



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



A Importância das Metodologias Ativas na Gamificação de Jogos Matemáticos com Ênfase em Análise Combinatória no Ensino Médio

Pedro Fernando da Silva

São Cristóvão - SE
Maio, 2026

Pedro Fernando da Silva

A Importância das Metodologias Ativas na Gamificação de Jogos
Matemáticos com Ênfase em Análise Combinatória no Ensino
Médio

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Mestrado Profissional em Matemá-
tica em Rede Nacional PROFMAT DMA-UFS,
como requisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Orientador: Allyson dos Santos Oliveira

Universidade Federal de Sergipe

Maio, 2026

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S586i Silva, Pedro Fernando da.
A importância das metodologias ativas na gamificação de jogos matemáticos com ênfase em análise combinatória no ensino médio / Pedro Fernando da Silva; orientador Allyson dos Santos Oliveira. - São Cristóvão, SE, 2026.
130 f.: il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2026.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Abordagem interdisciplinar do conhecimento. 3. Análise combinatória. 4. Ensino médio. 5. Jogos no ensino de matemática. I. Oliveira, Allyson dos Santos, orient. II. Título.

CDU 519.1:37

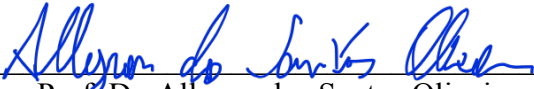
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

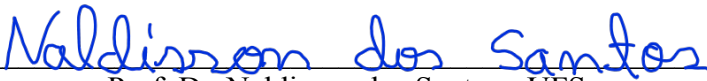
A Importância das Metodologias Ativas na Gamificação de Jogos Matemáticos com Ênfase em Análise Combinatória no Ensino Médio

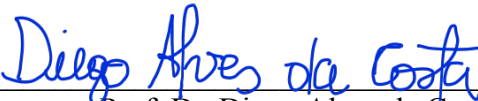
por

Pedro Fernando da Silva

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira - UFS
Orientador


Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Diego Alves da Costa - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Maio de 2026.

*À memória de minha mãe, Ana Lúcia da Silva, e de
minha irmã, Maria Elisângela da Silva, cujas lembranças
me deram forças para seguir em frente.*

*À minha esposa, Cledja Saturnino dos Santos, e aos
meus filhos, Pietro dos Santos Silva e Lorenzo Felipe
dos Santos, pelo amor que ilumina meus dias e torna
cada conquista possível.*

Agradecimentos

A Deus, minha fonte de força, sabedoria e esperança, por iluminar meu caminho, conceder serenidade nos momentos de incerteza, coragem diante das dificuldades e perseverança para concluir esta jornada acadêmica. Sem Sua graça e orientação, esta conquista não seria possível.

À minha família, alicerce de minha formação pessoal e acadêmica. Em especial, à memória de minha querida irmã, Maria Elisângela da Silva, falecida em 29 de maio de 2025, e de minha amada mãe, Ana Lúcia da Silva, que nos deixou em 23 de julho de 2025. Suas partidas deixaram uma dor imensurável e, em muitos momentos, pensei em desistir deste sonho. No entanto, o amor que sempre recebi, os ensinamentos que me deixaram e a certeza de que suas memórias permanecerão vivas em meu coração deram-me forças para seguir em frente. Esta conquista também pertence a vocês, e espero honrá-las em cada passo de minha vida.

Ao meu padrasto, José Augusto Brasil, agradeço pelo apoio e pelos ensinamentos durante minha infância e, especialmente, pelo amparo oferecido após a partida de minha mãe. Sua presença e incentivo foram essenciais para que eu encontrasse coragem para continuar.

À minha amada esposa, Cledja Saturnino dos Santos, sou profundamente grato pelo amor, pela compreensão e pelo apoio incondicional ao longo desta jornada. Nos momentos mais difíceis, especialmente diante das perdas que enfrentei, você esteve ao meu lado, oferecendo acolhimento e esperança. Sua confiança foi fundamental para que eu pudesse concluir esta etapa tão importante da minha vida.

Aos meus amados filhos, Pietro dos Santos Silva e Lorenzo Felipe dos Santos, pela alegria, pelo amor e pela inspiração que trazem aos meus dias. Vocês são a razão de muitos dos meus esforços e a prova de que cada sacrifício vale a pena. Que esta conquista lhes mostre que, mesmo diante das adversidades, nunca devemos desistir dos nossos sonhos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Allyson Oliveira dos Santos, expresso minha gratidão pela orientação segura, pela paciência e pelo acolhimento nos momentos mais difíceis desta caminhada. Durante a elaboração desta dissertação, encontrei não apenas um excelente pesquisador, mas também uma pessoa generosa, capaz de oferecer incentivo e confiança quando pensei em desistir. Sua dedicação e apoio foram decisivos para a conclusão deste trabalho e para a minha formação acadêmica e humana.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Naldisson dos Santos e Prof. Dr. Diego Alves da Costa, agradeço pela generosidade em aceitar o convite para avaliar este trabalho e pelas valiosas contribuições apresentadas durante a defesa. Suas análises e sugestões enriqueceram esta pesquisa e contribuíram significativamente para o aprimoramento da

versão final desta dissertação e para o meu amadurecimento como pesquisador e professor.

Aos meus queridos amigos de turma, Sileia e Wesley, minha sincera gratidão por terem permanecido ao meu lado em um dos momentos mais difíceis desta caminhada. Juntos, enfrentamos a etapa final da qualificação em um período em que eu me encontrava profundamente abalado emocionalmente. Mais do que companheiros de estudo, vocês demonstraram empatia e humanidade, oferecendo serenidade quando eu mais precisava.

Em especial, agradeço à Sileia, com quem tive uma aproximação maior no final do curso e cuja amizade levarei para toda a vida. Infelizmente, devido a alguns percalços ao longo dessa trajetória, não havia percebido antes o quanto você era uma pessoa especial. Sua generosidade, sensibilidade e apoio nos momentos mais difíceis revelaram um ser humano extraordinário, cuja amizade passou a ter um valor inestimável para mim.

A você, Wesley, agradeço igualmente pela amizade sincera, pelo incentivo e pela companhia nessa etapa tão importante. O apoio de vocês fortaleceu minha confiança e consolidou laços que levarei para sempre em meu coração.

Aos meus amigos especiais de trabalho, Luciano Santos, Rozineide dos Santos, Ana Cristina Gois, Edileide Maria Dantas, Simone Ribeiro, Meri Brandão, Ladjá Lima e Tryciany da Silva Pinheiro, expresso minha mais sincera gratidão pelas palavras de incentivo, pelo carinho e pelo apoio oferecidos, mesmo à distância, durante um dos períodos mais difíceis de minha vida. Quando perdi minha irmã e minha mãe, encontrei em vocês conforto, esperança e forças para continuar esta caminhada, muitas vezes acreditando em mim quando eu mesmo já não conseguia. Que Deus sempre os guie e os abençoe abundantemente, pois somente eu sei o quanto cada gesto, cada palavra e cada demonstração de amizade foram importantes para que eu superasse momentos de tanta dor, tristeza e desilusão. Levarei para sempre em meu coração a gratidão por terem caminhado comigo, ainda que de longe, e por terem me ajudado a seguir em frente.

Ao seleto grupo de professores Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira, Profa. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga, Prof. Dr. André Vinicius Santos Doria, Prof. Dr. Angelo Alberti, Prof. Dr. Fábio dos Santos e Prof. Dr. Lucas Rezende Valeriano, expresso minha profunda gratidão pelos ensinamentos, pela dedicação e pelo compromisso com a formação de seus alunos. Suas orientações, conhecimentos e incentivo foram fundamentais para a minha evolução acadêmica e pessoal ao longo desta jornada no PROFMAT.

Em especial, agradeço à Profa. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga, cuja acolhida, incentivo e confiança foram decisivos para que eu encontrasse forças para retornar ao curso e prosseguir nesta caminhada acadêmica. Sua sensibilidade e apoio tiveram um significado especial em minha trajetória e estarão para sempre guardados em minha memória e em meu coração.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de mestrado, apoio financeiro que foi fundamental para a minha dedicação integral a esta pesquisa e para a conclusão desta etapa da minha formação acadêmica. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

O ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio é frequentemente marcado por abordagens excessivamente procedimentais, centradas na memorização de fórmulas de permutação, arranjo e combinação, sem que o estudante desenvolva compreensão das estruturas lógicas que sustentam os problemas de contagem. Essa lacuna didática motivou a presente dissertação, que tem como objetivo propor uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, articulando metodologias ativas, gamificação e o uso da plataforma digital Wordwall em contexto de escola pública. A pesquisa é de natureza bibliográfica e propositiva, com abordagem qualitativa, fundamentada em referenciais da educação matemática, das metodologias ativas e das tecnologias digitais na educação. A partir da análise das principais dificuldades dos estudantes, foram identificados os seguintes eixos de intervenção: progressão conceitual do raciocínio combinatório, uso criterioso de elementos de gamificação para engajamento e feedback, e integração do Wordwall como recurso de mediação didática com formatos interativos e imprimíveis equivalentes. O produto educacional resultante consiste em uma sequência de oito aulas, com rubrica de avaliação formativa, estratégias de mediação docente, adaptações para inclusão e alternativas para contextos com conectividade limitada. Os resultados indicam que a articulação entre progressão conceitual, gamificação intencional e plataforma digital flexível viabiliza uma aprendizagem mais ativa, argumentativa e aplicável em diferentes realidades escolares. A contribuição principal da pesquisa está em oferecer ao professor de Matemática da escola pública um roteiro didático replicável, que subordina o uso da tecnologia à compreensão matemática e à mediação pedagógica.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Metodologias Ativas; Gamificação; Wordwall; Ensino Médio.

Abstract

The teaching of Combinatorial Analysis in Brazilian high school is often characterized by overly procedural approaches, centered on the memorization of formulas for permutation, arrangement, and combination, without developing students' understanding of the logical structures underlying counting problems. This didactic gap motivated the present dissertation, which aims to propose a didactic sequence for teaching Combinatorial Analysis in high school, integrating active methodologies, gamification, and the Wordwall digital platform within the context of Brazilian public schools. The research is bibliographic and propositional in nature, with a qualitative approach, grounded in references from mathematics education, active methodologies, and digital technologies in education. Based on an analysis of students' most common difficulties, three intervention axes were identified: conceptual progression of combinatorial reasoning, intentional use of gamification elements for engagement and feedback, and integration of Wordwall as a didactic mediation tool offering equivalent interactive and printable formats. The resulting educational product consists of an eight-lesson sequence, including a formative assessment rubric, teacher mediation strategies, inclusion adaptations, and alternatives for low-connectivity contexts. The findings indicate that the combination of conceptual progression, intentional gamification, and a flexible digital platform enables more active, argumentative, and context-sensitive learning. The main contribution of the research lies in providing mathematics teachers in public schools with a replicable didactic framework that subordinates technology use to mathematical understanding and pedagogical mediation.

keywords: Combinatorial Analysis; Active Methodologies; Gamification; Wordwall; High School.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O problema do ensino mecânico de Análise Combinatória	1
1.2	Metodologias ativas, gamificação e tecnologias digitais como caminhos de res- posta	2
1.3	Lacuna de pesquisa, pergunta e objetivos	3
1.4	Mapeamento da produção acadêmica sobre o tema	4
1.5	Estrutura do trabalho	6
1.6	Metodologia da pesquisa	7
1.7	Declaração de uso de Inteligência Artificial	9
2	Análise Combinatória	10
2.1	Breve histórico	11
2.2	Princípio Fundamental da Contagem	13
2.2.1	Princípio aditivo	13
2.2.2	Princípio multiplicativo	16
2.3	Permutações	20
2.3.1	Permutação com repetição	25
2.3.2	Permutação circular	30
2.3.3	Permutação caótica	35
2.3.4	Arranjos simples	43
2.4	Combinações simples	46
2.5	Princípio da Inclusão-Exclusão	55
2.5.1	Caso de dois conjuntos	56

2.5.2	Caso de três conjuntos	59
2.5.3	Caso geral	63
2.5.4	Comentário didático	67
3	Metodologias Ativas e Gamificação no Ensino da Matemática do Ensino Médio	69
3.1	Jogos Matemáticos como Estratégia de Aprendizagem Significativa	70
3.2	A Gamificação no Ensino Médio: Engajamento e Motivação nas Aulas de Matemática	73
3.3	A Aprendizagem Colaborativa e a Avaliação Formativa por meio de Jogos Matemáticos	76
4	O Ensino de Análise Combinatória com o Uso da Mídia Wordwall na Escola Estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito	80
4.1	A análise combinatória no currículo do Ensino Médio	83
4.2	Dificuldades recorrentes na aprendizagem do raciocínio combinatório	85
4.3	Tecnologias digitais, gamificação e mediação docente na escola pública	89
4.4	Potencialidades didáticas do Wordwall para o ensino de análise combinatória	93
4.5	Sequência didática para uma turma da escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito	98
4.6	Avaliação da aprendizagem e análise dos erros	101
4.6.1	Condições de implementação, limites e possibilidades na escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito	104
	Considerações Finais	108
	Referências Bibliográficas	113

Lista de Figuras

2.1	Correspondência entre Pascal e Fermat (1654) sobre o problema da divisão de apostas.	12
2.2	Triângulo aritmético registrado por Yang Hui (1303).	13
2.3	Árvore de possibilidades para a montagem do lanche: $3 \cdot 4 = 12$	19
2.4	Árvore de possibilidades para a formação das senhas: $3 \cdot 5 = 15$	20
2.5	Releitura do Triângulo de Yang Hui em estilo de manuscrito histórico.	48
2.6	Representação de uma escolha de 4 sócios entre 10.	51
2.7	Pontos distribuídos em duas retas paralelas e exemplos de triângulos possíveis.	52
2.8	Escolha de 3 experimentos entre 7, sem considerar ordem.	54
3.1	Continuum da aprendizagem segundo Ausubel (2003), com exemplos aplicados ao ensino de Análise Combinatória.	71
3.2	Continuum da autodeterminação segundo Ryan e Deci (2000), com posicionamento dos elementos de gamificação e das três necessidades psicológicas básicas.	74
3.3	Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky (2007) aplicada ao ensino colaborativo de Análise Combinatória.	78
4.1	Eixos estruturantes para o ensino eficaz de análise combinatória com apoio de tecnologias digitais.	82
4.2	Comparação entre proficiência média em descritores combinatórios e média geral de Matemática no SAEB, por região, nas redes estaduais brasileiras.	84

4.3	Triângulo de Pascal com distinção visual entre coeficientes ímpares (círculos pretos) e pares (círculos brancos), demonstrando que representações estruturadas revelam regularidades combinatórias antes da formalização simbólica. .	88
4.4	Diagrama TPACK de Mishra e Koehler (2006), adaptado ao uso do Wordwall no ensino de Análise Combinatória.	90
4.5	Fatores que influenciam o uso de tecnologias digitais na educação.	92
4.6	Contribuições do Wordwall para o ensino de análise combinatória.	94
4.7	Atividade Quiz no Wordwall: Questão de análise combinatória com seis alternativas de resposta.	97

Lista de Quadros

1	Possibilidades de uso do Wordwall no ensino de análise combinatória.	96
2	Sequência didática sugerida para o trabalho com análise combinatória. . . .	101
3	Critérios de avaliação da aprendizagem em análise combinatória.	103
4	Barreiras de acessibilidade do Wordwall e adaptações recomendadas por tipo de necessidade, em conformidade com a Lei Brasileira de Inclusão.	107

Capítulo 1

Introdução

1.1 O problema do ensino mecânico de Análise Combinatória

O ensino de Matemática no Ensino Médio enfrenta um problema que persiste apesar das reformas curriculares e dos esforços de formação docente: boa parte dos estudantes aprende conteúdos matemáticos como se fossem procedimentos a seguir, não como raciocínios a compreender. Essa tendência se manifesta de forma especialmente clara na Análise Combinatória, campo que, por sua natureza estrutural, exige do aluno muito mais do que o reconhecimento de modelos prontos. Seu ensino requer que o estudante organize possibilidades, interprete condições impostas pelo enunciado, compare estratégias de contagem e justifique as escolhas feitas ao longo da resolução. Não se trata, portanto, de identificar se o problema é de arranjo, permutação ou combinação e aplicar mecanicamente a fórmula correspondente. Trata-se de pensar sistematicamente sobre estruturas, relações e restrições, desenvolvendo um modo de raciocinar que transcende o cálculo e se aproxima da argumentação matemática genuína. Quando essa distinção é ignorada no planejamento didático, a Análise Combinatória se reduz a um catálogo de regras difíceis de distinguir, e o aluno aprende a adivinhar, não a raciocinar.

Na prática escolar, essa redução se traduz em erros previsíveis e recorrentes: uso indevido de fórmulas, descon sideração das restrições presentes no enunciado, duplicação de casos já contados e incapacidade de explicar o que foi feito. O ponto central é que a dificuldade não está no cálculo em si, mas na compreensão da estrutura lógica que cada situação

exige. Muitos alunos chegam às fórmulas sem nunca ter tido a oportunidade de construir o raciocínio combinatório que as antecede. Etapas fundamentais como organizar possibilidades por listagem sistemática, representar casos por meio de diagramas de árvore e comparar situações aparentemente semelhantes, mas estruturalmente diferentes, são frequentemente suprimidas em favor da identificação rápida do modelo e da aplicação mecânica da expressão algébrica. O resultado é que o aluno resolve exercícios padronizados com razoável êxito, mas fracassa diante de qualquer variação, porque o problema de base permanece intacto: ele não compreendeu o que estava contando nem por que o procedimento adotado era válido.

1.2 Metodologias ativas, gamificação e tecnologias digitais como caminhos de resposta

Para enfrentar esse quadro, é preciso repensar o modo como o estudante é posicionado na aula e quais condições pedagógicas são criadas para que ele pense matematicamente de forma ativa. As metodologias ativas partem exatamente dessa necessidade. Em vez de centrar o processo no professor que expõe e no aluno que registra passivamente, elas criam condições para que o estudante investigue, argumente, tome decisões e assuma responsabilidade pelo próprio aprendizado. No ensino de Matemática, isso significa substituir a lógica da resposta pronta pela lógica da construção de estratégias: o aluno não recebe o caminho, ele o constrói, testando hipóteses, comparando resultados e revisando raciocínios. Os jogos matemáticos, quando planejados com clareza sobre o que se quer ensinar e com qual propósito pedagógico, são instrumentos legítimos e potentes dessa abordagem: estimulam raciocínio lógico, autonomia intelectual, cooperação e pensamento crítico sem abrir mão do rigor conceitual que a disciplina exige.

A gamificação, por sua vez, é frequentemente mal compreendida tanto na literatura quanto na prática docente. Reduzir essa estratégia à inserção de pontuações, rankings ou recompensas é ignorar o que nela tem valor pedagógico real: o uso intencional de elementos estruturais dos jogos para organizar desafios progressivos, gerar feedback imediato, sustentar o interesse dos estudantes ao longo das atividades e permitir retomadas conceituais sem que o erro seja tratado como fracasso. Em conteúdos como a Análise Combinatória, a gamificação só justifica seu lugar no planejamento quando está genuinamente a serviço da compreensão matemática, e não da superficialização do conteúdo. Isso significa reconhecer

que o erro precisa ser explorado como dado didático, que a participação do aluno precisa estar articulada à reflexão sobre o que foi feito e que o recurso lúdico, desacompanhado de argumentação matemática, produz no máximo engajamento superficial, sem aprendizagem duradoura.

As tecnologias digitais, por sua vez, ampliam as possibilidades de mediação docente e diversificam as formas de interação com o conteúdo, mas não resolvem por si mesmas os problemas de aprendizagem que decorrem de práticas pedagógicas inadequadas. Na escola pública brasileira, o uso de plataformas digitais precisa necessariamente levar em conta as condições concretas do que existe de fato: internet oscilante ou inexistente, acesso desigual a dispositivos, laboratórios subutilizados ou indisponíveis e tempos de aula curtos demais para atividades que dependam de configuração tecnológica prévia. Nesse cenário, a plataforma Wordwall apresenta uma vantagem prática e pedagogicamente relevante: permite criar atividades interativas e convertê-las em versões imprimíveis equivalentes, o que significa que a mesma proposta didática pode funcionar com projeção coletiva, em duplas pelo celular, em folha impressa para quem não tem acesso a dispositivo ou como atividade de retomada em casa. O Wordwall pode apoiar a visualização de conceitos, a identificação de erros frequentes e a avaliação formativa em tempo real, mas seu uso precisa estar integrado ao trabalho escrito, à discussão coletiva e à mediação intencional do professor. Sem essa integração, a plataforma corre o risco de alimentar o que se poderia chamar de pedagogia da pressa: aprendizagem reduzida a cliques e acertos imediatos, sem elaboração conceitual.

1.3 Lacuna de pesquisa, pergunta e objetivos

Apesar do crescente interesse acadêmico por metodologias ativas e tecnologias digitais na educação matemática, observa-se uma lacuna significativa: há escassez de propostas que articulem, de forma integrada e pedagogicamente fundamentada, a progressão conceitual do raciocínio combinatório, a gamificação como estratégia didática consistente e o uso de plataforma digital com alternativa impressa equivalente, pensadas especificamente para a realidade da escola pública brasileira. O que se encontra, em geral, são iniciativas que tratam esses elementos de forma isolada: ou a tecnologia aparece sem rigor conceitual, convertida em atrativo sem substância; ou as atividades lúdicas não estão ancoradas nas exigências curriculares estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular; ou a proposta pressupõe uma infraestrutura tecnológica que a maioria das escolas estaduais simplesmente

não possui. Essa lacuna revela não apenas uma ausência na produção acadêmica, mas uma necessidade concreta da prática docente: professores de Matemática da rede pública precisam de propostas que reconheçam as condições reais em que trabalham e que ofereçam caminhos pedagógicos viáveis dentro delas.

É a partir dessa necessidade que se justifica a presente pesquisa. Esta dissertação orienta-se pela seguinte pergunta: como uma sequência didática que articula metodologias ativas, gamificação e o uso da plataforma Wordwall pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Médio, em contexto de escola pública? Para respondê-la, o trabalho tem como objetivo geral propor essa sequência didática para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, com o Wordwall como recurso de mediação pedagógica. De forma específica, o estudo busca analisar as principais dificuldades dos estudantes no aprendizado de Análise Combinatória e suas causas didáticas; fundamentar teoricamente o uso de metodologias ativas e gamificação no ensino de Matemática; discutir as potencialidades e os limites do Wordwall como ferramenta didática na escola pública; e elaborar um produto educacional composto por sequência didática de oito aulas, com rubrica de avaliação formativa, estratégias de mediação docente e adaptações para inclusão.

1.4 Mapeamento da produção acadêmica sobre o tema

Para situar esta pesquisa no campo e delimitar com precisão sua contribuição, realizou-se um mapeamento da produção acadêmica brasileira sobre os três eixos que estruturam o trabalho: o ensino de Análise Combinatória na Educação Básica, as metodologias ativas e a gamificação no ensino de Matemática, e o uso de plataformas digitais como o Wordwall. O levantamento percorreu o período compreendido entre o início dos anos 2000 e 2026, com consultas ao Portal de Periódicos da CAPES, ao SciELO, à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e ao acervo do PROFMAT. Não se trata de revisão sistemática com protocolo formal, mas de um mapeamento de caráter inventariante, voltado a identificar tendências, convergências e ausências na produção do período.

No eixo do ensino de Análise Combinatória, a produção é consistente e revela um diagnóstico estável ao longo de mais de duas décadas: o conteúdo figura entre os mais difíceis de ensinar e aprender na Educação Básica, e a dificuldade central não está no cálculo, mas na interpretação da estrutura do problema. Silva e Guerra (2017) desenvolveram e validaram

uma sequência didática baseada no Princípio Fundamental da Contagem com estudantes da rede pública estadual de Alagoas, pela via da resolução de problemas, e constataram que a abordagem favoreceu a compreensão dos conceitos básicos ao mesmo tempo que expôs dificuldades persistentes. Coelho e Dias (2022) mostraram, pela análise de erros, que os estudantes dominam melhor o princípio multiplicativo do que a discriminação entre arranjos e combinações, o que reforça que a confusão estrutural antecede a falha de cálculo. Esse diagnóstico converge com a literatura internacional já discutida nesta pesquisa, em especial Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e Lockwood (2013).

A dimensão do volume e da maturidade dessa produção aparece nos estudos de estado da arte. Campos e Igliori (2021) analisaram teses e dissertações defendidas no Brasil sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória e identificaram cinco perspectivas investigativas recorrentes, entre elas a elaboração de sequências didáticas e o desenvolvimento de recursos para o ensino. O dado mais relevante para esta dissertação é a predominância do PROFMAT nesse conjunto: a maior parte das dissertações de mestrado profissional mapeadas pelas autoras provém justamente desse programa, o que evidencia tanto a vitalidade do tema quanto o risco de saturação de propostas que se repetem sem diferenciação clara. Em direção convergente, Oinhas e Zanon (2021) revisaram especificamente as dissertações do PROFMAT que articulam combinatória e tecnologias digitais, confirmando que esse cruzamento, embora presente, ainda é pouco explorado de forma sistemática.

No eixo das metodologias ativas e da gamificação, a produção cresceu de forma acentuada a partir de 2017, acompanhando a difusão dessas abordagens no país. Já se encontram, nesse período, propostas que organizam jogos em sequências didáticas voltadas especificamente à combinatória, como a de Ambrozi (2017), sinal de que a aproximação entre ludicidade e contagem sistemática não é nova. Revisões recentes sobre gamificação na Educação Básica convergem em dois pontos. Por um lado, registram ganhos consistentes de motivação, engajamento e participação dos estudantes. Por outro, alertam para um problema recorrente: boa parte das experiências carece de embasamento em teorias de aprendizagem e trata a gamificação como sinônimo de pontuação e competição, sem articulação com objetivos conceituais. Esse alerta é decisivo para o presente trabalho, que assume a distinção entre jogo e gamificação e subordina os elementos lúdicos à compreensão matemática, e não ao engajamento pelo engajamento.

O eixo mais específico, que articula gamificação, plataformas digitais e Análise Com-

binatória, é também o mais escasso, e é nele que esta pesquisa se posiciona. Dois trabalhos merecem destaque por sua proximidade com o objeto aqui investigado. Aguiar (2019), em dissertação do PROFMAT, investigou técnicas de gamificação como auxílio à resolução de problemas de combinatória. Brito e Almeida (2022) analisaram o uso da gamificação na aprendizagem de Análise Combinatória com apoio das plataformas H5P e Wordwall, em pesquisa fundamentada na Teoria Antropológica do Didático e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Esse último estudo é o que mais se aproxima da proposta desta dissertação, e sua existência confirma a pertinência do recorte aqui adotado. A produção sobre o Wordwall no ensino de Matemática, contudo, concentra-se majoritariamente em outros conteúdos e etapas, sobretudo no Ensino Fundamental, com foco em números racionais, operações e revisão gamificada.

O cotejamento desses três eixos torna a lacuna precisa. Existe produção robusta sobre as dificuldades em combinatória, produção crescente sobre gamificação no ensino de Matemática e produção inicial sobre o Wordwall na Educação Básica, mas são poucos os trabalhos que articulam, de modo integrado e pedagogicamente fundamentado, a progressão conceitual do raciocínio combinatório, a gamificação como estratégia didática consistente e o uso de uma plataforma digital com alternativa impressa equivalente, pensados especificamente para as condições concretas da escola pública. A contribuição desta dissertação não está em ser pioneira em qualquer um dos eixos isolados, o que seria uma afirmação frágil, mas em integrá-los em uma sequência didática replicável, atenta à oscilação de conectividade e à heterogeneidade das turmas da rede estadual. É esse arranjo, e não cada elemento em separado, que diferencia a proposta da produção mapeada.

1.5 Estrutura do trabalho

Após esta introdução, o trabalho está organizado em quatro capítulos seguidos das considerações finais. O Capítulo 2 apresenta os fundamentos matemáticos da Análise Combinatória, incluindo histórico, definições, teoremas e demonstrações dos principais resultados trabalhados no Ensino Médio, com ênfase na construção do raciocínio antes da formalização simbólica. O Capítulo 3 discute o referencial teórico sobre metodologias ativas, jogos matemáticos, gamificação e avaliação formativa, fundamentando as escolhas pedagógicas que orientam o produto educacional. O Capítulo 4 analisa o ensino de Análise Combinatória com o apoio do Wordwall no contexto específico da escola estadual CEETI Coronel João

Fernandes de Brito, abordando as exigências curriculares da BNCC, as dificuldades recorrentes dos estudantes, as potencialidades didáticas da plataforma e as condições reais de implementação na rede pública. O Capítulo 5 apresenta o produto educacional completo, com justificativa, objetivos, alinhamento curricular, orientações operacionais, glossário, roteiros detalhados das oito aulas, rubrica de avaliação, fichas de acompanhamento, checklist de implementação e adaptações para inclusão. As considerações finais retomam os objetivos da pesquisa, sintetizam suas contribuições para o ensino de Matemática e indicam possibilidades para investigações futuras de caráter empírico.

