



Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - POSGRAP
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT
Mestrado em Matemática

Uma equação do Calor Semilinear com uma reação localizada e dados iniciais não contínuos

Poliano Fagundes dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO – SE
ABRIL DE 2026

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - POSGRAP
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Uma equação do Calor Semilinear com uma reação localizada e dados iniciais não contínuos

por

Poliano Fagundes dos Santos

sob a orientação de

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana

São Cristóvão – SE
Abril de 2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma equação do Calor Semilinear com uma reação localizada e dados iniciais não contínuos

por

Poliano Fagundes dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **ARLUCIO DA CRUZ VIANA**
Data: 19/05/2026 18:38:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana - UFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
 **GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA**
Data: 20/05/2026 18:03:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Primeiro(a) Examinador(a)

Documento assinado digitalmente
 **MARIA ELISMARA DE SOUSA LIMA**
Data: 20/05/2026 18:11:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Maria Elismara de Sousa Lima - SEED
Segundo(a) Examinador(a)

São Cristóvão, 19 de Maio de 2026

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237e Santos, Poliano Fagundes dos.
Uma equação do calor semilinear com uma reação localizada e dados iniciais não contínuos / Poliano Fagundes dos Santos; orientador Arlúcio da Cruz Viana. - São Cristóvão, SE, 2026.
72 f.: il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2026.

1. Equação de calor. 2. Green, Funções de. 3. Sobolev, Espaço de.
I. Viana, Arlúcio da Cruz, orient. II. Título.

CDU 517.956

Agradecimentos

Obrigado, Senhor, por manter a chama da vida acesa e por iluminar cada caminho seguido! Esta longa trilha teve várias etapas e muitos desafios em cada uma delas. Durante esse processo aprendi muitas coisas. O aprendizado humano foi o maior deles. Sendo assim, registro aqui a minha gratidão:

- A minha família por, de forma iluminada, manter a minha saúde emocional.
- A todos professores e professoras do departamento de matemática da Universidade Federal de Sergipe em especial a meu orientador Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana pelos conselhos, paciência e sabedoria na condução deste trabalho.
- Aos amigos e colegas do PROMAT que sempre se fizeram presentes nesta caminhada, dentre eles Keity, Jamisson, Gustavo, Allefy e Amanda.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Apoio à Pesquisa e Extensão de Sergipe (FAPES) Projeto de Desenvolvimento de metodologia para o cálculo do Produto Interno Bruto - SEFAZ PIB SERGIPANO- CV. 06/2022.

Resumo

Nesta dissertação estuda-se uma equação do calor semilinear com um termo não linear que representa uma reação concentrada em uma região fechada de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio suave e limitado ou todo o espaço $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. O trabalho é baseado no artigo [9], que permite considerar dados iniciais não contínuos.

Inicialmente são apresentados os conceitos e ferramentas preliminares necessários, incluindo funções especiais, resultados de teoria da medida, espaços de Lebesgue $L^r(\Omega)$, com $1 < r < \infty$. Posteriormente, estuda-se a equação do calor linear, a função de Green associada e são obtidas estimativas lineares fundamentais no domínio e na fronteira, essenciais para o tratamento do termo não linear localizado. Finalizamos demonstrando o resultado principal do trabalho o qual estabelece a existência local no tempo, a unicidade das soluções, a dependência contínua em relação aos dados iniciais e a preservação da positividade, por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Palavras-chave: Equação do calor semilinear; reação não linear localizada; dados iniciais não contínuos; função de Green; existência e unicidade.

Abstract

This dissertation studies a semilinear heat equation with a nonlinear term representing a concentrated reaction in a closed region of $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a smooth and bounded domain, or the entire space $\mathbb{R}^n$, with $n \geq 2$. The work is based on the article [9], which allows for the consideration of non-continuous initial data.

We first present the preliminary concepts and analytical tools required for the development of the theory, including special functions, results from measure theory, and Lebesgue spaces $L^r(\Omega)$, with $1 < r < \infty$. We then study the linear heat equation and the associated Green's function, deriving fundamental linear estimates in both the interior of the domain and on the boundary, which are essential for handling the localized nonlinear term. Finally, we establish the main result of the dissertation, proving local-in-time existence, uniqueness of solutions, continuous dependence on the initial data, and preservation of positivity by means of Banach's Fixed Point Theorem.

Keywords: Semilinear heat equation; localized nonlinear source; non-continuous initial data; Green's function; existence and uniqueness.

Lista de Figuras

2.1	Interpretação de $A_1 \cap B^c$ em $\mathbb{R}^2$	40
-----	---	----

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares	14
1.1 Espaço L^p e de Sobolev	14
1.2 Distribuições	23
1.3 Espaço funcional	25
2 Funções de Green e estimativas em L^p	31
2.1 A função de Green	31
2.1.1 Função de Green em domínios limitados	33
2.2 Estimativas lineares para a função de Green	38
2.2.1 Estimativa para a função de Green na fronteira ∂B	38
2.2.2 Estimativa em L^p para a parte linear	44
3 Equação do Calor com Reação Localizada	51
3.1 Existência e Unicidade	55
3.1.1 Prova da Parte (i) (Existência e Unicidade)	57
3.1.2 Prova da Parte (ii) (Dependência contínua em relação aos dados)	66
3.1.3 Prova da Parte (iii) (Positividade)	67
3.1.4 Conclusão	69
4 Apêndice	70

Introdução

A equação do calor ocupa um lugar central na teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDP), constituindo um dos modelos fundamentais, pois ajuda a descrever a evolução no tempo de quantidades como: calor, concentração química, dispersão de gases e velocidade de fluidos. A formulação matemática clássica da equação do calor que descreve a evolução temporal da temperatura pode ser encontrada em [8], e se dá do seguinte modo. Seja $\Omega \subset U$ é uma sub-região suave, a taxa de variação da quantidade de calor em Ω é igual ao fluxo negativo através de $\partial\Omega$. Assim,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS, \quad (1)$$

em que $\mathbf{F}$ é a densidade de fluxo e ν denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Pelo teorema da divergência, da Equação (1), obtemos a equação

$$u_t = -\operatorname{div}(\mathbf{F}). \quad (2)$$

Quando o fluxo é proporcional ao gradiente de u , isto é,

$$\mathbf{F} = -a\nabla u,$$

com $a > 0$, dizemos que o fluxo satisfaz a Lei de Fourier, segundo a qual o calor flui das regiões mais quentes para as mais frias. Substituindo essa relação na Equação (2), obtemos

$$u_t = a \operatorname{div}(\nabla u) = a\Delta u. \quad (3)$$

Em particular, quando $a = 1$, obtemos a equação do calor linear

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (4)$$

cujo núcleo do calor (ou solução fundamental) é dado por uma função gaussiana para $t > 0$ e por uma distribuição delta de Dirac em $t = 0$. Como descrito na seção 1.2.

A partir disso, surge o estudo da equação do calor semilinear, na qual o operador difusivo linear é preservado, mas passa a coexistir com um termo não linear dependente

da própria solução. Neste caso, o modelo típico é dado por

$$u_t - \Delta u = |u|^{\rho-1}u, \quad \text{onde } \rho > 1. \quad (5)$$

Este termo representa a contribuição do processo de reação dentro do sistema. Em geral podemos considerar uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por exemplo, que seja localmente Lipschitziana.

Entretanto, diversos fenômenos físicos, biológicos e químicos que descrevem difusão-reação não podem ser adequadamente descritos apenas por termos distribuídos de maneira regular no domínio, isto é, a reação pode ocorrer apenas em locais específicos do meio, ou mesmo reações concentradas em pontos. Um exemplo de reação-difusão unidimensional localizada é descrito pela referência [2], onde os autores Bimpong-Bota e Ortoleva e Ross indicam que o processo de reação ocorre somente em alguns pontos, devido à presença da catálise. Sua equação é

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \delta(x) f(u(x, t)), & \text{em } \Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

onde $\delta(x)$ denota a distribuição delta de Dirac, para um domínio limitado Ω .

Para o caso n -dimensional o modelo inicialmente proposto por Chadam e Yin em [5] é dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \mathcal{F}f(u), & \text{em } (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) = 0, & \text{em } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } x \in \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

onde $\mathcal{F} : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional definido por

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}g(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) ds, \quad g(x) \in C(\overline{\Omega}). \quad (8)$$

No entanto, como aponta Chadam e Yin em [5] o problema (6) não está bem definido para $n \geq 2$, devido à singularidade da distribuição delta de Dirac.

Assim, com o objetivo de modelar fenômeno descrito em várias dimensões espaciais, usamos o seguinte fato motivador. Para $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}H(x), \quad (9)$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside. Nesse caso, se B é uma bola em $\mathbb{R}^n$, a generalização do termo de reação consiste em substituir $\delta(x)$ por

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \chi_B, \quad (10)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada normal interior na fronteira $x \in \partial B$ e χ_B é a função característica de B .

A existência de soluções para equações reação-difusão com condições iniciais singulares é de interesse crescente desde o trabalho de Brézis e Cazenave [4]. Por exemplo, destacamos a importância do artigo de Lucas Ferreira e Villamizar-Roa [9], em que os autores utilizaram o ferramental técnico contido no artigo de Brézis e Cazenave [4] cuja diferença está no fato que Ferreira e Villamizar-Roa consideram o caso sem o termo não-linear localizado. Mais precisamente, o trabalho de Brézis e Cazenave [4] trata equações do calor semilineares admitindo dados iniciais singulares, isto é, pertencentes apenas a espaços $L^q(\Omega)$, sem exigir regularidade positiva no instante inicial. O artigo de Lucas Ferreira e Elder Villamizar-Roa [9] considera uma fonte não linear localizada e dados iniciais não contínuos. Nesse último artigo, os espaços funcionais também não exigem regularidade positiva no interior do domínio e permitem prescrever um dado volumétrico e um dado de fronteira, estendendo a noção clássica de operador traço. Como consequência da presença do termo localizado, foram necessárias mais estimativas para a função de Green para [9] do que no caso onde o termo não aparece.

Explicitamente, o objetivo deste trabalho consiste em obter soluções locais nos espaços de Lebesgue $L^r(\Omega)$ com $1 < r < \infty$, para o problema de valor inicial (PVI), que será descrito a seguir. Antes fixamos a notação necessária. Seja $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave limitado ou todo o espaço $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Seja B a bola aberta $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ de raio R , centrada na origem, com fronteira ∂B , de modo que $\overline{B} \subset \Omega$. Além disso, seja $\nu(x)$ o vetor normal interior unitário para $x \in \partial B$ e $\chi_B(x)$ a função característica de B . Estamos interessados no seguinte (PVI) para a equação do calor semilinear com um termo de reação não linear localizado

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{\partial \chi_B(x)}{\partial \nu} f(u(x, t)), & \text{em } \Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (11)$$

complementado pela condição de fronteira homogênea

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, t) \rightarrow 0, & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \quad 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (12)$$

dependendo do tipo de domínio Ω . No Sistema (11), o vetor normal $\nu(x)$ é estendido para um campo vetorial definido em todo o domínio Ω . Na presente dissertação, estudamos a existência da solução local usando o argumento do ponto fixo de Banach. A contribuição desta dissertação encontra-se no estudo reação não localizadas, particularmente interessantes por modelar fenômenos concentrados em interfaces, membranas ou superfícies, aparecendo em diversas aplicações físicas e tecnológicas. Além disso, a abordagem desenvolvida nesta dissertação evidencia a interação entre análise funcional, teoria das

distribuições, espaços de Sobolev e EDP. Outra contribuição da presente consiste no detalhamento das demonstrações artigo [9], bem como a reunião dos resultados preliminares possibilitando uma leitura autocontida.

No Capítulo 1, apresentamos os principais conceitos e fatos gerais que serão utilizados no decorrer do trabalho. Em especial, as definições, desigualdades tipicamente estudadas em um curso de Medida e Integração, tais como as desigualdades de Hölder, Young, dentre outras, e alguns resultados de Análise Funcional. No Capítulo 2, começamos estudando a expansão em autofunções espaciais, bem como a função de Green. Definimos o espaço onde se busca a solução e provamos as estimativas para função de Green. Por fim, no Capítulo 3, apresentamos a existência e unicidade para o problema proposto. Como consequência do uso do Teorema do Ponto fixo de Banach, é possível provar a positividade das soluções, quando a condição inicial for positiva e a não linearidade preservar positividade.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo, tem como objetivo apresentar os resultados necessários para o entendimento dos resultados posteriores dessa dissertação, dentre eles, trouxemos as definições e resultados do Espaço L^p e de Sobolev. Ainda aqui, reunimos resultados da teoria da medida os quais encontram-se no livro do Gerald B. Folland [10], bem como, as definições e resultados relacionados a distribuições.

1.1 Espaço L^p e de Sobolev

Nesta seção, trazemos as principais definições e resultados sobre espaços L^p e de Sobolev. Iniciaremos lembrando a definição e alguns fatos básicos sobre espaços de Banach.

Definição 1.1. *Um espaço normado E é chamado de espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado. Assim como no caso do corpo dos escalares, um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

O próximo resultado mostra que o produto cartesiano de n espaços de Banach é um Espaço de Banach.

Proposição 1.1. *Sejam $E_1, E_2, \dots, E_n$ espaços de Banach. Então o produto cartesiano*

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

é um espaço de Banach quando munido de sua norma usual.

Demonstração. Consultar o livro [1] p.22. □

O resultado abaixo é deixado como exercício na p.38 do livro [3]. Ele é importante em Análise Funcional por que ele mostra que a propriedade de completude é preservada. Nós usaremos esse resultado na demonstração da Proposição 1.7.

Proposição 1.2. *Se um espaço normado E é isomorfo a um espaço de Banach F , então E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Como E é isomorfo a F , existe uma aplicação linear bijetiva

$$T : E \longrightarrow F$$

tal que T e T^{-1} são contínuas. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E . Mostremos que (x_k) converge em E . Afirmamos que a sequência (Tx_k) é de Cauchy em F . De fato, como T é linear e contínua, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Logo, para quaisquer $k, m \in \mathbb{N}$,

$$\|Tx_k - Tx_m\|_F = \|T(x_k - x_m)\|_F \leq C\|x_k - x_m\|_E.$$

Como (x_k) é uma sequência de Cauchy em E , segue que (Tx_k) é uma sequência de Cauchy em F . Como F é um espaço de Banach, isto é, completo, existe $y \in F$ tal que

$$Tx_k \longrightarrow y \quad \text{em } F.$$

Como T é bijetiva, existe $x \in E$ tal que

$$x = T^{-1}(y).$$

Além disso, como T^{-1} é contínua, existe uma constante $C' > 0$ tal que

$$\|T^{-1}z\|_E \leq C'\|z\|_F, \quad \forall z \in F.$$

Aplicando essa desigualdade a $z = Tx_k - y$, obtemos

$$0 \leq \|x_k - x\|_E = \|T^{-1}(Tx_k) - T^{-1}(y)\|_E = \|T^{-1}(Tx_k - y)\|_E \leq C'\|Tx_k - y\|_F,$$

onde C' não depende de z . Como $\|Tx_k - y\|_F \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, concluímos utilizando o Teorema do Confronto para sequência que $\|x_k - x\|_E \rightarrow 0$, isto é, $x_k \longrightarrow x$ em E . Portanto, toda sequência de Cauchy em E converge em E , e assim E é completo. Concluímos que E é um espaço de Banach. $\square$

Definição 1.2. Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

A partir daqui todos os resultados desta seção encontram-se no livro de Medida e Integração do autor Gerald B. Folland [10]. O par $(X, \mathcal{M})$ é chamado de espaço mensurável, os subconjuntos de $\mathcal{M}$ são os conjuntos mensuráveis e $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é o espaço de medida.

