



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE ITABAIANA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DAVID REZENDE DE SANTANA

**Geometria Esférica: Uma Abordagem Axiomática dos Conceitos
Fundamentais e da Trigonometria**

Itabaiana
2026

DAVID REZENDE DE SANTANA

**Geometria Esférica: Uma Abordagem Axiomática dos Conceitos
Fundamentais e da Trigonometria**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Sergipe, ao Departamento de Matemática de Itabaiana, como requisito avaliativo para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque

DAVID REZENDE DE SANTANA

**Geometria Esférica: Uma Abordagem Axiomática dos Conceitos
Fundamentais e da Trigonometria**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática de Itabaiana, Universidade Federal de Sergipe, como requisito avaliativo para obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque
UFS

Segundo Examinador

Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira
UFS

Terceiro Examinador

Prof. Dr. Fábio Lima Santos
UFS

Resultado _____

Data ____/____/____

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me concedeu forças para continuar, mesmo nos momentos em que pensei em desistir. Houve situações que abalaram minhas estruturas e momentos em que portas pareciam se fechar, mas o Senhor nunca desistiu de mim e me possibilitou chegar até aqui para realizar esta importante conquista.

Agradeço à minha mãe, Jeocástria Rezende dos Santos, e à minha tia, Lisiane Rezende, que sempre me incentivaram ao longo do curso. Suas belas histórias de vida serviram de inspiração para mim, pois ambas são professoras de Matemática, formadas na mesma área em que hoje me formo, e tiveram, inclusive, muitos dos professores que também fizeram parte da minha formação. Obrigado por todo o amor, apoio e dedicação. Eu amo vocês, minhas rainhas.

Agradeço ao meu estimado orientador, Professor Dr. Alejandro Caicedo Roque, por ter aceitado me guiar nesta jornada e por acreditar em mim ao aceitar orientar este trabalho. Sou grato por ter acolhido minha ideia de pesquisa e minha paixão pela Geometria, área com a qual me identifiquei desde cedo. Sua trajetória acadêmica, seu conhecimento e sua dedicação sempre foram fontes de admiração. Agradeço por todos os conselhos, ensinamentos, correções, desafios propostos e também pelos momentos de descontração compartilhados ao longo desta caminhada.

Agradeço ao corpo docente do Departamento de Matemática de Itabaiana, que sempre esteve presente durante minha formação. Sou grato pelo apoio, pelas orientações acadêmicas, pelos ensinamentos transmitidos e pela disposição em ajudar sempre que necessário. Cada professor contribuiu de maneira significativa para minha trajetória.

Agradeço também aos meus colegas, amigos e familiares, que foram fundamentais nesta caminhada. Aos meus colegas de curso, agradeço pelos momentos de estudo, pelas conversas, pelas risadas, pelas dificuldades compartilhadas e por toda a amizade construída ao longo desses anos. Mesmo diante de desafios e divergências ocasionais, permanecemos unidos, e isso tornou essa jornada muito mais especial.

Aos meus familiares, expresso minha profunda gratidão pelo apoio constante. Em especial, agradeço à minha namorada, Thauanny, que esteve ao meu lado durante toda a graduação. Mesmo enfrentando seus próprios desafios, nunca deixou de me incentivar, apoiar e acreditar em mim. Sua presença, compreensão e dedicação foram essenciais para que eu pudesse chegar até este momento. Sou imensamente grato por tudo o que fez por mim ao longo dessa caminhada.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista e que não foram mencionados nominalmente. Cada palavra de incentivo, cada conselho, cada gesto de apoio e cada oração tiveram grande importância ao longo dessa trajetória. Levarei comigo a lembrança e a gratidão por cada pessoa que fez parte desta caminhada. Muito obrigado a todos.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sistemático da Geometria Esférica, abrangendo sua construção axiomática, propriedades fundamentais e introdução à trigonometria esférica. Inicia com uma contextualização histórica, desde as civilizações antigas até sua consolidação matemática. Discute o conceito de reta na esfera via geodésicas, distinguindo as abordagens intrínseca e extrínseca, e estabelece formalmente conceitos como círculo máximo, antipodalidade, distância esférica e convexidade. O foco principal é a teoria dos triângulos esféricos, incluindo propriedades, critérios de congruência (como o caso AAA) e a relação entre soma dos ângulos e curvatura. Aborda também a área de triângulos esféricos, culminando no Teorema de Girard-Euler, e apresenta demonstrações do Teorema de Pitágoras Esférico e da Lei dos Senos Esférico. Por fim, compara a geometria plana e a esférica, apresenta a visão extrínseca e resultados originais sobre círculos antípodas e paralelos. O trabalho visa oferecer uma exposição formal e acessível das Geometrias Não Euclidianas, destacando sua relevância histórica, educacional e para a geometria moderna.

Palavras-chave: Geometria Esférica; Geometria Não Euclidiana; Triângulos Esféricos; Trigonometria Esférica; Teorema de Girard-Euler; Teorema de Pitágoras Esférico; Lei dos Senos Esférica.

ABSTRACT

This work presents a systematic study of Spherical Geometry, covering its axiomatic construction, fundamental properties, and an introduction to spherical trigonometry. It begins with a historical contextualization, from ancient civilizations to its mathematical consolidation. It discusses the concept of a line on the sphere via geodesics, distinguishing between intrinsic and extrinsic approaches, and formally establishes concepts such as great circles, antipodality, spherical distance, and convexity. The main focus is on the theory of spherical triangles, including properties, congruence criteria (such as the AAA case), and the relationship between the sum of angles and curvature. It also addresses the area of spherical triangles, culminating in the Girard-Euler Theorem, and presents proofs of the Spherical Pythagorean Theorem and the Spherical Law of Sines. Finally, it compares plane and spherical geometry, presents the extrinsic viewpoint, and original results on antipodal and parallel circles. The work aims to offer a formal and accessible exposition of Non-Euclidean Geometries, highlighting their historical, educational, and modern geometrical relevance.

Keywords: Spherical Geometry; Non-Euclidean Geometry; Spherical Triangles; Spherical Trigonometry; Girard-Euler Theorem; Spherical Pythagorean Theorem; Spherical Law of Sines.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Dividindo o círculo em 360°	12
Figura 2 – Esfera armilar baseada na visão grega do universo	13
Figura 3 – Ilustração para ajudar no pensamento	14
Figura 4 – Grandes círculos	15
Figura 5 – A rotulagem de um círculo com $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$	17
Figura 6 – Lei da função l	17
Figura 7 – Transposição para $\mathbb{R}$	17
Figura 8 – Ponto e seu Antípoda	20
Figura 9 – Relações de distâncias em Γ	23
Figura 10 – O antípoda de um polo no Axioma 4.6	27
Figura 11 – O único outro ponto que satisfaz a mesma propriedade	28
Figura 12 – Diagrama para a prova do teorema	29
Figura 13 – Três semirretas esféricas do mesmo círculo máximo	31
Figura 14 – Interseção de uma semirreta esférica com um círculo máximo	33
Figura 15 – Os pontos de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ ficam no mesmo hemisfério do $\odot AB$, exceto A	35
Figura 16 – Medida do ângulo $\sphericalangle ABC$	37
Figura 17 – Relacionando o $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBC$ como suplementares	38
Figura 18 – Ângulo $\sphericalangle ABC$, seu interior e a lúnula associada BAB^aCB	39
Figura 19 – Esfera aplicada no teorema do Transferidor.	40
Figura 20 – Ponto interior ao ângulo	42
Figura 21 – Relação de ângulo com seu interior	42
Figura 22 – Teorema da barra Transversal	44
Figura 23 – Círculos máximos perpendiculares entre si	45
Figura 24 – Ângulos agudo, reto ou obtuso	45
Figura 25 – Pés da perpendicular	47
Figura 26 – Relação de triângulos	48
Figura 27 – Triângulos com um, dois e três ângulos retos	50
Figura 28 – Relação de ângulos e lados de um triângulo reto	51
Figura 29 – Extensão de casos do triângulo isósceles	53
Figura 30 – Triângulo polar	54
Figura 31 – Um polígono esfericamente convexo $A_1A_2A_3A_4A_5$ e seu interior	56
Figura 32 – Círculos paralelos	57
Figura 33 – Círculos paralelos congruente a círculos antípoda	60
Figura 34 – Teorema LLAA Congruência	64
Figura 35 – Contraexemplo LLA e LAA	65
Figura 36 – Soma dos ângulos de um triângulo é maior que π	68
Figura 37 – Em qualquer triângulo a soma é maior que π	69

Figura 38 – Soma da medida de quaisquer dois lados	70
Figura 39 – Um triângulo cuja soma dos ângulos é próxima de 3π	73
Figura 40 – Teorema do Ângulo Externo Esférico	74
Figura 41 – Triângulo cujas medidas são desiguais	75
Figura 42 – Um triângulo, seu interior e a união do triângulo com seu interior . . .	78
Figura 43 – Área do triângulo ABC	79
Figura 44 – Se ABC possui um ângulo reto	81
Figura 45 – Se ABC possui um lado reto	83
Figura 46 – A Lei dos Senos Esférico	86
Figura 47 – A interseção de um plano com uma esfera	91
Figura 48 – Círculos máximos, círculos menores e polos	91
Figura 49 – Círculos máximos que se encontram em pontos antípodas N e S	92
Figura 50 – Medida de um ângulo esférico	94
Figura 51 – Definição de círculo máximo extrinsecamente	94
Figura 52 – Hemisfério esfericamente convexo	96
Figura 53 – Relações de seno	96
Figura 54 – Medida entre ângulos	98
Figura 55 – Triângulos recortados da figura	98
Figura 56 – Cone Circular Reto	100
Figura 57 – Cone Poligonal Regular Reto	101
Figura 58 – Tronco de Cone Poligonal	101
Figura 59 – Área de superfície da zona de uma esfera	102
Figura 60 – Valores de ϕ e θ	104
Figura 61 – Coordenadas	105

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Círculo máximo
$d(A, B)$	Distância esférica entre os pontos A e B
$\ell(A)$	Relação de pontos de Γ para $\mathbb{R}/2\pi$
$\vec{AB}$	Semirreta esférica
$\sphericalangle ABC$	Ângulo esférico do vértice em B
$\bigcirc AB$	Círculo máximo determinado pelos pontos A e B
$\widehat{AB}$	Arco esférico determinado pelos pontos A e B
$\triangle ABC$	Triângulo esférico
LLL	Congruência por três lados correspondentes congruentes
LAL	Congruência por dois lados e o ângulo compreendido correspondentes congruentes
ALA	Congruência por um lado e dois ângulos correspondentes congruentes
AAA	Congruência por três ângulos correspondentes congruentes
$LLAA$	Congruência por dois lados e um ângulo oposto correspondentes
$\mathcal{A}(\triangle ABC)$	Área da região esférica R

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESFÉRICA	12
3	RETA NA ESFERA	14
3.1	O QUE É UMA RETA?	14
4	AXIOMÁTICA DA GEOMETRIA ESFÉRICA	16
4.1	AXIOMAS BÁSICOS	16
4.2	ÂNGULOS	36
4.3	TRIÂNGULOS	48
4.3.1	Círculos Paralelos e Antípoda	57
4.4	CONGRUÊNCIA	60
4.5	DESIGUALDADES	67
4.6	ÁREA	77
4.7	TRIGONOMETRIA	80
4.7.1	Teorema de Pitágoras Esférico e Lei dos Senos Esférico	80
5	CONCLUSÃO	87
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICE A – A ESFERA NO ESPAÇO	90
A.1	GRANDES CÍRCULOS	90
A.2	PONTOS ANTÍPODAS	92
A.3	DISTÂNCIA E ÂNGULOS	96
A.4	ÁREA	100
A.5	COORDENADAS ESFÉRICAS	103

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Esférica constitui um dos exemplos mais antigos e importantes das Geometrias Não Euclidianas. Diferentemente da geometria euclidiana, que tem como modelo o plano, a geometria esférica desenvolve-se sobre a superfície da esfera, onde os conceitos de reta, distância e paralelismo assumem características próprias. Nessa geometria, as retas são substituídas pelos arcos de círculos máximos, e diversas propriedades consideradas naturais no plano deixam de ser válidas. Como consequência, surgem fenômenos geométricos particulares, como a inexistência de retas paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo superior a π radianos e a relação entre área e excesso esférico.

O estudo da geometria sobre superfícies esféricas possui profundas raízes históricas. Desde a Antiguidade, civilizações como a babilônica e a grega realizaram observações astronômicas que exigiam a compreensão de movimentos aparentes dos corpos celestes sobre uma esfera. Posteriormente, a Geometria Esférica tornou-se uma ferramenta fundamental para a navegação marítima, para a cartografia e para a astronomia, desempenhando papel importante no desenvolvimento científico de diversas épocas. Além de sua relevância histórica, essa geometria constitui atualmente um importante objeto de estudo matemático, contribuindo para a compreensão das relações entre curvatura e estrutura geométrica.

Uma das principais motivações para o estudo da Geometria Esférica está na necessidade de compreender como conceitos geométricos clássicos podem ser reformulados quando o espaço considerado não é plano. Nesse contexto, a esfera fornece um ambiente natural para a investigação de propriedades que contrastam diretamente com aquelas observadas na geometria euclidiana. Tais diferenças tornam a Geometria Esférica um dos exemplos mais acessíveis e relevantes dentro do conjunto das Geometrias Não Euclidianas.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo introdutório e sistemático da Geometria Esférica, enfatizando sua construção axiomática, suas propriedades geométricas fundamentais e trigonométricas. Neste trabalho, são discutidos conceitos preliminares relacionados à curvatura da esfera, às geodésicas e às interpretações intrínseca e extrínseca da superfície esférica. A parte concernente com a Geometria Extrínseca foi desenvolvida de forma completa, mas para atender o objetivo principal do TCC será deixado no apêndice para consulta do leitor.

Em seguida, desenvolve-se uma teoria axiomática capaz de fundamentar rigorosamente os principais objetos da geometria sobre a esfera, estabelecendo definições e resultados envolvendo círculos máximos, antipodalidade, distância esférica, hemisférios, convexidade esférica e ângulos.

O núcleo central do trabalho é dedicado ao estudo dos triângulos esféricos. São apresentadas propriedades específicas dessa classe de figuras, bem como critérios de congruência que diferem significativamente daqueles encontrados na geometria euclidiana. Entre os resultados estudados destacam-se a validade do caso AAA para congruência

de triângulos esféricos, e a relação entre a soma dos ângulos internos e a curvatura da superfície. Além disso, desenvolve-se a teoria da área dos triângulos esféricos, culminando na demonstração do Teorema de Girard-Euler, que relaciona a área de um triângulo ao seu excesso esférico.