1.6 Metodologia da pesquisa

Esta dissertação é de natureza bibliográfica e propositiva, com abordagem qualitativa. A opção por essa modalidade de pesquisa decorre diretamente da natureza do problema investigado e do objetivo central do trabalho: propor uma sequência didática pedagogicamente fundamentada para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, articulando metodologias ativas, gamificação e o uso da plataforma Wordwall em contexto de escola pública. Não se trata, portanto, de uma pesquisa de campo com coleta de dados empíricos junto a estudantes ou professores, mas de uma investigação que sistematiza, analisa e articula conhecimentos já produzidos pela literatura especializada para formular uma proposta de intervenção didática original, consistente e aplicável a diferentes realidades escolares. Essa escolha metodológica é coerente com as finalidades do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que valoriza a produção de conhecimento vinculado à prática docente e a elaboração de produtos educacionais voltados à melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica.

A abordagem qualitativa orienta o modo como o material teórico foi selecionado, lido e interpretado ao longo de toda a pesquisa. Em vez de quantificar variáveis ou mensurar desempenho de forma numérica, a pesquisa busca compreender relações entre conceitos, identificar tensões didáticas presentes na literatura e articular perspectivas teóricas distintas em torno de um problema pedagógico concreto. Gil (2008) define a pesquisa bibliográfica como aquela elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos científicos e documentos oficiais, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com o que foi escrito sobre determinado assunto. É nesse sentido que a presente dissertação se fundamenta: cada escolha teórica adotada, cada argumento desenvolvido sobre as

dificuldades dos alunos no raciocínio combinatório e cada afirmação sobre as potencialidades pedagógicas do Wordwall está ancorada em fontes identificadas e verificáveis, sem recurso a dados inventados ou a suposições não sustentadas pela literatura.

O levantamento bibliográfico foi realizado em bases de dados científicas de acesso aberto, com prioridade para o Portal de Periódicos da CAPES, o SciELO Brasil, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o repositório da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Foram consultados também documentos oficiais de caráter normativo e orientador, em especial a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996), a Política Nacional de Educação Digital (Brasil, 2023b) e a Estratégia Nacional de Escolas Conectadas (Brasil, 2023a), além de publicações da UNESCO relacionadas ao uso pedagógico de tecnologias digitais na educação (UNESCO, 2023). Os descritores utilizados nas buscas incluíram, em combinações variadas, os seguintes termos: raciocínio combinatório, análise combinatória, ensino médio, metodologias ativas, gamificação, educação matemática, tecnologias digitais, sequência didática, avaliação formativa e aprendizagem colaborativa.

Os critérios de inclusão adotados priorizaram trabalhos publicados em periódicos científicos revisados por pares, teses e dissertações defendidas em programas de pós-graduação reconhecidos pela CAPES e documentos oficiais emitidos por órgãos governamentais ou organismos internacionais de reconhecida legitimidade. Foram privilegiadas, ainda, produções nacionais alinhadas ao contexto da Educação Básica brasileira, sem excluir referências internacionais de relevância comprovada para o campo da educação matemática e do raciocínio combinatório. Trabalhos de natureza puramente opinativa, sem sustentação empírica ou teórica verificável, e materiais cujas fontes primárias não puderam ser identificadas ou acessadas foram excluídos da base referencial da pesquisa.

Por se tratar de uma pesquisa bibliográfica e propositiva, sem coleta de dados com sujeitos humanos, não houve necessidade de submissão ao Comitê de Ética em Pesquisa. O produto educacional elaborado no Capítulo 4 constitui o principal resultado concreto do trabalho: uma sequência didática de oito aulas, com rubrica de avaliação formativa, estratégias de mediação docente e adaptações para inclusão, concebida para ser aplicada por professores de Matemática em turmas do Ensino Médio de escolas públicas. A proposta foi construída com base no referencial teórico levantado e nas condições concretas de infraestrutura da escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito, contexto que orientou as escolhas

didáticas e as alternativas de implementação previstas para situações com conectividade limitada ou ausente. As principais limitações desta pesquisa residem na ausência de dados empíricos sobre a aplicação real da sequência e no fato de que os efeitos sobre a aprendizagem dos estudantes permanecem como hipótese fundamentada teoricamente, a ser verificada em investigações futuras de caráter aplicado e empírico.

1.7 Declaração de uso de Inteligência Artificial

Em atendimento à Portaria CNPq nº 2.664, de 6 de março de 2026, que institui a Política de Integridade na Atividade Científica e torna obrigatória a declaração do uso de ferramentas de Inteligência Artificial Generativa em qualquer fase do trabalho científico (CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO (CNPq), 2026), registra-se que ferramentas dessa natureza foram empregadas nesta dissertação como apoio à revisão de linguagem e à organização textual. O uso restringiu-se à verificação ortográfica e gramatical, à sugestão de reformulações para maior clareza e coesão, à conferência de consistência entre citações e referências e à elaboração de versões iniciais de algumas figuras esquemáticas, posteriormente revisadas e validadas pelo autor. As figuras produzidas com esse auxílio estão identificadas em suas respectivas fontes.

Nenhum conteúdo conceitual, resultado, demonstração matemática ou argumento teórico foi gerado de forma autônoma por essas ferramentas sem verificação. A concepção da pesquisa, a seleção e a interpretação das fontes, a construção das demonstrações e a elaboração da sequência didática são de responsabilidade integral do autor, que revisou e validou todo o material apresentado. Assume-se, assim, plena responsabilidade pelo conteúdo final do trabalho, inclusive quanto à exatidão das informações e à integridade das referências utilizadas.

Capítulo 2

Análise Combinatória

A Análise Combinatória é o campo da Matemática dedicado a contar, organizar e distribuir elementos de conjuntos finitos de forma sistemática. Mais do que aplicar fórmulas de permutação, arranjo e combinação, esse campo exige pensar estruturalmente: identificar restrições, reconhecer quando a ordem altera o resultado e justificar por que uma estratégia de contagem é adequada a cada situação. Com raízes na Grécia Antiga e sistematização a partir do século XVII, a área hoje aparece na Matemática pura, na estatística, na computação, na economia e nas ciências sociais.

No Ensino Médio, a Análise Combinatória exige uma abordagem cuidadosa. Quando reduzida à memorização de fórmulas, produz exatamente o problema que se quer evitar: alunos que escolhem uma expressão no escuro, calculam e torcem para acertar. O ensino que funciona parte de situações concretas, constrói o raciocínio por listagem e diagrama, e só depois apresenta a fórmula como síntese do que já foi compreendido.

Este capítulo apresenta os fundamentos matemáticos da Análise Combinatória com essa perspectiva. Parte do breve histórico da área, estabelece definições e proposições centrais com demonstrações formais e trabalha os principais conteúdos do currículo do Ensino Médio: o Princípio Fundamental da Contagem, as permutações simples e suas variantes, os arranjos simples, as combinações simples, a permutação circular e o Princípio da Inclusão-Exclusão.

A organização deste capítulo segue uma progressão conceitual. Inicialmente, discutem-se os princípios básicos de contagem, pois eles constituem a base lógica de todos os procedimentos combinatórios posteriores. Em seguida, estudam-se as permutações, nas quais todos os elementos disponíveis são ordenados; os arranjos, nos quais apenas parte dos elementos é selecionada e ordenada; e as combinações, nas quais a seleção é feita sem

considerar a ordem. Por fim, apresenta-se o Princípio da Inclusão–Exclusão, necessário quando a contagem envolve conjuntos com interseções e, portanto, risco de contagem repetida. Dessa forma, cada tópico não aparece como uma fórmula isolada, mas como resposta a uma pergunta estrutural sobre o problema de contagem.

2.1 Breve histórico

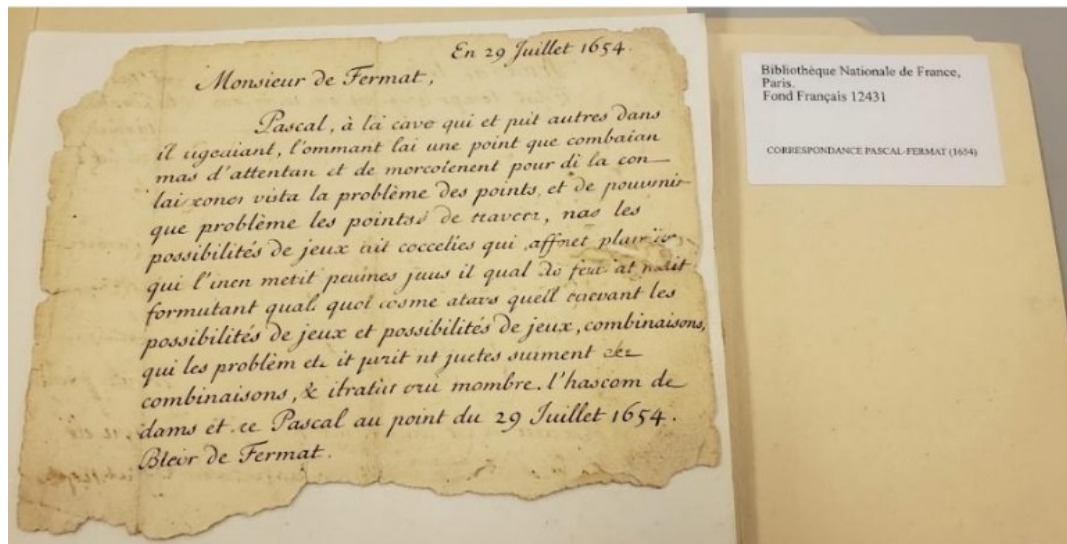
A história da Análise Combinatória se confunde com a história dos problemas de contagem. Na Grécia Antiga, questões de organização e seleção de objetos eram tratadas de forma intuitiva, sem sistematização formal. A abordagem rigorosa começa a tomar forma na Idade Média e se consolida na Renascença, com contribuições de matemáticos como Niccolò Tartaglia, que trabalhou com relações binômicas e equações combinatórias.

O marco mais reconhecido é a colaboração entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat no século XVII. Partindo de problemas com jogos de azar, os dois matemáticos franceses desenvolveram os fundamentos da teoria das probabilidades a partir do raciocínio combinatório. Pascal sistematizou o triângulo aritmético que carrega seu nome, fornecendo os coeficientes binomiais usados até hoje em contagem e álgebra. A correspondência entre os dois sobre a divisão justa de apostas em jogos interrompidos é considerada o ponto de partida da teoria das probabilidades como campo matemático (Pascal, 1665; Zhu, 1303; Burton, 2010).

Antes de tratar dos princípios de contagem, vale desfazer um equívoco comum: o de que usar jogos para ensinar Matemática seria uma invenção recente. A própria história da disciplina mostra o contrário. No século XVII, parte do que hoje chamamos de teoria das probabilidades nasceu da tentativa de resolver problemas concretos de jogos de azar, não de especulação abstrata. A correspondência trocada entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat em 1654, reproduzida a seguir, registra esse vínculo entre o jogo e a construção de conceitos matemáticos novos.

A Figura 2.1 reproduz parte dessa troca de cartas. No manuscrito aparecem referências ao 'problème des points' e à contagem de 'possibilités de jeux'. O que à primeira vista parece um debate recreativo é, na prática, um dos primeiros tratamentos sistemáticos de situações de incerteza: Pascal e Fermat buscavam uma regra justa para dividir a aposta de um jogo interrompido antes do fim. Ao resolver esse problema particular, formularam ideias que sustentam até hoje o cálculo de probabilidades. O episódio mostra que o raciocínio

Figura 2.1 – Correspondência entre Pascal e Fermat (1654) sobre o problema da divisão de apostas.



Fonte: Bibliothèque Nationale de France, domínio público.

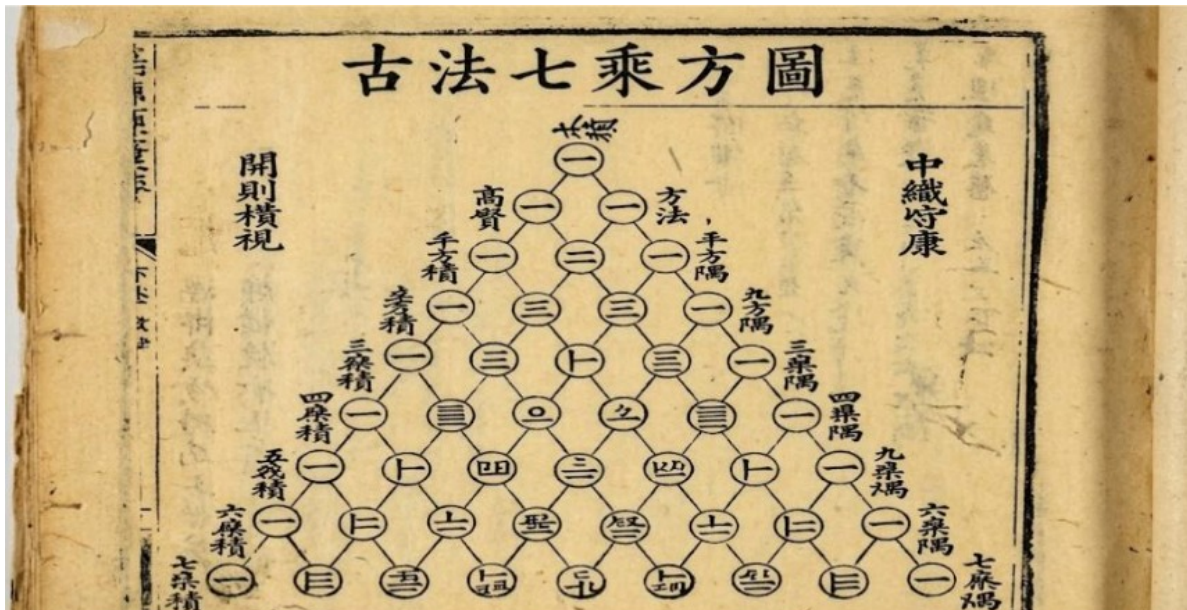
matemático rigoroso pode surgir de um contexto lúdico, sem perder rigor por causa disso.

A Figura 2.2 apresenta um precursor do que, no Ocidente, seria posteriormente denominado Triângulo de Pascal. A imagem evidencia que o raciocínio combinatório foi sistematizado de forma independente em diferentes culturas séculos antes de Pascal.

Nos séculos seguintes, a área cresceu além dos jogos de azar. Leonhard Euler contribuiu com problemas de caminhos em grafos e quadrados mágicos. No século XIX e ao longo do XX, a Análise Combinatória se formalizou como subcampo da Matemática discreta, com aplicações em criptografia, teoria dos grafos, análise de algoritmos e estatística. Os princípios desenvolvidos por Pascal e Fermat continuam sendo a base do ensino do conteúdo no Ensino Médio.

Esse percurso histórico mostra que a Análise Combinatória surgiu da necessidade de organizar possibilidades de maneira sistemática. Problemas que envolviam jogos, apostas, escolhas e distribuições exigiam mais do que intuição: exigiam métodos capazes de garantir que todos os casos fossem considerados, sem omissões nem repetições indevidas. É justamente essa necessidade que conduz aos princípios fundamentais de contagem, base das técnicas combinatórias mais estudadas no Ensino Médio.

Figura 2.2 – Triângulo aritmético registrado por Yang Hui (1303).



Fonte: Domínio público, Wikimedia Commons.

2.2 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem é a base lógica de toda a Análise Combinatória elementar. Antes de memorizar qualquer fórmula, é preciso distinguir dois casos frequentemente confundidos: as escolhas excludentes, tratadas pelo princípio aditivo, e as escolhas sucessivas e independentes, tratadas pelo princípio multiplicativo. Identificar qual dos dois se aplica a cada situação é a habilidade central deste conteúdo (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012).

2.2.1 Princípio aditivo

O princípio aditivo trata das escolhas em que tomar uma opção elimina as outras. Para chegar até ele, comece por uma situação comum de lanchonete.

Situação-problema. Em uma lanchonete, para acompanhar o lanche o cliente pode pedir um entre 3 sucos *ou* um entre 2 refrigerantes, mas apenas uma bebida. Quantas opções de bebida ele tem?

Como a escolha é por um suco *ou* um refrigerante, nunca pelos dois ao mesmo tempo,

basta listar todas as bebidas possíveis: os 3 sucos e os 2 refrigerantes, sem que nenhuma se repita. São, ao todo,

$$3 + 2 = 5$$

opções de bebida.

Observe que as quantidades foram **somadas** justamente porque as escolhas são excludentes: optar por um suco elimina a possibilidade de um refrigerante. Esse raciocínio, de somar as possibilidades de categorias que não se sobrepõem, é exatamente o que o princípio aditivo formaliza a seguir.

Partindo desse caso concreto das bebidas e estendendo o raciocínio para conjuntos finitos quaisquer sem elementos em comum, obtém-se o resultado geral.

Teorema 2.1 (Princípio aditivo para conjuntos finitos). *Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos, isto é,*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Então, segundo (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012) o número de elementos de $A \cup B$ é dado por

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \quad (2.1)$$

Mais geralmente, se $A_1, A_2, \dots, A_k$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos, isto é,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{sempre que } i \neq j,$$

então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| \quad (2.2)$$

De forma equivalente, usando a notação de união finita,

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|. \quad (2.3)$$

Demonstração. Como A e B são disjuntos, nenhum elemento pertence simultaneamente aos dois conjuntos. Assim, ao contar os elementos de $A \cup B$, cada elemento de A é contado uma única vez e cada elemento de B também é contado uma única vez, sem repetição (Morgado

et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012). Portanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

No caso geral, como os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$ são dois a dois disjuntos, então nenhum elemento pertence simultaneamente a dois conjuntos distintos da família. Logo, a contagem dos elementos da união

$$\bigcup_{i=1}^k A_i$$

é obtida somando-se separadamente o número de elementos de cada conjunto. Portanto,

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

O princípio aditivo se aplica quando as escolhas são excludentes: ao optar por uma das categorias disponíveis, o agente descarta as demais.

Aplicação do princípio aditivo

Exemplo 2.1. João pode escolher um entre 5 tipos de pão na padaria ou um entre 3 sabores de sorvete na sorveteria. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer sua escolha?

Como a escolha é excludente (padaria ou sorveteria, não as duas), aplica-se o princípio aditivo:

$$5 + 3 = 8$$

João tem 8 escolhas possíveis.

Exemplo 2.2. Uma escola está oferecendo, em período diferente das aulas normais, 4 oficinas de música, 5 oficinas de esporte e 3 oficinas de robótica. Um aluno deseja fazer matrícula em apenas uma oficina. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer sua escolha?

Como o aluno escolherá somente uma oficina, a escolha de uma modalidade exclui automaticamente as demais. Assim, pelo princípio aditivo, o número total de possibilidades é dado por

$$4 + 5 + 3 = 12.$$

Portanto, existem 12 possibilidades de escolha. Em outras palavras, o aluno pode escolher sua oficina de 12 maneiras diferentes.

Exemplo 2.3. Para representar uma turma em uma reunião, deve-se escolher apenas um estudante. Há 14 meninas e 16 meninos na turma. De quantas maneiras pode ser escolhido o representante? Como o representante será uma menina ou um menino, e essas possibilidades não se repetem, temos:

$$14 + 16 = 30.$$

Portanto, o representante pode ser escolhido de 30 maneiras.

Os exemplos anteriores ilustram situações em que escolher uma opção exclui as demais, razão pela qual as quantidades são somadas. Nem todo problema de contagem, porém, envolve alternativas excludentes. Em muitas situações, uma tarefa se realiza por etapas: primeiro se faz uma escolha, depois outra, e assim por diante. Nesses casos, o raciocínio deixa de ser aditivo e passa a ser multiplicativo.

2.2.2 Princípio multiplicativo

Há tarefas que se completam por etapas feitas uma depois da outra, e a contagem muda nesse caso. O trajeto até o trabalho ajuda a ver como.

Situação-problema. Para ir de casa ao trabalho, uma pessoa pode usar 2 linhas de ônibus diferentes até o centro e, de lá, 3 linhas de metrô até o destino. Se ela sempre pega um ônibus *e depois* um metrô, de quantas maneiras diferentes pode fazer o trajeto?

Aqui a tarefa ocorre em duas etapas *sucessivas*: primeiro o ônibus, depois o metrô. Para cada uma das 2 linhas de ônibus existem 3 linhas de metrô possíveis. Listando: a linha de ônibus 1 se combina com os 3 metrôs (três trajetos) e a linha 2 também (mais três trajetos), totalizando

$$3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6$$

trajetos.

Diferentemente do caso anterior, as quantidades foram **multiplicadas**, e não somadas: as escolhas não são excludentes, mas feitas em sequência. É esse raciocínio que o princípio multiplicativo generaliza.

Trocando as 2 linhas de ônibus e as 3 de metrô por etapas com quantidades quaisquer de opções, chega-se à definição e ao resultado gerais.

Definição 2.1 (Princípio multiplicativo). Podemos Dizer que uma tarefa é realizada por **etapas sucessivas** quando sua execução pode ser dividida em escolhas que são feitas uma após a outra.

Se uma tarefa pode ser realizada em k etapas sucessivas, e se a primeira etapa pode ser realizada de n_1 maneiras, a segunda de n_2 maneiras, a terceira de n_3 maneiras, e assim sucessivamente até a k -ésima etapa, então o número total de maneiras de realizar a tarefa é obtido multiplicando-se o número de possibilidades de cada etapa (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012).

Teorema 2.2 (Princípio multiplicativo). *Se uma tarefa pode ser executada em k etapas sucessivas, e se a i -ésima etapa pode ser realizada de n_i maneiras, para $i = 1, 2, \dots, k$, então o número total de maneiras de executar a tarefa é*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k. \quad (2.4)$$

Demonstração. Para compreender a ideia, vamos considerar inicialmente uma tarefa que é realizada em apenas duas etapas. Se a primeira etapa pode ser feita de n_1 maneiras e, para cada uma dessas escolhas, a segunda etapa pode ser feita de n_2 maneiras, então cada escolha da primeira etapa gera n_2 possibilidades para a segunda (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012).

Sendo assim, temos

$$\underbrace{n_2 + n_2 + \cdots + n_2}_{n_1 \text{ vezes}}.$$

Logo,

$$\underbrace{n_2 + n_2 + \cdots + n_2}_{n_1 \text{ vezes}} = n_1 \cdot n_2.$$

Então para as três etapas, cada uma das $n_1 \cdot n_2$ possibilidades iniciais pode ser completada de n_3 maneiras. Desse modo, o total passa a ser

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3.$$

Dessa forma, repetindo esse raciocínio sucessivamente até a k -ésima etapa, vamos obter

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k.$$

Em suma, o número total de maneiras de executar a tarefa é o produto do número de possibilidades de cada etapa.

Observação. O princípio multiplicativo deve ser usado quando uma tarefa é formada por escolhas feitas em sequência. Isto é, primeiro escolhe-se uma opção, depois outra, e assim por diante. O total de possibilidades não é obtido somando as opções, mas multiplicando as possibilidades de cada etapa.

Exemplo 1. Uma pessoa deseja montar um lanche escolhendo um tipo de pão e um tipo de recheio. Existem 3 tipos de pão e 4 tipos de recheio. Quantos lanches distintos podem ser montados?

É relevante examinar, primeiramente, que a escolha ocorre em duas etapas:

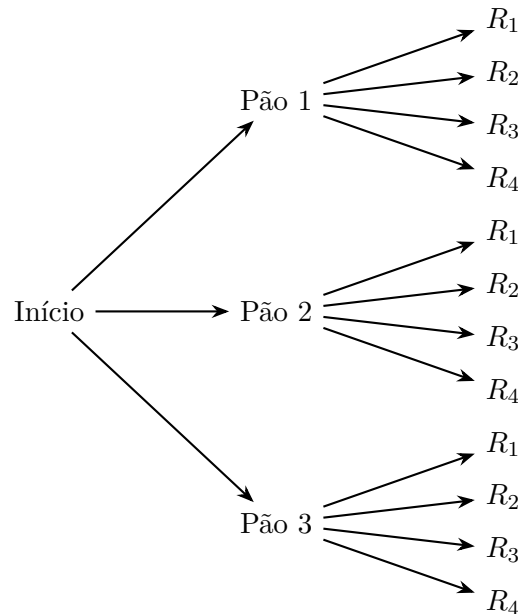
escolher o pão e escolher o recheio.

Dessa forma, visto que existem 3 possibilidades para o pão e 4 possibilidades para o recheio, pelo princípio multiplicativo, temos

$$3 \cdot 4 = 12. \tag{2.5}$$

Portanto, podem ser montados 12 lanches distintos.

Figura 2.3 – Árvore de possibilidades para a montagem do lanche: $3 \cdot 4 = 12$.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

Exemplo 2. Uma senha é formada por uma letra seguida de um número. As letras possíveis são A , B e C , e os números possíveis são 1, 2, 3, 4 e 5. Quantas senhas diferentes podem ser formadas?

Há 3 possibilidades para a letra e 5 possibilidades para o número. Assim,

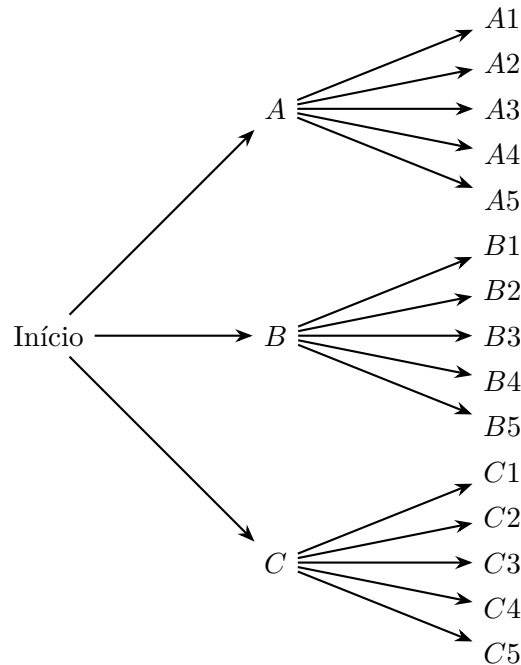
$$3 \cdot 5 = 15. \quad (2.6)$$

Portanto, podem ser formadas 15 senhas diferentes.

Comentário didático. As árvores de possibilidades ajudam a visualizar o princípio multiplicativo, de forma clara. No primeiro exemplo, cada tipo de pão se ramifica em 4 recheios possíveis, o que acaba por produzir $3 \cdot 4 = 12$ lanches. No segundo exemplo, cada letra se ramifica em 5 números possíveis, produzindo $3 \cdot 5 = 15$ senhas.

O princípio multiplicativo permite compreender o primeiro grande tipo de problema combinatório: a ordenação de todos os elementos de um conjunto. Quando todos os objetos disponíveis devem ocupar posições distintas em uma fila, sequência, prateleira ou lista, a contagem passa a depender diretamente da ordem em que esses objetos são colocados. Essa situação conduz ao conceito de permutação.

Figura 2.4 – Árvore de possibilidades para a formação das senhas: $3 \cdot 5 = 15$.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

2.3 Permutações

A ideia central por trás de uma permutação é basicamente **ordenar todos os elementos que fazem parte de um conjunto**. Desse modo, quando todos os elementos disponíveis precisam ser dispostos em uma fila, ou mesmo numa sequência, ou numa prateleira, ou em posições que já estão determinadas, então, estamos diante de um problema que envolve permutação (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012).

Situação-problema. Três amigos (Ana, Bruno e Carla) vão tirar uma foto lado a lado. De quantas maneiras diferentes eles podem se posicionar na fila?

Como são poucos, é possível listar todas as ordens possíveis:

(Ana, Bruno, Carla), (Ana, Carla, Bruno), (Bruno, Ana, Carla),

(Bruno, Carla, Ana), (Carla, Ana, Bruno), (Carla, Bruno, Ana).