Definição 1.3. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

- Se $\mu(X) < \infty$, dizemos que μ é uma medida finita.
- Se $X = \bigcup E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$, onde $\mu(E_j) < \infty$, para todo $j \in \mathbb{N}$, dizemos que μ é σ -finita.

Definição 1.4. Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espaços de medida. Dizemos que $f: X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável se

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{M},$$

para todo $E \in \mathcal{N}$

Os espaços L^p formam uma classe de espaços de Banach de funções cujas normas são dadas como na definição abaixo.

Definição 1.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável, definimos a relação de equivalência

$$f \sim g \iff f = g \quad q.t.p..$$

O espaço $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ como sendo o espaço

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\} / \sim.$$

dotado da norma, para $0 < p < \infty$, $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p},$$

e, para $p = \infty$,

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{c : |f(x)| \leq c \quad q.t.p. \quad \Omega\}.$$

O número q é chamado expoente conjugado de p e definido, por

$$(a) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ se } 1 < p < \infty.$$

$$(b) \quad q = 1 \text{ se } p = \infty \text{ e } q = \infty \text{ se } p = 1.$$

Proposição 1.3 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Ver p.182 de [10]. $\square$

A proposição abaixo é uma generalização do resultado anterior, e foi deixada como exercício na p.196 do livro do Folland [10].

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Suponha que $1 \leq p_j \leq \infty$ e que $\sum_{j=1}^n p_j^{-1} = r^{-1} \leq 1$. Se $f_j \in L^{p_j}$ para $j = 1, \dots, n$, então $\prod_{j=1}^n f_j \in L^r$ e*

$$\left\| \prod_{j=1}^n f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{p_j}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n .

Se $n = 1$, então $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1}$, isto é, $r = p_1$. Como $f_1 \in L^{p_1}$, temos $\prod_{j=1}^1 f_j = f_1 \in L^r$ e

$$\left\| \prod_{j=1}^1 f_j \right\|_r = \|f_1\|_{p_1} = \prod_{j=1}^1 \|f_j\|_{p_j},$$

logo a desigualdade é verdadeira.

Para $n = 2$. A desigualdade de Hölder dada pela Proposição 1.3 garante que, se $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r} \leq 1$, então

$$\|f_1 f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}.$$

Suponha que a desigualdade vale para algum $n - 1 \geq 2$, isto é, se

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r'} \leq 1,$$

então

$$\left\| \prod_{j=1}^{n-1} f_j \right\|_{r'} \leq \prod_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_{p_j}.$$

Queremos provar o resultado para n . Note que,

$$\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{p_j} \right) + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{p_n}.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder (para o caso $n = 2$), temos

$$\left\| \left(\prod_{j=1}^{n-1} f_j \right) f_n \right\|_r \leq \left\| \prod_{j=1}^{n-1} f_j \right\|_{r'} \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$

Aplicando a hipótese de indução concluímos

$$\left\| \prod_{j=1}^n f_j \right\|_r \leq \left(\prod_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_{p_j} \right) \cdot \|f_n\|_{p_n} = \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{p_j}.$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. $\square$

Proposição 1.5. *Seja (X, μ) um espaço de medida tal que $\mu(X) < \infty$ e sejam $0 < p < q \leq \infty$. Então vale a inclusão*

$$L^q(\mu) \subset L^p(\mu),$$

e, além disso, para toda função $f \in L^q(\mu)$, tem-se a estimativa

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}. \quad (1.1)$$

Demonstração. Ver p.186 de [10]. $\square$

Teorema 1.1 (Convergência monótona). *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em L^+ e*

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

então

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (1.2)$$

Demonstração. Ver p.50 de [10]. $\square$

Teorema 1.2. *Seja (f_n) uma sequência em L^1 tal que*

(a) $f_n \rightarrow f$ q.t.p.;

(b) *existe uma função não negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p., para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Então $f \in L^1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Demonstração. Ver pag.55 de [10]. $\square$

A definição de convolução abaixo é importante em Análise e EDP, pois é utilizada para suavizar funções e representar soluções de equações lineares, como a equação do calor, via núcleos integrais.

Definição 1.6. *Sejam f e g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

para todo x tal que a integral exista.

Várias condições podem ser impostas sobre f e g para garantir que $f * g$ esteja definida. Por exemplo, se f for limitada e de suporte compacto, g pode ser qualquer função localmente integrável.

Proposição 1.6 (Desigualdade de Young). *Suponha que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Essa desigualdade encontra-se demonstrada na p.241 do livro [10]. $\square$

Definição 1.7. *Se f é uma função mensurável em $(X, \mathcal{M}, \mu)$, definimos a sua função de distribuição*

$$\lambda_f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

por

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Daí, podemos utilizá-la do seguinte modo.

Definição 1.8. *Se f é uma função mensurável em X e $0 < p < \infty$, definimos*

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \right)^{1/p}.$$

O espaço L^p -fraco é o conjunto de todas as funções f tais que $[f]_p < \infty$.

Note que, o $[\cdot]_p$ não define uma norma, pois falha a desigualdade triangular. Existe a seguinte relação entre L^p e o L^p -fraco

$$L^p \subset L^p\text{-fraco}, \quad \text{e} \quad [f]_p \leq \|f\|_p. \quad (1.3)$$

Passamos agora a terminologia necessária para o entendimento do Teorema 1.3. Seja T uma aplicação de um espaço vetorial $\mathcal{D}$ de funções mensuráveis em $(X, \mathcal{M}, \mu)$ no espaço de todas as funções mensuráveis em $(Y, \mathcal{N}, \nu)$.

- Dizemos que T é sublinear se

$$|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg| \quad \text{e} \quad |T(cf)| = c|Tf|$$

$\forall f, g \in \mathcal{D}$ e todo $c > 0$.

- Uma aplicação sublinear T é dita do tipo forte (p, q) , com $1 \leq p, q \leq \infty$, se $L^p(\mu) \subset \mathcal{D}$, tal que, $T : L^p(\mu) \longrightarrow L^q(\nu)$, e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

- Uma aplicação sublinear T é dita do tipo fraco (p, q) , com $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$, se $L^p(\mu) \subset \mathcal{D}$, tal que, $T : L^p(\mu) \longrightarrow L^{q,\infty}(\nu)$, (espaço fraco de Lebesgue), e existe $C > 0$ tal que

$$[Tf]_{q,\infty} \leq C\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

Além disso, dizemos que T é do tipo fraco $(p, \infty) \iff T$ é do tipo forte (p, ∞) .

O Teorema abaixo é importante pois foi utilizado nas demonstrações dos Lemas 2.3 e 2.4 e encontra-se demonstrado na p.206 da referência [10].

Teorema 1.3. *Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sejam espaços de medida σ -finitos, e $1 < q < \infty$. Seja K uma função mensurável em $X \times Y$ tal que, para algum $C > 0$, temos $[K(x, \cdot)]_q \leq C$ q.t.p. em $x \in X$ e $[K(\cdot, y)]_q \leq C$ q.t.p em $y \in Y$. Se $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in L^p(\nu)$, a integral*

$$T\varphi(x) = \int K(x, y)\varphi(y)d\nu(y),$$

converge absolutamente q.t.p. em $x \in X$, e o operador T assim definido é do tipo fraco $(1, q)$ e do tipo forte (p, r) para todos p, r tais que $1 < p < r < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Mais precisamente, existem constantes B_p independentes de K tais que

$$[T\varphi]_q \leq B_1 C \|\varphi\|_1, \quad \|T\varphi\|_r \leq B_p C \|\varphi\|_p \quad (p > 1, \quad r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 > 0).$$

A seguir, vamos fixar algumas notações. Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotamos o conjunto das funções reais contínuas definidas em Ω por

$$C(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é contínua em } \Omega\}.$$

Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é um inteiro não negativo, um *multi-índice* α de ordem k é uma n -upla

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

tal que

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O número $|\alpha|$ acima é chamado *ordem do multi-índice* α . Se $|\alpha| \geq 1$ e $u \in C(\Omega)$, denotamos

$$D^\alpha u := \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

quando a derivada mista do lado direito acima existe. A fim de facilitar a notação escrevemos ainda $D^\alpha u = u$ quando $|\alpha| = 0$. Observe que $D^\alpha u$ é uma função definida em Ω que toma valores em $\mathbb{R}$. Quando u possui todas as derivadas mistas de ordem k escrevemos

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : \alpha \text{ é um multi-índice de ordem } k\}.$$

Estabelecendo algum tipo de ordem para as derivadas mistas acima, $D^k u(x)$ pode ser visto como um vetor de $\mathbb{R}^{n^k}$.

Como forma de motivação para definir a derivada fraca, considere $u \in C^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste. O Teorema da Divergência nos permite integrar por partes para obter (cf. Teorema 4.2 no Apêndice)

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \varphi(x) n^i d\sigma_x = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi,$$

em que usamos, na última igualdade, o fato de que $\varphi = 0$ em $\partial\Omega$. De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, podemos escrever

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi D^\alpha u. \quad (1.4)$$

Para que o lado esquerdo da expressão acima faça sentido, basta supor que $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. De fato, se este for o caso e denotarmos por $K_\varphi \subset\subset \Omega$ o suporte da função φ , temos que

$$\left| \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \right| = \left| \int_{K_\varphi} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \right| \leq \|D^\alpha \varphi\|_\infty \int_{K_\varphi} |u(x)| dx < \infty.$$

As considerações acima motivam a seguinte definição

Definição 1.9. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e um multi-índice α , dizemos que $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ é uma α -ésima derivada fraca de u se*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.5)$$

Essencialmente, a definição acima diz que uma derivada fraca é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes.

Definição 1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Define-se o espaço de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ denota a derivada fraca de ordem α .

Para $1 \leq p < \infty$, a norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Observação 1. Observe que, a norma associada ao espaço de Sobolev para $n = 1$ é

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \quad (1.6)$$

Observação 2. Note que, tomando $m = 0$ e $p = 2$ na definição dos espaços de Sobolev temos

$$L^2(\Omega) := W^{0,2}(\Omega).$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

e da norma associada

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Com essa estrutura, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Observação 3 (Espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto. Define-se o espaço de Sobolev

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\},$$

onde as derivadas são tomadas no sentido das distribuições.

Definição 1.11 (Condição de Dirichlet homogênea). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto. Dizemos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Dirichlet homogênea em Ω se

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Definição 1.12 (Espaço $H_0^1(\Omega)$). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto. Define-se o espaço

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

isto é, o fecho do espaço das funções suaves com suporte compacto em Ω com respeito à norma de $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.4 (Teorema do Traço). Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um domínio limitado e que $\partial\Omega$ seja de classe C^1 . Se $1 \leq p < \infty$, então existe um operador linear contínuo

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

$$(i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega}, \text{ se } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega});$$

(ii) existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e de Ω , tal que

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja p.258 [8]. □

Teorema 1.5 (Autovalores do Laplaciano de Dirichlet). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto, limitado, com fronteira de classe C^1 . Considere o operador*

$$L = -\Delta,$$

com condição de Dirichlet homogênea.

(i) *Todo autovalor de L é real.*

(ii) *Além disso, repetindo cada autovalor de acordo com sua multiplicidade finita, o espectro de L é dado por*

$$\Sigma = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty},$$

onde

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lambda_j \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

(iii) *Finalmente, existe uma base ortonormal $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$ tal que $\varphi_j \in H_0^1(\Omega)$ é uma autofunção associada a λ_j , isto é,*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j & \text{em } \Omega, \\ \varphi_j = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver p.335 da referência [8]. □

1.2 Distribuições

Nesta seção, recordaremos os conceitos e algumas definições básicas sobre a teoria das distribuições. Nós reunimos somente as propriedades utilizadas nesta dissertação.

Definição 1.13 (Suporte de uma função). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se o suporte de f por*

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.14 (Função-teste em $\mathbb{R}^n$). *Uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função-teste se satisfaz*

1. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, isto é, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, a derivada $\partial^\alpha \varphi$ existe em $\mathbb{R}^n$;
2. existe $A > 0$ tal que

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{para todo } |x| > A.$$

Denotamos por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções-teste em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.15 (Distribuição). *Um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamado de distribuição em $\mathbb{R}^n$.*

O número $\langle T, \varphi \rangle$ denota a ação do funcional T sobre a função teste φ . Denotamos o espaço das distribuições por

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \{T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Pela definição de distribuição, para toda sequência $(\varphi_m) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_m \longrightarrow 0 \quad \text{em } C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

tem-se

$$\langle T, \varphi_m \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Podemos estabelecer o seguinte. Se

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

então o produto $g\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, daí temos que

$$\langle fg, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\varphi(x)dx = \langle f, g\varphi \rangle.$$

Similarmente, se

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

define-se o produto da distribuição T pela função suave f como a distribuição

$$fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para toda função teste

$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

vale

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle. \tag{1.8}$$

Definição 1.16 (Função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$). *Dizemos que $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ se $\int_K |f| < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Definição 1.17. *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Define-se a distribuição associada a f pelo funcional*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Uma distribuição obtida dessa forma é chamada de distribuição regular.

Exemplo 1.1 (Distribuição de Dirac em $\mathbb{R}^n$). *Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixo. Considere o funcional linear*

$$\delta_\xi : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \delta_\xi, \varphi \rangle := \varphi(\xi),$$

isto é, δ_ξ associa a cada função teste φ o seu valor no ponto ξ .

Vamos verificar que δ_ξ é de fato uma distribuição. Esse funcional é claramente linear. Além disso, se $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência nula (isto é, $\varphi_m \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$), então $\varphi_m(\xi) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Logo, δ_ξ é contínuo e, portanto, define uma distribuição

$$\delta_\xi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Essa distribuição é chamada distribuição de Dirac n -dimensional e escrevemos, simbolicamente,

$$\langle \delta_\xi, \varphi \rangle = \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_\xi(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.9)$$

No caso particular, $\xi = 0$, denotamos δ_0 simplesmente por δ .

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a translação de f por um vetor $a \in \mathbb{R}^n$ é a função localmente integrável $f(x - a)$. Nesse caso, vale

$$\langle f(x - a), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - a) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x + a) dx = \langle f(x), \varphi(x + a) \rangle,$$

para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.18. *Define-se uma translação $T(x - a)$ de uma distribuição arbitrária T por*

$$\langle T(x - a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x + a) \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.10)$$

Em particular, para a delta de Dirac, tem-se

$$\langle \delta(x - \xi), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + \xi) \rangle = \varphi(\xi). \quad (1.11)$$

1.3 Espaço funcional

A seguir, descrevemos o espaço funcional onde provaremos a existência de soluções para problema da valor inicial e de fronteira (11)(12). Em vista da formulação integral

$$u(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi d\tau,$$

e da natureza da reação não linear localizada $\frac{\partial \chi_B(x)}{\partial \nu_B} f(u)$, precisamos de um espaço que inclua alguma informação sobre $u|_{\partial B}$, em que a bola aberta $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ de raio R , centrada na origem, com fronteira ∂B , seja tomado de modo que $B \subseteq \Omega$. Como nos interessa considerar dados $u_0 \in L^r(\Omega)$, consideramos um espaço que definido a seguir.

Definição 1.19. *Considere os espaços de medida $(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, dx)$ e $(\partial B, \mathcal{L}_{\partial B}, d\sigma)$, onde dx é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $d\sigma$ é a medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional em ∂B .*

Denote por $\mathcal{A}$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} f \text{ é } \mathcal{L}_\Omega\text{-mensurável, e} \\ f|_{\partial B} \text{ é } \mathcal{L}_{\partial B}\text{-mensurável} \end{array} \right\}.$$

Para $f, g \in \mathcal{A}$, dizemos que $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ q.t.p. em $(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, dx)$ e $f|_{\partial B} = g|_{\partial B}$ q.t.p. em $(\partial B, \mathcal{L}_{\partial B}, d\sigma)$.