Também são abordados resultados clássicos da Trigonometria Esférica, com destaque para as demonstrações do Teorema de Pitágoras Esférico e da Lei dos Senos Esférica. Esses resultados evidenciam como a curvatura da esfera altera as relações métricas entre lados e ângulos quando comparadas às relações conhecidas da geometria plana.

Além dos resultados clássicos presentes na literatura, o trabalho apresenta investigações complementares relacionadas aos conceitos de círculos antípodas e círculos paralelos, desenvolvidas ao longo da pesquisa. Tais resultados estabelecem conexões entre a abordagem axiomática e a interpretação espacial da esfera, ampliando a compreensão dos objetos geométricos estudados.

Para organizar o desenvolvimento do tema, este trabalho foi estruturado em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma contextualização histórica da Geometria Esférica, destacando sua origem e evolução ao longo do desenvolvimento da Matemática. O Capítulo 3 introduz conceitos preliminares relacionados às geodésicas, à curvatura e às interpretações intrínseca e extrínseca da esfera. O Capítulo 4 desenvolve a abordagem axiomática da Geometria Esférica, estabelecendo definições, axiomas, proposições e teoremas fundamentais, bem como o estudo dos ângulos, triângulos esféricos, critérios de congruência, desigualdades e resultados sobre área. O Capítulo 5 é dedicado à Trigonometria Esférica, com destaque para o Teorema de Pitágoras Esférico, a Lei dos Senos Esférica. O Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho. Por fim, são apresentados os apêndices, que complementam os resultados desenvolvidos ao longo do texto por meio de abordagens extrínsecas, exercícios e resultados adicionais obtidos durante a pesquisa.

Dessa forma, busca-se fornecer uma exposição acessível e rigorosa da Geometria Esférica, destacando sua importância histórica, seu valor teórico no contexto das Geometrias Não Euclidianas e sua relevância para a formação matemática.

2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESFÉRICA

Como é citado por Ptolemy, em seu livro (Ptolemy, 2000), "Por meio da geometria esférica será fácil visualizar a distância entre dois locais na superfície da Terra". Como a superfície da Terra possui forma aproximadamente esférica, mais precisamente a Terra possui uma forma chamada geoide, daí surgiu o nome geodésia (Ciência que estuda a forma e dimensão da Terra, a posição de pontos sobre sua superfície e medir tal superfície).

Historicamente, voltando ao período do antigo Egito e da antiga Babilônia, observavam-se os corpos celestes com propósitos astrológicos de fazer um calendário, que era importante para a organização da sociedade.

Ptolemy cita em seu *Almagesto* (Toomer, 1984), que observações de eclipses e estrelas já eram realizadas pelos babilônicos antes do século VIII a.C. Devido a essas observações, os babilônicos originaram a noção de dividir o círculo em 360° (Ver Figura-1) e especula-se que foi devido ao número de dias em um ano e também porque 360 é o número de formas de colocar 7 pontos sobre um círculo.

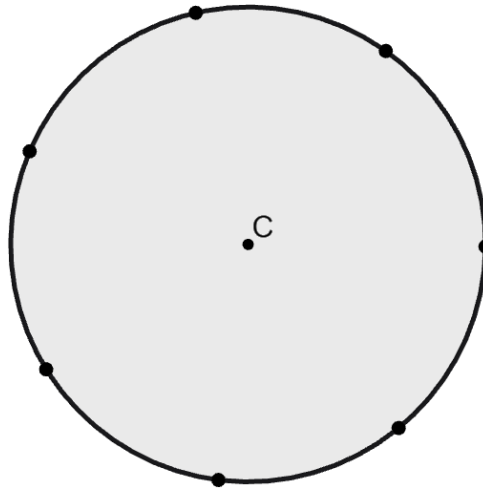


Figura 1 – Dividindo o círculo em 360°

Formas : $\frac{(7-1)!}{2} = 360$ e 7 pontos, pois para os povos antigos existiam sete corpos celestes (Sol, Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Saturno e Júpiter).

O aspecto mais importante desse desenvolvimento foi que os babilônicos desenvolveram um sistema de coordenadas, que hoje chamamos de "Coordenadas Esféricas"; por isso é equívoco pensar que Descartes originou o sistema de coordenadas (Henderson; Taimina, 2005, p. 26).

Juntamente com os babilônicos, os gregos estão interligados nessa parte astrológica, eles se familiarizaram com os estudos astronômicos dos babilônicos por volta do século IV a.C. Eles desenvolveram o "Modelo das duas esferas". (Ver Figura-2)

Essas esferas se dividiam da seguinte maneira: as estrelas são como a esfera celeste e o sol como a esfera eclíptica. Na qual os estudos realizados sobre elas geraram análise de rotação, translação, ângulos dentre outros tópicos. Após um tempo Autolycus matemático

e astrônomo grego introduziu uma terceira esfera chamada, "Esfera Horizontal" (Henderson; Taimina, 2005, p. 27).

Por meio dessas observações e estudos que foi se desenvolvendo a geometria esférica, que tem como significado de sua palavra geometria, termo que provém do grego *geometrein*, onde *geo* é Terra e *metrein* é medir. Os primeiros trabalhos matemáticos conhecidos em que aparece o uso desta geometria são mencionados no livro de (Pitane, 0320) e (Euclid, 0300). Nestes livros são apresentadas também as definições e proposições da geometria esférica, como círculo máximo e círculos iguais.

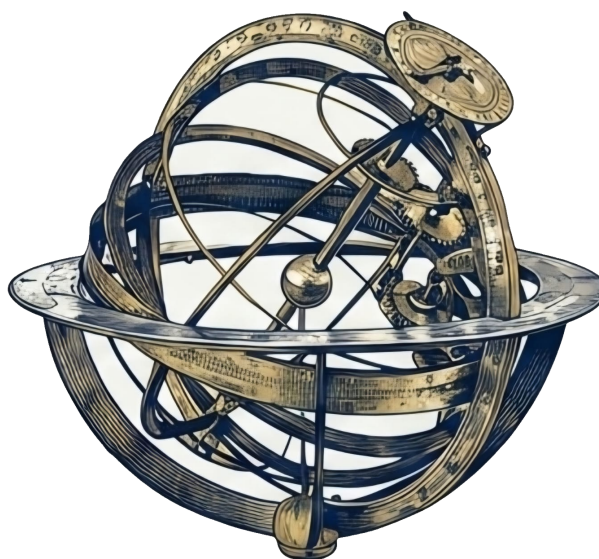


Figura 2 – Esfera armilar baseada na visão grega do universo

Após algum tempo, Hiparco, um astrônomo e matemático da antiguidade, aplicou as coordenadas esféricas dos babilônicos nas três esferas (Celeste, Eclíptica, Horizontal). Para então solucionar problemas astronômicos, como, "Quando uma estrela cruza o meu horizonte?". Foi a resolução de problemas desse tipo que exigiu a mudança de coordenadas entre esferas e acabou impulsionando o desenvolvimento da trigonometria esférica.

Já o primeiro relato sistemático sobre geometria esférica foi o *Sphaerica*, que consiste em três livros de teoremas e problemas de construções. No qual *Sphaerica* formulou grande parte dos teoremas em uma geometria extrínseca, mas também havia proposições e teoremas formulados em geometria intrínseca.

Falando agora sobre Euclides, por volta dos anos 300.a.C ele produziu os 13 volumes de 'Os Elementos' assim dando uma base sólida para a geometria Euclidiana; mas que ao negar o 5º axioma surgem as geometrias não euclidianas, onde se encontra a geometria esférica.

3 RETA NA ESFERA

Nesta capítulo, adotaremos como principal referência a obra de (Henderson; Taimina, 2005), em especial a abordagem apresentada a partir da página 28, na qual os autores introduzem o conceito de reta em uma esfera sob uma perspectiva intrínseca e extrínseca.

3.1 O QUE É UMA RETA?

Para iniciar a discussão sobre retas em uma esfera é interessante discutirmos o que temos como ideia de reta. Quando estudamos na geometria euclidiana, temos como reta, um segmento que é dado por dois pontos e é infinito. Agora na geometria não-euclidiana ou melhor dizendo na geometria esférica, o que seria uma reta?

Parando para pensar, teríamos que imaginar algo pequeno e partir para algo grande. Imagine uma bola de futebol e coloque um inseto bem pequeno sobre ela (Ver Figura-3), no qual ele só anda sobre a superfície da bola. Se fosse possível perguntar para o inseto em que direção ele está andando, é bem provável que ele diria em linha reta.

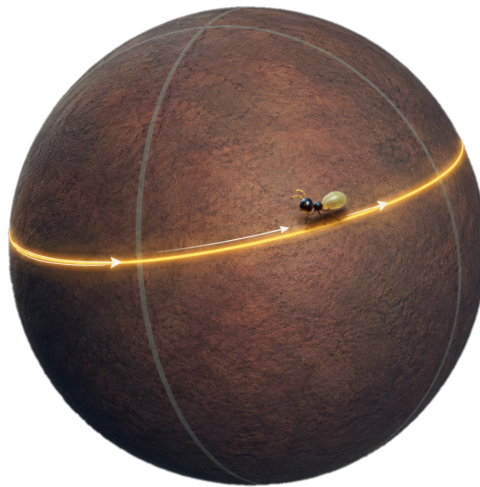


Figura 3 – Ilustração para ajudar no pensamento

Mas em todo o momento para nós que observamos o inseto, ele se movia dando a volta na bola e gerando um percurso com um formato circular. Gerando assim duas visões, para o inseto uma linha reta, para nós observadores uma curva na bola.

Vamos transpor essa ideia para algo maior, se sairmos correndo por uns 10km em uma pista reta, teríamos a impressão que corremos em linha reta. Porém se observarmos de fora da Terra e fosse possível visualizar a pessoa correndo, veríamos que percorreremos uma parte de um círculo na superfície da Terra, então para nós, teríamos nos movimentado em linha reta e para quem visse de fora estaríamos nos movimentando sobre um círculo.

Daí surge o conceito de reta na superfície esférica, sendo essas retas representadas por grandes círculos que passam pela superfície da esfera e têm como centro o centro da

esfera. (Ver Figura-4)

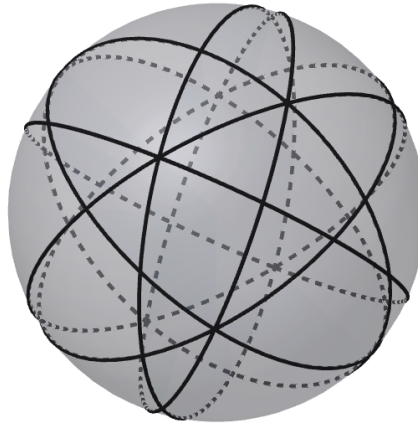


Figura 4 – Grandes círculos

Por meio desse entendimento do que é uma reta na esfera, é possível discutir o conceito de curvatura intrínseca ou geodésica e curvaturas extrínseca.

A *curvatura extrínseca* corresponde à observação externa da esfera, como no exemplo do inseto, é a visualização externa da esfera, por isso dizemos que ele está se movendo ao redor da bola com um percurso formando um círculo ou seja o inseto percorre curvas extrínsecas. (Geometria Extrínseca)

A *curvatura intrínseca*, é o que dizemos que percorremos sobre a superfície da Terra, que andamos em linha reta, ou seja intrinsecamente as linhas dos grandes círculos são retas e portanto curvaturas intrínsecas. (Geometria Intrínseca)

Por parte destas definições de retas na esfera, quando conseguirmos ficar à vontade com elas podemos então referirmos à reta na esfera como geodésicas. Algumas características das geodésicas:

- Uma reta na esfera é um círculo máximo ou seja uma *geodésica* intrinsecamente falando.
- Dado dois pontos na esfera a distância entre eles é uma curva de um círculo máximo.
- As geodésicas são satisfeitas por uma equação diferencial com a condição de um ponto na geodésica e a direção da geodésica naquele ponto.

4 AXIOMÁTICA DA GEOMETRIA ESFÉRICA

4.1 AXIOMAS BÁSICOS

Nossa compreensão do significado desses termos indefinidos na axiomática da geometria esférica, como ponto, círculo máximo e esfera, virão exclusivamente dos axiomas.

Assim, neste momento do trabalho, não consideraremos inicialmente a esfera como um conjunto de pontos equidistantes de um centro no espaço euclidiano, nem assumiremos que exista um centro associado à esfera. Da mesma forma, um círculo máximo não será tratado como a interseção de um plano que passa pelo centro da esfera com a esfera. Essas interpretações pertencem a uma abordagem extrínseca da geometria esférica, isto é, uma abordagem que depende do espaço tridimensional onde a esfera está inserida.

A escolha dessa perspectiva axiomática possui duas motivações principais. A primeira motivação é que toda teoria matemática se fundamenta em hipóteses iniciais que não são demonstradas, sendo importante explicitar claramente quais propriedades estão sendo assumidas. A segunda motivação é que o método axiomático permite estudar a geometria esférica a partir apenas de propriedades intrínsecas da superfície, sem recorrer às propriedades do espaço externo.

Desse modo, os capítulos seguintes desenvolverão a geometria esférica sob uma abordagem intrínseca, enfatizando propriedades internas da esfera. Posteriormente, no apêndice deste trabalho, será apresentada a abordagem extrínseca da geometria esférica, na qual a esfera será estudada como um objeto inserido no espaço euclidiano tridimensional.

Antes de estabelecer os axiomas da geometria esférica, é importante definir quais serão os objetos fundamentais de estudo. Assim como na geometria plana trabalhamos com pontos e retas, na geometria esférica os elementos básicos serão os pontos da esfera e os círculos máximos, que desempenham o papel das retas.

Axioma 4.1 *Uma esfera e um círculo máximo contido na esfera são conjuntos de pontos. E existem pelo menos dois pontos na esfera.*

O conjunto $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ representa os ângulos em módulo 2π . Assim, 0 , 2π , 4π e -2π são considerados o mesmo elemento, pois correspondem ao mesmo ponto do círculo.

Axioma 4.2 *Há uma correspondência biunívoca entre os pontos de um círculo máximo e os pontos de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. (Ver Figura-5)*

Este axioma estabelece um sistema de coordenadas no círculo máximo. Em geral, existem muitas bijeções possíveis, mas, uma vez escolhida uma, ela será mantida, a menos que outra seja, de algum modo, compatível com a primeira.