São 6 disposições. Há ainda uma forma de contar sem listar: existem 3 escolhas para quem ocupa a primeira posição; feita essa escolha, restam 2 para a segunda e 1 para a última, o

que dá

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Esse produto de fatores decrescentes, que aparece sempre que ordenamos *todos* os elementos de um conjunto, recebe o nome de fatorial e está no centro da definição de permutação simples, apresentada a seguir.

Generalizando a ideia de ordenar os três amigos para um conjunto qualquer com n elementos distintos, formalizam-se os conceitos de permutação simples e de fatorial.

Definição 2.2 (Permutação simples). Seja

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

um conjunto finito com n elementos distintos. Uma **permutação simples** de A é uma ordenação de todos os seus n elementos (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012).

De maneira equivalente, uma permutação simples de A é uma sequência dado por

$$(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}),$$

em que σ é uma bijeção do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ nele mesmo.

Observação 2.1. A palavra “simples” indica que todos os elementos envolvidos são distintos. Por exemplo, se os elementos são a , b e c , então as sequências (a, b, c) e (b, a, c) são permutações diferentes, pois a ordem dos elementos foi alterada.

Definição 2.3 (Fatorial). Para todo número natural $n \geq 1$, define-se o fatorial de n por

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Além disso, por convenção,

$$0! = 1.$$

Teorema 2.3 (Número de permutações simples). *O número de permutações simples de um conjunto com n elementos distintos é dado por*

$$P_n = n!.$$

Demonstração. Considere que temos n elementos distintos, e o objetivo é colocar cada um deles em uma das n posições disponíveis.

Para a primeira posição, temos uma boa variedade, n escolhas diferentes. Uma vez que escolhemos um elemento para a primeira posição, sobram $n - 1$ elementos para a segunda posição. Continuando dessa forma, vamos ter $n - 2$ elementos que servem para a terceira posição, e este padrão continua até que reste somente um elemento para a derradeira posição, que seria a n -ésima.

Com base no princípio multiplicativo, chegamos à conclusão de que o número total de maneiras de organizar esses elementos é:

$$P_n = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Em outras palavras, isso pode ser expresso de forma mais compacta como:

$$P_n = n!.$$

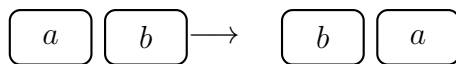
Que é o fatorial de n .

Exemplo 2.4. Vamos considerar com dois elementos distintos, a e b , existem

$$2! = 2$$

permutações:

$$(a, b) \quad \text{e} \quad (b, a).$$

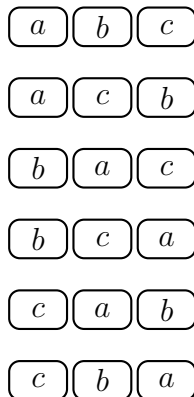


Exemplo 2.5. Vamos considerar com três elementos distintos, a , b e c , existem

$$3! = 6$$

permutações:

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$



Exemplo 2.6. Em uma cerimônia da escola, 7 estudantes que são todos diferentes precisam se organizar e formar uma fila. De quantas maneiras diferentes é possível formar essa fila específica?

Já que cada um dos sete alunos são diferentes entre si, quer dizer que, estamos falando aqui de ter que fazer uma permutação muito simples destes sete elementos. Desta forma:

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Portanto, a fila pode ser organizada de

$$\boxed{5040}$$

modos que são diferentes.



Sete posições na fila

Exemplo 2.7. Em uma cerimônia escolar, sete alunos distintos precisam formar uma fila. Dois deles, chamados A e B , não podem ficar lado a lado. De quantas maneiras diferentes a fila pode ser formada nessas condições?

Se não houvesse restrição, os 7 alunos formariam a fila de

$$7! = 5040$$

maneiras, bastando calcular a permutação de todos eles.

Convém agora contar os casos proibidos, isto é, aqueles em que A e B ficam juntos. Para isso, tratamos o par (A, B) como um bloco único.

Desse modo, temos:

$$\underbrace{(AB)}_{\text{bloco}}, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F, \quad G.$$

São, então, 6 elementos a ordenar, o que pode ser feito de $6!$ maneiras. É preciso lembrar, porém, que, dentro do bloco, os alunos A e B podem trocar de posição:

$$AB \quad \text{ou} \quad BA.$$

Portanto, a quantidade de filas proibidas é:

$$6! \cdot 2! = 720 \cdot 2 = 1440.$$

Isto é, 720 referente às posições e 2 às trocas dentro do bloco.

Com isso, o número de filas permitidas é:

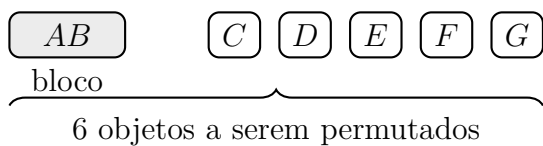
$$7! - 6! \cdot 2! = 5040 - 1440 = 3600.$$

Dessa forma, existem

$$\boxed{3600}$$

filas em que A e B não ficam lado a lado.

Caso proibido: A e B juntos



Exemplo 2.8. Cinco livros distintos de Matemática devem ser colocados em uma prateleira. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?

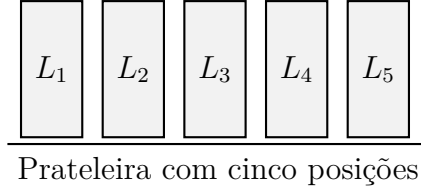
Como os livros são distintos e todos serão organizados em uma sequência linear, temos:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Logo, os livros podem ser organizados de

$$\boxed{120}$$

maneiras diferentes.



2.3.1 Permutação com repetição

Nem sempre todos os elementos a serem ordenados são distintos. Em muitos problemas, alguns elementos aparecem repetidos, como ocorre em palavras com letras iguais (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012).

Situação-problema. Quantas “palavras” diferentes (com ou sem sentido) podem ser formadas reorganizando as letras de **OVO**?

Se as três letras fossem distintas, haveria $3! = 6$ ordenações. Acontece que a letra *O* se repete. Para enxergar o efeito disso, marque temporariamente os dois *O* como O_1 e O_2 : as ordens $O_1 V O_2$ e $O_2 V O_1$ produzem a *mesma* palavra OVO. O mesmo ocorre com os demais pares. Ou seja, cada palavra real foi contada *duas* vezes, uma para cada troca entre os dois *O*. Logo,

$$\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3,$$

a saber: OVO, OOV e VOO.

A divisão por $2!$ corrige a contagem repetida provocada pelas letras iguais. Generalizando essa ideia de dividir pelo número de trocas entre elementos idênticos, chega-se à fórmula da permutação com repetição.

Estendendo esse argumento de dividir pelas trocas entre elementos iguais para uma coleção com vários grupos de repetições, obtém-se o resultado geral.

Definição 2.4 (Permutação com repetição). Considere uma coleção com n elementos, na qual alguns elementos são indistinguíveis entre si. Suponha que existam α_1 elementos iguais de um primeiro tipo, α_2 elementos iguais de um segundo tipo, e assim sucessivamente, até

α_k elementos iguais de um k -ésimo tipo, com

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n.$$

O número de permutações distintas dessa coleção é

$$P(n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!}.$$

Teorema 2.4 (Número de permutações com repetição). *Se uma coleção possui n elementos, com repetições dadas por*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k,$$

então o número de ordenações distintas é

$$P(n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!}.$$

Demonstração. Se todos os n elementos fossem distintos, então haveria $n!$ ordenações possíveis.

No entanto, quando existem elementos repetidos, algumas dessas ordenações tornam-se indistinguíveis. Por exemplo, se houver α_1 elementos iguais de um mesmo tipo, permutar apenas esses α_1 elementos entre si não gera uma nova ordenação, o que produz uma repetição na contagem por um fator de $\alpha_1!$.

Do mesmo modo, os α_2 elementos iguais do segundo tipo podem ser permutados entre si de $\alpha_2!$ maneiras, sem alterar a configuração observável. O mesmo raciocínio vale para todos os grupos de elementos repetidos.

Portanto, é preciso dividir o total, que é $n!$, pelo produto dos fatoriais das quantidades repetidas, como se vê na fórmula:

$$P(n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!}.$$

Exemplo 2.9. Vamos considerar o conjunto de letras

$$\{A, A, B, C\}.$$

Há 4 letras ao todo, sendo que a letra A aparece duas vezes. Portanto,

$$n = 4, \quad \alpha_A = 2, \quad \alpha_B = 1, \quad \alpha_C = 1.$$

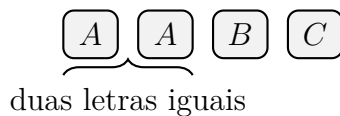
Assim,

$$P(4; 2, 1, 1) = \frac{4!}{2! 1! 1!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Logo, existem

$$\boxed{12}$$

ordenações distintas.



Exemplo 2.10. Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra

ARARA?

A palavra ARARA possui 5 letras. A letra A aparece 3 vezes e a letra R aparece 2 vezes. Assim,

$$n = 5, \quad \alpha_A = 3, \quad \alpha_R = 2.$$

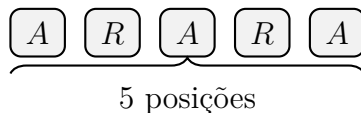
Portanto,

$$P(5; 3, 2) = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Logo, existem

$$\boxed{10}$$

permutações distintas da palavra ARARA.



Exemplo 2.11. Quantos anagramas distintos podem ser formados com as letras da palavra

MATEMATICA?

A palavra MATEMATICA possui 10 letras:

$$M, A, T, E, M, A, T, I, C, A.$$

As repetições são:

$$A : 3, \quad M : 2, \quad T : 2, \quad E : 1, \quad I : 1, \quad C : 1.$$

Portanto,

$$P(10; 3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!}.$$

Como

$$10! = 3628800, \quad 3! = 6, \quad 2! = 2,$$

temos

$$P(10; 3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{3628800}{6 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3628800}{24} = 151200.$$

Logo, a palavra MATEMATICA possui

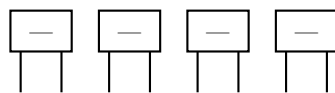
$$\boxed{151200}$$

anagramas distintos.

$$\boxed{M} \boxed{A} \boxed{T} \boxed{E} \boxed{M} \boxed{A} \boxed{T} \boxed{I} \boxed{C} \boxed{A}$$

Letras repetidas reduzem o número de anagramas distintos.

Exemplo 2.12. Questão 1. Quatro alunos distintos, A , B , C e D , devem se sentar em quatro cadeiras alinhadas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?



Quatro cadeiras alinhadas

Solução. Como os quatro alunos são distintos e todos devem ocupar uma cadeira, temos uma permutação simples de 4 elementos:

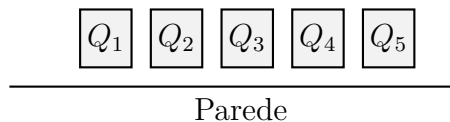
$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Portanto, existem

$$\boxed{24}$$

maneiras diferentes de sentar os quatro alunos.

Exemplo 2.13. Questão 2. Cinco quadros distintos serão colocados em uma parede, lado a lado. De quantas maneiras diferentes eles podem ser organizados?



Solução. Como os cinco quadros são distintos e todos serão organizados em uma sequência, temos:

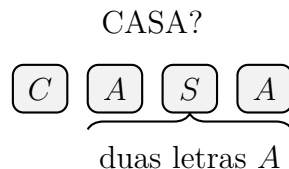
$$P_5 = 5! = 120.$$

Logo, existem

$$\boxed{120}$$

formas diferentes de organizar os quadros.

Exemplo 2.14. Questão 3. Quantos anagramas distintos podem ser formados com as letras da palavra



Solução. A palavra CASA possui 4 letras, sendo que a letra A aparece 2 vezes. Assim,

$$P(4; 2, 1, 1) = \frac{4!}{2! 1! 1!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Portanto, existem

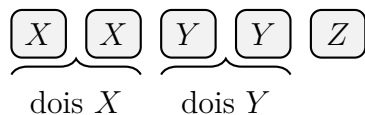
$$\boxed{12}$$

anagramas distintos.

Exemplo 2.15. Questão 4. Uma senha é formada reorganizando-se todas as letras do conjunto

$$\{X, X, Y, Y, Z\}.$$

Quantas senhas distintas podem ser formadas?



Solução. Há 5 símbolos ao todo. O símbolo X aparece 2 vezes, o símbolo Y aparece 2 vezes e o símbolo Z aparece 1 vez. Logo,

$$P(5; 2, 2, 1) = \frac{5!}{2! 2! 1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Portanto, podem ser formadas

$$\boxed{30}$$

senhas distintas.

Os exercícios apresentados até aqui consolidam os casos de permutação linear, tanto com elementos distintos quanto com elementos repetidos. Nem toda organização, porém, acontece em linha reta. Em muitas situações os elementos se dispõem em torno de um círculo, como em mesas redondas, rodas ou ciclos. Nesses casos, girar a configuração não produz uma disposição nova, e isso exige adaptar o raciocínio de contagem.

2.3.2 Permutação circular

Em vários problemas de contagem, os objetos não estão dispostos em linha. Eles se organizam em torno de uma figura, como uma mesa redonda, uma roda ou uma circunferência qualquer. Nessas situações, entra o conceito de **permutação circular**. A diferença mais importante em relação à permutação simples é que, em uma disposição circular, qualquer arranjo obtido por rotação é considerado o mesmo, ou seja, esses arranjos são equivalentes (Graham, Knuth e Patashnik, 1994; Lint e Wilson, 2001; Stanley, 2011).

Situação-problema. Três crianças (A , B e C) vão sentar em volta de uma mesa redonda para um jogo. De quantas maneiras diferentes elas podem se sentar, sabendo que o que importa é quem fica ao lado de quem, e não a cadeira em si?

Se fosse uma fila, haveria $3! = 6$ ordens. Na mesa redonda, porém, girar todos juntos não muda quem está ao lado de quem: as ordens ABC , BCA e CAB representam a *mesma*

roda, vista a partir de pontos de partida diferentes. As 6 ordens lineares se agrupam, então, de 3 em 3 (uma para cada rotação), restando

$$\frac{6}{3} = 2$$

rodas realmente distintas.

Fixar uma das crianças e permutar apenas as demais leva ao mesmo resultado: $(3 - 1)! = 2$. É essa correção pela rotação que a permutação circular formaliza.

Substituindo as três crianças por n objetos distintos dispostos em círculo, a definição e a contagem se generalizam do seguinte modo.

Definição 2.5 (Permutação circular). Quando se tem n objetos, todos diferentes entre si, arranjados em um círculo, chamamos de **permutação circular** cada modo diferente de organizar esses n objetos ao redor do círculo. Consideramos duas arrumações iguais quando uma pode ser obtida da outra apenas por uma rotação.

Observação 2.2. Quando arrumamos objetos em linha, mudar a ordem dos elementos geralmente produz uma nova arrumação. Porém, em um arranjo circular, não existe um ponto de partida mais importante que os outros. Assim, quando giramos toda a configuração, não obtemos uma arrumação diferente.

Teorema 2.5 (Número de permutações circulares). *O total de permutações circulares que se pode fazer com n objetos distintos é dado por*

$$PC_n = (n - 1)!, \quad n \geq 1.$$

Demonstração. Se os n objetos fossem arrumados em uma linha, teríamos

$$n!$$

maneiras possíveis de ordená-los.

No entanto, ao colocar esses mesmos objetos em um círculo, cada disposição circular corresponde exatamente a n ordenações lineares equivalentes. Isso acontece por causa das n rotações que uma mesma configuração circular pode apresentar.

Dessa forma, para obter o número de disposições circulares que são de fato diferentes,

precisamos dividir o total de permutações lineares por n . Portanto,

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Outra maneira de explicar esse resultado é fixar um dos objetos em uma posição específica, usando-o como ponto de referência. Depois disso, basta permutar livremente os outros $n-1$ objetos ao redor dele. Assim, o número de disposições possíveis é

$$(n-1)!.$$

Observação 2.3. A fórmula

$$PC_n = (n-1)!$$

funciona quando **somente as rotações** são consideradas equivalentes. Se também tratarmos como equivalentes as disposições obtidas por reflexão, o problema muda. Nesse caso, ele deixa de ser uma permutação circular comum e passa a ter natureza de *colar* ou *bracelete*, o que exige outro método de contagem.

Exemplo 2.16 (Três objetos em círculo). Para $n = 3$ objetos distintos, o número de permutações circulares é

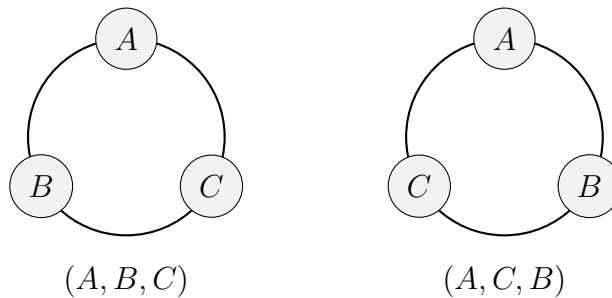
$$PC_3 = (3-1)! = 2! = 2.$$

Logo, existem exatamente

$$\boxed{2}$$

disposições circulares distintas.

Podemos ilustrar essas duas disposições com os objetos A , B e C :



Observe que outras representações obtidas por rotação dessas configurações não contam como novas disposições.

Exemplo 2.17 (Quatro objetos em círculo). Para $n = 4$ objetos distintos, temos

$$PC_4 = (4 - 1)! = 3! = 6.$$

Portanto, existem

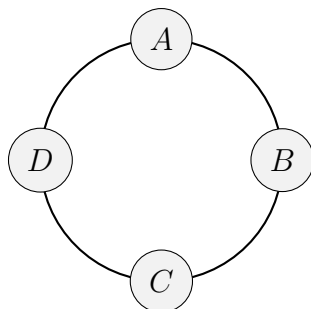
$$\boxed{6}$$

permutações circulares distintas.

Fixando o objeto A e permutando os demais B , C e D , obtemos as seis possibilidades:

(A, B, C, D) , (A, B, D, C) , (A, C, B, D) , (A, C, D, B) , (A, D, B, C) , (A, D, C, B) .

Uma ilustração de uma dessas disposições é dada a seguir:



Uma disposição circular de A, B, C, D

Como esperado,

$$PC_4 = 6.$$

Exemplo 2.18 (Cinco casais em roda, com cada pessoa ao lado do seu parceiro). Cinco casais devem formar uma roda de ciranda, de modo que cada pessoa fique ao lado do seu parceiro. Quantos arranjos circulares distintos existem?

Passo 1: tratar cada casal como um bloco.

Como cada casal deve permanecer junto, podemos considerar cada casal como uma unidade. Assim, em vez de 10 pessoas, passamos a organizar 5 blocos em círculo.

O número de maneiras de dispor 5 blocos em círculo é

$$(5 - 1)! = 4! = 24.$$

Passo 2: contar as organizações internas de cada casal.

Dentro de cada bloco, as duas pessoas podem trocar de posição. Portanto, cada casal admite

$$2$$

arranjos internos.

Como há 5 casais, o número total de organizações internas é

$$2^5 = 32.$$

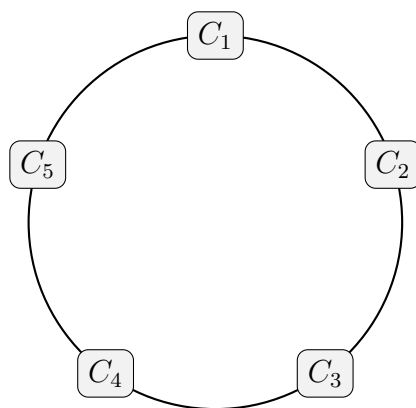
Passo 3: multiplicar as escolhas.

Logo, o número total de arranjos circulares distintos é

$$(5 - 1)! \cdot 2^5 = 24 \cdot 32 = 768.$$

Portanto, o número de arranjos circulares distintos é

$$\boxed{768}.$$



Cada C_i representa um casal tratado como um bloco.

Se quisermos visualizar a estrutura interna de um casal, podemos representar, por

exemplo,

$$C_1 = (A_1, B_1) \quad \text{ou} \quad C_1 = (B_1, A_1),$$

mostrando as duas possibilidades internas do bloco.

Resumo da ideia principal

- Em uma **permutação linear** de n objetos distintos:

$$P_n = n!.$$

- Em uma **permutação circular** de n objetos distintos:

$$PC_n = (n - 1)!.$$

- Isso ocorre porque, em círculo, rotações da mesma configuração não geram novos arranjos.

2.3.3 Permutação caótica

A **permutação caótica**, ou **desarranjo**, como também é conhecida, nada mais é do que um tipo especial de permutação em que nenhum elemento permanece em sua posição original. Esse tipo de conceito aparece em vários problemas clássicos de contagem, como a distribuição de cartas em envelopes, a devolução de objetos trocados e o jogo do amigo oculto sem que alguém retire o próprio nome (Graham, Knuth e Patashnik, 1994; Lint e Wilson, 2001; Stanley, 2011).

Situação-problema. Três amigos colocam seus celulares sobre a mesa e, no escuro, cada um pega um celular ao acaso. De quantas maneiras pode acontecer de **ninguém** pegar o próprio celular?

Chame os amigos (e seus respectivos celulares) de 1, 2 e 3. Queremos as ordens em que nenhum número fica na própria posição. Listando as $3! = 6$ permutações e descartando aquelas que deixam alguém com o próprio celular, sobram apenas duas:

$$(2, 3, 1) \quad \text{e} \quad (3, 1, 2).$$

Em ambas, ninguém recebe o seu aparelho.

Esse tipo de permutação “sem pontos fixos”, em que nenhum elemento permanece no lugar original, é chamado de desarranjo, ou permutação caótica, conceito formalizado a seguir.

Passando do caso dos três celulares para um conjunto qualquer com n elementos, o conceito se define formalmente do seguinte modo.

Definição 2.6 (Permutação caótica ou desarranjo). Seja

$$A = \{1, 2, \dots, n\}$$

um conjunto com n elementos distintos. Uma **permutação caótica**, ou **desarranjo**, é uma permutação

$$\sigma : A \rightarrow A$$

tal que nenhum elemento permanece em sua posição original, isto é,

$$\sigma(i) \neq i, \quad \text{para todo } i \in A.$$

O número de permutações caóticas de n elementos é denotado por

$$D_n$$

ou, em algumas referências, por

$$!n.$$

Teorema 2.6 (Número de permutações caóticas). *O número de permutações caóticas de n elementos distintos é dado por*

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Equivalentemente,

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Demonstração. Considere todas as permutações possíveis de n elementos distintos. Como há n elementos, existem

$$n!$$

permutações no total.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, seja A_i o conjunto das permutações em que o elemento i permanece fixo, isto é,

$$A_i = \{\sigma : \sigma(i) = i\}.$$

Queremos contar as permutações em que nenhum elemento fica fixo. Portanto, queremos contar as permutações que não pertencem a nenhum dos conjuntos

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!.$$

De modo geral, ao escolhermos k elementos para permanecerem fixos, restam $n - k$ elementos para serem permutados livremente. Assim, o termo correspondente é

$$\binom{n}{k}(n-k)!.$$

Como

$$\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

segue que

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Colocando $n!$ em evidência, obtemos

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Portanto,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Teorema 2.7 (Recorrência dos desarranjos). *Para $n \geq 2$, o número de permutações caóticas*

satisfaz a relação de recorrência

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}),$$

com condições iniciais

$$D_0 = 1 \quad e \quad D_1 = 0.$$

Demonstração. Considere o elemento 1. Em um desarranjo, ele não pode ocupar sua própria posição. Portanto, ele deve ocupar uma das outras $n - 1$ posições.

Suponha que o elemento 1 vá para a posição que originalmente pertence ao elemento j , com $j \neq 1$. Há dois casos possíveis.

Caso 1: o elemento j vai para a posição do elemento 1.

Nesse caso, os elementos 1 e j trocam de posição entre si. Restam, então, $n - 2$ elementos para serem desarranjados. Isso pode ser feito de

$$D_{n-2}$$

maneiras.

Caso 2: o elemento j não vai para a posição do elemento 1.

Nesse caso, o problema restante equivale a formar um desarranjo de $n - 1$ elementos. Isso pode ser feito de

$$D_{n-1}$$

maneiras.

Como existem $n - 1$ escolhas possíveis para a posição ocupada pelo elemento 1, obtemos

$$D_n = (n - 1)(D_{n-2} + D_{n-1}).$$

Portanto,

$$\boxed{D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})}.$$

Observação 2.4. Os primeiros valores do número de desarranjos são

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = 2, \quad D_4 = 9, \quad D_5 = 44, \quad D_6 = 265.$$

Observação 2.5. Como

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!},$$

temos a aproximação

$$D_n \approx \frac{n!}{e}.$$

Mais precisamente, para $n \geq 1$, o número D_n é o inteiro mais próximo de

$$\frac{n!}{e}.$$

Exemplo 2.19 (Amigo oculto com 4 participantes). No jogo do amigo oculto com 4 participantes, de quantas maneiras os nomes podem ser distribuídos de modo que ninguém retire o próprio nome?

Solução.

Temos um desarranjo de 4 elementos. Logo,

$$D_4 = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right).$$

Como

$$4! = 24,$$

temos

$$D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right).$$

Agora,

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{12}{24} - \frac{4}{24} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24}.$$

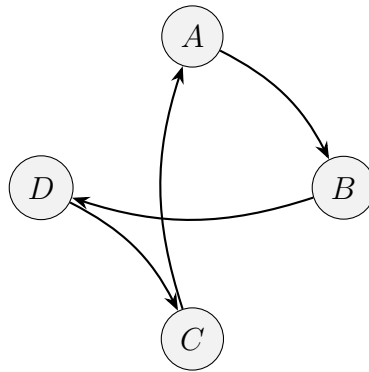
Portanto,

$$D_4 = 24 \cdot \frac{9}{24} = 9.$$

Logo, existem

$$\boxed{9}$$

maneiras de distribuir os nomes sem que ninguém retire o próprio nome.



Exemplo de distribuição sem pontos fixos.

Exemplo 2.20 (Cartas e envelopes). Três cartas distintas devem ser colocadas em três envelopes distintos, uma carta em cada envelope. De quantas maneiras isso pode ser feito de modo que nenhuma carta seja colocada no envelope correto?

Solução.

Temos um desarranjo de 3 elementos. Assim,

$$D_3 = 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right).$$

Como

$$3! = 6,$$

segue que

$$D_3 = 6 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right).$$

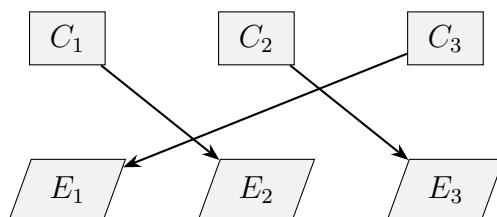
Logo,

$$D_3 = 6 \left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6} \right) = 6 \cdot \frac{2}{6} = 2.$$

Portanto, existem

$$\boxed{2}$$

maneiras de colocar as cartas em envelopes errados.



Uma distribuição incorreta para todas as cartas.

Exemplo 2.21 (Cinco alunos e cinco provas). Um professor devolve 5 provas a 5 alunos distintos, entregando exatamente uma prova para cada aluno. De quantas maneiras isso pode ocorrer sem que nenhum aluno receba sua própria prova?

Solução.

Temos um desarranjo de 5 elementos. Logo,

$$D_5 = 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right).$$

Como

$$5! = 120,$$

temos

$$D_5 = 120 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right).$$

Agora,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{60 - 20 + 5 - 1}{120} = \frac{44}{120}.$$

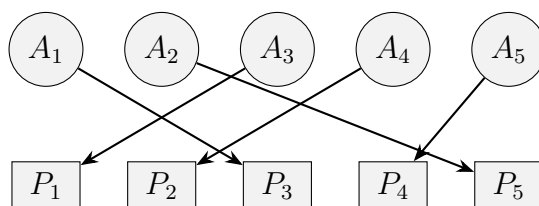
Logo,

$$D_5 = 120 \cdot \frac{44}{120} = 44.$$

Portanto, existem

$$\boxed{44}$$

maneiras de devolver as provas de modo que ninguém receba a sua própria.



Exemplo de entrega sem correspondências corretas.

Exemplo 2.22 (Quatro chapéus). Quatro pessoas chegam a uma festa e deixam seus chapéus na entrada. Na saída, os chapéus são devolvidos aleatoriamente, um para cada pessoa. De quantas maneiras ninguém recebe o próprio chapéu?

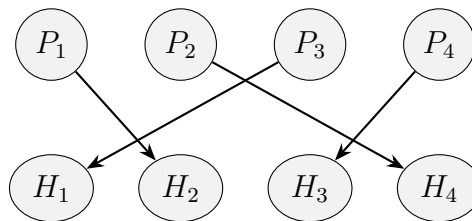
Solução.