Definição 1.20. *Sejam $1 < q, b < \infty$, definimos o espaço $X_{b,q}$ como o conjunto de todas as funções $f \in \mathcal{A} / \sim$ tais que*

$$\|f\|_{X_{b,q}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^b dx \right)^{1/b} + \left(\int_{\partial B} |f(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} < \infty. \quad (1.12)$$

Proposição 1.7. *O espaço $X_{b,q}$, dotado da norma (1.12), pode ser identificado isometricamente, com $L^b(\Omega) \times L^q(\partial B)$, e o par $(X_{b,q}, \|\cdot\|_{X_{b,q}})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. De fato, definimos o espaço $Y = L^b(\Omega) \times L^q(\partial B)$ com a norma

$$\|(g, h)\|_Y = \|g\|_{L^b(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\partial B)}$$

e consideremos a aplicação

$$T : X_{b,q} \rightarrow Y, \quad T(f) = (f, f|_{\partial B}),$$

onde $f \in X_{b,q}$ é uma função mensurável e $f|_{\partial B}$ é a restrição de $f \in \partial B$. Note que podemos substituir a norma $\|f\|_{X_{b,q}}$ pela norma $\|(g, h)\|_Y$, desde que identifiquemos corretamente a função $f \in X_{b,q}$ com o par

$$(g, h) = (f, f|_{\partial B}).$$

Vamos mostrar que T é linear. De fato, para $f_1, f_2 \in X_{b,q}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T(f_1 + f_2) &= ((f_1 + f_2), (f_1 + f_2)|_{\partial B}) \\ &= (f_1 + f_2, f_1|_{\partial B} + f_2|_{\partial B}) \\ &= (f_1, f_1|_{\partial B}) + (f_2, f_2|_{\partial B}) = T(f_1) + T(f_2), \end{aligned}$$

e

$$T(\alpha f) = (f, \alpha f|_{\partial B}) = \alpha(f, f|_{\partial B}) = \alpha T(f).$$

Portanto, T é linear.

Dado $(g, h) \in Y$, $g \in L^p(\Omega)$ e $h \in L^q(\partial B)$. Devemos mostrar que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f = g$ q.t.p. em Ω e $f|_{\partial B} = h$ em ∂B . Definimos

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Omega \setminus \partial B, \\ h(x), & x \in \partial B. \end{cases}$$

Como a medida de Lebesgue $m(\partial B) = 0$, tem-se $f = g$ q.t.p. em Ω . Além disso, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, $f|_{\partial B} = h \in L^q(\partial B)$ e

$$\|f\|_{X_{b,q}} = \|f\|_{L^b(\Omega)} + \|f\|_{L^q(\partial B)} = \|g\|_{L^b(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\partial B)} < +\infty.$$

Portanto, $f \in X_{b,q}$ e $Tf = (g, h)$. Vamos mostrar que $\|T(f)\|_Y = \|f\|_{X_{b,q}}$. De fato, para $f \in X_{b,q}$,

$$\|T(f)\|_Y = \|(f, f|_{\partial B})\|_Y = \|f\|_{L^b(\Omega)} + \|f|_{\partial B}\|_{L^q(\partial B)} = \|f\|_{X_{b,q}}.$$

Logo, T é uma isometria. Portanto, T define um isomorfismo isométrico por $X_{b,q}$ e $Y = L^b(\Omega) \times L^q(\partial B)$, com a norma $\|\cdot\|_Y$. Para mostrar que $X_{b,q}$ é um espaço de Banach, basta mostrar que

$$Y = L^b(\Omega) \times L^q(\partial B),$$

com a norma

$$\|(g, h)\|_Y = \|g\|_{L^b(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\partial B)},$$

é um espaço de Banach, pois a aplicação T é uma transformação linear, isometria e portanto preserva completude. Como $b, q \geq 1$, sabemos que $L^b(\Omega)$ e $L^q(\partial B)$ são espaços de Banach (completos). Note que, que o produto $Y = L^b(\Omega) \times L^q(\partial B)$ é o produto cartesiano de dois espaços de Banach, sendo assim também é um espaço de Banach. Portanto, a norma

$$\|(g, h)\|_Y = \|g\|_{L^b(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\partial B)},$$

também é um espaço de Banach, fato que se justifica pela Proposição 1.1. $\square$

Então de acordo com o Proposição 1.2, como $X_{b,q}$ é isometricamente isomorfo a Y , e Y é Banach, segue que $X_{b,q}$ também é um espaço de Banach. Note que, $X_{b,q}$ fornece uma noção de traço na ∂B que estende a noção dada pelo operador traço padrão $\mathcal{T} : W^{1,b}(B) \rightarrow L^b(\partial B)$, no sentido de que podemos considerar funções sem regularidade positiva de Sobolev¹. Ou seja, o espaço $X_{b,q}$ permite prescrever independentemente um

¹Dizemos que uma função u é sem regularidade positiva de Sobolev se $u \notin W^{s,p}(\Omega)$, $\forall s > 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

dado de fronteira em $L^q(\partial B)$. De fato, podemos definir a seguinte aplicação

Definição 1.21. *Definimos a aplicação*

$$j : W^{1,b}(\Omega) \rightarrow X_{b,q} \quad (b \geq q),$$

onde o elemento é dado por $j(f) = f$ em $\Omega \cap (\partial B)^C$ e $j(f) = \mathcal{T}(f)$ em ∂B .

A partir desta definição, provamos na proposição abaixo que a aplicação j preserva o operador traço padrão $\mathcal{T}$.

Proposição 1.8. *Seja a aplicação j contínua e injetora, ou seja,*

$$\|j(f)\|_{X_{b,q}} \leq C\|f\|_{W^{1,b}(\Omega)}.$$

Então, podemos identificar continuamente $W^{1,b}(\Omega)$ com um subconjunto de $X_{b,q}$, e a aplicação j preserva o operador de traço padrão $\mathcal{T}$.

Demonstração. Pela definição da norma em $X_{b,q}$, temos

$$\|j(f)\|_{X_{b,q}} = \|f\|_{L^b(\Omega)} + \|\mathcal{T}(f|_B)\|_{L^q(\partial B)}. \quad (1.13)$$

Portanto, basta estimar separadamente os dois termos do lado direito da Equação (1.13) pela norma $\|f\|_{W^{1,b}(\Omega)}$. Pela definição da norma de Sobolev temos pela Equação (1.6) que,

$$\|f\|_{W^{1,b}(\Omega)} := \|f\|_{L^b(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^b(\Omega)} \implies \|f\|_{L^b(\Omega)} \leq \|f\|_{W^{1,b}(\Omega)} \quad (1.14)$$

Como $f \in W^{1,b}(\Omega)$ e $B \subset \Omega$, a restrição $f|_B$ pertence a $W^{1,b}(B)$. Pelo Teorema 1.4, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{T}(f|_B)\|_{L^b(\partial B)} \leq C_1\|f\|_{W^{1,b}(B)}. \quad (1.15)$$

Como ∂B é um conjunto limitado, temos $\sigma(\partial B) < \infty$, onde σ é a medida de superfície. Além disso, como $b \geq q$, pela Proposição 1.5 vale a desigualdade elementar entre normas de Lebesgue em conjuntos de medida finita

$$\|g\|_{L^q(\partial B)} \leq \sigma(\partial B)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{b}}\|g\|_{L^b(\partial B)}, \quad \forall g \in L^b(\partial B). \quad (1.16)$$

Aplicando a Inequação (1.16) com $g = \mathcal{T}(f|_B)$ e usando (1.15), obtemos

$$\|\mathcal{T}(f|_B)\|_{L^q(\partial B)} \leq C\|f\|_{W^{1,b}(B)}.$$

Como $\|f\|_{W^{1,b}(B)} \leq \|f\|_{W^{1,b}(\Omega)}$, concluímos que

$$\|\mathcal{T}(f|_B)\|_{L^q(\partial B)} \leq C\|f\|_{W^{1,b}(\Omega)}. \quad (1.17)$$

Reunindo as estimativas (1.14) e (1.17) em (1.13), obtemos

$$\|j(f)\|_{X_{b,q}} = \|f\|_{L^b(\Omega)} + \|\mathcal{T}(f|_B)\|_{L^q(\partial B)} \leq \|f\|_{W^{1,b}(\Omega)} + C\|f\|_{W^{1,b}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{1,b}(\Omega)}.$$

Note que, C pode denotar constantes diferentes. Portanto provamos que a aplicação j é contínua. Resta provar que j é injetora, para isso, seja $f \in \ker(j)$. Então $j(f) = 0$ em $X_{b,q}$. Como $X_{b,q} = L^b(\Omega) \times L^q(\partial B)$, isso implica que ambos os componentes de $j(f)$ são nulos, isto é,

$$f = 0 \quad \text{em } L^b(\Omega), \quad \mathcal{T}(f|_B) = 0 \quad \text{em } L^q(\partial B).$$

Em particular, $f = 0$ quase em todo ponto de Ω . Logo, $f = 0$ como elemento de $W^{1,b}(\Omega)$. Portanto $\ker(j) = \{0\}$ e, conseqüentemente, a aplicação j é injetora. $\square$

Definição 1.22 (Função simples com valores em um espaço de Banach). *Seja X um espaço de Banach e seja $(0, T)$ munido da σ -álgebra de Lebesgue. Uma função*

$$u : (0, T) \longrightarrow X$$

é chamada de função simples se pode ser escrita na forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^N x_j \chi_{E_j}(t),$$

onde

- $E_j \subset (0, T)$ são conjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos;
- χ_{E_j} denota a função característica de E_j .

Definição 1.23 (Mensurabilidade de Bochner). *Seja X um espaço de Banach e seja*

$$u : (0, T) \longrightarrow X.$$

Dizemos que u é Bochner-mensurável se existe uma sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funções simples $u_k : (0, T) \rightarrow X$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(t) - u(t)\|_X = 0 \quad \text{para quase todo } t \in (0, T).$$

Teorema 1.6. *Sejam $f : X \rightarrow E$ uma função Bochner-integrável e A um conjunto mensurável. Então,*

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| \, d\mu.$$

Demonstração. Ver p.210 de [3]. $\square$

De agora em diante, denotamos $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$, para $1 < r, q, b < \infty$ e consideramos as condições

$$\beta \geq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \quad e \quad \beta > \left(\frac{r+n-1}{2r} \rho - \frac{b+n-1}{2b} \right). \quad (1.18)$$

A seguir, definimos um espaço funcional dependente do tempo onde buscaremos soluções para equação integral

$$u(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi d\tau.$$

Sejam $\beta \geq 0$ e o espaço definido por

$$\mathcal{E}_{b,q}^{r,T} := \{u : (0, T) \rightarrow X_{b,q} \text{ Bochner-mensurável} : t^\beta u \in BC((0, T); L^b(\Omega)), t^\alpha u \in BC((0, T); L^q(\partial B))\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}} = \sup_{0 < t < T} t^\beta \|u(t)\|_{L^b(\Omega)} + \sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)}. \quad (1.19)$$

Vamos mostrar $\left(\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}, \|u\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}} \right)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.7. *Os conjuntos*

$$X_\beta = \left\{ u \in \mathcal{E}_{b,q}^{r,T}; \|u\|_{X_\beta} = \sup_{0 < t < T} t^\beta \|u(t)\|_{L^b(\Omega)} \right\}$$

e

$$X_\alpha = \left\{ u \in \mathcal{E}_{b,q}^{r,T}; \|u\|_{X_\alpha} = \sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right\}$$

são espaços de Banach.

Demonstração. Ver p.53 de [15]

□

Capítulo 2

Funções de Green e estimativas em L^p

Neste capítulo, estabelecemos os principais resultados sobre a função de Green associados à equação do calor, os quais se encontram nas referências [11] e [14]. Em seguida, demonstramos as estimativas lineares para a função de Green.

2.1 A função de Green

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, a função de Green associada à equação do calor é dada em termos da solução fundamental, de acordo com a definição 2.1 a seguir. Essa função é obtida como solução do seguinte problema (cf. [11] e [14])

$$\begin{cases} g_t(x, t; \xi, \tau) - \Delta g(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau), & \text{para } x, \xi \in \Omega, t > \tau \in \mathbb{R}, \\ g(x, t; \xi, \tau) = 0, & \text{para } x, \xi \in \Omega, t < \tau, \\ |g(x, t; \xi, \tau)| \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \quad \xi \in \Omega, t, \tau \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

A definição acima equivale à seguinte.

Definição 2.1 (Solução fundamental). *Definimos a solução fundamental por*

$$\begin{cases} g_t - \Delta g = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x, t) = \delta(x) & \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac definida no Exemplo 1.1.

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ vamos mostrar que a função de Green $g(x, t; \xi, \tau)$ é dada por

$$g(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right), & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (2.3)$$

Lema 2.1 (Integral da solução fundamental). *Para todo $t > 0$, vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

onde $\Phi(x, t) = g(x, t; 0, 0)$.

Demonstração. Ver p.56 do livro [8]. □

Proposição 2.1 (Aproximação da identidade pelo núcleo do calor). *Seja*

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

Então, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) \varphi(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) \varphi(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \varphi(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|z|^2}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \varphi(2\sqrt{t}z) (2\sqrt{t})^n dz \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \varphi(2\sqrt{t}z) dz \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \right) \varphi(0) \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, fizemos a mudança de variável $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, de tal modo que $dx = (2\sqrt{t})^n dz$. Em (*) utilizamos o teorema da convergência dominada 1.2, pois $\varphi(2\sqrt{t}z) \rightarrow \varphi(0)$ quando $t \rightarrow 0$ e $|\varphi(2\sqrt{t}z)| \leq \|\varphi\|_\infty$ com $e^{-|z|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainda utilizamos a Proposição 4.2 (ver Apêndice). □

Agora empregamos Φ para construir uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = u_0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Observemos que a função $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$ satisfaz a equação do calor fora da singularidade no ponto $(0, 0)$ e, portanto, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fixado, a função $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ também satisfaz a equação do calor. Consequentemente, a convolução

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (2.5)$$

também constitui uma solução do problema 2.4.

Teorema 2.1 (Solução do problema de valor inicial). *Suponha que $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida u por (2.5). Então*

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
- (ii) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$;
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, 0^+) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = u_0(x^0)$, para todo $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver p.47 do livro [8]. □

Portanto podemos concluir que $\Phi(x, t) = g(x, t, 0, 0)$ é solução fundamental, de acordo com a Definição 2.1. Daí, concluímos que g definida por (2.3) é a função de Green.

2.1.1 Função de Green em domínios limitados

Nesta subseção, encontraremos a função de Green para a equação do calor, no caso em que Ω é um domínio limitado de Classe C^1 . Temos a seguinte definição

Definição 2.2. *Definimos a função de Green como a solução do problema*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) g(x, t; \xi, \tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (\tau, \infty), \\ g(x, t; \xi, \tau) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (\tau, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow \tau^+} g(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

Considere o problema de valor inicial para a equação do calor quando não há reações presentes e a temperatura de contorno é zero. Assim, buscamos resolver o problema (cf. [14], p. 213214)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

A função de Green pode ser expressa por meio de uma expansão em autofunções, para isso usaremos o método de separação de variáveis, isto é, suponha que a solução é da forma

$$u(x, t) = \phi(x)T(t).$$

Calculando os termos da Equação do calor (2.7) para $u(x, t)$ obtemos

$$u_t = \phi(x)T'(t), \quad \Delta u = T(t)\Delta\phi(x).$$

Substituindo esses resultados na Equação (2.7), temos

$$\phi(x)T'(t) - T(t)\Delta\phi(x) = 0.$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta\phi(x)}{\phi(x)} := -\lambda.$$

Como o lado esquerdo depende apenas de t e o lado direito depende apenas de x , ambos devem ser iguais a uma constante, que representamos por $-\lambda$. Assim, obtemos duas equações

$$\Delta\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$\phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.9)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

A Equação (2.8) é um problema de autovalor para o operador Laplaciano, com condição de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$. Os valores de λ correspondem aos autovalores, e $\phi(x)$ às autofunções. Note que, a equação

$$T'(t) = -\lambda T(t)$$

é uma equação diferencial ordinária cuja solução descreve o decaimento exponencial no tempo da solução $u(x, t)$. A solução é dada por

$$T(t) = T(0)e^{-\lambda t},$$

sendo $T(0)$ a constante inicial.