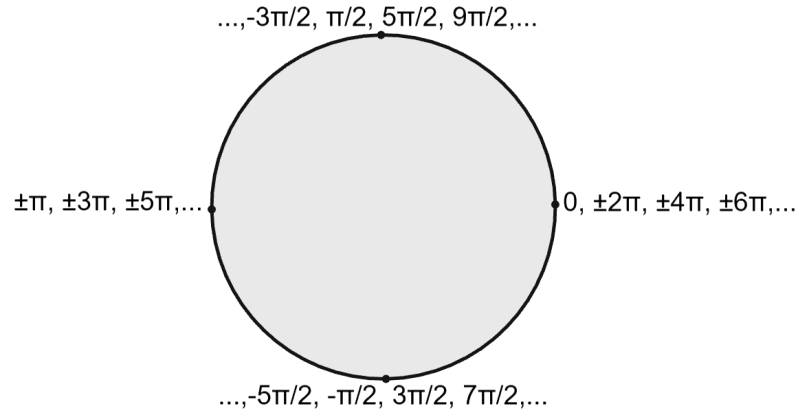


Figura 5 – A rotulagem de um círculo com $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Seja C um círculo máximo e θ é um número real, no qual θ é o comprimento de arco a partir do ponto fixo O ao ponto P , (Ver Figura-6)

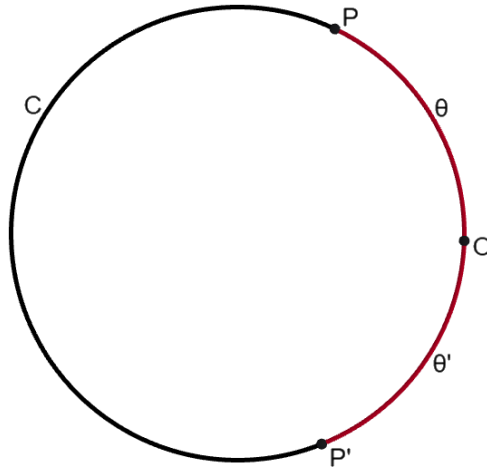


Figura 6 – Lei da função 1

$$P \in C \longrightarrow \theta \in \mathbb{R}$$

$$P' \in C \longrightarrow \theta' \in \mathbb{R}$$

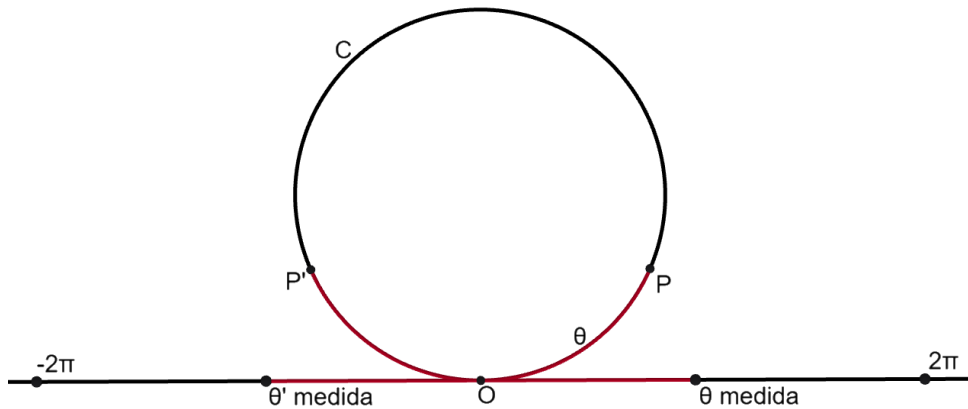


Figura 7 – Transposição para $\mathbb{R}$

Então considere a seguinte função

$$\begin{aligned} f : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto f(P) = \theta, \end{aligned}$$

onde θ é um ângulo em radianos, no qual θ é a medida da distância de um ponto em C em relação a um ponto fixo O . Dando continuidade, consideramos a parametrização de C após uma rotação adequada. Assim

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ \uparrow \gamma & \nearrow & \\ [0, 2\pi] & & \end{array}$$

Note que, a esfera no espaço temos que

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

correspondendo aos pontos em C . Onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Observe que

$$\theta \sim \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos o θ módulo 2π . Desta forma

$$\begin{aligned} f : C &\longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ P &\longmapsto f(P) = \theta \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

A f está bem definida, pois a cada ponto $P \in C$ temos uma única imagem. De fato, tomemos $P \in C$, pela construção da parametrização

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow C \quad \text{é sobrejetiva.}$$

Tomemos $P_1, P_2 \in C$. Como γ é sobrejetiva, existem $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$. Se $P_1 = P_2$ e $\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2)$, então

$$\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2) \quad \text{equivale a} \quad (\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0) = (\cos \theta_2, \sin \theta_2, 0)$$

Logo,

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \cos \theta_2, \\ \sin \theta_1 = \sin \theta_2, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, a única possibilidade é $k = 0$. Logo, $\theta_1 = \theta_2$. Portanto, f está bem definida.

Verifiquemos que f é injetiva. Devemos provar que, se $f(P_1) = f(P_2)$, então $P_1 = P_2$. De fato, pois se $f(P_1) = f(P_2) = \theta$, então $P_1 = \gamma(\theta) = P_2$ daí, $P_1 = P_2$.

Agora verifiquemos que f é sobrejetiva. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, consideremos um $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $\theta_0 \equiv \theta \pmod{2\pi}$. Tome $P = \gamma(\theta)$, por definição

$$f(P) = f(\gamma(\theta)) = \theta_0 \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

Logo, f é sobrejetiva e, em particular, bijetiva.

Desde o ponto de vista intrínseco. A cada $P \in C$, lhe corresponde uma classe $[\theta]$. Assim,

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{[X]; X \in \mathbb{R}, [X] = \{X + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Os elementos desse conjunto serão iguais, se

$$[X] = [Y] \quad \text{se, e só se,} \quad X = Y \pmod{2\pi} \quad \text{é dizer,} \quad X - Y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $X = [X]$ e $Y = [Y]$, definimos a soma e diferença

$$+, - : \underbrace{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}_A \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}_B$$

por

$$X + Y = [X + Y], \quad X - Y = [X - Y].$$

Daí, verifiquemos que a função “+” está bem definida. Tomemos $([X_1], [Y_1])$ e $([X_2], [Y_2])$. Suponhamos que

$$([X_1], [Y_1]) = ([X_2], [Y_2]),$$

isto é,

$$[X_1] = [X_2] \text{ e } [Y_1] = [Y_2].$$

Assim, $X_1 \equiv X_2 \pmod{2\pi}$ e $Y_1 \equiv Y_2 \pmod{2\pi}$, então

$$X_1 + X_2 \equiv Y_1 + Y_2 \pmod{2\pi}, \quad \text{se, e só se,} \quad [X_1 + Y_1] = [X_2 + Y_2],$$

ou seja,

$$+([X_1], [Y_1]) = +([X_2], [Y_2]).$$

Portanto, “+” está bem definida.

Antes de definir formalmente pontos antípodos, recordemos que, intuitivamente, eles são os pontos diametralmente opostos na esfera. A definição a seguir expressa essa ideia utilizando a correspondência biunívoca de um círculo máximo.

Definição 4.1 *Dois pontos P e P' em uma esfera são ditos antípodos se para algum (e portanto, para todo devido a Proposição 4.1) círculo máximo que os contenha, as coordenadas obtidas pela correspondência biunívoca com $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ diferem por $\pi \pmod{2\pi}$. Assim cada ponto é chamado de antípoda do outro e denotamos $P = P'^a$ ou $P' = P^a$.*

A definição de pontos antípodas permite estabelecer algumas de suas propriedades fundamentais. O axioma a seguir garante a unicidade do antípoda de cada ponto, enquanto a proposição mostra que essas relações é preservada em qualquer círculo máximo que contenha o ponto considerado.

Axioma 4.3 *Um ponto na esfera não tem mais de um antípoda.*

Proposição 4.1 *Se um círculo máximo contém um ponto, ele também contém o antípoda desse ponto.*

Demonstração. Dado um círculo máximo Γ e A um ponto pertencente a Γ . Como foi mostrado anteriormente, A está em correspondência com $[\theta]$, isto é,

$$A \mapsto [\theta].$$

Consideremos A^a , um ponto em Γ , tal que, A^a está em correspondência com $[\theta']$

$$A^a \mapsto [\theta'], \text{ onde } \theta' = \theta + \pi.$$

Observe que

$$[\theta - \theta'] = [\theta - (\theta + \pi)] = [\pi], \quad \text{logo} \quad \theta - \theta' \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

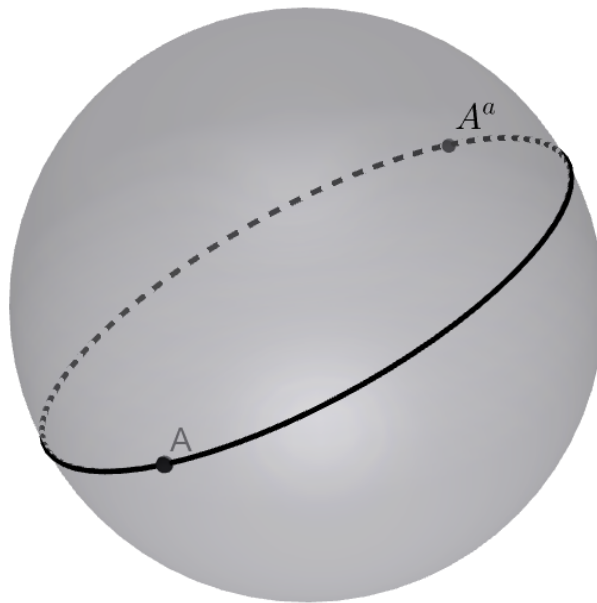


Figura 8 – Ponto e seu Antípoda

Portanto, A e A^a são antípodas entre si. (Ver Figura-8)

□

Proposição 4.2 *Suponhamos que dois pontos sejam antípodas. Dado qualquer círculo máximo que contenha os dois pontos, sua correspondência biunívoca leva os dois pontos a elementos em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ que diferem por π .*

Demonstração. Suponhamos que dois pontos A e B estejam em um círculo máximo Γ , e que A e B estejam em correspondência com as coordenadas $[\theta]$ e $[\theta']$, respetivamente.

$$A \mapsto [\theta] \text{ e } B \mapsto [\theta'].$$

Suponhamos que as coordenadas de A e B em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ não difiram por π , ou seja

$$[\theta - \theta'] \neq [\pi].$$

Consideremos então um outro ponto C pertencente ao círculo máximo Γ que passa por A e B . Como Γ possui uma correspondência do tipo

$$C \mapsto [\theta''], \text{ onde } \theta'' = \theta + \pi,$$

temos que C seria antípoda de A , o que é um absurdo, pois, pelo Axioma 4.3, um ponto não possui mais de um antípoda. Assim, $[\theta - \theta'] = [\pi]$. □

A noção de círculo máximo é central na geometria esférica, pois ele desempenha um papel análogo ao da reta na geometria plana. O axioma a seguir garante que dois pontos distintos não antípodas determinam um único círculo máximo, permitindo introduzir uma notação específica para esse objeto e estabelecer uma de suas propriedades básicas.

Axioma 4.4 *Se dois pontos distintos em uma esfera não são antípodais, então existe um único círculo máximo que passa por eles.*

Definição 4.2 *Se dois pontos distintos A e B não são antípodais, o único círculo máximo que passa por A e B é denotado por $\bigcirc AB$.*

Proposição 4.3 *Por qualquer ponto existe pelo menos um círculo máximo que passa por ele.*

Demonstração. Seja A um ponto na esfera e tomemos um outro ponto qualquer B . Pelo Axioma 4.4, existe um único círculo máximo que passa por eles, isso caso o B não seja antípoda de A . No caso em que o B é antípoda de A , então existem infinitos círculos máximos que passam por eles. Portanto pelo menos um círculo máximo passa por A . □

Proposição 4.4 *Todo ponto da esfera possui um ponto antípoda.*

Demonstração. Seja P um ponto qualquer da esfera. Pelo modelo adotado, existe pelo menos um círculo máximo que passa por P . Pela correspondência biunívoca entre os pontos de um círculo máximo e os pontos de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, existe um $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tal que

$$P = [\theta].$$

Pela definição de antípoda, o ponto correspondente à classe

$$[\theta + \pi]$$

é o antípoda de P . Além disso, pela Proposição 4.3, essa definição independe do círculo máximo escolhido. Portanto, todo ponto da esfera possui um antípoda. $\square$

Os círculos máximos possuem um comportamento semelhante ao das retas no plano, mas com uma diferença fundamental: enquanto duas retas distintas podem ser paralelas, dois círculos máximos distintos sempre se intersectam. Os resultados a seguir descrevem como ocorre essa interseção.

Axioma 4.5 *Dois círculos máximos distintos se encontram em pelo menos um ponto.*

Proposição 4.5 *Dois círculos máximos distintos se encontram em exatamente dois pontos que são antípodas.*

Demonstração. Sejam C e C' círculos máximos e P um ponto que pertence a ambos, isso vale pelo Axioma 4.5. Note que, como foi mostrado se $P \in C$, então $P^a \in C$, mas $P \in C'$, então $P^a \in C'$. Assim P^a pertence tanto a C quanto a C' , desta forma C e C' se encontram em exatamente dois pontos os quais são antípodas. $\square$

Definição 4.3 *Sejam A e B dois pontos, Γ um círculo máximo contendo ambos, com uma correspondência biunívoca ℓ para $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou seja, $\ell(A) = \theta$, onde $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Seja δ o representante da classe de equivalência de $\ell(A) - \ell(B)$ que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$. Então a distância $d(A, B)$ entre A e B é o valor absoluto de δ .*

Note que $d(A, B) = d(B, A)$ porque $(\ell(A) - \ell(B))$ é o negativo de $(\ell(B) - \ell(A))$. Podemos nos perguntar o que acontece se os dois pontos pertencem a mais de um círculo máximo? Poderíamos obter dois valores para a distância entre eles? A resposta é não, pois como foi visto isso só poderia ocorrer se os dois pontos fossem antípodas e desta forma, $\ell(A) - \ell(B)$ deve ser igual a π módulo 2π .

