



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE ITABAIANA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIEL DOS SANTOS

**Uma introdução histórica à Geometria Hiperbólica e
aplicações trigonométricas**

Itabaiana
2026

GABRIEL DOS SANTOS

**Uma introdução histórica à Geometria Hiperbólica e
aplicações trigonométricas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE

Itabaiana

2026

GABRIEL DOS SANTOS

Uma introdução histórica à Geometria Hiperbólica e aplicações trigonométricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática de Itabaiana, Universidade Federal de Sergipe, como requisito avaliativo para obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

Primeiro examinador
Prof. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE
Universidade Federal de Sergipe

Segundo examinador
Prof. Dr. ÉDER MATEUS DE SOUZA
Universidade Federal de Sergipe

Terceiro examinador
Prof. Me. WAGNER FERREIRA SANTOS
Universidade Federal de Sergipe

Resultado _____

Data ____/____/____

RESUMO

Este trabalho analisa a evolução histórica e matemática da geometria, com foco na ruptura do dogma euclidiano e na consolidação da geometria hiperbólica como base para a física moderna. A pesquisa objetiva descrever a transição do sistema axiomático de Euclides para os modelos não euclidianos, demonstrando como a negação do quinto postulado fundamenta novas compreensões do espaço. O método utiliza uma revisão bibliográfica e documental de caráter dedutivo fundamentando-se, principalmente na obra de Barbosa para reconstruir o rigor lógico das demonstrações geométricas. A discussão percorre as tentativas fracassadas de matemáticos como Ptolomeu, Proclus e Saccheri em provar o postulado das paralelas, culminando na descoberta independente de Gauss, Bolyai e Lobachewsky. O texto detalha propriedades elementares da geometria neutra e hiperbólica, como os quadriláteros de Saccheri e Lambert, triângulos generalizados e a trigonometria hiperbólica. Os resultados evidenciam que a geometria hiperbólica fornece o arcabouço matemático necessário para a Teoria da Relatividade de Einstein.

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica; Quinto Postulado; Trigonometria Hiperbólica.

ABSTRACT

This work analyzes the historical and mathematical evolution of geometry, focusing on the rupture of the Euclidean dogma and the consolidation of hyperbolic geometry as a foundation for modern physics. The research aims to describe the transition from Euclid's axiomatic system to non-Euclidean models, demonstrating how the negation of the fifth postulate grounds new understandings of space. The method utilizes a bibliographic and documental review of a deductive nature, based principally in Barbosa's works to reconstruct the logical rigor of geometric demonstrations (BARBOSA, 2007). The discussion covers the failed attempts by mathematicians such as Ptolemy, Proclus, and Saccheri to prove the parallel postulate, culminating in the independent discovery by Gauss, Bolyai, and Lobachevsky. The text details elementary properties of neutral and hyperbolic geometry, such as Saccheri and Lambert quadrilaterals, generalized triangles, and hyperbolic trigonometry. The results highlight that hyperbolic geometry provides the necessary mathematical framework for Einstein's Theory of Relativity.

Keywords: Hyperbolic Geometry; Fifth Postulate; Hyperbolic Trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação da Área de um círculo no Egito antigo.	12
Figura 2 – Base para demonstração de Ptolomeu.	18
Figura 3 – Base para demonstração de Prolus.	21
Figura 4 – Quadrilátero de Saccheri.	22
Figura 5 – Construção auxiliar da proposição 3.	22
Figura 6 – Construção auxiliar do lema 1.	23
Figura 7 – Construção auxiliar da proposição 4.	24
Figura 8 – Construção auxiliar da proposição 4.	24
Figura 9 – Construção auxiliar da proposição 4.	24
Figura 10 – Construção auxiliar da proposição 5.	25
Figura 11 – Triângulo auxiliar para proposição 7.	27
Figura 12 – Construção auxiliar da proposição 7.	28
Figura 13 – Construção auxiliar da proposição 8.	29
Figura 14 – Duas retas paralelas a uma reta dada passando por um ponto fora dela.	34
Figura 15 – Construção auxiliar da proposição 9.	35
Figura 16 – Os ângulos de paralelismo são congruentes.	36
Figura 17 – Construção auxiliar do teorema 3 para o primeiro caso.	37
Figura 18 – Construção auxiliar do teorema 3 para o segundo caso.	38
Figura 19 – Construção auxiliar do teorema 4.	39
Figura 20 – Construção auxiliar do teorema 5 para o primeiro caso.	40
Figura 21 – Construção auxiliar do teorema 5 para o segundo caso.	40
Figura 22 – Triângulo generalizado com um ponto ideal.	41
Figura 23 – Triângulo generalizado com dois pontos ideais.	41
Figura 24 – Triângulo generalizado com três pontos ideais.	42
Figura 25 – Construção auxiliar do teorema 6.	42
Figura 26 – Construção auxiliar do teorema 6.	43
Figura 27 – Construção auxiliar do teorema 7.	43
Figura 28 – Construção auxiliar do teorema 7.	44
Figura 29 – Construção auxiliar do teorema 8.	45
Figura 30 – Construção auxiliar do teorema 8.	45
Figura 31 – Construção auxiliar do teorema 9.	46
Figura 32 – Construção auxiliar do teorema 9.	46
Figura 33 – Construção auxiliar do teorema 10.	47
Figura 34 – Construção auxiliar do teorema 10.	47

Figura 35 – Construção auxiliar do teorema 11.	48
Figura 36 – Construção auxiliar do teorema 11.	48
Figura 37 – Construção auxiliar da função ângulo de paralelismo.	49
Figura 38 – Construção auxiliar do teorema 13.	51
Figura 39 – Construção auxiliar do teorema 14.	51
Figura 40 – Construção auxiliar do teorema 14.	51
Figura 41 – Construção auxiliar do teorema 15.	52
Figura 42 – Construção auxiliar do teorema 15.	53
Figura 43 – Construção auxiliar do teorema 15.	53
Figura 44 – Construção auxiliar do teorema 16 para o primeiro caso.	54
Figura 45 – Construção auxiliar do teorema 16 para o segundo caso.	55
Figura 46 – Construção auxiliar do teorema 16 para o terceiro caso.	55
Figura 47 – Exemplos de retas ultra-ideais	56
Figura 48 – Construção auxiliar do teorema 17.	57
Figura 49 – Pontos correspondentes.	59
Figura 50 – Construção auxiliar do teorema 18.	59
Figura 51 – Construção auxiliar do teorema 19.	59
Figura 52 – Construção auxiliar do teorema 21.	60
Figura 53 – Construção auxiliar do teorema 22.	62
Figura 54 – Construção auxiliar do teorema 23	64
Figura 55 – Construção auxiliar do teorema 24	65
Figura 56 – Construção auxiliar da Trigonometria hiperbólica.	67
Figura 57 – Figura inicial do teorema 25.	68
Figura 58 – Construção auxiliar do teorema 25.	69
Figura 59 – Sistema de coordenads.	70
Figura 60 – Construção auxiliar da proposição 14.	70
Figura 61 – Construção auxiliar da proposição 15	72
Figura 62 – Construção auxiliar da proposição 16.	73
Figura 63 – Construção auxiliar da proposição 17.	75
Figura 64 – Construção auxiliar do corolário 7.	77
Figura 65 – Construção auxiliar do teorema 27.	81
Figura 66 – Reta contruída a partir de dois pontos.	88
Figura 67 – Semi-reta.	88
Figura 68 – M é o ponto médio entre A e B	90
Figura 69 – Ângulo $\angle BAC$	90
Figura 70 – $\angle BAD$ é o ângulo suplementar a $\angle BAC$ e vice-versa.	91
Figura 71 – A semi-reta S_{AB} faz um ângulo reto com a semi-reta S_{AC}	92

Figura 72 – $\angle CAE$ é o ângulo suplementar a $\angle BAE$ e vice-versa.	92
Figura 73 – Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes.	93
Figura 74 – 1º caso de congruência de triângulos (LAL).	94
Figura 75 – 2º caso de congruência de triângulos (ALA).	94
Figura 76 – 3º caso de congruência de triângulos (LLL).	96
Figura 77 – O ângulo $\angle CBD$ é externo do triângulo $\triangle ABC$	97
Figura 78 – Construção auxiliar da proposição 19.	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	OBJETIVOS	9
1.1.1	Objetivo Geral	9
1.1.2	Objetivos Específicos	9
2	DESENVOLVIMENTO	11
2.1	UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA	11
2.1.1	Os egípcios	12
2.1.2	Tales de Mileto	13
2.1.3	Pitágoras de Samos	14
2.1.4	Os Elemento de Euclides	15
2.2	TENTATIVAS DE DEMOSTRAÇÃO DO QUINTO POSTU- LADO	17
2.3	AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	30
2.3.1	Carl Friedrich Gauss (1777-1855)	31
2.3.2	Johann Bolyai (1802-1860)	31
2.3.3	Nikolai Lobachewsky (1792–1856)	32
2.4	GEOMETRIA HIPERBÓLICA	33
2.4.1	Propriedades Elementares das retas Paralelas Assíntotas	36
2.4.2	Pontos Ideais	41
2.4.3	Triângulos Generalizados e Suas Propriedades	41
2.4.4	Congruência de Triângulos Generalizados	45
2.4.5	O Ângulo de Paralelismo	48
2.4.6	Quadriláteros Especiais	49
2.4.6.1	<i>Quadriláteros de Lambert</i>	50
2.4.7	Soma dos Ângulos internos de um Triângulo	51
2.4.8	Horocírculos	58
2.4.9	A Trigonometria Hiperbólica	61
2.4.10	Sistema de coordenadas	70
2.4.11	Resolução de triângulos retângulos	75
2.4.12	Resolução de triângulos quaisquer	80
3	CONCLUSÃO	84
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A – A Geometria Absoluta	87
A.1	AXIOMÁTICA DE HILBERT	87

1 INTRODUÇÃO

A história da geometria está cheia de revoluções ao longo do tempo, que manifestaram grandes avanços matemáticos e abriram portas para o surgimento de novas questões.

Por volta de 400 a.c., Euclides de Alexandria sintetizou o conhecimento matemático daquela época em uma coletânea de 13 livros, *Os Elementos*. No livro 1, ele usou o raciocínio dedutivo para definir toda a base axiomática da geometria. Formulou 23 definições, 5 postulados geométricos e 5 noções comuns. Os 4 primeiros postulados, foram enunciados de maneira simples e óbvia, no entanto, o quinto postulado, por não parecer tão óbvio e nem intuitivo, não recebeu o mesmo apreço dos anteriores o qual aos matemáticos a sentir que ele não era suficientemente simples para ser um postulado e, talvez, deveria ser demonstrável dos anteriores. Euclides só veio usa-lo apenas na proposição 28 do seu livro, segundo Mlodinow (2008).

Esse quinto postulado intrigou a mente de vários matemáticos ao longo da história. Personalidades da matemática como Cláudio Ptolomeu, Proclus, Giovanni Borelli, John Wallis, Gerolamo Saccheri, Friedrich Gauss, Farkas Bolyai entre tantos outros tentaram demonstrar a veracidade do suposto postulado. Questionamentos como: “Será que esse postulado se trata de um teorema e pode ser demonstrado a partir dos quatro postulados anteriores?” e “Dá para chegar numa contradição ao negar a veracidade dele?” Atormentaram a mente deles e diante das tentativas e fracassos surgiram mentes como as de Gauss, Bolyai e Lobachewski com visões de um espaço geométrico em que o quinto postulado não é válido, dando vida a geometria hiperbólica.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Apresentar partes da evolução histórica da Geometria Hiperbólica, analisando a transição entre o sistema axiomático euclidiano e o sistema axiomático não euclidiano. E como aplicação teórica, estudar a trigonometria hiperbólica.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Contextualizar a origem da geometria nas civilizações da Babilônia e do Egito e sua posterior sistematização lógica por Euclides de Alexandria na obra *Os Elementos*.

- Analisar o impacto do Quinto Postulado de Euclides e as diversas tentativas históricas de sua demonstração, identificando as falhas lógicas e o raciocínio circular em propostas de matemáticos como Ptolomeu, Proclus e Saccheri.
- Descrever os fundamentos da Geometria Absoluta (ou Neutra) por meio da axiomática de Hilbert, estabelecendo os conceitos de incidência, ordem, medição e congruência que independem do postulado das paralelas.
- Demonstrar as propriedades e teoremas fundamentais da Geometria Hiperbólica, incluindo o estudo de quadriláteros especiais (Saccheri e Lambert), triângulos generalizados com pontos ideais e a soma dos ângulos internos.
- Desenvolver a Trigonometria Hiperbólica no plano, explorando as relações entre arcos de horocírculos, funções hiperbólicas e a resolução de triângulos retângulos e em qualquer triângulo.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Tanto a estrutura quanto a história desta seção é baseada principalmente nos capítulos 1 a 4 do livro *A Janela de Euclides*, de Leonard Mlodinow (2008).

A concepção de espaço não se deu de forma espontânea ou desprovida de contexto, nem derivou do mero exercício criativo e ocioso. Trata-se de um desenvolvimento lógico embasado na realidade. Surgiu naturalmente da necessidade humana de criar técnicas que facilitasse suas medições práticas. Como aponta Boyer (1974), a própria etimologia da palavra grega geometria, que significa "medida da terra", denuncia suas raízes empíricas, fortemente ligadas à necessidade dos antigos egípcios de remarcar fronteiras agrícolas após as inundações anuais do rio Nilo.

Foram os gregos clássicos que, posteriormente, perceberam a possibilidade de compreender a natureza por meio de um sistema lógico e dedutivo; contudo, esses avanços germinaram a partir do conhecimento prático de civilizações mais antigas, como a babilônica e a egípcia. Segundo Struik (1992), a matemática dos povos pré-helênicos possuía um caráter essencialmente utilitário e algorítmico. Eles dominavam noções de fórmulas e técnicas aplicadas na engenharia e na administração de seu cotidiano, mas não se detinham na justificação teórica ou na demonstração formal de seus métodos. Em outras palavras, realizavam feitos arquitetônicos visualmente surpreendentes, mas amparados por uma compreensão empírica das ferramentas que empregavam.

A história do pensamento matemático, todavia, remonta a períodos ainda mais remotos da evolução humana, muito antes das grandes civilizações estruturadas. Há registros de atividades de contagem, mapeamento de ciclos lunares e rudimentos de trocas comerciais que datam da pré-história. Nesse contexto, Mlodinow (2008) apresenta aquele que talvez seja o mais antigo instrumento de registro numérico já descoberto:

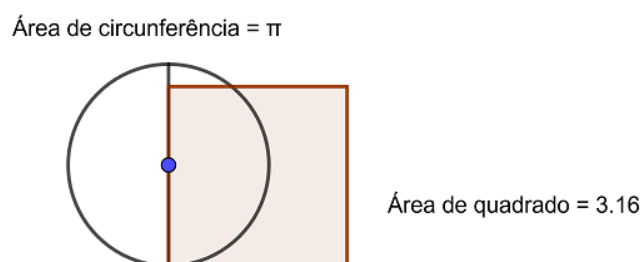
"Nas margens do lago Edward, na atual República Democrática do Congo, arqueólogos descobriram um pequeno osso, de 8 mil anos, com uma pequeníssima pedra de quartzo presa num entalhe em uma das extremidades. O seu criador, um artista ou um matemático — nunca saberemos com certeza — fez 168 gravuras no osso, ordenadas em três colunas paralelas ao longo do comprimento do osso. Os cientistas acreditam que esse osso, chamado de osso de Ishango, provavelmente seja o mais antigo exemplo já encontrado de um dispositivo para registro numérico." (MLODINOW, 2008, p. 17)

2.1.1 Os egípcios

No Antigo Egito, em meio ao árido deserto africano, o rio Nilo representava uma verdadeira dádiva, muitas vezes personificado como a própria divindade, cujas inundações periódicas traziam vida ao vale ribeirinho e viabilizavam a agricultura local. Tal inundação demorava quatro meses e ao final, em outubro, ele se recolhia. Os oito meses restantes eram divididos em duas estações a *perit* para o cultivo e *shemu* para a colheita. Essa dádiva do nilo permitiu o estabelecimento de comunidades fixas, sistema de irrigação e divisão de lotes.

A medida que essas comunidades foram se desenvolvendo o faraó, rei do Egito e o Deus Rá em pessoa, possuía todas as terras, mas os indivíduos possuíam os imóveis. Consequentemente, o soberano determinava a tributação agrária com base na altura das inundações anuais e na área de superfície de cada lote cultivado. Conforme relata Boyer (1974), baseando-se nos antigos escritos do historiador grego Heródoto, foi exatamente a necessidade de remarcar essas fronteiras agrícolas e calcular impostos após as enchentes que impulsionou o nascimento prático da geometria egípcia. Segundo Mlodinow (2008), a evasão fiscal era duramente reprimida, sujeitando os infratores a punições físicas imediatas por parte dos guardas reais. Para os camponeses que não conseguiam arcar com os tributos, era possível pedir empréstimo, mas a taxa de juros era muito alta, chegando a 100% de juros ao ano.

Figura 1 – Representação da Área de um círculo no Egito antigo.



Fonte: Próprio autor.

Muitas coisas estavam em jogo e eles precisavam calcular as áreas das terras o mais eficaz possível, então eles desenvolveram técnicas bastantes confiáveis para encontrar a área dos terrenos que tinham formato de figuras geométricas como: um quadrado, um trapézio, um círculo, etc. Em relação aos terrenos circulares, a área era estimada comparando-a a um quadrado cujo lado equivalia a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. De acordo com Eves (2011), essa regra notável foi documentada no famoso Papiro de Rhind (ou *Papiro de Ahmes*), evidenciando que a área era obtida pela

fórmula $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, era uma forma de aproximar o valor do π para 256/81, ou 3,16.

Eles aplicaram seus conhecimentos matemáticos nesses e em muitos outros projetos arquitetônicos como nas famosas pirâmides. Desenvolver uma estrutura de base quadrada, faces triangulares e uns 145 metros de altura não deve ter sido uma tarefa fácil.

2.1.2 Tales de Mileto

Situada em uma planície pantanosa na foz do rio Meandro, na região da atual Turquia, encontrava-se a cidade de Mileto. Foi nessa pólis que, por volta de 624 a.C., nasceu Tales de Mileto (c. 624–548 a.C.). Embora historiadores modernos, como Roque (2012), ressaltem que a narrativa de Tales como o “primeiro matemático” seja, em parte, uma construção da historiografia grega posterior, ele é historicamente reconhecido como a figura central na transição do conhecimento empírico para o pensamento racional dedutivo na civilização ocidental pelo fato ou lenda de ter demonstrado uma série de teoremas Boyer (1974).

Pouca coisa se sabe sobre a vida de Tales, segundo Boyer (1974) boa parte das narrativas envolvendo Tales está associada a tradições ou lendas que não se tem registro histórico, segundo ele:

“Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 a. c. provavelmente ocorreu quando ele estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz-se que ele tinha 78 anos quando morreu. No entanto, as sérias dúvidas sobre a autenticidade da história do eclipse tornam tais extrapolações arriscadas, e abalam nossa confiança quanto às descobertas cuja paternidade é atribuída a Tales.” (BOYER, 1974, p. 34)

Tales empreendeu extensas viagens para absorver a sabedoria das civilizações vizinhas. Segundo Boyer (1974), foi na Babilônia que ele se aprofundou em matemática e astronomia, conhecimentos que teriam motivado a tradição de sua célebre previsão do eclipse solar ocorrido em 28 de maio de 585 a.C. no Egito. Posteriormente, ali mesmo, Tales transcendeu a aplicação puramente prática dos saberes locais. Ele demonstrou aos egípcios a possibilidade de calcular a altura de suas pirâmides valendo-se das proporções de sombras e das propriedades dos triângulos semelhantes — um feito analítico que causou forte impressão e lhe conferiu enorme prestígio entre os estudiosos da época.

Eves (2011) destaca que credita-se a Tales o pioneirismo na demonstração formal de teoremas geométricos básicos que, séculos mais tarde, integrariam a base lógica da célebre obra *Os Elementos*, de Euclides. Sua estratégia foi utilizar

o método dedutivo para provar suas conclusões, uma espécie de sistema de raciocínio lógico. Segundo Mlodinow (2008), a lógica operava como uma ferramenta universal para Tales, a partir da qual seria possível explicar os fenômenos da natureza de forma racional, afastando-se das justificativas puramente mitológicas que predominavam na Antiguidade.

2.1.3 Pitágoras de Samos

Não muito distante de Mileto, situava-se a ilha de Samos, local de nascimento de outra figura central da Antiguidade: Pitágoras (570–495 a.C.). Historiadores como Eves (2011), apontam que, em sua juventude, Pitágoras provavelmente era discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que ele e morava próximo de Mileto, tornando-se, assim, um herdeiro intelectual daquela primeira revolução analítica e um dos maiores precursores da geometria que, mais tarde, seria sistematizada por Euclides. Por outro lado, autores como Boyer (1974), com motivos similares afirmam que ser improvável.

Embora poucos detalhes biográficos de Pitágoras sejam confirmados com absoluta certeza, ele é amplamente reconhecido como um dos fundadores da matemática e da filosofia ocidental, com um impacto duradouro em áreas como a geometria, a ética e a cosmologia. Mlodinow (2008) cita que um de seus grandes feitos foi a percepção de que a natureza poderia ser descrita por meio de proporções numéricas. Em seus estudos sobre acústica, Pitágoras descobriu a relação matemática intrínseca na harmonia musical. Ele observou que a altura de uma nota é inversamente proporcional ao comprimento da corda vibrante; por exemplo, se uma corda tensionada emite uma determinada nota, ao ser pressionada exatamente na metade de sua extensão, produzirá a mesma nota musical, porém uma oitava mais aguda (com o dobro da frequência). Segundo Boyer (1974), esta constatação empírica da relação entre os números inteiros e a harmonia musical foi o grande catalisador para a filosofia pitagórica de que a essência de todo o universo repousava nos números.

Esse rigor analítico estendeu-se à geometria, culminando na famosa relação que hoje leva o seu nome. A partir da observação e da análise de triângulos retângulos, consolidou-se a demonstração de que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é estritamente igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa ($a^2 + b^2 = c^2$). Segundo Mlodinow (2008), o nível de abstração geométrica dessa demonstração representou um marco intelectual tão significativo que, se ocorresse nos dias de hoje, mereceria o destaque das principais publicações científicas globais.

O prestígio de suas descobertas atraiu diversos discípulos, culminando na formação da Escola Pitagórica, uma irmandade filosófica, religiosa e científica envolta em doutrinas de extremo sigilo. De acordo com Boyer (1974), a própria palavra “matemática” que significa “ciência” ou “aquilo que se aprende”, supõe ter sido criada por eles. O objetivo central dessa sociedade era desvendar a matemática oculta por trás da natureza, guiando-se pelo lema de que “tudo é número”. Para os pitagóricos, o universo inteiro poderia ser perfeitamente compreendido como a razão entre números inteiros (números racionais).

Contudo, essa visão de mundo sofreu um abalo estrutural a partir de um exercício envolvendo o próprio Teorema de Pitágoras. Ao traçar a diagonal de um quadrado unitário (cujos lados medem 1), a figura é dividida em dois triângulos retângulos idênticos, nos quais a diagonal atua como hipotenusa. Ao calcular essa medida, o resultado obtido é $\sqrt{2}$. Como o conhecimento numérico da época restringia-se às frações de números inteiros, os pitagóricos tentaram incessantemente encontrar uma razão racional que equivalesse a esse valor.

Ao investigarem a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado, os pitagóricos realizaram sucessivas tentativas de aproximação, até provarem logicamente que uma representação fracionária exata era impossível, deparando-se com o conceito de grandezas incomensuráveis. Em vez de assimilarem essa descoberta expandindo o escopo numérico (o que anteciparia a criação do conjunto dos números reais), a matemática grega tomou um rumo diferente. Conforme aponta Roque (2012), mais do que gerar uma “crise” paralisante — como a historiografia tradicional costuma dramatizar —, esse episódio promoveu uma profunda reorganização filosófica e metodológica. Os pitagóricos declararam que tais comprimentos não possuíam racionalidade numérica, denominando-os de *alogon*, termo grego para “inexprimível” ou “sem razão”. Essa constatação, inicialmente mantida sob sigilo pela seita, marcou a separação entre a geometria e a aritmética na Antiguidade e o nascimento daquilo que hoje conhecemos como números irracionais.

2.1.4 Os Elemento de Euclides

Conforme relata Mlodinow (2008), o autor da obra matemática mais influente de todos os tempos é, paradoxalmente, um “fantasma histórico”. Sabe-se que Euclides viveu, estudou e lecionou em Alexandria por volta de 300 a.C., sob o patrocínio de Ptolomeu I. No entanto, a escassez de dados sobre sua vida é tamanha que historiadores como Boyer (1974) discutem se o nome Euclides representaria um indivíduo real ou um coletivo de estudiosos publicando sob um pseudônimo. Contudo, o que se sobressai não é a biografia do homem, mas a genialidade da

mente capaz de sistematizar o vasto e caótico conhecimento acumulado até então.

Antes de Euclides, a geometria possuía um caráter predominantemente utilitário e empírico. Como se viu anteriormente, egípcios e babilônios utilizavam regras práticas para medir terrenos após as enchentes do Nilo e para erguer grandes monumentos. Como corroboram historiadores como Boyer (1974), a magnitude da obra *Os Elementos* não reside na descoberta inédita da maioria dos seus teoremas — visto que grande parte já havia sido formulada por pensadores anteriores, como Tales, Pitágoras e Eudoxo.

O verdadeiro triunfo de Euclides, segundo sublinha Eves (2011), centrou-se na sua formidável capacidade de compilação e organização. A verdadeira revolução promovida por este matemático consistiu na instituição formal do método dedutivo científico moderno. Esta estruturação baseou-se em dois pilares fundamentais:

- **O Método Axiomático:** A formulação de um ponto de partida baseado em premissas elementares e irrefutáveis, que dispensavam comprovação (organizadas pelo autor em cinco noções comuns e cinco postulados).
- **A Dedução Lógica:** A partir desse restrito conjunto de verdades auto-evidentes, Euclides derivou 465 proposições complexas por meio de uma cadeia inquebrável de raciocínio lógico.

Com essa sistematização, a geometria transcendeu a observação física — frequentemente sujeita às imprecisões do mundo empírico — para se consolidar como um construto intelectual perfeito. Para Mlodinow (2008), *Os Elementos* não apenas compilaram a matemática da época, mas ensinaram a humanidade a raciocinar de forma estruturada.

Contudo, dos cinco postulados geométricos que sustentavam o livro, os quatro primeiros eram elegantes, curtos e diretos (como "pode-se traçar uma linha reta entre quaisquer dois pontos"). O quinto, contudo, conhecido como o Postulado das Paralelas, apresentava uma formulação extensa e complexa, assemelhando-se mais a um teorema que exigia demonstração do que a uma verdade basilar autoevidente. Conforme registrado por Eves (2011), o enunciado estabelecia que:

"Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos." (EVES, 2011, p. 180)

Essa aparente assimetria lógica e falta de elegância estética inquietou profundamente a comunidade matemática por mais de dois milênios. A tentativa incessante de tentar provar o quinto postulado usando apenas os quatro primeiros foi o que impulsionou o desenvolvimento da geometria pelas eras seguintes.

