticidade correspondentes são atribuídos ($E_i = E_T$ ou $E_i = E_C$), a matriz de rigidez é montada e o sistema de equilíbrio é resolvido. Este ciclo se repete até que a convergência seja atingida.

A convergência do *loop* interno de equilíbrio é verificada resíduo global normalizado:

$$R = \frac{\|K\mathbf{u} - \mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|} \leq \varrho \quad (3.6)$$

onde ϱ é uma tolerância numérica. A estrutura é considerada em equilíbrio quando $R \leq \varrho$. Neste trabalho, adotou-se $\varrho = 10^{-4}$.

O resíduo R é uma medida numérica do desequilíbrio de forças na estrutura, calculado diretamente a partir das matrizes e vetores da análise por elementos finitos. Valores pequenos de R indicam que o sistema de equilíbrio está satisfeito dentro da tolerância prescrita.

Caso o equilíbrio não seja atingido após a atualização das variáveis de projeto pelo Critério de Otimalidade, o limite de passo (*move limit*) é reduzido e o filtro discreto é reaplicado, conforme ilustrado no fluxograma da Figura 17.

3.4 CRITÉRIO DE OTIMALIDADE

O Critério de Otimalidade estabelecido por Ramos Jr. e Paulino [81] (Seção 2.5) é utilizado como esquema de atualização das variáveis de projeto. Por definição, o Critério de Otimalidade não permite que elementos com área de seção transversal nula retornem para a topologia em iterações subsequentes.

Nos exemplos apresentados no próximo capítulo, o limite de passo (*move limit*), M , utilizado no Critério de Otimalidade para otimização das variáveis de projeto é definido por:

$$M = \gamma x_0 \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{x}_0$ é um vetor com a área inicial da seção transversal de cada elemento e γ é o parâmetro de passo (*move parameter*).

O parâmetro γ limita a mudança relativa da área em cada iteração. Por exemplo, com $\gamma = 0,8$ (valor adotado neste trabalho), a área de qualquer elemento pode variar no máximo $\pm 80\%$ do seu valor inicial em uma única iteração, ou seja:

$$\mathbf{x}_0 - 0,8\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}^{(k+1)} \leq \mathbf{x}_0 + 0,8\mathbf{x}_0$$

Este controle previne oscilações numéricas excessivas e garante convergência gradual da topologia.

A otimização finaliza quando a norma infinita da mudança das variáveis de projeto entre iterações sucessivas é menor que a tolerância de convergência prescrita:

$$\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|_\infty < tol \quad (3.9)$$

A norma infinita $\|\cdot\|_\infty$ representa o maior valor absoluto dentre todos os elementos do vetor, ou seja:

$$\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|_\infty = \max_i |x_i^{(k-1)} - x_i^k|$$

Em termos práticos, isto significa que a convergência é atingida quando o elemento que mais variou entre as iterações $k - 1$ e k apresenta mudança inferior à tolerância. Neste trabalho, adotou-se $tol = 10^{-10}$, garantindo convergência numérica muito rigorosa.

3.5 FILTRO DISCRETO

O filtro formulado por Ramos Jr. e Paulino [83], permite extrair estruturas bem definidas da *ground structure*. O filtro discreto é executado utilizando variáveis de projeto atualizadas iterativamente durante o processo de otimização, conforme:

$$x_i = \text{Filtro}(\mathbf{x}, \alpha_f) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{x_i}{\max(\mathbf{x})} < \alpha_f \\ x_i & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O parâmetro α_f é determinado utilizando o método da bisseção e pode assumir valores distintos, permitindo ao usuário controlar a resolução final da topologia, a qual é definida pelo parâmetro α_{Top} dado por:

$$\alpha_{Top} = \frac{\min(\mathbf{x}_{Top})}{\max(\mathbf{x}_{Top})} \geq \alpha_f \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{x}_{Top}$ é o vetor de áreas dos elementos que pertencem à topologia final. Este parâmetro representa uma métrica de uniformidade estrutural, constituindo uma propriedade emergente do processo de otimização que serve como verificação retrospectiva da eficácia do filtro. A condição $\alpha_{Top} \geq \alpha_f$ assegura que todas as barras remanescentes atendem ao critério mínimo estabelecido, garantindo a ausência de elementos excessivamente finos na configuração final.

3.6 FILTROS SEPARADOS PARA ELEMENTOS TRACIONADOS E COMPRIMIDOS

Neste trabalho, implementou-se uma extensão do filtro discreto que permite a aplicação de valores de parâmetros α_f distintos para elementos tracionados e comprimidos. Esta modificação possibilita controlar seletivamente a simplificação de cada grupo de elementos, permitindo investigar a sensibilidade da topologia ótima a diferentes estratégias de simplificação.

A formulação estendida do filtro discreto é expressa por:

$$x_i = \text{Filtro}(\mathbf{x}, \alpha_f) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{x_i}{\max(\mathbf{x})} < \alpha_{f,T} \text{ e } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{se } \frac{x_i}{\max(\mathbf{x})} < \alpha_{f,C} \text{ e } \sigma_i < 0 \\ x_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.11)$$

onde $\alpha_{f,T}$ e $\alpha_{f,C}$ são os valores de parâmetros para elementos em tração e compressão, respectivamente, e σ_i é a tensão axial no elemento i . Esses parâmetros são definidos a partir de um valor base α_f por meio de multiplicadores de ajuste f_T e f_C :

$$\alpha_{f,T} = \alpha_f \times f_T \quad (3.12)$$

$$\alpha_{f,C} = \alpha_f \times f_C \quad (3.13)$$

Quando $f_T = f_C = 0$, a formulação se reduz ao filtro discreto unificado tradicional (Eq. 3.2), no qual o parâmetro base α_f é aplicado indistintamente a todos os elementos. Quando $f_T \neq 0$ e $f_C \neq 0$, torna-se possível controlar seletivamente o grau de remoção de elementos em tração e compressão. Valores $f_T > f_C$ resultam em remoção mais agressiva de elementos tracionados, favorecendo a manutenção de elementos comprimidos, enquanto $f_T < f_C$ produz o efeito inverso.

Essa estratégia permite investigar como diferentes níveis de simplificação aplicados a tirantes e bielas influenciam a topologia final e sua interpretabilidade como modelo de bielas e tirantes, sem interferir no processo de otimização propriamente dito.

3.7 FILTRO GEOMÉTRICO

O filtro geométrico constitui a etapa final de pós-processamento, aplicada após a topologia atingir a convergência e ser simplificada pelo filtro discreto.

É importante distinguir o filtro geométrico com o procedimento de remoção de barras colineares realizado durante a geração da malha *ground structure* inicial (Seção 3.1). Naquela etapa, elementos colineares sobrepostos são identificados e removidos da malha base para evitar redundância computacional antes do início da otimização. Já o filtro geométrico atua sobre a topologia otimizada convergida, substituindo barras consecutivas e alinhadas por um único elemento equivalente, uniformizando a configuração estrutural final.

A topologia resultante do filtro discreto, Figura 18(a), pode apresentar elementos flutuantes (barras isoladas desconectadas do caminho de carga principal) e nós intermediários alinhados (múltiplos nós colineares conectados por barras consecutivas). O filtro geométrico corrige estas imperfeições removendo os elementos flutuantes por análise de conectividade da malha e consolidando nós alinhados, onde três ou mais nós colineares conectados em sequência têm seus nós intermediários eliminados, sendo substituídos por um único elemento mais longo conectando os nós extremos, Figura 18(b).

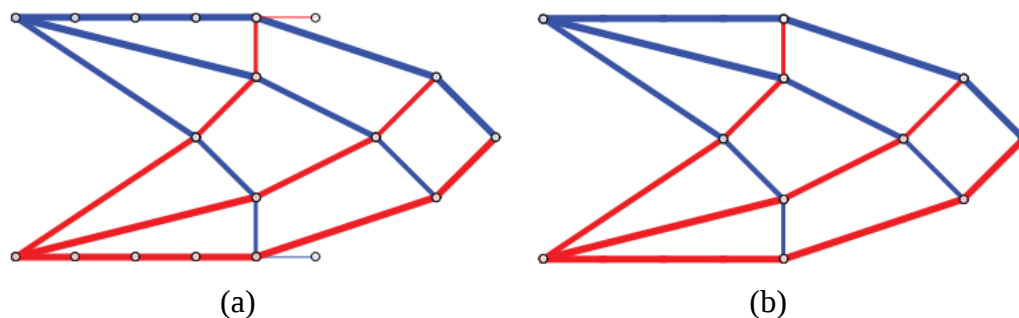


Figura 18: Efeito do filtro geométrico na uniformização da topologia: a) topologia após filtro discreto; b) topologia final após filtro geométrico.

Elementos vermelhos: compressão; elementos azuis: tração.

Fonte: Adaptado de Sanders *et al.* [108].

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta e discute os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia de otimização topológica via Método *Ground Structure* descrita no capítulo anterior. A análise concentra-se na avaliação das topologias estruturais geradas, com ênfase em sua interpretabilidade como modelos de bielas e tirantes e em sua consistência estrutural frente a soluções encontradas na literatura.

Os exemplos analisados são organizados de forma progressiva, iniciando-se por um caso de calibração e avançando para o caso de uma viga contínua e posteriormente para aplicações em regiões-D complexas de concreto armado. Para cada caso, são descritas a geometria da estrutura, as condições de apoio e carregamento, os parâmetros relevantes do processo de otimização e as características da malha adotada, de modo a permitir a adequada interpretação dos resultados.

Salvo indicação em contrário, adotou-se em todas as análises um modelo material bilinear para o concreto armado, com módulo de elasticidade $E_c = 30 \text{ GPa}$ para elementos comprimidos e $E_t = 200 \text{ GPa}$ para elementos tracionados. A carga aplicada foi fixada em $P = 100 \text{ kN}$, a fração de volume em 20% e o nível de conectividade da malha *ground structure* foi considerado máximo (*full*).

4.1 VIGA BIAPOIADA

Neste primeiro exemplo, é analisada uma viga biapoada com vários casos de condições de suporte. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha de 16×4 elementos, como mostra a Figura 19(a). A malha *ground structure* inicial é ilustrada na Figura 19(b). O filtro discreto aplicado é único para os elementos em tração e compressão e o valor do parâmetro é $\alpha_f = 0,01$. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 1 e as soluções topológicas para cada caso de condição de suporte são apresentadas na Figura 20.

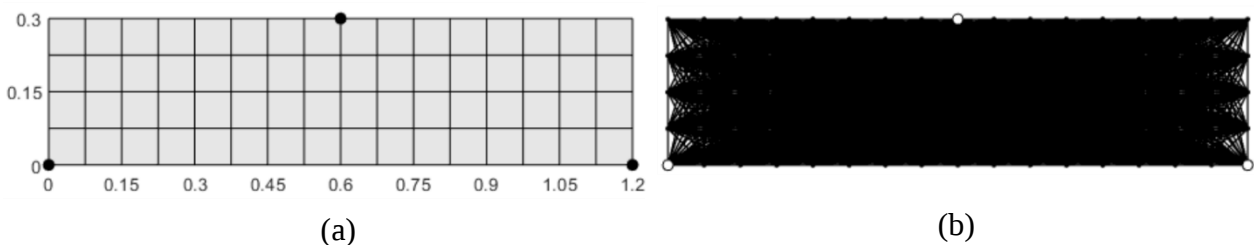


Figura 19: a) malha base 2D para a viga biapoada; b) malha *ground structure* inicial.