Note que, como $0 \leq d(A, B) \leq \pi$, então $d(A, B) \pm 2\pi$ representa o mesmo elemento em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Note também que $\pm d(A, B) = \ell(A) - \ell(B) \pmod{2\pi}$, de modo que

$$\ell(A) = \ell(B) \pm d(A, B) \pmod{2\pi}.$$

A definição anterior utiliza uma correspondência biunívoca para atribuir coordenadas angulares aos pontos do círculo máximo. Entretanto, essa correspondência não é única. A proposição a seguir mostra que, mesmo escolhendo outra parametrização obtida por uma mudança de orientação ou por uma translação angular, a distância entre os pontos permanece inalterada.

Proposição 4.6 *Dada uma correspondência biunívoca ℓ para um círculo máximo, as funções $-\ell$ e $\ell + k$ (onde k é uma constante) também são correspondências biunívocas no mesmo círculo máximo que induzem a mesma distância $d(\cdot, \cdot)$.*

Demonstração. Seja Γ um círculo máximo e consideremos $A, B \in \Gamma$. Suponhamos que

$$A \mapsto \ell(A) = \theta, \quad B \mapsto \ell(B) = \theta'.$$

Pela definição de distância induzida por $-\ell$

$$d(A, B) = |-\ell(A) - (-\ell(B))| = |-\theta + \theta'|.$$

Agora usando $\ell + k$

$$d(A, B) = |(\theta + k) - (\theta' + k)| = |\theta - \theta'|.$$

Mas $|-\theta + \theta'| = |\theta - \theta'|$, portanto, $-\ell$ e $\ell + k$ induzem exatamente a mesma distância. $\square$

Proposição 4.7 *Seja A um ponto de um círculo máximo Γ . Para cada d tal que $0 < d < \pi$, existem exatamente dois pontos de Γ cuja distância a A é igual a d . Se $d = 0$, existe exatamente um ponto, o próprio A ; e, se $d = \pi$, existe exatamente um ponto, o antípoda de A . Além disso, os dois pontos situados à distância d de A são antípodas entre si se, e somente se, $d = \frac{\pi}{2}$.*

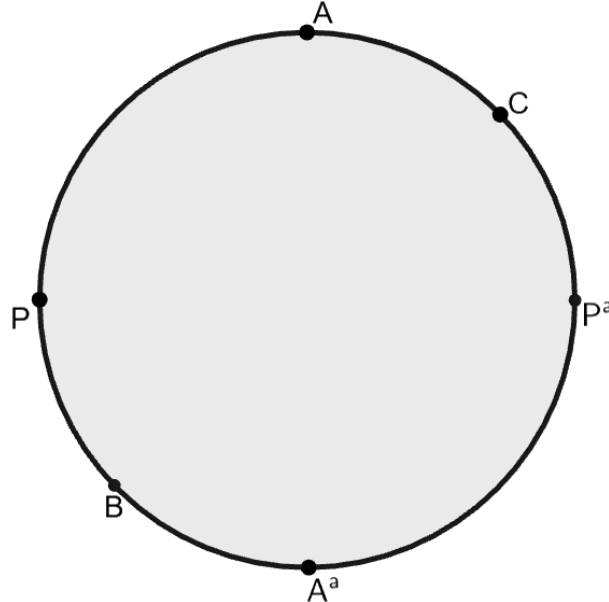


Figura 9 – Relações de distâncias em Γ

Demonstração. Seja Γ um círculo máximo na esfera. Γ é uma curva fechada simples de comprimento 2π (esfera de raio 1) e que a distância esférica entre dois pontos de Γ é o menor dos dois arcos determinados por eles ao longo de Γ .

Fixe $A \in \Gamma$. Parametrize Γ pelo comprimento de arco a partir de A , no sentido horário, obtendo um ponto $P(t)$ para cada $t \in [0, 2\pi)$, com $P(0) = A$ e $P(t)$ percorrendo o círculo no sentido positivo. A distância $d(A, P(t))$ é dada por

$$d(A, P(t)) = \min\{t, 2\pi - t\}$$

porque o arco menor entre A e $P(t)$ pode ser o arco direto de comprimento t ou o arco complementar de comprimento $2\pi - t$.

Agora analisamos a equação $d(A, P(t)) = d$, para $0 \leq d \leq \pi$.

Caso $d = 0$. Temos $\min\{t, 2\pi - t\} = 0$. Isso só ocorre se $t = 0$ ou $t = 2\pi$, que é o mesmo ponto A . Logo, um único ponto.

Caso $d = \pi$. Temos $\min\{t, 2\pi - t\} = \pi$. Isso implica $t \geq \pi$ e $2\pi - t \geq \pi$, donde $t = \pi$. Logo $P(\pi)$ é o único ponto a distância π de A é o antípoda.

Caso $0 < d < \pi$. Precisamos resolver

$$\min\{t, 2\pi - t\} = d.$$

Isso significa que ou $t = d$ (com $t \leq \pi$), ou $2\pi - t = d$ (com $t \geq \pi$). A segunda equação dá $t = 2\pi - d$.

Como $0 < d < \pi$, temos $d \in (0, \pi)$, $2\pi - d \in (\pi, 2\pi)$, e claramente $d \neq 2\pi - d$, pois isso implicaria $d = \pi$, que não é o caso.

Portanto, existem exatamente dois valores distintos de t no intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfazem a equação $t_1 = d$ e $t_2 = 2\pi - d$.

Assim, existem exatamente dois pontos em Γ a distância d de A .

Caso $d = \pi/2$. Temos $t_1 = \pi/2$ e $t_2 = 2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$. A diferença entre eles é

$$t_2 - t_1 = \pi.$$

Em um círculo máximo, dois pontos cujos parâmetros diferem por π são antípodas.

Reciprocamente, se os dois pontos $P(t_1)$ e $P(t_2)$ são antípodas, então a diferença entre seus parâmetros (módulo 2π) é π . Mas sabemos que $t_1 = d$ e $t_2 = 2\pi - d$ (ou vice-versa). A diferença é

$$(2\pi - d) - d = 2\pi - 2d.$$

Para que isso seja π (ou $-\pi$ módulo 2π), temos

$$2\pi - 2d = \pi \quad \Rightarrow \quad d = \pi/2.$$

Assim, a condição de antipodalidade é equivalente a $d = \pi/2$. □

A noção de ponto entre dois outros é fundamental para definir segmentos na geometria esférica. Inicialmente, apresentamos sua definição em termos da distância esférica. Em seguida, mostramos uma caracterização utilizando coordenadas angulares em um círculo máximo e, por fim, estabelecemos uma propriedade de transitividade dessa relação.

Definição 4.4 Dado três pontos distintos A , B e C , dizemos que B está entre A e C se, e somente se, satisfaz

- (i) A e C não são antípodas, e
- (ii) B está em $\bigcirc AC$, e
- (iii) $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

Proposição 4.8 Suponhamos que A , B , e C são pontos. Então B está entre A e C se, e somente se A , B e C estão em um mesmo círculo máximo com uma correspondência biunívoca ℓ tal que $0 < d(A, B) < d(A, C) < \pi$ e

$$\ell(C) = \ell(A) + d(A, C) \pmod{2\pi}, \quad \ell(B) = \ell(A) + d(A, B) \pmod{2\pi}, \quad (1)$$

$$\ell(C) = \ell(A) - d(A, C) \pmod{2\pi}, \quad \ell(B) = \ell(A) - d(A, B) \pmod{2\pi}. \quad (2)$$

Demonstração. Suponhamos que B está entre A e C . Então, pela Definição 4.4 A e C não são antípodas e B está no círculo máximo $\bigcirc AC$. Como A e C não são antípodas, para determinar o círculo máximo $\bigcirc AC$ com uma correspondência biunívoca ℓ e B em $\bigcirc AC$ como na equação (1), devemos ter $\ell(C) = \ell(A) \pm d(A, C)$ e $\ell(B) = \ell(A) \pm d(A, B) \pmod{2\pi}$, nas quatro possíveis combinações de sinais.

Sejam A e C são distintos e não antípodas, $0 < d(A, C) < \pi$.

Se A e B são distintos e A e C não são antípodas, $0 < d(A, B) < d(A, C) < \pi$.

Sem perda de generalidade podemos assumir $\ell(C) = \ell(A) + d(A, C) \pmod{2\pi}$; o caso $\ell(C) = \ell(A) - d(A, C) \pmod{2\pi}$ é similar (ou podemos substituir ℓ por $-\ell$, pela Proposição 4.6).

Então, $\ell(B) = \ell(A) - d(A, B) \pmod{2\pi}$, logo

$$\ell(C) + \ell(B) = 2\ell(A) + d(A, C) - d(A, B) \pmod{2\pi},$$

e como B está entre A e C , $d(A, C) - d(A, B) = d(B, C)$.

Agora, como $d(B, C) = \pm(\ell(B) - \ell(C))$ reduzido módulo 2π .

Se $d(B, C) = \ell(B) - \ell(C) \pmod{2\pi}$, então $\ell(C) + \ell(B) = 2\ell(A) + \ell(B) - \ell(C) \pmod{2\pi}$, logo $2\ell(C) = 2\ell(A) \pmod{2\pi}$, daí segue que $2(\ell(C) - \ell(A)) = 0 \pmod{2\pi}$, portanto $\ell(C) - \ell(A) = 0$ ou π módulo 2π . Assim A e C são idênticos ou antípodas, chegando a uma contradição.

Se $d(B, C) = \ell(C) - \ell(B) \pmod{2\pi}$, então um argumento similar demonstra que $2(\ell(B) - \ell(A)) = 0 \pmod{2\pi}$, assim A e B são idênticos ou antípodas, outra contradição, já que $0 < d(A, B) < \pi$.

Reciprocamente, suponhamos que A , B e C estão em um círculo máximo com correspondência biunívoca ℓ , $0 < d(A, B) < d(A, C) < \pi$ e (1). Então A , B e C são distintos e A e C não são antípodas. Subtraindo essas duas equações,

$$\ell(C) - \ell(B) = d(A, C) - d(A, B) \pmod{2\pi}.$$

Agora $0 < d(A, C) - d(A, B) < d(A, C) < \pi$. Então $\ell(C) - \ell(B)$ reduzido módulo 2π é $d(A, C) - d(A, B) > 0$. Portanto,

$$d(B, C) = d(A, C) - d(A, B) \quad \text{e} \quad d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$

como desejado. □

Proposição 4.9 *Se C está entre A e D , e B está entre A e C , então B está entre A e D e C está entre B e D .*

Demonstração. Se C está entre A e D , então aplicamos a Proposição 4.8 para concluir que (1) ou (2) vale. Assim podemos assumir (1) de modo que

$$\ell(D) = \ell(A) + d(A, D) \quad \text{e} \quad \ell(C) = \ell(A) + d(A, C) \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (3)$$

$$\text{Com } 0 < d(A, C) < d(A, D) < \pi$$

Podemos aplicar a Proposição 4.8 para assumir que $\ell(B)$ está entre $\ell(A)$ e $\ell(C)$; então somos forçados a concluir que

$$\ell(B) = \ell(A) + d(A, B) (\text{mod } 2\pi)$$

Mas então $\ell(B) = \ell(A) + d(A, B) \quad \text{e} \quad \ell(D) = \ell(A) + d(A, D) \quad (\text{mod } 2\pi)$ e assim B está entre A e D , pois pela Proposição 4.8. Então B está entre A e D .

Agora, $d(A, D) = d(A, B) + d(B, D)$ e já temos pela hipótese que B está entre A e C , então

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Logo,

$$d(A, D) = d(A, B) + d(B, C) + d(C, D).$$

Assim, a primeira equação em (3) fica

$$\begin{aligned} \ell(D) &= \ell(A) + d(A, D) \\ &= \ell(B) - d(A, B) + d(A, D) \\ &= \ell(B) + d(B, D) \quad \text{e} \end{aligned}$$

Analogamente, para a segunda equação em (3) temos

$$\begin{aligned} \ell(C) &= \ell(A) + d(A, C) \\ &= \ell(B) - d(A, B) + d(A, C) \\ &= \ell(B) + d(B, C) (\text{mod } 2\pi) \end{aligned}$$

Então,

$$\ell(D) = \ell(B) + d(B, D) (\text{mod } 2\pi).$$

$$\ell(C) = \ell(B) + d(B, C) \pmod{2\pi}.$$

Então pela Proposição 4.8, C está entre B e D . $\square$

Com a noção de "estar entre" estabelecida, podemos definir o arco esférico como a porção de um círculo máximo compreendida entre dois pontos não antípodas. A partir dessa definição, também introduzimos o conceito de congruência entre arcos.

Definição 4.5 *Dados dois pontos não-antípodas A e B , o arco esférico $\widehat{AB}$ é o conjunto de todos os pontos no $\bigcirc AB$ que estão entre A e B . A medida do $\widehat{AB}$ é $d(A, B)$.*

Definição 4.6 *Dois arcos esféricos são ditos congruentes se possuem a mesma medida. Se os dois arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são congruentes, então escrevemos $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$.*

Até o momento, os conceitos apresentados foram desenvolvidos a partir das propriedades dos círculos máximos e da distância esférica. Introduzimos agora a noção de polo de um círculo máximo. Do ponto de vista extrínseco (ver Apêndice), os polos são obtidos pela interseção da reta perpendicular ao plano que contém o círculo máximo, passando pelo centro da esfera, com a própria esfera. Neste capítulo, porém, essa noção será caracterizada exclusivamente por propriedades intrínsecas da geometria esférica.

Axioma 4.6 *Para qualquer círculo máximo, existe um ponto tal que o círculo máximo consiste em pontos a uma distância esférica de $\frac{\pi}{2}$ a partir do ponto dado. Tal ponto é definido como um polo do círculo máximo.*

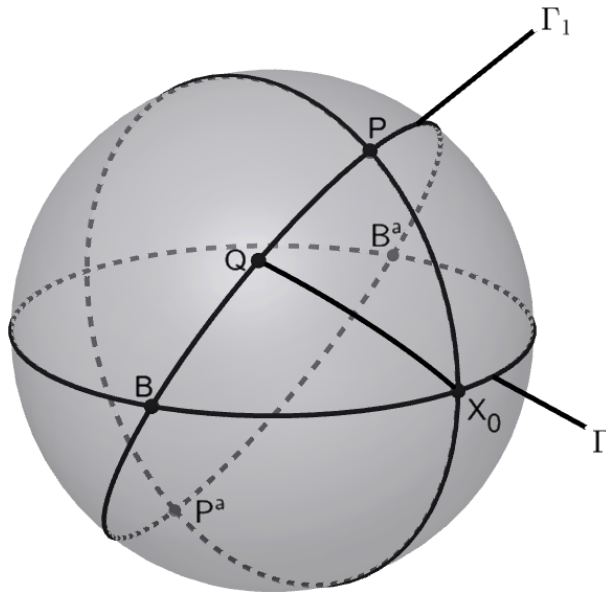


Figura 10 – O antípoda de um polo no Axioma 4.6

A proposição seguinte mostra que cada círculo máximo possui exatamente dois polos, que são antípodas entre si.