2.2 TENTATIVAS DE DEMOSTRAÇÃO DO QUINTO POSTULADO

Desde a Antiguidade, o quinto postulado de Euclides destacou-se entre os demais por sua complexidade e aparente falta de evidência imediata. Diferentemente dos outros axiomas apresentados em *Os Elementos* ¹, este postulado não parecia uma verdade autoevidente, mas sim uma afirmação elaborada, cuja natureza levantou suspeitas entre matemáticos ao longo dos séculos. Conforme discute Mlodinow (2008), essa característica levou muitos a considerá-lo não como um princípio fundamental, mas como um resultado que deveria ser demonstrado a partir dos demais postulados mais simples.

Impulsionados por essa inquietação, diversos estudiosos empreenderam esforços para provar o quinto postulado, partindo da crença de que a geometria euclidiana deveria constituir um sistema lógico perfeitamente dedutível. Inicialmente, essas tentativas seguiram o caminho das demonstrações diretas, buscando deduzi-lo a partir dos outros axiomas considerados mais intuitivos. No entanto, diante das dificuldades encontradas, alguns matemáticos passaram a adotar abordagens indiretas, assumindo a negação do postulado na tentativa de alcançar uma contradição lógica.

Essas investigações, que se estenderam por mais de dois milênios, não apenas fracassaram em demonstrar o postulado, como também revelaram algo ainda mais profundo: a possibilidade de construção de sistemas geométricos coerentes nos quais o quinto postulado não é válido. Segundo a narrativa apresentada por Mlodinow (2008), esse longo processo de tentativas, erros e reformulações não representou um fracasso da matemática, mas sim um dos momentos mais fecundos de sua história, abrindo caminho para o surgimento das geometrias não euclidianas e para uma nova compreensão do espaço e da verdade matemática.

Posidônio

A primeira tentativa de demonstração veio da Grécia mais de 150 anos depois da publicação do livro *Os elementos*. Um político, astrônomo, Geógrafo, historiador e filósofo conhecido como Posidônio (135 a.c. – 51 a.c.), que definiu que “Duas retas coplanares são paralelas se forem equidistantes”. No raciocínio dele, a partir dessa definição ele teria demonstrado o postulado das paralelas, contudo, dessa forma, ele assumiu que o lugar geométrico do conjunto de pontos

¹ Para melhor situá-lo, faz-se necessário admitir a existência de termos primitivos — ou seja, conceitos basilares que não possuem definição formal prévia —, tais como ponto, reta, pertencer (relação de incidência) e estar entre (relação de ordem). O referido estudo pode ser achado no Apêndice A ou nas obras de Barbosa (1985) e BERNAYS e Unger (1971).

equidistantes a uma reta é uma reta, ou seja, a figura formada pelos pontos que tem a mesma distância de uma reta dada é uma reta, mas essa afirmação só pode ser provada com o uso do próprio postulado, ou seja, ele estava assumindo uma afirmação que o postulado garante, para provar o próprio postulado, uma falsa demonstração.

Claúdio Ptolomeu e Proclus

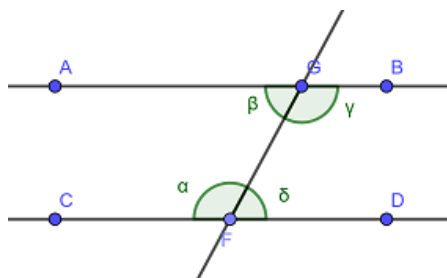
No comentário sobre o primeiro livro de Euclides, o filósofo, matemático e historiador Proclo (410–485 d.C.) menciona que o cientista grego Cláudio Ptolomeu (70–168 d.C.) escreveu “um certo livro” para resolver as dificuldades do postulado - “Que linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra”. Segundo Proclo esse livro apresenta uma tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides Morrow (1992).

Em seu comentário, Proclo critica esse postulado, afirmando que ele deveria ser retirado da lista dos postulados, pois era muito difícil de aceitar como uma premissa inicial. Embora Proclo não descreva completamente a demonstração de Ptolomeu, presume-se que ela tenha partido da proposição 28 do Livro 1 dos Elementos de Euclides.

Proposição 1 (Proposição 28 do livro I). *Se uma linha reta ao cortar outras duas, fizer o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto do mesmo lado, ou se a soma dos ângulos internos do mesmo lado for igual a dois ângulos retos, então, as linhas retas são paralelas entre si.*

Demonstração. Sejam AB e CD duas linhas retas cortadas por uma outra linha reta FG , formando os ângulos α e β do mesmo lado da transversal FG , e os ângulos γ e δ do outro lado, de modo que $\alpha + \beta = 180^\circ$. Por construção, γ e β são

Figura 2 – Base para demonstração de Ptolomeu.



Fonte: Próprio autor.

suplementares, assim como δ e α também são.

Dessa forma,

$$\beta = 180^\circ - \gamma \quad \text{e} \quad \alpha = 180^\circ - \delta.$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180^\circ \\ (180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \delta) &= 180^\circ \\ 360^\circ - (\gamma + \delta) &= 180^\circ \\ \gamma + \delta &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Agora, suponha que AB e CD não sejam paralelas. Como $\gamma + \delta = 180^\circ$, isso implica que as retas AB e CD se encontrariam em um ponto E de um lado da transversal FG e em um ponto P do outro lado de FG ao mesmo tempo, o que constitui um absurdo, pois $\triangle EFG$ e $\triangle PFG$ teriam a soma dos ângulos internos maior do que 180° . Logo, pela contradição obtida, concluímos que AB e CD devem ser paralelas. $\square$

Ptolomeu assumiu que, se as duas linhas são paralelas (ou seja, nunca se encontram), o que acontece com a soma dos ângulos internos de um lado da transversal tem que ser exatamente igual ao que acontece do outro lado. Já que a soma total dos quatro ângulos internos é de 360 graus (quatro ângulos retos), ele deduziu que a soma de cada lado deve ser exatamente 180 graus (dois ângulos retos). Logo, se a soma for menor que 180 graus, as linhas deixam de ser paralelas e se encontram.

Parecia uma prova irrefutável e elegante usando os outros princípios de Euclides. No entanto, ela escondia uma falha sutil.

Cerca de trezentos anos depois, o filósofo e matemático neoplatônico Proclo assumiu a tarefa de revisar Os Elementos. Ao analisar a demonstração de Ptolomeu, Proclo percebeu o erro e refutou argumento de seu antecessor.

Proclo apontou que a prova de Ptolomeu cometia o que na lógica é chamado de “petição de princípio” (raciocínio circular). Ptolomeu assumiu que, por serem linhas paralelas, o comportamento angular de um lado da linha transversal seria necessariamente simétrico ao do outro lado. O problema é que, em um universo geométrico onde apenas os quatro primeiros postulados de Euclides são válidos, você não pode garantir que retas que nunca se cruzam manterão essa relação simétrica estrita sem, no fundo, já estar assumindo que o postulado das paralelas é verdadeiro. Ptolomeu usou o postulado (disfarçado de simetria) para provar o próprio postulado.

Proposição 2 (Proposição 29 do Livro 1). *Uma linha reta que corta duas linhas retas paralelas faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto e a soma dos ângulos internos do mesmo lado igual a dois ângulos retos.*

Demonstração. De modo similar à prova anterior, considera-se AB e CD como duas linhas retas paralelas cortadas por uma outra linha reta FG , como na figura 2 obtendo os ângulos α e β no interior de FG , e γ e δ no interior do outro lado de FG , de modo que existam três possibilidades para a soma de α e β : $\alpha + \beta = 180^\circ$ ou $\alpha + \beta > 180^\circ$ ou $\alpha + \beta < 180^\circ$.

Suponha $\alpha + \beta > 180^\circ$. Como AB e CD são paralelas, o que acontece de um lado de FG também acontece do outro. Assim, $\gamma + \delta > 180^\circ$, e então $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360^\circ$, o que é um absurdo.

Para $\alpha + \beta < 180^\circ$, da mesma forma, chegamos a um absurdo. Resta apenas que $\alpha + \beta = 180^\circ$. $\square$

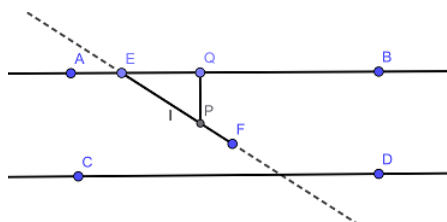
Observe que, ao assumir que o que acontece de um lado da linha reta FG também acontece do outro, está se admitindo implicitamente uma definição válida apenas se o postulado das paralelas for aceito como verdadeiro. Foi com essa prova falsa da proposição 29 que ele acabou utilizando para provar o postulado das paralelas.

Nos comentário do trabalho de Ptolomeu, Proclus indicou onde estão as falhas da demonstração e como um refúgio, construiu a sua própria. Seu objetivo era mostrar que se dado duas retas paralelas, se uma transversal intersecta uma delas então deve intersectar a outra. Para a sua demonstração ele considera como axioma que:

Axioma 1. *Se duas retas se cruzam, então a distância correspondente a abertura entre o ângulo formado por elas cresce indefinidamente à medida que se afasta do vértice e além disso, excederá qualquer grandeza finita. Assim, ao estender as retas indefinidamente, elas divergirão uma da outra a uma distância maior que qualquer grandeza finita*

Na sua demonstração, ele define duas retas paralelas AB e CD . Considere a reta EF que corta a reta AB no ponto E . Seja P um ponto que se movimenta ao longo da semi-reta S_{EF} e Q o pé da perpendicular traçada de P até AB . Observe que a medida do segmento PQ aumenta indefinidamente à medida que P se afasta de E , tornando-se maior do que qualquer grandeza finita. Com efeito, em algum

Figura 3 – Base para demonstração de Prolus.



Fonte: Próprio autor.

momento PQ excederá a distância entre AB e CD . Logo, a reta EF deve cortar CD .

Apesar de sua crítica a Ptolomeu, Proclo cometeu exatamente o mesmo tipo de erro intelectual. Para que a prova de Proclo funcionasse, ele precisou assumir a premissa de que a distância entre duas linhas paralelas permanece constante ou limitada. Parecia óbvio, certo? Como os trilhos de um trem. O problema é que a afirmação "a distância entre linhas paralelas é limitada" não pode ser deduzida dos quatro primeiros postulados de Euclides. Ela é, na verdade, um axioma equivalente.

Proclo não havia provado o Quinto Postulado; ele havia apenas inventado uma nova afirmação geométrica que dizia rigorosamente a mesma coisa que o postulado de Euclides, usando palavras diferentes.

As Contribuições de Saccheri

O professor de filosofia, teologia e matemática Giovanni Saccheri (1667-1733) também ingressou numa vida dedicada a tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides. Na verdade, ele dedicou grande parte de sua vida acadêmica nesse estudo e teve sua demonstração publicada no livro "Euclides ab omni naevo vindicatus, Euclides livre de todas as máculas", pouco antes do seu falecimento. Saccheri havia estudado as demonstrações dos que vieram antes dele e optou por construir sua demonstração tomando como verdades os quatro primeiros postulados para demonstrar o quinto. Porém, diferente dos seus predecessores, ele dividiu a negação do postulado em dois casos para de alguma forma chegar em uma contradição ao assumir cada caso. Utilizando a equivalência do quinto postulado: *Por um ponto P passa uma única paralela a reta dada*, e em seguida as duas negações:

- i *Não existe reta passando por P que não cruza a reta dada.*
- ii *Existem pelo menos duas retas que passam por P e não cruzam a reta dada.*

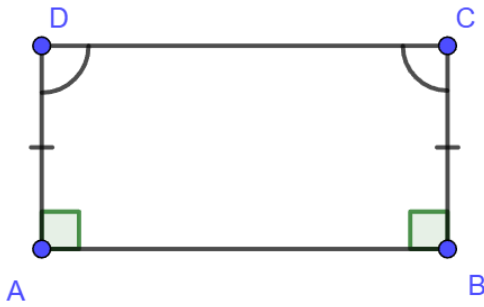
Assim, ele assumiria temporariamente que o Quinto Postulado de Euclides

era falso. Se essa suposição levasse a uma contradição lógica insuperável, então, por eliminação, o postulado original de Euclides teria que ser verdadeiro.

Para montar sua armadilha lógica, Saccheri construiu uma figura geométrica específica. Ele desenhou uma linha reta (a base) e ergueu duas linhas perpendiculares nas extremidades, ambas com o mesmo comprimento. Depois, ele conectou o topo dessas duas linhas com uma quarta linha, ou seja, um quadrilátero, como definiremos a seguir.

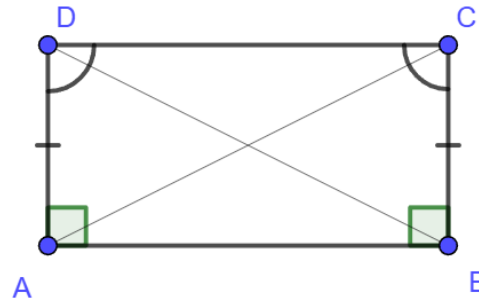
Definição 2.1 (Quadrilátero de Saccheri). Seja um quadrilátero $ABCD$ isósceles em BC e AD , com dois ângulos retos consecutivos, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BAD}$. Os ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BCD}$ são chamados de *ângulos de topo* do quadrilátero $ABCD$.

Figura 4 – Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Próprio autor.

Figura 5 – Construção auxiliar da proposição 3.



Fonte: Próprio autor.

A ideia de Saccheri era analisar os ângulos do topo do tal quadrilátero para demonstrar que eram congruentes e retos. Ele utilizou os quatro primeiros postulados e as 28 proposições que não dependiam do quinto postulado como ferramentas na sua demonstração. O primeiro passo foi demonstrar que os ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BCD}$ são congruentes.

Proposição 3. *Os ângulos de topo do quadrilátero de Saccheri são congruentes.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e BAD no quadrilátero acima. Note que, pelo caso **LAL**, eles são congruentes. Portanto, os triângulos ACD e BCD também são congruentes pelo caso **LLL** (lado, lado, lado). Dessa forma, concluímos que os ângulos $ADC = BDC$. $\square$

Saccheri conseguiu mostrar que esses dois ângulos são de fatos congruentes, mas eles podem ser obtusos, agudos ou o caso que leva ao postulado das paralelas, retos. Olhando para os casos em que os dois ângulos não são retos, ele estaria

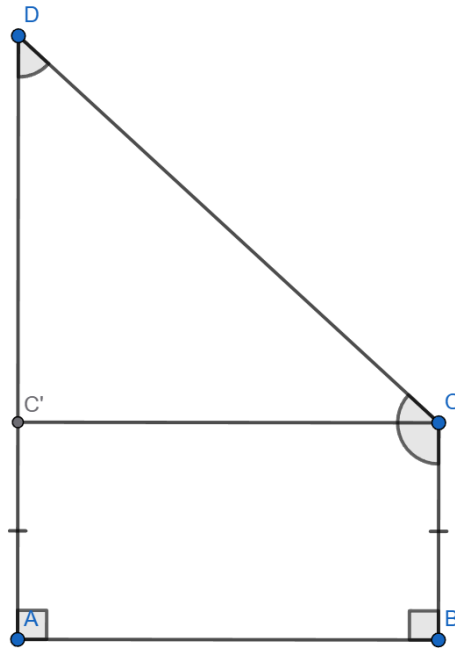
contradizendo o quinto postulado e, dessa forma, ele queria chegar em um absurdo e assim provar a validade do postulado pela contra-positiva.

Começaremos com um lema bastante importante

Lema 1. *Seja um quadrilátero $ABCD$ que possui os ângulos consecutivos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ retos. Se $AD = BC$, então os ângulos nos vértices $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ serão congruentes. Por outro lado, se AD e BC não forem congruentes, então entre os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$, será maior quem for adjacente ao **menor** dos segmentos AD e BC ; ou será menor, entre os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$, quem for adjacente ao **maior** dos segmentos AD e BC .*

Demonstração. Análogo à prova da proposição anterior, suponhamos que $AD = BC$, logo os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são congruentes. Suponhamos agora que AD seja distinto de BC , e, sem perda de generalidade, que $AD > BC$. Queremos mostrar que o ângulo $\widehat{ADC}$, adjacente ao segmento AD , é menor do que o ângulo $\widehat{BCD}$. De fato, marquemos o ponto C' em AD de maneira que $AC' = BC$.

Figura 6 – Construção auxiliar do lema 1.



Fonte: Próprio autor.

Note que, o triângulo $DC'C$, tem $\widehat{AC'C}$ como seu ângulo externo, logo é maior que o ângulo $\widehat{D}$. Por construção, $\widehat{AC'C} = \widehat{BCC'}$, e $\widehat{BCC'} < \widehat{BCD}$, onde $\widehat{BCD}$ é o **maior** ângulo.

Daí, o maior ângulo de vértice entre C e D é adjacente ao menor dos segmentos AD e BC . Além disso, temos que $\widehat{D} < \widehat{AC'C}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'CB} + \widehat{DC'C}$.

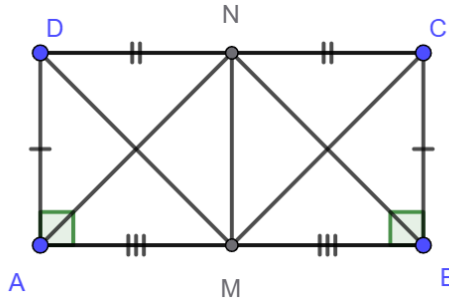
Daí,

$$\widehat{D} < \widehat{AC'C} = \widehat{C'CB} < \widehat{C}.$$

Assim, $\widehat{D} < \widehat{C}$. Como $\widehat{D}$ é adjacente a AD , que é maior do que BC , adjacente a $\widehat{C}$, concluímos que $\widehat{D}$ é menor que $\widehat{C}$. $\square$

Proposição 4. No quadrilátero $ABCD$, com $AD = BC$ e perpendiculares ao lado AB , se M e N são os pontos médios dos segmentos AB e CD , respectivamente, então o segmento MN é perpendicular a AB e CD .

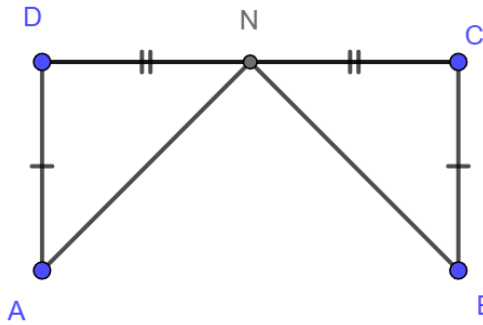
Figura 7 – Construção auxiliar da proposição 4.



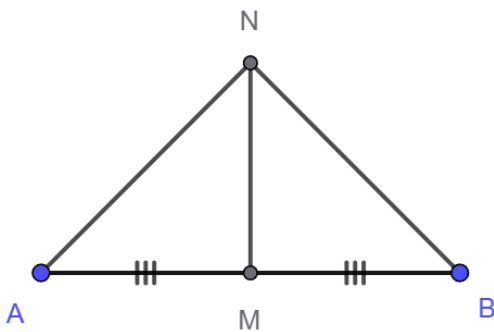
Fonte: Próprio autor.

Demonstração. Note que, como $ND = NC$, $\widehat{D} = \widehat{C}$ e $AD = BC$, temos que, pelo caso **LAL**, os triângulos NDA e NCB são congruentes (ver fig. 8).

Figura 8 – Construção auxiliar da pro- Figura 9 – Construção auxiliar da pro-
posição 4. posição 4.



Fonte: Próprio autor.



Fonte: Próprio autor.

Desta forma, $AN = BN$, e como M é ponto médio de AB e MN é comum aos triângulos ANM e BMN , então, pelo caso **LLL** (lado, lado, lado), estes triângulos são congruentes (ver fig. 9).

Note que ABN é isósceles, com MN sendo sua altura. Assim, M é o pé da perpendicular de MN em AB . Desta forma, $\widehat{AMN} = \widehat{BMN} = 90^\circ$. De modo

análogo, DMC é triângulo isóceles com base em CD . Portanto, $\widehat{DNM} = \widehat{CNM} = 90^\circ$.

□

Teorema 1 (Saccheri–Legendre). *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180° .*

Para demonstrar este teorema, vamos utilizar duas proposições.

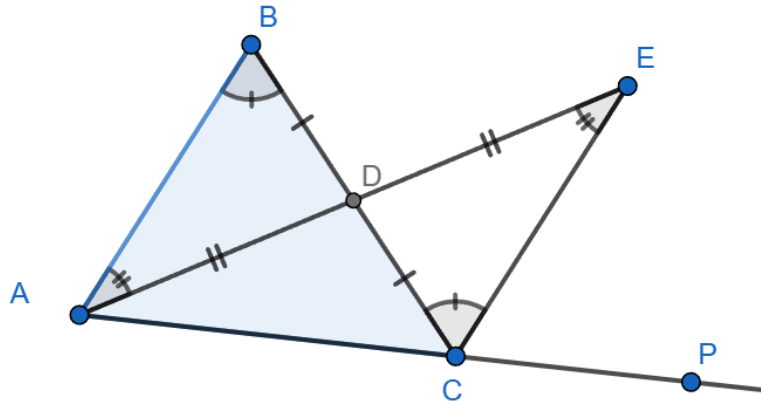
Proposição 5. *Dado qualquer triângulo ABC tal que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \theta$, existe um triângulo $A_1B_1C_1$ tal que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \theta$ e $A_1 \leq \frac{1}{2}\hat{A}$.*

Demonstração. Dado qualquer triângulo ABC . Considere D o ponto médio do segmento BC . Na semi-reta S_{AD} , defina o ponto E de modo que D esteja entre A e E , e que $AD = DE$. Queremos mostrar que

$$\widehat{AEC} + \widehat{ACE} + \widehat{EAC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB}.$$

Note que, $\triangle DAB \equiv \triangle DEC$ pelo caso LAL, pois $AD = DE$ (construção),

Figura 10 – Construção auxiliar da proposição 5.



Fonte: Próprio autor.

$BD = DC$ (D é ponto médio de BC) e os ângulos $\widehat{ADB}$ e $\widehat{EDC}$ são opostos pelo vértice, portanto congruentes.

Da congruência, podemos concluir que

$$\widehat{ABD} = \widehat{ECD} \quad \text{e} \quad \widehat{BAD} = \widehat{DEC}.$$

Somando os ângulos internos dos triângulos ABC e aplicando as equivalências dos ângulos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} &= \widehat{DCE} + (\widehat{BAD} + \widehat{EAC}) + \widehat{ACB} \\
&= \widehat{DCE} + (\widehat{CED} + \widehat{EAC}) + \widehat{ACB} \\
&= (\widehat{DCE} + \widehat{ACB}) + \widehat{AEC} + \widehat{EAC} \\
&= \widehat{ACE} + \widehat{AEC} + \widehat{EAC}
\end{aligned}$$

Assim, a soma dos ângulos do triângulo AEC é igual à soma dos ângulos do triângulo ABC .

Observe que,

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{AEC} + \widehat{EAC}$$

Neste caso, segue que $\widehat{AEC} \leq \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, com $A_1 = E$, $B_1 = A$ e $C_1 = C$, ou $\widehat{EAC} \leq \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, com $A_1 = A$, $B_1 = E$ e $C_1 = C$. Em ambos os casos, teremos $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \theta$ e $A_1 \leq \frac{1}{2}\hat{A}$. Desta forma, o resultado segue. $\square$

Proposição 6. *A soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180° .*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, como na figura 10. Queremos mostrar que a soma de quaisquer dois ângulos internos é menor que 180° , neste caso $\widehat{C} + \widehat{B} < 180^\circ$.

Na semi-reta S_{AC} , tome P um ponto, tal que C esteja entre A e P . Considere $B\widehat{C}P$, ângulo externo adjacente a $\widehat{C}$, então $\widehat{C} + B\widehat{C}P = 180^\circ$, $\widehat{B} < B\widehat{C}P$ e $\widehat{A} < B\widehat{C}P$. Portanto,

$$\widehat{B} + \widehat{C} < B\widehat{C}P + \widehat{C} = 180^\circ$$

$\square$

Demonstração do Teorema. Suponha que exista um triângulo MNO , cuja soma das medidas dos ângulos internos seja maior do que 180° . Então, para esse suposto triângulo,

$$\widehat{N} + \widehat{O} + \widehat{M} = 180^\circ + \alpha,$$

com α um número positivo.

Pela proposição 5, existe um triângulo $M_1N_1O_1$, tal que:

$$\begin{cases} \widehat{N}_1 + \widehat{O}_1 + \widehat{M}_1 = 180^\circ + \alpha \\ \widehat{N}_1 \leq \frac{1}{2}\widehat{N}. \end{cases}$$

Fazendo este processo n -vezes teremos a seguinte expressão:

$$\begin{cases} \widehat{N}_n + \widehat{O}_n + \widehat{M}_n = 180^\circ + \alpha \\ \widehat{N}_n \leq \frac{1}{2^n} \widehat{N}. \end{cases}$$

Quando atingir um n_0 suficientemente grande, de modo que $\frac{\widehat{N}}{2^{n_0}} < \alpha$, o triângulo obtido satisfará:

$$\begin{cases} \widehat{N}_{n_0} + \widehat{O}_{n_0} + \widehat{M}_{n_0} = 180^\circ + \alpha \\ \widehat{N}_{n_0} \leq \frac{1}{2^{n_0}} \widehat{N} < \alpha \end{cases}$$

A esta altura, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{O}_{n_0} + \widehat{M}_{n_0} &= 180^\circ + \alpha + \widehat{N}_{n_0} \\ \widehat{O}_{n_0} + \widehat{M}_{n_0} &> 180^\circ \end{aligned}$$

O qual contraria a proposição 6. Logo,

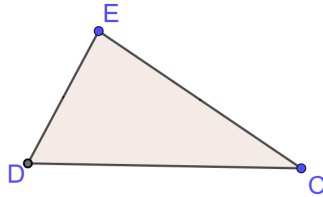
$$\widehat{N} + \widehat{O} + \widehat{M} \leq 180^\circ$$

□

Proposição 7. *A hipótese do ângulo obtuso não é válida na geometria neutra.*

Demonstração. Consideremos o triângulo EDC como na figura 11. Denotemos por M e N os pontos médios de ED e EC , respectivamente. Assim, $EM = MD$ e $EN = NC$. Construamos o segmento MN . Em seguida, tracemos retas perpendiculares a

Figura 11 – Triângulo auxiliar para proposição 7.