Esse é um desarranjo de 4 elementos. Portanto,

$$D_4 = 9.$$

Logo, o número de maneiras é

$$\boxed{9}.$$



Distribuição de chapéus sem coincidências.

Exemplo 2.23 (Seis chaves e seis armários). Seis chaves distintas serão distribuídas entre seis armários distintos, uma chave para cada armário. De quantas maneiras nenhuma chave ficará no armário correspondente?

Solução.

Temos um desarranjo de 6 elementos. Usando a recorrência,

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}),$$

temos

$$D_6 = (6 - 1)(D_5 + D_4).$$

Como

$$D_5 = 44 \quad \text{e} \quad D_4 = 9,$$

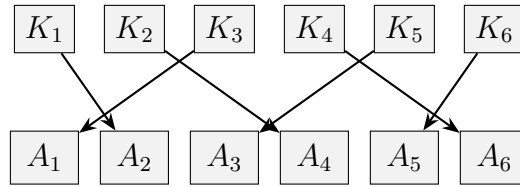
segue que

$$D_6 = 5(44 + 9) = 5 \cdot 53 = 265.$$

Logo,

$$\boxed{265}$$

é o número de maneiras procurado.



Exemplo de atribuição sem posições corretas.

Resumo

- Uma permutação caótica é uma permutação sem pontos fixos.
- A fórmula geral é

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- A recorrência clássica é

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), \quad n \geq 2.$$

- Os primeiros valores são

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = 2, \quad D_4 = 9, \quad D_5 = 44, \quad D_6 = 265.$$

As permutações estudadas até aqui têm um traço em comum: todos os elementos do grupo entram na ordenação. Mesmo quando há repetição, circularidade ou alguma regra, o objetivo continua sendo organizar todos os objetos disponíveis. Em muitos problemas de contagem, porém, não se quer organizar todos os elementos, mas apenas selecionar alguns e dispô-los em uma ordem específica. Essa mudança de perspectiva conduz ao conceito de arranjo simples.

2.3.4 Arranjos simples

Em algumas escolhas a ordem pesa, porque trocar a posição dos selecionados muda o resultado. A escolha de representante e vice mostra isso bem.

Situação-problema. Numa sala com 4 alunos, deseja-se escolher um representante e um vice-representante, que são cargos diferentes. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Para representante há 4 alunos possíveis; escolhido ele, restam 3 para vice. Como os cargos são diferentes, escolher Ana como representante e Bruno como vice é *diferente* de Bruno representante e Ana vice, ou seja, a ordem importa. Pelo raciocínio de etapas,

$$4 \cdot 3 = 12$$

maneiras.

Repare que selecionamos apenas 2 entre os 4 alunos e que a ordem dos escolhidos faz diferença. Esse é exatamente o tipo de contagem que os arranjos simples descrevem.

Generalizando a escolha ordenada de 2 entre 4 alunos para a seleção de p entre n elementos, obtém-se a definição abaixo.

Definição 2.7. Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, os arranjos simples de p elementos, com $p \leq n$, são as amostras ordenadas de tamanho p formadas com elementos distintos de A .

Proposição 2.1. *O número de arranjos simples de p elementos tomados de um conjunto com n elementos é:*

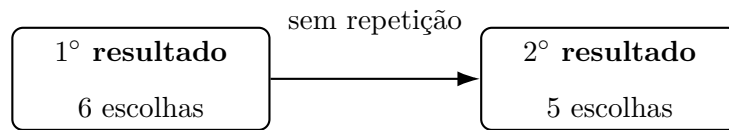
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Demonstração. Cada arranjo tem p posições a preencher com elementos distintos de A . Para a primeira posição, há n opções; para a segunda, $n-1$; e assim sucessivamente até a p -ésima posição, que tem $n-p+1$ opções. Pelo princípio multiplicativo:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

■

Exemplo 2.24. Lançando um dado de 6 faces duas vezes, registrando os resultados em ordem, e supondo que os dois resultados devem ser distintos, quantos arranjos de 2 números distintos são possíveis?



ordem importa

Exemplo: $(2, 5) \longrightarrow$ é diferente de $(5, 2)$

No arranjo, trocar a ordem gera uma nova possibilidade.

Como o primeiro resultado pode ser escolhido de 6 maneiras e o segundo deve ser diferente do primeiro, restam 5 possibilidades. Logo,

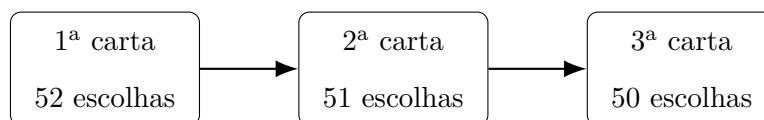
$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30.$$

Portanto, existem 30 arranjos possíveis.

Observação. Caso a repetição fosse permitida, como em lançamentos comuns de um dado, teríamos

$$6 \cdot 6 = 36.$$

Exemplo 2.25. Em um baralho de 52 cartas, de quantas formas ordenadas é possível retirar 3 cartas, sem reposição?



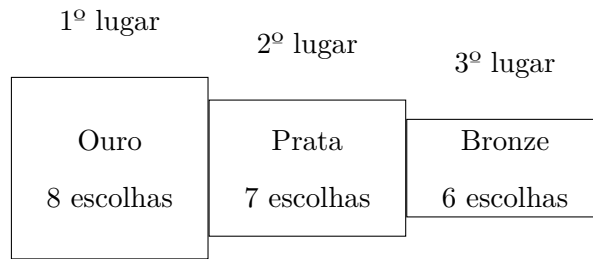
A ordem de retirada importa: por exemplo,
 $(\text{Ás}, \text{Rei}, \text{Dama}) \neq (\text{Rei}, \text{Ás}, \text{Dama}).$

Na primeira retirada, temos 52 possibilidades. Como não há reposição, na segunda restam 51 cartas e, na terceira, restam 50 cartas. Portanto,

$$A_{52}^3 = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132\,600.$$

Logo, existem 132 600 formas ordenadas de retirar as 3 cartas.

Exemplo 2.26. Em uma competição com 8 finalistas, de quantas maneiras diferentes é possível formar um pódio com medalhas de ouro, prata e bronze?



A ordem importa, pois trocar ouro por prata muda o pódio.

Temos 8 escolhas para a medalha de ouro. Depois de escolhido o vencedor, restam 7 possibilidades para a medalha de prata. Em seguida, restam 6 possibilidades para a medalha de bronze. Assim,

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Portanto, o pódio pode ser formado de 336 maneiras diferentes.

A diferença mais importante entre arranjo e combinação está no papel da ordem. Em arranjos simples, sequências formadas pelos mesmos elementos em posições diferentes são contadas como distintas. Em um pódio, por exemplo, trocar quem ficou em primeiro com quem ficou em segundo altera o resultado. Há situações, porém, em que interessa apenas quais elementos foram escolhidos, e não a ordem entre eles. Quando a ordem não importa, arranjos diferentes podem representar a mesma escolha. É essa equivalência entre ordenações que conduz ao conceito de combinação simples.

2.4 Combinações simples

Nem toda escolha leva em conta a ordem. Quando só importa quem foi selecionado, como num sorteio de prêmios iguais, a contagem segue outro caminho.

Situação-problema. De um grupo de 4 amigos, 2 serão sorteados para ganhar ingressos *iguais* para um show. De quantas maneiras a dupla pode ser formada?

Diferentemente da escolha de cargos, aqui os dois ingressos são iguais: sortear Ana e Bruno é o mesmo que sortear Bruno e Ana. Se a ordem importasse, haveria $4 \cdot 3 = 12$ pares ordenados; como, porém, cada dupla foi contada *duas* vezes (uma em cada ordem), o número de duplas distintas é

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6,$$

a saber: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ e $\{C, D\}$.

Quando a ordem dos escolhidos não importa, diz-se que se trata de uma combinação simples, conceito definido a seguir e que se conecta diretamente aos arranjos pela divisão por $p!$.

Passando do sorteio de 2 entre 4 amigos para a escolha de p entre n elementos sem considerar a ordem, formaliza-se o conceito de combinação simples.

Definição 2.8 (Combinação simples). Seja A um conjunto finito com $|A| = n$ elementos e seja p um número inteiro tal que

$$0 \leq p \leq n.$$

Chama-se **combinação simples dos n elementos de A tomados p a p** qualquer subconjunto $B \subseteq A$ tal que

$$|B| = p.$$

Assim, em uma combinação simples, a ordem dos elementos não é considerada. Portanto,

$$\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\}.$$

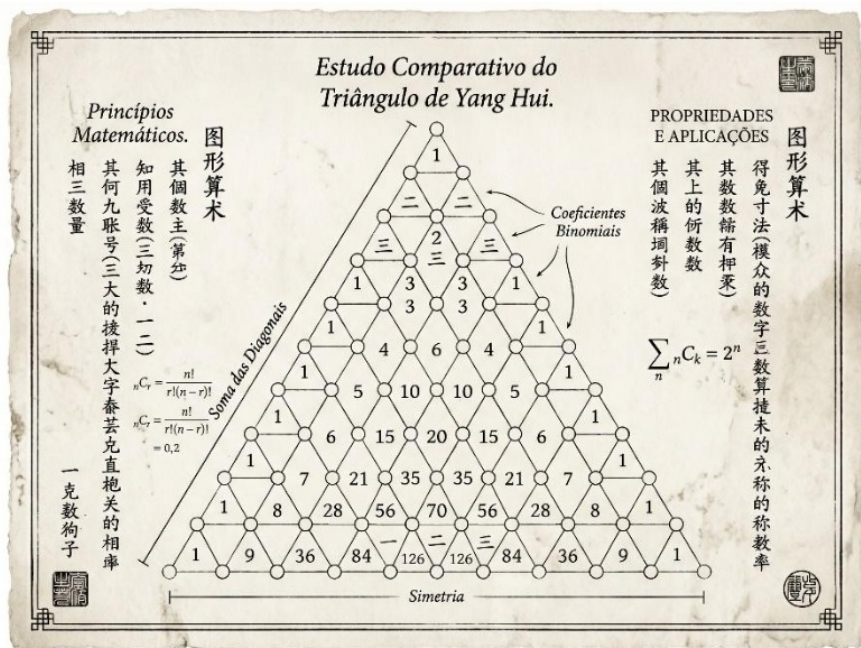
O número de combinações simples dos n elementos tomados p a p será indicado por

$$C_n^p \quad \text{ou} \quad \binom{n}{p}.$$

As combinações simples têm uma relação direta com os coeficientes binomiais, visto que determinar o número de subconjuntos de tamanho p a partir de um conjunto que possui n elementos é o mesmo que calcular o número binomial $\binom{n}{p}$ (Morgado et al., 2006; Brualdi, 2010; Bóna, 2017; Tucker, 2012). Por esta razão, o estudo das combinações também se liga, em termos históricos, ao desenvolvimento dos triângulos aritméticos, como o Triângulo de Yang Hui e, posteriormente, o Triângulo de Pascal. A tradição combinatória possui registros históricos mais antigos do que a sistematização europeia ocorrida no século XVII. Entre essas

representações, pode-se destacar o triângulo aritmético associado a Yang Hui, que mostra a organização de padrões numéricos, bem como relações binomiais já presentes na matemática chinesa medieval. Na tradição ocidental, esse arranjo ficou conhecido como Triângulo de Pascal (Pascal, 1665; Zhu, 1303; Burton, 2010). A Figura 2.5 a seguir apresenta uma releitura visual desse arranjo, adaptada ao contexto desta dissertação.

Figura 2.5 – Releitura do Triângulo de Yang Hui em estilo de manuscrito histórico.



Fonte: Figura elaborada pelo autor com auxílio de inteligência artificial, a partir de referência histórica do Triângulo de Yang Hui.

A Figura 2.5 reforça a dimensão histórica e visual da Análise Combinatória, destacando que a organização triangular dos coeficientes binomiais pode ser compreendida não apenas como objeto algébrico, mas também como representação didática. Nesse sentido, o uso dessa figura contribui para aproximar história da matemática, visualização de padrões e estratégias pedagógicas voltadas ao ensino médio.

Teorema 2.8 (Relação de Pascal). *Para inteiros n e p tais que $1 \leq p \leq n - 1$, vale a identidade*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Demonstração. Considere um conjunto A com n elementos e escolha um elemento fixo $a \in A$. Queremos contar quantos subconjuntos de A possuem exatamente p elementos.

Todo subconjunto de A com p elementos pertence a exatamente um dos seguintes casos:

- i) o subconjunto contém o elemento a ;
- ii) o subconjunto não contém o elemento a .

Se o subconjunto contém a , então ainda precisamos escolher $p - 1$ elementos entre os outros $n - 1$ elementos de A . Isso pode ser feito de

$$\binom{n-1}{p-1}$$

maneiras.

Se o subconjunto não contém a , então devemos escolher todos os p elementos entre os outros $n - 1$ elementos de A . Isso pode ser feito de

$$\binom{n-1}{p}$$

maneiras.

Como os dois casos são disjuntos e esgotam todas as possibilidades, pelo princípio aditivo, obtemos

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Proposição 2.2 (Número de combinações simples). *O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Demonstração. Considere inicialmente os **arranjos simples** de n elementos tomados p a p . Nesse caso, a ordem dos elementos importa. O número de arranjos simples é

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Agora considere as combinações simples. Em uma combinação, escolhemos apenas quais são os p elementos, sem levar em conta a ordem. Entretanto, cada subconjunto com p elementos pode ser ordenado de

$$p!$$

maneiras diferentes.

Portanto, cada combinação simples gera exatamente $p!$ arranjos simples. Assim,

$$A_n^p = C_n^p \cdot p!.$$

Isolando C_n^p , obtemos

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Substituindo a expressão de A_n^p , segue que

$$C_n^p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Logo,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Portanto,

$$\boxed{C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

Observação 2.6. A principal diferença entre arranjo e combinação está na ordem:

Arranjo: a ordem importa.

Combinação: a ordem não importa.

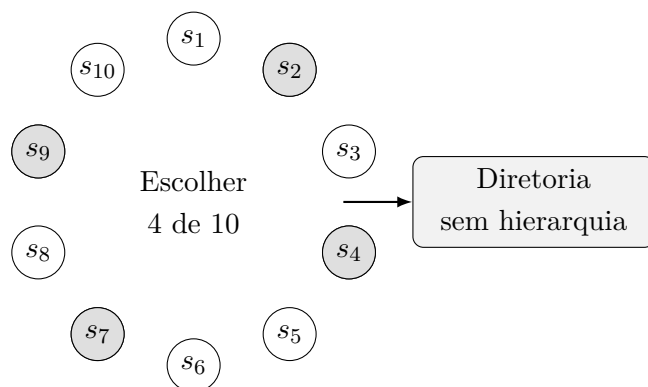
Por exemplo, se estamos escolhendo três alunos para uma comissão, os grupos

$$\{A, B, C\} \quad \text{e} \quad \{C, A, B\}$$

representam a mesma comissão. Portanto, trata-se de uma combinação.

Exemplo 2.27 (Formação de uma diretoria sem hierarquia). De 10 sócios, de quantas formas

é possível formar uma diretoria de 4 membros, sem considerar cargos ou hierarquia entre eles?



Os sócios destacados representam apenas uma das possíveis escolhas.

Figura 2.6 – Representação de uma escolha de 4 sócios entre 10.

Como não há cargos diferentes, a ordem dos quatro escolhidos não importa. Portanto, devemos usar combinação simples:

$$C_{10}^4 = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!}.$$

Logo,

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!}.$$

Como

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!,$$

temos

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4!6!}.$$

Cancelando $6!$, obtemos

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Assim,

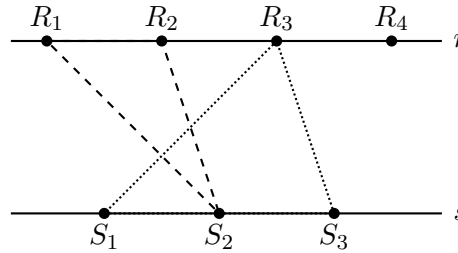
$$C_{10}^4 = 210.$$

Portanto, existem

$$\boxed{210}$$

formas diferentes de formar a diretoria.

Exemplo 2.28 (Triângulos determinados por pontos em duas retas paralelas). Sobre duas retas paralelas r e s , há 4 pontos sobre r e 3 pontos sobre s . Quantos triângulos podem ser formados usando esses pontos como vértices?



Traços pontilhados indicam dois tipos possíveis de triângulos.

Figura 2.7 – Pontos distribuídos em duas retas paralelas e exemplos de triângulos possíveis.

Para formar um triângulo, não podemos escolher três pontos sobre a mesma reta, pois três pontos colineares não determinam triângulo.

Assim, há dois casos possíveis.

Caso 1: escolher 2 pontos sobre r e 1 ponto sobre s .

Escolhemos 2 pontos entre os 4 pontos de r :

$$C_4^2 = \binom{4}{2} = 6.$$

Depois escolhemos 1 ponto entre os 3 pontos de s :

$$C_3^1 = \binom{3}{1} = 3.$$

Pelo princípio multiplicativo, esse caso fornece

$$C_4^2 \cdot C_3^1 = 6 \cdot 3 = 18$$

triângulos.

Caso 2: escolher 1 ponto sobre r e 2 pontos sobre s .

Escolhemos 1 ponto entre os 4 pontos de r :

$$C_4^1 = \binom{4}{1} = 4.$$

Depois escolhemos 2 pontos entre os 3 pontos de s :

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = 3.$$

Pelo princípio multiplicativo, esse caso fornece

$$C_4^1 \cdot C_3^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

triângulos.

Como os dois casos são disjuntos, pelo princípio aditivo, o total é

$$18 + 12 = 30.$$

Portanto, podem ser formados

$$\boxed{30}$$

triângulos.

Também podemos verificar esse resultado por exclusão. No total, existem 7 pontos. Escolher quaisquer 3 pontos daria

$$C_7^3 = \binom{7}{3} = 35.$$

Mas devemos excluir as escolhas em que os três pontos estão todos na reta r ou todos na reta s . Logo,

$$C_7^3 - C_4^3 - C_3^3 = 35 - 4 - 1 = 30.$$

O resultado é o mesmo:

$$\boxed{30}.$$

Exemplo 2.29 (Escolha de experimentos para uma aula). Em um laboratório, há 7 experimentos disponíveis. Um professor deseja escolher 3 desses experimentos para uma aula, sem definir ordem de apresentação. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?

Os blocos destacados representam uma das seleções possíveis.

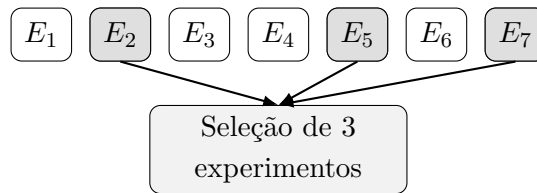


Figura 2.8 – Escolha de 3 experimentos entre 7, sem considerar ordem.

Como a ordem de apresentação não será considerada, devemos contar apenas subconjuntos de 3 experimentos escolhidos entre os 7 disponíveis. Portanto, trata-se de uma combinação simples:

$$C_7^3 = \binom{7}{3}.$$

Pela fórmula das combinações,

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!}.$$

Logo,

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!}.$$

Como

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!,$$

segue que

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!}.$$

Cancelando $4!$, temos

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Assim,

$$C_7^3 = 35.$$

Portanto, existem

$$\boxed{35}$$

maneiras diferentes de escolher os experimentos.

As técnicas vistas até aqui permitem contar possibilidades sem repetições indevidas:

nas permutações, controla-se a ordem de todos os elementos; nos arranjos, seleciona-se e ordena-se uma parte deles; e nas combinações, selecionam-se os elementos sem distinguir ordenações equivalentes. Há situações, porém, em que a repetição na contagem não decorre da ordem, mas da sobreposição entre conjuntos. Quando um mesmo elemento pertence a duas ou mais categorias ao mesmo tempo, somar as quantidades diretamente faz com que ele seja contado mais de uma vez. Para corrigir essa contagem, recorre-se ao Princípio da Inclusão-Exclusão.

2.5 Princípio da Inclusão-Exclusão

O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma técnica conhecida em combinatória que serve para determinar quantos elementos existem na união de vários conjuntos. Esses conjuntos podem ter elementos em comum, isto é, podem apresentar interseções. A ideia central é simples: ao somar separadamente o número de elementos de cada conjunto, os elementos que aparecem em dois ou mais conjuntos são contados mais de uma vez. Por isso, é necessário subtrair as interseções contadas em excesso, a fim de evitar uma contagem incorreta. Em alguns casos, porém, certas interseções são subtraídas em demasia e precisam ser somadas novamente, para que o resultado final seja preciso. Dessa forma, o Princípio da Inclusão-Exclusão permite obter corretamente o número de elementos da união dos conjuntos (Graham, Knuth e Patashnik, 1994; Lint e Wilson, 2001; Stanley, 2011).

Definição 2.9 (Conjuntos finitos, cardinalidade e disjunção). Seja A um conjunto finito. Denotamos por $|A|$ o número de elementos de A , chamado de **cardinalidade** de A (Graham, Knuth e Patashnik, 1994; Lint e Wilson, 2001; Stanley, 2011).

Dois conjuntos A e B são ditos **disjuntos** quando não possuem elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \emptyset.$$

Mais geralmente, uma família de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é dita **dois a dois disjunta** quando

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Definição 2.10 (Contagem sem repetição). Em problemas de contagem, devemos contar cada objeto exatamente uma vez. Quando um elemento pertence a mais de um conjunto,

a soma simples das cardinalidades pode gerar contagem repetida. O Princípio da Inclusão–Exclusão corrige exatamente esse excesso de contagem (Graham, Knuth e Patashnik, 1994; Lint e Wilson, 2001; Stanley, 2011).

2.5.1 Caso de dois conjuntos

Somar as quantidades de dois grupos parece bastar, mas falha quando há gente nos dois grupos ao mesmo tempo. Um caso com esportes deixa isso claro.

Situação-problema. Numa turma de 30 alunos, 20 jogam futebol e 15 jogam vôlei. Se somarmos $20 + 15 = 35$, obtemos um número maior que o total de alunos. Como isso é possível?

O problema é que alguns alunos jogam os dois esportes e foram contados *duas* vezes, uma em cada modalidade. Suponha que 8 joguem futebol e vôlei; esses 8 entraram tanto nos 20 quanto nos 15. Para contar cada aluno uma única vez, somamos as duas modalidades e subtraímos os repetidos:

$$20 + 15 - 8 = 27$$

alunos praticam pelo menos um dos esportes.

Subtrair a interseção contada em excesso é a ideia central do Princípio da Inclusão–Exclusão para dois conjuntos, enunciado a seguir.

Escrevendo esse raciocínio na linguagem de conjuntos, em que $|A|$ indica a quantidade de elementos de A , chega-se ao enunciado geral.

Proposição 2.3 (Princípio da Inclusão–Exclusão para dois conjuntos). *Sejam A e B conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos (Graham, Knuth e Patashnik, 1994; Lint e Wilson, 2001; Stanley, 2011). Então:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. A união $A \cup B$ pode ser decomposta como união disjunta de três partes:

$$A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} (A \cap B) \dot{\cup} (B \setminus A).$$

Logo, pelo princípio aditivo,

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Como

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

e

$$|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|,$$

segue que

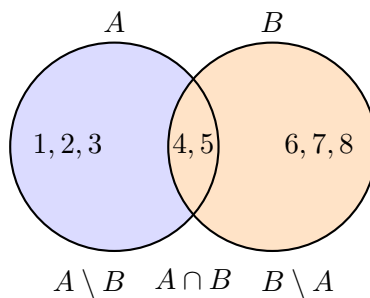
$$|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + |A \cap B| + (|B| - |A \cap B|).$$

Portanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exemplo 2.30. Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{e} \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$



Temos:

$$|A| = 5, \quad |B| = 5,$$

e

$$A \cap B = \{4, 5\},$$

logo

$$|A \cap B| = 2.$$

Portanto,

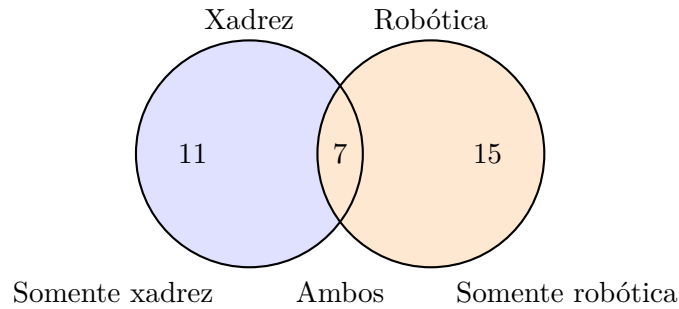
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 2 = 8.$$

Assim,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

possui 8 elementos.

Exemplo 2.31. Em uma turma, 18 alunos participam de uma oficina de xadrez, 22 participam de uma oficina de robótica e 7 participam das duas oficinas. Quantos alunos participam de pelo menos uma dessas oficinas?



Sejam X o conjunto dos alunos que fazem xadrez e R o conjunto dos alunos que fazem robótica. Então:

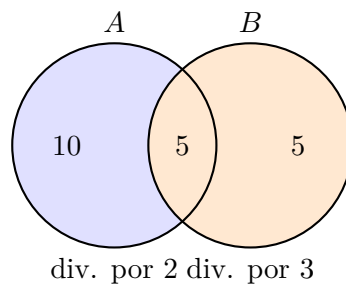
$$|X| = 18, \quad |R| = 22, \quad |X \cap R| = 7.$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|X \cup R| = |X| + |R| - |X \cap R| = 18 + 22 - 7 = 33.$$

Logo, 33 alunos participam de pelo menos uma das oficinas.

Exemplo 2.32. Quantos números inteiros de 1 a 30 são divisíveis por 2 ou por 3?



Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 30, 2 \mid n\}$$

e

$$B = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 30, 3 \mid n\}.$$

Então:

$$|A| = \left\lfloor \frac{30}{2} \right\rfloor = 15, \quad |B| = \left\lfloor \frac{30}{3} \right\rfloor = 10.$$

Os números divisíveis simultaneamente por 2 e por 3 são os divisíveis por $\text{mmc}(2, 3) = 6$.

Logo,

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{30}{6} \right\rfloor = 5.$$

Assim,

$$|A \cup B| = 15 + 10 - 5 = 20.$$

Portanto, existem 20 inteiros de 1 a 30 divisíveis por 2 ou por 3.

2.5.2 Caso de três conjuntos

Com três grupos que se cruzam, o ajuste da contagem fica menos óbvio. Os mesmos esportes da turma ajudam a enxergar o que muda.

Situação-problema. Agora suponha que, na mesma turma, alguns alunos pratiquem *três* esportes: futebol, vôlei e basquete. Se subtrairmos apenas as interseções de dois em dois, o que acontece com quem joga os três?

Quem pratica os três esportes é contado três vezes nas somas individuais e subtraído três vezes nas interseções dois a dois; resultado: acaba não sendo contado nenhuma vez. Para corrigir, é preciso *somar de volta* a interseção tripla. Assim, alternando somas e subtrações, garante-se que cada aluno seja contado exatamente uma vez.

Essa correção em duas etapas, subtrair os pares e devolver a tripla, é o que generaliza o princípio para três conjuntos.

Em termos das cardinalidades de três conjuntos finitos A , B e C , esse ajuste de somas e subtrações se expressa do seguinte modo.

Teorema 2.9 (Princípio da Inclusão–Exclusão para três conjuntos). *Sejam A , B e C conjuntos finitos. Então:*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Demonstração. Aplicando o caso de dois conjuntos aos conjuntos $A \cup B$ e C , temos:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Agora,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Além disso, pela distributividade da interseção em relação à união,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Aplicando novamente o caso de dois conjuntos:

$$|(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

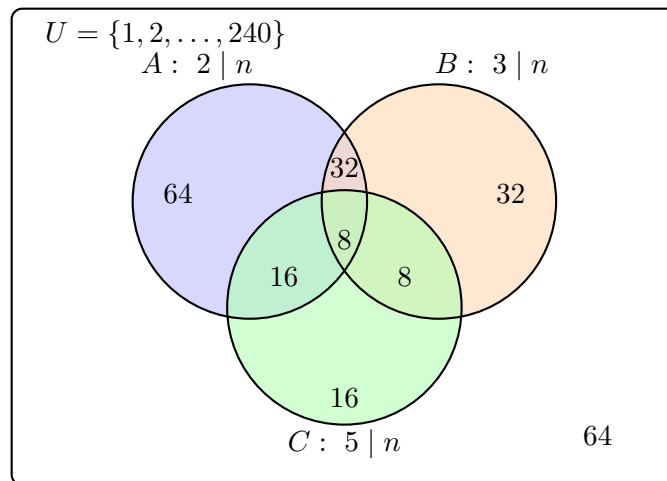
Substituindo,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|).$$

Portanto,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Exemplo 2.33. Quantos inteiros de 1 a 240 são coprimos com 240?