Se Ω é uma região limitada de acordo com Teorema 1.5, há uma sequência enumerável de autovalores positivos

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

que são listados em ordem crescente sem levar em conta a multiplicidade. As autofunções correspondentes

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$$

podem ser escolhidas de maneira a formar um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2(\Omega)$, o qual é associado ao Problema (2.8). Assim, qualquer função da forma

$$\phi_j(x)e^{-\lambda_j t}$$

é uma solução da equação diferencial e satisfaz a condição de contorno do Problema (2.7). Descartando questões relacionadas à convergência e diferenciabilidade termo a termo, o mesmo vale para

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(x) e^{-\lambda_j t},$$

onde $\{c_j\}$ são constantes que devem satisfazer a condição inicial,

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(x) = u_0. \quad (2.10)$$

Essa equação será válida se, e somente se,

$$c_j = \langle u_0, \phi_j \rangle = \int_{\Omega} u_0 \phi_j(x) dx. \quad (2.11)$$

Assim, encontramos a solução formal do Problema (2.7),

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(x) e^{-\lambda_j t}. \quad (2.12)$$

Como todos os λ_j são positivos, a temperatura em Ω se aproxima de 0 quando $t \rightarrow \infty$, como esperado. No instante inicial, a convergência depende da regularidade do dado inicial u_0 . Se

$$c_j = \langle u_0, \phi_j \rangle,$$

então a série converge para u_0 no sentido de $L^2(\Omega)$, isto é,

$$u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \quad \text{em } L^2(\Omega), \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Para a função de Green $g(x, t; \xi, 0)$, de acordo com a Definição 2.6, devemos ter $u_0 = \delta(x - \xi)$. Desse modo, partindo de (2.12), segue-se que

$$\langle u_0, \phi_j \rangle = \langle \delta(\cdot - \xi), \phi_j \rangle \stackrel{(1.11)}{=} \langle \delta, \phi_j(\cdot + \xi) \rangle = \phi_j(\xi). \quad (2.13)$$

Ou seja, podemos escrever

$$g(x, t; \xi, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \phi_j(\xi) e^{-\lambda_j t},$$

e por uma translação temporal,

$$g(x, t; \xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \phi_j(\xi) e^{-\lambda_j(t-\tau)}. \quad (2.14)$$

Isso mostra que g é a função de Green de acordo com a Definição 2.6.

Teorema 2.2. *A função de Green é positiva em Ω .*

Demonstração. Ver p.132 da referência [14]. $\square$

Teorema 2.3 (Princípio do Máximo em Domínios Limitados). *Seja $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$. Se u satisfaz*

$$u_t - \Delta u \leq 0,$$

então

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u. \quad (2.15)$$

Se u satisfaz

$$u_t - \Delta u \geq 0,$$

então

$$\min_{\overline{\Omega_T}} u = \min_{\partial_p \Omega_T} u. \quad (2.16)$$

Consequentemente, se u satisfaz $u_t - \Delta u = 0$, então

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} = \|u\|_{L^\infty(\partial_s \Omega_T)}.$$

Demonstração. Ver p.39 referência [12]. $\square$

Lema 2.2 (Monotonicidade da função de Green em relação ao domínio). *Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ dois domínios abertos e sejam g_1 e g_2 as funções de Green associadas ao operador do calor*

$$u_t - \Delta u$$

em Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, com condição de fronteira de Dirichlet homogênea dada por

$$\begin{cases} \partial_t g_i - \Delta g_i = 0, & t > \tau, x, \xi \in \Omega_i, \\ g_i(x, \xi, t, \tau) = 0, & t > \tau, x \in \partial \Omega_i, \xi \in \Omega_i, \\ \lim_{t \rightarrow \tau^+} g_i(x, \xi, t, \tau) = \delta(x - \xi), & x, \xi \in \Omega_i. \end{cases} \quad (2.17)$$

Então, para todo $x, \xi \in \Omega_1$ e $t > \tau$, vale

$$g_1(x, \xi, t, \tau) \leq g_2(x, \xi, t, \tau).$$

Demonstração. Sejam g_1 e g_2 funções de Green tais que satisfaçam as condições (2.17) para $i = 1, 2$. Defina

$$w(x, t) := g_2(x, \xi, t, \tau) - g_1(x, \xi, t, \tau),$$

onde $\xi \in \Omega_1$ e $\tau > 0$ são fixados, sabendo que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, temos que w satisfaz

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & x \in \Omega_1, t > \tau, \\ w(x, t) = g_2(x, \xi, t, \tau), & x \in \partial\Omega_1, t > \tau, \\ \lim_{t \rightarrow \tau} w(x, t) = 0, & x \in \Omega_1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Como g_1 e g_2 satisfazem a equação do calor fora da singularidade inicial, segue que

$$w_t - \Delta w = 0, \quad \text{em } \Omega_1 \times (\tau, \infty).$$

Além disso, como g_1 satisfaz condição de Dirichlet homogênea em $\partial\Omega_1$, temos

$$w(x, t) = g_2(x, \xi, t, \tau) \quad \text{para } x \in \partial\Omega_1, t > \tau.$$

Como a função de Green é não negativa, pelo Teorema 2.2, segue que

$$w(x, t) \geq 0 \quad \text{em } \partial\Omega_1 \times (\tau, \infty).$$

Por outro lado, da condição inicial das funções de Green,

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} g_i(x, \xi, t, \tau) = \delta(x - \xi),$$

obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} w(x, t) = 0, \quad \text{em } \Omega_1.$$

Portanto, w satisfaz a equação do calor homogênea em $\Omega_1 \times (\tau, \infty)$, é não negativa na fronteira parabólica do cilindro $\Omega_1 \times (\tau, \infty)$ e se anula no tempo inicial.

Pelo Princípio do Máximo parabólico 2.3, concluímos que

$$w(x, t) \geq 0, \quad \text{em } \Omega_1 \times (\tau, \infty).$$

Consequentemente,

$$g_1(x, \xi, t, \tau) \leq g_2(x, \xi, t, \tau).$$

□

Corolário 2.1 (Estimativa pontual do núcleo de Green). *Seja $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ um domínio.*

Então, para todo $x, \xi \in \Omega_1$ e $t > \tau$, vale a estimativa

$$g(x, t; \xi, \tau) \leq \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} (t - \tau)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right). \quad (2.19)$$

Demonstração. Tomando $\Omega_2 = \mathbb{R}^n$ no Lema 2.2, obtemos

$$g_1 \leq g_2.$$

Em $\mathbb{R}^n$, lembramos que a função de Green é dada por

$$g_2(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(4\pi(t - \tau))^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right). \quad (2.20)$$

Observando que $(4\pi(t - \tau))^{n/2} = 2^n \pi^{n/2} (t - \tau)^{n/2}$, segue imediatamente a estimativa

$$g(x, t; \xi, \tau) \leq \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} (t - \tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}}, \quad \text{para todo } t > \tau \text{ e } x, \xi \in \Omega. \quad (2.21)$$

□

2.2 Estimativas lineares para a função de Green

Nesta seção, provaremos três lemas que serão importantes no desenvolvimento da demonstração do teorema central deste trabalho. Começamos provando estimativas para as L^p -normas da função de Green associada à equação do calor num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com a condição homogênea no bordo.

2.2.1 Estimativa para a função de Green na fronteira ∂B

O Lema abaixo serve para estimar o efeito da reação no domínio e na ∂B . Ele é utilizado na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 2.3. *Seja $1 \leq p < \infty$. Existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$\sup_{x \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} \leq C_1 (t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}, \quad (2.22)$$

$$\sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\Omega, dx)} \leq C_2 (t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}, \quad (2.23)$$

para todo $0 \leq \tau < t$.

Demonstração. Seja $\xi = zR$, com $z \in S^{n-1}$ e $\xi \in \partial B$. Segue da desigualdade (2.21) que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{(t - \tau)^{-n/2}}{2^n \cdot \pi^{n/2}} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}} \right\|_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} \\ &= \frac{(t - \tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial B} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)} p} d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$= \frac{(t - \tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x - Rz|^2}{4(t - \tau)} p} d\sigma(z) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.25)$$

A fronteira da superfície é ∂B (de raio R) pode ser parametrizada a partir da esfera unitária S^{n-1} do seguinte modo. Cada ponto $\xi \in \partial B$ é descrito como $\xi = Rz$, onde $z \in S^{n-1}$. O elemento de área $d\sigma(\xi)$ sobre ∂B transforma-se proporcionalmente ao raio R , ou seja

$$d\sigma(\xi) = R^{n-1} d\sigma(z), \quad (2.26)$$

onde R^{n-1} é o fator de escala relacionado ao volume da esfera. Substituindo $\xi = Rz$ e a Equação (2.26) em (2.24), temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)} p} d\sigma(\xi) &= \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x - Rz|^2}{4(t - \tau)} p} R^{n-1} d\sigma(z) \\ &= R^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x - Rz|^2}{4(t - \tau)} p} d\sigma(z) \\ &\leq R^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x - Rz|^2}{4(t - \tau)} p} d\sigma(z) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

No entanto, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n}$ pode ser substituído por $\sup_{x \in A_1}$, onde A_1 é o raio que passa por $(1, 0, \dots, 0)$. Precisamente,

$$A_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0 \text{ e } x_i = 0 \text{ para } i \neq 1\}.$$

O supremo sobre $x \in A_1 \cap B^c$ é alcançado em algum $x \in \partial B$. De fato, considerando

$$\begin{aligned} |x_a - Rz|^2 &= a^2 - 2\langle x_a, z \rangle + R^2|z|^2 \\ &= a^2 - 2Raz_1 + z^2 R^2, \end{aligned}$$

onde $x_a = (a, 0, \dots, 0)$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in S^{n-1}$. Denotando $h(a) = a^2 - 2Raz_1 + R^2 z^2$, temos que

$$h'(a) = 2a - 2Rz_1 = 2(a - Rz_1) \quad a \geq R.$$

Como

$$a - Rz_1 \geq 0 \iff z_1 \leq \frac{a}{R} \leq 1,$$

para $a \geq R$, tem-se que $h'(a) \geq 0$ para $a \geq R$. Segue-se que $h(a) \geq h(R)$, donde

$|x_a - Rz|^2 \geq |x_R - Rz|^2$ em que $x_a = (a, 0, \dots, 0)$ e $x_R = (R, 0, \dots, 0) \in \partial B$, portanto, temos que,

$$x \in A_1 \cap B^c \implies e^{-\frac{|x_a - Rz|^2}{4(t-\tau)}} \leq e^{-\frac{|x_R - Rz|^2}{4(t-\tau)}}.$$

Ver a interpretação geométrica na Figura 2.1 . Portanto, o valor máximo da integral em

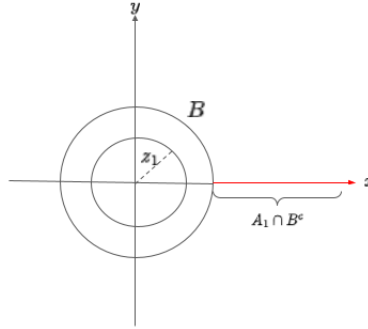


Figura 2.1: Interpretação de $A_1 \cap B^c$ em $\mathbb{R}^2$

(2.25) é atingido em algum $x \in A_1 \cap \bar{B}$.

Seja $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in S^{n-1}$ e $x_d = (Rd, 0, \dots, 0)$ (para algum $0 \leq d \leq 1$) o ponto correspondente de máximo. Temos

$$\begin{aligned} |x_d - Rz|^2 &= (Rd - Rz_1)^2 + R^2 z_2^2 + \dots + R^2 z_n^2 \\ &= R^2 d^2 - 2R^2 d z_1 + R^2 z_1^2 + R^2 z_2^2 + \dots + R^2 z_n^2 \\ &= R^2 (d^2 - 2d z_1 + z_1^2 + \dots + z_n^2) \\ &= R^2 (d^2 - 2d z_1 + 1) \\ &= R^2 (d^2 + 1) \left(1 - \frac{2d}{d^2 + 1} z_1 \right) \\ &\geq R^2 (1 - |z_1|). \end{aligned}$$

A última desigualdade segue de

$$\begin{aligned} (d^2 + 1) \left(1 - \frac{2d}{d^2 + 1} z_1 \right) &\geq 1 - |z_1| \iff d^2 + 1 - 2d z_1 \geq 1 - |z_1| \\ &\iff d^2 - 2d z_1 + |z_1| \geq 0. \end{aligned}$$

De fato, o discriminante de $d^2 + 1 - 2d z_1 = 0$ é não positivo se, e somente se, $z_1^2 - |z_1| \leq 0$, o que é verdade, pois $|z_1| \leq 1$. Então, o lado direito da Equação (2.25) pode ser majorado

por

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x \in A_1 \cap \tilde{B}} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x-Rz|^2}{4(t-\tau)} p} d\sigma(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x_d-Rz|^2}{4(t-\tau)} p} d\sigma(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{R^2(1-|z_1|)p}{4(t-\tau)}} d\sigma(z) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$= C(t-\tau)^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)} \sqrt{(1-s^2)}^{n-3} ds \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.28}$$

De (2.27) para (2.28), utilizamos o Teorema 4.1 tomando $K(s) = e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)}$ e $x = (1, \dots, 0)$. A seguir, tratamos a integral em (2.28) considerando dois casos.