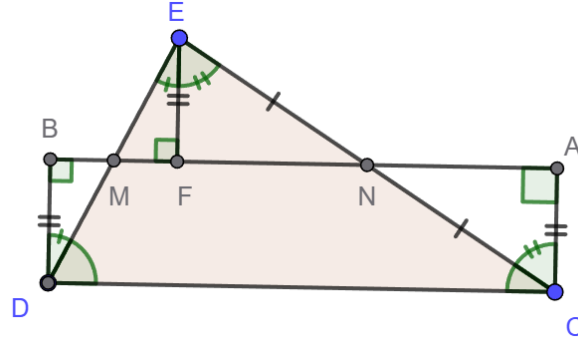


Fonte: Próprio autor.

MN passando pelos pontos D e C . Denotemos por B e A os pontos de interseção entre as perpendiculares à reta MN que passam por D e C , respectivamente.

Desta forma, fica definido o quadrilátero de Saccheri $ABDC$ de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ retos. Por fim, tracemos a perpendicular a MN que passa pelo ponto E , e denotemos por F a interseção com MN . Observe que, pelo caso ALA ($\hat{A}$ ngulo, Lado, $\hat{A}$ ngulo), temos as congruências de triângulos $EMF \equiv DMB$ ($M\hat{E}F \equiv M\hat{D}B$, $EF \equiv DB$

Figura 12 – Construção auxiliar da proposição 7.



Fonte: Próprio autor.

e $\widehat{EMF} \equiv \widehat{DMB}$ e $\widehat{ENF} \equiv \widehat{CNA}$ ($\widehat{FEN} \equiv \widehat{ACN}$, $EN \equiv CN$ e $\widehat{FNE} \equiv \widehat{ANC}$). Então, $EF = BD = AC$, comprovando que é um quadrilátero de Saccheri.

Pelo Teorema 1 de Saccheri–Legendre, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo na geometria neutra é menor ou igual a 180° , ou seja:

$$\widehat{ECD} + \widehat{CDE} + \widehat{MEF} + \widehat{FEN} \leq 180^\circ.$$

Note que,

$$\widehat{DEC} = \widehat{MEF} + \widehat{FEN}.$$

Como $\widehat{MEF} = \widehat{BDM}$ e $\widehat{FEN} = \widehat{NCA}$, temos:

$$\widehat{ECD} + \widehat{CDE} + \widehat{BDM} + \widehat{NCA} \leq 180^\circ.$$

No entanto, sabemos que:

$$\widehat{BDC} = \widehat{BDM} + \widehat{CDE} \quad \text{e} \quad \widehat{DCA} = \widehat{ECD} + \widehat{NCA},$$

sendo esses os ângulos do topo do quadrilátero. Logo:

$$\widehat{BDC} + \widehat{DCA} \leq 180^\circ.$$

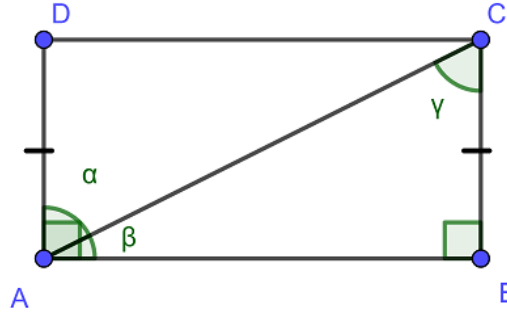
Além disso, $\widehat{D} = \widehat{C}$ pela primeira proposição sobre o quadrilátero de Saccheri. Desta forma, tais ângulos não podem ser maiores que 90° , eliminando a hipótese de os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri serem obtusos. $\square$

Resta-nos mostrar que a medida do segmento do topo do quadrilátero de Saccheri é maior ou igual à medida da base.

Proposição 8. *No Quadrilátero de Saccheri, a medida da base é menor ou igual à medida do segmento do topo.*

Demonstração. Seja $ABDC$ um quadrilátero de Saccheri. Trace a diagonal AC como na figura 13. Denotemos por α , β e γ os ângulos $\hat{C}AD$, $\hat{D}AB$, e $\hat{A}CB$, respectivamente.

Figura 13 – Construção auxiliar da proposição 8.



Fonte: Próprio autor.

Pelo teorema 1, temos que

$$\beta + \gamma + 90^\circ \leq 180^\circ \quad \text{implica} \quad \beta + \gamma \leq 90^\circ$$

Então,

$$\beta + \gamma \leq \alpha + \beta \quad \text{implica} \quad \alpha \geq \gamma$$

Como o maior lado de um triângulo está oposto ao maior ângulo, analisemos os triângulos ACD e ABD . Note que a diagonal AC é comum a ambos e, por definição do quadrilátero de Saccheri, $AD = BD$.

Portanto, concluímos que

$$\overline{CD} \geq \overline{AB}$$

Assim,

$$\hat{C} = \hat{D} \leq 90^\circ$$

pelo lema

□

Assim, Saccheri ao tentar deduzir uma contradição lógica a partir desta hipótese, ele acabou por provar uma longa série de novos resultados que viriam mais tarde a ser os teoremas clássicos da Geometria não-euclidiana. No final, concluiu que a hipótese do ângulo agudo originava duas retas assintóticas com uma perpendicular comum num ponto ideal no infinito, que definiremos mais na seção 2.5.2.

Depois de tantas tentativas sem chegar numa contradição para de fato provar o postulado das paralelas, Saccheri acabou ficando insatisfeito e parecia ter perdido a paciência, não conseguindo refutar logicamente a hipótese do ângulo agudo. Como aponta Bonola (1955), para forçar uma conclusão que salvasse Euclides, Saccheri recorreu a um argumento frágil sobre a natureza de "linhas estendidas ao infinito", proclamando uma contradição onde claramente não havia uma. Seu livro encerrou-se de forma melancólica: conforme analisa Greenberg (2008), Saccheri navegou por um mundo geométrico totalmente novo — o que hoje conhecemos como geometria hiperbólica —, mapeou suas propriedades com precisão cirúrgica, mas retornou incrédulo de sua existência, publicando sua obra pouco antes de morrer sem saber que havia descoberto uma nova matemática.

Aparentemente, Saccheri não se convenceu de que tal resultado constituísse uma verdadeira contradição e ainda tentou uma segunda demonstração, que também não obteve sucesso. Conforme destaca Barbosa (2007), se Saccheri tivesse ao menos suscitado de que não encontrou uma contradição pelo simples fato de não haver nenhuma contradição a ser encontrada, a descoberta da geometria não euclidiana teria ocorrido quase um século antes.

2.3 AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

No século XIX, as ideias e contribuições de Saccheri voltaram à tona, dessa vez o questionamento era se existe uma geometria plana, tal que, com um ponto fora de uma reta exista mais de uma reta que é paralela a reta dada? Até então, a geometria euclidiana estava numa posição intocável e considerada como verdade absoluta.

A história da descoberta das geometrias não-euclidianas, vista pela lente de Mlodinow (2008) e detalhada rigorosamente por Barbosa (2007), é o clímax de uma frustração matemática de mais de dois milênios. Depois que gerações de gênios (como Ptolomeu, Proclo e Saccheri) falharam em provar o Quinto Postulado de Euclides, o início do século XIX trouxe uma mudança de paradigma: a percepção de que o postulado não precisava ser provado, mas sim negado para dar origem a um novo e perfeitamente lógico universo geométrico.

Essa grande ruptura filosófica e matemática não foi obra de um único homem, mas de três mentes brilhantes trabalhando isoladamente: Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai e Nikolai Lobachewsky.

2.3.1 Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Johann Carl Friedrich Gauss, nascido em 30 de abril de 1777, foi um dos maiores matemáticos e cientistas da história. Desde cedo demonstrou talento excepcional, como no famoso episódio em que, ainda na escola primária, deduziu rapidamente a fórmula da soma de 1 a 100 usando progressão aritmética, surpreendendo sua professora.

Gauss, a figura dominante da matemática na época, foi o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides. Foi ele, inclusive, quem cunhou o termo "geometria não euclidiana". Ao longo de décadas de pesquisa, Gauss concluiu que a hipótese de a soma dos ângulos de um triângulo ser menor que 180 graus levava a uma geometria "curiosa", mas totalmente consistente, na qual ele conseguia resolver qualquer problema.

Apesar de sua genialidade, Gauss decidiu manter suas descobertas em segredo. Naquela época, a filosofia de Kant dominava o pensamento europeu e a Igreja; essa visão considerava a geometria euclidiana como um dogma absoluto e a base inquestionável da explicação do universo. Temendo o escândalo e a incompreensão da comunidade da época, Gauss evitou publicar seus achados para não se indispor com os defensores dessa visão dogmática. Como corrobora Boyer (1974), Gauss temia o que chamava de 'clamor dos beócios'², referindo-se aos filósofos kantianos que dominavam o pensamento europeu e que consideravam a geometria euclidiana uma verdade inata e inquestionável do intelecto humano.

2.3.2 Johann Bolyai (1802-1860)

Enquanto Gauss guardava seu segredo, o jovem húngaro Johann Bolyai começou a se debruçar sobre o problema das paralelas por volta de 1820. Ignorando os conselhos de seu pai, começou a explorar a ideia de que mais de uma reta paralela poderia passar por um ponto. Nesse tempo, o trabalho dele sofreu uma mudança drástica de direção quando, em vez de tentar provar o postulado, passou a usar uma afirmação contraditória como base para formular o que chamou de "Ciência absoluta do espaço".

Ele percebeu que, ao admitir a existência de mais de uma reta paralela passando por um ponto exterior, acabava aceitando logicamente a existência de infinitas retas paralelas. Em 1823, extasiado com suas próprias deduções lógicas, ele escreveu ao pai uma frase que se tornou histórica: "do nada eu criei um novo

² O "clamor dos beócios" refere-se à voz alta e insistente das pessoas ignorantes ou de mau gosto, que se manifestam com empolgação sobre algo que não compreendem verdadeiramente ou que louvam algo medíocre como se fosse genial.

e estranho universo". Seu trabalho foi finalmente publicado em 1832, como um apêndice no livro *Tentamen* de seu pai.

O pai de Johann era Wolfgang Bolyai, um indivíduo de enorme talento - que atuou como professor, poeta, músico e inventor - e que mantinha uma relação de amizade com Gauss. Ele enviou uma cópia do apêndice para Gauss, esperando elogios. A resposta de Gauss, no entanto, foi devastadora para o jovem, Gauss afirmou que não poderia elogiar o trabalho, pois "louvá-lo significaria louvar a mim mesmo", revelando que os resultados de Bolyai coincidiam exatamente com as meditações que ele próprio vinha fazendo há mais de trinta anos. Johann ficou profundamente desapontado e chegou a suspeitar que Gauss havia roubado suas ideias.

Dominado pela desconfiança de que o seu pai pudesse ter partilhado previamente as suas ideias com Gauss, Bolyai sentiu que não lhe foi concedida a honra merecida por tamanho salto intelectual e nunca mais publicou qualquer obra durante o resto da sua vida. Segundo destaca (EVES, 2011), o impacto da resposta de Gauss foi tão devastador para a mente do jovem Bolyai que, dominado pela desconfiança e pela depressão, este nunca mais publicou qualquer investigação matemática, embora os seus manuscritos póstumos revelassem uma exploração contínua do tema.

Apesar de ter se isolado do público, Johann nunca interrompeu as suas investigações matemáticas. As notas descobertas postumamente revelam o seu contínuo interesse na expansão da nova geometria para espaços tridimensionais e no seu relacionamento com a trigonometria esférica

2.3.3 Nikolai Lobachewsky (1792–1856)

Diferente de Gauss e de Bolyai, Lobachewsky foi o primeiro a ter a coragem de publicar formalmente a nova geometria. Barbosa (2007) relata que, já em 1826, Lobachewsky apresentou à Universidade de Kazan uma geometria em que, por um ponto exterior a uma reta, podia passar mais do que uma reta paralela. Com resultados publicados entre 1829 e 1830.

Segundo Mlodinow (2008), seu trabalho atraiu pouca atenção, ele estava muito isolado dos grandes centros intelectuais da Europa da época e publicava em russo, enquanto a comunidade científica, na época, em francês, alemão e latim. Struik (1992) também destaca que a publicação em russo e o afastamento dos grandes centros acadêmicos europeus atrasaram em décadas o reconhecimento dessa grande ruptura matemática.

Na tentativa de tornar seu trabalho mais visível, publicou um pequeno livro

em alemão em 1840. Foi através dessa publicação que Gauss tomou conhecimento do trabalho de Lobachewsky e reconheceu imediatamente a genialidade irrefutável do russo. Embora os métodos de demonstração de Lobachewsky fossem diferentes dos que Gauss havia imaginado, as conclusões eram as mesmas. Gauss ficou tão impressionado que usou a sua influência para que Lobachewsky fosse eleito membro da prestigiada Sociedade Real de Ciências de Göttingen. No entanto, e para frustração histórica, Gauss continuou se recusando a apoiar a geometria não-euclidiana publicamente, deixando Lobachewsky defendendo sozinho a validade do seu novo universo matemático.

Como Mlodinow (2008) e Barbosa (2007) ressaltam, o nascimento da Geometria Hiperbólica demorou a ser celebrado. A aceitação foi atrasada pelos dogmas filosóficos de que a geometria de Euclides era a única possível, pelas barreiras linguísticas e pelo fato de Bolyai e Lobachewsky serem, inicialmente, figuras desconhecidas na comunidade científica internacional. Contudo, a coragem desses homens de abandonar a "Janela de Euclides" provou que o espaço geométrico não era uma verdade absoluta ditada pela intuição humana, mas sim uma estrutura matemática que podia ser curvada e moldada, preparando o terreno para a física moderna e a relatividade

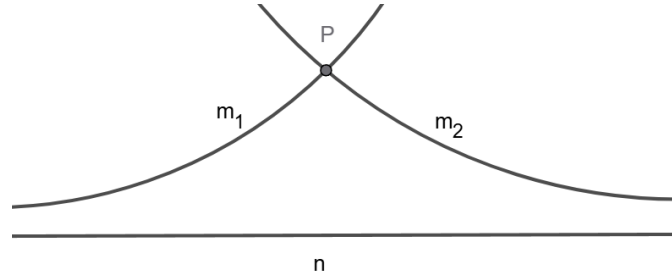
2.4 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A construção da Geometria Hiperbólica, tal como estruturada em Barbosa (2007), não surge como uma rejeição total da intuição clássica, mas sim como uma expansão lógica e rigorosa a partir de um ponto de divergência muito específico. O estudo inicia-se no terreno seguro da chamada Geometria Neutra, o conjunto de proposições e teoremas (correspondentes aos primeiros resultados de Os Elementos de Euclides) que podem ser demonstrados sem recorrer ao famoso Quinto Postulado. É sobre esta base partilhada que as fundações são estabelecidas, provando que uma vasta parte da geometria permanece válida e inalterada independentemente do comportamento das linhas paralelas.

Como modelo para este trabalho, utilizaremos o semiplano de Poincaré como exemplo concreto. Nesse modelo específico, o plano é visualizado como a metade superior de um plano cartesiano, as retas hiperbólicas são representadas por semicírculos ou linhas verticais, e os pontos ideais estão localizados na fronteira inferior ou no infinito.

Postulado 1. (*Postulado de Lobachewsky*) *Por um ponto fora de uma reta, pode ser traçada pelo menos duas retas distintas paralelas a reta dada.*

Figura 14 – Duas retas paralelas a uma reta dada passando por um ponto fora dela.



Fonte: Próprio autor.

Teorema 2. *Por todo ponto P fora de qualquer linha l , podem ser traçadas infinitas linhas distintas que são paralelas a n*

Demonstração. A partir do postulado 1, Sabemos que por todo ponto P fora de uma reta l , há pelo menos duas retas m_1 e m_2 que são paralelas a l . Pode-se observar que m_1 e m_2 formam quatro ângulos de maneira que l está completamente contido num deles. Observe que qualquer reta que passam por P e estão contidas no par de ângulos opostos pelo vértice, em que nenhum deles contenha l , também são paralelas a l . Dai, podemos garantir a existência de infinitas retas que são paralelas a l . $\square$

Proposição 9. *Dados um ponto P fora de uma reta l , existem exatamente duas retas m_1 e m_2 que passam pelo ponto P e separam o conjunto das retas que intersectam l do conjunto que não intersectam l .*

Demonstração. Tome R o pé da perpendicular baixada de P a L e trace m perpendicular a PD . Logo m é paralela a l . Tome um ponto E em m tal que P esteja entre EF .

Como P pertence ao lado EF do triângulo EFQ , então qualquer reta que passa por P , com exceção das retas m e a reta que passa por PQ , deve cortar os segmentos EQ ou FQ .

Consideremos o segmento EQ e observemos que cada ponto dele é intersecção entre o segmento EQ e as retas que passam por P , que pode ou não intersectar l .

Definamos dois conjuntos:

- $\pi = \{X \in EQ \mid \text{a reta } PX \text{ intersecta } l\}$
- $\theta = \{X \in EQ \mid \text{a reta } PX \text{ não intersecta } l\}$.

Note que, $\pi \cap \theta \neq \emptyset$ e que $Q \in \pi$, pois PQ intersecta l em Q e $E \in \theta$, pois $PE = m$.

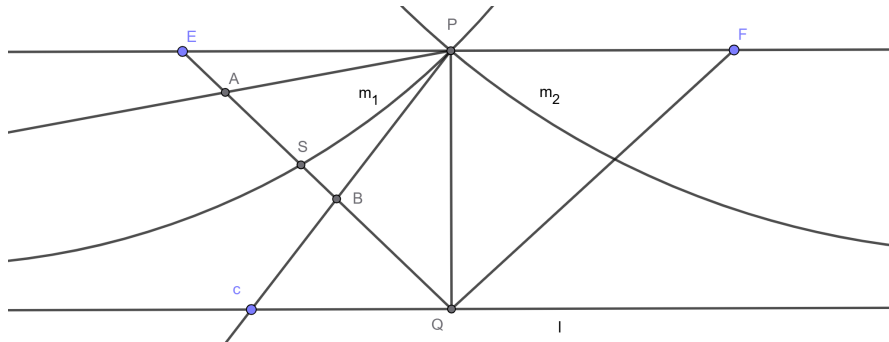
Além disso, se $A \in \pi$, então todo o segmento $AQ \subset \pi$. De fato, se C é a interseção da reta PA com l , então qualquer reta por P (ou seja, variando de PA até PQ) intersecta l no segmento CQ , logo AQ esta contido em π . Analogamente, se $B \in \theta$, então $BE \subset \theta$, pois qualquer reta por P entre PB e PE também ou é paralela a l ou não a intersecta.

Como π e θ são subconjuntos de EQ que representam as retas que intersectam ou não a reta l , deve haver algum ponto $S \in EQ$ que separa tais conjuntos. Determinemos a qual conjunto S pertence.

Suponhamos $S \in \pi$, então a reta que passa por PS intersecta l num ponto T . Escolhamos T' em l de modo que T esteja entre T' e Q . Note que, a reta PT' intersecta o segmento ES , o que é um absurdo, já que S é o ponto que separa os dois conjuntos π e θ e $E \in \theta$, logo todo ponto entre E e S pertence a θ , contradizendo a definição de θ . Portanto $S \notin \pi$, logo $S \in \theta$. Assim, obtemos a reta m_1 que passa pelos P e S e não intersecta l .

Analogamente, considerando o segmento FQ , existe $R \in FQ$ tal que a reta m_2 que passa pelos pontos P e R e não intersecta l . Assim, as retas m_1 e m_2 separam os conjuntos das retas que cortam a reta l das que não cortam.

Figura 15 – Construção auxiliar da proposição 9.



Fonte: Próprio autor.

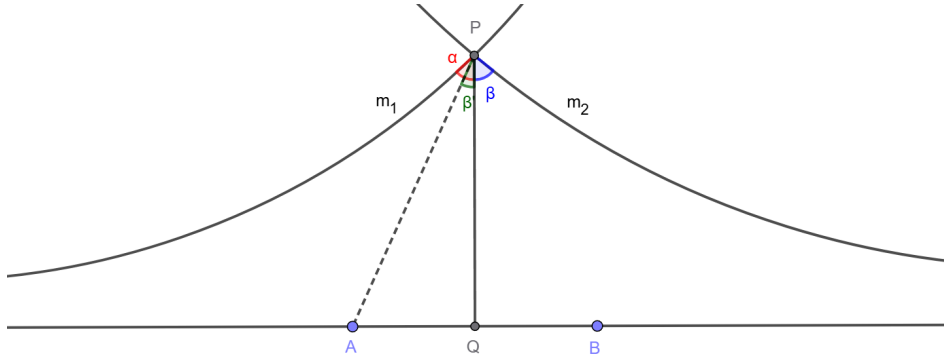
□

As duas retas m_1 e m_2 serão chamadas de *paralelas assintóticas* à reta l que passam por P . Os ângulos formados pela perpendicular a l que passa por P com as retas m_1 e m_2 serão denominados de *Ângulos de Paralelismo*.

Proposição 10. *Sejam m_1 e m_2 retas paralelas assintotas a uma reta r passando por $P \notin r$. Os ângulos de paralelismo formados por elas são congruentes. Além disso, eles são agudos.*

Demonstração. Seja P um ponto fora da reta r . Consideremos Q o pé da perpendicular baixada de P sobre r . Consideremos ainda, m_1 e m_2 paralelas assíntotas à r passando por P , formando ângulos de paralelismo α e β , entre m_1 com PQ e m_2 com PQ , respectivamente.

Figura 16 – Os ângulos de paralelismo são congruentes.



Fonte: Próprio autor.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha > \beta$. No lado do ângulo α , consideremos a reta que passa por P e que forma o ângulo β com PQ . Com efeito, esta reta corta r em um ponto A . Marquemos em r um ponto B , de modo que Q esteja entre A e B e $AQ = QB$. $AQ = BQ$, $\widehat{AQP} = \widehat{BQP} = 90^\circ$ e PQ é lado comum. Daí, pelo caso de congruência de triângulos LAL , os triângulos AQP e BQP são congruentes. Logo, $\widehat{BPQ} = \beta$, mas $\widehat{BPQ} < \beta$, absurdo. Portanto $\alpha = \beta$.

Para mostrarmos que são agudos, como m_1 e m_2 são distintas e estão em lados opostos de PQ , o ângulo entre m_1 e m_2 mede 2α (pois cada uma forma ângulo α com PQ , uma de cada lado). Além disso, m_1 e m_2 não são colineares, logo $0 < 2\alpha < 180^\circ$, donde $0 < \alpha < 90^\circ$. Portanto, α é agudo. Como $\alpha = \beta$, ambos os ângulos de paralelismo são agudos e congruentes. $\square$

2.4.1 Propriedades Elementares das retas Paralelas Assíntotas

Os Teoremas que serão apresentados nesta seção são fundamentais para estabelecer as propriedades basilares das retas paralelas assintóticas na geometria hiperbólica, demonstrando que esta relação funciona de forma matematicamente consistente. O Teorema 3 garante que o paralelismo assintótico, estabelecido a partir de um ponto e num determinado sentido, se mantém inalterado ao longo de qualquer ponto da reta. Por sua vez, o Teorema 4 assegura a propriedade da simetria, indicando que se uma reta é paralela assintótica a uma segunda, esta última também o será em relação à primeira.

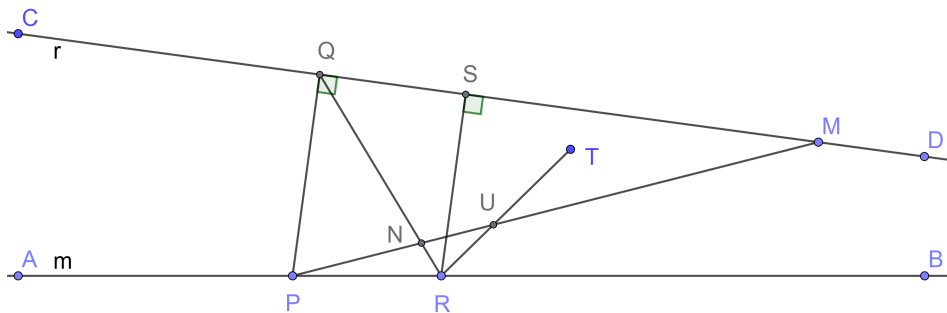
Por fim, o Teorema 5 introduz a propriedade da transitividade, estabelecendo que se duas retas distintas são ambas paralelas assintóticas a uma terceira, na mesma direção, então são obrigatoriamente paralelas assintóticas entre si. Em conjunto, estes três teoremas constroem o rigor lógico necessário para garantir que o paralelismo assintótico no espaço hiperbólico atua de forma muito semelhante a uma relação de equivalência, fornecendo uma base teórica sólida e fiável para as demonstrações e desenvolvimentos subsequentes dentro deste universo não-euclidiano.

Teorema 3. *Se uma reta é paralela assíntota, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é paralela assíntota no mesmo sentido à reta dada em cada um de seus pontos.*

Demonstração. Seja m uma reta que passa pelos pontos A e B e é paralela assintótica a uma reta r . Consideremos um ponto $P \in m$ que está entre A e B . Suponhamos, sem perda de generalidade, que m é paralela assintótica à direita. Desta forma, se R é um ponto qualquer da reta m , queremos provar que m é paralela assintótica à direita da reta r passando por R . Consideremos dois casos:

Caso 1. O ponto R na reta m está no lado na direção do paralelismo. Trace os segmentos PQ e RS , perpendiculares a r , sendo Q e S os pés das perpendiculares em r . Consideremos a semi-reta SRT que divide o ângulo $S\hat{R}B$. Mostraremos que SRT intercepta r . Consideremos um ponto U sobre o segmento RT . Tracemos a reta PU e o segmento RQ .

Figura 17 – Construção auxiliar do teorema 3 para o primeiro caso.

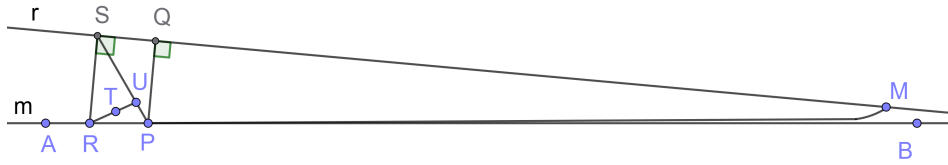


Fonte: Próprio autor.

Como m é paralela assintótica à reta r passando por P , segue que a reta PU deve cortar a reta r num ponto M e corta também o segmento RQ em um ponto N . Note que, a semi-reta SRT corta o lado NM do triângulo QMN . Pelo axioma de Pash, deverá cortar o lado QM .

Caso 2. O ponto R na reta m está no sentido contrário à direção do paralelismo. Trace os segmentos PQ e RS , perpendiculares a r , sendo Q e S os pés das perpendiculares em r . Consideremos a semi-reta S_{RT} que divide o ângulo $\widehat{SRP}$, Mostraremos que S_{RT} intercepta r . Como a reta m é paralela assíntota a direita, considere a semireta S_{PU} como sendo a primeira que parte de P e não é paralela a r , ela deve intersectar r em um ponto M , em outras palavras, o conjunto das retas que estão contidas entre m e PM é vazio. Trace PS . Desta forma, como S_{RT} entra no ângulo $\widehat{SRB}$, deve cortar o segmento PS em um ponto U .