Como

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5,$$

um inteiro n é coprimo com 240 se, e somente se, n não é divisível por 2, nem por 3, nem por 5.

Definimos:

$$A = \{n : 1 \leq n \leq 240, 2 \mid n\},$$

$$B = \{n : 1 \leq n \leq 240, 3 \mid n\},$$

$$C = \{n : 1 \leq n \leq 240, 5 \mid n\}.$$

Então:

$$|A| = 120, \quad |B| = 80, \quad |C| = 48.$$

As interseções dois a dois são:

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{240}{6} \right\rfloor = 40,$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{240}{10} \right\rfloor = 24,$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{240}{15} \right\rfloor = 16.$$

A interseção tripla é:

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{240}{30} \right\rfloor = 8.$$

Logo,

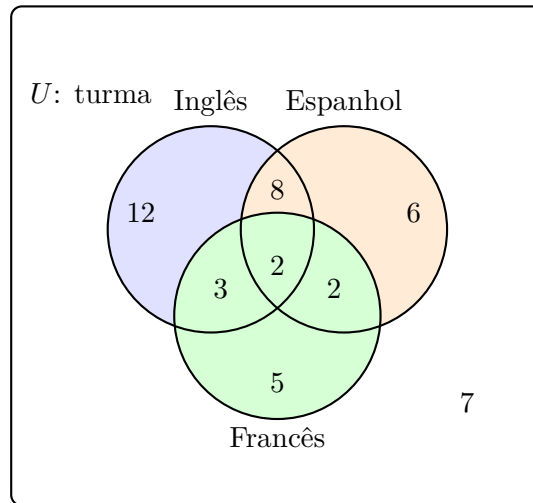
$$|A \cup B \cup C| = 120 + 80 + 48 - 40 - 24 - 16 + 8 = 176.$$

Portanto, 176 números de 1 a 240 não são coprimos com 240. Assim, a quantidade de números coprimos com 240 é

$$240 - 176 = 64.$$

Logo, existem 64 inteiros de 1 a 240 coprimos com 240.

Exemplo 2.34. Em uma turma de 45 alunos, 25 estudam inglês, 18 estudam espanhol e 12 estudam francês. Além disso, 10 estudam inglês e espanhol, 5 estudam inglês e francês, 4 estudam espanhol e francês, e 2 estudam os três idiomas. Quantos alunos estudam pelo menos um desses idiomas?



Sejam I , E e F os conjuntos dos alunos que estudam inglês, espanhol e francês, respectivamente. Temos:

$$|I| = 25, \quad |E| = 18, \quad |F| = 12,$$

$$|I \cap E| = 10, \quad |I \cap F| = 5, \quad |E \cap F| = 4,$$

e

$$|I \cap E \cap F| = 2.$$

Pelo Princípio da Inclusão–Exclusão,

$$|I \cup E \cup F| = 25 + 18 + 12 - 10 - 5 - 4 + 2.$$

Logo,

$$|I \cup E \cup F| = 38.$$

Portanto, 38 alunos estudam pelo menos um idioma.

Como a turma possui 45 alunos, a quantidade de alunos que não estudam nenhum dos três idiomas é

$$45 - 38 = 7.$$

2.5.3 Caso geral

O mesmo raciocínio de somar e subtrair vale para qualquer número de grupos, não só dois ou três. A pergunta passa a ser como garantir que ninguém seja contado em excesso.

Situação-problema. E se forem 4, 5 ou mais conjuntos com sobreposições? O padrão observado nos casos de dois e de três conjuntos (somar as cardinalidades individuais, subtrair as interseções de dois em dois, somar as de três em três, e assim por diante, sempre alternando o sinal) continua valendo.

A questão que resta é *provar* que essa alternância de sinais conta cada elemento exatamente uma vez, qualquer que seja o número de conjuntos. É isso que o teorema a seguir estabelece, no caso geral.

Formalizando o padrão para n conjuntos finitos $A_1, A_2, \dots, A_n$, obtém-se o enunciado geral.

Teorema 2.10 (Princípio da Inclusão–Exclusão). *Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos. Então:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Equivalentemente,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Demonstração. Considere um elemento x que pertence exatamente a p dos conjuntos

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

No lado esquerdo, esse elemento é contado exatamente uma vez, pois pertence à união.

No lado direito, ele aparece:

$$\binom{p}{1}$$

vezes na soma das cardinalidades individuais,

$$\binom{p}{2}$$

vezes nas interseções dois a dois,

$$\binom{p}{3}$$

vezes nas interseções três a três, e assim sucessivamente. Portanto, a contribuição total de x no lado direito é

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \cdots + (-1)^{p+1} \binom{p}{p}.$$

Pelo binômio de Newton,

$$(1 - 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k = 0.$$

Desenvolvendo,

$$1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} = 0.$$

Logo,

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \cdots + (-1)^{p+1} \binom{p}{p} = 1.$$

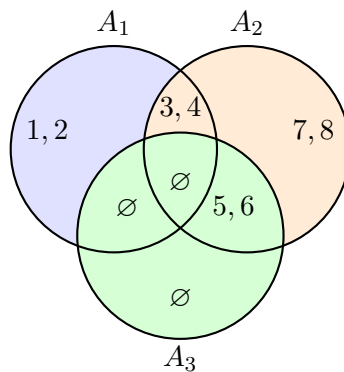
Assim, cada elemento pertencente à união é contado exatamente uma vez no lado direito.

Portanto,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Exemplo 2.35. Considere

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A_2 = \{3, 4, 5, 6\}, \quad A_3 = \{5, 6, 7, 8\}.$$



Temos:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 4.$$

Além disso,

$$A_1 \cap A_2 = \{3, 4\}, \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset, \quad A_2 \cap A_3 = \{5, 6\}.$$

Logo,

$$|A_1 \cap A_2| = 2, \quad |A_1 \cap A_3| = 0, \quad |A_2 \cap A_3| = 2.$$

Também,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset,$$

portanto

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

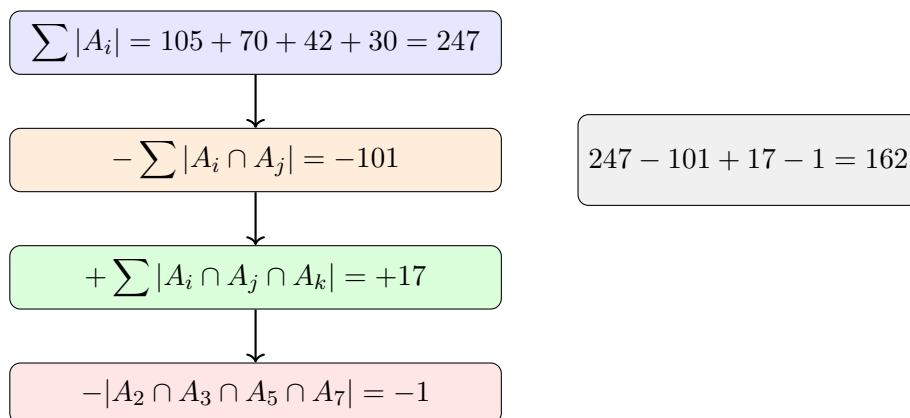
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 4 + 4 + 4 - 2 - 0 - 2 + 0 = 8.$$

De fato,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Exemplo 2.36. Quantos inteiros de 1 a 210 são divisíveis por pelo menos um dos números

2, 3, 5, 7?



Definimos:

$$A_2 = \{n : 1 \leq n \leq 210, 2 \mid n\},$$

$$A_3 = \{n : 1 \leq n \leq 210, 3 \mid n\},$$

$$A_5 = \{n : 1 \leq n \leq 210, 5 \mid n\},$$

$$A_7 = \{n : 1 \leq n \leq 210, 7 \mid n\}.$$

As cardinalidades individuais são:

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{210}{2} \right\rfloor = 105,$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{210}{3} \right\rfloor = 70,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{210}{5} \right\rfloor = 42,$$

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{210}{7} \right\rfloor = 30.$$

Logo,

$$\sum |A_i| = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$$

Agora calculamos as interseções dois a dois:

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{210}{6} \right\rfloor = 35,$$

$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{210}{10} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{14} \right\rfloor = 15,$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{210}{15} \right\rfloor = 14,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{21} \right\rfloor = 10,$$

$$|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{35} \right\rfloor = 6.$$

Assim,

$$\sum |A_i \cap A_j| = 35 + 21 + 15 + 14 + 10 + 6 = 101.$$

As interseções três a três são:

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{210}{30} \right\rfloor = 7,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{42} \right\rfloor = 5,$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{70} \right\rfloor = 3,$$

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{105} \right\rfloor = 2.$$

Logo,

$$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = 7 + 5 + 3 + 2 = 17.$$

Finalmente, a interseção dos quatro conjuntos é:

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{210}{210} \right\rfloor = 1.$$

Portanto,

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 247 - 101 + 17 - 1 = 162.$$

Sendo assim, existem 162 inteiros de 1 a 210 divisíveis por pelo menos um dos números

$$2, 3, 5, 7.$$

2.5.4 Comentário didático

Os conceitos apresentados neste capítulo formam o alicerce da Análise Combinatória no Ensino Médio. Contudo, é importante salientar que cada fórmula deve ser encarada como a síntese de uma linha de raciocínio, e não como um ponto de partida a ser usado de forma automática.

Antes de aplicar uma fórmula, o estudante precisa compreender a estrutura do problema. Algumas perguntas ajudam nessa tarefa: a ordem importa? Há repetição de elementos? Existe alguma restrição? Os casos são separados ou há sobreposição entre os conjuntos?

No caso do Princípio da Inclusão–Exclusão, a pergunta principal é: quando somamos os casos, algum elemento foi contado mais de uma vez?

Se a resposta for sim, a inclusão–exclusão surge naturalmente como modo de ajustar a contagem. Assim, o ensino de combinatória deve priorizar a leitura atenta do problema e a organização das possibilidades por meio de tabelas, diagramas, esquemas ou árvores de decisão, deixando a formalização algébrica para um segundo momento.

Essa maneira de compreender a Análise Combinatória dialoga diretamente com a proposta pedagógica desta dissertação. Se o maior desafio no ensino de Análise Combinatória

é fazer com que o estudante entenda a estrutura do problema antes de escolher uma fórmula, então as estratégias de ensino precisam estimular a investigação, a comparação de casos, a argumentação, a correção de erros e a participação ativa dos alunos.

Por esse motivo, o capítulo seguinte discute metodologias ativas, jogos matemáticos, gamificação, aprendizagem colaborativa e avaliação formativa como possibilidades de transformar os conceitos matemáticos apresentados neste capítulo em experiências de aprendizagem mais significativas.

Capítulo 3

Metodologias Ativas e Gamificação no Ensino da Matemática do Ensino Médio

O ensino de Matemática no Ensino Médio ancora-se, em muitas escolas, em uma tradição expositiva que atribui ao professor o papel de transmissor e ao aluno o de receptor passivo. Esse modelo produz resultados conhecidos: memorização sem compreensão, resolução mecânica de exercícios padronizados e dificuldade para lidar com problemas que exigem raciocínio estruturado. As metodologias ativas surgem como resposta a esse quadro ao propor uma reorganização do processo pedagógico centrada na ação do estudante. Bacich e Moran (2018) definem essas metodologias como práticas que colocam o aluno diante de situações que exigem investigação, decisão, argumentação e avaliação de resultados. A aula passa a ser espaço de construção de conhecimento, não de recepção de conteúdo. No ensino de Matemática, essa reconfiguração tem implicações diretas sobre como os conteúdos são apresentados, como os erros são tratados e como a avaliação é conduzida.

Este capítulo discute três eixos articulados dessa transformação pedagógica: o uso de jogos matemáticos como estratégia de aprendizagem significativa, a gamificação como recurso de engajamento e motivação, e a aprendizagem colaborativa associada à avaliação formativa. Os três eixos convergem para um argumento central: nenhum recurso pedagógico, por mais inovador que pareça, produz aprendizagem matemática sem intencionalidade docente. A escolha do jogo, o desenho da sequência gamificada e a organização do trabalho colaborativo precisam estar subordinados a objetivos conceituais claros. Recurso sem planejamento é

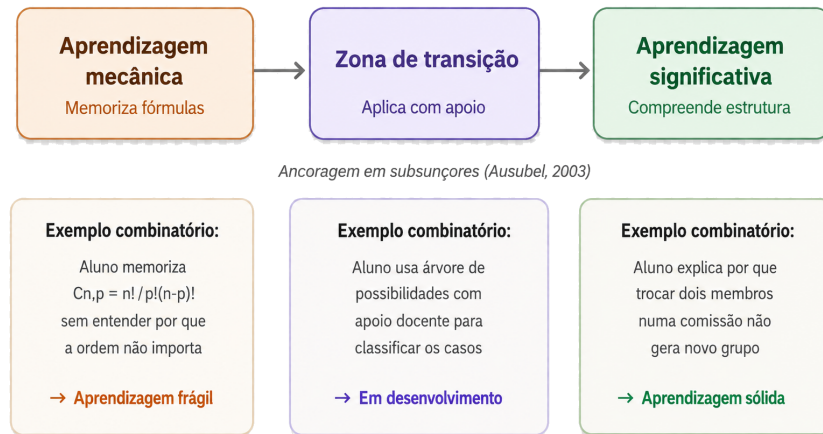
entretenimento; planejamento sem recurso é abstração vazia. A articulação entre os dois é o que transforma a aula de Matemática.

3.1 Jogos Matemáticos como Estratégia de Aprendizagem Significativa

Os jogos matemáticos, quando inseridos com propósito pedagógico definido, deixam de ser atividades recreativas e passam a funcionar como instrumentos de mediação do conhecimento. Essa é a distinção que justifica seu lugar nas metodologias ativas: o jogo não é uma pausa no ensino, mas um contexto em que o ensino acontece de forma mais visível, porque o raciocínio do aluno se manifesta em ação. Para que essa visibilidade tenha valor didático, é necessário que o professor saiba o que está observando, qual tipo de erro é esperado e quais intervenções são pertinentes. Sem esse domínio, o jogo produz engajamento sem aprendizagem, o que não equivale a aprendizagem significativa.

A noção de aprendizagem significativa, mobilizada ao longo deste capítulo, não é um recurso retórico. Ela remete a uma teoria específica, formulada por David Ausubel, segundo a qual a aprendizagem ocorre de forma duradoura quando o novo conhecimento se ancora em estruturas cognitivas já existentes no aprendiz, denominadas subsunçores. Para Ausubel (2003), a aprendizagem mecânica e a aprendizagem significativa não são tipos opostos em sentido absoluto, mas extremos de um continuum: o que determina o deslocamento em direção à significação é a condição de o estudante estabelecer conexões não arbitrárias e não literais entre o que aprende e o que já sabe. No ensino de Análise Combinatória, essa distinção tem consequência direta. Um aluno que memoriza a fórmula do arranjo sem ter construído o raciocínio sobre por que a ordem altera o resultado não realizou aprendizagem significativa, ainda que reproduza o procedimento em situações idênticas às treinadas. O jogo matemático, nesse contexto, tem função ancoradora: ao apresentar o problema em situação concreta antes da formalização, cria condições para que o estudante projete sobre ele estruturas cognitivas já ativas, e a passagem para a expressão algébrica torna-se síntese compreendida.

Figura 3.1 – Continuum da aprendizagem segundo Ausubel (2003), com exemplos aplicados ao ensino de Análise Combinatória.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Ausubel (2003).

O diagrama da Figura 3.1 evidencia que a aprendizagem combinatória não é binária: entre memorizar uma fórmula e compreender sua estrutura lógica existe um espaço de transição em que o jogo matemático opera com maior eficácia. Ao situar o estudante diante de situações concretas de contagem antes de apresentar a expressão algébrica, o professor cria as condições descritas por Ausubel (2003) para que o novo conhecimento se ancore em subsunções já disponíveis. A fórmula passa a ser síntese do que foi compreendido, e não ponto de partida arbitrário.

No ensino de Matemática, os jogos têm uma vantagem específica: exigem do aluno as mesmas operações cognitivas que a disciplina demanda fora da sala de aula. Para jogar, é preciso planejar estratégias, analisar possibilidades, identificar restrições e justificar escolhas. Smole e Diniz (2001) documentam esse potencial ao mostrar que a participação em jogos matemáticos fortalece o raciocínio lógico porque as situações propostas não admitem resposta automática: exigem elaboração. O erro, nesse contexto, não encerra o processo. Ele exige revisão, reformulação e nova tentativa, ciclo que se aproxima do que os matemáticos fazem quando resolvem problemas de verdade.

A dimensão colaborativa dos jogos acrescenta outra camada ao processo. Quando os alunos jogam em grupo, o conhecimento nasce da negociação de estratégias, do confronto de hipóteses e da escuta de pontos de vista diferentes. O aluno que explica uma estratégia

para um colega também a consolida para si. Esse conjunto de experiências contribui para o desenvolvimento da autonomia intelectual, princípio que Freire (1996) situa como condição de uma educação que vai além da transmissão de conteúdos: a autonomia não se ensina por decreto, mas se constrói pela prática reflexiva.

Os jogos matemáticos também favorecem a avaliação formativa de forma que os instrumentos tradicionais raramente conseguem. Durante o jogo, o professor observa o raciocínio em processo, não apenas o resultado final. Consegue identificar se o aluno compreende a estrutura do problema ou apenas tenta alternativas ao acaso, se reconhece quando errou ou segue em frente sem perceber o equívoco, se consegue explicar o que fez ou apenas reproduz um procedimento. Luckesi (2011) propõe que a avaliação genuinamente formativa é aquela que acompanha o desenvolvimento do estudante e orienta a intervenção do professor, e não aquela que classifica no final de um período. O jogo matemático bem estruturado transforma a sala de aula inteira em fonte de dados avaliativos.

O papel do professor muda nesse cenário. Ele deixa de ser o único produtor de explicações e passa a ser o organizador de situações de aprendizagem, o observador do raciocínio em processo e o interventor estratégico nas dificuldades que emergem. Essa mudança é mais exigente do que parece: planejar um jogo com intencionalidade pedagógica requer domínio do conteúdo matemático mobilizado, previsão dos erros mais prováveis, definição dos momentos de discussão coletiva e clareza sobre como os conceitos serão sistematizados após a atividade lúdica. Sem esse planejamento, conforme observa Moran (2015), as metodologias ativas correm o risco de produzir apenas a aparência de inovação pedagógica.

No contexto específico da Análise Combinatória, conteúdo central desta dissertação, os jogos têm relevância particular. As principais dificuldades dos alunos nesse conteúdo, conforme discutidas no Capítulo 4, estão ligadas à identificação equivocada da estrutura do problema: confundir situações que exigem contagem ordenada com situações em que a ordem não importa, não perceber restrições impostas pelo enunciado, aplicar fórmulas sem compreender o raciocínio que as originou. Jogos que coloquem o aluno diante de situações de contagem concretas, em que ele precise justificar suas escolhas para avançar, criam condições para que essas dificuldades apareçam, sejam discutidas e sejam superadas de forma progressiva.

A integração entre jogos matemáticos e metodologias ativas não é uma proposta de abandono do rigor conceitual. É uma proposta de reorganização da sequência didática:

primeiro o raciocínio, construído por experiência e discussão; depois a sistematização, apresentada como síntese do que já foi compreendido. Nessa ordem, a fórmula não precede o entendimento. Ela o expressa.

3.2 A Gamificação no Ensino Médio: Engajamento e Motivação nas Aulas de Matemática

Gamificação não é o mesmo que jogo. A distinção importa porque os dois conceitos são frequentemente confundidos, e a confusão produz práticas pedagógicas mal fundamentadas. Jogar é participar de uma atividade com estrutura lúdica própria. Gamificar é incorporar elementos estruturais dos jogos, como desafios progressivos, sistemas de feedback, metas graduais e recompensas simbólicas, a contextos que não são jogos. No ensino de Matemática, gamificar uma aula significa reorganizar a experiência de aprendizagem segundo uma lógica que dialogue com o universo dos estudantes sem abrir mão do rigor conceitual. Bacich e Moran (2018) situam essa prática como parte de uma pedagogia ativa mais ampla, em que aprender implica fazer, errar e refazer em ambientes estruturados para isso.

O principal ganho da gamificação para o ensino de Matemática está na forma como ela reposiciona o erro. Em uma aula centrada na exposição e na correção, o erro é, na melhor das hipóteses, ignorado; na pior, punido. Em um ambiente gamificado bem estruturado, o erro é informação: indica que o caminho escolhido não funciona e que é preciso tentar outro. Essa resignificação tem efeitos diretos sobre a motivação dos alunos, especialmente em conteúdos como a Análise Combinatória, em que a dificuldade de interpretação dos problemas gera com frequência frustração e desistência. Luckesi (2011) defende práticas avaliativas formativas que valorizem o percurso do estudante e não apenas o resultado final, e a gamificação, quando bem planejada, cria as condições para que essa perspectiva formativa prevaleça no cotidiano da aula.

A organização das atividades em níveis de progressão respeita um fato didático concreto: estudantes de uma mesma turma têm pontos de partida diferentes. Atividades gamificadas que preveem etapas com graus distintos de complexidade permitem que cada aluno avance a partir de onde está, sem que o ritmo mais lento de alguns inviabilize a participação de todos. Esse arranjo não elimina o desafio, mas o gradua. A pesquisa sobre aprendizagem matemática mostra que o sentimento de progresso incremental sustenta o engajamento ao

longo do tempo, porque o aluno percebe que seu esforço produz avanço real, e não apenas acumulação de erros.

A distinção entre motivação intrínseca e extrínseca, central para avaliar criticamente o uso de recompensas simbólicas na gamificação, encontra base teórica rigorosa na Teoria da Autodeterminação, formulada por Ryan e Deci (2000). Segundo essa teoria, a motivação humana não é unitária: ela varia em um continuum que vai da regulação externa, sustentada por recompensas e punições, até a motivação intrínseca, em que a atividade é realizada por seu próprio valor. Ryan e Deci (2000) demonstram que intervenções que enfatizam recompensas externas tangíveis tendem a reduzir a motivação intrínseca ao longo do tempo, fenômeno denominado efeito de solapamento. Para o ensino de Análise Combinatória, isso tem implicação pedagógica direta: sistemas de pontuação e ranking que subordinam a participação do aluno à posição obtida podem, paradoxalmente, diminuir o engajamento genuíno com o conteúdo. A gamificação pedagogicamente consistente é aquela que cria as condições para que o estudante experiencie as três necessidades psicológicas básicas identificadas pela teoria: autonomia, competência e pertencimento.

Figura 3.2 – Continuum da autodeterminação segundo Ryan e Deci (2000), com posicionamento dos elementos de gamificação e das três necessidades psicológicas básicas.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Ryan e Deci (2000).

Como evidenciado na Figura 3.2, os elementos de gamificação não são pedagogicamente neutros: rankings e recompensas externas posicionam o estudante no polo controlado

do continuum, ao passo que desafios progressivos, feedback informativo e trabalho colaborativo favorecem o deslocamento em direção à autonomia. Para o ensino de Análise Combinatória na escola estadual, isso significa que a gamificação só produz aprendizagem duradoura quando estimula a curiosidade sobre a estrutura dos problemas e não apenas a busca por pontos.

As recompensas simbólicas, como medalhas, conquistas ou rankings, merecem atenção cuidadosa. Quando bem planejadas, reforçam comportamentos produtivos: participar, persistir, colaborar, revisar estratégias. Quando mal planejadas, desviam o foco do aprendizado para a pontuação e geram competição que pode excluir e desmotivar. A análise crítica da aplicação da gamificação no contexto educacional brasileiro mostra que a lógica competitiva excessiva tende a favorecer quem já tem domínio prévio do conteúdo e a penalizar quem mais precisa de suporte. A gamificação pedagogicamente consistente usa esses elementos a serviço da aprendizagem, não como fins em si mesmos, e garante que a participação seja mais valorizada do que a velocidade na resposta.

A integração de recursos digitais e analógicos potencializa as possibilidades da gamificação na escola pública. Kenski (2012) observa que as tecnologias transformam as práticas educativas quando integradas a um planejamento pedagógico consistente, e não quando introduzidas como novidade em si mesmas. Plataformas como o Wordwall permitem criar atividades interativas com feedback imediato e converter essas mesmas atividades em versões imprimíveis equivalentes, o que resolve um problema concreto da rede estadual: a oscilação da conectividade. A possibilidade de alternar entre o formato digital e o impresso sem perder a coerência da proposta didática é uma vantagem real para contextos escolares onde a infraestrutura não é homogênea. A mesma atividade pode ser projetada para discussão coletiva, resolvida em duplas pelo celular ou entregue em papel para quem não tem acesso, mantendo o mesmo conteúdo e os mesmos objetivos.

O professor, nesse modelo, não desaparece por trás da tecnologia. Ao contrário, sua função se torna mais exigente: é ele quem seleciona os problemas, prevê os erros esperados, interpreta os dados gerados pelas plataformas e decide quando intervir e como. A gamificação bem estruturada amplia a capacidade do professor de acompanhar a turma, porque os dados de desempenho nas atividades digitais tornam visíveis padrões de erro que, em uma aula expositiva, só apareceriam na prova. Esses dados, contudo, precisam ser lidos com julgamento docente: o índice de acerto numa questão do Wordwall não substitui a compreensão

de por que o aluno errou nem indica, por si mesmo, qual intervenção é necessária.

No ensino de Análise Combinatória, a gamificação pode contribuir para dois desafios didáticos particulares. O primeiro é a discriminação entre tipos de problemas, tarefa que os alunos costumam enfrentar por tentativa e erro quando não compreendem os critérios de distinção. Atividades gamificadas de classificação, em que o aluno precisa identificar se a ordem importa antes de avançar, criam um ciclo de feedback rápido que permite identificar e corrigir essa confusão antes que ela se solidifique. O segundo desafio é a resistência ao enunciado longo: muitos alunos abandonam problemas com restrições porque a leitura atenta demanda esforço que a aula tradicional não treinou. Atividades gamificadas que exijam leitura como condição de progresso criam incentivo para essa prática.

3.3 A Aprendizagem Colaborativa e a Avaliação Formativa por meio de Jogos Matemáticos

A aprendizagem colaborativa parte de uma premissa verificável na prática docente: o conhecimento matemático se constrói melhor em interação do que em isolamento, especialmente quando os problemas envolvem raciocínio estrutural que não admite resposta automática. Quando alunos trabalham juntos diante de um desafio combinatório, cada um contribui com o que sabe, questiona o que não compreende e aprende com o raciocínio dos colegas. Freire (1996) situa essa dinâmica como parte de uma concepção de educação em que o diálogo não é método, mas condição do ato de conhecer. O jogo matemático, por sua natureza interativa, cria as condições para que esse diálogo aconteça de forma estruturada e matematicamente produtiva, sem depender da espontaneidade dos alunos ou da improvisação do professor.

Nos jogos colaborativos, o erro ganha um tratamento diferente do que recebe nas avaliações tradicionais. Ele aparece publicamente, é discutido pelo grupo, exige justificativa e provoca reformulação. O aluno que erra e é questionado por um colega precisa explicar seu raciocínio, e essa explicação frequentemente revela onde está o problema. O aluno que questiona também aprende, porque articular a dúvida exige compreensão parcial do conceito. Quando bem conduzida pelo professor, essa dinâmica transforma o erro de indicador de fracasso em ponto de partida para o avanço conceitual, o que se alinha à perspectiva avaliativa defendida por Luckesi (2011): a avaliação a serviço da aprendizagem, não da classificação.

A avaliação formativa, nesse contexto, ocorre de forma integrada à atividade e não em momento separado dela. O professor não precisa interromper o jogo para avaliar: a observação das interações, das estratégias tentadas e das dificuldades verbalizadas já fornece informação qualitativa sobre o estado da aprendizagem de cada aluno e da turma como um todo. Essa observação é qualitativamente diferente da correção de exercícios, porque revela o processo de raciocínio e não apenas o resultado. Com ela, o professor consegue identificar se o aluno compreende a estrutura do problema ou apenas tenta alternativas ao acaso, se reconhece quando errou ou avança sem perceber o equívoco, se consegue transferir o raciocínio de uma situação para outra. Cada uma dessas informações orienta a intervenção pedagógica seguinte.