Fonte: Autor.

Tabela 1: Resultados para a viga biapoiada.

Caso (a)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	13,8192	12,8898
Nº de iterações	Resíduo	$3,9175 \times 10^{-11}$	$3,1918 \times 10^{-11}$
483	Nº de barras	40	27
Caso (b)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	24,6540	23,7246
Nº de iterações	Resíduo	$4,0832 \times 10^{-5}$	$3,6811 \times 10^{-5}$
484	Nº de barras	40	27
Caso (c)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	18,8192	17,8898
Nº de iterações	Resíduo	$6,2931 \times 10^{-11}$	$5,4556 \times 10^{-11}$
484	Nº de barras	40	27
Caso (d)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	23,8192	22,8898
Nº de iterações	Resíduo	$8,1534 \times 10^{-11}$	$7,2126 \times 10^{-11}$
484	Nº de barras	40	27
Caso (e)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	10,4913	7,5742
Nº de iterações	Resíduo	$3,2171 \times 10^{-7}$	$2,8284 \times 10^{-7}$
406	Nº de barras	22	13
Caso (f)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	11,7118	11,4117
Nº de iterações	Resíduo	$4,8707 \times 10^{-7}$	$4,005 \times 10^{-7}$
635	Nº de barras	38	35

Fonte: Autor.

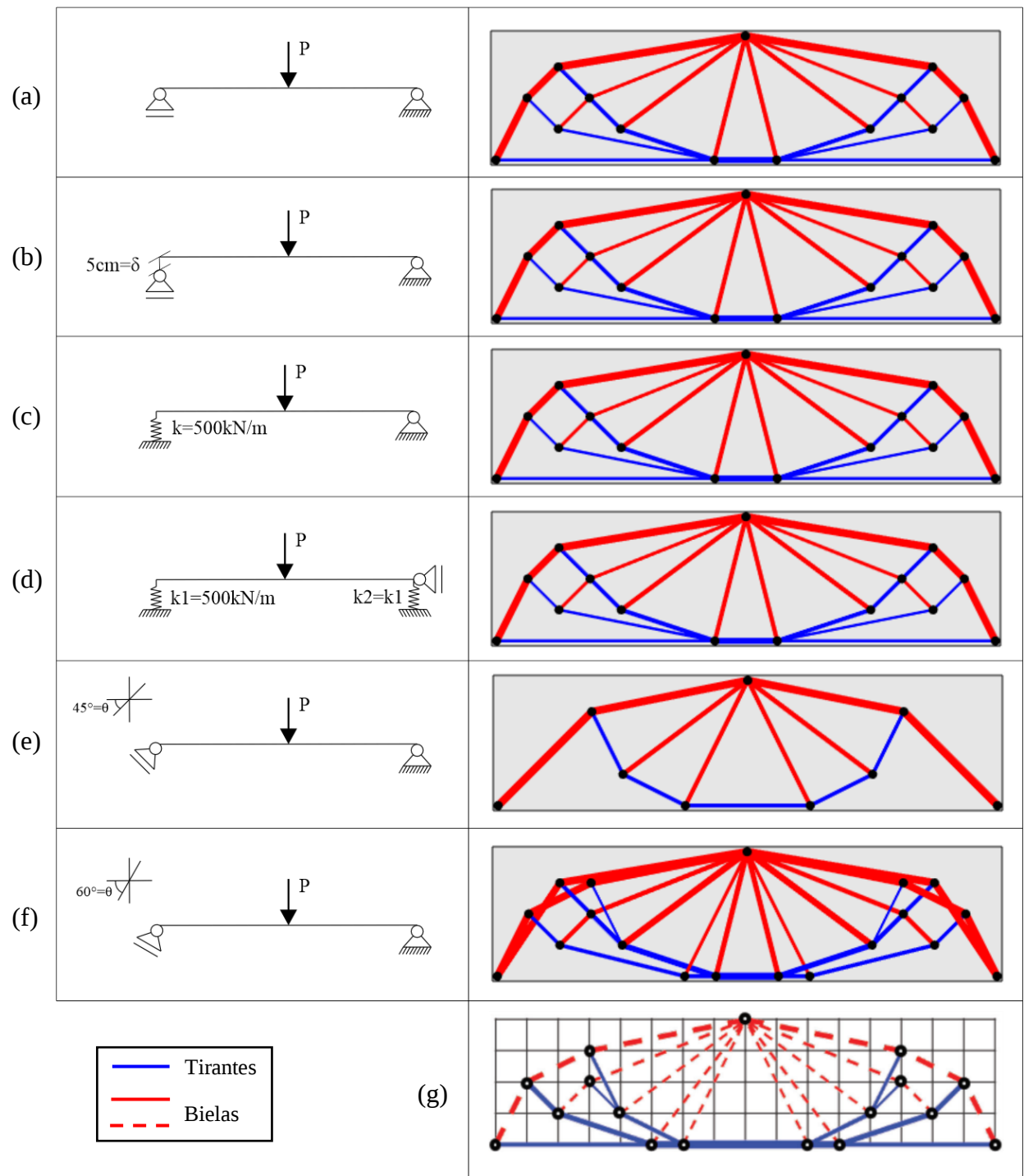


Figura 20: Resultados para viga biapoiaada considerando diferentes condições de suporte. Esquerda – modelo estrutural; Direita – soluções topológicas. (a-f) Autor; (g) Zhao *et al.* [77].

Fonte: Como indicado na legenda.

A viga biapoiada foi analisada considerando seis diferentes condições de suporte (casos a-f), com o objetivo de avaliar a influência das restrições de contorno na topologia final dos modelos de bielas e tirantes obtidos. Em todos os casos, a malha *ground structure* inicial continha 2196 barras, número significativamente reduzido após a aplicação do filtro discreto ($\alpha_f = 0,01$) e do filtro geométrico.

Nos casos (a) e (b), correspondentes a apoios rígidos, as soluções topológicas apresentaram um mecanismo resistente típico de vigas em flexão, composto por um arco comprimido superior e um tirante inferior contínuo. A introdução de um deslocamento vertical prescrito no apoio esquerdo no caso (b) resultou em aumento da flexibilidade, indicando maior deformabilidade global da estrutura devido à restrição cinemática imposta, embora a topologia global do modelo de bielas e tirantes permaneça semelhante à do caso (a). Esse comportamento é consistente com a teoria clássica das estruturas, segundo a qual, em sistemas isostáticos, recalques de apoio não induzem esforços internos adicionais, afetando predominantemente o campo de deslocamentos sem modificar o mecanismo resistente da estrutura.

A introdução de molas elásticas nos apoios (casos c e d) também não resultou em alterações qualitativas na topologia final obtida. As soluções preservam o mesmo mecanismo resistente observado nos casos com apoios rígidos, caracterizado por um arco comprimido superior e um tirante inferior contínuo. Nesses casos, o efeito das molas manifesta-se principalmente de forma quantitativa, por meio do aumento da flexibilidade global da estrutura, decorrente da menor rigidez das condições de contorno. Do ponto de vista energético, parte da energia de deformação passa a ser armazenada nas próprias molas, o que reduz a influência dessas modificações de rigidez sobre a organização das barras na solução ótima. Assim, para a viga biapoiada analisada, o caminho de transferência de cargas é estruturalmente bem definido e pouco sensível a variações moderadas na rigidez dos apoios.

Nos casos com apoios inclinados (e) e (f), por outro lado, a direção da reação de apoio alterou a organização das barras ativas na topologia final. No caso (e), com inclinação de 45° , a *ground structure* inicial já continha barras orientadas nessa mesma direção, permitindo que essas barras transmitissem diretamente a reação de apoio para o interior da estrutura. O resultado foi uma topologia simples, com caminho de carga direto e baixa flexibilidade estrutural.

No caso (f), com inclinação de 60° , a *ground structure* inicial não continha barras alinhadas com essa direção. As barras mais próximas apresentavam inclinações de 56° e 72° , nenhuma

coincidindo exatamente com a direção da reação de apoio. Dessa forma, a transmissão das forças ocorreu por meio de combinações de barras com orientações distintas. A topologia final apresentou maior densidade de elementos, pois o equilíbrio exigiu a participação de múltiplas bielas para acomodar a direção da reação. A flexibilidade obtida nesse caso também foi maior, uma vez que a restrição de volume permaneceu igual a 20%, porém esse volume foi distribuído em uma configuração estrutural composta por um número maior de barras.

Adicionalmente, observa-se que, nos casos com apoios inclinados, a topologia não apresenta um banzo inferior contínuo ao longo de todo o vão, diferentemente do comportamento observado nos casos com apoios verticais. Esse resultado pode ser explicado pela presença de uma componente horizontal nas reações de apoio, a qual contribui para o equilíbrio das forças de tração que, nos casos clássicos de flexão, seriam predominantemente resistidas por um tirante inferior contínuo. Dessa forma, o otimizador tende a suprimir a necessidade de um banzo inferior completo, mantendo-o apenas na região central do vão, onde o momento fletor é máximo. Nessa região, a presença do banzo inferior é estruturalmente vantajosa, pois aumenta o braço de alavanca entre as regiões comprimida e tracionada, contribuindo para a eficiência do mecanismo resistente.

A comparação com a solução proposta por Zhao *et al.* [77] evidencia que, embora o mecanismo resistente fundamental seja preservado, as topologias obtidas neste trabalho apresentam menor densidade estrutural, resultado da limitação de volume e da aplicação do filtro discreto. Observa-se que mudanças nas condições de apoio influenciam a topologia apenas quando alteram significativamente o campo de reações, enquanto variações de rigidez afetam principalmente a flexibilidade global, sem modificar o mecanismo resistente básico da viga biapoiada.

4.2 VIGA CONTÍNUA

Neste segundo exemplo, é analisada uma viga contínua sujeita a carregamento lateral. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha de 16x4 elementos, como mostra a Figura 21(a). A malha *ground structure* inicial é apresentada na Figura 21(b). O filtro discreto aplicado é único para os elementos em tração e compressão e o valor do parâmetro é $\alpha_f = 0,01$. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 2 e as soluções topológicas são apresentadas na Figura 22.

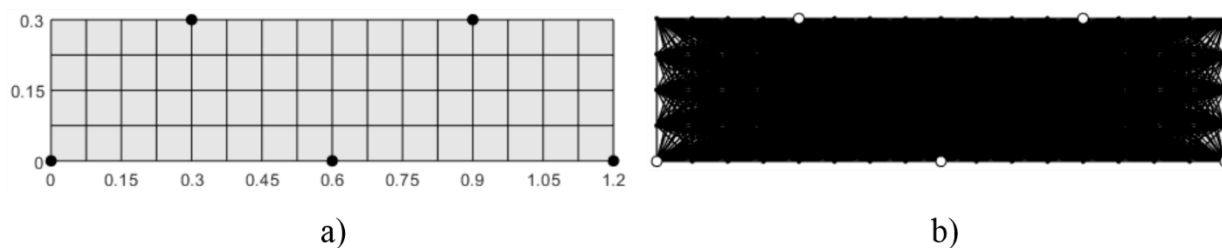


Figura 21: a) malha base 2D para a viga contínua; b) malha *ground structure* inicial.

Fonte: Autor.