Figura 18 – Construção auxiliar do teorema 3 para o segundo caso.



Fonte: Próprio autor.

Pelo axioma de Pash, a semi-reta S_{RT} deve cortar o lado SM ou PM do triângulo MPS , caso corte PM , por construção, S_{RT} deve cruzar a reta m novamente, mas isso não pode acontecer, pois duas retas distintas não podem se intersectar em dois pontos diferentes. Portanto, obrigatoriamente, S_{RT} deve cortar SM no triângulo MPS .

Logo, fica mostrado o paralelismo à esquerda.

□

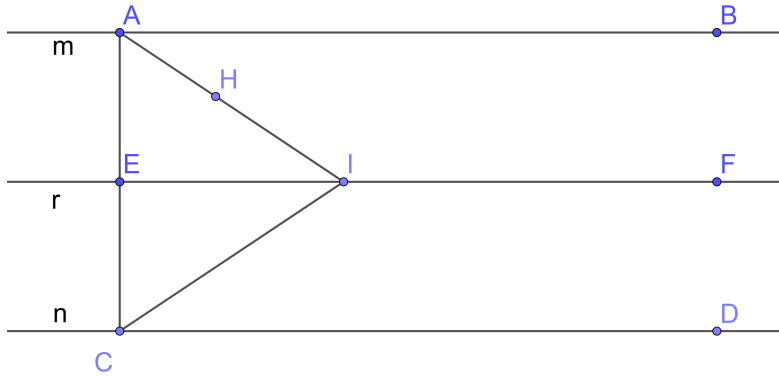
Teorema 4. Se uma reta r é paralela assintótica uma outra reta s , então a reta s é paralela assintótica a r .

Demonstração. Consideremos r e s retas passando pelos pontos A e B , e C e D , respectivamente. Seja P o ponto entre A e B . Suponhamos que r é paralela assintótica, à direita de s passando pelo ponto P . Sejam Q e R os pés das perpendiculares baixadas desde P e Q às retas r e s , respectivamente. Isto é, PQ e QR são perpendiculares a r e a s .

Note que, o ponto R ficará à direita do ponto P do lado do paralelismo, pois, se estivesse do outro lado, o triângulo PQR teria dois ângulo não agudos, o que contradiz a proposição 6.

Queremos provar que s é paralela assintótica a r passando por Q . Desta forma, temos que provar que toda reta que passa por Q e divide o ângulo $\widehat{RQD}$, intersecta s . Consideremos uma dessas retas e E um de seus pontos dentro do

Figura 20 – Construção auxiliar do teorema 5 para o primeiro caso.

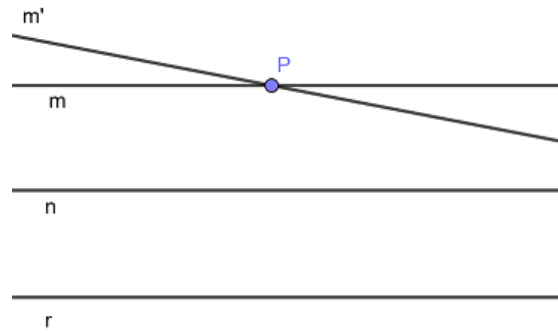


Fonte: Próprio autor.

Caso 2: As retas m e n estão em um mesmo lado de r .

Neste caso, seja m' uma reta paralela assintótica a n passando por um ponto $P \in m$ na mesma direção do paralelismo que m e n são paralelas a r . Como m' é paralela assintótica a n , pelo caso 1, m' é paralela assintótica a r . No entanto, a paralela assintótica, na mesma direção, é única. Logo, $m = m'$ e, portanto, m é paralela assintótica a n .

Figura 21 – Construção auxiliar do teorema 5 para o segundo caso.



Fonte: Próprio autor.

□

Com o objetivo de adaptar e expandir as ferramentas da geometria clássica ao comportamento contra-intuitivo da geometria hiperbólica, surge a necessidade de definir pontos ideais e pontos ordinários, bem como de classificar os triângulos em generalizados e ordinários. Como nesse espaço não-euclidiano existem retas paralelas assintóticas que se aproximam infinitamente sem nunca se tocarem no plano visível, a criação matemática do conceito de “ponto ideal” permite tratar essas retas como se elas convergissem para um vértice comum. A partir dessa premissa,

formam-se os chamados “triângulos generalizados” diferenciando-se dos “triângulos ordinários”. Essa estruturação é fundamental para o rigor matemático, pois permite estender propriedades geométricas já conhecidas (tais como o estudo dos ângulos internos e externos, os casos de congruência e as relações de desigualdade angular) para configurações envolvendo retas paralelas assintóticas, tratando-as com a mesma base lógica aplicada aos triângulos comuns.

2.4.2 Pontos Ideais

Definição 2.2. Em geral, diremos que um ponto pertencente ao plano hiperbólico é um *ponto ordinário*. Eles serão representados por letras maiúsculas latinas.

Definição 2.3. Um ponto numa reta paralela (na direção do paralelismo) é chamado de *ponto ideal* se ele se localiza antes ou depois de todos os pontos ordinários dessa mesma reta. De forma mais simples, um ponto ideal é um ponto no infinito.

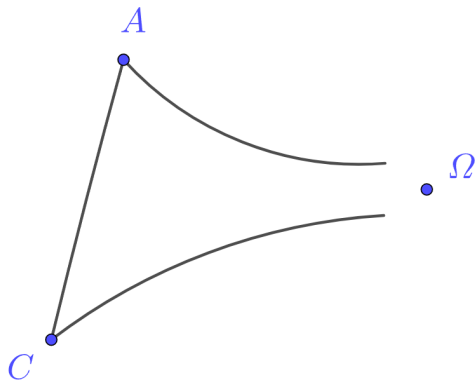
Na geometria hiperbólica, quando duas retas são paralelas assintóticas, elas partilham esse ponto ideal comum no infinito. Representaremos tais pontos com letras maiúsculas gregas.

2.4.3 Triângulos Generalizados e Suas Propriedades

Definição 2.4. Triângulos formado por três pontos ordinários é chamado de *triângulo ordinário*.

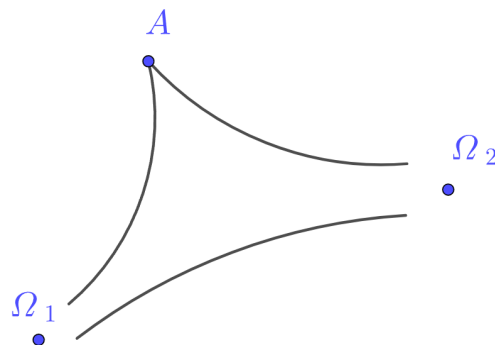
Definição 2.5 (Triângulos Generalizados). Chamaremos de triângulo generalizado todo triângulo que possui pelo menos um ponto ideal.

Figura 22 – Triângulo generalizado com um ponto ideal.



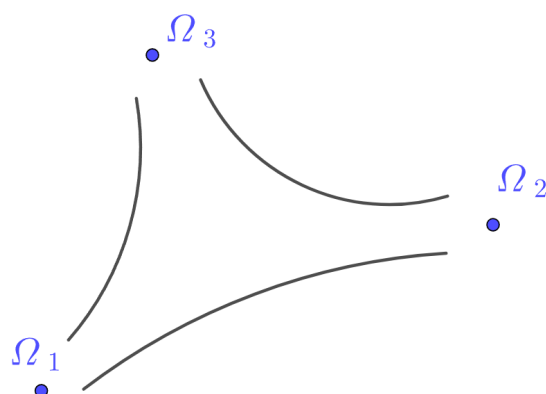
Fonte: Próprio autor.

Figura 23 – Triângulo generalizado com dois pontos ideais.



Fonte: Próprio autor.

Figura 24 – Triângulo generalizado com três pontos ideais.

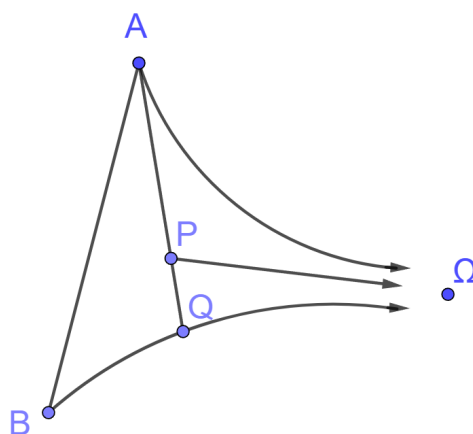


Fonte: Próprio autor.

Teorema 6. *Se uma reta, passando por um dos vértices, atravessa o triângulo generalizado $AB\Omega$, então ela teve cortar o lado oposto a este vértice.*

Demonstração. Sejam $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Note que, as retas $A\Omega$ e $B\Omega$ são paralelas assintóticas, logo as retas que atravessarem pelos vértices A e B devem intersectar o lado oposto (Figura 25).

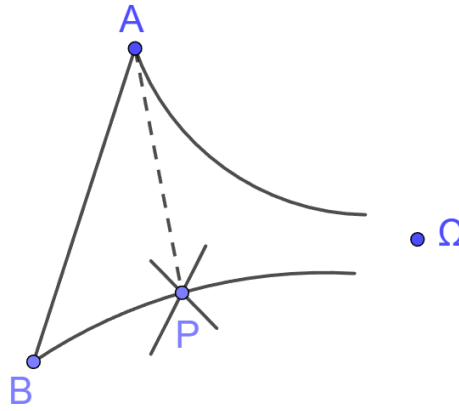
Figura 25 – Construção auxiliar do teorema 6.



Fonte: Próprio autor.

Consideremos uma reta r passando por Ω e por algum ponto X no interior do triângulo $AB\Omega$. Tal reta r intersecta a reta que atravessa o triângulo por A num ponto P . Assim a semi-reta S_{AP} deve intersectar a reta $B\Omega$ em algum ponto Q (Figura 26).

Figura 26 – Construção auxiliar do teorema 6.



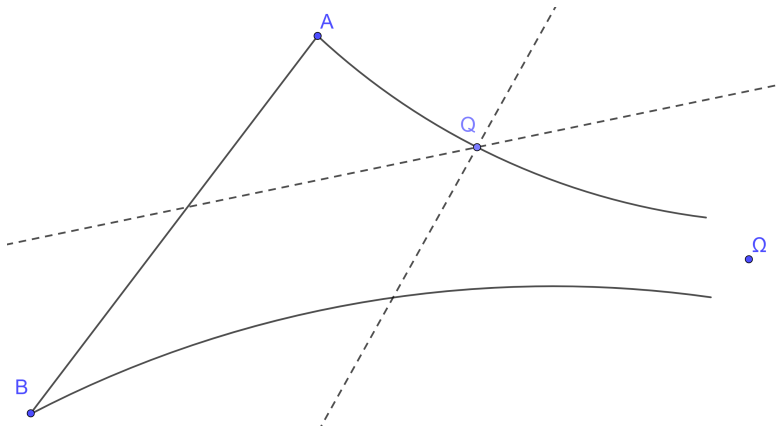
Fonte: Próprio autor.

Pelo axioma de Pash, a reta r corta o lado AQ do triângulo AQB , logo deve intersectar um dos outros lados. Como não pode intersectar o lado QB , segue que r deve intersectar o lado AB . $\square$

Teorema 7. *Se uma reta intersecta um dos lados de um triângulo generalizado com dois pontos ordinários e não passa por nenhum de seus vértices, então ela deve cortar um, e somente um, dos outros dois lados.*

Demonstração. Sejam $AB\Omega$ um triângulo generalizado e r uma reta que corta um de seus lados. Suponhamos que r corta $A\Omega$ em um ponto Q . Desta forma, se r entra no triângulo $BQ\Omega$, pelo teorema 6, deve cortar o lado $B\Omega$. Por outro lado, se r entra no triângulo ABQ , pelo axioma de Pash, deve cortar AB . Além disso, por hipótese, $BQ \not\subset r$. Portanto r deve passar por $B\Omega$ ou por AB .

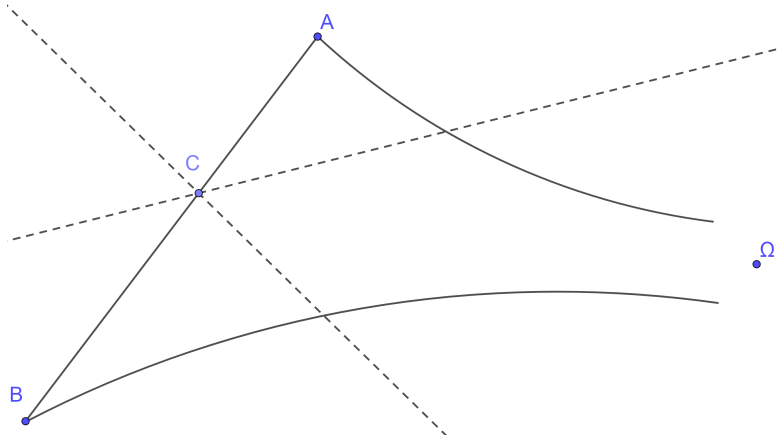
Figura 27 – Construção auxiliar do teorema 7.



Fonte: Próprio autor.

Suponha agora, que r corta AB em um ponto C . Desta forma, se r entra no triângulo $AC\Omega$, pelo teorema 6, deve cortar o lado $A\Omega$. Analogamente, se r cortar $C\Omega$. Já que, por hipótese, $C\Omega \not\subset r$, portanto, r deve passar por $A\Omega$ ou por $C\Omega$. $\square$

Figura 28 – Construção auxiliar do teorema 7.



Fonte: Próprio autor.

Existem algumas semelhanças entre as teorias dos triângulos generalizados e dos ordinários, uma delas é a existência de ângulos internos e ângulos externos. O ângulo do vértice ideal é definido como sendo nulo. Assim, em um triângulo generalizado $AB\Omega$, seus ângulos internos são $\widehat{AB\Omega}$ e $\widehat{B\hat{A}\Omega}$, enquanto os ângulos externos, são os suplementares desses ângulos, que são determinados pela extensão dos lado AB . Da definição, segue que os triângulos generalizados com três vértices ideais não possuem ângulos externos.

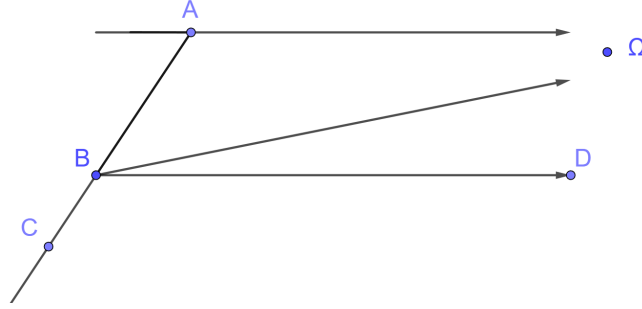
A seguir enunciaremos o Teorema do ângulo Externo para triângulos generalizados.

Teorema 8. *Em um triângulo generalizado $AB\Omega$, o ângulo externo é sempre maior do que o ângulo interno não adjacente a ele.*

Demonstração. Seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado, definamos S_{AB} como sendo a semi-reta que passa por A e B . Tomemos $C \in S_{AB}$, com $C \notin AB$. Desta forma, temos o ângulo externo $\widehat{C\hat{B}\Omega}$ do triângulo $AB\Omega$. Mostraremos que $\widehat{C\hat{B}\Omega} > \widehat{B\hat{A}\Omega}$.

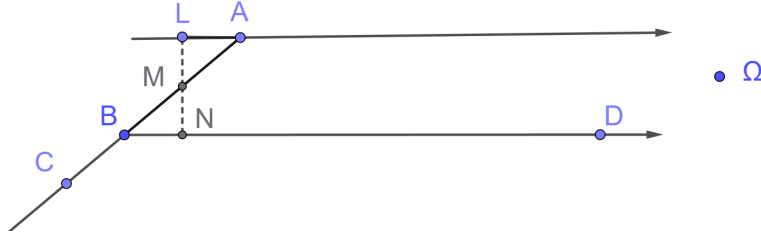
Tracemos, a partir de B , um segmento BD , de modo que $\widehat{C\hat{B}D} = \widehat{B\hat{A}\Omega}$, pelo teorema dos ângulos alternos internos, a reta que passa por B e D não intersecta $A\Omega$. Consequentemente, D não está no interior do triângulo $AB\Omega$, como na Figura 29.

Figura 29 – Construção auxiliar do teorema 8.



Fonte: Próprio autor.

Figura 30 – Construção auxiliar do teorema 8.



Fonte: Próprio autor.

Suponhamos D esteja sobre $B\Omega$. Seja M o ponto médio de AB . Trace MN perpendicular a $B\Omega$, com N o pé da perpendicular baixada de N sobre $B\Omega$. Na semi-reta $S_{\Omega A}$ marquemos o ponto $L \notin A\Omega$ de modo que $LA = BN$ e que L e N estejam de lados opostos a reta que passa por A e B , como na Figura 30.

Note que, se D está sobre $B\Omega$, $\widehat{MBN} = \widehat{LAM}$, $BN = LA$, $BM = MA$. Logo, pelo caso de congruência LAL , os triângulos BNM e ALM são congruentes, o que implica $\widehat{MLA} = \widehat{MNB} = 90^\circ$, o que contradiz que o ângulo de paralelismo $\widehat{M\Omega}$ é agudo (proposição 10). Portanto, $\widehat{CB\Omega} > \widehat{BA\Omega}$. $\square$

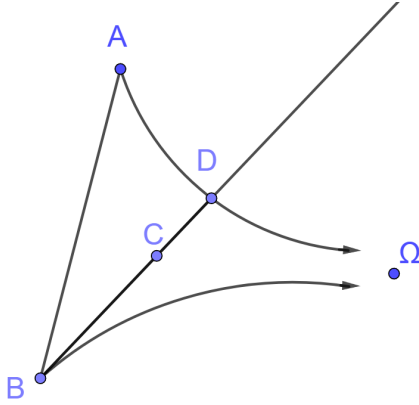
2.4.4 Congruência de Triângulos Generalizados

Dois triângulos, na geometria hiperbólica, serão congruentes sempre que possuírem uma correspondência entre seus vértices de maneira que os lados finitos e os ângulos correspondentes sejam todos congruentes. Usaremos a notação $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ para representar a congruência entre dois triângulos, com a correspondência: A leva em A' , B leva em B' e Ω leva em Ω' . A seguir, serão apresentadas condições mínimas que garantem a congruência entre dois triângulos generalizados.

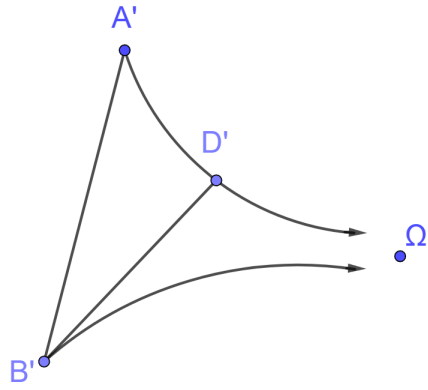
Teorema 9 (1º caso de congruência de triângulos generalizados - Lado-Ângulo). *Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados. Se $AB = A'B'$ e $\widehat{B\hat{A}\Omega} = \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$, então $AB\Omega = A'B'\Omega'$.*

Demonstração. Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ dois triângulos generalizados, com $AB = A'B'$ e $\widehat{B\hat{A}\Omega} = \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$. Devemos mostrar que $\widehat{A\hat{B}\Omega} = \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$.

Figura 31 – Construção auxiliar do teorema 9. Figura 32 – Construção auxiliar do teorema 9.



Fonte: Próprio autor.



Fonte: Próprio autor.

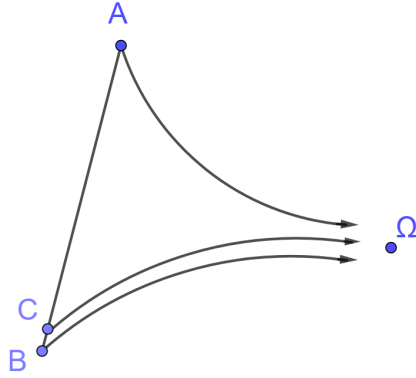
Sem perda de generalidade, suponhamos que $\widehat{A\hat{B}\Omega} > \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$. Consideremos um ponto C no interior do triângulo $AB\Omega$ tal que $\widehat{A\hat{B}C} = \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$. Note que, a semi-reta S_{BC} , atravessa o ângulo $\widehat{A\hat{B}\Omega}$, pelo teorema 6, ela intersecta o lado $A\Omega$ em um ponto D , Figura 31. Tome D' em $A'\Omega'$, de modo que $A'D' = AD$, Figura 32. Note que, pelo caso de congruência LAL , $ABD = A'B'D'$.

Com efeito, $\widehat{A'\hat{B}'D'} = \widehat{A\hat{B}D} = \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$, o que é um absurdo. Logo $\widehat{A\hat{B}\Omega} > \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$ é falso, portanto concluímos que $\widehat{A\hat{B}\Omega} = \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$. $\square$

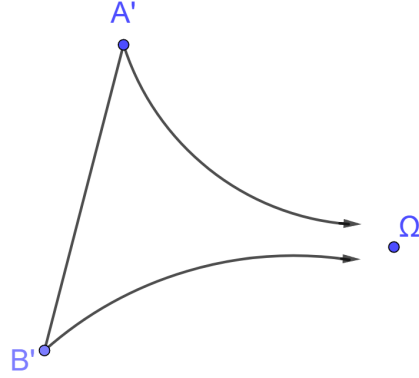
Teorema 10 (2º caso de congruência de triângulos generalizados - Ângulo-Ângulo). *Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ dois triângulos generalizados. Se $\widehat{A\hat{B}\Omega} = \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$ e $\widehat{B\hat{A}\Omega} = \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$, então $AB\Omega = A'B'\Omega'$.*

Demonstração. Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados com $\widehat{A\hat{B}\Omega} = \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$ e $\widehat{B\hat{A}\Omega} = \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$. Devemos mostrar que $AB = A'B'$.

Figura 33 – Construção auxiliar do teorema 10. Figura 34 – Construção auxiliar do teorema 10.



Fonte: Próprio autor.



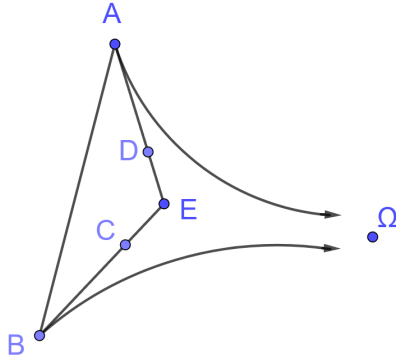
Fonte: Próprio autor.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $AB > A'B'$. Consideremos C um ponto do segmento AB , de modo que $AC = A'B'$. Traçando a semi-reta $S_{C\Omega}$, Figura 33. Pelo 1º caso de congruência de triângulos generalizados, teremos que $AC\Omega = A'B'\Omega'$ e, portanto, $\widehat{AC\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$. Com efeito, teremos $\widehat{AC\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'} = \widehat{AB\Omega}$, ou seja, o triângulo $CB\Omega$ possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que contradiz o teorema 8, logo $AB > A'B'$ é falso. Portanto $AB = A'B'$. $\square$

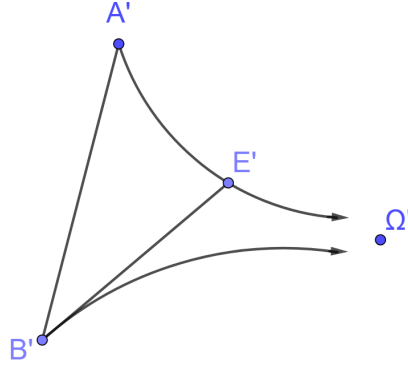
Teorema 11 (3º caso de congruência de triângulos generalizados - Isósceles). *Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ dois triângulos generalizados tais que, $AB = A'B'$, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{B\hat{A}\Omega}$ e $\widehat{A'B'\Omega'} = \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$, ou seja, todos os triângulos generalizados com bases de mesma medida são congruentes entre si.*

Demonstração. Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados com $AB = A'B'$, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{B\hat{A}\Omega}$ e $\widehat{A'B'\Omega'} = \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$. É suficiente mostrar que $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$.

Figura 35 – Construção auxiliar do teorema 11. Figura 36 – Construção auxiliar do teorema 11.



Fonte: Próprio autor.



Fonte: Próprio autor.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\widehat{AB\Omega} > \widehat{A'B'\Omega'}$. Construamos os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BAD}$, de modo que

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = \widehat{A'B'\Omega'}.$$

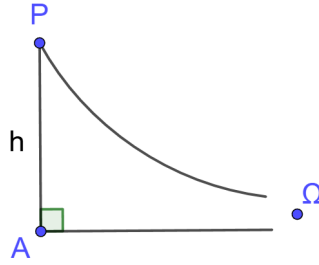
Note que, pelo teorema 6, as semi-retas S_{AD} e S_{BC} se intersectam em um ponto E no interior de $AB\Omega$. No triângulo $A'B'\Omega'$, marque o ponto E' no lado $A'\Omega'$, de modo que $A'E' = AE$. Note que, os triângulos ABE e $A'B'E'$ são congruentes (LAL). No entanto, teremos $\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE} = \widehat{A'B'\Omega'}$, o que é absurdo, logo $\widehat{AB\Omega} > \widehat{A'B'\Omega'}$ é falso, concluindo que $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$. $\square$

2.4.5 O Ângulo de Paralelismo

Seja $AP\Omega$ um triângulo generalizado com ângulo reto ($\hat{A} = 90^\circ$) no vértice A . Através da aplicação do Teorema do ângulo externo para triângulos desta natureza, verifica-se que o ângulo $\hat{P}$ é agudo, sendo este denominado **ângulo de paralelismo**.

Com base no primeiro caso de congruência para triângulos generalizados, conclui-se que o valor deste ângulo é determinado exclusivamente pela medida do segmento AP . Definindo h como a medida do segmento AP (comprimento) e $\Theta(h)$ como o ângulo de paralelismo correspondente a h , observa-se que Θ é uma função decrescente.

Figura 37 – Construção auxiliar da função ângulo de paralelismo.



Fonte: Próprio autor.

Visto que a extensão do segmento AP é arbitrária, a função Θ é definida para todo número real não negativo, assumindo o valor de um ângulo reto quando $h = 0$. Futuramente, no teorema 17, demonstraremos que a imagem da função Θ compreende o intervalo $(0, 90^\circ]$, tendendo a zero à medida que h se aproxima de $+\infty$. Dada a sua característica de estrita monotonicidade, a função é contínua.

Para fins de generalização e aplicações posteriores, estende-se a definição de Θ para valores negativos de h mediante a relação.

$$\Theta(h) + \Theta(-h) = 180^\circ$$

Esta extensão viabiliza o uso de coordenadas em uma reta e a definição da função em todos os seus pontos. Alternativamente, ao expressar Θ em radianos, obtemos:

$$\Theta(0) = \pi/2 \quad \text{e} \quad \Theta(h) + \Theta(-h) = \pi$$

A convenção em radianos será a adotada nas seções subseqüentes deste estudo.