Proposição 4.10 *O antípoda de um polo no Axioma 4.6 é o único outro ponto que satisfaz a mesma propriedade.*

Demonstração.

Seja Γ um círculo máximo e, pelo Axioma 4.6, P um polo de Γ . Então $d(P, X) = \pi/2$ para todo $X \in \Gamma$ (Ver Figura-10). Seja P^a o antípoda de P . Então $d(P^a, X) = \pi - d(P, X) = \pi - \pi/2 = \pi/2$ para todo $X \in \Gamma$. Logo, P^a também é polo de Γ .

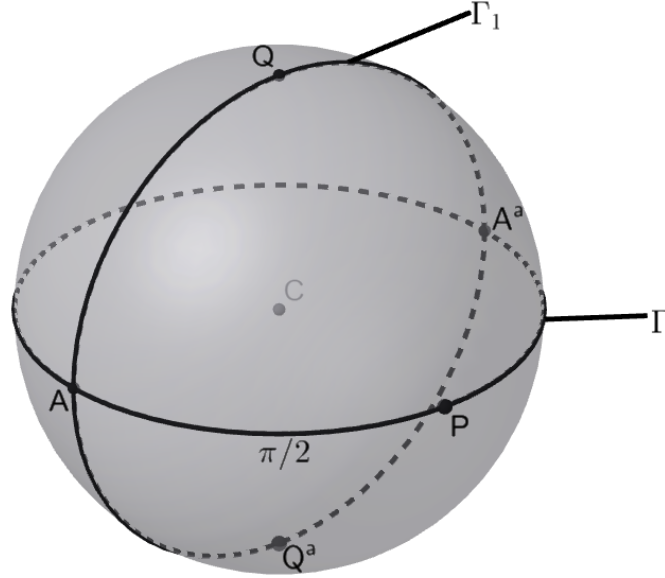


Figura 11 – O único outro ponto que satisfaz a mesma propriedade

Agora, suponhamos que Q seja outro polo de Γ . Então $d(Q, X) = \pi/2$ para todo $X \in \Gamma$. Em particular, para um $X_0 \in \Gamma$, temos $d(Q, X_0) = \pi/2$ e $d(P, X_0) = \pi/2$. Mas, um círculo máximo é o conjunto de pontos a uma distância $\pi/2$ de um dado P . Seja Γ_1 o círculo máximo que contem P e Q . Sejam B e B^a os pontos de interseção entre Γ e Γ_1 . Da Proposição 4.5 sabemos que dois círculos máximos distintos se intersectam em dois pontos antípodas. Como P e Q estão ambos a $\pi/2$ do ponto X_0 , eles pertencem ao mesmo círculo máximo relativo a X_0 . Mas também estão a $\pi/2$ de todo ponto de Γ , em particular $d(Q, B) = d(Q, B^a) = \pi/2$. Isso força $Q = P$ ou $Q = P^a$. Logo, só há dois polos, que são antípodas (Ver Figura-11).

□

Os teoremas a seguir mostram a estreita relação entre os círculos máximos e seus polos, evidenciando que cada um determina o outro de maneira natural.

Teorema 4.1 *Um círculo máximo é o conjunto de todos os pontos na esfera à distância esférica de um quarto de círculo ou seja $\pi/2$ do seu polo.*

Demonstração. Pela definição de polo, todos os pontos no círculo máximo (chame-o de Γ) estão à distância $\pi/2$ de um polo. Reciprocamente, suponhamos que Q seja um ponto a um quarto de círculo do polo P . Então, existe um círculo máximo passando por P e Q .

Assim, $\odot PQ$ é distinto de Γ já que P não está em Γ . Segue-se que $\odot PQ$ encontra Γ em dois pontos A e A^a . Portanto em Γ , Q está à distância $\frac{\pi}{2}$ de P e pela definição de Q , A e A^a são ambos à distância $\frac{\pi}{2}$ em relação a P . Pela Proposição 4.7, Q deve ser o mesmo que A ou A^a . Isso coloca Q em Γ . $\square$

Teorema 4.2 *Todo ponto na esfera é um polo de algum círculo máximo.*

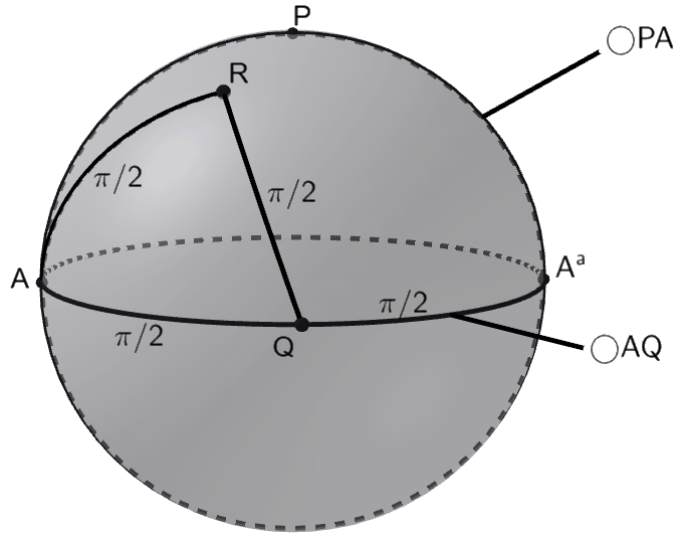


Figura 12 – Diagrama para a prova do teorema

Demonstração. Seja P um ponto qualquer. Existe um círculo máximo $\odot PA$ passando por P . Seja Q um dos polos do $\odot PA$. Existem então dois pontos (antípodas) A e A^a neste círculo máximo $\odot PA$ à distância $\frac{\pi}{2}$ de P (usando a correspondência biunívoca entre o círculo máximo e $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) (Ver Figura-12).

Como Q está à distância $\frac{\pi}{2}$ de A , ele não é antípoda de A , então existe um único círculo máximo $\odot AQ$ passando por Q e A . Note que todos A , A^a e Q estão à distância $\frac{\pi}{2}$ de P .

Iremos provar que o círculo $\odot AQ$ é o conjunto de todos os pontos à distância esférica $\frac{\pi}{2}$ de P . Consideremos R um polo do $\odot AQ$. Então provamos que $R = P$ ou $R = P^a$. De fato, como R é um polo do $\odot AQ$ e esta à distância de um quarto de círculo de Q . Por outro lado, como Q é um polo do $\odot PA$ e R um polo do $\odot AQ$, então R pertence ao $\odot PA$.

No $\odot PA$, R também está a um quarto de círculo de A pois é polo do $\odot AQ$, então R deve ser P ou P^a . $\square$

Definição 4.7 *Dado um ponto P na esfera, dizemos que um círculo máximo Γ que tem P como polo é chamado de polo circular ou polo do ponto.*

Proposição 4.11 *Sejam A, B, C pontos em uma esfera e os arcos $\widehat{BA}$ e $\widehat{BC}$ ambos medindo um quartos de círculo. Se A e C são distintos e não antípodas. Então B é um polo do círculo máximo $\odot AC$.*

Demonstração. Como $\widehat{BA} = \widehat{BC} = \frac{\pi}{2}$, então o ponto B é o polo de algum círculo máximo Γ que contém A e C . Mas existe apenas um tal círculo máximo $\odot AC$ pois A e C são distintos e nem antípodas. $\square$

Com o conceito de polo estabelecido, podemos introduzir uma nova classe de curvas na esfera: os círculos mínimos. Diferentemente dos círculos máximos, eles são determinados por um centro e por um raio esférico menor que $\frac{\pi}{2}$.

Definição 4.8 *Um círculo mínimo em uma esfera é o conjunto de todos os pontos na esfera a uma distância esférica fixa $\rho < \frac{\pi}{2}$ de um ponto P . O ponto P é chamado de centro do círculo mínimo, e a quantidade ρ é chamada de raio esférico do círculo mínimo. O conjunto de todos os pontos cuja distância a P é menor que ρ é chamado de interior do círculo mínimo.*

A seguir, introduzimos o conceito de semirreta esférica, análogo ao da geometria plana, porém definido sobre um círculo máximo.

Definição 4.9 *Sejam A e B dois pontos em uma esfera que não são antípodas. Então a semirreta esférica $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os pontos C no círculo máximo $\odot AB$ tal que C está em $\widehat{AB}$ ou C está em $\widehat{BA}^a$. Dizemos que A é o vértice ou ponto inicial da semirreta esférica. A semirreta aberta com vértice A através de B consiste de todos os pontos em $\overrightarrow{AB}$ exceto A .*

A proposição seguinte fornece uma descrição analítica da semirreta esférica por meio das coordenadas angulares de seus pontos.

Proposição 4.12 *Se A e B não são antípodas e*

$$d(A, B) = \ell(B) - \ell(A) \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad d(A, B) = \ell(A) - \ell(B) \pmod{2\pi},$$

então $\overrightarrow{AB}$ consiste de todos os pontos C tais que

$$\ell(C) = \ell(A) + x \pmod{2\pi}$$

no primeiro caso, e

$$\ell(C) = \ell(A) - x \pmod{2\pi}$$

no segundo caso, onde $0 \leq x < \pi$.

Demonstração. Basta notar que o x corresponde a $d(A, C)$. $\square$

A caracterização da semirreta esférica obtida na proposição anterior permite concluir imediatamente o resultado a seguir.

Corolário 4.1 *Dada qualquer semirreta esférica $\overrightarrow{AB}$ e um número real x , $0 \leq x < \pi$, existe um único ponto C de $\overrightarrow{AB}$ tal que $d(A, C) = x$.*

Demonstração. Decorre da unicidade da função biunívoca 4.2 provada no início. $\square$

Assim como na geometria plana, duas semirretas com a mesma origem podem possuir sentidos opostos. Na geometria esférica, essa ideia é descrita por meio do grande semicírculo determinado por elas.

Definição 4.10 Dizemos que as semirretas esféricas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se C não está no grande semicírculo $\widehat{ABA^a}$, mas A , B e C pertencem a um mesmo círculo máximo (Ver Figura-13).

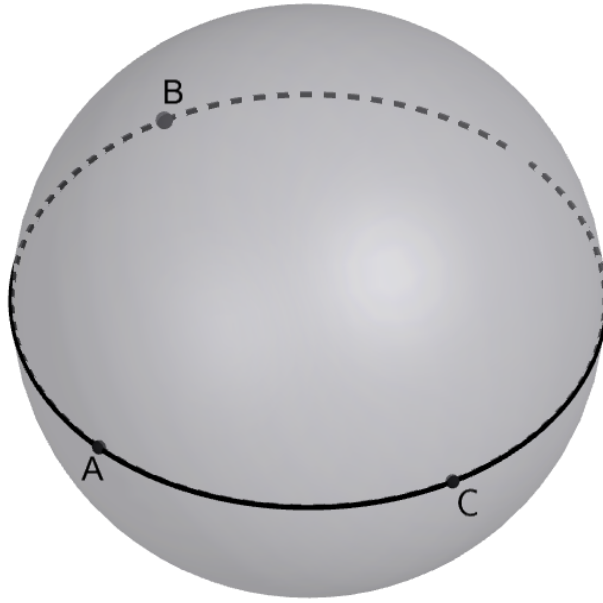


Figura 13 – Três semirretas esféricas do mesmo círculo máximo

Os resultados a seguir descrevem algumas propriedades fundamentais das semirretas esféricas e introduzem o conceito de grande semicírculo, que será utilizado na definição de semirretas opostas.

Corolário 4.2 Se C é ponto de $\overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$.

Demonstração. De fato isso ocorre pelo simples detalhe de que $C \in \overrightarrow{AB}$, pois caso $C \notin \overrightarrow{AB}$ teríamos que C e A formariam uma semirreta $\overrightarrow{CA}$, na qual pela Definição 4.10 seria oposta a $\overrightarrow{AB}$ e consequentemente diferente, mas como $C \in \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$. $\square$

Para formalizar a noção de semirretas opostas, definimos o grande semicírculo associado a uma semirreta esférica.

Definição 4.11 Seja A um ponto sobre a esfera e seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta esférica com vértice em A . Então, o grande semicírculo $\widehat{ABA^a}$ é definido como a união da semirreta $\overrightarrow{AB}$ com o ponto antípoda A^a . Isto é, $\widehat{ABA^a} = \overrightarrow{AB} \cup \{A^a\}$.

A proposição seguinte mostra que o grande semicírculo pode ser descrito como a união de dois arcos esféricos consecutivos.

Proposição 4.13 *O grande semicírculo $\widehat{ABA^a}$ é a união dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BA^a}$.*

Demonstração. Seja $\widehat{ABA^a}$ o semicírculo máximo. Como B é um ponto sobre o arco do semicírculo de A até A^a , então B está entre A e A^a nesse arco. Logo a distância esférica é aditiva, isto é

$$d(A, A^a) = d(A, B) + d(B, A^a).$$

Ou seja,

$$\widehat{ABA^a} = \widehat{AB} \cup \widehat{BA^a}.$$

□

Por fim, apresentamos uma propriedade importante da interseção de duas semirretas esféricas com sentidos opostos.

Proposição 4.14 *A interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ é $\widehat{AB}$.*

Demonstração. Sejam A^a e B^a os pontos antípodas de A e B na esfera. Pela Proposição 4.13, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ estão contidas nos semicírculos $\widehat{ABA^a}$ e $\widehat{BAB^a}$, respetivamente. Ou seja,

$$\widehat{ABA^a} = \widehat{AB} \cup \widehat{BA^a}, \quad \text{e} \quad \widehat{BAB^a} = \widehat{BA} \cup \widehat{AB^a}.$$

Note que, $\widehat{AB} = \widehat{BA}$ e que os arcos $\widehat{BA^a}$ e $\widehat{AB^a}$ intersectam $\widehat{AB}$, unicamente nos extremos A e B , respetivamente. Como as semirretas não incluem os pontos antípodas, A^a nem B^a , então eles também não pertencem a interseção das semirretas. Além disso, $\widehat{BA^a}$ e $\widehat{AB^a}$ são disjuntos entre si e nenhum deles pertence simultaneamente as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, pois BA^a não está incluído em $\overrightarrow{BA}$ nem AB^a está incluído em $\overrightarrow{AB}$. Portanto, a interseção $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ reduz-se exatamente ao arco comum $\widehat{AB}$. □

Observemos que uma semirreta esférica não contém pares de pontos antípodas. Além disso, o conjunto dos antípodas de seus pontos forma outra semirreta esférica no mesmo círculo máximo, cujo vértice é o antípoda do vértice da semirreta original. Dessa forma, cada ponto do círculo máximo pertence à semirreta ou tem seu antípoda pertencente a ela, mas nunca ambos.