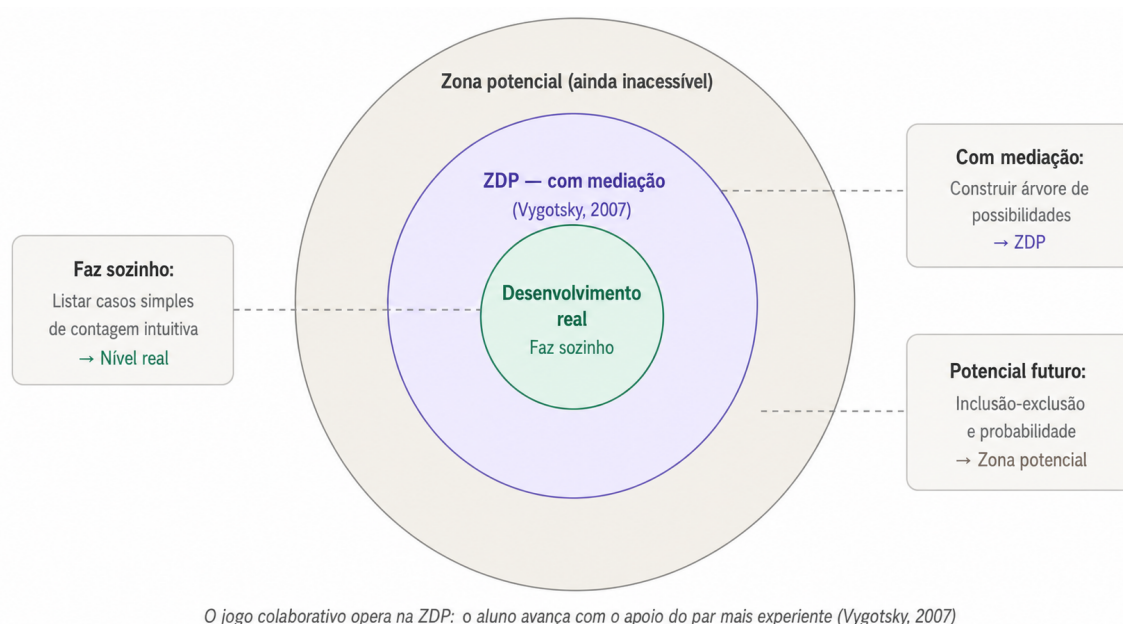
A autoavaliação e a avaliação entre pares emergem naturalmente dos jogos colaborativos. Ao analisar suas próprias decisões e as dos colegas, os alunos desenvolvem a capacidade de identificar onde estão os erros, o que funcionou e o que pode ser melhorado. Esse exercício metacognitivo, que raramente aparece nas práticas de avaliação tradicional, fortalece a autonomia intelectual do estudante de forma concreta: o aluno passa a ter ferramentas para monitorar a própria aprendizagem, e não apenas a aguardar a avaliação externa do professor. Bacich e Moran (2018) apontam que práticas pedagógicas que integram autoavaliação ao processo de ensino contribuem para a formação de estudantes mais conscientes e responsáveis pelo próprio percurso formativo.

A dimensão interacional da aprendizagem matemática tem suporte teórico preciso na noção de Zona de Desenvolvimento Proximal, elaborada por Vygotsky (2007). O autor define essa zona como a distância entre o nível de desenvolvimento real, aquilo que o estudante realiza de forma autônoma, e o nível de desenvolvimento potencial, aquilo que ele consegue realizar com a mediação de um par mais experiente ou do próprio professor. Para Vygotsky (2007), é exatamente nesse espaço intervalar que a aprendizagem de fato ocorre: não no que o aluno já domina nem no que ainda é por completo inacessível, mas no que ele pode alcançar com apoio. Os jogos colaborativos em Análise Combinatória operam diretamente nessa zona: quando um estudante explica sua estratégia de contagem a um colega que ainda não a compreende, ambos se beneficiam, um pela consolidação que a verbalização exige, outro pela mediação de uma linguagem mais próxima da sua.

A Figura 3.3 situa com precisão o papel do jogo colaborativo no desenvolvimento do raciocínio combinatório. O que o aluno faz sozinho, listar casos simples de forma intuitiva,

representa seu desenvolvimento real. O que ele pode alcançar com a mediação do professor ou de um colega mais experiente, construir uma árvore de possibilidades sistemática e distinguir arranjo de combinação, é a Zona de Desenvolvimento Proximal. O que ainda não é acessível, como o Princípio da Inclusão-Exclusão ou a transição para probabilidade, constitui o desenvolvimento potencial que a sequência didática proposta nesta dissertação visa, progressivamente, tornar alcançável.

Figura 3.3 – Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky (2007) aplicada ao ensino colaborativo de Análise Combinatória.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Vygotsky (2007).

Os recursos digitais, como a plataforma Wordwall, complementam a avaliação formativa ao gerar dados de desempenho que o professor pode usar para regular o ensino em tempo real. Kenski (2012) observa que as tecnologias digitais transformam a relação entre ensino e avaliação quando permitem ao professor acessar informações sobre o desempenho dos alunos durante a atividade e não apenas após ela. Em plataformas interativas, o professor consegue identificar quais itens concentram mais erros, qual padrão de resposta é mais frequente e em que momento os alunos tendem a desistir. Esses dados não substituem a observação qualitativa das interações em sala, mas a complementam, oferecendo uma visão mais abrangente do que está acontecendo na aprendizagem da turma.

A aprendizagem colaborativa por meio de jogos também contribui para a inclusão de estudantes com diferentes ritmos e pontos de partida. Quando o professor organiza grupos heterogêneos e propõe atividades com diferentes níveis de entrada, cada aluno pode contribuir a partir do que sabe, sem que a diferença de desempenho inicial exclua os que precisam de mais tempo. No ensino de Análise Combinatória, essa heterogeneidade é especialmente relevante, porque as dificuldades dos alunos não são uniformes: alguns travam na leitura do enunciado, outros na classificação do problema, outros no cálculo. O jogo colaborativo bem planejado permite que essas dificuldades diferentes apareçam ao mesmo tempo, sejam identificadas pelo professor e sejam tratadas com intervenções diferenciadas sem que a turma precise parar.

A articulação entre aprendizagem colaborativa e avaliação formativa, mediada por jogos matemáticos, responde a uma exigência concreta do Ensino Médio contemporâneo: formar alunos que saibam pensar e não apenas calcular. Moran (2015) e Bacich e Moran (2018) convergem ao defender que práticas pedagógicas que integram conhecimento, habilidades e atitudes contribuem mais consistentemente para a formação integral do estudante. O jogo matemático, quando planejado com esse horizonte, não é uma pausa no ensino. É o ensino acontecendo em condições que permitem observá-lo, ajustá-lo e qualificá-lo de forma contínua. No contexto da escola pública com turmas numerosas e infraestrutura limitada, essa proposta não é apenas desejável, mas realizável.

Capítulo 4

O Ensino de Análise Combinatória com o Uso da Mídia Wordwall na Escola Estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito

A análise combinatória ocupa lugar estratégico no currículo de Matemática porque introduz o estudante no campo das contagens sistemáticas, da organização de possibilidades e da tomada de decisões fundamentadas em critérios lógicos. Em vez de se restringir à memorização de fórmulas de permutação, arranjo e combinação, esse conteúdo mobiliza um modo de pensar baseado na identificação de estruturas, na distinção entre situações em que a ordem importa ou não importa, no controle de repetições e na produção de representações que tornem visível o conjunto de possibilidades de um problema. A Base Nacional Comum Curricular explicita, para o Ensino Médio, a habilidade EM13MAT310, voltada à resolução e elaboração de problemas de contagem por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, com recurso a estratégias como o diagrama de árvore, o que evidencia que o foco curricular não é apenas procedimental, mas investigativo e representacional (Brasil, 2018).

No contexto da escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito, a aprendizagem desse conteúdo é frequentemente marcada por dificuldades persistentes. Muitos estudantes confundem situações de escolha com situações de ordenação, aplicam fórmulas sem compreender o problema, deixam de explicitar o espaço de possibilidades ou abandonam a tarefa diante de enunciados mais extensos. Esses obstáculos não decorrem apenas da

complexidade intrínseca do tema: decorrem também de práticas de ensino excessivamente expositivas, pouco contextualizadas e orientadas por exercícios mecânicos. A pesquisa em educação matemática tem mostrado que o raciocínio combinatório se desenvolve quando o aluno compara estratégias, produz listagens sistemáticas, constrói árvores de possibilidades, confronta erros e compreende as relações entre linguagem natural, representações intermediárias e expressão numérica formal (Batanero, Navarro-Pelayo e Godino, 1997; Borba, Rocha e Azevedo, 2015; Montenegro, Borba e Bittar, 2020).

Nesse cenário, o uso pedagógico de tecnologias digitais pode ampliar as condições de participação, visualização e feedback, desde que não seja confundido com solução automática para problemas de aprendizagem. A própria BNCC reconhece que as tecnologias digitais atravessam a vida contemporânea e demandam usos críticos, criativos e responsáveis na escola (Brasil, 2018). A Lei nº 14.533/2023, que institui a Política Nacional de Educação Digital, reforça a centralidade do letramento digital e da integração significativa das tecnologias aos processos formativos (Brasil, 2023b). Ao mesmo tempo, a UNESCO adverte que o valor pedagógico da tecnologia depende de sua relevância, equidade, escalabilidade e sustentabilidade, e que o uso inadequado ou excessivo pode produzir dispersão e aprofundar desigualdades (UNESCO, 2023).

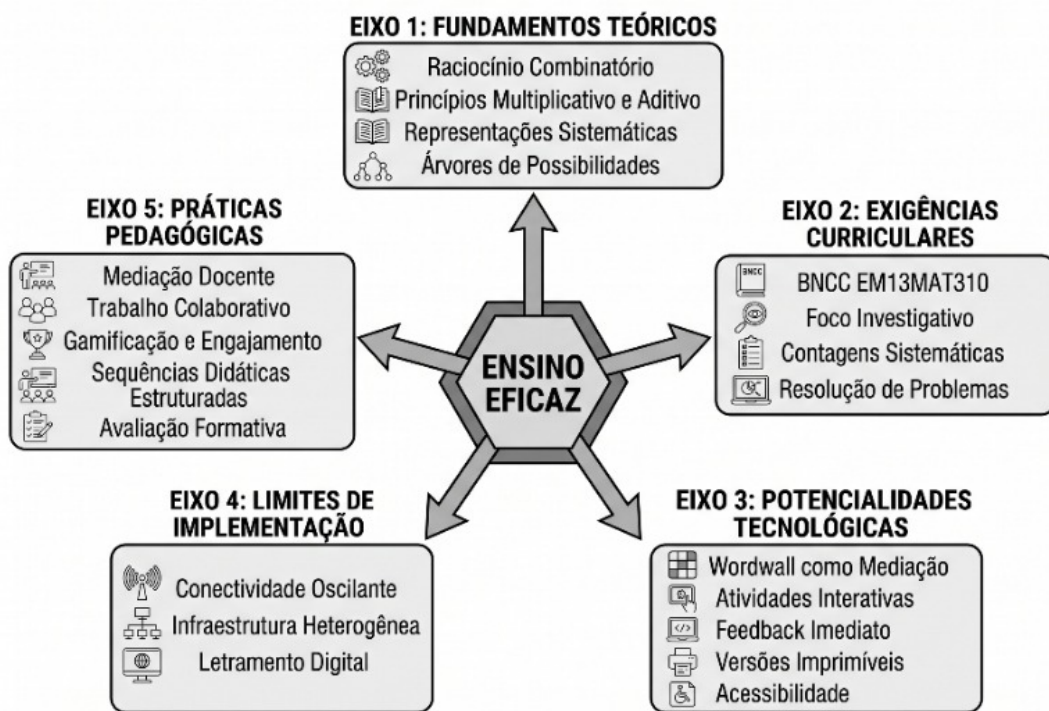
É nesse ponto que a mídia Wordwall se torna relevante como objeto de análise pedagógica. A plataforma permite criar atividades interativas e versões imprimíveis, com modelos variados de interação, como quiz, associação, cartões, digitação de resposta, giro aleatório, agrupamento e completamento de sentenças. Segundo a própria plataforma, as atividades podem ser jogadas em qualquer dispositivo conectado à internet e convertidas em materiais impressos, característica importante para contextos em que a conectividade é oscilante e a infraestrutura não é homogênea (Wordwall, 2026). Mais do que ornamentar a aula, o Wordwall pode funcionar como recurso de mediação didática para diagnóstico, sistematização, prática guiada, revisão e avaliação formativa de conteúdos combinatórios.

Este capítulo discute como o ensino de análise combinatória pode ser desenvolvido na escola estadual com o apoio do Wordwall, articulando fundamentos teóricos, exigências curriculares, potencialidades da tecnologia, limites de implementação e proposta didática para turmas do Ensino Médio. A escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito é tomada como contexto concreto de referência: suas condições reais de infraestrutura, perfil de turmas e cultura escolar orientam as escolhas didáticas e as alternativas de implementação

aqui propostas, ainda que a aplicação efetiva da sequência e a coleta de dados empíricos sobre seus efeitos permaneçam como agenda de investigação futura. O capítulo organiza, portanto, a base teórica e metodológica necessária para subsidiar uma intervenção pedagógica real e adaptável a esse e a outros contextos. Sua contribuição está em demonstrar que o uso pedagógico do Wordwall só se justifica quando integrado a uma concepção de ensino que valoriza raciocínio, linguagem, representação, mediação docente e avaliação processual.

A Figura 4.1 sintetiza os eixos que sustentam essa proposta de ensino eficaz de análise combinatória, evidenciando a articulação entre fundamentos teóricos, exigências curriculares, potencialidades tecnológicas, limites de implementação e proposta didática.

Figura 4.1 – Eixos estruturantes para o ensino eficaz de análise combinatória com apoio de tecnologias digitais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

4.1 A análise combinatória no currículo do Ensino Médio

A inserção da análise combinatória no Ensino Médio brasileiro não pode ser compreendida como um acréscimo periférico ao currículo de Matemática. Ela se relaciona diretamente com a formação do pensamento lógico, com a modelagem de situações de escolha e organização e com a compreensão de problemas probabilísticos e estatísticos. A BNCC estabelece que o estudante deve resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não, mobilizando princípios aditivo e multiplicativo e estratégias diversas, como o diagrama de árvore (Brasil, 2018). Essa formulação é decisiva porque desloca o ensino da simples aplicação de fórmulas para a compreensão dos processos que sustentam a contagem.

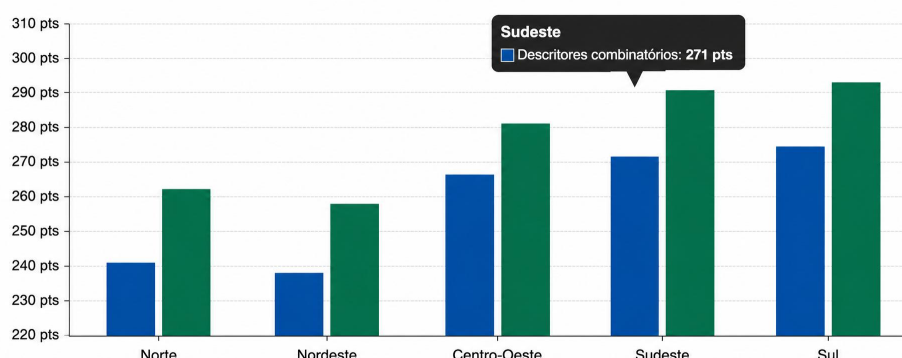
Ensinar análise combinatória significa, sob essa perspectiva, trabalhar com uma matemática de estrutura, não apenas de resultado. Quando um estudante enumera possibilidades para formar senhas, organizar filas, selecionar equipes, montar cardápios ou distribuir lugares, ele opera com relações entre elementos, restrições, critérios de ordenação e classes de equivalência. O núcleo conceitual reside justamente na capacidade de reconhecer essas relações. O princípio multiplicativo não deve ser apresentado como regra descontextualizada, mas como expressão da ideia de composição de escolhas sucessivas; o princípio aditivo deve emergir da análise de alternativas mutuamente excludentes. Sem essa compreensão, a passagem posterior para arranjos, combinações e permutações tende a produzir aprendizagem apenas aparente.

A literatura especializada é convergente ao afirmar que o raciocínio combinatório possui especificidades próprias. Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) mostraram que estudantes do ensino secundário enfrentam dificuldades distintas a depender do tipo de estrutura combinatória presente na tarefa, especialmente quando precisam discriminar modelos implícitos de seleção, partição e distribuição. Dois problemas com números semelhantes podem exigir raciocínios radicalmente diferentes. O erro do aluno, nesse caso, não está necessariamente no cálculo final, mas na interpretação estrutural do enunciado.

Essa argumentação é especialmente importante para o Ensino Médio, etapa em que muitas vezes o estudante já chega com lacunas acumuladas sobre contagem de possibilidades. Quando o professor inicia o conteúdo diretamente pelas fórmulas, pressupõe um nível de elaboração conceitual que, em boa parte das turmas, ainda não foi consolidado.

O diagnóstico de dificuldades recorrentes em Análise Combinatória não se sustenta apenas na literatura especializada. Ele encontra respaldo nos dados das avaliações em larga escala realizadas no Brasil. A Matriz de Referência do Sistema de Avaliação da Educação Básica, elaborada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, inclui descritores voltados ao raciocínio combinatório e probabilístico no eixo de Tratamento da Informação para o Ensino Médio, entre eles a capacidade de resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo de contagem (INEP, 2011). Os resultados históricos do SAEB evidenciam que esses descritores figuram consistentemente entre os de menor proficiência média nas redes estaduais, o que indica que a dificuldade com contagem sistemática não é fenômeno localizado em escolas específicas, mas padrão estrutural do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira.

Figura 4.2 – Comparação entre proficiência média em descritores combinatórios e média geral de Matemática no SAEB, por região, nas redes estaduais brasileiras.



Nota: barras azuis representam a proficiência média nos descritores combinatórios; barras verdes representam a média geral de Matemática. Valores representativos baseados nos padrões históricos do SAEB (INEP, 2011). Escala: abaixo de 300 = nível insuficiente no Ensino Médio.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em INEP (2011).

O gráfico (Figura 4.2) evidencia que os descritores combinatórios apresentam desempenho consistentemente inferior à média geral de Matemática em todas as regiões brasileiras. Para o professor da escola estadual, esse dado confirma que as dificuldades observadas em sala não decorrem de falha individual dos estudantes, mas de problema de escopo nacional que envolve formação docente, organização curricular e práticas de ensino. Isso justifica o investimento em propostas didáticas que tratam o raciocínio combinatório como objeto de ensino que exige progressão conceitual deliberada.

Merece destaque também o vínculo entre combinatória e probabilidade. A BNCC

situa a contagem de possibilidades como base para resolver e elaborar problemas probabilísticos (Brasil, 2018). Em termos pedagógicos, isso exige que a aula de análise combinatória seja pensada não como bloco isolado, mas como preparação para o estudo de espaço amostral, eventos equiprováveis e experimentos aleatórios sucessivos. O conteúdo tem, portanto, função estruturante dentro do currículo.

O diálogo entre análise combinatória e cultura digital também é relevante. A BNCC assinala que as tecnologias digitais de informação e comunicação estão cada vez mais presentes no cotidiano e que a escola deve ampliar as aprendizagens relacionadas a esse universo (Brasil, 2018). No caso da Matemática, isso significa considerar recursos que favoreçam simulação, visualização, experimentação e interação. A habilidade EM13MAT310 se alinha a práticas que permitam ao estudante construir estratégias de contagem, testar hipóteses e explicitar raciocínios em diferentes linguagens, inclusive digitais.

A análise combinatória precisa ser concebida, no currículo do Ensino Médio, como campo de aprendizagem voltado à construção de esquemas de pensamento. Isso implica trabalhar problemas contextualizados, exigir que o estudante justifique por que determinada estratégia é adequada, explorar representações intermediárias e propor situações em que a resposta correta dependa mais de compreender a lógica do agrupamento do que de decorar expressões. Quando essa perspectiva é adotada, recursos como o Wordwall deixam de ser adereços tecnológicos e passam a integrar um projeto didático coerente com as finalidades curriculares da escola estadual.

4.2 Dificuldades recorrentes na aprendizagem do raciocínio combinatório

As dificuldades de aprendizagem em análise combinatória costumam ser mais profundas do que aparentam em uma correção superficial de exercícios. Um estudante pode chegar ao número correto por tentativa, mas sem compreender a estrutura do problema; outro pode dominar uma fórmula e não saber quando utilizá-la. Duro e Becker (2015), ao analisarem mecanismos empregados por estudantes do ensino médio na resolução de situações de análise combinatória, observaram que a passagem de procedimentos aleatórios para formas mais sistemáticas de resolução é um aspecto central do desenvolvimento conceitual. Em termos didáticos, a aprendizagem não ocorre quando o aluno apenas acerta, mas quando ele começa

a controlar o próprio processo de contagem.

Um dos erros mais frequentes diz respeito à distinção entre casos em que a ordem importa e casos em que não importa. Em problemas de senhas, pódios, filas e códigos, a ordem é constitutiva; em problemas de seleção de comissões, duplas, cardápios ou subconjuntos, a ordem em geral não altera o agrupamento. A dificuldade surge porque muitos estudantes interpretam todos os problemas como simples escolhas e não percebem que, em alguns contextos, trocar os elementos de posição produz um novo caso, ao passo que em outros produz apenas uma reescrita do mesmo conjunto. Essa falha compromete a diferenciação entre arranjo e combinação e alimenta o uso mecânico de fórmulas.

Outro obstáculo recorrente está no tratamento da repetição. Há problemas em que um elemento pode aparecer mais de uma vez na composição final, como na formação de códigos com repetição permitida; há outros em que isso é proibido, como na composição de equipes com pessoas distintas. Com frequência, o estudante ignora essa cláusula do enunciado ou a percebe tarde demais, depois de já ter adotado uma estratégia inadequada. Esse comportamento mostra que o ensino de combinatória precisa enfatizar a leitura matemática do problema, ou seja, a capacidade de transformar informações linguísticas em condições explícitas de contagem.

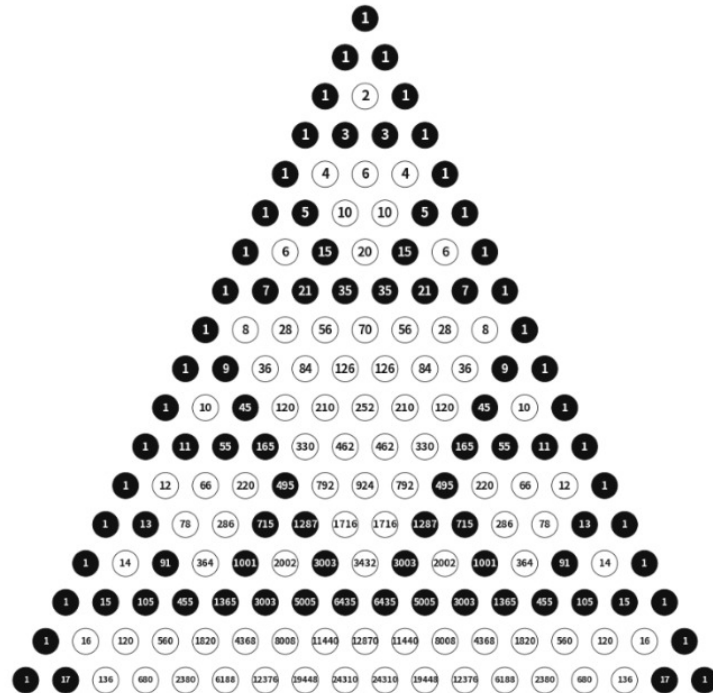
Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) demonstram que a natureza da tarefa interfere diretamente no desempenho dos alunos. Algumas estruturas, como seleção simples, tendem a ser mais acessíveis; outras, como partição e distribuição, produzem maior incidência de erros, sobretudo quando o estudante não dispõe de representações que o ajudem a controlar o processo. Isso desautoriza a ideia de que basta ampliar a quantidade de exercícios: o problema muitas vezes está na inadequação do tipo de mediação oferecida, não na falta de treino.

Montenegro, Borba e Bittar (2020) evidenciam a importância das representações intermediárias para a aprendizagem de situações combinatórias. As autoras mostram que árvore de possibilidades e listagem sistematizada favorecem a identificação, a conversão e o tratamento de registros de representação, sendo a árvore particularmente potente por apresentar maior congruência com expressões numéricas. Para o professor da escola estadual, esse resultado tem consequência direta: antes de formalizar a solução por fórmulas, é pedagogicamente produtivo investir em representações que tornem visível a lógica do problema. O Triângulo de Pascal, apresentado na Figura 4.3 a seguir, ilustra com precisão esse prin-

cípio: a distinção visual entre coeficientes ímpares e pares revela padrões estruturais que o estudante pode observar e compreender antes de qualquer manipulação algébrica.

Como se observa na Figura 4.3, a abstração matemática ganha contornos visuais concretos. Esse tipo de diagramação é um recurso valioso para o desenho de estratégias didáticas focadas na descoberta guiada. Ao confrontar o aluno com essa disposição gráfica, seja por meio de recursos impressos táteis, seja pela gamificação em plataformas digitais, estimula-se a investigação do porquê de aquele padrão geométrico ocorrer.

Figura 4.3 – Triângulo de Pascal com distinção visual entre coeficientes ímpares (círculos pretos) e pares (círculos brancos), demonstrando que representações estruturadas revelam regularidades combinatórias antes da formalização simbólica.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Essa percepção visual prévia ancora a compreensão de conceitos mais abstratos, como a Relação de Stifel, tornando a aprendizagem do raciocínio combinatório um processo muito mais natural e engajador.

Lockwood (2013), ao propor um modelo de pensamento combinatório dos estudantes, destaca a relação entre fórmulas e expressões, processos de contagem e conjuntos de resultados. Quando uma dessas dimensões fica isolada, a compreensão se fragiliza. Um estudante que opera apenas com fórmulas pode perder de vista os conjuntos de resultados; aquele que lista casos sem sistematização pode não perceber a regularidade que justifica uma expressão mais sintética.

Há ainda um componente afetivo que não deve ser subestimado. Por ser frequentemente apresentada como conteúdo difícil, a análise combinatória gera bloqueios prévios, sobretudo em turmas com histórico de insucesso em Matemática. A rapidez exigida em certas atividades gamificadas pode intensificar a ansiedade se não houver mediação adequada. O uso do Wordwall nesse campo precisa evitar a lógica exclusivamente competitiva e privilegiar

a explicitação do raciocínio, o trabalho em pares, a comparação de estratégias e a valorização do erro como fonte de análise. A plataforma pode ajudar, mas só produzirá aprendizagem consistente se estiver articulada a uma pedagogia do raciocínio e não a uma pedagogia da pressa.

4.3 Tecnologias digitais, gamificação e mediação docente na escola pública

A discussão sobre tecnologias digitais na educação deixou de ser periférica e passou a integrar o núcleo das políticas públicas e das práticas curriculares. A LDB, ao longo de suas alterações, incorporou de modo mais explícito a presença das tecnologias nos itinerários de formação e nas condições de oferta educacional (Brasil, 1996). A Política Nacional de Educação Digital, instituída pela Lei nº 14.533/2023, reconhece o letramento digital, a educação digital escolar e a qualificação para o mundo digital como dimensões estratégicas da educação brasileira (Brasil, 2023b). A Estratégia Nacional de Escolas Conectadas, instituída pelo Decreto nº 11.713/2023, sinaliza que conectividade e uso pedagógico das tecnologias devem ser tratados como questões estruturais (Brasil, 2023a).