2.4.6 Quadriláteros Especiais

Iniciaremos esta seção com um corolário da Proposição 4 na Seção 2.2.

Corolário 1. *A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas paralelas.*

Teorema 12. *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.*

Demonstração. Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri e Ω um dos pontos ideais da reta que passa por A e B . Sem perda de generalidade, suponhamos que $B \in A\Omega$. Consideremos as semi-retas $S_{D\Omega}$ e $S_{C\Omega}$. Tomemos um ponto E , de modo que $C \in DE$.

Pelo corolário 1, temos que $S_{D\Omega}$ atravessa o ângulo $\widehat{ADE}$ e que $S_{C\Omega}$ atravessa o ângulo $\widehat{BCE}$. Note que, os triângulos $AD\Omega$ e $BC\Omega$ são congruentes, pois $AD = BC$ e $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. Assim, $\widehat{AD\Omega} = \widehat{BC\Omega}$. Além disso, pelo teorema 8, o ângulo externo $\widehat{EC\Omega}$ do triângulo $CD\Omega$ é maior do que o ângulo interno não adjacente $\widehat{CD\Omega}$. Portanto, $\widehat{BCE} > \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. Logo, os ângulos do topo são agudos. $\square$

2.4.6.1 *Quadriláteros de Lambert*

O matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) desempenhou um papel bastante importante com suas contribuições para a geometria. Em seus estudos, estão a primeira demonstração de que π é um número irracional, o cálculo da trajetória de um cometa, e muitas outras. Além disso, ele tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides num caso particular dos quadriláteros de Saccheri .

Segundo Silva Batista (2019), o trabalho de G.S. Klügel, em 1763, que examinava algumas demonstrações já feitas anteriormente do quinto postulado, chamou a atenção de Lambert e lhe inspirou no estudo da teoria das paralelas.

Na conclusão do trabalho, Klügel expressou dúvidas sobre a possibilidade de se obter “ uma demonstração sobre o Quinto Postulado. Lambert tentou, então, encontrar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo.”(SILVA BATISTA, 2019)

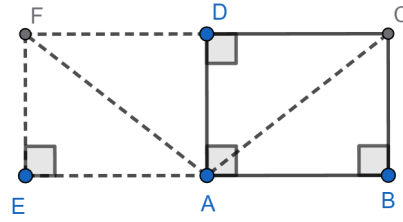
De modo semelhante a Saccheri, Lambert escolheu, como sua figura base, um quadrilátero com três ângulos retos e para o quarto ângulo, considerou três hipóteses:

- 1 Hipótese do ângulo reto;
- 2 Hipótese do ângulo obtuso;
- 3 Hipótese do ângulo agudo;

Como a hipótese do ângulo reto é equivalente ao quinto postulado de Euclides, Lambert se concentrou na análise das outras duas hipóteses.

Teorema 13. *O quarto ângulo de um quadrilátero de Lambert é sempre agudo.*

Figura 38 – Construção auxiliar do teorema 13.



Fonte: Próprio autor.

Demonstração. Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Lambert com $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Marquemos o ponto E na semi-reta S_{BA} , de modo que $EA = AB$. Tracemos a perpendicular EF à semi-reta S_{BA} passando por E , e tal que $EF = BC$. Tracemos FA , FD e AC . Pelo caso de congruência LAL , $FEA = ABC$.

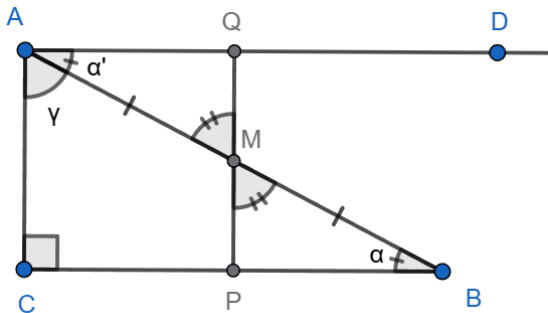
Daí, obtemos a congruência dos triângulos FAD e CAD pelo caso de congruência LAL . Portanto, o ângulo $\widehat{FDA}$ é reto e, dessa forma, os pontos F , D e C são colineares. Por construção, $FEBC$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o ângulo $\widehat{BCD}$ é agudo. $\square$

2.4.7 Soma dos Ângulos internos de um Triângulo

Teorema 14. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ordinário é menor do que dois retos.*

Demonstração. Faremos a demonstração primeiro para um triângulo retângulo ordinário qualquer e, em seguida, para um triângulo ordinário qualquer.

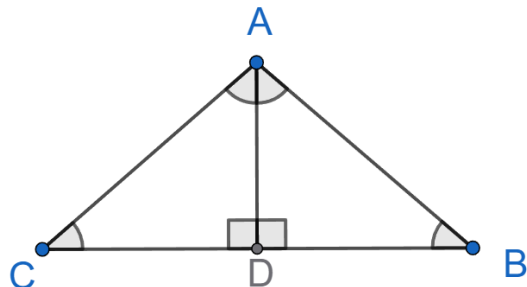
Figura 39 – Construção auxiliar do teorema 14.



Fonte: Próprio autor.

Consideremos um triângulo ABC reto em $\widehat{C}$, com $\widehat{ABC} = \alpha$ e $\widehat{CAB} = \gamma$. Seja $P \in CB$ o pé da perpendicular baixada desde o ponto médio M de AB . Construamos uma reta AD de modo que $\widehat{DAB} = \alpha = \widehat{ABC}$. Na reta AD , considere

Figura 40 – Construção auxiliar do teorema 14.



Fonte: Próprio autor.

o ponto Q , tal que $AQ = PB$. Note que, pelo caso LAL , $AQM = BPM$. Dessa forma, por construção, obtemos um quadrilátero de Lambert $AQPC$, reto em $\widehat{ACP}$, $\widehat{CPQ}$ e $\widehat{PQA}$, e com $\widehat{CAQ} = \alpha + \gamma < 90^\circ$. Logo, $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC} + \widehat{CAB} < 90^\circ$, daí, $\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{C} < 180^\circ$.

Agora, consideremos ABC um triângulo ordinário qualquer. Sem perda de generalidade, suponhamos que o ângulo relativo ao vértice A seja o maior. Tracemos a altura relativa à este vértice, com $D \in BC$ a interseção desta altura com o segmento BC , desta forma, obteremos dois triângulos retângulos ordinários, ABD e ACD . Dessa forma, pelo caso anterior, $\widehat{DAC} + \widehat{ACD} < 90^\circ$ e $\widehat{BAD} + \widehat{DBA} < 90^\circ$.

Logo, $\widehat{DAC} + \widehat{ACD} + \widehat{DBA} + \widehat{BAD} < 90^\circ + 90^\circ$. Portanto, $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} < 180^\circ$.

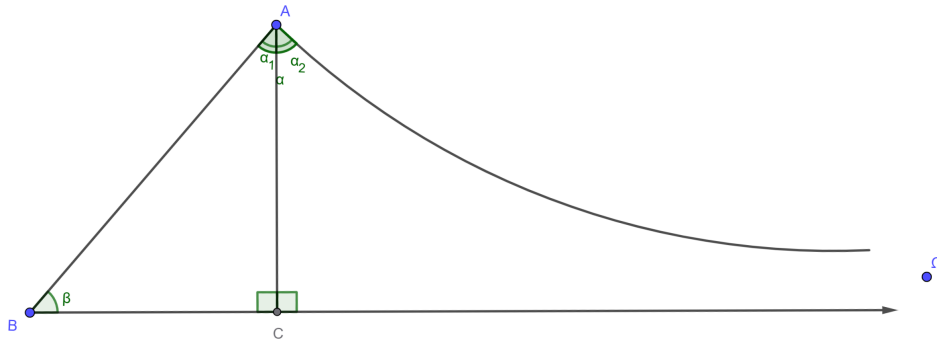
□

Teorema 15. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que dois retos.*

Demonstração. Vamos mostrar que a soma dos ângulos internos de qualquer um dos três tipos de triângulos generalizados é menor do que dois retos.

Caso 1: *Triângulos com um ponto ideal.* Seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Seja C o pé da perpendicular baixada desde A sobre o lado $B\Omega$. Assim, obtemos um triângulo retângulo ordinário ABC e o triângulo retângulo generalizado $AC\Omega$. Note que, pelo teorema 14 $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} < 90^\circ$, pela proposição 10 $\widehat{BAC} = \widehat{CA\Omega} < 90^\circ$, e por definição, $\widehat{A\Omega B}$ é nulo. Assim, $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{CA\Omega} < 180^\circ$, ou seja, $\widehat{\Omega BA} + \widehat{B\Omega\Omega} < 180^\circ$.

Figura 41 – Construção auxiliar do teorema 15.

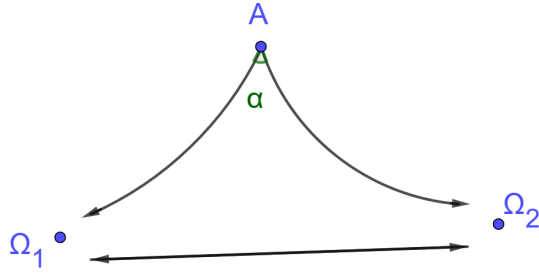


Fonte: Próprio autor.

Caso 2: *Triângulos com dois pontos ideais.* Seja $A\Omega_1\Omega_2$ um triângulo generalizado. Note que, por definição os ângulos $\widehat{\Omega_1}$ e $\widehat{\Omega_2}$ são nulos. Como as semi-retas $S_{A\Omega_1}$ e $S_{A\Omega_2}$ são paralelas a $\Omega_1\Omega_2$ à esquerda e à direita, respectivamente. Con-

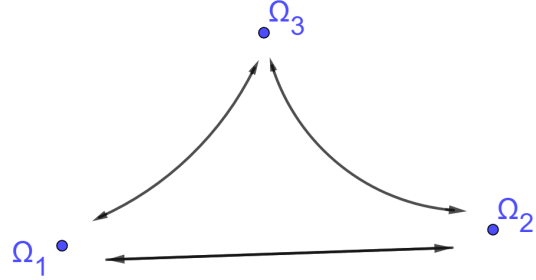
sideremos a perpendicular à $\Omega_1\Omega_2$ que passa pelo ponto A . Pela proposição 10 os ângulos do paralelismo são agudos e congruentes. Por tanto $\Omega_1\hat{A}\Omega_2 < 180^\circ$.

Figura 42 – Construção auxiliar do teorema 15.



Fonte: Próprio autor.

Figura 43 – Construção auxiliar do teorema 15.



Fonte: Próprio autor.

Caso 3: *Triângulos com três ângulos ideais*. Consideremos $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ um triângulo generalizado. Por definição, todos os seus ângulos são nulos. Logo, a soma dos ângulos será nula e, portanto, o resultado segue. $\square$

Corolário 2. *A soma dos ângulos internos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.*

Demonstração. Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e considere a sua diagonal AD . Assim, obtemos dois triângulos: ABD e ACD . Pelo 14, temos $\widehat{ABD} + \widehat{BDA} + \widehat{DAB} < 180^\circ$ e $\widehat{ADC} + \widehat{DCA} + \widehat{CAD} < 180^\circ$. Somando as duas desigualdades, temos

$$\widehat{ABD} + \widehat{BDA} + \widehat{DAB} + \widehat{ADC} + \widehat{DCA} + \widehat{CAD} < 360^\circ$$

Observe que $\widehat{DAB} + \widehat{CAD} = \widehat{A}$ e $\widehat{BDA} + \widehat{ADC} = \widehat{D}$. Portanto

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} < 360^\circ = 4(90^\circ)$$

$\square$

Corolário 3. *Na Geometria hiperbólica não existe retângulo.*

Corolário 4. *Em qualquer triângulo, um ângulo externo é sempre maior que a soma dos ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Consideremos o ponto D na semi-reta S_{AB} , com $D \notin AB$. Note que, $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} < 180^\circ$ e $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} = 180^\circ$. Com efeito,

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} < 180^\circ = \widehat{ABC} + \widehat{CBD}$$

Logo $\widehat{BCA} + \widehat{CAB} < \widehat{CBD}$.

□

Enquanto na geometria neutra operamos num cenário onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é apenas menor ou igual a 180° (o que garante que o ângulo externo supere os internos não adjacentes apenas de forma isolada), a geometria hiperbólica estabelece que essa soma é estritamente menor que 180° , fortalecendo o teorema para garantir que o ângulo externo é maior que a soma de ambos.

Teorema 16 (Caso de congruência AAA da geometria Hiperbólica). *Se dois triângulos possuem os três ângulos congruentes entre si, respectivamente, então esses dois triângulos são congruentes.*

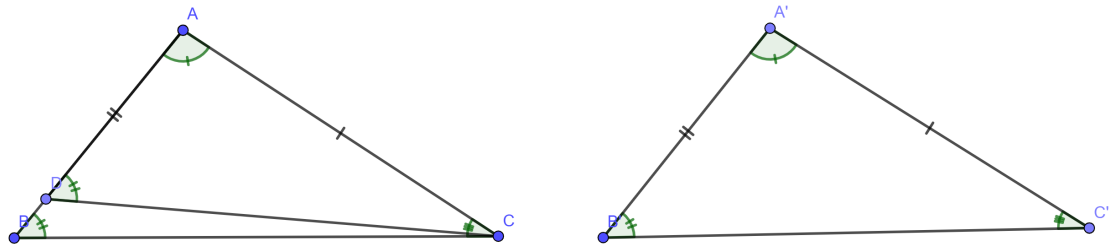
Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos generalizados, com $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ e $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$. Suponhamos, por contradição que os dois triângulos não sejam congruentes. Sem perda de generalidade, suponhamos que um dos lados correspondentes não sejam congruentes, digamos $AB > A'B'$. Marquemos os pontos D e E , sobre AB e AC , de modo que $AD = A'B'$ e $AE = A'C'$. Pelo caso de congruência LAL , os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Desta forma, o ponto E tem três situações possíveis sobre o lado AC .

1º *Caso.* $AC = AE$, isto é $E = C$, ver Figura 44; Neste caso, No entanto, teremos $\widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$. Assim pelo corolário 4 o ângulo externo

$$\begin{aligned}\widehat{ADE} &> \widehat{ABC} + \widehat{DCB} \\ \widehat{B} &> \widehat{B} + \widehat{DCB}\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{DCB} < 0$ o que é um absurdo. Logo caso 1º é impossível.

Figura 44 – Construção auxiliar do teorema 16 para o primeiro caso.



Fonte: Próprio autor.

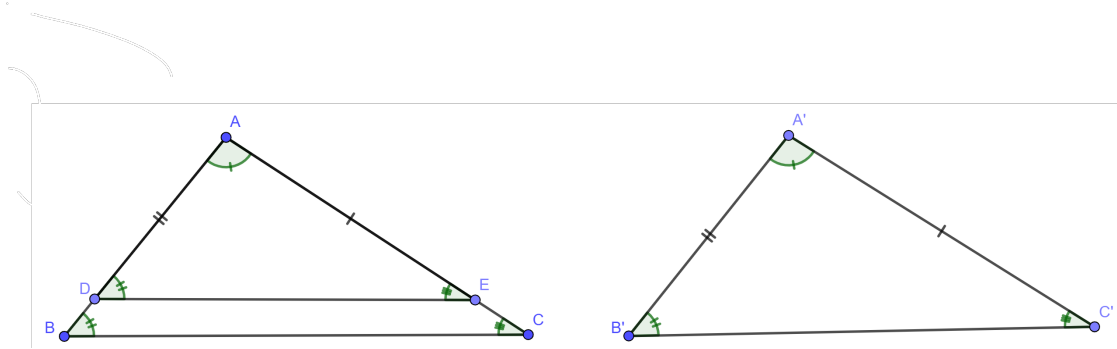
2º *Caso* $AE < AC$, isto é E está entre A e C , ver Figura 45; De fato, pelo caso LAL , os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Assim, $\widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'}$ e

$\widehat{AED} = \widehat{ACB}$. Note que, formamos o quadrilátero $BDEC$ e seus ângulos internos são: $\widehat{DBC} = \widehat{B}$, $\widehat{BDE} = 180^\circ - \widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{B}$, $\widehat{DEC} = 180^\circ - \widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{C}$ e $\widehat{ECB} = \widehat{C}$. Assim, a soma dos ângulos internos do quadrilátero $BDEC$ é

$$\widehat{B} + (180^\circ - \widehat{B}) + (180^\circ - \widehat{C}) + \widehat{C} = 360^\circ.$$

contradizendo o corolário 2. Portanto o caso 2º não ocorre.

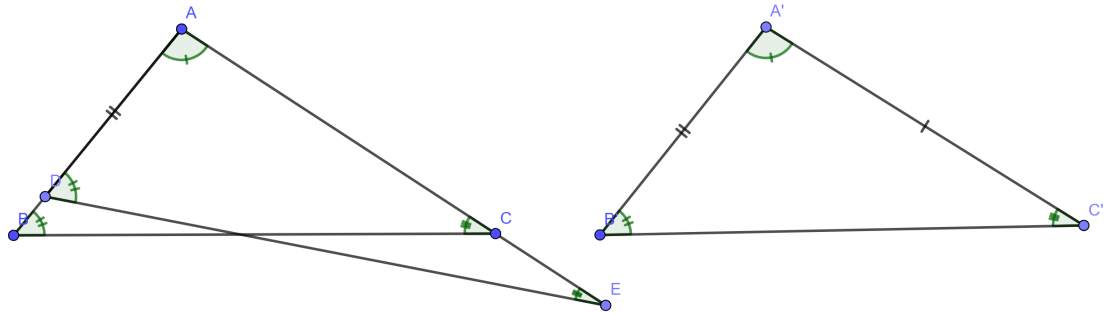
Figura 45 – Construção auxiliar do teorema 16 para o segundo caso.



Fonte: Próprio autor.

3º Caso. $AE > AC$, isto é C esta entre A e E , ver Figura 46; De novo, pelo caso de congruência LAL , os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Desta maneira, os triângulo BDF e FCE possuem um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente. Contradizendo o corolário 4. Desse modo, o suposto $AB > A'B'$ é falso. Portanto $AB = A'B'$ e ABC e $A'B'C'$ são congruentes. $\square$

Figura 46 – Construção auxiliar do teorema 16 para o terceiro caso.



Fonte: Próprio autor.

Definição 2.6 (Retas ultraparalelas). Duas retas r e s no plano hiperbólico são ditas ultraparalelas (ou divergentemente paralelas) quando:

1. Elas não se intersectam;
2. Elas não são assintoticamente paralelas, ou seja, não se aproximam infinitamente

em nenhuma direção;

3. Existe uma perpendicular comum às duas retas.

Equivalentemente: duas retas são ultraparalelas quando a distância mínima entre elas é positiva e ocorre ao longo de um segmento perpendicular a ambas.

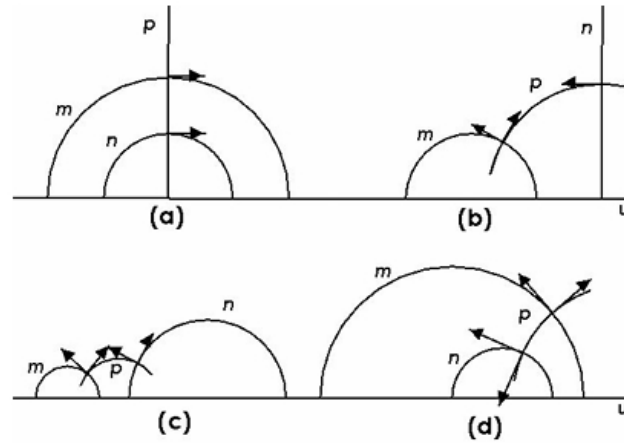
Exemplo concreto

No modelo do semiplano de Poincaré:

Retas paralelas assintóticas: semicírculos que se encontram no mesmo ponto da fronteira (ou retas verticais com mesmo ponto no infinito).

Retas ultraparalelas: semicírculos (ou retas verticais) cujos pontos ideais na fronteira são distintos e separados; existe uma única reta perpendicular a ambas.

Figura 47 – Exemplos de retas ultra-ideais



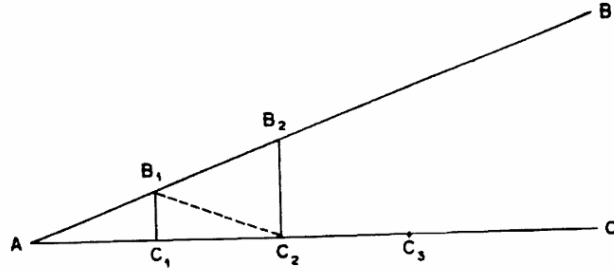
Fonte: Santos (2003).

Teorema 17 (Existência do Ângulo de Paralelismo). *A função ângulo de paralelismo Θ encontra-se definida para todo número real não negativo, sendo sobrejetora no intervalo $(0, 90^\circ]$.*

Demonstração. Mostraremos que, para qualquer ângulo agudo α dado, existe um comprimento não negativo h tal que $\Theta(h) = \alpha$. Consideremos um ângulo $B\hat{A}C$ com medida igual a α .

Afirmamos que, (1.) existe uma reta perpendicular à semi-reta S_{AC} que não intercepta a semi-reta S_{AB} .

Figura 48 – Construção auxiliar do teorema 17.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Suponhamos, por contradição, que todas as perpendiculares a S_{AC} interceptem S_{AB} . Tomemos um ponto arbitrário $C_1 \in S_{AC}$ e seja B_1 a interseção da perpendicular em C_1 com S_{AB} .

Agora afirmamos que, (2.) a soma dos ângulos internos do triângulo AB_1C_1 é dada por $180^\circ - \epsilon$. De fato, escolhamos um ponto $C_1 \in S_{AC}$ e seja B_1 a interseção da perpendicular a S_{AC} por C_1 . No triângulo AB_1C_1 , Denotemos por $\alpha = \angle B_1AC_1$ e $\angle AC_1B_1 = 90^\circ$. Sabemos que, na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos internos é menor que 180° . Logo, no triângulo AB_1C_1 temos $\alpha + 90^\circ + \angle AB_1C_1 < 180^\circ$, logo $\angle AB_1C_1 < 90^\circ - \alpha$, portanto definimos o defeito do triângulo por $\epsilon = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ + \angle AB_1C_1) > 0$. Assim, a soma dos ângulos do triângulo AB_1C_1 é $180^\circ - \epsilon$, ($\epsilon > 0$) concluindo a afirmação (2).

A seguir, marcamos um ponto $C_2 \in S_{AC}$ tal que C_1 seja o ponto médio de AC_2 , isto é, $C_1C_2 = AC_1$. Pela construção os triângulos AB_1C_1 e $C_2B_1C_1$ são congruentes.

Assim, afirmamos que, (3.) a soma dos ângulos de AB_2C_2 será menor que $180^\circ - 2\epsilon$. De fato, note que, A, C_1, C_2 colineares, $B_1 \in S_{AB}$ e $B_1C_1 \perp AC$, também $B_2 \in S_{AB}$ e $B_2C_2 \perp AC$. Como as perpendiculares a uma mesma reta são paralelas, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

Observe que, o triângulo AB_2C_2 pode ser decomposto em três triângulos menores: $T_1 = AB_1C_1$, $T_2 = C_2B_1C_1$ (congruente a T_1) e $T_3 = B_1B_2C_2$.

Pela aditividade do defeito, aplicado sucessivamente

$$\begin{aligned} \delta(AB_2C_2) &= \delta(T_1) + \delta(T_2) + \delta(T_3), & \delta(T_3) > 0 \\ &= 2\epsilon + \delta(T_3) > 2\epsilon \end{aligned}$$

Como, $\delta(AB_2C_2) = 180 - \text{soma}(AB_2C_2)$, temos

$$180^\circ - \text{soma}(AB_2C_2) > 2\epsilon \implies \text{soma}(AB_2C_2) < 180^\circ - 2\epsilon.$$

Ao repetirmos esse processo indutivamente n vezes, obteríamos um triângulo cuja soma dos ângulos internos seria $180^\circ - n\epsilon$. Para um valor de n suficientemente grande, a soma resultaria em um valor negativo, o que constitui um absurdo geométrico.

Portanto, a suposição inicial é falsa. Concluimos que existem retas perpendiculares a S_{AC} que não cortam S_{AB} , provando a afirmação (1).

A continuação, provemos que o conjunto das perpendiculares a S_{AC} pode ser particionado em dois subconjuntos: aquelas que interceptam e as que não a interceptam S_{AB} . Pelo axioma da continuidade, existe uma única reta fronteira m que separa esses conjuntos.

Então, afirmamos que, (4) existe uma reta fronteira m que separa esses conjuntos. Sejam D o ponto de interseção entre a reta m e S_{AC} , e $E \in m$ distinto de D como na figura 48. A reta m forma com S_{AC} um ângulo reto em D . Consideremos qualquer semi-reta S_{DF} que divide o ângulo $\hat{ADE}$. Afirmamos que, S_{DF} interceptasse S_{AB} . Se DF não interceptasse S_{AB} , então F pertenceria a uma reta perpendicular a S_{AC} que intercepta S_{AB} , pois F está no lado de m onde as perpendiculares interceptam. Mas então, pelo axioma de Pasch aplicado ao triângulo formado, DF deveria interceptar S_{AB} , uma contradição.

Como toda semi-reta que divide o ângulo $\hat{ADE}$ intercepta S_{AB} , concluimos que DE (que é a própria m) é paralela a S_{AB} , pois nenhuma reta entre m e S_{AC} deixa de interceptar S_{AB} concluindo (4).

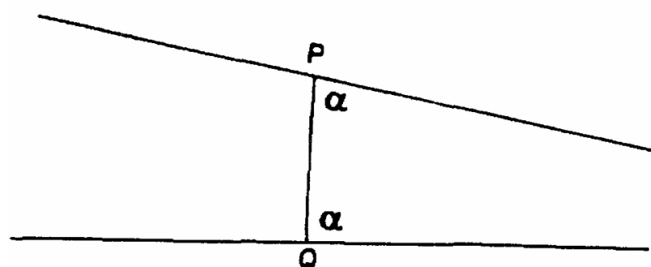
Assim, o comprimento $h = AD$ (a distância de A até o pé da perpendicular m sobre S_{AC}) possui α como seu ângulo de paralelismo, ou seja, $\Theta(h) = \alpha$.

Como α foi tomado arbitrariamente no intervalo $(0, 90^\circ]$, concluimos que Θ é sobrejetora nesse intervalo, completando a prova. $\square$

2.4.8 Horocírculos

Sejam m e n duas retas e P e Q dois pontos, pertencentes a m e n , respectivamente. Diremos que P e Q são pontos correspondentes se o segmento PQ forma com as duas retas m e n ângulos congruentes no mesmo lado da reta que passa por P e Q , respectivamente. Desta forma, diremos que o ponto P corresponde ao ponto Q , ou que o ponto Q corresponde ao ponto P . As demonstrações dos seguintes teoremas serão omitidas por escaparem ao foco principal deste trabalho. Remetemos o leitor interessado à obra *Geometria Hiperbólica* (BARBOSA, 2007). Os teoremas estabelecem algumas propriedades sobre relações entre pontos correspondentes, as quais são o fundamento da definição de horocírculo.