Assim como na geometria plana, os arcos esféricos também possuem um ponto que os divide em duas partes de mesma medida. Esse ponto recebe o nome de ponto médio do arco.

Definição 4.12 *O único ponto de um arco esférico cuja distância esférica até as extremidades é a mesma é chamado de ponto médio do arco.*

A proposição a seguir descreve uma propriedade importante da interseção entre uma semirreta esférica e um círculo máximo.

Proposição 4.15 *Uma semirreta esférica $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e um círculo máximo Γ_1 intersectam-se em exatamente um ponto, a menos que a semirreta esteja contida no círculo máximo.*

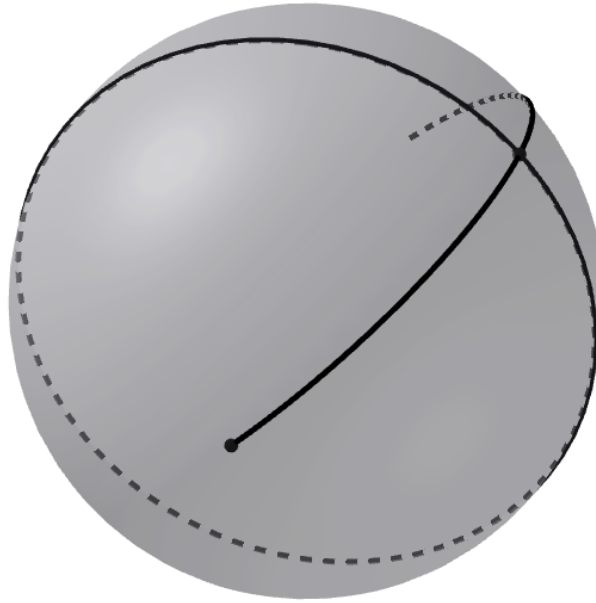


Figura 14 – Interseção de uma semirreta esférica com um círculo máximo

Demonstração. Sejam $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ uma semirreta esférica e Γ_1 um círculo máximo (ver Figura 14).

Se $\vec{r} \subset \Gamma_1$, então a interseção é a própria semirreta, ou seja, infinitos pontos; porém, esse caso é excluído pela hipótese da proposição. Suponhamos, então, que $\vec{r} \not\subset \Gamma_1$. Seja Γ_2 o único círculo máximo que contém $\vec{r}$. Como Γ_1 e Γ_2 são distintos, eles se intersectam em dois pontos antípodas, que denotaremos por P e P^a .

Os pontos P e P^a dividem Γ_2 em dois semicírculos. A semirreta $\vec{r}$ está contida em exatamente um desses semicírculos - a saber, aquele que contém a origem A e se estende até o ponto antípoda A^a . Como P e P^a são antípodas, eles não podem pertencer ambos ao mesmo semicírculo aberto. Portanto, o semicírculo que contém $\vec{r}$ contém exatamente um dos dois pontos P ou P^a . Consequentemente, a interseção $\vec{r} \cap \Gamma_1$ é exatamente esse único ponto.

Portanto, a semirreta esférica e o círculo máximo intersectam-se em exatamente um ponto, a menos que a semirreta esteja contida no círculo máximo. $\square$

Até o momento, foram estudados objetos definidos sobre círculos máximos. A seguir, introduzimos o conceito de hemisfério, que permitirá descrever regiões da esfera e estabelecer propriedades importantes de conjuntos esféricos.

Definição 4.13 *O conjunto de todos os pontos que estão a menos de um quarto de círculo de um ponto dado é chamado um hemisfério. E o ponto dado é chamado de centro do hemisfério.*

Os hemisférios determinados pelos polos de um círculo máximo permitem distinguir os dois lados desse círculo e caracterizar a posição relativa de pontos na esfera.

Definição 4.14 *Dado um círculo máximo com polos A, A' , os hemisférios com centros em A e A' são chamados de lados do círculo máximo. A borda de cada hemisfério é chamada de círculo polar. Quando dois pontos estão no mesmo hemisfério dizemos que eles estão no mesmo hemisfério do círculo máximo. Se um ponto está no hemisfério centrado em A e o outro ponto está no hemisfério centrado em A' , dizemos que os pontos estão em hemisférios opostos do círculo máximo.*

Seja A um ponto da esfera. Então, todo ponto da esfera pertence ao hemisfério centrado em A , ao hemisfério centrado em A' , ou ao círculo polar de A . Além disso, um hemisfério não contém pares de pontos antípodas, e o antípoda de qualquer ponto pertencente ao hemisfério centrado em A pertence ao hemisfério centrado em A' .

Com a noção de hemisfério estabelecida, podemos introduzir um importante conceito da geometria esférica: a convexidade esférica. Esse conceito generaliza a ideia de convexidade da geometria plana, substituindo segmentos de reta por arcos de círculos máximos.

Definição 4.15 *Um subconjunto da esfera é dito ser esfericamente convexo se, para todo par de pontos não antípodas, o arco (único) entre eles está contido no subconjunto dado.*

A proposição seguinte apresenta exemplos de conjuntos esfericamente convexos que serão utilizados com frequência nos resultados posteriores.

Proposição 4.16 *Um círculo máximo e uma semirreta esférica são esfericamente convexos.*

Demonstração. Dados dois pontos não antípodas sobre um círculo máximo, o arco esférico entre eles é um subconjunto do círculo máximo por definição, portanto o círculo máximo é esfericamente convexo.

Por outro lado, seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta esférica e consideremos nela dois pontos C e D . Pela Proposição 4.9, se $\ell(B) - \ell(A) = d(A, B) \pmod{2\pi}$, então os pontos C e D de $\overrightarrow{AB}$ satisfazem $\ell(C) = \ell(A) + d(A, C) \pmod{2\pi}$ e $\ell(D) = \ell(A) + d(A, D) \pmod{2\pi}$, onde podemos supor sem perda de generalidade que $d(A, C) < d(A, D)$, de modo que $0 \leq d(A, C) < d(A, D) < \pi$. Suponhamos que E está entre C e D . Então, como ou $C = A$ ou C está entre A e D , E também deve estar entre A e D (pela Proposição 4.9). Como $\ell(D) = \ell(A) + d(A, D) \pmod{2\pi}$, então pela Proposição 4.8, $\ell(E) = \ell(A) + d(A, E) \pmod{2\pi}$ para $0 < d(A, E) < d(A, D) < \pi$. Então, pela Proposição 4.12, E está sobre $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$. Se $\ell(A) - \ell(B) = d(A, B) \pmod{2\pi}$, o argumento é análogo. $\square$

A convexidade esférica possui propriedades semelhantes às da geometria plana. O axioma a seguir estabelece que os hemisférios constituem exemplos fundamentais de conjuntos esfericamente convexos.

Axioma 4.7 *Um hemisfério é esfericamente convexo.*

Além disso, veremos que o interior de um círculo mínimo também é esfericamente convexo. Veremos ainda que a interseção de conjuntos esfericamente convexos permanece esfericamente convexa. Assim, a partir de hemisférios e interiores de círculos mínimos, é possível construir diversos outros conjuntos esfericamente convexos.

As proposições seguintes descrevem algumas consequências da convexidade dos hemisférios e da posição relativa dos pontos em relação aos círculos máximos.

Proposição 4.17 *Se dois pontos estão em hemisférios opostos de um círculo máximo e não são antípodas, o arco entre eles encontra o círculo máximo.*

Demonstração. Sejam A e B os pontos e Γ o círculo máximo dado. Como A e B estão em hemisférios opostos de Γ , A e B^a estão no mesmo hemisfério de Γ . Assim, o arco $\widehat{AB^a}$ não encontra Γ . Mas $\overrightarrow{B^aA}$ encontra Γ em um único ponto $C \in \Gamma$, que deve estar entre A e B ou seja um ponto em $\widehat{AB}$, como desejado. $\square$

Proposição 4.18 *Seja $\odot AB$ um círculo máximo e seja C um ponto que não pertence a esse círculo. Então, todos os pontos do arco $\widehat{AC}$, com exceção de A , estão no mesmo hemisfério determinado por $\odot AB$ que o ponto C .*

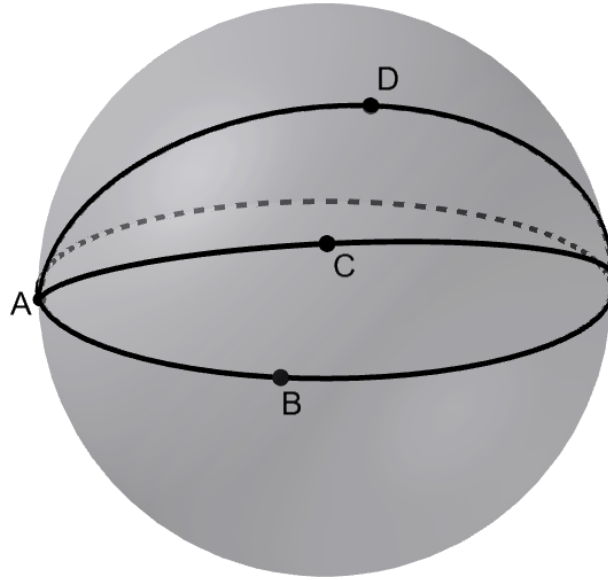


Figura 15 – Os pontos de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ ficam no mesmo hemisfério do $\odot AB$, exceto A

Demonstração. Queremos mostrar que $\widehat{AC} \setminus \{A\}$ está contido no hemisfério com fronteira $\odot AB$ que contém o ponto C .

Suponhamos que $X \neq A$ pertença a $\widehat{AC}$ e também a $\odot AB$. Se $X \in \widehat{AC} \cap \odot AB$, então todo o arco $\widehat{AX}$ está contido em $\odot AB$ pois o círculo máximo é esfericamente convexo. Mas, note que $\widehat{AX}$ é um subarco de $\widehat{AC}$. Logo, $\widehat{AC}$ está contido em $\odot AB$. Isso

implica $C \in \odot AB$, contradizendo a hipótese ($C \notin \odot AB$). Portanto nenhum ponto de $\widehat{AC}$ (diferente de A) está em $\odot AB$. Ou seja, $\widehat{AC} \cap \odot AB = \{A\}$.

Por outro lado, suponhamos, por absurdo, que existe $X \in \widehat{AC}$, $X \neq A$, tal que X está no hemisfério oposto ao de C . Pela Proposição 4.17 o arco $\widehat{CX}$ encontra $\odot AB$ em algum ponto Y . Como $\widehat{AC}$ é esfericamente convexo, e $C, X \in \widehat{AC}$, então todo o arco $\widehat{CX}$ está contido em $\widehat{AC}$. Portanto, $Y \in \widehat{AC} \cap \odot AB$.

Sabemos que, $\widehat{AC} \cap \odot AB = \{A\}$. Logo, $Y = A$. Note que, A é extremo de $\widehat{AC}$ e $C \neq A$, e X está entre A e C no arco, então o arco $\widehat{CX}$ não contém A . O que é uma contradição. Assim, a suposição de que existe X no hemisfério oposto é falsa. Portanto, todo $X \in \widehat{AC}$ com $X \neq A$ está no mesmo hemisfério que C . $\square$

Encerramos este capítulo introduzindo a noção de tangência entre círculos na esfera, conceito que será útil para o estudo das propriedades dos círculos mínimos.

Definição 4.16 Dizemos que dois círculos são tangentes se encontram-se em um único ponto. Esse ponto é chamado de ponto de tangência. Uma corda de um círculo mínimo é um arco esférico entre dois pontos do círculo mínimo.

Como dois círculos máximos distintos sempre se intersectam em dois pontos antípodas, a tangência entre dois círculos só pode ocorrer quando pelo menos um deles é um círculo mínimo.

4.2 ÂNGULOS

Neste capítulo introduzimos o conceito de ângulo esférico e sua medida. Assim como na geometria plana, o objetivo é quantificar a abertura entre duas semirretas; entretanto, na geometria esférica essa construção é realizada sobre círculos máximos.

Definição 4.17 Sejam A, B e C pontos de uma esfera que não pertencem a um mesmo círculo máximo. Então, o ângulo (esférico) $\sphericalangle ABC$, com vértice em B , é a união das semirretas esféricas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Essas semirretas esféricas ou raios esféricos são chamados os lados do ângulo. O interior do ângulo é a interseção de dois hemisférios: o lado do $\odot AB$ que contém C e o lado do $\odot BC$ que contém A .

A condição de que os pontos A, B e C não pertençam ao mesmo círculo máximo garante que as semirretas esféricas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ não coincidem nem são opostas, caracterizando um ângulo propriamente dito.

Na geometria plana, a medida de um ângulo é obtida por meio de um transferidor, que pode ser visto como um círculo graduado centrado no vértice do ângulo. A medida corresponde ao arco compreendido entre os pontos de interseção dos lados do ângulo com esse círculo. Na geometria esférica, a ideia é análoga: utilizamos um círculo polar para determinar a medida do ângulo.

Com essa motivação, podemos definir rigorosamente a medida de um ângulo esférico.