Primeiro caso. Tomando $n = 2$ na integral em (2.28), obtemos a primeira igualdade

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds &= \int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1-s)^{-1/2} ds \\
&= 2 \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1-s^2)^{-1/2} ds. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Note que, da primeira para a segunda igualdade usamos o fato que estamos integrando uma função par. Como $1-s \leq 1-s^2$ $s \in [0, 1]$, podemos majorar a integral em a (2.29) por

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1-s)^{-1/2} ds &= 2 \left(\frac{R^2 p}{4(t-\tau)} \right)^{-1/2} \int_0^{\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}} e^{-s} s^{-1/2} ds \\
&\leq 2 \left(\frac{R^2 p}{4(t-\tau)} \right)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-s} s^{-1/2} ds \\
&= C R^{-1} (t-\tau)^{1/2}. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar a primeira igualdade (2.30), chamando a integral da esquerda em (2.30) de I e efetuamos a seguinte substituição $\tilde{u} = 1-s$, em seguida

$$s = \frac{R^2 p}{4(t-\tau)} \tilde{u}, \quad \tilde{u} = \frac{4(t-\tau)}{R^2 p} s, \quad d\tilde{u} = \frac{4(t-\tau)}{R^2 p} ds.$$

Na primeira desigualdade de (2.30) utilizamos que a integral é positiva e que

$$\left[0, \frac{R^2 p}{4(t-\tau)} \right] \subset [0, \infty).$$

Por fim, utilizamos a Definição 4.1 da função Gamma (ver Apêndice), na última igualdade

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

As estimativas (2.29)–(2.30) implicam

$$C R^{\frac{n-1}{p}} (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)} (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 (t - \tau)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}, \quad \text{para } n = 2. \quad (2.31)$$

Segundo caso. Tomando $n \geq 3$, queremos majorar a integral (2.28). Para isso, utilizamos o fato que o integrando em (2.28) é par para escrever a seguinte desigualdade

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)} (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds \leq 2 \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1 - s)^{\frac{n-3}{2}} ds. \quad (2.32)$$

Além disso, do fato que $1 - s^2 = (1 - s)(1 + s)$ e já que $1 + s \leq 2$ para $s \in [0, 1]$ podemos escrever $1 - s^2 \leq 2(1 - s)$, elevando ambos os lados à potência $\frac{n-3}{2}$, temos

$$(1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} \leq [(1 - s)(1 + s)]^{\frac{n-3}{2}} \leq (1 - s)^{\frac{n-3}{2}} \cdot 2^{\frac{n-3}{2}}. \quad (2.33)$$

Substituímos a estimativa (2.33) na integral (2.32)

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds &\leq 2 \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1 - s)^{\frac{n-3}{2}} \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} ds \\ &= 2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1 - s)^{\frac{n-3}{2}} ds. \end{aligned}$$

Agora, consideramos a seguinte substituição na última integral acima, $\tilde{s} = 1 - s$, $d\tilde{s} = -ds$. Desse modo, ela transforma-se em

$$2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \int_1^0 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}\tilde{s}} (\tilde{s})^{\frac{n-3}{2}} (-d\tilde{s}) = 2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}\tilde{s}} \tilde{s}^{\frac{n-3}{2}} d\tilde{s}.$$

Daí, fica provado que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)} (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds &\leq 2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-s)} (1 - s)^{\frac{n-3}{2}} ds \\ &= 2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}s} s^{\frac{n-3}{2}} ds. \end{aligned}$$

Agora, fazendo a seguinte substituição

$$s = \frac{R^2 p}{4(t - \tau)} \tilde{s} \implies d\tilde{s} = \frac{4(t - \tau)}{R^2 p} ds,$$

podemos escrever a seguinte integral

$$\begin{aligned}
2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)} \tilde{s}} \tilde{s}^{\frac{n-3}{2}} d\tilde{s} &= 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}} e^{-s} \left(\frac{4(t-\tau)}{R^2 p} s \right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}} ds \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{R^2 p}{4(t-\tau)} \right)^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}} e^{-s} s^{\frac{n-3}{2}} ds \\
&\leq C(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n-3}{2}} ds \\
&= CR^{-n+1}(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a integral já conhecida $\int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n-3}{2}} du = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ e fazemos a $C = 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{R^2 p}{4}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$.

Portanto, para $n \geq 3$, temos

$$CR^{\frac{n-1}{p}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{-1}^1 e^{-\frac{R^2 p}{4(t-\tau)}(1-|s|)} \sqrt{(1-s^2)}^{n-3} ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 (t-\tau)^{-1+\frac{n-1}{2p}}. \quad (2.34)$$

A estimativa (2.3) segue das equações (2.25), (2.28) e (2.34) (ou (2.31) para $n = 2$).

Agora, lidamos com a estimativa (2.23). Recordando a desigualdade (2.21), temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\Omega, dx)} &\leq \sup_{\xi \in \partial B} \left((t-\tau)^{-n/2} e^{-|x|^2/4(t-\tau)} \right)_{L^p(\Omega, dx)} \\
&\leq (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \sup_{\xi \in \partial B} \left\| e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)} \\
&= (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \left\| e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$= C_2 (t-\tau)^{\frac{n}{2p}-\frac{n}{2}}. \quad (2.36)$$

Note que, a igualdade (2.35) é objeto da seguinte afirmação.

Afirmação 2.1. *Vale a igualdade*

$$\sup_{\xi \in \partial B} \left\| e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)} = \left\| e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)}.$$

Demonstração. Se considerarmos a função $h_\xi(x) = e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}$, então a mudança de variável $y = x - \xi$, que implica $dy = dx$ portanto vale

$$\|h_\xi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{p|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{p|y|^2}{4(t-\tau)}} dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Da igualdade (2.36) para (2.35) nos utilizamos a Proposição 4.2 (ver Apêndice) como mostrado abaixo

$$(t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \left\| e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)} = (t - \tau)^{-n/2} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4(t-\tau)} dx}_I \right)^{1/p}.$$

No nosso caso, tomando I como a integral indicada acima e observando que ela é um caso da integral 4.2 (ver Apêndice) com

$$a = \frac{1}{4(t - \tau)},$$

podemos dizer que

$$I^{1/p} = (4\pi(t - \tau))^{\frac{n}{2p}}.$$

Após os cálculos indicados acima para a integral I , obtemos

$$(t - \tau)^{-n/2} C(t - \tau)^{n/2p} = C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}},$$

como queríamos demonstrar. □

2.2.2 Estimativa em L^p para a parte linear

A integral que será estimada é

$$u(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi d\tau,$$

a qual é solução da equação linear homogênea $u_t - \Delta u = 0$ com condição inicial dada por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{\partial \chi_B(x)}{\partial \nu} f(u(x, t)), & \text{em } \Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Portanto, vemos que é necessário estimar o termo

$$\int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi.$$

Este é o objetivo do seguinte Lema.

Lema 2.4. *Seja $1 < d \leq \tilde{r}, \tilde{q} < \infty$. Existem constantes positivas C_3, C_4 tais que*

$$\left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega, dx)} \leq C_3(t - \tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\tilde{r}})} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)}, \quad (2.37)$$

$$\left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \leq C_4 (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{1}{\tilde{d}} - \frac{1}{\tilde{q}} \right)} \max \left\{ 1, (t - \tau)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{d}} + 1 \right)} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)}, \quad (2.38)$$

para todo $0 \leq \tau < t$ e $\varphi \in L^d(\Omega)$.

Demonstração. Seja $1 \leq l < \infty$ tal que $-\frac{1}{\tilde{d}} + \frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{l} - 1$. Para $\xi \in \Omega$, consideremos a integral envolvendo o núcleo do calor g .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right| &\leq \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) |\varphi(\xi)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \int_{\Omega} (t - \tau)^{-n/2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} |\varphi(\xi)| d\xi \\ &= \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (t - \tau)^{-n/2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} |1_{\Omega}(\xi) \varphi(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade aplicamos a cota da Equação (2.21), já na igualdade foi utilizada a função indicadora $1_{\Omega}(\xi)$ para estender a integração para todo $\mathbb{R}^n$. Tomando a norma em ambos os lados da última integral obtemos,

$$\left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)} \leq \left\| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} |1_{\Omega}(\xi) \varphi(\xi)| d\xi}_I \right\|_{L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Podemos escrever a integral I como a $g * f$ convolução, dada pela Definição 1.6, onde $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}}$ e $g(\xi) = 1_{\Omega}(\xi) \varphi(\xi)$. Daí, aplicando a Inequação de Young 1.6, obtemos

$$\|f * g\|_{L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^l(\mathbb{R}^n)} \|1_{\Omega} \varphi\|_{L^d(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.39)$$

Portando, provamos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)} &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} |1_{\Omega}(\xi) \varphi(\xi)| d\xi \right\|_{L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \left\| (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^l(\mathbb{R}^n)} \|1_{\Omega} \varphi\|_{L^d(\mathbb{R}^n)} \\ &= C_3 (t - \tau)^{-\frac{n}{2} + \frac{n}{2l}} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)} = C_3 (t - \tau)^{-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{\tilde{d}} - \frac{1}{\tilde{r}} \right)} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora, lidamos com a estimativa na fronteira (2.38). Desta vez, tomamos $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{l} - \frac{1}{\tilde{d}} - 1$, identificando $r \rightarrow \tilde{q}$, $p \rightarrow l$, $q \rightarrow d$ e aplicamos o Teorema 1.3, tomando $K(x, \xi) = g(x, t; \xi, \tau)$. Vamos verificar que existe uma constante $C_h > 0$ tal que

$$[K(x, \cdot)]_d \leq C_h \quad \text{q.t.p. em } x \in X,$$

$$[K(\cdot, y)]_d \leq C_h \quad \text{q.t.p. em } y \in Y.$$

A partir do Lema 2.22, temos

$$\sup_{x \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} \leq C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}},$$

Aqui, ∂B é o espaço Y e $d\sigma(\xi)$ é a medida ν . Portanto, podemos reescrever a desigualdade como

$$\sup_{x \in \Omega} \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\nu)} \leq C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Utilizando a Desigualdade (1.3) e da propriedade de supremo, temos

$$[K(x, \cdot)]_d \leq \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\nu)} \leq \sup_{x \in \Omega} \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\nu)} \leq C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Portanto temos que

$$[K(x, \cdot)]_d \leq C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

A partir do Lema 2.22, temos

$$\sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\Omega, dx)} \leq C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Aqui, Ω é o espaço X e dx é a medida μ . Portanto, podemos reescrever a desigualdade como

$$\sup_{\xi \in \partial B} \|K(\cdot, \xi)\|_{L^p(\mu)} \leq C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

A partir daí, utilizando a Desigualdade (1.3) e da propriedade de supremo, temos

$$[K(\cdot, \xi)]_d \leq \|K(\cdot, \xi)\|_{L^p(\mu)} \leq \sup_{\xi \in \partial B} \|K(\cdot, \xi)\|_{L^p(\mu)} \leq C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Para garantir que a constante C_h seja a mesma nas duas hipóteses, definimos

$$C_h = \max \left(C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}, C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}} \right).$$

Note que, a função de Green g é mensurável. De fato, fixe $t > \tau$ a função $h(x, t; \xi, \tau)$ definida em

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \xi) \mapsto |x - \xi|^2$$

é uma função contínua, observando que a exponencial $e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}$ também é contínua e como toda função contínua é mensurável, concluímos a demonstração para $t > \tau$. Agora fixe $t < \tau$. Neste caso, a função g é identicamente nula. Seja $E \in \mathcal{N}$ (a σ -álgebra no

contradomínio, nesse caso são os Borelianos em $\mathbb{R}$). Então

$$g^{-1}(E) = \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, & \text{se } 0 \in E, \\ \emptyset, & \text{se } 0 \notin E. \end{cases}$$

Como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (produto de dois espaços mensuráveis) contém a σ -álgebra de Borel, temos que

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \emptyset \in \mathcal{M}.$$

Portanto, $K(x, \xi) = g(x, t; \xi, \tau)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. Daí, o operador pode ser escrito como

$$T\varphi(x) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.40)$$

Podemos aplicar o Teorema 1.3 para estimar

$$\|T\varphi\|_{L^{\bar{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \leq C \max \left\{ \sup_{\xi \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(x))}, \sup_{x \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\Omega, d\xi)} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)}.$$

Agora, substituindo as estimativas de $g(x, t; \xi, \tau)$ do Lema 2.22 temos

$$\|T\varphi\|_{L^{\bar{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \leq C \max \left\{ C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2l} - \frac{n}{2}}, C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2l} - \frac{n}{2}} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)}.$$

Portanto, o operador integral satisfaz as seguintes inequações

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\bar{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \\ & \leq C \max \left\{ \sup_{\xi \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(x))}, \sup_{x \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\Omega, d\xi)} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)} \\ & \leq C \max \left\{ C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2l} - \frac{n}{2}}, C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2l} - \frac{n}{2}} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)} \\ & \leq C_4 \max \left\{ (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\bar{q}})}, (t - \tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\bar{q}})} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$= C_4 \max \left\{ 1, (t - \tau)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{d} + 1)} \right\} (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\bar{q}})} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)}. \quad (2.42)$$

Nas desigualdades (2.41) para (2.42) utilizamos que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{n-1}{2l} - \frac{n}{2} \right) &= \frac{1}{2l} (n-1-nl) \\
 &= \frac{1}{2l} (n[1-l] - 1) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n[1-l]}{l} - \frac{1}{l} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(n \left\{ \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{d} \right\} - \frac{1}{l} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(n \left\{ \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{d} \right\} - \left\{ \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{d} \right\} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{n-1}{2} \right) \left\{ \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{d} \right\} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

□

O Lema abaixo serve para estimar o efeito da reação localizada sobre a própria ∂B .

Lema 2.5. *Sejam $1 < d \leq \tilde{q}, \tilde{r} < \infty$. Existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$\left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega, dx)} \leq C_1 \max \left\{ 1, (t-\tau)^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{d})} \right\} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}})} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}, \tag{2.44}$$

$$\left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \leq C_2 (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}})} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}, \tag{2.45}$$

para todo $0 \leq \tau < t$ e $\varphi \in L^d(\partial B)$.

Demonstração. Seja $1 \leq l < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{l} + \frac{1}{d} - 1$. Aplicaremos novamente Teorema 1.3, desta vez, ao operador

$$T\varphi(x) = \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi. \tag{2.46}$$

Queremos aplicar novamente o resultado do Teorema 1.3 para estimar tal operador. Precisamos assim como anteriormente mostrar que existe uma contante $C_h > 0$, tal que

$$[K(x, \cdot)]_q \leq C_h \quad \text{q.t.p. em } x \in X,$$

$$[K(\cdot, y)]_q \leq C_h \quad \text{q.t.p. em } y \in Y.$$

A partir do Lema 2.22, temos

$$\sup_{x \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} \leq C_1 (t-\tau)^{\frac{(n-1)}{2p}-\frac{n}{2}},$$

Aqui, ∂B é o espaço Y e $d\sigma(\xi)$ é a medida ν . A partir daí utilizando a Desigualdade (1.3) e da propriedade de supremo temos

$$[K(x, \cdot)]_d \leq \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\nu)} \leq \sup_{x \in \Omega} \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\nu)} \leq C_1(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Portanto, podemos reescrever a desigualdade como

$$[K(x, \cdot)]_d \leq C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

A partir do Lema 2.22, temos

$$\sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^p(\Omega, dx)} \leq C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Aqui, Ω é o espaço X e dx é a medida μ . Portanto, a seguir utilizando a desigualdade (1.3) e da propriedade de supremo temos

$$[K(x, \cdot)]_d \leq \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\mu)} \leq \sup_{\xi \in \partial B} \|K(x, \cdot)\|_{L^p(\mu)} \leq C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Portanto

$$[K(x, \cdot)]_d \leq C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}}.$$

Para garantir que a constante C_h seja a mesma nas duas hipóteses, definimos

$$C_h = \max \left(C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2p} - \frac{n}{2}}, C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2p} - \frac{n}{2}} \right).$$

Dessa forma

$$\|T\varphi\|_{L^{\tilde{r}}(\partial B, d\sigma(x))} \leq C \sup_{\xi \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(x))} \|\varphi\|_{L^d(\Omega)},$$

e

$$\|T\varphi\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega, dx)} \leq C \sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\Omega, dx)} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}.$$

Combinando as duas estimativas, obtemos

$$\|T\varphi\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega, dx)} \leq C \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\Omega, dx)} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}.$$

Agora, substituindo as estimativas de $g(x, t; \xi, \tau)$ do Lema 2.22 temos

$$\|T\varphi\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega, dx)} \leq C \max \left\{ C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2l} - \frac{n}{2}}, C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2l} - \frac{n}{2}} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}.$$

Portanto, o operador integral satisfaz as seguintes inequações

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega, dx)} \\
& \leq C \max \left\{ \sup_{\xi \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{x \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\Omega, dx)} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)} \\
& \leq C \max \left\{ C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2l} - \frac{n}{2}}, C_2(t - \tau)^{\frac{n}{2l} - \frac{n}{2}} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)} \tag{2.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = C_5 \max \left\{ (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\tilde{r}})}, (t - \tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\tilde{r}})} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)} \tag{2.48} \\
& = C_5 \max \left\{ 1, (t - \tau)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{d} + 1)} \right\} (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{1}{d} - \frac{1}{\tilde{r}})} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade (2.47) para (2.48), novamente usamos (2.43). Assim, estabelecemos (2.44).