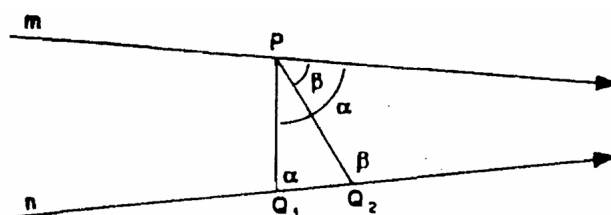
Figura 49 – Pontos correspondentes.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Teorema 18. *Dado um ponto pertencente a uma de duas retas paralelas, existe sobre a outra reta um, e somente um, ponto que é correspondente ao ponto dado.*

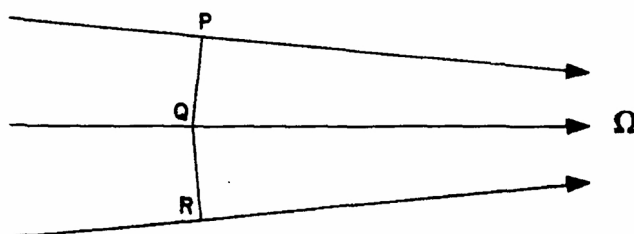
Figura 50 – Construção auxiliar do teorema 18.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Teorema 19. *Dados três pontos P , Q e R pertencem, respectivamente a três retas distintas paralelas em um mesmo sentido. Se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, os três pontos não são colineares.*

Figura 51 – Construção auxiliar do teorema 19.



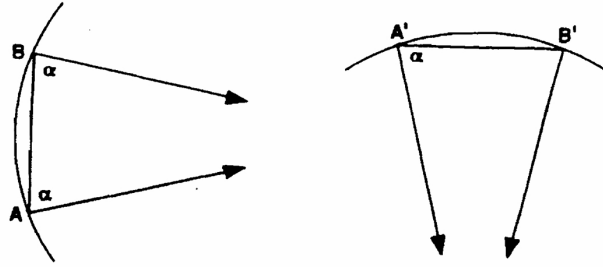
Fonte: (BARBOSA, 2007).

Teorema 20. *Dados três pontos P , Q e R pertencem, respectivamente a três retas distintas paralelas em um mesmo sentido. Se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, P corresponde a R .*

Considere a família de retas que passam por um ponto ideal Ω . Seja P um ponto pertencente a uma delas. Desta forma, o conjunto de pontos correspondentes a P nessa família de retas é chamado de *horocírculo*. Definimos assim, horocírculo como sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto ideal e, se Q for um ponto deste horocírculo, então $Q\Omega$ é chamado de raio do horocírculo.

Teorema 21. *Dois horocírculos quaisquer são congruentes.*

Figura 52 – Construção auxiliar do teorema 21.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Demonstração. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ dois horocírculos com centros em Ω e Ω' , respectivamente. Tome A e B pontos pertencentes a $\mathcal{H}$ e $A', B' \in \mathcal{H}'$. Consideremos $\widehat{BA\Omega} = \alpha$. Construimos um ângulo $\widehat{B'A'\Omega'} = \alpha$, com $A'B' = AB$ como na Figura 52. Note que, pelo caso de congruência (LA) para triângulos generalizados, os triângulos $A'B'\Omega'$ e $AB\Omega$. Portanto, $\widehat{A'B'\Omega'} = \widehat{AB\Omega}$ e, com efeito, B' é correspondente a A' nas retas $B'\Omega'$ e $A'\Omega'$. Logo, $B' \in \mathcal{H}'$. Assim, os horocírculos são congruentes. $\square$

Proposição 11. *Os segmentos de raios que determinados por dois horocírculos de mesmo centro são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ dois horocírculos de mesmo centro em Ω . Sem perda de generalidade, consideremos que o horocírculo $\mathcal{H}$ tem o raio maior do que o raio de $\mathcal{H}'$. Tomemos os pontos $A, B \in \mathcal{H}$, A', B' como as interseções entre $A\Omega$ e $B\Omega$ com $\mathcal{H}'$. Note que, $A'\Omega$ e $B'\Omega$ são raios de $\mathcal{H}'$. Consideremos M e M' como sendo os pontos médios de AB e $A'B'$. Pelo primeiro caso de congruência para triângulos generalizados, $AM\Omega = BM\Omega$. Similarmente, pelo caso LAL, $AMM' = BMM'$ e, por fim, $AA'M' = BB'M'$, pelo mesmo caso de congruência. Portanto, $AA' = BB'$, como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 12. *Se um raio divide um arco de um horocírculo ao meio, então deve dividir também ao meio o arco correspondente de qualquer horocírculo concêntrico.*

Demonstração. Sejam A e B dois pontos correspondentes de um horocírculo $\mathcal{H}$ de centro Ω e ângulos $\widehat{A} = \widehat{B} = \alpha$. Marquemos $C \in \mathcal{H}$ tal que $AC = CB$. Note que, por transitividade, $\alpha = B\widehat{A}\Omega = A\widehat{C}\Omega = B\widehat{C}\Omega$, logo $C\Omega$, $B\Omega$ são raios de $\mathcal{H}$. Consideremos $\mathcal{H}'$ um horocírculo concêntrico com $\mathcal{H}$ em Ω . Desta forma, os raios $A\Omega$ e $B\Omega$ devem cortar $\mathcal{H}'$ em pontos A' e B' , respetivamente. Note que, pelo caso de congruência LAL os triângulos ACC' e BCC' são congruentes, daí $AC' = BC'$ e, conseqüentemente, $AA'C'$ e $BB'C'$ também o são pelo mesmo caso. Logo, $A'C' = C'B'$, portanto $B\Omega$ divide o arco correspondente $A'B'$ de $\mathcal{H}'$ também ao meio. $\square$

Corolário 5. *O conjunto dos pontos médios de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos constituem um raio.*

Proposição 13. *Se os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n$ dividem um arco AB de um horocírculo em n partes iguais, os raios passando por estes pontos cortam o arco $A'B'$ correspondente, de um horocírculo concêntrico, em pontos $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$, dividindo também este arco em n partes iguais.*

Demonstração. Basta dividir o horocírculos em parte iguais e aplicar a proposição 12, $n - \text{vezes}$. $\square$

2.4.9 A Trigonometria Hiperbólica

No desenvolvimento da teoria concernente à trigonometria hiperbólica, Bolyai e Lobachevski fizeram uso de *horoesferas* - superfícies no espaço tridimensional obtidas pela rotação de um horocírculo em torno de um de seus raios. Neste trabalho apresentaremos, a trigonometria hiperbólica exclusivamente no plano hiperbólico, sem recurso à geometria espacial. Tal abordagem confere maior simplicidade ao estudo, ainda que se distancie do percurso trilhado pelos fundadores.

Teorema 22. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ dois horocírculos concêntricos. Dados A , B e C pontos de $\mathcal{H}$, tomemos os pontos A' , B' e C' pertencentes a $\mathcal{H}'$ determinados pelos raios que passam pelo três primeiro pontos. Então,*

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'}$$

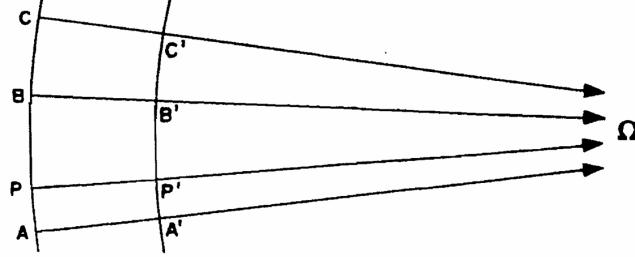
Demonstração. Consideremos dois casos.

Caso 1. Os arcos AB e AC são comensuráveis, ou seja, existe uma unidade de medida comum a eles. Considere o AP como sendo o arco que constitui essa unidade de medida. Assim,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AP} = m \quad \text{e} \quad \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } AP} = n, \quad \text{com } m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1)$$

Tracemos o raio $P\Omega$ que deve cortar $A'C'$ em um ponto P' . Usando a proposição 13,

Figura 53 – Construção auxiliar do teorema 22.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

temos

$$\frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'P'} = m \quad \text{e} \quad \frac{\text{arco } A'C'}{\text{arco } A'P'} = n. \quad (2)$$

Das equações (1) e (2) segue-se

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AP} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'P'} \quad \text{e} \quad \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } AP} = \frac{\text{arco } A'C'}{\text{arco } A'P'}$$

Daí,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A'B'} = \frac{\text{arco } AP}{\text{arco } A'P'} \quad \text{e} \quad \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } A'C'} = \frac{\text{arco } AP}{\text{arco } A'P'}$$

Igualando temos,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A'B'} = \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } A'C'}$$

equivale a

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'}$$

Segue o resultado.

Caso 2. Suponha agora que os arcos AB e AC são incomensuráveis. Seja AP um arco que é uma unidade para o arco AB , isto é

$$\text{arco } AB = m(\text{arco } AP), \text{ com } m \in \mathbb{Z}^+$$

Então, existe um número inteiro n tal que

$$n < \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } AP} < n + 1, \text{ com } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (3)$$

Portanto, de $AB = m \cdot AP$ e $n \cdot AP < AC < (n + 1) \cdot AP$, temos

$$\frac{m \cdot AP}{(n + 1) \cdot AP} < \frac{AB}{AC} < \frac{m \cdot AP}{n \cdot AP}$$

Daí,

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} < \frac{m}{n}. \quad (4)$$

Quando o $\text{arco } AP$ tende para zero, os dois quocientes $\frac{m}{(n+1)}$ e $\frac{m}{n}$ tendem para o mesmo número real l .

Por outro lado, os raios traçados pelos pontos A , B e P determinam em qualquer horocírculo concêntrico os pontos A' , B' e P' , os quais também satisfazem às seguintes relações: $\text{arco } A'B' = m(\text{arco } A'P')$ e

$$n < \frac{\text{arco } A'C'}{\text{arco } A'P'} < n+1, \text{ com } m, n \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

Consequentemente,

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'} < \frac{m}{n} \quad (6)$$

Assim, de (4) e (6) temos

$$\frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} < \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} - \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'} < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\frac{m}{n(n+1)} &< \frac{AB}{AC} - \frac{A'B'}{A'C'} < \frac{m}{n(n+1)} \\ 0 &< \left| \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} - \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'} \right| < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} \end{aligned}$$

e, portanto, Quando $AP \rightarrow 0$ (ou $n \rightarrow \infty$), o lado direito tende a 0, logo a diferença entre as razões é 0:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

□

Teorema 23. *A razão entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos depende somente da distância entre eles, medida ao longo de um raio.*

Demonstração. Consideremos a família de horocírculos cujo centro é Ω . Fixemos um raio a e os pontos: $A, A_1, A_2, A_3, \dots \in a$ tais que

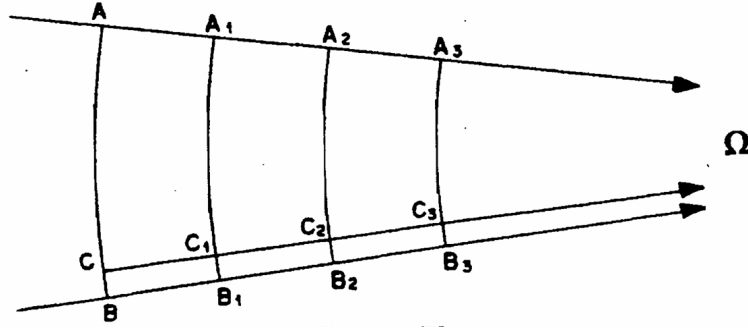
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$$

Suponhamos que o raio a tenha sido fixado de modo que os pontos A_i pertençam à semi-reta $A\Omega$. Fixemos agora um outro raio b e sobre ele tomemos os pontos $B, B_1, B_2, B_3, \dots$ correspondentes, respectivamente, aos pontos $A, A_1, A_2, A_3, \dots \in a$. Pela proposição 11, temos:

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$

Consideremos agora, os arcos de horocírculos $AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$, todos correspondentes entre si.

Figura 54 – Construção auxiliar do teorema 23



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Sendo assim, como os arcos de horocírculos concêntricos aumentam quando se distancia do centro comum, podemos marcar um ponto C no arco AB tal que

$$\text{arco } AC = \text{arco } A_1B_1$$

Tracemos o raio que passa pelo ponto C . Ele deve determinar os pontos C_1 no arco A_1B_1 , C_2 no arco A_2B_2 , C_3 no arco A_3B_3 , e assim por diante. Note que, da congruência dos horocírculos $AC\Omega$ e $A_1B_1\Omega$, temos que, pelo caso de congruência LAL , os triângulos CAA_1 e $B_1A_1A_2$ são congruentes e, assim, os triângulos CA_1C_1 e $B_1A_2B_2$ também são congruentes, pelo mesmo caso. Daí, segue que os arcos C_1A_1 e B_2A_2 são congruentes. Portanto, para $i = 1, 2, 3, \dots$,

$$\text{arco } A_iC_i = \text{arco } A_{i+1}B_{i+1}.$$

Contudo,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} = \frac{\text{arco } A_1B_1}{\text{arco } A_1C_1} = \frac{\text{arco } A_2B_2}{\text{arco } A_2C_2} = \frac{\text{arco } A_3B_3}{\text{arco } A_3C_3} = \dots$$

Logo,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A_1B_1} = \frac{\text{arco } A_1B_1}{\text{arco } A_2B_2} = \frac{\text{arco } A_2B_2}{\text{arco } A_3B_3} = \frac{\text{arco } A_3B_3}{\text{arco } A_4B_4} = \dots$$

Além disso, se a distancia AA' aumentar (diminuir), também aumentará (diminuirá), o valor do quociente $\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A_1B_1}$. Assim, concluímos que o quociente depende apenas da distancia entre os dois arcos. $\square$

Agora, podemos fixar uma unidade de comprimento para a geometria hiperbólica. Desde que o quociente $\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A_1B_1}$, seja maior do que 1, podendo ser

modificado para maior ou menor dependendo da variação da distância entre os dois arcos. Desta forma, podemos assumir,

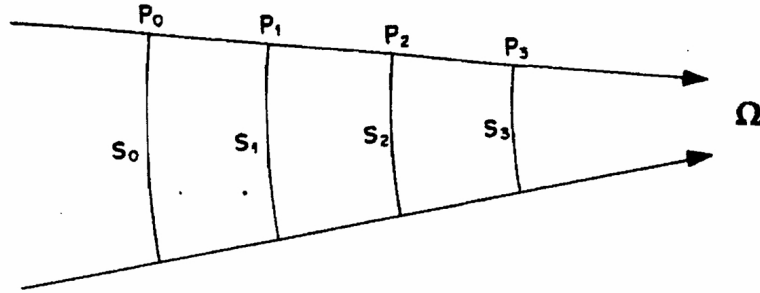
$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A_1B_1} = e, \text{ onde } e \text{ é a base do logaritmo natural.}$$

Neste caso, definimos nossa unidade de comprimento como a distância entre os dois arcos. Esta unidade, como veremos, é a que melhor se adapta ao desenvolvimento da teoria que apresentamos a seguir. (BARBOSA, 2007, p. 115)

Teorema 24. *Se S_0 e S_x representam os comprimentos de dois arcos correspondentes em horocírculos concêntricos. Considere $S_x < S_0$ e sendo x a distância entre eles ao longo de um raio comum, então*

$$S_x = S_0 e^{-x}.$$

Figura 55 – Construção auxiliar do teorema 24



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Demonstração. Tomemos os pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ sobre uma semi-reta $S_{P_0}\Omega$ de modo que a distância entre quaisquer dois a dois seja uma unidade de comprimento. Consideremos a família de horocírculos $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots$ centrados em Ω e passando, respectivamente, pelos pontos tomados. Sejam $S_0, S_1, S_2, \dots$ arcos correspondentes desta família como na Figura 55.

Utilizando a definição de unidade de comprimento e o teorema anterior, concluímos que

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3} = \dots = \frac{S_{n-1}}{S_n} = e$$

Daí, $S_1 = S_0 e^{-1}$, $S_2 = S_1 e^{-1}$, $S_2 = S_0 e^{-2}$, ...

$$S_n = S_0 e^{-n}. \quad (7)$$

Assim, como n é a distância entre os arcos S_n e S_0 , concluímos que o resultado é válido quando x é um inteiro.

Agora, representaremos por $\mathcal{H}_x$ o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto $P_x \in S_{P_0\Omega}$ que fica a uma distância x do ponto P_0 . Sobre este horocírculo, representemos por S_x o arco correspondente a todos os outros arcos considerados. Suponhamos que x seja um número racional da forma $\frac{1}{n}$. Então, pelo teorema anterior, teremos

$$a = \frac{S_0}{S_{1/n}} = \frac{S_{1/n}}{S_{2/n}} = \frac{S_{2/n}}{S_{3/n}} = \dots = \frac{S_{(n-1)/n}}{S_{n/n}} = \dots, \quad (8)$$

onde a é um número maior do que um. Segue-se que

$$S_1 = S_0 a^{-n} \quad (9)$$

das equações (7) e (9) tem-se

$$S_0 e^{-1} = S_0 a^{-n},$$

logo $a^n = e$ equivale a, $a = e^{1/n}$.

Assim, da equação (9)

$$S_{1/n} = S_0 e^{-1/n}.$$

Logo, é de imediato que

$$S_{m/n} = S_0 a^{-m} = S_0 e^{-m/n}$$

Assim, o resultado vale o caso em que x é um número racional qualquer.

Para provar o resultado no caso em que x é irracional, observemos que a função S_x é decrescente e que, como mostramos, coincide com a função $S_0 e^{-x}$ para qualquer valor racional positivo de x . Com efeito, note que, se $\alpha \in \mathbb{I}$ temos $r, t \in \mathbb{Q}^+$, tal que

$$r < \alpha < t \quad \text{implica} \quad S_r < S_\alpha < S_t$$

Como o resultado é válido para os números racionais, então

$$S_0 e^{-t} < S_\alpha < S_0 e^{-r} \quad (10)$$

Por outro lado,

$$e^{-t} < e^{-\alpha} < e^{-r} \quad \text{implica} \quad S_0 e^{-t} < S_0 e^{-\alpha} < S_0 e^{-r}.$$

Portanto,

$$-S_0 e^{-r} < -S_0 e^{-\alpha} < -S_0 e^{-t} \quad (11)$$

Somando as equações (10) e (11) temos

$$S_0 e^{-t} - S_0 e^{-r} < S_\alpha - S_0 e^{-\alpha} < S_0 e^{-r} - S_0 e^{-t}$$

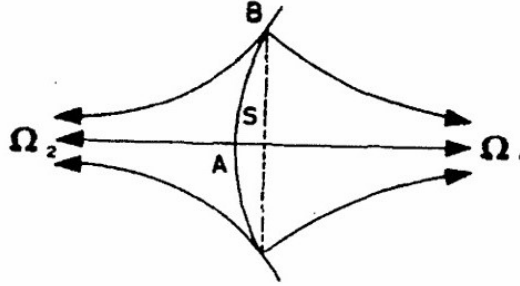
Logo,

$$|S_\alpha - S_0 e^{-\alpha}| < S_0(e^{-r} - e^{-t})$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{Q}^+$; $r < \alpha < t$. Por e^{-x} ser uma função contínua, temos a diferença $S_\alpha - S_0 e^{-\alpha}$ só pode ser zero. Isto conclui a demonstração. $\square$

No contexto da trigonometria hiperbólica, existem algumas figuras importantes. Na primeira, fixaremos uma reta $\Omega_1\Omega_2$ e consideremos um horocírculo com centro em Ω_1 como na Figura 56. Denotemos por A o ponto de intersecção com a reta fixada. Consideremos família de cordas deste horocírculo que são perpendiculares a $A\Omega_1$. Note que, o comprimento dessas cordas crescem a medida que se afastam de A , tornando-se cada vez maior que qualquer comprimento inicial. Observe que o ângulo agudo entre uma corda do horocírculo perpendicular a reta $\Omega_1\Omega_2$ e o raio $B\Omega_1$, que passa por sua extremidade B é exatamente o ângulo de paralelismo correspondente à metade da corda.

Figura 56 – Construção auxiliar da Trigonometria hiperbólica.



Fonte: (BARBOSA, 2007)

Pode-se provar que este ângulo varia continuamente no intervalo de $(0, \pi/2]$. Desta forma, entre uma destas cordas existe uma com a medida do ângulo correspondente a $\pi/4$. Chamemos de B o ponto em que essa corda toca o horocírculo definido. Consideremos a semi-reta $S_{B\Omega_2}$. Por construção, ela é paralela a $\Omega_1\Omega_2$ e tangente ao horocírculo no ponto B . Chamaremos de S o comprimento do arco AB do horocírculo. Este comprimento é uma das constantes universais da Geometria hiperbólica e tal construção é importante no estudo da Trigonometria hiperbólica. (ver fig. 56)

A figura a seguir é formada por um arco AB de comprimento s ($s < S$) de um horocírculo $\mathcal{H}$ de centro Ω , pelo raio que passa pelo ponto B e pela tangente ao horocírculo no ponto A . Já que $s < S$, a tangente interceptará o raio $B\Omega$ em um ponto C , formando-se uma região limitada pelos segmentos CB e CA e pelo arco AB , como indicado na Figura 57.

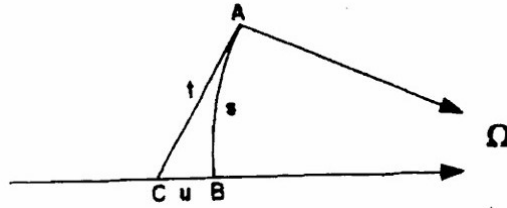
Denotaremos o comprimento do segmento AC por t e por u , o comprimento do segmento CB . Trace a corda AB

Teorema 25. *Na figura 57 valem as seguintes relações:*

$$S - s = Se^{-(t+u)}$$

$$S + s = Se^{t-u}.$$

Figura 57 – Figura inicial do teorema 25.



Fonte: (BARBOSA, 2007)

Demonstração. Na fig. 57, consideremos um horocírculo $\mathcal{H}$ de raio ΩA . Sobre esse mesmo horocírculo o arco AD de comprimento de S , denotemos por s o comprimento do arco AB . Sejam $\Omega\Omega'$ o raio que passa por D e $A\Omega'$ a reta tangente ao horocírculo $\mathcal{H}$ passando pelo ponto A . Denotemos por C o ponto de interseção entre a tangente $A\Omega'$ e o raio ΩB .

Considere agora, um ponto E sobre a reta que passa pelos pontos C e B , de modo que $C \in EB$ e que o comprimento do segmento EC seja igual ao comprimento do segmento AC , denotemos por t tal comprimento. Tracemos a reta $E\Omega'$.

Note que, pelo caso LA , os triângulos generalizados $CA\Omega$ e $CE\Omega'$ são congruentes e, portanto, $E\Omega'$ é perpendicular a EC . Daí, o horocírculo de raio ΩE tem $E\Omega'$ como reta tangente em E .

Observe que, como os triângulos $CA\Omega$ e $CE\Omega'$ são congruentes, a "abertura" formada pelos "ângulos" $\widehat{E\Omega'C}$ e $\widehat{A\Omega C}$ é a mesma, inda que, por definição, eles sejam nulos.

Por construção, $\widehat{C\Omega D}$ e $\widehat{C\Omega'D}$ também tem a mesma abertura, pois traçando a perpendicular CX a $\Omega\Omega'$ pelo ponto X , os triângulos generalizados $CX\Omega$ e $CX\Omega'$

Definição 2.7. Com o objetivo de simplificar as expressões que surgirão a seguir, definimos as funções

$$\begin{aligned}\sinh(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}, & \operatorname{sech}(t) &= \frac{1}{\cosh(t)}, \\ \cosh(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, & \operatorname{csch}(t) &= \frac{1}{\sinh(t)}. \\ \tanh(t) &= \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}.\end{aligned}$$

sendo $t \neq 0$ na função cossecante hiperbólica.

Note que, somando as duas relações do teorema 25, segue-se que $2S = S(e^{-(t+u)} + e^{t-u})$ implica $2 = \frac{e^{-t}}{e^u} + \frac{e^t}{e^u}$, portanto

$$e^u = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh(t). \quad (12)$$

Dessa forma, a relação $e^u = \cosh(t)$ é válida.

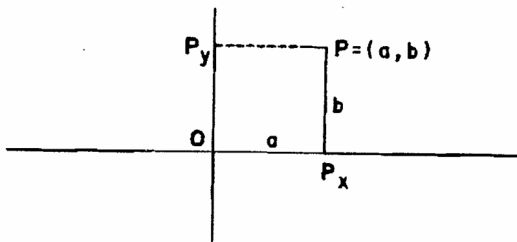
Observe agora que se fazemos a diferença temos a relação $s = S \tanh(t)$. De fato, $-2s = S(e^{-t-u} - e^{t-u})$, logo $-s = S(\frac{e^{-t}}{e^u} - \frac{e^t}{e^u})$ Daí,

$$s = \frac{S}{e^u} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = S \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = S \tanh(t). \quad (13)$$

2.4.10 Sistema de coordenadas

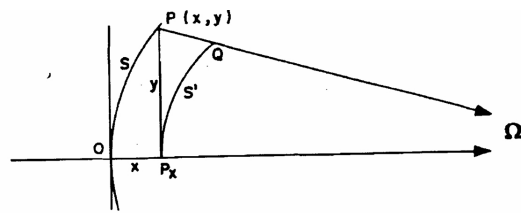
Para representar pontos no plano da geometria hiperbólica introduziremos um sistema de coordenadas. Desta forma, tomemos duas retas perpendiculares. Seja O o seu ponto de interseção. Usando a unidade de medida que já fixamos anteriormente, numeramos os pontos das duas retas da maneira usual, tal que O é o numerado pelo zero em cada uma das retas tomadas. Chamamos uma das retas de eixo dos x e a outra de eixo dos y .

Figura 59 – Sistema de coordenads.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Figura 60 – Construção auxiliar da proposição 14.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Dado um ponto P do plano, considere P_x sua projeção no eixo x . Associamos o par de coordenadas (a, b) do ponto P da seguinte forma:

1. a é o número associado ao ponto P_x no eixo dos x ;
2. b é o comprimento do segmento PP_x com o sinal positivo, se P estiver acima do eixo x , ou com o sinal negativo se estiver abaixo dele.

Chamaremos a à abscissa do ponto P e b à ordenada do ponto P .

Observação. Note que, o número associado à projeção ortogonal de P no eixo dos y não coincide com a ordenada de P , diferentemente da Geometria euclidiana. Observe que, se P_y representa tal projeção, o quadrilátero PP_xOP_y é um quadrilátero de Lambert com o ângulo agudo no ponto P . Portanto, $PP_x > P_yO$ e $PP_y > P_xO$.