Tabela 2: Resultados para a viga contínua.

Caso (a)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	0,0840	0,0402
Nº de iterações	Resíduo	$7,4479 \times 10^{-12}$	$4,3039 \times 10^{-12}$
543	Nº de barras	42	21
Caso (b)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	39,9165	36,6141
Nº de iterações	Resíduo	$4,4667 \times 10^{-11}$	$4,4667 \times 10^{-11}$
657	Nº de barras	58	35
Caso (c)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	0,0956	0,0867
Nº de iterações	Resíduo	$6,3925 \times 10^{-12}$	$6,8272 \times 10^{-12}$
776	Nº de barras	50	34
Caso (d)			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
2196	Flexibilidade (C)	0,0667	0.0167
Nº de iterações	Resíduo	$1,8263 \times 10^{-08}$	$1,6668 \times 10^{-08}$
734	Nº de barras	16	4

Fonte: Autor.

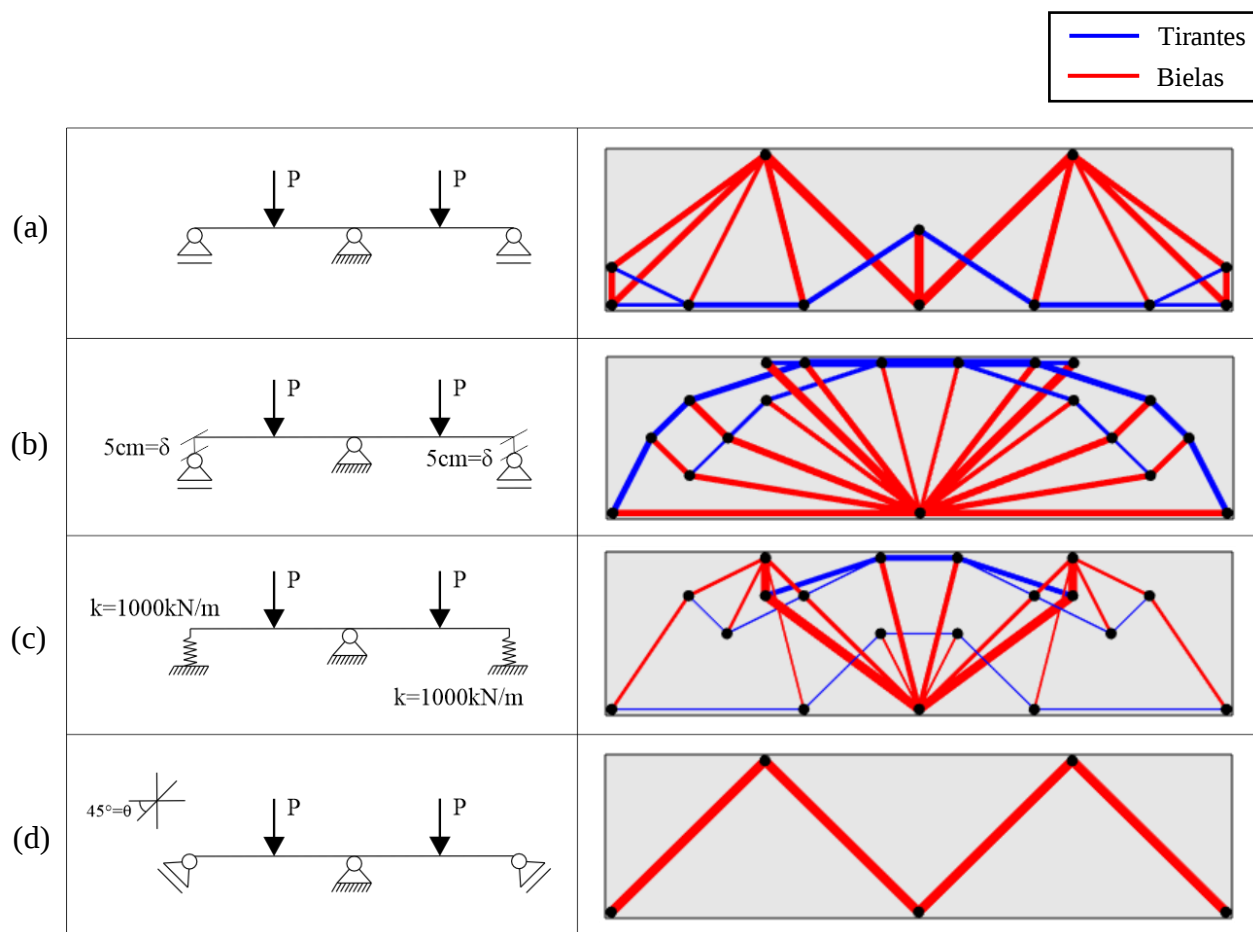


Figura 22: Resultados para viga contínua considerando diferentes condições de suporte. Esquerda – modelo estrutural; Direita – soluções topológicas. (a-d) Autor.

Fonte: Como indicado na legenda.

A viga contínua foi analisada considerando três apoios, sendo o apoio central de segundo gênero e os apoios de extremidade de primeiro gênero, com carregamentos concentrados aplicados no meio de cada vão. A *ground structure* inicial foi mantida com 2196 barras, permitindo a identificação dos caminhos de carga a partir das diferentes condições de contorno impostas.

No caso (a), correspondente à configuração com apoios rígidos, a topologia resultante apresenta dois mecanismos principais associados a cada vão. Observa-se a formação de bielas inclinadas que conectam as regiões de aplicação de carga ao apoio central, caracterizando um fluxo de compressão direcionado para essa região, onde ocorre inversão do sinal do momento fletor. Nos vãos extremos, o equilíbrio é garantido por tirantes inferiores contínuos, enquanto na região sobre o apoio central forma-se um tirante superior, compatível com a presença de momento negativo. A solução

reproduz, portanto, a alternância entre regiões tracionadas inferiores nos vãos e tracionadas superiores sobre o apoio intermediário, em acordo com o comportamento esperado de vigas contínuas.

No caso (b), com introdução de deslocamentos prescritos nos apoios de extremidade, observa-se aumento expressivo da flexibilidade (Tabela 2), acompanhado por uma topologia significativamente mais densa. A necessidade de compatibilizar os deslocamentos impostos com as condições de equilíbrio resulta na ativação de múltiplos caminhos de carga, com maior participação de tirantes na região superior. A estrutura passa a mobilizar um conjunto mais amplo de barras para acomodar as deformações impostas, sem, contudo, alterar completamente o padrão global de transferência de forças entre carregamentos e apoios.

No caso (c), com inserção de molas elásticas nos apoios de extremidade, a topologia obtida mantém características intermediárias entre os casos (a) e (b). As bielas principais que conectam as cargas ao apoio central permanecem presentes, indicando que o fluxo de compressão dominante não se altera. Entretanto, observa-se maior ramificação do sistema de tração, especialmente nas regiões próximas aos apoios, refletindo a participação das molas no equilíbrio global. Parte da energia de deformação passa a ser armazenada nas condições de contorno, o que reduz a necessidade de redistribuições mais extensas na topologia, quando comparado ao caso com deslocamentos prescritos.

No caso (d), com apoios inclinados a 45° , a solução apresenta uma redução significativa no número de barras após o filtro geométrico, resultando em uma topologia com apenas quatro elementos. As bielas formam um arranjo em “V” invertido em cada vão, conectando diretamente os pontos de aplicação de carga aos apoios. A presença de componentes horizontais nas reações de apoio altera o equilíbrio global, reduzindo a necessidade de tirantes adicionais para satisfazer às condições de equilíbrio. Como consequência, o mecanismo resistente é descrito por um conjunto mínimo de barras comprimidas, sem formação de um sistema de tração distribuído como nos casos anteriores.

De forma geral, os resultados mostram que, para a viga contínua, a topologia é bastante condicionada pela combinação entre continuidade estrutural e condições de apoio. A presença do apoio intermediário introduz uma região de momento negativo que modifica a posição dos tirantes principais, enquanto alterações nas condições de contorno influenciam a densidade da solução e a

forma de redistribuição das forças internas, sem necessariamente alterar o caminho de compressão dominante.

4.3 PAREDE DE CISALHAMENTO ACOPLADA

Neste terceiro exemplo, é analisada uma parede de cisalhamento acoplada de três pavimentos sujeita a carregamento lateral. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha de 9x9 elementos, como mostra a Figura 23(a). A malha *ground structure* inicial é apresentada na Figura 23(b). O filtro discreto aplicado é único para os elementos em tração e compressão e o valor do parâmetro é $\alpha_f = 0,4$. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 3 e a solução topológica em comparação com soluções da literatura são apresentadas na Figura 24.

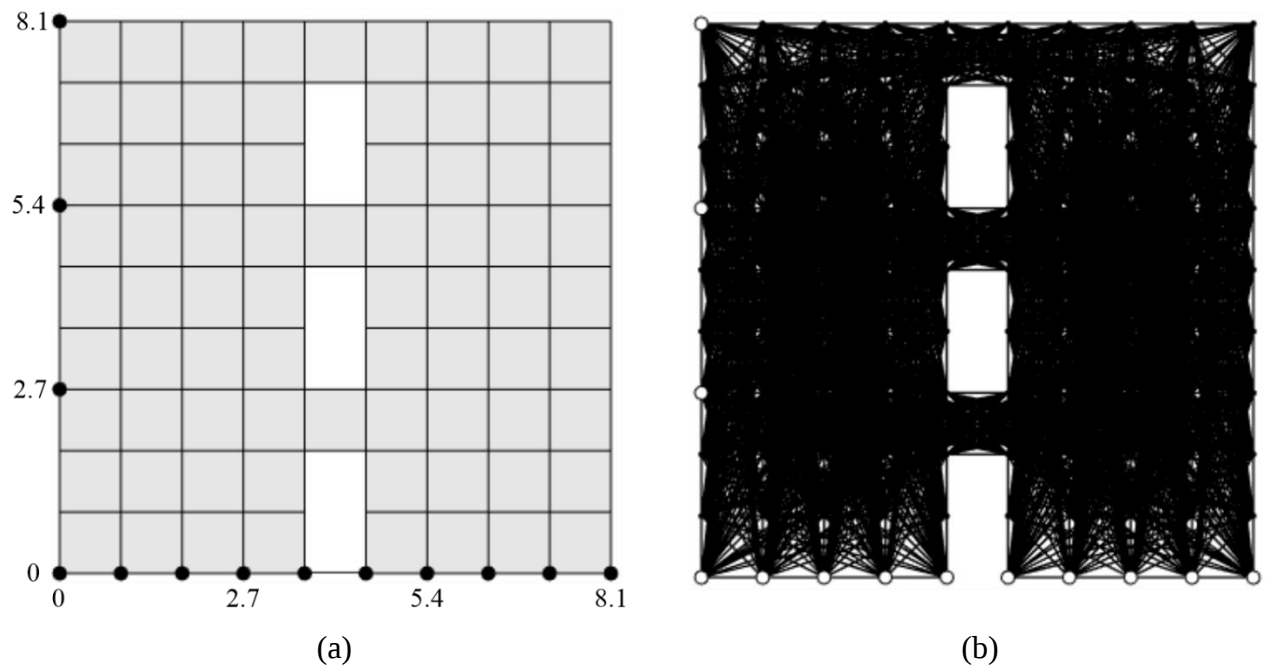


Figura 23: a) malha base 2D para a parede de cisalhamento acoplada; b) malha *ground structure* inicial.