Agora, vamos provar as estimativas dada pela desigualdade (2.45). Para isto, tomando $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{l} + \frac{1}{d} - 1$ e procedendo de forma análoga a (2.44), segue que

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{q}}(\partial B, d\sigma(\xi))} \\
& \leq C \max \left\{ \sup_{x \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{\xi \in \partial B} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(x))} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)} \\
& \leq C \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{\xi \in \Omega} \|g(x, t; \xi, \tau)\|_{L^l(\partial B, d\sigma(x))} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Como $\partial B \subset \Omega$ e $g(x, t; \xi, \tau)$ é uma função contínua em seus argumentos, o Lema 2.22 implica que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{L^{\tilde{q}}(\partial B, d\sigma(x))} & \leq C \max \left\{ C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2} - \frac{n}{2}}, C_1(t - \tau)^{\frac{(n-1)}{2} - \frac{n}{2}} \right\} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)} \\
& = C_6(t - \tau)^{\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2}(\frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{d})} \|\varphi\|_{L^d(\partial B)}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Equação do Calor com Reação Localizada

Neste capítulo estamos interessados no seguinte (PVI) para a equação do calor semilinear com uma reação não linear localizada

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{\partial \chi_B(x)}{\partial \nu} f(u(x, t)), & \text{em } \Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

complementado pela condição de fronteira homogênea

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, t) \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, & 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (3.2)$$

dependendo do tipo de domínio Ω . No sistema (3.1), o vetor normal $\nu(x)$ é estendido para um campo vetorial definido em todo o domínio Ω .

Lembramos que o espaço $X_{b,q}$ foi definido na Seção 1.3 como o conjunto de todas as funções $f \in \mathcal{A} / \sim$ tais que

$$\|f\|_{X_{b,q}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^b dx \right)^{1/b} + \left(\int_{\partial B} |f(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} < \infty. \quad (3.3)$$

A proposição abaixo está associada ao seguinte (PVI) para uma equação semilinear com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = h(u), & \text{em } \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Proposição 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira de classe C^1 e suponha*

que $u : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T])$ satisfaz (3.4). Então u satisfaz a seguinte formulação integral

$$u(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} g(x, t; \xi, s) h(u(\xi, s)) d\xi ds, \quad (3.5)$$

onde $g(x, t; \xi, s)$ denota a função de Green associada a equação semilinear

$$u_t - \Delta u = h(u). \quad (3.6)$$

Demonstração. De fato, multiplicando Equação (3.6) por $\phi_j(x)$, as autofunções do problema de autovalor (2.8) e integrando em Ω , obtemos

$$\underbrace{\int_{\Omega} u_t(x, t) \phi_j(x) dx}_{(*)} - \int_{\Omega} \Delta u(x, t) \phi_j(x) dx = \int_{\Omega} h(u(x, t)) \phi_j(x) dx.$$

Derivando a integral $(*)$ sob o sinal de integração, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u(x, t) \phi_j(x) dx \right) dt - \int_{\Omega} u(x, t) \Delta \phi_j(x) dx dt = \int_{\Omega} h(u(x, t)) \phi_j(x) dx dt.$$

A igualdade

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x, t) \phi_j(x) dx = - \int_{\Omega} u(x, t) \Delta \phi_j(x) dx \quad (3.7)$$

é obtida a partir da terceira identidade de Green (4.6) (ver Apêndice),

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \phi_j - u \Delta \phi_j dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \phi_j - u \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} \right) dS. \quad (3.8)$$

No caso de condição de Dirichlet homogênea temos $u = 0$ em $\partial\Omega$ e, como ϕ_j é autofunção do Laplaciano com Dirichlet, também $\phi_j = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, o termo de fronteira em (3.8) se anula e segue a Equação (3.7). Usando o Problema (2.8), podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u(x, t) \phi_j(x) dx \right) + \lambda_j \int_{\Omega} u(x, t) \phi_j(x) dx = \int_{\Omega} h(u(x, t)) \phi_j(x) dx. \quad (3.9)$$

Fazendo $\int_{\Omega} u(x, t) \phi_j(x) dx = v$, obtemos a EDO

$$v'(t) + \lambda_j v(t) = \int_{\Omega} h(u(x, t)) \phi_j(x) dx.$$

Multiplicando por $e^{\lambda_j t}$, obtemos

$$e^{\lambda_j t} v'(t) + \lambda_j e^{\lambda_j t} v(t) = e^{\lambda_j t} \int_{\Omega} h(u(x, t)) \phi_j(x) dx \Rightarrow \left(e^{\lambda_j t} v(t) \right)' = e^{\lambda_j t} \int_{\Omega} h(u(x, t)) \phi_j(x) dx.$$

Integrando ambos os lados da última Equação em $[0, t]$ e chamando

$$F(s) = \int_{\Omega} h(u(x, s)) \phi_j(x) dx,$$

temos

$$e^{\lambda_j t} v(t) - e^{\lambda_j \cdot 0} v(0) = \int_0^t e^{\lambda_j s} F(s) ds.$$

Como $e^0 = 1$ e $v(0) = v_0$, segue que

$$e^{\lambda_j t} v(t) - v_0 = \int_0^t e^{\lambda_j s} F(s) ds.$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{-\lambda_j t}$, obtemos

$$v(t) = e^{-\lambda_j t} v_0 + e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} F(s) ds \Rightarrow v(t) = e^{-\lambda_j t} v_0 + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)} F(s) ds.$$

Finalmente, substituindo a integral $F(s)$, chegamos que

$$v(t) = e^{-\lambda_j t} v_0 + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)} \left(\int_{\Omega} h(u(x, s)) \phi_j(x) dx \right) ds.$$

Então, podemos escrever a Equação (3.9) como

$$\int_{\Omega} u(x, t) \phi_j(x) dx = e^{-\lambda_j t} \int_{\Omega} u_0(x) \phi_j(x) dx + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)} \left(\int_{\Omega} h(u(x, s)) \phi_j(x) dx \right) ds. \quad (3.10)$$

Mas, dada uma função $u \in L^2(\Omega)$ e como $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ é uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$, podemos escrever

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(x), \quad c_j = \int_{\Omega} u(\xi) \phi_j(\xi) d\xi.$$

Daí, na Equação (3.10) se trocamos x por ξ e posteriormente multiplicarmos por $\phi_j(x)$ e somamos em j temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} u(\xi, t) \phi_j(\xi) d\xi \right) \phi_j(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \phi_j(x) \left(\int_{\Omega} u_0(\xi) \phi_j(\xi) d\xi \right) \\ &\quad + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(t-s)} \phi_j(x) \left(\int_{\Omega} h(u(\xi, s)) \phi_j(\xi) d\xi \right) ds \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \phi_j(x) \phi_j(\xi) \right) u_0(\xi) d\xi + \\ &\quad \int_0^t \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(t-s)} \phi_j(x) \phi_j(\xi) \right) h(u(\xi, s)) d\xi ds. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} g(x, t; \xi, s) h(u(\xi, s)) d\xi ds, \quad (3.11)$$

onde g é a função de Green em domínios limitados dada pela Equação (2.14). $\square$

Note que, a função $h(u)$ associada ao Problema 3.4 na proposição anterior é arbitrária. O proximo resultado permite reescrever a Equação (3.11) utilizando h como $\frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \nu} f(u(\xi, \tau))$.

Proposição 3.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e B a bola aberta tal que $\bar{B} \subset \Omega$, χ_B a função característica de B e ν o vetor normal unitário exterior a ∂B . Então, para todo $t > \tau$ e $x \in \Omega$, vale*

$$\int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \nu} f(u(\xi, \tau)) d\xi = \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\sigma(\xi),$$

onde a derivada $\frac{\partial \chi_B}{\partial \nu}$ é entendida no sentido fraco.

Demonstração. Fixemos x, t, τ e consideremos a integral

$$\int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \nu} f(u(\xi, \tau)) d\xi. \quad (3.12)$$

Interpretamos a derivada normal de χ_B no sentido distribucional, a qual produz um termo de fronteira localizado sobre a ∂B . Como $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, temos

$$\frac{\partial \chi_B}{\partial \nu} := -\nabla \chi_B \cdot \nu = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_B}{\partial \xi_i} \nu_i.$$

O sinal de menos aparece, pois o vetor é interior à bola. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \nu} f(u(\xi, \tau)) d\xi &= - \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \xi_i} \nu_i(\xi) d\xi \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \xi_i} \left(g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu_i(\xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aplicamos agora a fórmula de integração por partes (4.3) (ver Apêndice), tomando

$$u(\xi) = \chi_B(\xi), \quad v(\xi) = g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu_i(\xi).$$

Então,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \chi_B}{\partial \xi_i} v d\xi = - \int_{\Omega} \chi_B(\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi + \int_{\partial \Omega} \chi_B v \nu_D^i dS.$$

Como $\bar{B} \subset \Omega$ tem-se $\chi_B = 0$ em uma vizinhança de $\partial \Omega$ que anula o termo da fronteira. Somando em $i = 1, \dots, n$, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \chi_B}{\partial \xi_i} \left(g f(u) \nu_i \right) d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \chi_B(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu_i(\xi) \right) d\xi.$$

Além disso, como $\Omega = B \cup (\Omega - B)$ o qual é uma união disjunta, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \nu} f(u(\xi, \tau)) d\xi &\stackrel{(3.13)}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \xi_i} \left(g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu_i(\xi) \right) d\xi \\ &= \int_B \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu_i(\xi) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Agora aplicamos o teorema da divergência (4.2) (Ver Apêndice) na última integral acima, utilizando o campo vetorial

$$F(\xi) = g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu(\xi).$$

Então, $\int_B \operatorname{div}_{\xi} F(\xi) d\xi = \int_{\partial B} F(\xi) \cdot \nu(\xi) dS(\xi)$. Logo,

$$\int_B \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu_i(\xi) \right) d\xi = \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) \nu(\xi) \cdot \nu(\xi) dS(\xi). \quad (3.14)$$

Como o vetor $\nu(\xi)$ é unitário temos, obtemos

$$\int_{\Omega} g(x, t; \xi, \tau) \frac{\partial \chi_B(\xi)}{\partial \nu} f(u(\xi, \tau)) d\xi \stackrel{(3.14)}{=} \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) dS(\xi).$$

□

Daí, diante do resultado anterior, podemos escrever a seguinte equação integral, que pode ser encontrada na referência [6].

$$u(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi d\tau. \quad (3.15)$$

3.1 Existência e Unicidade

Vamos definir o espaço funcional onde buscaremos soluções para Equação (3.15). Para isto, denotaremos $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$, para $1 < r, q, b < \infty$ e $\beta \geq 0$ e definimos o espaço abaixo

$$\mathcal{E}_{b,q}^{r,T} := \left\{ u : (0, T) \rightarrow X_{b,q} \text{ Bochner-mensurável} : t^{\beta} u \in BC((0, T); L^b(\Omega)), t^{\alpha} u \in BC((0, T); L^q(\partial B)) \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}} = \sup_{0 < t < T} t^{\beta} \|u(t)\|_{L^b(\Omega)} + \sup_{0 < t < T} t^{\alpha} \|u(t)\|_{L^q(\partial B)}. \quad (3.16)$$

Consideraremos as condições

$$\beta \geq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \quad e \quad \beta > \left(\frac{r+n-1}{2r} \rho - \frac{b+n-1}{2b} \right). \quad (3.17)$$

Daqui pra frente, assumiremos que $u_0 \in L^r(\Omega)$, com $1 < r < \infty$, que nos permite considerar uma classe maior de dados iniciais e assim, somos capazes de tomar dados não contínuos. Assume-se que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) = 0$ e

$$|f(a_2) - f(a_1)| \leq \lambda |a_2 - a_1| \left(|a_2|^{\rho-1} + |a_1|^{\rho-1} \right), \quad (3.18)$$

para todos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, onde $1 < \rho < \infty$ e λ é uma constante positiva.

O teorema abaixo é o resultado principal deste trabalho, pois ele estabelece a existência e unicidade para o problema da equação semilinear com reação localizada e será demonstrada logo depois.

Teorema 3.1. *Assuma $n \geq 2$, $1 < r < b$, $q < \infty$, $1 < \rho < \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{2r+n-1}{r+n-1}, q \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b} \right) \right\}$, e as condições (1.18). Seja f satisfazendo (3.15) e $u_0 \in L^r(\Omega)$.*

(i) *(Existência e unicidade). Existe um tempo $T^* = T^*(u_0) > 0$ e uma solução única u para (3.15) pertencente a $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}$.*

(ii) *(Dependência contínua em relação aos dados). Se $u_0(x)$ e $v_0(x)$ são dois dados iniciais em $L^r(\Omega)$. Então, as respectivas soluções $u(x, t)$ e $v(x, t)$ satisfazem*

$$\|u - v\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}} \leq C \|u_0 - v_0\|_{L^r(\Omega)}, \quad (3.19)$$

para alguma constante $C > 0$ independente de u, v e de $(x, t) \in \Omega \times (0, T^*)$.

(iii) *(Positividade). Suponha que $f(z) \geq 0$ sempre que $z \geq 0$. Se $u_0 \geq 0$ q.t.p. em $x \in \Omega$, então $u(x, t) \geq 0$ q.t.p. em $x \in \Omega$ e $t \in (0, T^*)$.*

Observação 4. *O conjunto das hipóteses*

$$\left\{ 1 < r < b; 1 < \rho < \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{2r+n-1}{r+n-1}, q \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b} \right) \right\}; \beta \geq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \right\} \\ \cup \left\{ \beta > \left(\frac{r+n-1}{2r} \rho - \frac{b+n-1}{2b} \right) \right\},$$

com $n \geq 2$ e $q < \infty$, é não vazio.

Demonstração. Para mostrar que o conjunto formado pelas hipóteses é não vazio, precisamos verificar que existe uma escolha de parâmetros n , r , b , q , α , ρ , e β que satisfaça todas as condições dadas. Vamos fazer as seguintes escolhas

- $n = 2$ (o menor valor permitido).
- $r = 2$ e $b = 3$ (satisfazendo $1 < r < b < \infty$).

- $q = 2$ (satisfazendo $q < \infty$).
- $\alpha = 2$ (para simplificar a análise).

Agora, precisamos escolher ρ tal que

$$1 < \rho < \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{2r+n-1}{r+n-1}, q \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b} \right) \right\}$$

Substituindo os valores escolhidos

- Escolhendo $\alpha = 0.5$, então $\frac{1}{\alpha} = 2$.
- $\frac{2r+n-1}{r+n-1} = \frac{2 \times 2 + 2 - 1}{2 + 2 - 1} = \frac{5}{3}$.
- $q \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b} \right) = 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

Portanto, ρ deve satisfazer

$$1 < \rho < \min \left\{ 2, \frac{5}{3}, \frac{8}{3} \right\} = \frac{5}{3}$$

Escolha $\rho = 1.5$ (satisfazendo $1 < \rho < \frac{5}{3}$). Agora, precisamos escolher β que satisfaça

1. $\beta \geq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$;
2. $\beta > \left(\frac{r+n-1}{2r} \rho - \frac{b+n-1}{2b} \right)$.

Substituindo os valores escolhidos

- $\beta \geq \frac{2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 1 \times \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$;
- $\beta > \left(\frac{2+2-1}{2 \times 2} \times \frac{5}{3} - \frac{3+2-1}{2 \times 3} \right) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} - \frac{4}{6} \right) = \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{6} \right) = \frac{11}{24}$.