Proposição 14. *Seja Ω o ponto ideal do lado positivo do eixo dos x . A equação do horocírculo que passa pela origem do sistema de coordenadas centrado em Ω é*

$$e^x = \cosh(y).$$

Demonstração. Seja $P = (x, y)$ um ponto do horocírculo e sua projeção P_x no eixo dos x . Denotemos por s o comprimento do arco OP . Consideremos o horocírculo de raio ΩP_x . Seja Q o ponto de interseção entre esse horocírculo e o raio ΩP . Representemos por s' o comprimento do arco P_xQ neste horocírculo.

Note que, no triângulo ABC da fig. 57, temos que o segmento t é tangente ao arco s , já o segmento de medida u é uma extensão do raio do mesmo arco. Neste sentido, por construção, na figura PQP_x , o segmento y é tangente ao arco s' e o x é extensão do seu raio. Desta forma, aplicando a equação (12), temos $e^x = \cosh(y)$. $\square$

Desta figura e da equação da equação (13) obtemos as seguintes relações

$$s' = se^{-x} \quad \text{e} \quad s' = S \tanh(y)$$

Daí obtemos

$$s = S \sinh(y).$$

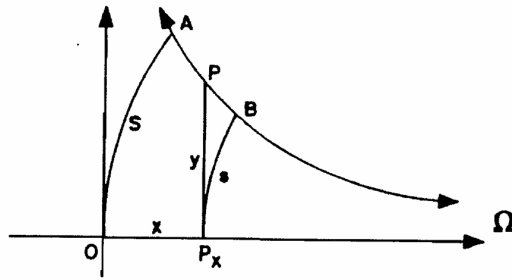
A continuação descreveremos a equação da reta que é, simultaneamente, paralela aos dois eixos.

Proposição 15. *A equação da reta que é simultaneamente paralela aos eixos das coordenadas nas direções positivas é*

$$e^{-x} = \tanh(y).$$

Demonstração. Denotemos por $\Omega\Omega'$ a reta que é simultaneamente paralela aos eixos Ox e Oy , ambos na direção positiva. Consideremos o horocírculo de raio ΩO e que intercepta a reta $\Omega\Omega'$ num ponto A . Chamaremos de S ao comprimento do arco OA . Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer desta reta e denotemos por P_x sua projeção no eixo dos x . Consideremos agora, o horocírculo de raio ΩP_x e que intercepta a reta $\Omega\Omega'$ no ponto B . Representemos por s o comprimento do arco BP_x .

Figura 61 – Construção auxiliar da proposição 15



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Assim,

$$s = S \tanh(y) \quad \text{e} \quad s = S e^{-x}$$

Desta forma, $S e^{-x} = S \tanh(y)$ implica

$$e^{-x} = \tanh(y).$$

□

Diremos que dois números são *complementares* quando os ângulos de paralelismo a eles associados são complementares, ou seja, formam um ângulo reto.

Proposição 16. *Se z e z' são números complementares,*

$$e^{-z} = \tanh(z'/2) \tag{14}$$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas e consideremos a reta $\Omega\Omega'$ que é paralela, simultaneamente, aos dois eixos na direção positiva. Seja P um ponto qualquer sobre a reta $\Omega\Omega'$ cuja ordenada é z e cuja projeção sobre eixo dos x é P_x .

a segunda a identidade é dada por

$$\sinh(t) \cosh(t) = \frac{\sinh(2t)}{2}. \quad (17)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sinh(t) \cosh(t) &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2t} + e^t e^{-t} - e^t e^{-t} - e^{-2t}}{4} \\ &= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4} = \frac{\sinh(2t)}{2}. \end{aligned}$$

Agora, para a próxima identidade usamos a definição em 2.7, a proposição (14) e substituímos $t = z'/2$,

$$\sinh z = \frac{1}{\sinh(z')}. \quad (18)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} &= \frac{\coth(z'/2) - \tanh(z'/2)}{2} \\ &= \frac{\frac{\cosh(z'/2)}{\sinh(z'/2)} - \frac{\sinh(z'/2)}{\cosh(z'/2)}}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{\sinh(z')}{2}}}{2} = \frac{1}{\sinh(z')}. \end{aligned}$$

Corolário 6. Se z e z' são números complementares, então as seguintes relações são verdadeiras

$$\sinh(z) = \operatorname{csch}(z') \quad (19)$$

$$\cosh(z) = \coth(z') \quad (20)$$

$$\tanh(z) = \operatorname{sech}(z'). \quad (21)$$

Demonstração. Note que, pelo resultado anterior, o resultado da primeira equação é verdadeira.

Para a segunda equação o processo é o mesmo a menos da troca da operação de subtração pela de soma.

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{\coth(z'/2) + \tanh(z'/2)}{2} \\ &= \frac{\frac{2e^{z'} + 2e^{-z'}}{4}}{\frac{e^{z'} - e^{-z'}}{2}} = \frac{\cosh(z')}{\sinh(z')} = \coth(z') \end{aligned}$$

Finalmente, na última equação, basta dividir a primeira pela segunda

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{\operatorname{csch}(z')}{\operatorname{coth}(z')} = \frac{\frac{1}{\sinh(z')}}{\frac{\cosh(z')}{\sinh(z')}} = \frac{1}{\cosh(z')} = \operatorname{sech}(z')$$

Concluimos assim os resultados. $\square$

2.4.11 Resolução de triângulos retângulos

Nesta seção a apresentaremos a versão hiperbólica do teorema de Pitágoras.

Proposição 17. *Em um triângulo retângulo com lados a , b e c e ângulos λ e μ , tem-se:*

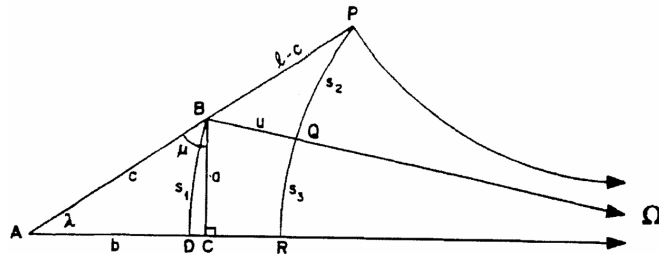
$$\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l) \quad (22)$$

e

$$\sinh(c) = \sinh(b) \cosh(m) \quad (23)$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C . Consideremos a , b e c os comprimentos dos lados BC , AC e AB , respectivamente como na figura 63. Chamemos λ a medida do ângulo $\widehat{A}$ e μ a medida do ângulo $\widehat{B}$. Seja l o comprimento do segmento que tem o ângulo λ como ângulo do paralelismo. Na semi-reta S_{AB} , marquemos um ponto P tal que o comprimento de AP seja l . Seja Ω o ponto ideal da semi-reta S_{AC} . Tracemos $P\Omega$. Note que, construção, a semi-reta SP_{Ω} é perpendicular ao segmento AP . Tracemos ΩB e ΩP considere os horocírculos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ de raios ΩB e ΩP , respectivamente. Note que, ambos cortam $A\Omega$ nos pontos D e R em $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Seja Q o ponto de interseção entre $\mathcal{H}_2$ e a reta ΩB . Chamemos de s_1 , s_2 e s_3 os comprimentos dos arcos BD , PQ e QR , respectivamente, e por u o comprimento do segmento BQ .

Figura 63 – Construção auxiliar da proposição 17.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Daí, temos,

$$s_1 = S \sinh(a)$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= s_3 e^u \\
e^u &= \cosh(l - c) \\
s_2 + s_3 &= S \tanh(l) \\
s_2 &= S \tanh(l - c)
\end{aligned}$$

. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sinh(a) &= \frac{s_1}{S} = \frac{s_3 e^u}{S} = e^u \left[\frac{s_3 + s_2 - s_2}{S} \right] = e^u \left[\frac{s_2 + s_3}{S} - \frac{s_2}{S} \right] \\
&= e^u \left[\frac{S \tanh(l)}{S} - \tanh(l - c) \right] \\
&= \cosh(l - c) [\tanh(l) - \tanh(l - c)] \\
&= \frac{\cosh(l - c) \sinh(l)}{\cosh(l)} - \frac{\cosh(l - c) \sinh(l - c)}{\cosh(l - c)} \\
&= \frac{\sinh(l) \cosh(l - c) - \sinh(l - c) \cosh(l)}{\cosh(l)} \tag{24}
\end{aligned}$$

Trabalhando nos termos no numerador anterior temos

$$\sinh(l) \cosh(l - c) = \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2} \right) \left(\frac{e^{l-c} + e^{-(l-c)}}{2} \right) \tag{25}$$

$$= \frac{e^l(e^{l-c}) - e^{-l}(e^{l-c}) + (e^{-l+c})e^l - (e^{-l+c})e^{-l}}{4} \tag{26}$$

. De modo análogo, para o segundo termo

$$\sinh(l - c) \cosh(l) = \frac{(e^{l-c})e^l + (e^{l-c})e^{-l} - (e^{-(l-c)})e^l - (e^{-(l-c)})e^{-l}}{4} \tag{27}$$

a equação (27) da equação (25), temos

$$\frac{-2e^{-c} + 2e^c}{4} = \frac{e^c - e^{-c}}{2} = \sinh(c)$$

assim, substituindo na equação (24) segue que

$$\frac{\sinh(l) \cosh(l - c) - \sinh(l - c) \cosh(l)}{\cosh(l)} = \frac{\sinh(c)}{\cosh(l)}.$$

Para a segunda equação, basta considerarmos o segmento de comprimento m que tem o ângulo μ como ângulo do paralelismo. Na semi-reta S_{BA} , marquemos um ponto T tal que o comprimento de AT seja m . Seja Ω_1 o ponto ideal da semi-reta S_{BC} . Tracemos a reta $T\Omega_1$. Assim, a semi-reta $S_{T\Omega_1}$ é perpendicular ao segmento BT . Daí, por meio de uma construção totalmente análoga,

$$s_4 = S \sinh(b)$$

$$\begin{aligned}
s_4 &= s_6 e^u \\
e^v &= \cosh(m - c) \\
s_5 + s_6 &= S \tanh(m) \\
s_5 &= S \tanh(m - c)
\end{aligned}$$

com v o comprimento do segmento de raio entre os dois horocírculos. Com isso,

$$\sinh(b) = \frac{s_4}{S} = \frac{s_6 e^v}{S} = e^v \left[\frac{s_5 + s_6 - s_5}{S} \right] = e^v \left[\frac{s_5 + s_6}{S} - \frac{s_5}{S} \right]$$

. Daí

$$= \frac{\sinh(c)}{\cosh(m)}$$

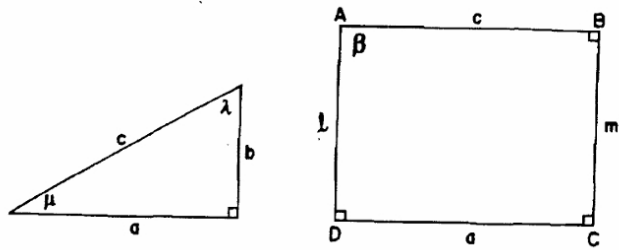
Portanto, segue o resultado. $\square$

Para representar as partes de um triângulo retângulo que tenha catetos a e b , hipotenusa c e ângulos λ oposto a a e μ oposto a b , utilizaremos a notação: a , b , c , λ e μ . Um quadrilátero de Lambert de lados a , b , c , d , que tenha um ângulo agudo β com a e d adjacentes ao ângulo β . Desta forma, denotaremos as partes deste por: a , b , c , d e β .

Corolário 7. Se a , b , c , λ e μ são partes de um triângulo retângulo, também são:

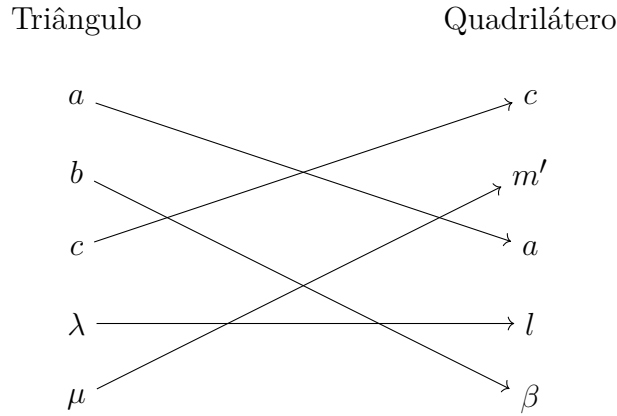
$$\begin{aligned}
&m', b, l, \gamma \text{ e } \alpha', \\
&c', m', a', \lambda \text{ e } \beta', \\
&l', c', b', \alpha' \text{ e } \mu \text{ e} \\
&a, l', m, \beta' \text{ e } \gamma.
\end{aligned}$$

Figura 64 – Construção auxiliar do corolário 7.



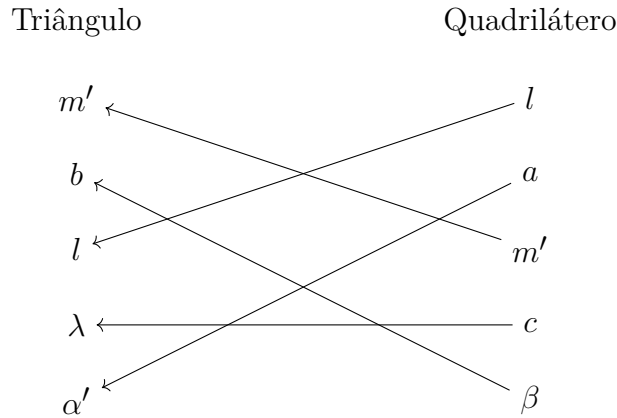
Fonte: (BARBOSA, 2007).

Demonstração. Para mostrar este corolário, precisamos associar as partes do triângulo com um quadrilátero de Lambert. Considere a , b , c , λ e μ partes de um triângulo retângulo. Dessa forma, para associar a um quadrilátero de Lambert, inverta as posições de a e c , troque b por $\theta^{-1}(\mu') = m'$, troque λ por $\theta^{-1}(\lambda) = l$ e μ por $\theta(b) = \beta$, como está representado no diagrama abaixo.



Ou seja, o quadrilátero de Lambert obtido terá a hipotenusa do triângulo como a medida do lado adjacente ao ângulo agudo no sentido horário. No mesmo sentido, o segmento que tem o ângulo complementar do que está oposto ao segundo cateto representado como ângulo do paralelismo, a medida do primeiro cateto, o segmento que tem o ângulo oposto ao primeiro cateto como ângulo do paralelismo. O ângulo agudo do quadrilátero será o do paralelismo do segundo cateto.

Desta forma, obtemos o quadrilátero c, m', a, l e β . Invertendo as partes, temos l, a, m', c e β . Fazendo o processo inverso de forma biunívoca, como no diagrama a seguir, obtemos o triângulo com as partes m', b, l e α' .



Invertendo a posição dos catetos, obtemos o triângulo b, m', l, α' e λ . De maneira análoga, obtemos as partes do quadrilátero l, c', b, a' e μ' e, por sua vez, as partes do triângulo c', m', a', λ e β' .

Seguindo o mesmo processo, totalmente análogo, obteremos as partes:

$$l', c', b', \alpha' \text{ e } \mu \text{ e} \\ a, l', m, \beta' \text{ e } \gamma.$$

Fazendo este processo mais uma vez, voltaremos para as partes triviais. Desta forma, segue o resultado. □

Corolário 8. *Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ , temos as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}\cosh(l) &= \sinh(c) \sinh(a'), \\ \cosh(m) &= \sinh(c) \sinh(b'), \\ \cosh(c) &= \sinh(l) \sinh(m), \\ \cosh(a') &= \sinh(l) \sinh(b'), \\ \cosh(b') &= \sinh(m) \sinh(a').\end{aligned}$$

Demonstração. Note que, da proposição 17 é possível observar que as fórmulas são descritas como sendo o seno hiperbólico da hipotenusa igual ao produto do seno hiperbólico de um dos catetos pelo seno hiperbólico do segmento cujo ângulo do paralelismo é o oposto ao cateto representado. Desta forma, de posses de todas as partes de um triângulo retângulo, encontradas no corolário 7, temos as relações:

$$\begin{aligned}\sinh(l) &= \sinh(m') \cosh(c), \\ \sinh(l) &= \sinh(b) \cosh(a'), \\ \sinh(a') &= \sinh(c') \cosh(l), \\ \sinh(a') &= \sinh(m') \cosh(b'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(b') &= \sinh(c') \cosh(m), \\ \sinh(b') &= \sinh(l') \cosh(a'), \\ \sinh(m) &= \sinh(a) \cosh(b'), \\ \sinh(m) &= \sinh(l') \cosh(c).\end{aligned}$$

Da primeira relação temos

$$\cosh(c) = \frac{\sinh(l)}{\sinh(m')} = \sinh(l) \sinh(m).$$

De maneira análoga, obteremos as equações:

$$\begin{aligned}\cosh(a') &= \sinh(l) \sinh(b'), \\ \cosh(l) &= \sinh(c) \sinh(a') \\ \cosh(b') &= \sinh(m) \sinh(a') \\ \cosh(m) &= \sinh(c) \sinh(b').\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado é a versão equivalente do teorema de Pitágoras no contexto hiperbólico.

Teorema 26 (de Pitágoras Hiperbólico). *Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ , tem-se*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Demonstração. Notemos que, da terceira equação do corolário anterior, temos

$$\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$$

Mas, da quarta e quinta equação temos

$$\sinh(l) = \frac{\cosh(a')}{\sinh(b')} \quad (28)$$

e

$$\sinh(m) = \frac{\cosh(b')}{\sinh(a')}. \quad (29)$$

Multiplicando entre se as equações (28) por (29) substituindo na terceira equação obtemos

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \sinh(l) \sinh(m) \\ &= \frac{\cosh(a') \cosh(b')}{\sinh(a') \sinh(b')} \\ &= \coth(a') \coth(b') = \cosh(a) \cosh(b). \end{aligned}$$

Portanto, $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$.

□

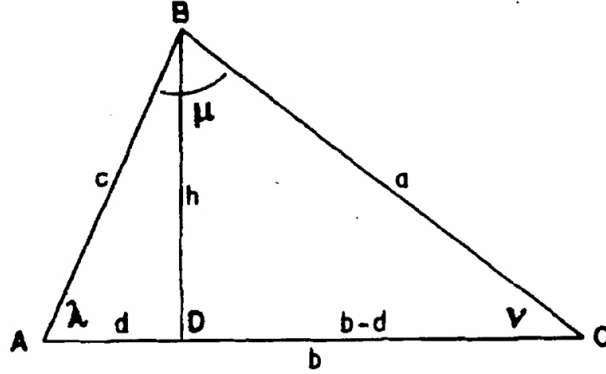
2.4.12 Resolução de triângulos quaisquer

Sejam ABC um triângulo com ângulos λ , μ e γ nos vértices A , B e C , respectivamente. Chamemos de a , b e c os comprimentos dos lados opostos a estes ângulos e por l , m e n a medida dos segmentos em que tais ângulos sejam de paralelismo.

Teorema 27 (Lei dos senos). *Em um triângulo com lados a , b e c e ângulos opostos a esses lados λ , μ e γ , tem-se*

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

Figura 65 – Construção auxiliar do teorema 27.



Fonte: (BARBOSA, 2007).

Demonstração. Seja ABC um triângulo com ângulos λ , μ e γ nos vértices A , B e C , respectivamente. Representemos por a , b e c os comprimentos dos lados opostos a estes ângulos, por l , m e n os segmentos para os quais eles são ângulos do paralelismo. Tracemos a altura BD do vértice B e representemos por h o seu comprimento. Com efeito, temos dois triângulos retângulos BDA e BDC , ambos reto em D . Aplicando a proposição 17, obtemos em BDC

$$\sinh(a) = \sinh(h) \cosh(n) \quad (30)$$

e em BDA

$$\sinh(c) = \sinh(h) \cosh(l). \quad (31)$$

Dividindo membro a membro a equação (30) pela (31), temos

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(c)} = \frac{\cosh(n)}{\cosh(l)} = \operatorname{sech}(l) \cosh(n) = \frac{\operatorname{sech}(l)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

Por tanto,

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

Da altura traçada do vértice A , temos, de maneira análoga

$$\frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

Similarmente, utilizando a altura do vértice C , obtemos

$$\frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

Dessa forma, obtemos o resultado

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

□

Teorema 28 (Lei dos cossenos). *Em um triângulo com lados a , b e c e ângulos opostos a esses lados λ , μ e γ , tem-se*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l).$$

Demonstração. No triângulo ABC da figura 65, tracemos a altura BD do vértice B e denotemos de h . Sem perda de generalidade, suponhamos que o ponto D pertença ao segmento AC . Denotemos por d o comprimento do lado AD e, conseqüentemente, $b - d$ o comprimento do lado DC . Aplicando o teorema 26 nos triângulos BDC e BDA , respetivamente

$$\cosh(a) = \cosh(h) \cosh(b - d) \text{ e } \cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d).$$

Portanto,

$$\cosh(a) = \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} \cosh(b - d).$$

Note que,

$$\cosh(b - d) = \frac{e^{b-d} + e^{-(b-d)}}{2} = \frac{2}{2} \frac{(e^{b-d} + e^{-(b-d)})}{2}.$$

Somando e subtraindo, apropriadamente $\frac{e^{b+d}}{2}$ e $\frac{e^{-(b+d)}}{2}$, segue-se

$$\begin{aligned} \cosh(b - d) &= \frac{2e^{b-d} + 2e^{-(b-d)} + e^{b+d} - e^{b+d} + e^{-(b+d)} - e^{-(b+d)}}{4} \\ &= \frac{e^{b+d} + e^{b-d} + e^{-(b+d)} + e^{-(b-d)}}{4} \\ &\quad - \frac{e^{b+d} - e^{b-d} - e^{-(b+d)} + e^{-(b-d)}}{4} \\ &= \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right) \left(\frac{e^d + e^{-d}}{2} \right) - \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2} \right) \left(\frac{e^d - e^{-d}}{2} \right) \\ &= \cosh(b) \cosh(d) - \sinh(b) \sinh(d). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} [\cosh(b) \cosh(d) - \sinh(b) \sinh(d)] \\ &= \cosh(c) \cosh(b) - \sinh(b) \cosh(c) \tanh(d). \end{aligned}$$

Mas,

$$\tanh(d) = \tanh(c) \tanh(l). \quad (32)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \tanh(l) &= \frac{\sinh(l)}{\cosh(l)} = \frac{\frac{\cosh(h')}{\sinh(d')}}{\frac{\sinh(c)}{\sinh(h)}} \\
 &= \frac{\frac{\cosh(h)}{\sinh(h)} \sinh(d)}{\frac{\sinh(c)}{\sinh(h)}} = \frac{\frac{\sinh(c)}{\cosh(d)} \sinh(d)}{\sinh(c)} \\
 &= \frac{\tanh(d)}{\tanh(c)}
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\tanh(d) = \tanh(c) \tanh(l).$$

Portanto,

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l).$$

□

3 CONCLUSÃO

O presente trabalho cumpriu o objetivo de analisar a trajetória histórica e matemática da geometria, demonstrando que a evolução desse campo não foi linear, mas marcada por uma profunda ruptura epistemológica. A investigação das tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides revelou que a incapacidade de prová-lo por meio dos quatro postulados anteriores não representou uma falha, mas sim o nascimento de novos horizontes lógicos.

As discussões apresentadas permitiram concluir que matemáticos como Saccheri, embora tenham navegado por propriedades não euclidianas, permaneceram presos ao dogma da verdade absoluta do espaço plano. Foi apenas com a coragem intelectual de Gauss, Bolyai e Lobachewsky que a geometria hiperbólica se consolidou como um sistema coerente e independente, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é estritamente menor que 180° e o número de paralelas a uma reta passando por um ponto externo é infinito.

A exploração das propriedades hiperbólicas, desde os quadriláteros especiais até a trigonometria, evidenciou o rigor das demonstrações que utilizam as funções hiperbólicas *senh*, *cosh* e *tanh*.

Por fim, a pesquisa reforça que a geometria não é apenas uma ferramenta de medição física, mas uma construção mental que pode ser curvada para descrever a própria forma do universo. Como sugestão para estudos futuros, recomenda-se a exploração de modelos computacionais e softwares de geometria dinâmica para a visualização dos modelos de Poincaré ou de Klein, facilitando a transição da abstração teórica para a prática pedagógica no ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1985.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2007.

BERNAYS, Paul; UNGER, Leo. **Foundations of Geometry**. [S.l.]: America, 1971.

BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development**. New York: Dover Publications, 1955. Obra clássica que analisa detalhadamente o 'erro' e a frustração de Saccheri.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. 4th. New York: W. H. Freeman, 2008.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. Tradução: Enésio E. de Almeida Filho. 4. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2008.

MORROW, Glenn R. **A commentary on the first book of Euclid's Elements**. [S.l.]: Princeton University Press, 1992.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Sandra Augusta. **Geometria Plana e Desenho Geométrico (MA520Z): notas de aula**. Campinas: [s.n.], 2003. 1º semestre.

SILVA BATISTA, Pollyanna Debora da. **Geometria Hiperbólica e Aplicações**. 2019. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

APÊNDICE A – A Geometria Absoluta

No contexto do sistema axiomático de Euclides, denomina-se Geometria Absoluta (ou Geometria Neutra) o estudo das propriedades fundamentadas exclusivamente nos quatro primeiros postulados, isto é, proposições que independem do Postulado das Paralelas. Essa geometria desempenha um papel essencial nas conclusões desenvolvidas neste trabalho, sendo aqui tratada sob a ótica de um sistema axiomático mais rigoroso e abrangente, como o proposto por David Hilbert. Para o aprofundamento nessa formalização, adotam-se como principais referências as obras de Barbosa (1985) e BERNAYS e Unger (1971).

Entre as proposições analisadas neste estudo, encontram-se teoremas equivalentes aos demonstrados por Euclides em Os Elementos sem o auxílio do quinto postulado. As deduções apresentadas nas seções subsequentes farão uso dessas proposições, bem como de outros resultados obtidos sob as mesmas restrições, ainda que não tenham sido originalmente explorados na obra euclidiana BERNAYS e Unger (1971).

Para garantir o rigor lógico exigido pela axiomatização moderna, serão também apresentadas definições matemáticas relevantes. Inicialmente, contudo, faz-se necessário admitir a existência de termos primitivos — ou seja, conceitos basilares que não possuem definição formal prévia —, tais como ponto, reta, pertencer (relação de incidência) e estar entre (relação de ordem).

Nessa reestruturação, os axiomas que substituem e refinam os quatro primeiros postulados de Euclides estão organizados em quatro categorias fundamentais: axiomas de incidência, de ordem, de medição e de congruência.

A.1 AXIOMÁTICA DE HILBERT

Axioma 2. *Axioma de incidência (noções de estar)*

- i) Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertence a ele e pontos que não pertence.
- ii) Dados dois pontos, existe apenas uma reta que os contém.