Fonte: Autor.

Tabela 3: Resultados para a parede de cisalhamento acoplada.

$\alpha_f = 0,4$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
3020	Flexibilidade (C)	34,1481	35,1069
Nº de iterações	Resíduo	$7,9556 \times 10^{-12}$	$9,2330 \times 10^{-12}$
1214	Nº de barras	13	13

Fonte: Autor.

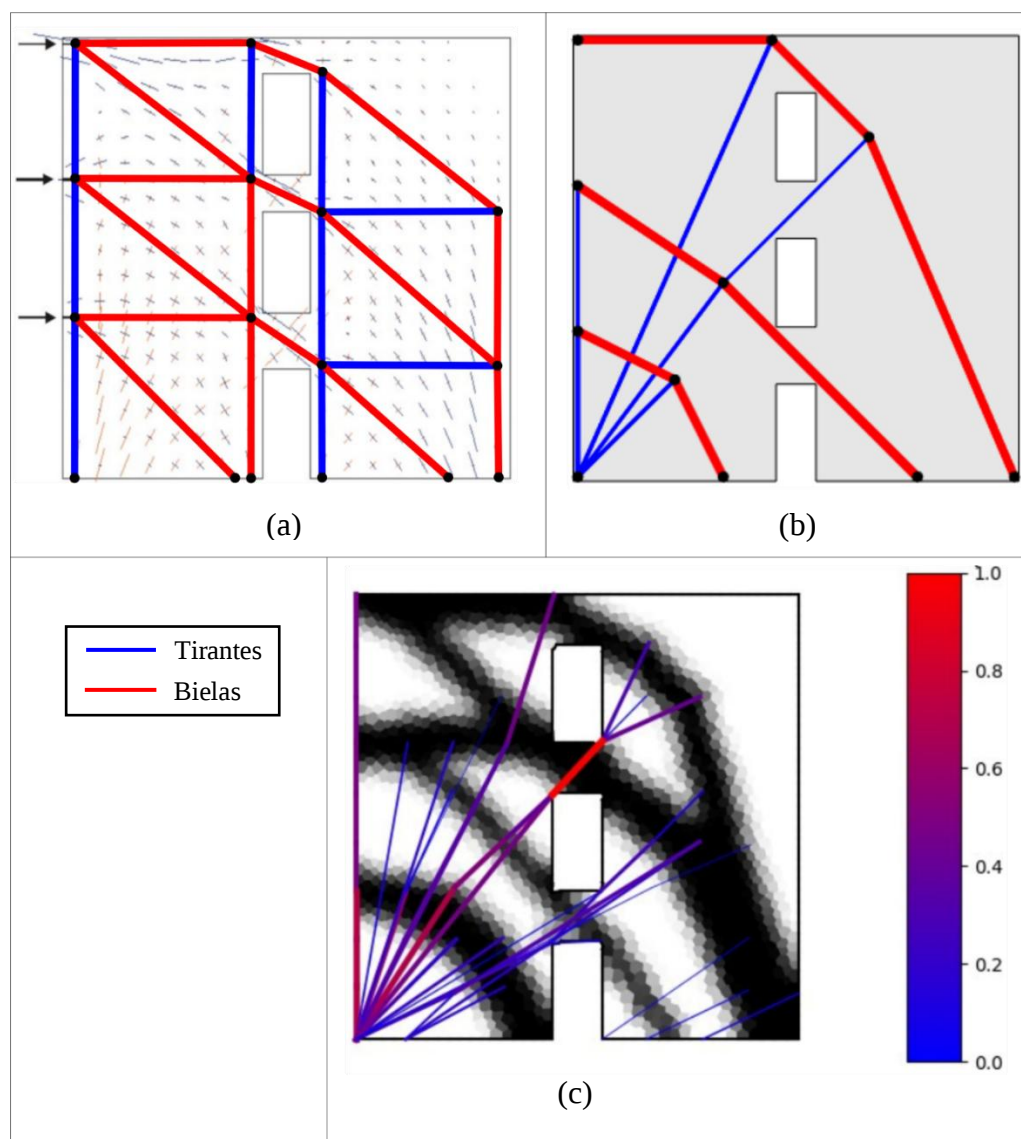


Figura 24: Resultados para a parede de cisalhamento acoplada: (a) *fib* [110]; (b) Autor; (c) HybridTopy [111].

Fonte: Como indicado na legenda.

Esse exemplo foi usado para a validação da metodologia deste trabalho para geração de modelos de bielas e tirantes em estruturas complexas. A malha *ground structure* inicial continha 3020 barras, sendo aplicado filtro discreto único com parâmetro $\alpha_f = 0,4$, valor adotado em função da maior complexidade da distribuição de esforços decorrente do carregamento lateral e da presença de aberturas.

O processo de otimização convergiu em 1214 iterações, com resíduo da ordem de $9,23 \times 10^{-12}$. Após a aplicação do filtro geométrico, a topologia final resultou em 13 barras, mantendo-se praticamente inalterada a flexibilidade global da estrutura (35,1069 frente a 34,148 após o filtro discreto), indicando que o filtro discreto foi eficaz na seleção prévia dos elementos estruturalmente relevantes.

A topologia obtida apresenta padrão diagonal típico de estruturas submetidas a ações laterais, com bielas comprimidas inclinadas conectando os pavimentos e tirantes predominantemente verticais localizados nas regiões adjacentes às aberturas. Esses elementos configuram um mecanismo resistente compatível com o comportamento esperado de paredes de cisalhamento acopladas, nas quais a transferência de esforços ocorre por meio de campos diagonais de compressão e elementos tracionados associados às regiões de acoplamento.

A comparação com soluções da literatura evidencia boa coerência física da topologia obtida. O modelo apresentado pela *fib* [110] adota uma representação mais detalhada, com maior número de elementos, refletindo uma abordagem manual tradicional.

A solução obtida pelo método HybridTopy [111] (Figura 24c) baseia-se em uma formulação híbrida treliça–contínuo, na qual as regiões comprimidas são representadas por um campo contínuo de densidades (escala de cinza), enquanto os elementos tracionados são modelados explicitamente como barras discretas. Nesse contexto, as áreas de maior densidade indicam bielas comprimidas, e as linhas coloridas correspondem aos tirantes tracionados. Observa-se que as regiões comprimidas identificadas pelo HybridTopy coincidem, de forma geral, com as bielas obtidas na solução por *Ground Structure*, enquanto os tirantes discretos aparecem em posições semelhantes, corroborando a coerência física da topologia gerada neste trabalho.

O valor relativamente elevado de α_f e o número de iterações observados neste exemplo indicam a maior complexidade do problema, associada à combinação de carregamento lateral e presença de aberturas. Ainda assim, a convergência numérica com resíduos da ordem de 10^{-12} demonstra a estabilidade e robustez do método implementado.

4.4 VIGA-PAREDE COM ABERTURA

Com o intuito de validar a metodologia proposta em um problema com descontinuidade geométrica consolidado na literatura, este quarto exemplo analisa uma viga-parede com abertura (Figura 25), onde na face superior uma carga concentrada para baixo é aplicada. Originalmente estudada por Schlaich *et al.* [1] para a determinação de modelos de bielas e tirantes em Regiões-D de estruturas de concreto, esta geometria serve como um exemplo de referência para problemas com descontinuidades geométricas. Posteriormente, para a mesma geometria, Amir e Sigmund [112] propuseram uma nova abordagem para determinar a distribuição de armadura em estruturas de concreto com foco nas Regiões-D.

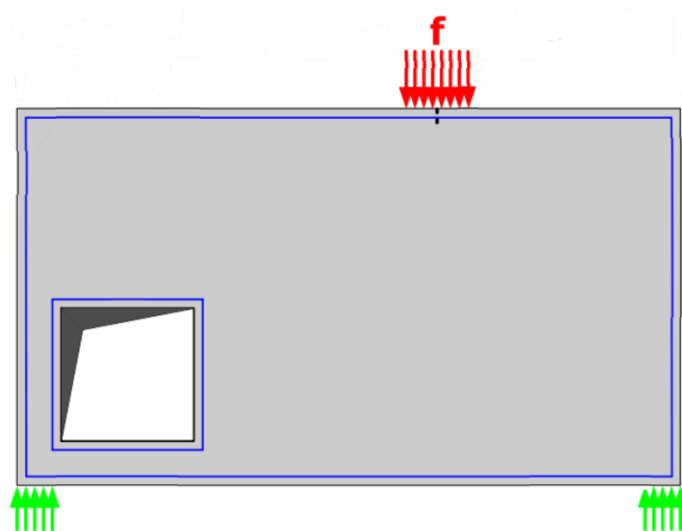


Figura 25: Viga-parede com abertura.

Fonte: Adaptado de Amir e Sigmund [112].

Para este exemplo foi definido um domínio de projeto discretizado formado por uma malha de 10×6 elementos, como mostra a Figura 26(a). A malha *ground structure* inicial é ilustrada na Figura 26(b). Na primeira análise foi aplicado o filtro discreto único para os elementos em tração e compressão e o valor do parâmetro é $\alpha_f = 0,01$. Nas duas análises seguintes foi aplicado o filtro separado, uma análise penalizando a compressão e outra penalizando a tração. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 4 e as soluções topológicas em comparação com soluções da literatura são apresentadas na Figura 27.

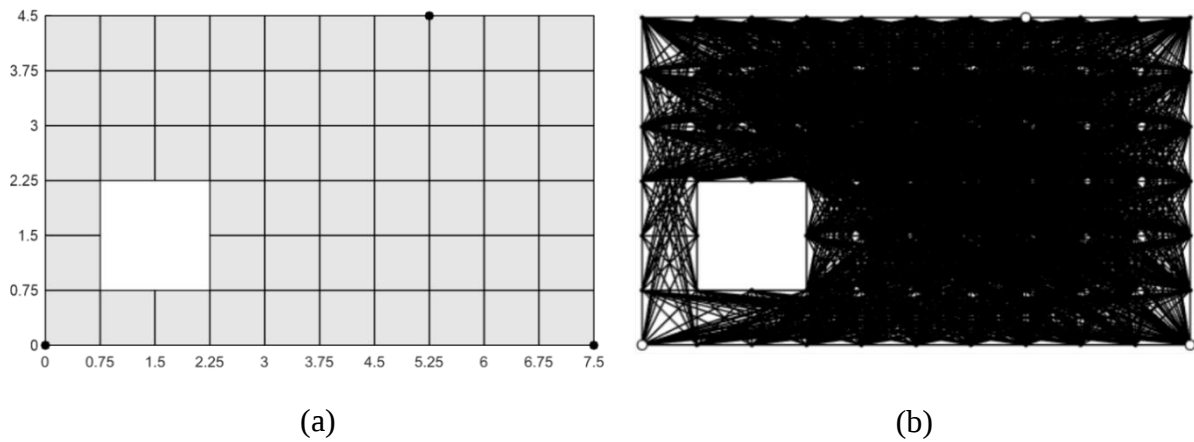


Figura 26: a) malha base 2D para a viga-parede com abertura; b) malha *ground structure* inicial.

Fonte: Autor.

Tabela 4: Resultados para a viga-parede com abertura.