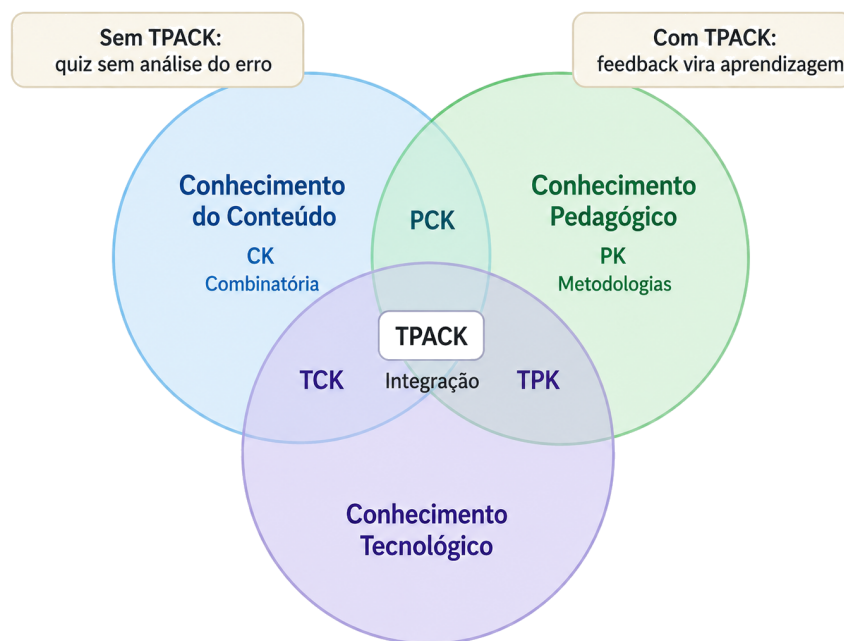
Entretanto, reconhecer a centralidade das tecnologias não significa naturalizar qualquer uso pedagógico. A UNESCO, no Relatório GEM 2023, observa que a contribuição educacional da tecnologia precisa ser analisada à luz de critérios de relevância, equidade, escalabilidade e sustentabilidade, além de alertar para o risco de efeitos negativos quando seu uso é inadequado ou excessivo (UNESCO, 2023). Uma plataforma digital pode aumentar o engajamento momentâneo e ainda assim produzir aprendizagem superficial se reduzir o conteúdo à repetição rápida de respostas. Em outros casos, a tecnologia pode aprofundar desigualdades quando depende de infraestrutura indisponível ou transfere para a família custos que deveriam ser assumidos pela política educacional.

Borba, Almeida e Chiari (2015) argumentam que as tecnologias digitais alteram a relação entre teoria e prática e reorganizam modos de produção de conhecimento em sala de aula. Essa perspectiva desloca a pergunta clássica "usar ou não usar tecnologia?" para uma mais exigente: que tipo de conhecimento matemático se produz quando determinados recursos são mobilizados em certas condições didáticas? Para a análise combinatória, essa mudança de enfoque é especialmente fecunda, pois o conteúdo envolve enumeração, visua-

lização, simulação, comparação de caminhos e controle de casos, elementos que podem ser potencializados por ambientes digitais interativos.

A questão da formação docente para o uso pedagógico de tecnologias digitais não pode ser tratada como dado marginal. Mishra e Koehler (2006) propõem o conceito de Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo, designado pela sigla TPACK, para descrever o tipo específico de conhecimento que o professor precisa mobilizar quando integra tecnologia ao ensino. Segundo os autores, não basta que o docente domine o conteúdo matemático, nem que conheça as funcionalidades da plataforma digital: é necessário que ele saiba articular esses dois domínios a partir de uma compreensão pedagógica clara dos objetivos de aprendizagem. A ausência de qualquer um dos três componentes, conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento tecnológico, compromete a qualidade da integração.

Figura 4.4 – Diagrama TPACK de Mishra e Koehler (2006), adaptado ao uso do Wordwall no ensino de Análise Combinatória.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Mishra e Koehler (2006).

O diagrama (Figura 4.4) evidencia que o uso pedagógico consistente do Wordwall não decorre do domínio isolado de nenhum dos três componentes: só quando o professor articula conhecimento matemático combinatório (CK), compreensão pedagógica da progressão

conceitual (PK) e domínio das funcionalidades da plataforma (TK) é que emerge o TPACK, a competência integradora que transforma o recurso digital em instrumento de aprendizagem. O checklist de implementação proposto no Capítulo 5 reconhece implicitamente essa demanda ao indicar que o professor deve revisar os problemas matemáticos e testar os templates antes da aplicação.

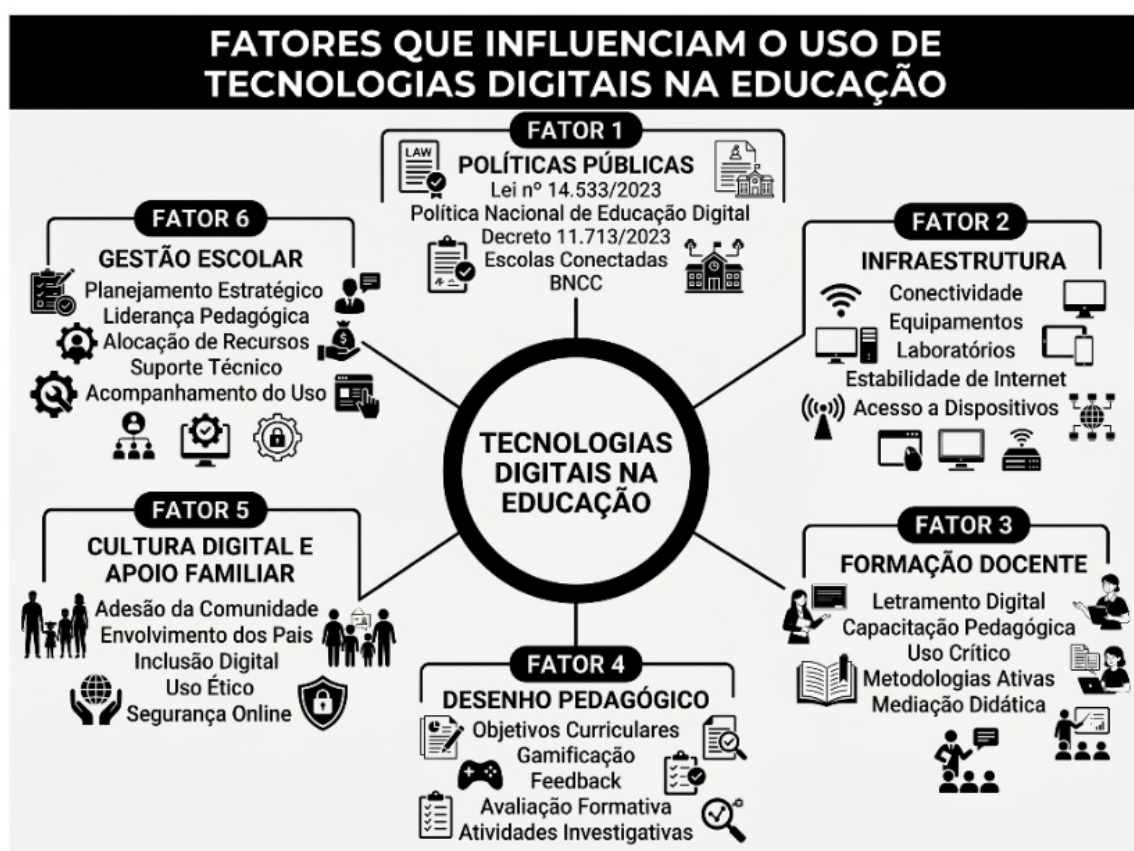
Azevedo e Maltempi (2020), ao discutirem o processo de aprendizagem de matemática à luz de metodologias ativas e do pensamento computacional, mostram que a aprendizagem ganha densidade quando o estudante se envolve em atividades investigativas, criativas e socialmente significativas. Embora o contexto da pesquisa dos autores não seja o mesmo da escola estadual regular, sua contribuição teórica ajuda a compreender por que recursos digitais podem favorecer autonomia intelectual quando não se limitam ao treino mecânico. O essencial não é a presença do dispositivo, mas o desenho de situações em que o aluno precise interpretar, decidir, testar, revisar e justificar.

No que se refere à gamificação, é preciso distinguir o uso de elementos de jogo como estratégia pedagógica do mero entretenimento desconectado dos objetivos curriculares. A UNESCO tem difundido práticas de game-based learning voltadas ao aumento do engajamento em sala de aula, especialmente quando articuladas a metodologias do século XXI e à superação de práticas puramente repetitivas (UNESCO, 2023). Ainda assim, gamificar uma aula de Matemática não equivale a transformar tudo em competição. Em conteúdos como análise combinatória, a gamificação só faz sentido quando os elementos lúdicos servem para ampliar atenção, participação, feedback e revisão, sem eliminar o tempo de elaboração conceitual.

Na escola estadual, o uso pedagógico de tecnologias encontra condições concretas muito diversas. Há instituições com laboratório de informática funcional, internet razoável e projetor em sala; outras trabalham com conectividade intermitente, poucos equipamentos e restrição parcial do uso de celulares. Esse quadro exige planejamento realista. O Wordwall tem uma vantagem importante nesse aspecto: além de atividades interativas, a plataforma oferece versões imprimíveis de grande parte dos modelos, o que permite alternar momentos online e offline conforme a infraestrutura disponível (Wordwall, 2026).

Do ponto de vista didático, as tecnologias digitais também repercutem na avaliação. Em ambientes como o Wordwall, o professor pode verificar padrões de acerto, itens mais problemáticos e tempo de resposta.

Figura 4.5 – Fatores que influenciam o uso de tecnologias digitais na educação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Esses dados, no entanto, não devem ser convertidos automaticamente em nota conclusiva. Em análise combinatória, o processo importa tanto quanto o resultado; logo, o professor precisa complementar as evidências digitais com registros escritos, explicações orais, resolução no caderno e discussão coletiva de estratégias. A mediação humana continua sendo o eixo organizador da aprendizagem.

A presença das tecnologias digitais no ensino da análise combinatória deve ser compreendida como possibilidade de reorganização metodológica, não como substituição do trabalho intelectual do estudante. O Wordwall pode contribuir porque articula interatividade, flexibilidade de formatos e possibilidade de impressão, mas seu potencial depende de intencionalidade pedagógica clara: que conceito será mobilizado, que tipo de erro se deseja diagnosticar, que forma de representação será enfatizada, que intervenção o professor fará após a atividade e como o aprendizado será consolidado para além do jogo.

4.4 Potencialidades didáticas do Wordwall para o ensino de análise combinatória

O Wordwall é uma plataforma educacional voltada à criação de atividades interativas e imprimíveis. A ferramenta disponibiliza mais de trinta tipos de atividades, possui ampla biblioteca de materiais compartilhados por professores, pode ser utilizada em diferentes dispositivos e converte atividades digitais em versões para impressão (Wordwall, 2026). Essas características a tornam atrativa para o contexto escolar, em que o professor necessita de recursos versáteis, reaproveitáveis e compatíveis com diferentes formas de acesso.

Para o ensino de análise combinatória, o interesse pedagógico do Wordwall reside não apenas no apelo visual, mas na possibilidade de transformar conteúdos abstratos em interações estruturadas. Problemas de contagem costumam exigir que o estudante identifique categorias, compare agrupamentos, reconheça critérios de ordenação, relacione exemplos e contraexemplos e complete estruturas lógicas. Vários modelos da plataforma dialogam com essas operações cognitivas: um quiz pode funcionar como diagnóstico rápido sobre conceitos; um modelo de associação pode ajudar a relacionar situações a seus respectivos tipos combinatórios; cartões podem sustentar revisão de definições; agrupamentos podem explorar a distinção entre casos em que a ordem importa e não importa; atividades de digitação de resposta podem exigir a construção do resultado numérico após resolução prévia

no caderno.

O Wordwall favorece ciclos curtos de feedback. Em uma aula tradicional, o professor precisa esperar a correção coletiva ou circular individualmente pela sala para identificar dúvidas. Na plataforma, erros recorrentes aparecem com mais rapidez, o que facilita intervenções quase imediatas. Isso é particularmente útil quando o objetivo é verificar se os alunos distinguiram permutação de combinação, se compreenderam o princípio multiplicativo ou se reconheceram uma restrição de repetição. Em vez de avançar sem diagnóstico, o docente pode interromper a atividade, projetar o item problemático e discutir as razões dos equívocos observados.

Outro ponto relevante é a possibilidade de variar o formato sem alterar o núcleo conceitual. Um mesmo conteúdo pode ser transferido de um modelo para outro com poucos cliques, o que permite manter o foco temático e modificar a forma de interação (Wordwall, 2026).

Figura 4.6 – Contribuições do Wordwall para o ensino de análise combinatória.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Para a análise combinatória, essa característica é valiosa porque o mesmo conjunto de situações pode ser retomado em momentos diferentes da sequência didática: primeiro em forma diagnóstica, depois como prática guiada, posteriormente como revisão e, por fim, como síntese avaliativa.

A natureza híbrida da ferramenta favorece a inclusão pedagógica. Em turmas heterogêneas, nem todos os estudantes respondem do mesmo modo a atividades puramente escritas ou expositivas. Alguns se beneficiam de suportes visuais; outros precisam de repetição mais fragmentada; outros ganham confiança quando resolvem em dupla antes de expor publicamente sua estratégia. O Wordwall admite uso projetado, individual, em pares, em grupos e em versão impressa, ampliando as possibilidades de organização da aula sem obrigar o professor a abandonar práticas de resolução no quadro e registro no caderno.

Contudo, a adoção da ferramenta exige critérios. O Wordwall não substitui a construção do raciocínio escrito: em análise combinatória, a resposta correta pode ser obtida por eliminação, chute ou reconhecimento superficial, e por isso o professor precisa demandar justificativa. A plataforma também não deve induzir uma pedagogia centrada na velocidade, pois isso favorece respostas impulsivas e invisibiliza o pensamento do aluno que necessita de mais tempo para estruturar a contagem. A seleção de atividades deve considerar clareza textual, acessibilidade visual, tamanho da fonte, quantidade de informação por tela e pertinência matemática.

Também se deve evitar o uso indiscriminado de rankings e exposições públicas de desempenho. Na escola estadual, onde convivem ritmos e trajetórias muito diversas, é mais produtivo utilizar a plataforma para cooperação, revisão e análise coletiva de erros do que para consolidar hierarquias de desempenho. A intencionalidade formativa precisa prevalecer sobre a lógica do espetáculo.

O modelo Quiz apresenta potencial para diagnóstico inicial e revisão rápida de conceitos essenciais. Permite verificar, por exemplo, se os estudantes reconhecem a diferença entre situações que envolvem o princípio aditivo e aquelas relacionadas ao princípio multiplicativo. O simples acerto da resposta, porém, não constitui evidência suficiente de aprendizagem. Por isso, seu uso precisa ser acompanhado de estratégias complementares, como registro de justificativas no caderno ou discussão coletiva das alternativas, de modo que o professor analise não apenas o produto final, mas o raciocínio mobilizado.

Conforme se observa na Figura 4.7, a questão proposta, "Utilizando os Algarismos 0,

Quadro 1 – Possibilidades de uso do Wordwall no ensino de análise combinatória.

Modelo/Template	Finalidade didática	Exemplo em análise combinatória	Cuidados pedagógicos
Quiz	Diagnóstico inicial e revisão rápida de conceitos	Identificar se um problema envolve princípio aditivo ou multiplicativo	Solicitar justificativa no caderno; não usar apenas acertos como nota final
Match up / Associação	Relacionar conceitos, estruturas e exemplos	Associar situações a permutação, arranjo ou combinação	Garantir que os exemplos sejam conceitualmente inequívocos
Group sort / Agrupamento	Classificar problemas por critérios	Separar casos em que a ordem importa dos que a ordem não importa	Explorar contraexemplos e discutir casos-limite coletivamente
Flash cards / Cartões	Memorização compreensiva e revisão	Revisar definições, restrições e fórmulas após compreensão prévia	Usar somente depois de trabalhar sentido conceitual
Type the answer / Digitar resposta	Conferir cálculo final após resolução completa	Resolver no caderno quantas senhas podem ser formadas e inserir o número	Evitar transformar a atividade em corrida; conferir o processo de resolução
Spin the wheel / Giro aleatório	Sortear contextos, restrições ou desafios	Girar para definir quantos elementos, se há repetição e qual é o contexto	Usar como gatilho para investigação, não como mero entretenimento

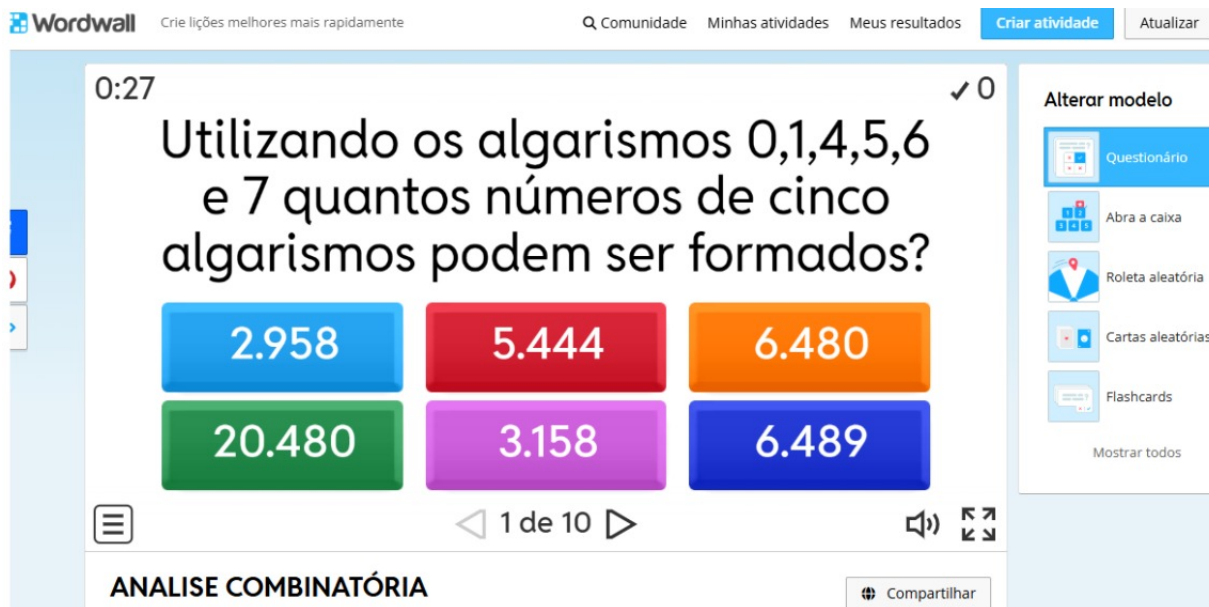
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

1, 4, 5, 6 e 7, quantos números de cinco algarismos podem ser formados?", exige mais do que o simples reconhecimento de uma fórmula. É necessário identificar se os algarismos se repetem, se o zero pode ocupar a primeira posição e qual princípio de contagem sustenta o cálculo. O formato de múltipla escolha com seis alternativas favorece o diagnóstico de erros típicos, pois cada distrator corresponde a um equívoco conceitual frequente. O professor deve solicitar ao estudante que registre no caderno o raciocínio utilizado antes de selecionar a alternativa na tela.

O template Match up é relevante para a diferenciação entre conceitos próximos, mas matematicamente distintos, como permutação, arranjo e combinação. Ao relacionar definições, estruturas e exemplos correspondentes, o estudante observa critérios específicos de cada operação combinatória. Para que essa atividade cumpra sua finalidade, é indispensável que os exemplos propostos sejam inequívocos e bem delimitados, evitando ambiguidades que possam reforçar compreensões equivocadas.

O modelo Group sort favorece a classificação de problemas segundo critérios estrutu-

Figura 4.7 – Atividade Quiz no Wordwall: Questão de análise combinatória com seis alternativas de resposta.



Fonte: Captura de tela da plataforma Wordwall (wordwall.net), elaborado pelo autor (2026).

rantes, especialmente a distinção entre situações em que a ordem dos elementos é relevante e aquelas em que não é. Trata-se de habilidade central para o avanço no conteúdo, uma vez que muitos erros decorrem justamente da dificuldade em identificar esse critério. A potência pedagógica desse modelo depende de mediação que ultrapasse a categorização mecânica, incorporando a problematização de contraexemplos e a explicitação dos critérios utilizados.

Os Flash cards contribuem mais adequadamente nos momentos de revisão e retomada, especialmente para memorização compreensiva de definições, condições de aplicação e fórmulas. No ensino de análise combinatória, esse recurso só se justifica pedagogicamente quando utilizado após a construção prévia do sentido conceitual: a memorização pode ser produtiva, mas não deve substituir a compreensão dos princípios envolvidos.

O modelo Type the answer tem relevância didática ao exigir que o estudante produza uma resposta numérica após realizar integralmente o processo de resolução. Diferentemente da múltipla escolha, esse formato reduz a possibilidade de acertos aleatórios. Sua utilização deve estar articulada ao registro escrito das etapas de resolução, evitando que a atividade se converta em disputa por rapidez. O mais importante não é a velocidade com que a resposta é digitada, mas a coerência lógica do procedimento empregado.

O Spin the wheel pode funcionar como recurso de geração de contextos, restrições e desafios, favorecendo a construção de situações-problema diversificadas. Quando reduzido a elemento meramente lúdico, perde densidade formativa; quando integrado a atividades investigativas, pode favorecer a análise de possibilidades e a comparação entre estratégias.

Em conjunto, o quadro evidencia que a utilização do Wordwall no ensino de análise combinatória pode assumir caráter pedagogicamente consistente, desde que orientada por critérios didáticos claros e acompanhada de mediação docente qualificada. O aspecto central não reside no uso da tecnologia em si, mas na forma como ela é inserida no processo de ensino e aprendizagem.

4.5 Sequência didática para uma turma da escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito

Com base na fundamentação apresentada, foi proposta uma sequência didática para o ensino de análise combinatória em uma turma da 2ª série do Ensino Médio. A escolha dessa etapa decorre do fato de que os estudantes já dispõem de repertório algébrico e probabilístico inicial, mas ainda necessitam consolidar formas sistemáticas de contagem. A sequência foi planejada para oito aulas de cinquenta minutos, podendo ser reorganizada em quatro encontros duplos conforme a grade da escola. Seu princípio metodológico é claro: partir de problemas concretos e representações acessíveis, avançar para formalizações progressivas e usar o Wordwall como ferramenta de diagnóstico, prática orientada, revisão e produção estudantil.

Os objetivos de aprendizagem foram definidos com precisão: distinguir situações em que a ordem importa daquelas em que não importa; compreender os princípios aditivo e multiplicativo como estratégias básicas de contagem; utilizar listagens sistemáticas e diagramas de árvore como representações intermediárias; diferenciar permutação, arranjo e combinação em problemas contextualizados; resolver situações com ou sem repetição e com restrições; comunicar o raciocínio utilizado; e reconhecer o Wordwall como recurso de estudo, não apenas de jogo. Esses objetivos articulam conteúdo, representação, linguagem e atitude investigativa.

A abertura da sequência foi diagnóstica. Em vez de começar pela exposição teórica, foram apresentadas situações simples de escolha e ordenação, como montar um lanche com

opções fixas, formar códigos de duas letras, escolher representantes de turma ou organizar três alunos em posições distintas. O Wordwall foi usado em formato quiz ou associação para levantar hipóteses iniciais: quem distingue escolha de ordenação? Quem considera repetição? Quem enumera casos aleatoriamente? Esse levantamento orienta os passos seguintes.

Na segunda etapa, trabalhou-se explicitamente o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. O professor conduziu situações em que a turma percebesse, por comparação, quando somar e quando multiplicar. A intervenção docente foi decisiva aqui: a simplificação linguística "soma quando há 'ou' e multiplica quando há 'e'" pode gerar novos enganos. É preciso discutir alternativas mutuamente exclusivas, escolhas sucessivas, independência operacional e composição de etapas. O Wordwall reforçou essa distinção com itens curtos, seguidos de pausa para justificativa oral ou escrita.

Na terceira etapa, foram introduzidas as representações intermediárias. Em consonância com Montenegro, Borba e Bittar (2020), recomenda-se investir fortemente em diagramas de árvore e listagens sistematizadas antes da formalização de fórmulas. O professor pode projetar uma atividade Wordwall com grupos de situações e pedir que, antes de marcar a resposta, cada dupla construa no caderno a árvore correspondente. Depois da interação digital, a turma comparou as árvores elaboradas, identificando contagens duplicadas e discutindo por que certas representações facilitam o controle do número de casos.

A quarta etapa abordou permutação, arranjo e combinação não como três fórmulas desconexas, mas como respostas a três tipos de estrutura. Em permutação, reorganiza-se um conjunto inteiro; em arranjo, escolhem-se alguns elementos e a ordem importa; em combinação, escolhem-se alguns elementos e a ordem não importa. O Wordwall, nesse momento, foi útil em modelos de agrupamento, cartões e associação, nos quais o aluno precisa relacionar uma situação-problema ao tipo de estrutura envolvida. As expressões algébricas foram introduzidas como formas sintéticas de registrar raciocínios já compreendidos.

A quinta etapa ampliou o trabalho para situações com repetição, restrições ou contagens indiretas. Problemas envolvendo senhas com caracteres repetidos, placas, sequências de cores, lugares proibidos e objetos indistinguíveis ajudaram a deslocar a aula para níveis mais ricos de argumentação. O Wordwall foi usado com parcimônia e em articulação com resolução detalhada no quadro, pois o aumento da complexidade exigiu mais tempo de elaboração conceitual.

A sexta etapa foi destinada à elaboração de problemas pelos próprios estudantes,

momento decisivo para verificar se houve apropriação real das estruturas combinatórias. Em pequenos grupos, os alunos construíram enunciados contextualizados, resolveram-nos e transformaram parte deles em atividades no Wordwall, com supervisão do professor. Esse movimento de autoria deslocou o estudante da posição de mero respondente para a de produtor de conhecimento, obrigando-o a decidir que informação incluir, que restrição explicitar e que resposta considerar correta.

A sequência culminou em uma avaliação integradora combinando três instrumentos: uma atividade no Wordwall para retomada rápida dos conceitos; uma produção escrita com resolução comentada de problemas; e uma roda de discussão em que alguns grupos explicaram suas estratégias. Em análise combinatória, limitar a avaliação a acertos de múltipla escolha empobrece o diagnóstico; ignorar os dados da interação digital também desperdiça informações úteis. A combinação de instrumentos favorece uma avaliação mais justa e mais próxima do processo vivido em sala.

As três primeiras aulas forneceram base cognitiva e diagnóstica. O mapeamento de concepções prévias, seguido da distinção entre princípios aditivo e multiplicativo e da construção de representações intermediárias, responde a um problema clássico da literatura: estudantes costumam errar não apenas por desconhecer fórmulas, mas por não identificar corretamente a estrutura do problema. Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) mostraram que diagramas de árvore funcionam como apoio importante na aprendizagem, e Montenegro, Borba e Bittar (2020) demonstraram que a identificação e a conversão de registros de representação foram decisivas para a compreensão conceitual.

A etapa intermediária, correspondente às aulas 4, 5 e 6, aprofundou a diferenciação entre os tipos combinatórios e ampliou o trabalho para situações com restrições e repetições de forma progressiva. A aula 4 introduziu permutação, arranjo e combinação como respostas a três tipos de estrutura; a aula 5 consolidou essa diferenciação por meio de resolução comparada de problemas; a aula 6 avançou para problemas com restrições, repetições e contagens indiretas. Essa ordem é didaticamente consistente porque evita a formalização precoce: antes de lidar com situações complexas, o estudante precisa compreender os critérios que distinguem os três tipos combinatórios. A aula 7, de autoria estudantil, foi decisiva porque deslocou o estudante da posição de resolvidor para a de elaborador, movimento previsto na própria BNCC ao tratar a análise combinatória como campo de resolução e elaboração.

Quadro 2 – Sequência didática sugerida para o trabalho com análise combinatória.

Aula	Objetivo central	Atividade principal	Uso do Wordwall	Registro/Avaliação
1	Mapear concepções prévias	Problemas simples de escolha e ordenação	Quiz diagnóstico projetado ou em duplas	Anotações do professor e resolução no caderno
2	Distinguir princípio aditivo e multiplicativo	Comparação entre alternativas excludentes e escolhas sucessivas	Itens curtos para confirmação imediata	Correção comentada e justificativas orais
3	Quando a ordem importa?	Situações concretas comparando contagens ordenadas e não ordenadas	Classificação de problemas e conferência de respostas	Árvores no caderno e discussão coletiva
4	Compreender permutação, arranjo e combinação	Problemas contextualizados com diferentes estruturas	Associação entre situação e tipo combinatório	Quadro-síntese e resolução explicada
5	Comparando permutação, arranjo e combinação	Resolução comparada de problemas dos três tipos combinatórios	Associação entre situação e tipo combinatório	Quadro-síntese comparativo e resolução explicada
6	Problemas com restrições e repetições	Senhas, placas, lugares proibidos, objetos indistinguíveis e pessoas juntas	Revisão seletiva e digitação da resposta	Resolução detalhada no caderno
7	Promover autoria estudantil	Grupos elaboram problemas e convertem alguns em atividades digitais	Criação supervisionada de atividades	Rubrica de autoria, pertinência e clareza
8	Integrar e avaliar	Revisão geral e resolução de problemas inéditos	Atividade de síntese e revisão	Avaliação escrita e dados formativos do Wordwall

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

4.6 Avaliação da aprendizagem e análise dos erros

A avaliação da aprendizagem em análise combinatória precisa ultrapassar a verificação de respostas corretas e alcançar os modos de raciocinar do estudante. Muitas vezes, dois alunos chegam ao mesmo resultado por caminhos qualitativamente distintos; em outras situações, um aluno erra o número final, mas revela estrutura de pensamento mais promissora do que outro que acertou por tentativa. Avaliar combinatória significa observar interpretação do enunciado, escolha de estratégia, uso de representações, controle de repetições, distinção entre ordenação e seleção e capacidade de comunicação matemática.