Definição 4.18 *Seja o $\sphericalangle ABC$ um ângulo esférico. Escolhamos pontos D e E em $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, que estejam ambos a um quarto de círculo de B . Então a medida do $\sphericalangle ABC$ é definida como $\widehat{DE}$. (Ver Figura-16)*

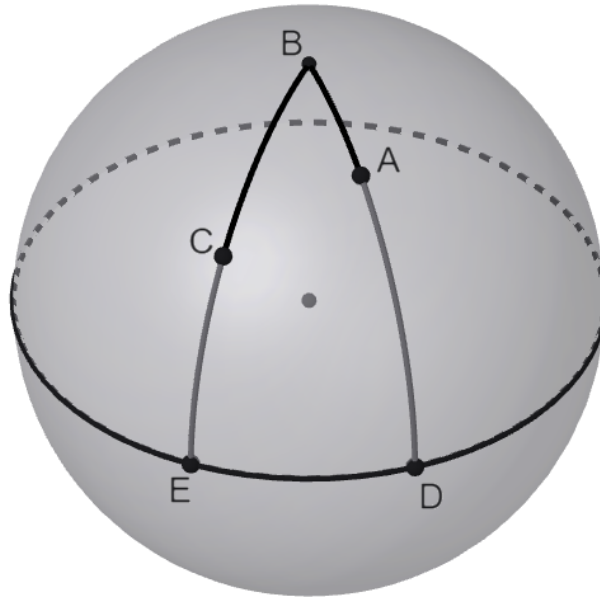


Figura 16 – Medida do ângulo $\sphericalangle ABC$

A construção anterior mostra que o círculo polar de B , representado por $\odot DE$, desempenha o papel do transferidor na geometria plana, tendo B como seu centro. Dessa forma, a medida do ângulo esférico corresponde à medida do arco determinado pelos pontos D e E nesse círculo.

Assim como na geometria plana, dizemos que o $\sphericalangle ABC$ é agudo, reto ou obtuso quando sua medida é, respectivamente, menor que, igual a, ou maior que $\frac{\pi}{2}$.

Uma vez definida a medida dos ângulos esféricos, podemos estabelecer as noções de congruência, suplementaridade e complementaridade.

Definição 4.19 *Dois ângulos esféricos são ditos congruentes quando possuem a mesma medida. Nesse caso, se os ângulos são $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle DEF$, escrevemos $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$. Além disso, dois ângulos esféricos são ditos suplementares quando a soma de suas medidas é igual a π radianos e complementares quando essa soma é igual a $\frac{\pi}{2}$ radianos.*

A proposição seguinte apresenta uma propriedade importante dos ângulos formados por semirretas esféricas opostas, análoga ao caso da geometria plana.

Proposição 4.19 *Suponhamos que os $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBC$ sejam tais que $\overrightarrow{BA}$ é oposto a $\overrightarrow{BD}$. Então os $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBC$ são suplementares.*

Demonstração. Escolhamos pontos E, F e G em $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ tais que $\widehat{BE} = \widehat{BF} = \widehat{BG} = \frac{\pi}{2}$ (Ver Figura-17). Como $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$ são opostos, E e G estão a um semicírculo de distância no mesmo círculo máximo, logo $E = G^a$. Todos os pontos E, F e G pertencem ao círculo polar de B . F não pode coincidir com E nem com G , pois caso contrário nem o $\sphericalangle ABC$ nem o $\sphericalangle DBC$ seriam ângulos. Então $\widehat{EFG}$ forma um grande semicírculo tal que $\widehat{EF} + \widehat{FG} = \pi$, logo $\sphericalangle ABC + \sphericalangle DBC = \pi$. Portanto, o $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBC$ são suplementares. $\square$

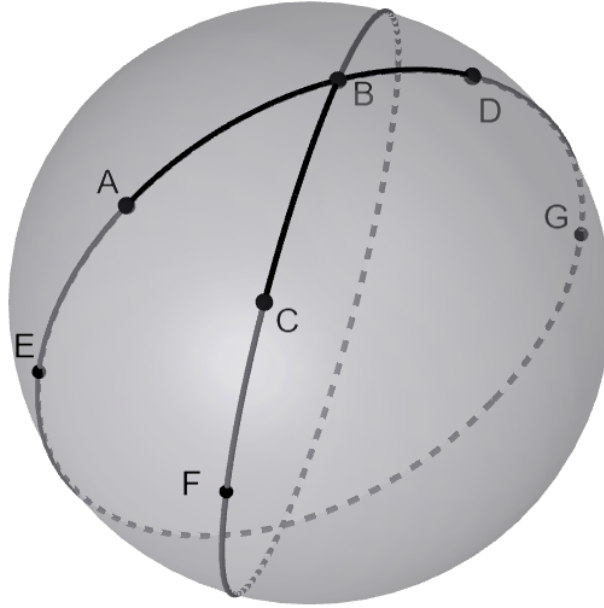


Figura 17 – Relacionando o $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBC$ como suplementares

Após definir a medida dos ângulos esféricos, introduzimos algumas relações importantes entre eles. A primeira delas é a noção de ângulos verticais, análoga à existente na geometria plana.

Definição 4.20 *Suponhamos que sejam dados os $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBE$ tais que $\overrightarrow{BA}$ é oposto a $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BC}$ é oposto a $\overrightarrow{BE}$. Então o $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBE$ são ditos ângulos verticais, ou seja, os ângulos são opostos pelo vértice.*

Assim como na geometria plana, os ângulos verticais possuem a mesma medida, conforme estabelece a proposição a seguir.

Proposição 4.20 *Ângulos verticais são congruentes.*

Demonstração. Se o $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBE$ são verticais como na Definição 4.20, então o $\sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle DBE$ são ambos suplementares ao $\sphericalangle CBD$, logo devem ser congruentes. $\square$

Introduzimos agora um objeto característico da geometria esférica: a lúnula. Ela é uma região da esfera delimitada por dois semicírculos máximos e está diretamente relacionada à medida de um ângulo esférico.

Definição 4.21 Uma lúnula é a união de um ângulo com o antípoda de seu vértice. A medida de uma lúnula é a medida de seu ângulo associado. Se o ângulo é o $\sphericalangle ABC$, então usamos a notação BCB^aAB para nos referir a essa lúnula. Os pontos B e B^a são os vértices da lúnula. (Ver Figura-18)

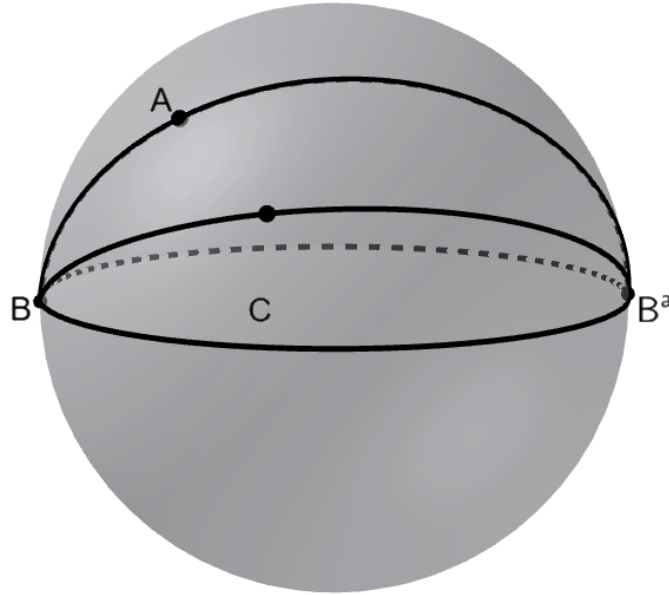


Figura 18 – Ângulo $\sphericalangle ABC$, seu interior e a lúnula associada BAB^aCB

O conceito de lúnula permite enunciar uma versão esférica do Teorema do Transferidor. Esse resultado formaliza a correspondência entre ângulos e números reais, desempenhando na geometria esférica o mesmo papel do transferidor na geometria plana.

Teorema 4.3 (do Transferidor) Suponhamos que seja dado (1) um raio esférico $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$ tal que $\widehat{PQ}$ é um quarto de círculo e (2) um hemisfério em um lado de $\vec{r}$ (Ver Figura-19). Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais $-\pi < \theta \leq \pi$, com os pontos do círculo polar de P , e o conjunto de raios esféricos que têm o mesmo ponto inicial que $\vec{r}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Se $\theta = 0$, o raio associado é $\vec{r}$ e o ponto associado é Q .
2. Se $\theta = \pi$, o raio associado é o oposto a $\vec{r}$ e o ponto associado é Q^a .
3. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, o raio associado é o raio que passa pelo centro do hemisfério h e o ponto associado é o polo do círculo máximo $\bigcirc PQ$.
4. Se $0 < \theta < \pi$, o ponto associado está no arco do círculo polar de P contido em h .
5. Se $-\pi < \theta < 0$, o ponto associado está no arco do círculo polar de P contido no hemisfério oposto a h .
6. Se $-\pi < \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, então o ponto associado a θ_1 aparece antes do ponto associado a θ_2 ao percorrer o círculo polar de P na orientação determinada por h .

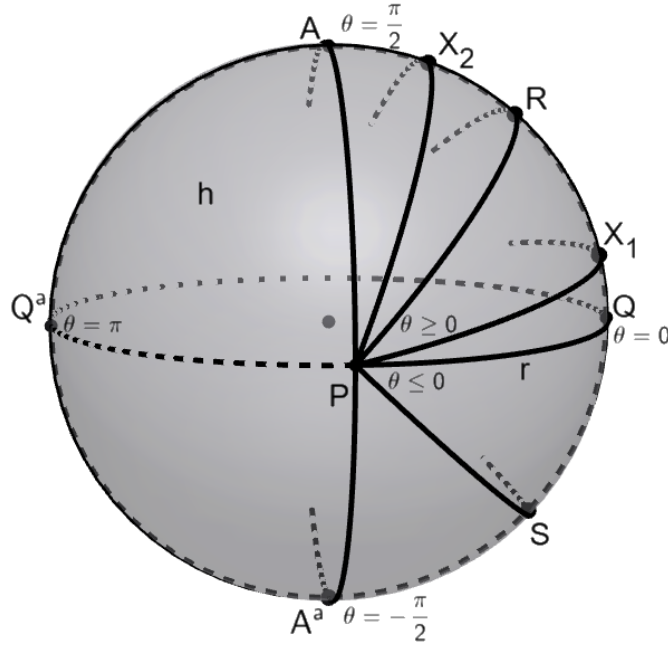


Figura 19 – Esfera aplicada no teorema do Transferidor.

Demonstração. Seja A o centro de h , de modo que A^a é o centro do hemisfério oposto. (Assim, A e A^a são os polos de $\vec{r}$.) Então tanto A quanto Q estão a um quarto de círculo de P , logo $\odot AQ$ é o círculo polar de P . Os pontos A e Q não são nem iguais nem antípodas, pois Q e Q^a estão no círculo máximo de $\vec{r}$, mas A não está.

O círculo polar $C_P = \{X : d(P, X) = \pi/2\}$ é um círculo máximo. Fixamos uma orientação determinada por h , percorremos C_P de Q para A no sentido do hemisfério h .

Agora, parametrizamos C_P por um ângulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ da seguinte forma, $\Phi(0) = Q$.

Para $0 < \theta \leq \pi$ seja $\Phi(\theta) = R_\theta$ o ponto em C_P tal que o arco orientado de Q a R_θ mede θ ($\widehat{QR_\theta} = \theta$). $\Phi(\pi) = Q^a$.

Para $-\pi < \theta < 0$ seja $\Phi(\theta) = S_\theta$ o ponto em C_P tal que o arco orientado de Q a S_θ (no sentido oposto ao de h) mede $-\theta$ ($\widehat{QS_\theta} = -\theta$). Assim, $\theta \mapsto \Phi(\theta)$ é uma bijeção entre $(-\pi, \pi]$ e C_P .

Agora, estabeleceremos uma correspondência entre ângulos e pontos de C_P . Em seguida, dado $X \in C_P$, como o raio esférico $\overrightarrow{PX}$ pode ser de dois tipos: os que contêm algum ponto a $\pi/2$ de P (todos, exceto um) e o raio $\overrightarrow{PP^a}$, que não intersecta C_P . Portanto, a correspondência $X \leftrightarrow \overrightarrow{PX}$ não é sobrejetiva sobre todos os raios com origem P . Para corrigir isso, associaremos ao raio $\overrightarrow{PP^a}$ o antípoda de P , P^a . Assim, a aplicação $X \mapsto \overrightarrow{PX}$ é uma bijeção entre C_P e o conjunto

$$\mathcal{R} = \{\text{raios esféricos com origem } P\} \setminus \{\overrightarrow{PP^a}\}.$$

Daí, a correspondência final $\Theta : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$ por $\Theta(\theta) = \overrightarrow{P\Phi(\theta)}$. Como Φ e $X \mapsto \overrightarrow{PX}$ são bijeções, Θ também é uma bijeção.

Verifiquemos agora as propriedades, (1) se $\theta = 0$, então $\Phi(0) = Q$, logo $\Theta(0) = \overrightarrow{PQ} = r$. (2) Se $\theta = \pi$ temos $\Phi(\pi) = Q^a$, assim $\Theta(\pi) = \overrightarrow{PQ^a}$, que é o raio oposto a r .

(3) se $\theta = \pi/2$ implica que $\Phi(\pi/2) = A$, logo $\Theta(\pi/2) = \overrightarrow{PA}$. Como A está a $\pi/2$ de P e de Q , A é polo do círculo máximo $\odot PQ$. (4) Se $0 < \theta < \pi$, o ponto $\Phi(\theta)$ está no arco de C_P percorrido no sentido de h a partir de Q até Q^a . Esse arco, por construção, está contido em h . (5) Se $-\pi < \theta < 0$, o ponto $\Phi(\theta)$ está no arco no sentido oposto, que está contido no hemisfério oposto a h . (6) Se $-\pi < \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, então os pontos $\Phi(\theta_1)$ e $\Phi(\theta_2)$ ocorrem nessa ordem ao percorrer C_P na orientação de h , pois Φ preserva ordem no sentido positivo de θ (o sentido de h). Assim a correspondência $\theta \mapsto \overrightarrow{P\Phi(\theta)}$ é uma bijeção entre $(-\pi, \pi]$ e o conjunto de todos os raios esféricos com origem P exceto $\overrightarrow{PP^a}$, e satisfaz todas as propriedades exigidas.

Vemos que a propriedade (6) vale da seguinte forma. Valores θ_1, θ_2 correspondem aos raios $\overrightarrow{PX_1}$ e $\overrightarrow{PX_2}$. Então $\sphericalangle X_1PX_2 = \widehat{X_1X_2}$ cuja medida é o valor absoluto de $|\theta_1 - \theta_2|$ reduzido módulo 2π a um valor em $(-\pi, \pi]$. $\square$

O Teorema do Transferidor fornece uma maneira de medir ângulos esféricos análoga ao procedimento utilizado na geometria plana. Por meio da correspondência estabelecida pelo teorema, cada número real do intervalo $(-\pi, \pi]$ determina um único raio esférico com vértice em P . Consequentemente, a medida de um ângulo esférico pode ser obtida pela diferença entre os valores associados aos seus lados.