$\alpha_f = 0,01$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
1457	Flexibilidade (C)	3,6150	1,8823
Nº de iterações	Resíduo	$9,6090 \times 10^{-12}$	$3,8060 \times 10^{-12}$
566	Nº de barras	27	14
$\alpha_f = 0,01, \alpha_{f,T} = 0,5 * \alpha_f, \alpha_{f,C} = 5,0 * \alpha_f$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
1457	Flexibilidade (C)	4,1358	2,1431
Nº de iterações	Resíduo	$2,5125 \times 10^{-11}$	$1,1605 \times 10^{-11}$
586	Nº de barras	29	16
$\alpha_f = 0,01, \alpha_{f,T} = 5,0 * \alpha_f, \alpha_{f,C} = 0,5 * \alpha_f$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
1457	Flexibilidade (C)	3,6150	1,8823
Nº de iterações	Resíduo	$9,6088 \times 10^{-12}$	$3,8062 \times 10^{-12}$
603	Nº de barras	27	14

Fonte: Autor.

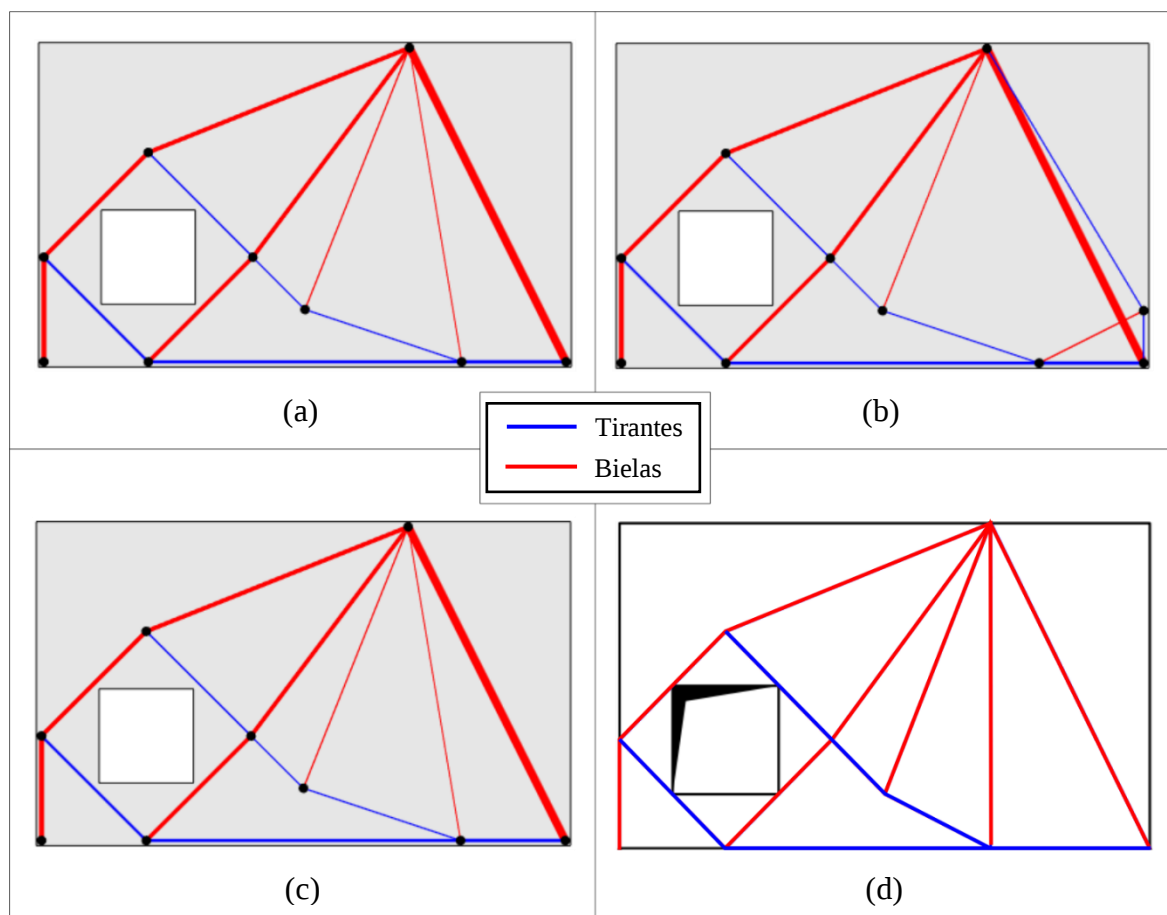


Figura 27: Resultados para a viga-parede com abertura: (a) filtro único; (b) filtro separado penalizando compressão; (c) filtro separado penalizando tração; (d) Adaptado de Fairclough *et al.* [113].

Fonte: Como indicado na legenda.

A viga-parede com abertura constitui um exemplo representativo de Região-D em estruturas de concreto armado, frequentemente empregado na literatura para análise e validação de modelos de bielas e tirantes devido à forte influência da descontinuidade geométrica no fluxo de forças. A presença da abertura interrompe os caminhos diretos de compressão, exigindo redistribuição das tensões por meio de bielas inclinadas e tirantes que contornam a região vazada.

A aplicação do filtro discreto único resultou em uma topologia com 14 barras após a filtragem geométrica e flexibilidade final de 1,8823 (Figura 27a). Observa-se a formação de um arco comprimido na região superior da viga, desviando ao redor da abertura, associado a um tirante horizontal inferior contínuo conectando os apoios. Este mecanismo resistente é fisicamente consistente com o comportamento esperado de vigas-parede com abertura, nas quais a interrupção

do fluxo de compressão força a redistribuição das tensões por meio de bielas inclinadas laterais. O processo convergiu em 566 iterações, com resíduo da ordem de 10^{-12} .

Quando aplicada penalização preferencial aos elementos comprimidos, obteve-se topologia alternativa (Figura 27b) com 16 barras e flexibilidade de 2,1431, representando aumento de aproximadamente 14% em relação ao caso com filtro único. A solução permanece estruturalmente válida e evidencia a introdução de tirantes adicionais na região oposta à abertura, resultando em caminhos alternativos de tração. Este resultado indica que a penalização preferencial de elementos comprimidos conduz a soluções topológicas alternativas, nas quais parte da transferência de cargas é redistribuída para mecanismos de tração, sem comprometer o equilíbrio global da estrutura.

Por outro lado, a penalização preferencial dos elementos tracionados resultou em topologia idêntica à obtida com filtro único (Figura 27c), com 14 barras e flexibilidade de 1,8823. Este comportamento indica que, para este problema específico, a topologia ótima é robusta em relação à penalização de elementos tracionados. Do ponto de vista físico, tal resultado é esperado, uma vez que a presença de um tirante horizontal inferior é indispensável para o equilíbrio da viga-parede em flexão. A eliminação ou enfraquecimento desse elemento comprometeria o mecanismo resistente fundamental, levando o algoritmo a preservar os tirantes essenciais independentemente da estratégia de filtro adotada.

De forma geral, os três casos apresentaram convergência estável, com resíduos da ordem de 10^{-11} ou inferiores e número similar de iterações. As variações de flexibilidade permaneceram inferiores a 15%, indicando que as soluções são equivalentes do ponto de vista da rigidez global, embora distintas em termos topológicos.

As topologias obtidas são consistentes com a solução apresentada por Fairclough *et al.* [113] (Figura 27d), na qual as bielas diagonais principais contornam a abertura, formando um mecanismo resistente baseado em trajetórias de forças bem definidas. A convergência para topologias semelhantes, mesmo partindo de metodologias distintas, reforça que a configuração estrutural é governada intrinsecamente pela física do problema.

4.5 VIGA COM EXTREMIDADE ENTALHADA

Outro exemplo de referência de problemas com descontinuidades geométricas é a viga com extremidade entalhada (ou viga com “dente”), onde na face superior, uma carga concentrada para baixo é aplicada. Kuchma *et al.* [114] realizaram uma análise experimental rigorosa desta

geometria, propondo e testando quatro diferentes modelos de bielas e tirantes, que variavam em complexidade e grau de indeterminação estática.

Para este exemplo foi definido um domínio de projeto discretizado formado por uma malha de 20x10 elementos, como mostra a Figura 28(a). A malha *ground structure* inicial é ilustrada na Figura 28(b). Na primeira análise foi aplicado o filtro discreto único para os elementos em tração e compressão e o valor do parâmetro é $\alpha_f = 0,01$. Nas duas análises seguintes foi aplicado o filtro separado, uma análise penalizando a compressão e outra penalizando a tração. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 5 e as soluções topológicas em comparação com soluções da literatura são apresentadas na Figura 29.

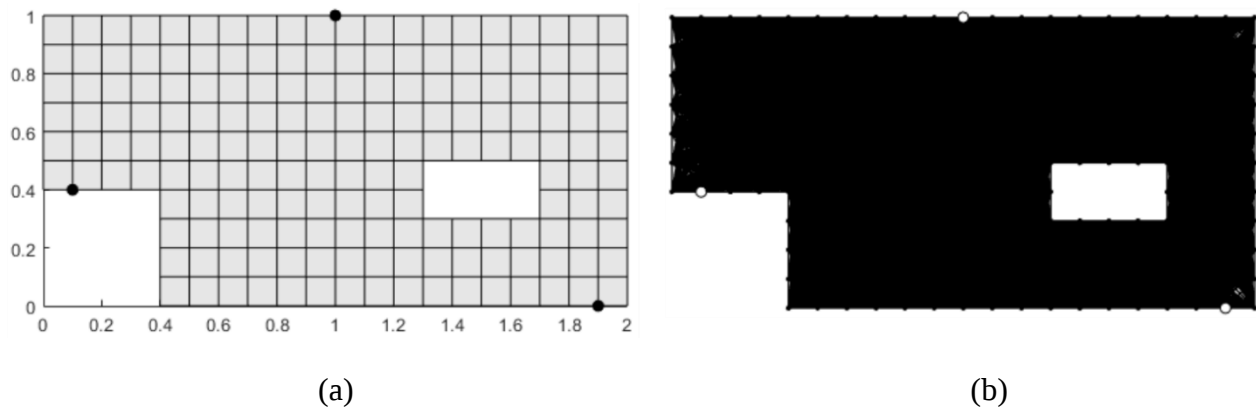


Figura 28: a) malha base 2D para a viga com extremidade entalhada; b) malha *ground structure* inicial.

Fonte: Autor.

Tabela 5: Resultados para a viga com extremidade entalhada.

$\alpha_f = 0,01$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
10707	Flexibilidade (C)	769,5442	713,5263
Nº de iterações	Resíduo	$1,4704 \times 10^{-11}$	$1,3628 \times 10^{-11}$
1964	Nº de barras	65	48
$\alpha_f = 0,01; \alpha_{f,T} = 0,5 * \alpha_f; \alpha_{f,C} = 5,0 * \alpha_f$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
10707	Flexibilidade (C)	823,4544	813,3184
Nº de iterações	Resíduo	$3,0562 \times 10^{-11}$	$3,4767 \times 10^{-11}$
3002	Nº de barras	53	47

$\alpha_f = 0,01; \alpha_{f,T} = 5,0 * \alpha_f; \alpha_{f,C} = 0,5 * \alpha_f$			
Nº inicial de barras		Após filtro discreto	Após filtro geométrico
10707	Flexibilidade (C)	782,1531	716,1511
Nº de iterações	Resíduo	$1,6178 \times 10^{-11}$	$1,6732 \times 10^{-11}$
1670	Nº de barras	47	39

Fonte: Autor.