Axioma 3. *Axioma de ordem (noções de ordem)*

- i) Se um ponto B está entre os pontos A e C , então A , B e C são pontos distintos e B está entre C e A .
- ii) Dados três pontos distintos de uma reta, um e somente um, está entre os outros dois.

- iii) Dados dois pontos distintos B e D , existe um ponto C que está entre eles, existe um ponto A tal que B está entre A e C e existe um ponto E tal que D está entre C e E .

Definição A.1. O conjunto formado por dois pontos A e B , juntamente com todos os pontos situados entre eles, é denominado **segmento de reta**. Os pontos A e B são chamados de **extremidades** (ou extremos) desse segmento. Tal segmento pode ser representado por AB ou BA .

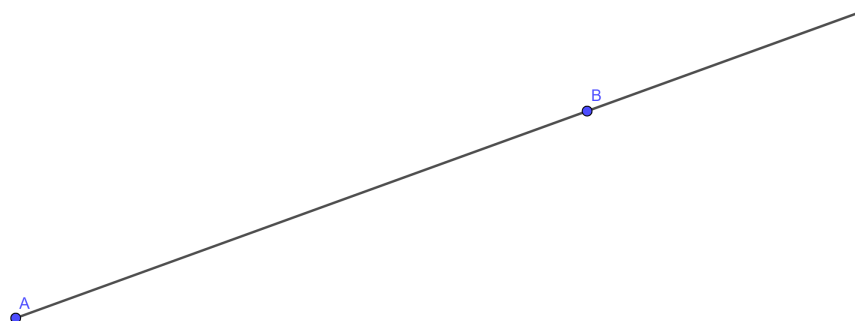
Figura 66 – Reta contruída a partir de dois pontos.



Fonte: Próprio autor.

Definição A.2. Sejam A e B pontos distintos. O conjunto formado pelos pontos do segmento AB , juntamente com todos os pontos C tais que B esteja entre A e C , é denominado **semi-reta de origem em A passando por B** , sendo representada por SAB . O ponto A é chamado de **origem** da semi-reta SAB .

Figura 67 – Semi-reta.



Fonte: Próprio autor.

Diz-se que dois pontos A e B pertencem a um mesmo lado de uma reta m quando o segmento AB não a intercepta. O conjunto formado pela reta m

juntamente com todos os pontos situados no mesmo lado de m que um ponto A , não pertencente a m , denomina-se **semiplano determinado por m que contém A** , sendo representado por P_{mA} .

Axioma 4. Axiomas de medição (medição de segmentos e ângulos)

- i) A cada segmento está associado um número real maior ou igual a zero. Esse número é igual a zero se, e somente se, suas extremidades coincidem. Tal número expressa a distância entre as extremidades do segmento, podendo também ser interpretado como o comprimento do segmento AB , o qual será indicado por $\overline{AB}$.

- ii) Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o valor absoluto da diferença entre esses números represente a distância entre os pontos correspondentes.

Uma vez fixada essa correspondência, o número associado a cada ponto da reta é chamado de sua coordenada. Assim, se a e b são as coordenadas dos pontos A e B , respectivamente, então $\overline{AB} = |b - a|$.

- iii) Se o ponto C está entre os pontos A e B , então a soma dos comprimentos dos segmentos AC e CB é igual ao comprimento do segmento AB , isto é, $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

- iv) A cada ângulo está associado um único número real maior ou igual a zero. Esse número é igual a zero se, e somente se, os lados do ângulo coincidem.

Uma semi-reta divide um semiplano quando está contida nesse semiplano e sua origem pertence à reta que o determina.

- v) Existe uma correspondência biunívoca entre as semi-retas de mesma origem que dividem um determinado semiplano e os números reais compreendidos entre 0 e 180, de modo que a diferença entre esses números determina a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.

Esse enunciado estabelece a medida de ângulos em graus, de forma que o ângulo mede 0° quando seus lados coincidem, e mede 180° no caso de um ângulo raso.

Sejam SOA , SOB e SOC semi-retas de mesma origem. Diz-se que SOC divide o ângulo $\angle AOB$ se o segmento AB intersecta a semi-reta SOC .

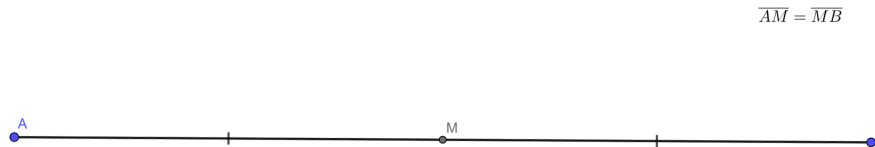
- vi) Se uma semi-reta S_{OC} divide o ângulo $\angle AOB$, então a medida de $\angle AOB$ é igual à soma das medidas dos ângulos $\angle AOC$ e $\angle COB$, isto é,

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Além disso, se a semi-reta S_{OC} divide o ângulo $\angle AOB$ de modo que $\angle AOC = \angle COB$, então S_{OC} é chamada de **bissetriz** do ângulo $\angle AOB$.

Definição A.3. Denomina-se ponto médio do segmento AB o ponto M pertencente a esse segmento tal que os comprimentos dos segmentos AM e MB são iguais, isto é, $\overline{AM} = \overline{MB}$.

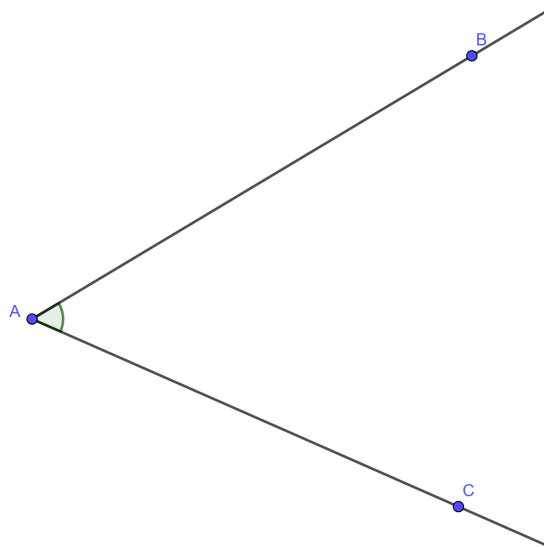
Figura 68 – M é o ponto médio entre A e B .



Fonte: Próprio autor.

Definição A.4. Um ângulo é a figura determinada por duas semi-retas que possuem a mesma origem. Essas semi-retas são chamadas de **lados** do ângulo, enquanto a origem comum recebe o nome de **vértice** do ângulo.

Figura 69 – Ângulo $\angle BAC$.



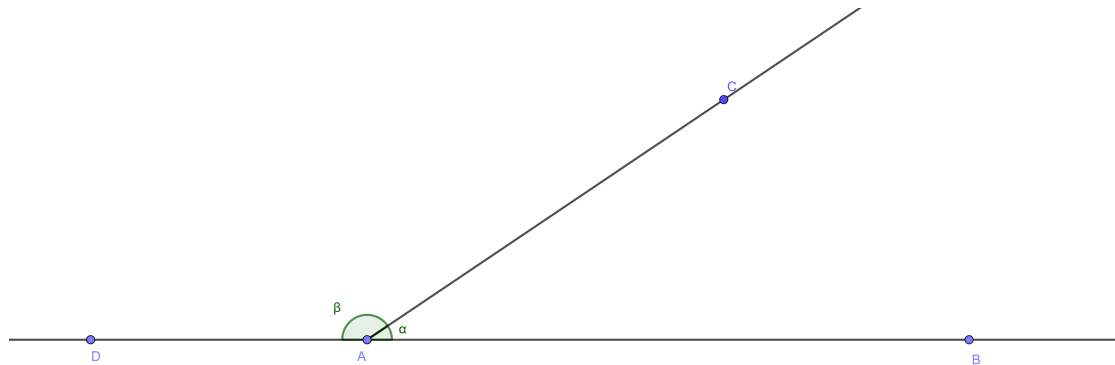
Fonte: Próprio autor.

O ângulo cujos lados são as semi-retas SAB e SAC pode ser representado por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$. Quando não houver ambiguidade, esse ângulo também pode ser indicado simplesmente por $\angle A$.

Um ângulo cujos lados são duas semi-retas distintas pertencentes a uma mesma reta é denominado **ângulo raso**.

Definição A.5. Dois ângulos são chamados de **suplementares** quando a soma de suas medidas é igual a 180° . O **suplemento** de um ângulo é o ângulo adjacente a ele, obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

Figura 70 – $\angle BAD$ é o ângulo suplementar a $\angle BAC$ e vice-versa.



Fonte: Próprio autor.

Quando duas retas distintas se cruzam, são formados quatro ângulos, conforme ilustrado na figura a seguir.

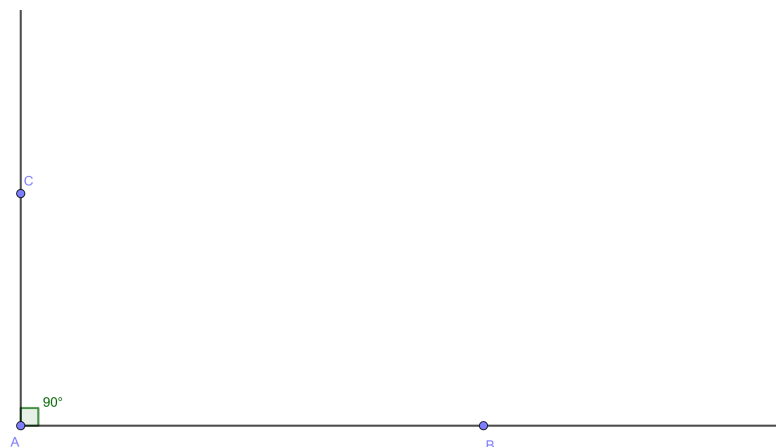
Os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOD$ (assim como $\angle AOD$ e $\angle BOC$) são chamados de **opostos pelo vértice**.

Observa-se que ângulos opostos pelo vértice possuem o mesmo suplemento; portanto, têm a mesma medida.

Definição A.6. Um ângulo cuja medida é 90° é denominado **ângulo reto**. Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, então são chamadas de **retas perpendiculares**. Dois ângulos são ditos **complementares** quando a soma de suas medidas é 90° . Um ângulo é classificado como **agudo** quando sua medida é menor que 90° , e como **obtuso** quando sua medida é maior que 90° .

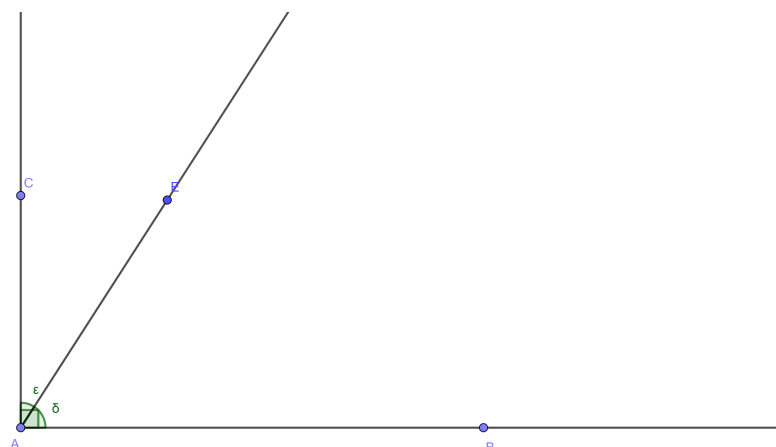
Teorema 29. *Por um ponto pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a essa reta.*

Figura 71 – A semi-reta S_{AB} faz um ângulo reto com a semi-reta S_{AC} .



Fonte: Próprio autor.

Figura 72 – $\angle CAE$ é o ângulo suplementar a $\angle BAE$ e vice-versa.



Fonte: Próprio autor.

Demonstração. Considere uma reta r e um ponto P pertencente a r . Deseja-se mostrar que existe uma única reta perpendicular a r passando por P .

(Existência) A existência de tal reta é garantida pelo Axioma de Medição.

(Unicidade) Suponha que existam duas retas distintas s e t , ambas perpendiculares à reta r e passando pelo ponto P . Em um mesmo semiplano determinado por r , as retas s e t formam um ângulo α .

Como s e t são perpendiculares a r , os ângulos formados com r são retos. Assim, a soma desses ângulos com α deve resultar em um ângulo raso. Portanto, $\alpha = 0^\circ$, o que implica que as retas s e t coincidem.

Conclui-se, então, que a reta perpendicular é única. $\square$

Definição A.7. Dois segmentos são considerados **congruentes** quando possuem a mesma medida. De modo análogo, dois ângulos são ditos **congruentes** quando apresentam a mesma medida.

Definição A.8. Dois triângulos são ditos **congruentes** quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que os lados e os ângulos correspondentes sejam congruentes.

Assim, se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes, e se a correspondência

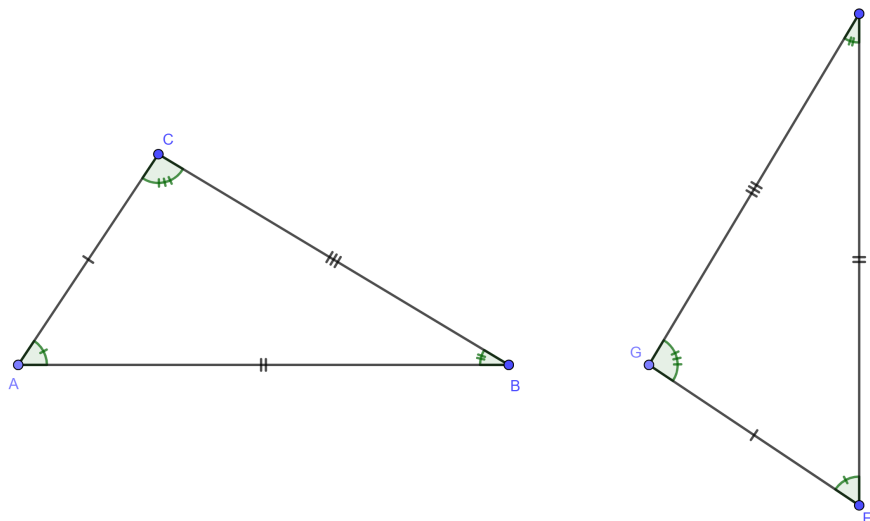
$$A \leftrightarrow E, \quad B \leftrightarrow F, \quad C \leftrightarrow G$$

define essa congruência, então valem as seguintes relações:

- Entre os lados: $AB = EF$, $BC = FG$ e $CA = GE$;
- Entre os ângulos: $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$ e $\angle C = \angle G$.

Nessa situação, utiliza-se a notação $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ para indicar a congruência entre os triângulos com a correspondência estabelecida. Passa-se agora ao

Figura 73 – Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes.



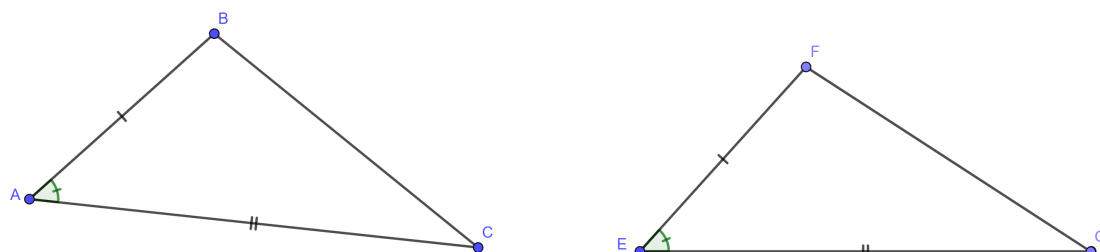
Fonte: Próprio autor.

estudo das condições mínimas necessárias para assegurar a congruência entre dois triângulos. Para isso, serão apresentados os chamados **casos de congruência**.

Axioma 5. Axioma de congruência (1º caso de congruência de triângulos). Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$. Se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\angle A = \angle E$, então $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$.

Esse resultado corresponde ao caso de congruência **LAL** (Lado-Ângulo-Lado). Os demais casos de congruência de triângulos podem ser deduzidos a partir

Figura 74 – 1º caso de congruência de triângulos (LAL).



Fonte: Próprio autor.

deste primeiro caso.

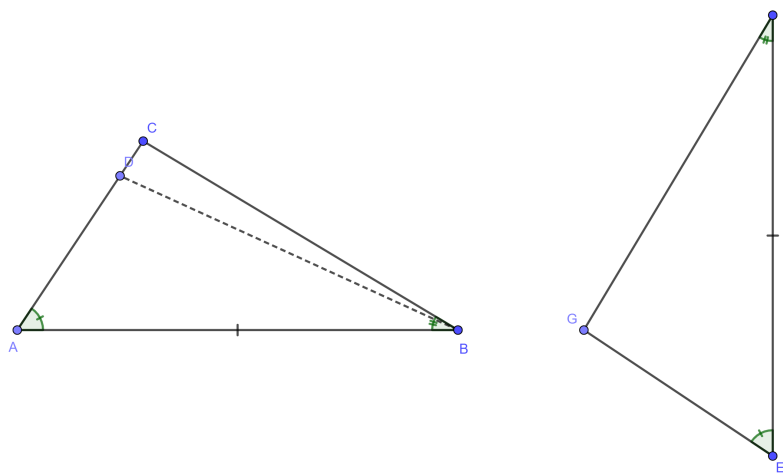
Teorema 30 (2º caso de congruência de triângulos). *Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$. Se $AB = EF$, $\angle A = \angle E$ e $\angle B = \angle F$, então $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$.*

*Esse resultado corresponde ao caso de congruência **ALA** (Ângulo-Lado-Ângulo).*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ triângulos tais que $AB = EF$, $\angle A = \angle E$ e $\angle B = \angle F$.

Considere um ponto D sobre a semi-reta SAC tal que $AD = EG$. Como $\angle DAB = \angle GEF$ e $AB = EF$, segue pelo primeiro caso de congruência (LAL) que $\triangle ABD \equiv \triangle EFG$. Assim, $\angle ABD = \angle EFG = \angle ABC$. Portanto, os pontos C e

Figura 75 – 2º caso de congruência de triângulos (ALA).



Fonte: Próprio autor.

D coincidem, isto é, $C = D$.

□

Axioma 6 (Pash). *Se uma reta cruza um dos lados de um triângulo e não passa por nenhum de seus vértices, então ela deve, obrigatoriamente, cruzar exatamente um dos outros dois lados.*

Definição A.9. Um triângulo é denominado **isósceles** quando possui dois lados congruentes. Esses lados são chamados de **laterais**, enquanto o terceiro lado recebe o nome de **base**.

Proposição 18. *Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração . Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $AB = AC$.

Considere o próprio triângulo $\triangle ABC$ e estabeleça a correspondência $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$.

Como $AB = AC$, $\angle A = \angle A$ e $AC = AB$, segue, pelo primeiro caso de congruência (LAL), que essa correspondência define uma congruência.

Portanto, conclui-se que $\angle B = \angle C$.

Proposição 19. *Se, em um triângulo $\triangle ABC$, dois ângulos são congruentes, então esse triângulo é isósceles.*

Demonstração . Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $\angle B = \angle C$.

Considere a mesma correspondência utilizada na demonstração da proposição anterior, isto é, $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$.

Aplicando o segundo caso de congruência (ALA), conclui-se que os lados correspondentes são congruentes. Portanto, $AB = AC$, e o triângulo é isósceles.

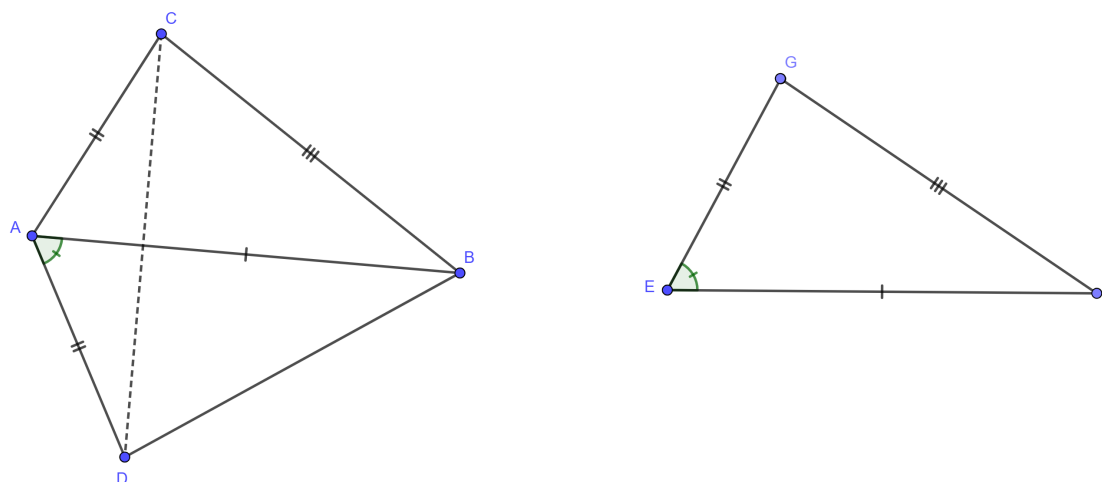
Teorema 31 (3º caso de congruência de triângulos). *Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes congruentes, então eles são congruentes.*

*Esse resultado corresponde ao caso de congruência **LLL** (Lado-Lado-Lado).*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ triângulos tais que $AB = EF$, $BC = FG$ e $CA = GE$.

Inicialmente, construa, a partir da semi-reta SAB e no semiplano oposto ao que contém o ponto C , um ângulo congruente a $\angle E$. No lado desse ângulo que não contém o ponto B , marque um ponto D tal que $AD = EG$ e trace o segmento BD . Como $AB = EF$, pelo primeiro caso de congruência (LAL), tem-se que $\triangle ABD \equiv \triangle EFG$. Resta mostrar que $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$. Para isso, trace o segmento CD . Como $AD = EG = AC$ e $BD = FG = BC$, conclui-se que os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são isósceles, ambos com base CD . Assim, $\angle ADC = \angle ACD$ e $\angle BDC = \angle BCD$. Logo, $\angle ADB = \angle ACB$. Como $AD = AC$

Figura 76 – 3º caso de congruência de triângulos (LLL).



Fonte: Próprio autor.

e $BD = BC$, pelo primeiro caso de congruência (LAL), conclui-se que $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$.

Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$. $\square$

Definição A.10. Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado **triângulo retângulo**. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, enquanto os outros dois lados são denominados **catetos**.

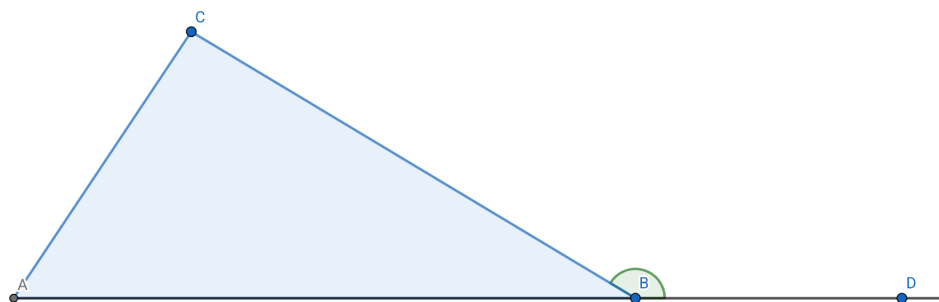
Definição A.11. Dado um triângulo $\triangle ABC$, os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ são chamados de **ângulos internos**, ou simplesmente ângulos do triângulo. Os ângulos suplementares a esses são denominados **ângulos externos** do triângulo $\triangle ABC$.

Teorema 32 (Teorema do ângulo Externo). *Em um triângulo, todo ângulo externo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ e considere um ponto D sobre a semi-reta S_{AB} , de modo que B esteja entre A e D . Deseja-se mostrar que $\angle DBC > \angle A$ e $\angle DBC > \angle C$. Inicialmente, demonstraremos que $\angle DBC > \angle C$. Para isso, considere o ponto médio E do segmento BC . Na semi-reta S_{AE} , marque um ponto F tal que $AE = EF$ e trace o segmento BF . Como $BE = CE$ e $\angle BEF = \angle CEA$ (por serem opostos pelo vértice), segue que $\triangle BEF \equiv \triangle CEA$. Assim, $\angle C = \angle EBF$.

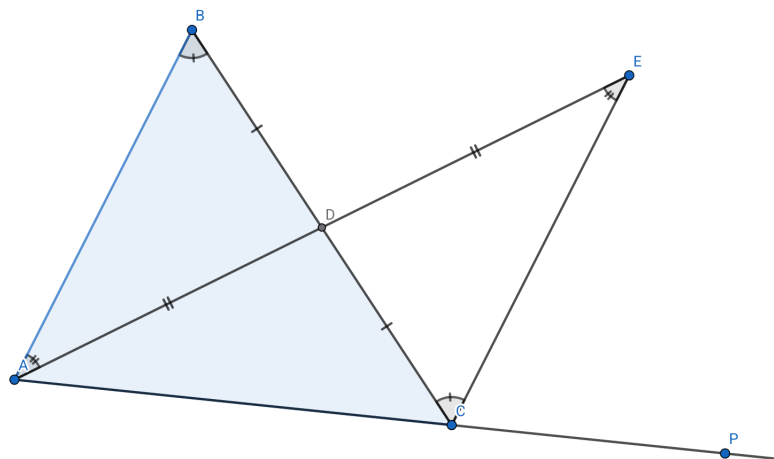
Observa-se que a semi-reta S_{BF} divide o ângulo $\angle DBC$, logo

$$\angle EBF < \angle DBC.$$

Figura 77 – O ângulo $\angle CBD$ é externo do triângulo $\triangle ABC$.


Fonte: Próprio autor.

Figura 78 – Construção auxiliar da proposição 19.



Fonte: Próprio autor.

Portanto, $\angle C < \angle DBC$.

De maneira análoga, tomando, dessa vez, que o ponto D esteja sobre a semi-reta S_{CB} , de modo que B esteja entre C e D , conclui-se que $\angle A < \angle DBC$. $\square$

Proposição 20. *Se, em um triângulo, dois lados não são congruentes, então os ângulos opostos a esses lados também não são congruentes, sendo o maior ângulo oposto ao maior lado.*

Demonstração . A primeira parte da proposição decorre imediatamente da proposição 18 e da proposição 19.

Para demonstrar que o maior ângulo está oposto ao maior lado, considere um triângulo $\triangle ABC$ tal que $AC < BC$. Deseja-se provar que $\angle A > \angle B$.

Marque, no segmento BC , um ponto D tal que $CD = AC$. Observe que a semi-reta S_{AD} divide o ângulo $\angle BAC$, o que implica que

$$\angle CAB > \angle CAD.$$

Como $CD = AC$, o triângulo $\triangle ADC$ é isósceles, e portanto

$$\angle CAD = \angle CDA.$$

Além disso, o ângulo $\angle CDA$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle ABD$, não adjacente ao ângulo $\angle A$. Assim,

$$\angle CDA > \angle DBA = \angle CBA.$$

Logo, conclui-se que

$$\angle CAB > \angle CBA,$$

isto é, $\angle A > \angle B$.