O Wordwall pode desempenhar papel importante na avaliação formativa. A pla-

taforma permite aplicar itens curtos em sequência, identificar padrões de erro e perceber tópicos que requerem retomada imediata. Se uma parcela significativa da turma associa incorretamente um problema de comissão a um caso de arranjo, o professor obtém indicativo claro de que a noção de ordem não foi consolidada. O valor da ferramenta está nesse retorno rápido, que favorece a regulação do ensino durante o processo e não apenas ao final dele.

Esse uso avaliativo exige cautela. Um acerto em um item Wordwall não revela se o estudante construiu árvore de possibilidades, aplicou princípio multiplicativo ou simplesmente reconheceu um padrão de resposta. Por isso, certas atividades devem ser acompanhadas da orientação "resolva no caderno antes de responder na plataforma". Ao circular pela sala, o professor recolhe evidências do processo, não somente do produto final.

A mediação docente continua sendo o elemento estruturante. Ao observar os erros mais recorrentes, o professor deve transformá-los em objeto de discussão coletiva. Em vez de apenas apontar a alternativa correta, convém perguntar: em que ponto esta solução duplica casos? Por que a ordem foi considerada indevidamente? O que mudaria se houvesse repetição permitida? Essa análise dos erros é fecunda em combinatória porque torna visível o funcionamento do pensamento do estudante e ajuda a deslocá-lo de procedimentos aleatórios para procedimentos sistemáticos.

Uma avaliação consistente combina momentos individuais e colaborativos. Atividades em dupla ou em grupo favorecem verbalização de estratégias, negociação de sentidos e construção de confiança diante de problemas mais desafiadores. Momentos individuais ajudam a verificar se houve apropriação efetiva. O Wordwall permite apoiar ambos os formatos: pode ser projetado para discussão coletiva, liberado para pares em celulares compartilhados ou utilizado individualmente em revisão.

Recomenda-se organizar critérios avaliativos explícitos desde o início da sequência, de modo que o estudante saiba que não será avaliado apenas por decorar fórmulas, mas por compreender e comunicar o raciocínio combinatório. Essa transparência ajuda a alinhar ensino, aprendizagem e avaliação.

O Quadro 3 organiza a avaliação a partir de uma concepção ampliada de desempenho matemático. Em vez de restringir a verificação ao acerto do resultado final, distribui a observação docente em dimensões distintas: compreensão da estrutura, escolha de estratégia, uso de representações, correção do cálculo, justificativa e capacidade de revisão. Essa organização é cientificamente consistente porque a literatura sobre raciocínio combinatório mostra

Quadro 3 – Critérios de avaliação da aprendizagem em análise combinatória.

Critério	Evidências	Instrumentos
Compreensão da estrutura do problema	Identifica se há ordenação, seleção, repetição ou restrição	Discussão oral, itens diagnósticos, prova escrita
Escolha de estratégia adequada	Usa princípio aditivo, multiplicativo, árvore ou listagem de forma coerente	Caderno, resolução no quadro, atividade Wordwall
Uso de representações intermediárias	Constrói árvores, tabelas ou listagens sistemáticas sem duplicação indevida	Produções escritas e observação do professor
Correção do cálculo	Obtém resultado numérico coerente com a estratégia adotada	Listas, prova, digitação de resposta na plataforma
Justificativa matemática	Explica por que determinada contagem é válida	Relatos orais, respostas discursivas, socialização em grupo
Capacidade de revisão após feedback	Reformula a solução ao identificar erros conceituais	Correção comentada, reenvio de atividade, retomadas no Wordwall

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

que as dificuldades não se concentram apenas no cálculo, mas também na identificação do tipo de situação envolvida e na seleção da estratégia adequada.

O critério da compreensão da estrutura é central porque a análise combinatória exige que o estudante reconheça, antes de qualquer operação, se a situação envolve ordenação, seleção, repetição ou restrição. Esse reconhecimento antecede a aplicação de fórmulas e determina a pertinência da estratégia escolhida. Os critérios de escolha de estratégia e uso de representações intermediárias revelam que saber análise combinatória não significa lembrar a fórmula certa, mas ser capaz de decidir entre princípio aditivo, princípio multiplicativo, árvore de possibilidades, tabelas ou listagens, conforme a natureza do problema. Essa perspectiva se aproxima das pesquisas sobre registros de representação semiótica, segundo as quais parte importante das dificuldades em Matemática decorre da passagem confusa entre diferentes formas de representação.

O critério da justificativa matemática fortalece o caráter científico da avaliação, pois desloca o foco da execução para a validação do raciocínio. Explicar por que determinada contagem é válida implica reconhecer condições do problema, explicitar restrições e demonstrar controle conceitual sobre o procedimento. Já o critério de capacidade de revisão após feedback expressa concepção formativa de avaliação: aprender combinatória não é apenas responder corretamente em um primeiro momento, mas conseguir revisar procedimentos, reavaliar hipóteses e reconstruir a solução com base na intervenção pedagógica.

Do ponto de vista ético e pedagógico, convém evitar que os resultados das atividades digitais sejam usados para exposição pública depreciativa. Em turmas com forte heterogeneidade, rankings permanentes tendem a favorecer poucos alunos e desmotivar muitos outros. É mais produtivo utilizar metas coletivas, desafios por equipe e análise conjunta de avanços. Na escola estadual, onde a matemática frequentemente opera como marcador de exclusão simbólica, a avaliação deve ser também instrumento de inclusão intelectual.

A avaliação da aprendizagem em análise combinatória com apoio do Wordwall precisa ser concebida como processo multimodal: digital, escrito, oral, individual e colaborativo. Quando articulada a mediação docente intencional, produz informações mais ricas sobre o desenvolvimento conceitual dos estudantes e favorece intervenções mais precisas. Quando tomada de forma isolada e automatizada, reduz a complexidade do raciocínio combinatório a índices superficiais de desempenho.

4.6.1 Condições de implementação, limites e possibilidades na escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito

Pensar o uso do Wordwall na escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito implica considerar as condições materiais e institucionais em que o ensino acontece. Não se trata de supor uma escola idealizada, plenamente equipada e homogênea, mas de reconhecer a coexistência de cenários muito distintos: salas com projetor e internet estável, laboratórios subutilizados, turmas numerosas, uso restrito de celulares, estudantes com acesso desigual à conectividade e professores com diferentes níveis de familiaridade com recursos digitais. Qualquer proposta didática consistente precisa nascer desse chão concreto.

O Wordwall apresenta vantagens importantes para a rede pública. A possibilidade de utilizar atividades interativas e imprimir versões equivalentes reduz a dependência absoluta da conexão. Um professor pode aplicar um quiz projetado para discussão coletiva em uma

aula e, na aula seguinte, entregar a versão impressa para retomada individual. Pode também organizar rodízios: enquanto um grupo interage na plataforma, outro resolve problemas escritos e um terceiro revisa conceitos em cartões. Esse tipo de arranjo é coerente com a realidade de muitas escolas estaduais, onde a infraestrutura precisa ser compartilhada e otimizada.

Alguns limites merecem explicitação. O primeiro é o risco de superficialização do conteúdo: quando a atividade digital é mal planejada, o aluno pode associar análise combinatória a respostas rápidas, desprovidas de justificativa. O segundo é a ilusão de neutralidade tecnológica: plataformas organizam tempos, feedbacks, formatos de resposta e visibilidades de desempenho, influenciando a dinâmica da aula. O terceiro é a desigualdade de acesso, que pode se manifestar tanto entre escolas quanto dentro da mesma turma. O professor deve assegurar alternativas equivalentes de participação e não condicionar a aprendizagem a recursos privados dos estudantes.

O uso pedagógico do Wordwall exige mais do que domínio operacional da plataforma. Exige saber selecionar problemas, prever erros, escolher modelos compatíveis com o objetivo conceitual, interpretar os dados gerados e integrá-los a outras evidências de aprendizagem. Essa observação é consistente com a literatura sobre tecnologias digitais na educação matemática, que enfatiza a necessidade de articulação entre conhecimento matemático, pedagógico e tecnológico (Borba, Almeida e Chiari, 2015).

Em turmas com estudantes que apresentam dificuldades persistentes em leitura, atenção ou organização do raciocínio, o Wordwall pode ser útil se o professor cuidar da clareza dos enunciados, do tamanho das informações por tela, do contraste visual e do tempo disponível para resposta. A ferramenta pode, porém, tornar-se excludente se usada de modo acelerado, com excesso de estímulos ou sem espaço para apoio colaborativo. Na escola estadual, onde a diversidade é constitutiva, a inclusão não é detalhe metodológico; é parte da qualidade pedagógica.

Há ainda um ganho institucional possível quando as atividades no Wordwall são organizadas como acervo da disciplina. Ao longo de um bimestre, o professor pode construir sequência de materiais reutilizáveis para revisão, recuperação paralela e estudo autônomo. A plataforma conta com ampla biblioteca de recursos criados por professores e permite edição e reaproveitamento de atividades existentes (Wordwall, 2026). Esse reaproveitamento deve ser crítico: materiais encontrados prontos precisam ser revisados quanto à precisão conceitual,

ao nível de dificuldade e à adequação ao currículo efetivamente trabalhado.

O uso do Wordwall na escola estadual CEETI Coronel João Fernandes de Brito é pedagogicamente promissor, mas depende de três condições: intencionalidade didática, adaptação ao contexto e centralidade da mediação docente. Sem essas condições, a ferramenta corre o risco de ser apenas um intervalo lúdico entre momentos expositivos. Com elas, pode tornar-se um meio efetivo de fortalecer o raciocínio combinatório, ampliar a participação dos estudantes e qualificar a avaliação formativa. A escola pública não precisa rejeitar a tecnologia por suas limitações; precisa integrá-la criticamente às finalidades formativas da educação matemática.

Plataformas como o Wordwall, embora versáteis do ponto de vista pedagógico, apresentam limitações concretas de acessibilidade: o uso de cronômetro visível pode ser excludente para estudantes com dislexia ou transtornos de processamento; a dependência de elementos visuais sem descrição alternativa compromete o acesso de estudantes com deficiência visual; a dinâmica de interação por toque ou clique rápido pode ser inacessível a estudantes com limitações motoras. Na escola estadual, onde a diversidade é constitutiva e não exceção, o professor precisa avaliar, caso a caso, se o formato digital proposto é acessível a todos os estudantes da turma.

O Quadro 4 demonstra que a inclusão não é detalhe operacional a ser resolvido no final do planejamento; é critério que orienta as escolhas desde o princípio. A equivalência entre os formatos digital e impresso do Wordwall é, nesse sentido, a vantagem mais relevante para a implementação inclusiva do produto educacional proposto nesta dissertação.

Quadro 4 – Barreiras de acessibilidade do Wordwall e adaptações recomendadas por tipo de necessidade, em conformidade com a Lei Brasileira de Inclusão.

Necessidade / deficiência	Barreira no Wordwall digital	Adaptação recomendada
Dislexia / transtorno de processamento	Cronômetro visível gera ansiedade; textos densos dificultam leitura	Desativar cronômetro; versão impressa com fonte ampliada e espaçamento
Deficiência visual	Elementos visuais sem descrição alternativa; baixo contraste em alguns templates	Uso coletivo com leitura em voz alta; adaptação tátil dos problemas impressos
Limitação motora	Interação por toque ou clique rápido pode ser inacessível	Versão impressa; respostas orais com registro por colega ou professor
TDAH / dificuldade de atenção	Excesso de estímulos visuais simultâneos; transições rápidas entre itens	Blocos curtos de 3 a 4 itens; pausas para síntese entre cada bloco
Dificuldade de leitura	Enunciados longos na tela sem suporte de leitura	Leitura compartilhada em voz alta; enunciados com palavras-chave destacadas

Fonte: Elaborado pelo autor com base em BRASIL (2015) e Wordwall (2026).

Considerações Finais

Ao final deste trabalho, torna-se possível afirmar que o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio exige um deslocamento importante de foco: da simples memorização de fórmulas para a compreensão efetiva das estruturas de contagem, das condições impostas pelos problemas e dos raciocínios que sustentam cada procedimento matemático. Ao longo da dissertação, evidenciou-se que a recorrente dificuldade dos estudantes nesse conteúdo não decorre apenas da complexidade formal dos conceitos, mas, sobretudo, da forma como eles muitas vezes lhes são apresentados, isto é, de modo excessivamente procedimental, fragmentado e orientado pela busca imediata da “fórmula certa”. O próprio trabalho parte dessa crítica ao destacar a distância entre fórmula e compreensão e ao defender uma abordagem em que interpretar, comparar, argumentar e generalizar sejam ações centrais da aula de Matemática.

A principal contribuição desta dissertação está em reafirmar que a Análise Combinatória não deve ser tratada como um conjunto de classificações estanques entre permutação, arranjo e combinação, mas como um campo fértil para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da organização de possibilidades, da leitura atenta de restrições e da tomada de decisão fundamentada. Mais do que saber identificar nomenclaturas, o estudante precisa compreender por que uma situação demanda determinado tipo de contagem, quais relações matemáticas estão em jogo e como justificar a estratégia adotada. Esse reposicionamento didático é fundamental, porque aproxima o conteúdo de sua natureza formativa e contribui para uma aprendizagem mais sólida, reflexiva e duradoura.

A pesquisa também permitiu sustentar que as metodologias ativas, quando compreendidas para além do modismo pedagógico, oferecem um caminho consistente para qualificar o ensino da Matemática. Em vez de reduzir o aluno ao papel de receptor de procedimentos prontos, tais metodologias o colocam em condição de sujeito do processo de aprendizagem, convocando-o a investigar, discutir, testar hipóteses, rever erros e construir significados. No

caso específico da Análise Combinatória, essa perspectiva se mostra especialmente relevante, pois o conteúdo exige leitura cuidadosa, comparação entre casos, identificação de regularidades e elaboração de estratégias. Portanto, tornar a aula mais ativa não significa apenas “dinamizar” a prática pedagógica, mas estruturar situações de aprendizagem em que pensar matematicamente seja uma exigência real do estudante.

A gamificação, discutida ao longo do trabalho, mostrou-se pertinente justamente quando compreendida nessa chave pedagógica. Seu valor não reside na mera inserção de pontuações, rankings ou recompensas, mas no potencial de organizar desafios graduais, favorecer o engajamento, produzir feedbacks mais rápidos e ampliar a participação dos estudantes nas atividades. Em outras palavras, a gamificação só se justifica, no contexto escolar, quando permanece subordinada aos objetivos formativos do ensino. Ao ser articulada ao raciocínio combinatório, ela pode favorecer o envolvimento dos alunos, desde que não substitua a reflexão conceitual pela resposta automática. Essa é uma das teses mais importantes reafirmadas nesta dissertação: o recurso lúdico não deve esvaziar a Matemática, mas servir como mediação para aprofundá-la.

É precisamente nesse ponto que o uso do Wordwall ganha centralidade no trabalho. Conforme se destacou no desenvolvimento da proposta, a plataforma apresenta potencial didático relevante por permitir atividades interativas e imprimíveis, o que a torna adaptável a diferentes realidades escolares. Além disso, alguns de seus formatos favorecem a visualização de categorias, a comparação entre situações, a revisão de conceitos e a identificação rápida de equívocos recorrentes. No caso da Análise Combinatória, isso é particularmente importante, pois muitos erros surgem da confusão entre estruturas semelhantes, da desatenção às restrições do enunciado ou da dificuldade de distinguir quando a ordem importa e quando não importa. Nessa perspectiva, o Wordwall não aparece como fim em si mesmo, mas como instrumento de mediação didática, capaz de apoiar o professor na construção de percursos de aprendizagem mais organizados e formativos.

Entretanto, uma conclusão igualmente importante desta dissertação é a de que nenhuma tecnologia, por si só, garante aprendizagem significativa. O próprio trabalho enfatiza a necessidade de evitar uma “pedagogia da pressa”, em que o ensino se reduza a cliques, respostas rápidas e acertos imediatos. O uso pedagógico do Wordwall precisa estar articulado ao trabalho escrito, à oralidade matemática, à análise de erros e à mediação intencional do professor. Sem isso, a ferramenta corre o risco de funcionar apenas como um intervalo

lúdico entre momentos expositivos, sem efetivamente alterar a qualidade da aprendizagem. Com isso, reafirma-se uma posição fundamental: a centralidade da ação docente permanece indispensável. É o professor quem organiza os desafios, seleciona os exemplos, conduz as discussões, lê os padrões de erro e transforma a atividade em experiência formativa.

A elaboração do produto educacional proposto nesta dissertação responde, portanto, a uma necessidade concreta da prática escolar: oferecer ao professor um roteiro estruturado, replicável e adaptável para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio. Ao propor uma sequência didática com progressão conceitual, problematização, mediação docente, feedback rápido, alternativas impressas e avaliação diagnóstica, formativa e integradora, o trabalho materializa uma proposta que não apenas discute teoricamente a relevância das metodologias ativas e da gamificação, mas as converte em organização pedagógica viável. Esse é um mérito importante da dissertação, pois aproxima a reflexão acadêmica da realidade do chão da escola e do cotidiano do professor de Matemática.

Outro aspecto que merece destaque é o compromisso da proposta com a formação de competências matemáticas mais amplas. Os resultados esperados descritos no trabalho não se limitam ao reconhecimento mecânico de fórmulas, mas incluem a melhora na interpretação de problemas, a distinção entre situações em que a ordem importa ou não, o reconhecimento do uso dos princípios aditivo e multiplicativo, a diferenciação entre permutação, arranjo e combinação, a capacidade de explicar procedimentos oralmente e por escrito, o enfrentamento de problemas com restrições, o desenvolvimento da autonomia e a participação mais ativa nas aulas. Essa amplitude de objetivos reforça o caráter formativo da proposta e evidencia que ensinar Análise Combinatória é, em última instância, ensinar modos de pensar, argumentar e resolver problemas matemáticos com consistência.

Ao mesmo tempo, esta dissertação não ignora os limites concretos de implementação de propostas inovadoras na escola pública. O trabalho reconhece, de forma pertinente, obstáculos como acesso desigual à internet, tempo reduzido de aula, número elevado de estudantes, pressão por um ensino conteudista e tendência de alguns alunos a buscarem respostas rápidas. Ao explicitar esses fatores, o estudo evita idealizações e fortalece sua consistência. Mais do que defender uma inovação abstrata, reconhece que toda proposta pedagógica precisa nascer das condições reais da escola e dialogar com elas. Essa consciência crítica é um dos pontos fortes do trabalho, pois impede que a inserção da tecnologia seja tratada como solução mágica e reafirma a necessidade de adaptação contextual.

Por outro lado, a dissertação também demonstra que tais limites não inviabilizam a proposta. Pelo contrário, ao destacar possibilidades como uso coletivo com projeção, trabalho em duplas, impressão de atividades, reaplicação de questões em formatos distintos, leitura de padrões de erro e combinação entre tecnologia e escrita matemática, o estudo mostra que é possível construir práticas inovadoras mesmo em cenários de restrição. Essa conclusão é pedagogicamente valiosa, porque rompe com a falsa oposição entre inovação e realidade escolar. Inovar, aqui, não significa depender de condições ideais, mas reorganizar inteligentemente os recursos disponíveis em favor de uma aprendizagem mais significativa.

Pode-se afirmar que a dissertação cumpre seu propósito ao defender que o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio pode ser significativamente qualificado quando organizado a partir de uma sequência didática conceitualmente progressiva, metodologicamente ativa e pedagogicamente mediada. O valor da proposta não está apenas no recurso digital utilizado, mas no modo como ele é integrado a uma arquitetura didática que preserva a centralidade da compreensão, da argumentação e da escrita matemática. Ao tratar o Wordwall como meio, e não como fim, o trabalho evita tanto o tecnicismo quanto o deslumbramento tecnológico, oferecendo uma contribuição equilibrada, crítica e aplicável.

A relevância desta pesquisa para o contexto do PROFMAT é evidente. Trata-se de uma dissertação que não se limita à exposição de conteúdos matemáticos nem se restringe a um debate pedagógico genérico. Ao contrário, articula conhecimento matemático, reflexão didática e proposição concreta de intervenção escolar. Essa articulação atende de forma consistente à natureza profissional do programa, uma vez que produz conhecimento vinculado ao ensino de Matemática e, simultaneamente, oferece ao professor uma ferramenta de ação pedagógica fundamentada. Nesse aspecto, o trabalho reafirma o papel do mestrado profissional como espaço de produção de respostas qualificadas para problemas reais da prática docente.

Por fim, conclui-se que ensinar Análise Combinatória com qualidade implica reconhecer que compreender possibilidades é mais importante do que decorar classificações, que errar faz parte da aprendizagem matemática, que a participação ativa do estudante precisa ser intelectualmente exigente e que a tecnologia só adquire sentido educativo quando subordinada à mediação docente e aos objetivos formativos da escola. A proposta construída nesta dissertação aponta exatamente nessa direção. Ela demonstra que é possível transformar a aula de Matemática em um espaço de investigação, comparação, autoria e generalização,

sem perder o rigor conceitual e sem desconsiderar as condições concretas da escola pública.

Esta dissertação reafirma que a Análise Combinatória pode e deve ser ensinada como campo de raciocínio, interpretação e argumentação. Reafirma, também, que metodologias ativas, gamificação e recursos como o Wordwall têm valor quando integrados a uma prática consciente, crítica e intencional. E reafirma, sobretudo, que o professor de Matemática continua sendo o principal agente de transformação da experiência escolar, pois é ele quem converte recursos, estratégias e conteúdos em oportunidades reais de aprendizagem. Nessa perspectiva, o produto educacional elaborado não encerra a discussão, mas abre possibilidades concretas para novas experiências pedagógicas, adaptações contextuais e aprofundamentos futuros no ensino de Matemática.

Referências Bibliográficas

AGUIAR, I. P. *O uso de técnicas de gamificação como auxílio à resolução de problemas no campo da análise combinatória*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática — PROFMAT)) — Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2019.

AMBROZI, L. *Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)) — Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017.

AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003. Tradução de Lígia Teopisto.

AZEVEDO, G. T. d.; MALTEMPI, M. V. Processo formativo em matemática e robótica: construcionismo, pensamento computacional e aprendizagem criativa. *Tecnologias, Sociedade e Conhecimento*, Campinas, v. 7, n. 2, p. 85–107, 2020. Disponível em: <<https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/tsc/article/view/14479>>.

BACICH, L.; MORAN, J. (Ed.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018.

BATANERO, C.; NAVARRO-PELAYO, V.; GODINO, J. D. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, v. 32, n. 2, p. 181–199, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1002954428327>>.

BÓNA, M. *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*. 4. ed. Singapore: World Scientific, 2017. ISBN 978-981-314-884-0.

BORBA, M. d. C.; ALMEIDA, H. R. F. L. d.; CHIARI, A. S. d. S. Tecnologias digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de bolema. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1115–1140, 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/RKWYVzWj5r34qJRWZDt4jKg/>>.

BORBA, R. E. d. S. R.; ROCHA, C. d. A.; AZEVEDO, J. Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348–1368, 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/d78Jmtspzcc9jzGzmBSc4rg/>>.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília, 1996. Diário Oficial da União, Brasília, 23 dez. 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm>. Acesso em: 10 abr. 2026.

BRASIL. *Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015: institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência*. Brasília: [s.n.], 2015. Diário Oficial da União, 7 jul. 2015. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm>. Acesso em: 10 abr. 2026.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 10 abr. 2026.

BRASIL. *Decreto nº 11.713, de 26 de setembro de 2023. Institui a Estratégia Nacional de Escolas Conectadas*. Brasília, 2023. Diário Oficial da União, Brasília, 27 set. 2023. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2023/decreto/D11713.htm>. Acesso em: 10 abr. 2026.

BRASIL. *Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023. Institui a Política Nacional de Educação Digital*. Brasília, 2023. Diário Oficial da União, Brasília, 12 jan. 2023. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2023/lei/l14533.htm>. Acesso em: 10 abr. 2026.

BRITO, C. E.; ALMEIDA, L. M. A utilização da gamificação na aprendizagem de análise combinatória: possibilidades atreladas ao uso do h5p e do wordwall. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática*, v. 6, n. 1, 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/38185>>.

BRUALDI, R. A. *Introductory Combinatorics*. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 978-0-13-602040-0.

BURTON, D. M. *The History of Mathematics: An Introduction*. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2010. ISBN 978-0-07-338315-6.

CAMPOS, C. E. d.; IGLIORI, S. B. C. Teses e dissertações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória: perspectivas investigativas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 16, p. 1–20, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/79022>>.

COELHO, L. D. O.; DIAS, M. S. S. Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 13, n. 2, p. 223–249, 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/253725>>.

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO (CNPq). *Portaria CNPq nº 2.664, de 6 de março de 2026: institui a Política de Integridade na Atividade Científica do CNPq*. Brasília: Conselho Nacional de Desenvolvimento

Científico e Tecnológico, 2026. Disponível em: <<https://www.gov.br/cnpq/pt-br>>. Acesso em: 2 jun. 2026.

DURO, M. L.; BECKER, F. Análise combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, v. 40, n. 3, p. 859–882, 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/edreal/a/Nr4NbXRtnFJzWdJN4TVj49F/>>.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. ISBN 0-201-55802-5.

INEP. *Matrizes de referência para a avaliação: documento básico*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas>>. Acesso em: 10 abr. 2026.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012.

LINT, J. H. van; WILSON, R. M. *A Course in Combinatorics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 978-0-521-00601-9.

LOCKWOOD, E. A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, v. 32, n. 2, p. 251–265, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.008>>.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, v. 108, n. 6, p. 1017–1054, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>>.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. d. S. R.; BITTAR, M. Representações intermediárias na aprendizagem de situações combinatórias. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, v. 45, n. 1, p. e87693, 2020. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/edreal/a/vcz8mfdGpTk9spZJnHPtQpg/?lang=pt>>.

MORAN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, C. A. d.; MORALES, O. E. T. (Ed.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens*. Ponta Grossa: UEPG/PROEX, 2015. p. 15–33.

MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios*. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

OINHAS, M.; ZANON, T. X. D.-C. Revisão sistemática de dissertações do profmat: um diálogo entre combinatória e tecnologias digitais. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 16, p. 1–21, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/82303>>.

PASCAL, B. *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traiteux sur la mesme matière*. Paris: Guillaume Desprez, 1665. Obra histórica sobre o triângulo aritmético, coeficientes binomiais e contagem.

RYAN, R. M.; DECI, E. L. Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, v. 55, n. 1, p. 68–78, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68>>.

SILVA, D. P. d.; GUERRA, E. A. A aprendizagem de análise combinatória no ensino médio: uma proposta didática por meio da resolução de problemas. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 3, n. 2, p. 40–51, 2017. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2346>>.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Ed.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

STANLEY, R. P. *Enumerative Combinatorics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. v. 1. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49). ISBN 978-1-107-60262-5.

TUCKER, A. *Applied Combinatorics*. 6. ed. Hoboken: Wiley, 2012. ISBN 978-0-470-45838-9.

UNESCO. *Relatório GEM 2023: a tecnologia na educação — uma ferramenta em quem os termos?* Paris: UNESCO, 2023. Disponível em: <<https://www.unesco.org/gem-report/en/2023>>. Acesso em: 10 abr. 2026.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WORDWALL. *Printables*. Londres: Wordwall Net Limited, 2026. Disponível em: <<https://wordwall.net/features/printables>>. Acesso em: 15 abr. 2026.

ZHU, S. *Yang Hui Triangle from Si Yuan Yu Jian*. 1303. Imagem histórica em domínio público, Wikimedia Commons. Representação histórica do triângulo aritmético conhecido como Triângulo de Yang Hui.