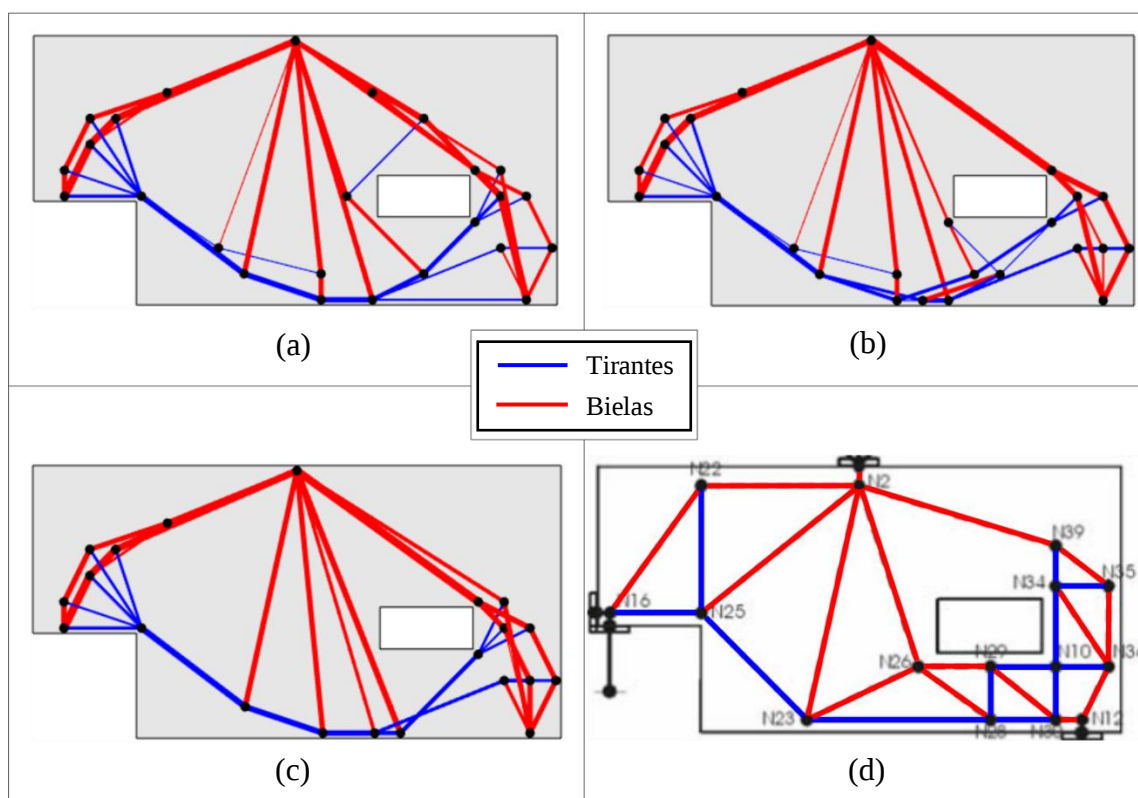


Figura 29: Resultados para a viga com extremidade entalhada: (a) filtro único; (b) filtro separado penalizando compressão; (c) filtro separado penalizando tração; (d) Adaptado de Kuchma *et al.* [114].

Fonte: Como indicado na legenda.

A viga com extremidade entalhada foi analisada com diferentes estratégias de filtragem, mantendo-se a *ground structure* inicial com 10707 barras. No caso (a), com aplicação do filtro discreto unificado, a solução convergiu em 1964 iterações e resultou, após o filtro geométrico, em uma topologia com 48 barras. Observa-se a formação de um campo de compressão principal que se desenvolve a partir da região de aplicação da carga e é desviado pela presença da abertura,

contornando-a por meio de bielas inclinadas que conectam diretamente à região do apoio. Esse desvio do fluxo compressivo gera uma trajetória curvilínea composta por segmentos lineares que acompanham o contorno da descontinuidade geométrica. Na região inferior, forma-se um tirante contínuo que fecha o equilíbrio global do sistema.

Na região do entalhe, a mudança abrupta da geometria induz concentração de esforços e requer a formação de múltiplos tirantes. Esses tirantes partem da reentrância e se conectam a diferentes pontos da malha, distribuindo as forças de tração necessárias para equilibrar as bielas comprimidas que se conectam ao apoio. Esse arranjo indica que a reentrância atua como um nó de transferência, no qual ocorre a redistribuição das forças entre os campos de tração e compressão.

No caso (b), com penalização preferencial dos elementos comprimidos, a solução convergiu em 3002 iterações. A topologia obtida permanece praticamente inalterada em relação ao caso (a), com preservação das bielas principais responsáveis pelo desvio do fluxo de compressão ao redor da abertura. Esse resultado indica que essas bielas estão diretamente associadas ao caminho de carga dominante e não podem ser removidas sem comprometer o equilíbrio.

No caso (c), com penalização preferencial dos elementos tracionados, a convergência ocorreu em 1670 iterações. A topologia resultante apresenta redução no número de tirantes secundários, com manutenção apenas dos elementos necessários para garantir o equilíbrio global. O campo de compressão permanece praticamente inalterado, enquanto o sistema de tração torna-se mais direto, com menor grau de redistribuição na região da abertura.

A comparação com o modelo proposto por Kuchma *et al.* [114] mostra que as principais trajetórias de compressão e tração são similares entre as soluções. Em particular, observa-se a presença do campo de compressão que contorna a abertura e do tirante inferior que fecha o sistema. As diferenças concentram-se na região do entalhe, onde o modelo de referência apresenta uma idealização mais simplificada, enquanto as soluções obtidas neste trabalho incluem um número maior de elementos para representar a redistribuição local de esforços imposta pela discretização inicial e pela restrição de volume.

5. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma metodologia baseada em otimização topológica discreta via Método *Ground Structure* para a geração automatizada de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado. A metodologia foi avaliada por meio da aplicação a cinco estruturas de referência. A viga biapoiada foi utilizada como problema-base para investigar a influência das condições de contorno e verificar a coerência dos modelos gerados. Além disso, foi analisada uma viga contínua com três apoios, permitindo avaliar a capacidade do método em representar efeitos de continuidade estrutural. As demais três estruturas representam Regiões-D típicas do concreto armado — parede de cisalhamento acoplada, viga-parede com abertura e viga com extremidade entalhada — permitindo avaliar o desempenho do método em situações caracterizadas por descontinuidades geométricas e fluxos complexos de forças.

Do ponto de vista metodológico, a adaptação do código base para incluir novas condições de contorno — tais como apoios elásticos, restrições cinemáticas e apoios inclinados — ampliou significativamente a aplicabilidade do método. Os resultados da viga biapoiada mostram que considerando a imposição de deslocamentos prescritos e apoios com molas há alteração nos valores da flexibilidade mantendo a mesma topologia da viga com apoios rígidos. Já os resultados da viga contínua evidenciaram que as condições de suporte exercem influência direta na topologia ótima, afetando tanto a distribuição dos elementos quanto a eficiência estrutural global.

A estratégia de filtragem discreta separada para elementos tracionados e comprimidos mostrou-se eficaz como ferramenta exploratória. Observou-se que o impacto dessa estratégia é dependente da natureza do problema estrutural. Na viga-parede com abertura, a penalização preferencial da compressão permitiu a obtenção de topologias alternativas, com variações moderadas de flexibilidade. Já na viga com extremidade entalhada, dominada por trajetórias comprimidas essenciais, a topologia mostrou-se robusta à penalização de bielas, enquanto a penalização de tração conduziu a modelos mais simplificados. Esses resultados indicam que os filtros separados não impõem soluções artificiais, mas revelam a sensibilidade ou robustez da solução ótima em função do mecanismo resistente dominante.

A combinação entre filtro discreto e filtro geométrico mostrou-se particularmente eficiente na eliminação de redundâncias, reduzindo malhas iniciais com até milhares de barras para modelos finais com número reduzido de elementos. As topologias obtidas apresentam clareza na

identificação de bielas e tirantes, característica essencial para aplicação prática em dimensionamento estrutural.

A comparação com soluções da literatura técnica e científica demonstrou elevada coerência física. Os principais caminhos de compressão e tração identificados se assemelham com modelos consagrados, como os propostos por Schlaich *et al.* [1], Kuchma *et al.* [114], Fairclough *et al.* [113], recomendações do *fib* Model Code [4] e resultados do método HybridTopy [111]. As diferenças observadas estão associadas principalmente ao nível de detalhamento e à abordagem de modelagem adotada, sendo que o Método *Ground Structure* tende a fornecer STMs simplificados e diretamente utilizáveis.

Do ponto de vista numérico, todos os exemplos analisados apresentaram convergência estável, com resíduos da ordem de 10^{-11} a 10^{-12} e número de iterações compatível com a complexidade geométrica e estrutural de cada problema. Esses resultados confirmam a robustez da implementação computacional desenvolvida.

De forma geral, a metodologia proposta demonstrou ser capaz de gerar modelos de bielas e tirantes estruturalmente válidos, fisicamente coerentes e adequados à prática de projeto de Regiões-D em concreto armado. A natureza discreta das soluções, aliada à possibilidade de controle topológico por meio de filtros separados, constitui uma vantagem relevante em relação a abordagens puramente contínuas. O Método *Ground Structure* com modelo material bilinear apresenta-se, portanto, como uma ferramenta promissora para apoiar o engenheiro estrutural na concepção e no dimensionamento racional de Regiões-D, complementando a experiência profissional com uma base sistematizada e objetiva.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os resultados obtidos neste trabalho abrem perspectivas para aprofundamento e extensão da metodologia proposta, entre as quais destacam-se:

- Incorporação de restrições explícitas de tensão, considerando limites normativos para compressão no concreto e tração no aço, de modo a integrar diretamente a geração topológica com critérios de dimensionamento.
- Consideração de múltiplos casos de carregamento, visando a obtenção de topologias robustas frente a diferentes combinações de ações.

- Análises paramétricas sistemáticas, envolvendo os parâmetros de filtragem (α_f , $\alpha_{f,T}$, $\alpha_{f,C}$), fração de volume e níveis de conectividade, com o objetivo de estabelecer diretrizes práticas para escolha de parâmetros.
- Validação experimental, por meio de ensaios em modelos físicos dimensionados a partir dos STMs gerados, permitindo avaliar o comportamento estrutural real, padrões de fissuração e modos de ruptura.
- Desenvolvimento de interface gráfica e integração com ambientes BIM, visando facilitar a adoção da metodologia em ambiente profissional e sua integração com fluxos de projeto usuais.