Portanto, β deve satisfazer

$$\beta \geq \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \beta > \frac{11}{24}.$$

Com a escolha $\beta = \frac{1}{2}$ e $n = 2$, $r = 2$, $b = 3$, $q = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{3}{2}$, e $\beta = \frac{1}{2}$, todas as condições são satisfeitas. Portanto, o conjunto formado por essas hipóteses é não vazio. $\square$

3.1.1 Prova da Parte (i) (Existência e Unicidade)

Demonstração. Para estabelecer a existência de soluções no espaço $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}$, utilizaremos o Teorema 4.3. Para $u \in \mathcal{E}_{b,q}^{r,T}$, definimos

$$\Phi(u)(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi d\tau. \quad (3.20)$$

Dado que $\rho < q \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b} \right)$, segue-se que $-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b} \right) > -1$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{q} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{q} &\iff \frac{\rho}{q} - \frac{1}{q} < \frac{1}{n-1} \\ &\iff \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{q} \right) < \frac{1}{2} \\ &\iff -\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{q} \right) > -1. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades (2.37) e (2.44) o Exemplo (4.1) (ver Apêndice) para estimar o operador (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} &\leq C_3 t^{-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} + \int_0^t \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi \right\|_{L^b(\Omega)} d\tau \\ &\leq C_3 t^{-\beta} t^{\beta - \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ &\quad + C_5 \int_0^t \max \left\{ 1, (t - \tau)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1 \right)} \right\} (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b} \right)} \|f(u(\tau))\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} d\tau \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_3 t^{-\beta} t^{\beta - \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ &\quad + C_5 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2} \left(-\frac{\rho}{q} + \frac{1}{b} + 1 \right)} \right\} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b} \right)} \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^\rho d\tau. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da expressão (3.21) para a desigualdade (3.22), precisamos demonstrar que

$$\|f(u(\tau))\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \leq \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^\rho.$$

Sabemos que f satisfaz a Equação (3.15). Tomando $a_1 = 0$ e $a_2 = u(\tau)$, obtemos

$$|f(u(\tau)) - f(0)| \leq \lambda |u(\tau)| \left(|u(\tau)|^{\rho-1} + |0|^{\rho-1} \right) = \lambda |u(\tau)|^\rho.$$

Como $f(0) = 0$, então segue-se que

$$|f(u(\tau))| \leq \lambda |u(\tau)|^\rho.$$

Elevando ambos os lados a potência $\frac{q}{\rho}$ e integrando sobre ∂B , obtemos que

$$\|f(u(\tau))\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)}^{\frac{q}{\rho}} \leq \lambda^{\frac{q}{\rho}} \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^q.$$

Tomando a raiz de ordem $\frac{q}{\rho}$, obtemos o seguinte

$$\|f(u(\tau))\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \leq \lambda \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^\rho.$$

Continuando da desigualdade (3.22), podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} \\
& \leq C_3 t^{-\beta} t^{\beta - \frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\
& + C_5 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1)} \right\} \left(\int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \right) \left(\sup_{0 < \tau < t} \tau^\alpha \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho \\
& \leq C_3 t^{-\beta} t^{\beta - \frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\
& + \tilde{C}_1 C_5 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1)} \right\} t^{-\beta} t^{\frac{1}{2} + \beta - \rho\alpha - \frac{n-1}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \left(\sup_{0 < \tau < t} \tau^\alpha \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Isso ocorre pois $\rho\alpha < 1$, que é válida devido as hipóteses do Teorema 3.1.

Pela Definição da norma dada pela Equação (1.19), temos que $\sup_{0 < s < t} s^\alpha \|u(s)\|_{L^q(\partial B)} < \infty$, daí podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \tau^\alpha & \leq \sup_{0 < s < t} s^\alpha \|u(s)\|_{L^q(\partial B)} \iff \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \leq \tau^{-\alpha} \sup_{0 < s < t} s^\alpha \|u(s)\|_{L^q(\partial B)} \\
& \iff \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^\rho \leq \tau^{-\rho\alpha} \left(\sup_{0 < s < t} s^\alpha \|u(s)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho.
\end{aligned}$$

Então, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} d\tau \\
& \leq \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \left(\sup_{0 < s < t} s^\alpha \|u(s)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho.
\end{aligned}$$

Relembramos que, para $n \geq 2$, temos

$$\rho < q \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b} \right) \implies \left(-\frac{\rho}{q} + \frac{1}{b} \right) > -1. \quad (3.24)$$

Agora levando em consideração a hipótese (1.18) queremos provar que

$$\frac{1}{2} + \beta - \rho\alpha - \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b} \right) > 0, \quad \text{com } \rho\alpha < 1. \quad (3.25)$$

Relembramos que

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right). \quad (3.26)$$

Substituindo Equação (3.26) na desigualdade (3.25)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} + \beta - \rho \left[\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \right] - \frac{n-1}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b} \right) > 0 \\
& = \frac{1}{2} + \beta - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho(n-1)}{2r} + \frac{\rho(n-1)}{2q} - \frac{\rho(n-1)}{2q} + \frac{n-1}{2b} > 0 \\
& = \beta + \frac{1}{2} - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho(n-1)}{2r} + \frac{n-1}{2b} > 0 \\
& = \beta - \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2r} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2b} \right) > 0. \\
& \implies \beta > \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2r} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2b} \right),
\end{aligned}$$

a qual é apenas uma reescrita da hipótese (3.17). Assim, pelas desigualdades (3.24), (3.25) e (3.23) segue-se que

$$\begin{aligned}
\sup_{0 < t < T} t^\beta \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} & \leq C_3 T^{\beta - \frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\
& + \tilde{C}_1 C_5 \max \left\{ 1, T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1)} \right\} T^{\frac{1}{2} + \beta - \rho\alpha - \frac{n-1}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial\Omega)} \right)^\rho.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Por outro lado, como $\alpha < \frac{1}{\rho} < 1$, temos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 \right) > 0. \tag{3.28}$$

De fato, como $\rho\alpha < 1$, e $\rho > 1$, segue que $\alpha < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) < 1 & \iff \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) < \frac{1}{2} \\
& \iff (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) < 1.
\end{aligned}$$

Como $n \geq 2$, temos $n-1 \geq 1$. Portanto, $\frac{1}{r} - \frac{1}{q} < 1$. Assim,

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 > 0.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2} > 0$, concluímos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 \right) > 0.$$

Considere o valor de $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$ e $\rho < \frac{2r+n-1}{r+n-1}$ temos que

$$\underbrace{\frac{1}{2} - (\rho - 1)\alpha - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{\rho-1}{q} \right)}_{I_1} > 0.$$

De fato, podemos fatorar $(\rho - 1)$ em I_1 :

$$\frac{1}{2} - (\rho - 1) \left[\alpha + \frac{n-1}{2q} \right] > 0 \iff (\rho - 1) \left[\alpha + \frac{n-1}{2q} \right] < \frac{1}{2}.$$

Substituindo α ,

$$\alpha + \frac{n-1}{2q} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) + \frac{n-1}{2q} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2r}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} (\rho - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2r} \right) < \frac{1}{2} &\iff (\rho - 1) \left(1 + \frac{n-1}{r} \right) < 1 \\ &\iff (\rho - 1) \cdot \frac{r+n-1}{r} < 1 \\ &\iff \rho - 1 < \frac{r}{r+n-1} \\ &\iff \rho < 1 + \frac{r}{r+n-1} = \frac{2r+n-1}{r+n-1}. \end{aligned}$$

Note que, pela hipótese $\frac{2r+n-1}{r+n-1}$, segue-se que $I_1 > 0$. Agora, empregando as desigualdades (2.38) e (2.45), estimamos

$$\begin{aligned} &\|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^q(\partial B)} \\ &\leq C_4 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 \right)} \right\} t^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ &+ C_6 \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \right)} \|f(u(\tau))\|_{L^{\frac{q}{p}}(\partial \Omega)} d\tau \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_4 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 \right)} \right\} t^{-\alpha} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ &+ C_6 \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \right)} \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^\rho d\tau. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Da desigualdade (3.29) para (3.30) procedemos como na demonstração da estimativa

(3.21) para (3.22), a qual não depende de Ω . Daí, devido a desigualdade (3.30), temos

$$\begin{aligned} & \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^q(\partial B)} \\ & \leq C_4 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1)} \right\} t^{-\alpha} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ & + C_6 \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q})} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \right) \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^\alpha \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & \leq C_4 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1)} \right\} t^{-\alpha} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ & + \tilde{C}_2 C_6 t^{-\alpha} t^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^\alpha \|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Em vista da condição (3.28), a estimativa (3.32) implica que

$$\begin{aligned} & \sup_{0<t<T} t^\alpha \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^q(\partial B)} \leq C_4 \max \left\{ 1, T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1)} \right\} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ & + \tilde{C}_2 C_6 T^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Seja Λ um número fixo tal que $\Lambda = \tilde{C}(T)\|u_0\|_{L^r(\Omega)}$ e considere a bola

$$\mathcal{B}_{2\Lambda} = \left\{ u \in \mathcal{E}_{b,q}^{r,T} : \|u\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}} \leq 2\Lambda \right\}, \quad (3.34)$$

onde

$$\tilde{C}(T) = C_3 T^{\beta-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})} + C_4 \max \left\{ 1, T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1)} \right\} > 0.$$

Denotamos

$$\begin{aligned} K(T) &= \tilde{C}_1 C_5 \max \left\{ 1, T^{\frac{1}{2}(-\frac{\rho}{q}+\frac{1}{b}+1)} \right\} T^{\frac{1}{2}+\beta-\rho\alpha-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{r})} \\ &+ \tilde{C}_2 C_6 T^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} \\ &:= K_1(T) + K_2(T), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, C_5 e C_6 são como nas desigualdades (3.27) e (3.33). Segue que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}} &= \sup_{0<t<T} t^\beta \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} + \sup_{0<t<T} t^\alpha \|\Phi(u)(\cdot, t)\|_{L^q(\partial B)} \\ &\leq \left(C_3 T^{\beta-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})} + C_4 \max \left\{ 1, T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1)} \right\} \right) \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ &+ \left(\tilde{C}_1 C_5 \max \left\{ 1, T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1)} \right\} T^{\frac{1}{2}+\beta-\rho\alpha-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} + \tilde{C}_2 C_6 T^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} \right) \\ &\times \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho = \tilde{C}(T)\|u_0\|_{L^r(\Omega)} + K(T) \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^\rho \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\leq 2\tilde{C}(T)\|u_0\|_{L^r(\Omega)} = 2\Lambda \quad (3.37)$$

A passagem da expressão (3.36) para a desigualdade (3.37) fica justificada por

$$K(T) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } T \rightarrow 0^+.$$

De fato, como $K(T)$ é definido em (3.35). Analisamos o comportamento $\max\{1, T^{\alpha_1}\}$ em $K_1(T)$ quando $T \rightarrow 0^+$ dada pela definição (3.35) vemos que ela pode ser majorada por uma potência de T , daí devido o fato que todos os expoentes de T serem positivos em $K(T)$, temos que existem $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tais que;

$$K(T) \leq C (T^{\alpha_1} + T^{\alpha_2}).$$

Como, para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} T^\alpha = 0,$$

segue que

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} K(T) \leq \lim_{T \rightarrow 0^+} C (T^{\alpha_1} + T^{\alpha_2}) = 0.$$

Portanto,

$$K(T) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } T \rightarrow 0^+.$$

Então, desde que $T > 0$ seja suficientemente pequeno e $u \in \mathcal{B}_{2\Lambda}$, mostramos que $\Phi(\mathcal{B}_{2\Lambda}) \subset \mathcal{B}_{2\Lambda}$.

A seguir, provaremos que $\Phi|_{\mathcal{B}_{2\Lambda}}$ é uma contração. Para isso, tomamos $u, v \in \mathcal{B}_{2\Lambda}$ e lembramos da estimativa de f dada por (3.15). Estimamos

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(\cdot, t) - \Phi(v)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} &\leq \int_0^t \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) |f(u)(\xi, \tau) - f(v)(\xi, \tau)| d\xi \right\|_{L^b(\Omega)} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)| \left(|u(\xi, \tau)|^{\rho-1} + |v(\xi, \tau)|^{\rho-1} \right) d\xi \right\|_{L^b(\Omega)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando o Lema 2.5 com $\tilde{r} = b$ e $d = \frac{q}{\rho}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\|\Phi(u)(\cdot, t) - \Phi(v)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} \\ &\leq \int_0^t \left(C_5 \max \left\{ 1, (t - \tau)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1 \right)} \right\} \right) (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b} \right)} \\ &\quad \times \| |u(\tau) - v(\tau)| \left(|u(\tau)|^{\rho-1} + |v(\tau)|^{\rho-1} \right) \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Na expressão (3.39), vamos mostrar que

$$\begin{aligned} &\| |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)| \left(|u(\xi, \tau)|^{\rho-1} + |v(\xi, \tau)|^{\rho-1} \right) \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \\ &\leq \|u - v\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} + \|v\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} \right). \end{aligned}$$

De fato, para cada $\tau \in (0, t)$, defina

$$\varphi(\xi, \tau) := |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)| \left(|u(\xi, \tau)|^{\rho-1} + |v(\xi, \tau)|^{\rho-1} \right), \quad \xi \in \partial B.$$

Agora, precisamos estimar

$$\|\varphi(\cdot, \tau)\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} = \| |u - v| (|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}) \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)}.$$

Usando a desigualdade triangular, vemos que

$$\|\varphi(\cdot, \tau)\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \leq \| |u - v| |u|^{\rho-1} \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} + \| |u - v| |v|^{\rho-1} \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)}.$$

Vamos aplicar Hölder 1.4 em cada termo com expoentes

$$p_1 = q, \quad p_2 = \frac{q}{\rho - 1}.$$

Note que, pelas hipótese do Teorema 3.1, segue que $r + n - 1 > r \Rightarrow \frac{r}{r+n-1} < 1$, mas $\frac{2r+n-1}{r+n-1} = 1 + \frac{r}{r+n-1} < 2$. Portanto,

$$\rho < \frac{2r + n - 1}{r + n - 1} < 2.$$

Como tomamos $q > 1$, temos

$$\rho < 2 \Rightarrow \rho - 1 < 1 < q,$$

e assim concluimos que

$$q > \rho - 1.$$

Assim,

$$\| |u - v| |u|^{\rho-1} \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \leq \|u - v\|_{L^q(\partial B)} \| |u|^{\rho-1} \|_{L^{q/(\rho-1)}(\partial B)},$$

e

$$\| |u - v| |v|^{\rho-1} \|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \leq \|u - v\|_{L^q(\partial B)} \| |v|^{\rho-1} \|_{L^{q/(\rho-1)}(\partial B)}.$$

Além disso,

$$\| |u|^{\rho-1} \|_{L^{q/(\rho-1)}(\partial B)} = \|u\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1},$$

e analogamente

$$\| |v|^{\rho-1} \|_{L^{q/(\rho-1)}(\partial B)} = \|v\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1}.$$

Portanto,

$$\|\varphi(\cdot, \tau)\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \leq \|u - v\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} + \|v\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} \right).$$

Daí, retornando da desigualdade (3.39) e lembrando da definição de $K(T)$ em

(3.35), obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\Phi(u)(\cdot, t) - \Phi(v)(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} \\
& \leq C_5 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1)} \right\} \int_0^t \left((t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \tau^{-\rho\alpha} \tau^{\rho\alpha} \right) \\
& \quad \times \|u(\tau) - v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} + \|v(\tau)\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} \right) d\tau \\
& \leq C_5 \max \left\{ 1, t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1)} \right\} \left(\int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b})} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \\
& \quad \times \left[\left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^{\rho-1} + \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^{\rho-1} \right] \\
& \leq K_1(T) t^{-\beta} \left[(2\Lambda)^{\rho-1} + (2\Lambda)^{\rho-1} \right] \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \\
& = t^{-\beta} 2^\rho K_1(T) \Lambda^{\rho-1} \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

De modo análogo, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^b(\partial B)} & \leq \int_0^t \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) |f(u)(\xi, \tau) - f(v)(\xi, \tau)| d\xi \right\|_{L^b(\partial B)} d\tau \\
& \leq C \int_0^t \left\| \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) |u(\xi, \tau) - v(\xi, \tau)| (|u(\xi, \tau)|^{\rho-1} + |v(\xi, \tau)|^{\rho-1}) d\xi \right\|_{L^b(\partial B)} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Usando o Lema 2.5, a Desigualdade de Hölder 1.4 e lembrando $K(T)$ em (3.35), obtemos,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^q(\partial B)} & \leq C_6 \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} \|u - v\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} + \|v\|_{L^q(\partial B)}^{\rho-1} \right) d\tau \\
& \leq C_6 \left(\int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2}(\frac{\rho-1}{q})} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \\
& \quad \times \left[\left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^{\rho-1} + \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^{\rho-1} \right] \\
& \leq t^{-\alpha} K_2(T) \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \left[(2\Lambda)^{\rho-1} + (2\Lambda)^{\rho-1} \right] \\
& = t^{-\alpha} 2^\rho K_2(T) \Lambda^{\rho-1} \left(\sup_{0 < t < T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

A demonstração finalizará tomando $T = T^* > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$2^\rho K(T) \Lambda^{\rho-1} < 1$$

o que é possível, pois $K(T) \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0^+$. De fato, à vista das estimativas (3.40)–(3.42), concluímos que $\Phi : \mathcal{B}_{2\Lambda} \rightarrow \mathcal{B}_{2\Lambda}$ é uma contração. Assim, Φ possui um ponto fixo em $\mathcal{B}_{2\Lambda}$, que é a solução única da Equação (3.15) em $\mathcal{B}_{2\Lambda}$. $\square$

3.1.2 Prova da Parte (ii) (Dependência contínua em relação aos dados)

Afirma que pequenas perturbações nos dados iniciais u_0 geram pequenas perturbações na solução. A desigualdade (3.19) é uma estimativa de Lipschitz.