REFERÊNCIAS

- [1] J. SCHLAICH, K. SCHAFER, and M. JENNEWEIN, "TOWARD A CONSISTENT DESIGN OF STRUCTURAL CONCRETE," *JOURNAL PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE*, vol. 32, no. 3, pp. 74-150, 1987-05-01 1987.
- [2] *ACI 318-19: Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, A. C. INSTITUTE, Farmington Hills, MI: ACI, 2019.
- [3] *EN 1992-1-1: Eurocode 2 - Design of Concrete Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, E. C. F. STANDARDIZATION, Brussels:CEN, 2004.
- [4] *fib Model Code for Concrete Structures (2020)*, F. I. d. Beton, Lausanne, Switzerland, 2024.
- [5] M. BENDSOE and N. KIKUCHI, "GENERATING OPTIMAL TOPOLOGIES IN STRUCTURAL DESIGN USING A HOMOGENIZATION METHOD," *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, vol. 71, pp. 197-224, 1988-11-01 1988.
- [6] M. P. Bendsoe, "Optimal shape design as a material distribution problem," *Structural Optimization*, vol. 1, no. 4, p. 10, 1989, doi: <https://doi.org/10.1007/BF01650949>.
- [7] Y. XIE and G. STEVEN, "A SIMPLE EVOLUTIONARY PROCEDURE FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION," *COMPUTERS & STRUCTURES*, vol. 49, pp. 885-896, 1993-12-03 1993.
- [8] W. S. Dorn, R. E. Gomory, and H. J. Greenberg, "Automatic design of optimal structures," *Journal de Mecanique*, vol. 3, no. Mars, France, 1964.
- [9] *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*, A. B. D. N. TÉCNICAS, Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- [10] Y. Xia, M. Langelaar, and M. Hendriks, "A critical evaluation of topology optimization results for strut-and-tie modeling of reinforced concrete," *COMPUTER-AIDED CIVIL AND INFRASTRUCTURE ENGINEERING*, vol. 35, no. 8, pp. 850-869, 2020-02-11 2020, doi: 10.1111/mice.12537.
- [11] F. I. D. B. (fib). "Concrete Structures in Sustainable Development," Lausanne, 2022.
- [12] A. Starcev-Curcin *et al.*, "Experimental Testing of Reinforced Concrete Deep Beams Designed by Strut-And-Tie Method," *APPLIED SCIENCES-BASEL*, vol. 10, no. 18, 2020-09-01 2020, Art no. 6217, doi: 10.3390/app10186217.
- [13] O. M. QUERIN, M. VICTORIA, C. ALONSO, R. ANSOLA, and P. MARTÍ, *Topology design methods for structural optimization*, 1 ed. Cambridge, MA: Academic Press, Elsevier, 2017, p. 194.

- [14] P. W. CHRISTENSEN and A. KLARBRING, *An introduction to structural optimization*, 1 ed. (Solid Mechanics and Its Applications). Dordrecht, Netherlands: Springer, 2009, p. 214.
- [15] M. Liu, "Progressive collapse design of seismic steel frames using structural optimization," *JOURNAL OF CONSTRUCTIONAL STEEL RESEARCH*, vol. 67, pp. 322-332, 2011-03-01 2011, doi: 10.1016/j.jcsr.2010.10.009.
- [16] A. Adedeji, "Topology optimization for additive manufacture," Doctoral Thesis, Wolfson School of Mechanical and Manufacturing Engineering, Loughborough, 2013. [Online]. Available: <https://hdl.handle.net/2134/12833>
- [17] Y. Wang, "A Study on Microstructures of Homogenization for Topology Optimization," PhD Thesis, School of Architectural, Civil and Mechanical Engineering, Victoria University of Technology, 2003. [Online]. Available: <https://vuir.vu.edu.au/id/eprint/270>
- [18] R. T. Haftka and Z. Gürdal, *Elements of Structural Optimization*, 3 ed. (Solid Mechanics and Its Applications). Springer Dordrecht, 2012, p. 481.
- [19] J. HEYMAN, "PLASTIC DESIGN OF BEAMS AND PLANE FRAMES FOR MINIMUM MATERIAL CONSUMPTION," *QUARTERLY OF APPLIED MATHEMATICS*, vol. 8, pp. 373-381, 1951-01-01 1951.
- [20] W. PRAGER, "OPTIMALITY CRITERIA IN STRUCTURAL DESIGN," *PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE UNITED STATES OF AMERICA*, vol. 61, pp. 794-&, 1968-01-01 1968.
- [21] W. PRAGER and J. TAYLOR, "PROBLEMS OF OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN," *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, vol. 35, pp. 102-&, 1968-01-01 1968.
- [22] J. S. Arora, 4th, Ed. *Introduction to Optimum Design*. The University of Iowa, College of Engineering, Iowa City, Iowa: Academic Press, Elsevier, 2017, p. 968.
- [23] K. SVANBERG, "LOCAL AND GLOBAL-OPTIMA," in *OPTIMIZATION OF LARGE STRUCTURAL SYSTEMS, VOLS 1 AND 2*, 1993-01-01 1993, vol. 231, pp. 479-488.
- [24] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming*, 3rd ed. New Jersey: Jhon Wiley & Sons, 2006.
- [25] U. Kirsch, *Structural Optimization*, 1st ed. Heidelberg: Springer Berlin, 1993, p. 302.
- [26] A. Kacha. "Optimisation in structural engineering: enhancing efficiency and performance." <https://www.istructe.org/resources/blog/optimisation-in-structural-engineering-2023/> (accessed 09-27, 2024).
- [27] J. Sokolowski and J.-P. Zolesio, *Introduction to Shape Optmization. Shape Sensitivity Analysis*, 1st ed. (Springer Series in Computational Mathematics). Heidelberg: Springer Berlin, 1992, p. 250.

- [28] G. I. N. Rozvany, M. P. Bendsoe, and U. Kirsch, "Layout Optimization of Structures," *ASME. Applied Mechanics Reviews*, vol. 48, no. 2, p. 79, 1995, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3005097>.
- [29] J. TAYLOR and M. ROSSOW, "OPTIMAL TRUSS DESIGN BASED ON AN ALGORITHM USING OPTIMALITY CRITERIA," *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES*, vol. 13, pp. 913-923, 1977-01-01 1977.
- [30] G. I. N. Rozvany, *Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, 1st ed. (CISM International Centre for Mechanical Sciences). Vienna: Springer, 1992, p. 496.
- [31] M. P. Bendsoe, *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, 1st ed. Heidelberg: Springer Berlin, 1995, p. 273.
- [32] M. P. Bendsoe and O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*, 2nd ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2003, p. 370.
- [33] G. I. N. Rozvany and M. Zhou, "Applications of the COC Algorithm in Layout Optimization," 1991, 59.
- [34] G. Allaire, F. Jouve, and A. Toader, "Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method," *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, vol. 194, pp. 363-393, 2004-02-10 2004, doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [35] S. Amstutz and H. Andrä, "A new algorithm for topology optimization using a level-set method," *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, vol. 216, pp. 573-588, 2006-08-10 2006, doi: 10.1016/j.jcp.2005.12.015.
- [36] M. Wang, X. Wang, and D. Guo, "A level set method for structural topology optimization," *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, vol. 192, pp. 227-246, 2003-01-01 2003, Art no. PII S0045-7825(02)00559-5.
- [37] Y. M. Xie and G. P. Steven, *Evolutionary Structural Optimization*, 1st ed. Springer London, 1997, p. 188.
- [38] O. Querin, G. Steven, and Y. Xie, "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm," *ENGINEERING COMPUTATIONS*, vol. 15, pp. 1031-+, 1998-01-01 1998.
- [39] X. Huang and Y. M. Xie, *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*, 1st ed. United Kingdom: Wiley, 2010, p. 240.
- [40] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.*, 1st ed. Ann Harbor, USA: University of Michigan Press, 1975, p. 183.

- [41] O. Sigmund, "A 99 line topology optimization code written in Matlab," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 21, pp. 120-127, 2001-04-01 2001.
- [42] G. Allaire, E. Bonnetier, G. Francfort, and F. Jouve, "Shape optimization by the homogenization method," *Numerische Mathematik*, vol. 76, p. 42, 1997, doi: <https://doi.org/10.1007/s002110050253>.
- [43] D. Cioranescu and P. Donato, *An Introduction to Homogenization*, 1st ed. New York: Oxford University Press, 1999, p. 271.
- [44] K. SUZUKI and N. KIKUCHI, "A HOMOGENIZATION METHOD FOR SHAPE AND TOPOLOGY OPTIMIZATION," *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, vol. 93, pp. 291-318, 1991-12-01 1991.
- [45] M. Abdi, "Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures using X-FEM and Isovalues of Structural Performance," PhD Thesis, University of Nottingham, 2015. [Online]. Available: <http://eprints.nottingham.ac.uk/31226/1/Meisam%20Abdi%20Thesis.pdf>
- [46] G. ROZVANY, M. ZHOU, and T. BIRKER, "GENERALIZED SHAPE OPTIMIZATION WITHOUT HOMOGENIZATION," *STRUCTURAL OPTIMIZATION*, vol. 4, pp. 250-252, 1992-10-01 1992.
- [47] K. SVANBERG, "THE METHOD OF MOVING ASYMPTOTES - A NEW METHOD FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION," *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, vol. 24, pp. 359-373, 1987-02-01 1987.
- [48] O. Sigmund, "Design of Material Structures using Topology Optimization," PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering/Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [49] O. Sigmund, "Morphology-based black and white filters for topology optimization," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 33, pp. 401-424, 2007-04-01 2007, doi: 10.1007/s00158-006-0087-x.
- [50] O. Sigmund and J. Petersson, "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima," *STRUCTURAL OPTIMIZATION*, vol. 16, pp. 68-75, 1998-08-01 1998.
- [51] Y. M. Xie and G. P. Steven, "Shape and Layout Optimisation via an Evolutionary Procedure," in *Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science*, Hong Kong, S. N. Atluri, G. Yagawa, P. Tong, and R. Jones, Eds., 1992: Technology Publications.
- [52] X. Huang, Y. Xie, and M. Burry, "Advantages of bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) over evolutionary structural optimization (ESO)," *ADVANCES IN STRUCTURAL ENGINEERING*, vol. 10, no. 6, pp. 727-737, 2007-12-01 2007, doi: 10.1260/136943307783571436.

- [53] L. Xia, Q. Xia, X. Huang, and Y. Xie, "Bi-directional Evolutionary Structural Optimization on Advanced Structures and Materials: A Comprehensive Review," *ARCHIVES OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING*, vol. 25, no. 2, pp. 437-478, 2018-04-01 2018, doi: 10.1007/s11831-016-9203-2.
- [54] O. Querin, V. Young, G. Steven, and Y. Xie, "Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation," *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, vol. 189, no. 2, pp. 559-573, 2000-01-01 2000, doi: 10.1016/S0045-7825(99)00309-6.
- [55] X. Yang, Y. Xie, J. Liu, G. Parks, and P. Clarkson, "Perimeter control in the bidirectional evolutionary optimization method," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 24, no. 6, pp. 430-440, 2003-02-01 2003, doi: 10.1007/s00158-002-0256-5.
- [56] G. Rozvany, "A critical review of established methods of structural topology optimization," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 37, pp. 217-237, 2009-01-01 2009, doi: 10.1007/s00158-007-0217-0.
- [57] D. E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*, 1st ed. Reading, MA: Addison-Wiley Publishing Company, Inc, 1989, p. 432.
- [58] K. Deb, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, 1st ed. (Wiley Interscience Series in Systems and Optimization). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2001, p. 518.
- [59] M. Papadrakakis, N. Lagaros, and Y. Tsompanakis, "Structural optimization using evolution strategies and neural networks," *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, vol. 156, no. 1-4, pp. 309-333, 1998-04-14 1998, doi: 10.1016/S0045-7825(97)00215-6.
- [60] C. Chapman and M. Jakiela, "Genetic algorithm-based structural topology design with compliance and topology simplification considerations," *JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN*, vol. 118, no. 1, pp. 89-98, 1996-03-01 1996, doi: 10.1115/1.2826862.
- [61] P. HAJELA and E. LEE, "GENETIC ALGORITHMS IN TRUSS TOPOLOGICAL OPTIMIZATION," *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES*, vol. 32, no. 22, pp. 3341-3357, 1995-11-01 1995, doi: 10.1016/0020-7683(94)00306-H.
- [62] W. Gutkowski, Ed. *Discrete Structural Optimization*, 1st ed. (CISM International Centre for Mechanical Sciences). Vienna: Springer, 1997, p. 250.
- [63] A. Asadpoure, J. Guest, and L. Valdevit, "Incorporating fabrication cost into topology optimization of discrete structures and lattices," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 51, pp. 385-396, 2015-02-01 2015, doi: 10.1007/s00158-014-1133-8.

- [64] A. G. M. Michell, "The Limits of Economy of Material in Frame-structures," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 8, no. 47, p. 11, 1904, doi: <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>.
- [65] J. C. Maxwell, "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces," *Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 26, no. 1, p. 40, 1870, doi: <https://doi.org/10.1017/S0080456800026351>.
- [66] B. H. V. Topping, "Topology Design of Discrete Structures," in *Topology Design of Structures*, vol. 227, M. P. Bendsoe and C. A. M. Soares Eds., (NATO ASI Series. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993, pp. 517-534.
- [67] W. S. Hemp, "Studies in the theory of Michell structures," presented at the Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich, Germany, 1964.
- [68] A. S. L. Chan, "The Design of Michell Optimum Structures," *College of Aeronautics Report*, p. 43, 1960.
- [69] M. P. Bendsoe and C. A. M. Soares, Eds. *Topology Design of Structures*, 1st ed. (NATO Science Series). Dordrecht: Springer, 1992, p. 569.
- [70] V. Savsani, G. Tejani, and V. Patel, *Truss Optimization: A Metaheuristic Optimization Approach*, 1st ed. Switzerland: Springer Cham, 2024, p. 446.
- [71] T. Sokól, "A 99 line code for discretized Michell truss optimization written in Mathematica," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 43, no. 2, pp. 181-190, 2011-02-01 2011, doi: 10.1007/s00158-010-0557-z.
- [72] T. Zegard, "STRUCTURAL OPTIMIZATION: FROM CONTINUUM AND GROUND STRUCTURES TO ADDITIVE MANUFACTURING," Doctor of Philosophy in Civil Engineering Dissertation, Civil & Environmental Eng, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2014. [Online]. Available: <https://www.ideals.illinois.edu/items/72955>
- [73] K. Svanberg, "On Local and Global Minima in Structural Optimization," in *New directions in optimum structural design*, A. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragsdell, and O. C. Zienkiewicz Eds. New York: Wiley, 1984, pp. 327-341.
- [74] A. J. M. Ferreira, *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, 1st ed. (Solid Mechanics and Its Applications). Netherlands: Springer Dordrecht, 2009, p. 236.
- [75] T. Zegard and G. Paulino, "GRAND - Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 50, no. 5, pp. 861-882, 2014-11-01 2014, doi: 10.1007/s00158-014-1085-z.
- [76] G. I. N. Rozvany, "Optimality Criteria for Continuous and Segment-Wise Linear Distribution of the Cross-Sectional Parameters," presented at the Discretization Methods

and Structural Optimization - Procedures and Applications. Lecture Notes in Engineering., Berlin, Heidelberg, 1989.

- [77] T. Zhao, A. Alshannaq, D. Scott, and G. Paulino, "Strut-and-Tie Models Using Multi-Material and Multi-Volume Topology Optimization: Load Path Approach," *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, vol. 120, no. 6, pp. 7-22, 2023-11-01 2023, doi: 10.14359/51739089,.
- [78] M. ZHOU and G. ROZVANY, "DCOC - AN OPTIMALITY CRITERIA METHOD FOR LARGE SYSTEMS .1. THEORY," *STRUCTURAL OPTIMIZATION*, vol. 5, no. 1-2, pp. 12-25, 1992-12-01 1992, doi: 10.1007/BF01744690.
- [79] G. FADEL, M. RILEY, and J. BARTHELEMY, "2 POINT EXPONENTIAL APPROXIMATION METHOD FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION," *STRUCTURAL OPTIMIZATION*, vol. 2, no. 2, pp. 117-124, 1990-06-01 1990, doi: 10.1007/BF01745459.
- [80] A. Groenwold and L. Etman, "On the equivalence of optimality criterion and sequential approximate optimization methods in the classical topology layout problem," *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, vol. 73, no. 3, pp. 297-316, 2008-01-15 2008, doi: 10.1002/nme.2071.
- [81] A. Ramos and G. Paulino, "Convex topology optimization for hyperelastic trusses based on the ground-structure approach," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 51, no. 2, pp. 287-304, 2015-02-01 2015, doi: 10.1007/s00158-014-1147-2.
- [82] C. Talischi, G. Paulino, A. Pereira, and I. Menezes, "PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 45, no. 3, pp. 329-357, 2012-03-01 2012, doi: 10.1007/s00158-011-0696-x.
- [83] A. Ramos and G. Paulino, "Filtering structures out of ground structures - a discrete filtering tool for structural design optimization," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 54, no. 1, pp. 95-116, 2016-07-01 2016, doi: 10.1007/s00158-015-1390-1.
- [84] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7th ed. Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2013, p. 714.
- [85] W. Ritz, "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 135, pp. 1-61, 1909, doi: <https://doi.org/10.1515/crll.1909.135.1>.
- [86] A. Hrennikoff, "Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 8, no. 4, pp. 169-175, 1941, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4009129>.

- [87] D. McHenry, "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems," *Journal of Institution of Civil Engineers*, vol. 21, no. 2, pp. 59-82, 1943, doi: <https://doi.org/10.1680/ijoti.1943.13967>.
- [88] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, no. 1, pp. 1-23, 1943.
- [89] J. N. Reddy, *Introduction to the Finite Element Method*, 4th ed. new York: McGraw-Hill Education, 2019.
- [90] J. H. Argyris and S. Kelsey, "Energy Theorems and Structural Analysis," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 26, pp. 1-13, 1954, doi: 10.1007/978-1-4899-5850-1.
- [91] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *Journal of Aeronautical Science*, vol. 23, no. 9, pp. 805-823, 1956, doi: <https://doi.org/10.2514/8.3664>.
- [92] R. W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis," *Journal of Structures Division*, vol. 23, ASCE, Proceedings of 2nd Conference on Electronic Computation, pp. 345-378, 1960.
- [93] R. D. Cooke, D. S. Malkus, and M. E. Plesha, *Concepts and Applications of the Finite Element Analysis*, 3rd ed. Canada: John Wiley & Sons, 1989, p. 630.
- [94] M. A. Bhatti, *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Computations*. New Jersey: Jhon Wiley & Sons, 2005, p. 720.
- [95] G. P. Nikishkov, "Introduction to the Finite Element Method," ed. Aizu-Wakamatsu, Japan: University of Aizu, 2004, pp. 1-70.
- [96] S. S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering*, 5th ed. Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2010, p. 726.
- [97] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, 5th ed. Stamford, USA: CL Engineering, 2011, p. 976.
- [98] G. R. Liu and S. S. Quek, *The Finite Element Method: A Practical Course*, 2nd ed. Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2014, p. 433.
- [99] I. Abbood, "Strut-and-tie model and its applications in reinforced concrete deep beams: A comprehensive review," *CASE STUDIES IN CONSTRUCTION MATERIALS*, vol. 19, 2023-11-06 2023, Art no. e02643, doi: 10.1016/j.cscm.2023.e02643.
- [100] M. Ruiz, L. Hoang, and A. Muttoni, "Stress Fields and Strut-and-Tie Models as a Basic Tool for Design and Verification in Second Generation of Eurocode 2," *HORMIGON Y ACERO*, vol. 74, no. 299, pp. 79-90, 2023-01-01 2023, doi: 10.33586/hya.2022.3086.

- [101] O. Querin, M. Victoria, and P. Martí, "Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 42, no. 1, pp. 25-32, 2010-07-01 2010, doi: 10.1007/s00158-009-0473-2.
- [102] M. Victoria, O. Querin, and P. Martí, "Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 44, no. 2, pp. 247-258, 2011-08-01 2011, doi: 10.1007/s00158-011-0633-z.
- [103] A. Gaynor, J. Guest, and C. Moen, "Reinforced Concrete Force Visualization and Design Using Bilinear Truss-Continuum Topology Optimization," *JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING*, vol. 139, no. 4, pp. 607-618, 2013-04-01 2013, doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000692.
- [104] M. Bruggi, "Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization," *COMPUTERS & STRUCTURES*, vol. 87, no. 23-24, pp. 1483-1495, 2009-12-01 2009, doi: 10.1016/j.compstruc.2009.06.003.
- [105] V. Almeida, H. Simonetti, and F. das Neves, "Optimal topology selection for 2D structures with stress constraints via Smooth Evolutionary Structural Optimization," *REVISTA INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS PARA CALCULO Y DISEÑO EN INGENIERIA*, vol. 30, no. 2, pp. 69-76, 2014-01-01 2014, doi: 10.1016/j.rimni.2014.03.001.
- [106] Q. Liang, Y. Xie, and G. Steven, "Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure," *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, vol. 97, no. 2, pp. 322-330, 2000-03-01 2000.
- [107] J. Jewett and J. Carstensen, "Experimental investigation of strut-and-tie layouts in deep RC beams designed with hybrid bi-linear topology optimization," *ENGINEERING STRUCTURES*, vol. 197, 2019-10-15 2019, Art no. 109322, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.109322.
- [108] E. Sanders, A. Ramos, and G. Paulino, "A maximum filter for the ground structure method: An optimization tool to harness multiple structural designs," *ENGINEERING STRUCTURES*, vol. 151, pp. 235-252, 2017-11-15 2017, doi: 10.1016/j.engstruct.2017.07.064.
- [109] C. Talischi, G. Paulino, A. Pereira, and I. Menezes, "PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 45, no. 3, pp. 309-328, 2012-03-01 2012, doi: 10.1007/s00158-011-0706-z.
- [110] *Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures*, F. I. d. B. (fib), Lausanne, Switzerland, 2008.

- [111] P. V. C. Rodrigues and R. M. F. Canha, "A hybrid topology optimization method applied to reinforced concrete structures using polygonal finite elements," *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, vol. 17, no. 3, e17306, 2024, doi: <https://doi.org/10.1590/S1983-41952024000300006>.
- [112] O. Amir and O. Sigmund, "Reinforcement layout design for concrete structures based on continuum damage and truss topology optimization," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 47, no. 2, pp. 157-174, 2013-02-01 2013, doi: 10.1007/s00158-012-0817-1.
- [113] H. Fairclough, L. He, T. Pritchard, and M. Gilbert, "LayOpt: an educational web-app for truss layout optimization," *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, vol. 64, no. 4, pp. 2805-2823, 2021-08-07 2021, doi: 10.1007/s00158-021-03009-8.
- [114] D. Kuchma, S. Yindeesuk, T. Nagle, J. Hart, and H. Lee, "Experimental validation of strut-and-tie method for complex regions," *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, vol. 105, no. 5, pp. 578-589, 2008-09-01 2008.