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}$ duas soluções dada pela Equação (3.15) obtidas na Parte (i). Segue-se que

$$u(x, t) - v(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0)(u_0 - v_0)(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) (f(u) - f(v))(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.43)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - v(x, t)\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}} &\leq \left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0)(u_0 - v_0)(\xi) d\xi \right\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) (f(u) - f(v))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De maneira análoga a (3.40) e (3.42), obtemos

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) |f(u)(\xi, \tau) - f(v)(\xi, \tau)| d\xi d\tau \right\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}} = \\ &\sup_{0 < t < T^*} t^\beta \left\| \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) (f(u) - f(v))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{L^b(\Omega)} \\ &+ \sup_{0 < t < T^*} t^\alpha \left\| \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) (f(u) - f(v))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{L^q(\partial B)} \\ &\leq 2^\rho K(T^*) \Lambda^{\rho-1} \left(\sup_{0 < t < T^*} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \\ &\leq 2^\rho K(T^*) \Lambda^{\rho-1} \|u - v\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $K(T^*)$ é definido em (3.35) e $2^\rho K(T^*) \Lambda^{\rho-1} < 1$. Por outro lado pelo Lema 2.4,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0)(u_0 - v_0)(\xi) d\xi \right\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}} &= \sup_{0 < t < T^*} t^\beta \left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0)(u_0 - v_0)(\xi) d\xi \right\|_{L^q(\Omega)} \\ &\quad + \sup_{0 < t < T^*} t^\alpha \left\| \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0)(u_0 - v_0)(\xi) d\xi \right\|_{L^q(\partial B)} \\ &\leq \left(T^{*\beta} C_3 T^{*- \frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} + T^{*\alpha} C_4 T^{*- \frac{1}{2} - \frac{(n-1)}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \right) \\ &\quad \times \max \left\{ 1, T^{*\frac{1}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1)} \right\} \|u_0 - v_0\|_{L^r(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Como $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$, segue de (3.44) - (3.46) que

$$\|u - v\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}} \leq \frac{C_3 T^{*\beta - \frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} + C_4 \max \left\{ 1, T^{*\frac{1}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1)} \right\}}{1 - 2^\rho K(T^*) \Lambda^{\rho-1}} \|u_0 - v_0\|_{L^r(\Omega)},$$

provando a dependência contínua em relação aos dados iniciais. Note que, quando $u_0 = v_0$ obtemos que $u = v$ em $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}$ $\square$

3.1.3 Prova da Parte (iii) (Positividade)

Demonstração. A existência de uma solução $u \in \mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}$ para Equação (3.15) foi obtida por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach para o operador

$$\Phi : \mathcal{B}_{2\Lambda} \rightarrow \mathcal{B}_{2\Lambda},$$

definido por

$$\Phi(u)(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u(\xi, \tau)) d\xi d\tau.$$

Assim, u é o limite em $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}$ da seguinte sequência iterativa

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi, \\ u_{k+1}(x, t) &= \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u_k(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Recordamos que, para cada $(\xi, \tau) \in \Omega \times [0, T)$ fixo, tem-se que $g(x, t; \xi, \tau) > 0$ para todo $(x, t) \in \Omega \times (\tau, T]$ (cf. [11]). Isso nos permite provar, por indução, que $u_k(x, t) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, para $k = 1$,

$$u_1(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi.$$

Como $u_0(\xi) \geq 0$ e $g(x, t; \xi, 0) > 0$, segue que $u_1(x, t) \geq 0$ para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$. Suponha por indução que $u_{k-1}(x, t) \geq 0$ para certo $k \in \mathbb{N}$ e todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$, como $f(z) \geq 0$ para $z \geq 0$, temos $f(u_{k-1}(\xi, \tau)) \geq 0$. Levando em consideração que, $g(x, t; \xi, \tau) > 0$, temos que $u_k(x, t) \geq 0$.

Assim, como $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$ em $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}$, e essa convergência preserva a desigualdade q.t.p. então

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{q.t.p.} \quad \Omega \times (0, T^*).$$

Temos que;

$$u_{k+1}(x, t) = \int_{\Omega} g(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} g(x, t; \xi, \tau) f(u_k(\xi, \tau)) d\xi d\tau.$$

Ou seja, o limite u satisfaz $u(x, t) \geq 0$ porque a convergência na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*}}$ preserva a positividade. De fato, como

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em } \mathcal{E}_{b,q}^{r,T^*},$$

temos, em particular, que

$$\sup_{0 < t < T^*} t^\beta \|u_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Logo, para cada $t \in (0, T^*)$ fixado,

$$\|u_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Como $u_k(x, t) \geq 0$ q.t.p. em Ω , consideremos a parte negativa de u ,

$$u^-(x, t) = \max\{-u(x, t), 0\}.$$

No conjunto onde $u(x, t) < 0$, temos $u_k(x, t) \geq 0$, e portanto

$$|u(x, t)| \leq |u(x, t) - u_k(x, t)|.$$

Assim,

$$u^-(x, t) \leq |u(x, t) - u_k(x, t)|.$$

Consequentemente,

$$\|u^-(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} \leq \|u(\cdot, t) - u_k(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)}.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|u^-(\cdot, t)\|_{L^b(\Omega)} = 0.$$

Portanto,

$$u^-(\cdot, t) = 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Isto implica

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

para cada $t \in (0, T^*)$. Como u é mensurável em $\Omega \times (0, T^*)$, concluímos que

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega \times (0, T^*).$$

□

3.1.4 Conclusão

Nesta dissertação estudamos um problema de valor inicial associado à equação do calor semilinear com reação localizada. O principal objetivo foi compreender a formulação matemática do problema, bem como os mecanismos analíticos envolvidos na obtenção de resultados de existência, unicidade e propriedades qualitativas das soluções.

Inicialmente, apresentamos os conceitos fundamentais relacionados à equação do calor, às funções de Green e aos espaços funcionais necessários para o desenvolvimento da teoria. Em particular, destacamos a importância dos espaços $X_{b,q}$ e $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}$, que permitem tratar dados iniciais não contínuos e fontes concentradas sobre a fronteira de uma sub-região do domínio.

Utilizando desigualdades integrais, estimativas em espaços L^p e o Teorema do Ponto Fixo de Banach, demonstramos a existência local e unicidade de soluções no espaço $\mathcal{E}_{b,q}^{r,T}$. Além disso, estudamos propriedades qualitativas importantes, como positividade das soluções e dependência contínua em relação aos dados iniciais.

Outro aspecto relevante desenvolvido ao longo do trabalho foi o estudo detalhado da função de Green, incluindo propriedades de positividade, monotonicidade em relação ao domínio e sua interpretação como solução fundamental da equação do calor. Tais resultados fornecem uma compreensão mais profunda da estrutura analítica do problema e justificam rigorosamente a fórmula de representação utilizada.

Capítulo 4

Apêndice

Este apêndice tem como objetivo apresentar as ferramentas básicas e necessárias para a compreensão dos resultados principais desta dissertação. Inicialmente, trouxemos as definições das funções Gamma e Beta, resultados envolvendo a integração em Coordenadas Esféricas os quais se encontram no livro de Grafakos [13]. E também o Teorema do Ponto Fixo.

Definição 4.1. *Para um número complexo z com $\operatorname{Re} z > 0$, define-se*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Essa função chama-se função Gama.

Proposição 4.1. *As seguintes igualdades são válidas*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

e

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{e} \quad \Gamma(1) = 1,$$

bem como

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Demonstração. Está na p.563 da referência [13]. □

A seguir, definimos a função Beta.

Definição 4.2. *Fixamos z e w como números complexos com partes reais positivas. Definimos*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \int_0^1 t^{w-1} (1-t)^{z-1} dt. \quad (4.1)$$

Como aplicação da função Beta temos o exemplo abaixo que é utilizado no Capítulo 2.

Exemplo 4.1. *Sejam $\delta_1, \delta_2 > -1$. Então a integral*

$$\int_0^t (t - \tau)^{\delta_1} \tau^{\delta_2} d\tau = Ct^{1+\delta_1+\delta_2}$$

a qual pode ser calculada através da função beta.

Demonstração. De fato, considerando a mudança de variável $\tau = ts$, temos $d\tau = tds$ e $\tau = 0$ e $\tau = t$ implicam, respectivamente, que $s = 0$ e $s = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{\delta_1} \tau^{\delta_2} d\tau &= \int_0^1 (t - ts)^{\delta_1} (ts)^{\delta_2} tds \\ &= t^{1+\delta_1+\delta_2} \int_0^1 s^{\delta_2} (1 - s)^{\delta_1} ds \\ &= t^{1+\delta_1+\delta_2} B(\delta_1 + 1, \delta_2 + 1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^t (t - \tau)^{\delta_1} \tau^{\delta_2} d\tau = Ct^{1+\delta_1+\delta_2}, \quad \text{onde } C = B(\delta_1 + 1, \delta_2 + 1).$$

□

Proposição 4.2. *Se $a > 0$, então*

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a|x|^2) dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Demonstração. Veja p.79 de [10].

□

Teorema 4.1. *Seja $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função na reta. Para $n \geq 2$, temos*

$$\int_{S^{n-1}} K(x \cdot \theta) d\theta = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 K(s|x|) (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds$$

quando $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demonstração. Veja p.593 de [13].

□

Proposição 4.3. *A integral $\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x-Rz|^2}{4(t-\tau)}p} d\sigma(z)$ é invariante por rotação em x .*

Demonstração. De fato, considere aplicar uma rotação Tx , a qual sabemos que no $\mathbb{R}^n$ é ortogonal, ou seja $TT^* = I$, ao substituirmos x por Tx em $|x - Rz|^2$, a nova distância ao quadrado será:

$$\begin{aligned} |Tx - Rz|^2 &= |T(x - T^{-1}Rz)|^2 \\ &= |x - T^{-1}Rz|^2 \\ &= |x - z'R|^2, \quad \text{onde } z' = T^{-1}z. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade utilizamos $|Tu| = |u|$. Daí podemos escrever

$$d\sigma(z) = |\det(T)|d\sigma(z').$$

Mas, $|\det(T)| = 1$, pois $TT^* = I$. Portanto chegamos o seguinte

$$\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|Tx-Rz|^2}{4(t-\tau)}} d\sigma(z) = \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x-Rz'|^2}{4(t-\tau)}} d\sigma(z').$$

□

A ideia da demonstração do teorema a seguir pode ser encontrado na p.627 e p.628 da referência [8].

Teorema 4.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 .*

1. *Se $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, então vale o Teorema da Divergência*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS. \quad (4.2)$$

2. *Se $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, então, para todo $i = 1, \dots, n$, vale a fórmula de integração por partes*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i \, dS. \quad (4.3)$$

3. *Se $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, então valem as identidades de Green*

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS, \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS, \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \quad (4.6)$$

Teorema do Ponto fixo de Banach

Para finalizar essa seção vamos enunciar abaixo o Teorema do ponto fixo de Banach, o qual foi utilizado na demonstração do Teorema 3.1.

Definição 4.3. *Dizemos que um ponto é um ponto fixo de uma aplicação*

$$\omega : M \rightarrow M$$

de um espaço métrico M nele mesmo se

$$\omega(a) = a.$$

Também pode ocorrer que uma sequência de iteradas convirja a um ponto $a \in M$; nesse caso, se a aplicação $\omega : M \rightarrow M$ é contínua, então necessariamente a é um ponto fixo de ω , pois

$$\omega(a) = \omega(\lim x_n) = \lim \omega(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Definição 4.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação*

$$T : M \rightarrow M$$

é chamada de contração se existe uma constante $0 < k < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Teorema 4.3. *Uma contração de um espaço métrico completo possui um único ponto fixo, que é necessariamente atrator, ou seja, tal que $\lim x_n = a$ para aproximações sucessivas de qualquer ponto $x \in M$.*

Demonstração. Para verificar a demonstração do resultado acima consultar a referência [7] p.338-340. □

Referências Bibliográficas

- [1] BAZÁN, A., PEREIRA, A. F., AND DE SOUZA FERNANDEZ, C. Introdução aos espaços de banach. *34º Colóquio Brasileiro de Matemática* (2023).
- [2] BIMPONG-BOTA, K., ORTOLEVA, P., AND ROSS, J. Far-from-equilibrium phenomena at local sites of reaction. *The Journal of Chemical Physics* 60, 8 (1974), 3124–3133.
- [3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012.
- [4] BREZIS, H., AND CAZENAVE, T. A nonlinear heat equation with singular initial data. *J. Anal. Math.* 68 (1996), 277–304.
- [5] CHADAM, J. M., AND YIN, H.-M. A diffusion equation with localized chemical reactions. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)* 37, 1 (1994), 101–118.
- [6] CHAN, C. Y., AND TIAN, H. Y. Multi-dimensional explosion due to a concentrated nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl.* 295, 1 (2004), 174–190.
- [7] DOERING, C. I., AND LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 2014.
- [8] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, vol. 19. American mathematical society, 2022.
- [9] FERREIRA, L. C., AND VILLAMIZAR-ROA, E. J. A semilinear heat equation with a localized nonlinear source and non-continuous initial data. *Mathematical methods in the applied sciences* 34, 15 (2011), 1910–1919.
- [10] FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1999.
- [11] FRIEDMAN, A. *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Dover Publications, 2008.
- [12] FURTADO, M. Notas de edp 2, 2023.

- [13] GRAFAKOS, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson Education, Inc, 2004.
- [14] STAKGOLD, I. *Boundary value problems of mathematical physics: volume 2*. SIAM, 2000.
- [15] TEIXEIRA, D. M. Alguns espaços métricos completos na teoria de equações diferenciais parciais. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática* 3, 1 (2018), 50–58.