A proposição seguinte apresenta diferentes caracterizações de um ponto pertencente ao interior de um ângulo esférico, mostrando a equivalência entre interpretações geométricas e métricas desse conceito.

Proposição 4.21 *Sejam o $\sphericalangle ABC$ um ângulo esférico e P um ponto na esfera. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) P está no interior do $\sphericalangle ABC$.
- (2) P está no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$ e $\sphericalangle PBC < \sphericalangle ABC$.
- (3) P não está em $\odot AB$ nem em $\odot BC$, e

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBC.$$

- (4) P não está sobre nenhum dos lados do ângulo, mas para qualquer ponto Q em $\overrightarrow{BA}$ diferente de B , existe um ponto R em $\overrightarrow{BC}$ diferente de B tal que P está entre Q e R .

Demonstração. Para que P satisfaça qualquer uma dessas quatro propriedades, P não pode estar em $\odot AB$ nem em $\odot BC$, então assumimos isso como hipótese ao longo de toda a demonstração. Seja C_B o círculo polar de B . Sejam D, E e F pontos em $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, a um quarto de círculo de B . Como P não está em $\odot AB$ nem em $\odot BC$ então E é diferente de D e F . (Ver Figura-20 e 21)

(1) $\implies$ (3). Suponhamos que vale (1), então P, A, D e E estão no mesmo hemisfério relativo ao $\odot BC$. Assim, $\overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{FD}$ são o mesmo raio e de modo semelhante, $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{DF}$ são

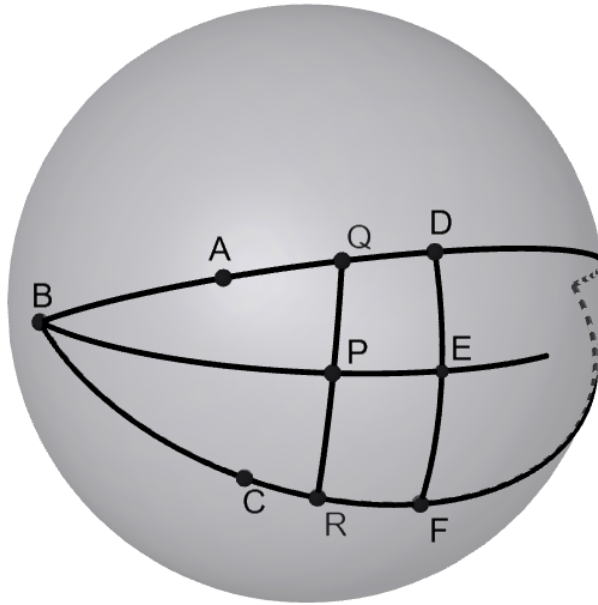


Figura 20 – Ponto interior ao ângulo

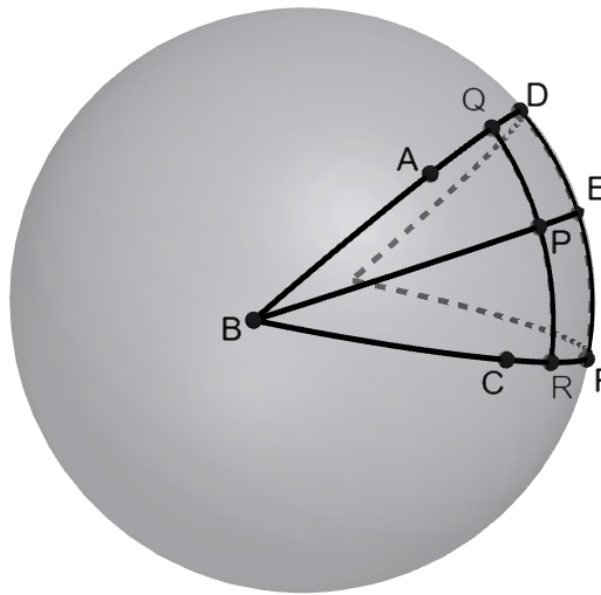


Figura 21 – Relação de ângulo com seu interior

o mesmo raio. Como a interseção de $\overrightarrow{DF}$ e $\overrightarrow{FD}$ é $\widehat{DF}$, E está em $\widehat{DF}$. Como E é diferente de D e F , então E está entre D e F , isto é, E está no arco $\widehat{DF}$, daí $\widehat{DF} = \widehat{DE} + \widehat{EF}$, logo $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC$, o que fornece (3).

(3) $\implies$ (2). Suponhamos que vale (3), então E é diferente de D e F e $\widehat{DF} = \widehat{DE} + \widehat{EF}$, então E está entre D e F e $\widehat{FE} < \widehat{FD}$ (então $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD}$), de modo que D e E estão no mesmo hemisfério relativo ao $\odot BC$ e $\angle PBC = \widehat{FE} < \widehat{DF} = \angle ABC$, e finalmente P e A estão no mesmo hemisfério relativo ao $\odot BC$. Assim, (2) vale.

(2) $\implies$ (1). Suponhamos que vale (2), aplicando a Proposição 4.18, então D e E estão no mesmo hemisfério relativo ao $\odot BC$. Aplicando a Proposição 4.3, onde r é $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD}$. Como $\angle PBC < \angle ABC$, $\widehat{FE} < \widehat{FD}$. Desde que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD}$ e $\widehat{FE} < \widehat{FD}$, E

pode estar apenas entre D e F , então $\overrightarrow{DE}$ é o mesmo que $\overrightarrow{DF}$, novamente pela Proposição 4.3 aplicada onde r é $\overrightarrow{BA}$, temos que E e F estão no mesmo hemisfério relativo ao $\odot AB$, assim P e C estão no mesmo hemisfério relativo ao $\odot AB$. Assim, (1) vale.

(4) $\implies$ (1). Suponhamos que vale (1), então P está nos raios $\overrightarrow{RQ}$ e $\overrightarrow{QR}$. Como Q está em $\overrightarrow{BA}$, Q está no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$, então R está no $\odot BC$, os pontos de $\overrightarrow{RQ}$ (exceto R) estão no mesmo hemisfério que Q relativo ao $\odot BC$ assim o mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Portanto, P está no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Um argumento similar mostra que P está no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$, então (1) vale.

(1) $\implies$ (4). Suponhamos que vale (1), e que Q esteja em $\overrightarrow{BA}$ diferente de B . Então Q não está em $\odot BC$, logo $\overrightarrow{QP}$ não está contido em $\odot BC$. Assim $\overrightarrow{QP}$ encontra o $\odot BC$ em um único ponto R . R deve ser diferente de Q porque Q não está em $\odot BC$ mas R está em $\odot BC$. Todo ponto de $\overrightarrow{QP}$ (exceto Q) está no mesmo hemisfério que P relativo ao $\odot AB$, daí estão no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$. Como R é diferente de Q , R está no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$ e (P) . Em particular R não pode ser B ou B^a se R estivesse no raio oposto de $\overrightarrow{BC}$ ($\overrightarrow{BC^a}$), R e P estariam em lados opostos do $\odot AB$ (uma contradição). Assim R é um ponto de $\overrightarrow{BC}$ diferente de B , como desejado.

Então, P está em $\overrightarrow{QR}$ e não pode ser Q ou R , pois P não está em $\odot AB$ ou $\odot BC$. Se R estivesse entre P e Q , então P estaria no hemisfério oposto do $\odot BC$ a partir de Q , oposto a A , uma contradição da suposição de que P está no interior do $\sphericalangle ABC$. Assim, pela definição de $\overrightarrow{QR}$, P está entre Q e R . Portanto, (4) vale. Isso mostra que (1) e (4) são equivalentes, assim todas as quatro condições são equivalentes. $\square$

A noção de interior de um ângulo esférico permite definir quando um raio está situado entre os lados desse ângulo, generalizando um conceito familiar da geometria plana.

Definição 4.22 *Sejam $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ os lados de um ângulo $\sphericalangle ABC$ e $\overrightarrow{BP}$ um raio esférico. Então, dizemos que $\overrightarrow{BP}$ está entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ se, e somente se, P está no interior do $\sphericalangle ABC$.*

Uma consequência importante da definição anterior é o Teorema da Barra Transversal, que descreve o comportamento de um raio traçado a partir do vértice de um ângulo em direção ao seu interior.

Teorema 4.4 (da barra transversal) *Suponhamos que nos sejam dados o ângulo $\sphericalangle ABC$ e D seja um ponto no interior do $\sphericalangle ABC$. Então o raio esférico $\overrightarrow{BD}$ intersecta o arco $\widehat{AC}$ em um ponto entre A e C . (Ver Figura-22)*

Demonstração. Como D está no interior do $\sphericalangle ABC$, está também no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Pela Proposição 4.18, os pontos do raio esférico $\overrightarrow{BD}$ (exceto B) estão todos no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. De modo semelhante, podemos

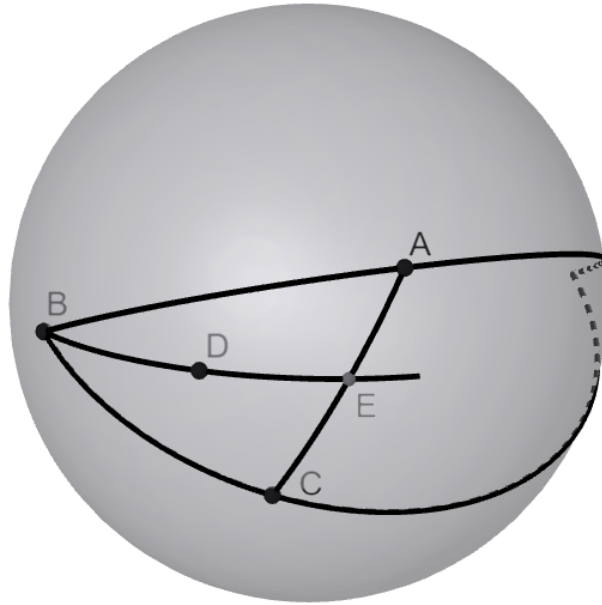


Figura 22 – Teorema da barra Transversal

argumentar que os pontos do raio esférico $\overrightarrow{BD}$ (exceto B) estão todos no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$. Por definição, os pontos de $\overrightarrow{BD}$ (exceto B) estão todos no interior do $\angle ABC$. Agora, pela Proposição 4.21, o arco $\widehat{AC}$ está no interior do $\angle ABC$, exceto para A e C . Ora $\overrightarrow{BD}$ intersecta $\odot AC$ em um único ponto chamado E . Como E não pode ser B , já que B não está em $\odot AC$, E deve estar no interior do $\angle ABC$, uma vez que é um ponto de $\overrightarrow{BD}$. Assim, E está no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Portanto, E deve estar em $\overrightarrow{CA}$. Como E está no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$, E deve estar em $\overrightarrow{AC}$. Como E está em ambos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CA}$, deve estar em $\widehat{AC}$, e de fato deve estar entre A e C , já que está no interior do $\angle ABC$. $\square$

Passamos agora a estudar a perpendicularidade entre círculos máximos. Os resultados seguintes mostram como essa relação pode ser caracterizada por meio de seus polos.

Proposição 4.22 *Se dois grandes círculos são perpendiculares entre si, cada um passa pelos polos do outro. Reciprocamente, se um círculo máximo passa pelos polos do outro, então os dois grandes círculos são perpendiculares.*

Demonstração. Se um dos círculos passa pelo polo A do segundo círculo, então eles são círculos distintos, logo se encontram em pontos antípodas B, B^a (Ver Figura-23). Escolha um ponto C do segundo círculo tal que C esteja a um quarto de círculo de B . Pela definição de polo, $\widehat{AB}$ é um quarto de círculo. Por definição, $\angle ABC = \widehat{AC}$. Mas $\widehat{AC} = \frac{\pi}{2}$, pois A é um polo do $\odot BC$. Assim, o $\odot AB$ é perpendicular o $\odot BC$, como desejado.

Se os círculos são perpendiculares, então são distintos, logo se encontram em pontos antípodas B, B^a . Escolha A em um círculo e C no outro que estejam ambos a um quarto de círculo de B . Então $\widehat{AC} = \angle ABC$ por definição; este último é $\frac{\pi}{2}$, pois os círculos são

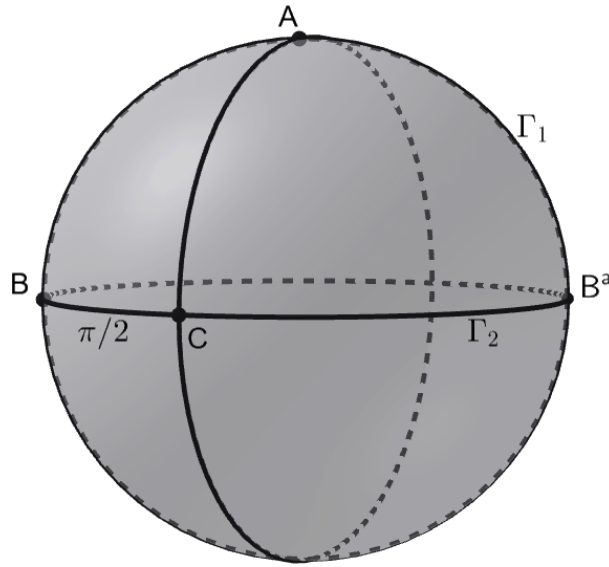


Figura 23 – Círculos máximos perpendiculares entre si

perpendiculares. Como $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \frac{\pi}{2}$, A é um polo do $\odot BC$. De modo semelhante, C é um polo do $\odot AB$. $\square$

A proposição seguinte estabelece uma importante relação entre polos de círculos máximos e medidas de ângulos esféricos, mostrando como esses conceitos estão intimamente ligados.

Proposição 4.23 *Sejam A, B e C pontos de uma esfera que não pertencem ao mesmo círculo máximo. Seja A' o polo do $\odot BC$ que está no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Seja C' o polo do círculo máximo $\odot AB$ que está no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$. Então, $\widehat{A'C'} = \sphericalangle A'BC' = \pi - \sphericalangle ABC$.*

Demonstração. Note que, pela Proposição 4.22 o $\odot A'B$ é perpendicular ao $\odot BC$ e o $\odot C'B$ é perpendicular ao $\odot AB$. Há três casos a considerar: $\sphericalangle ABC$ é agudo, reto ou obtuso. (Ver Figura-24)

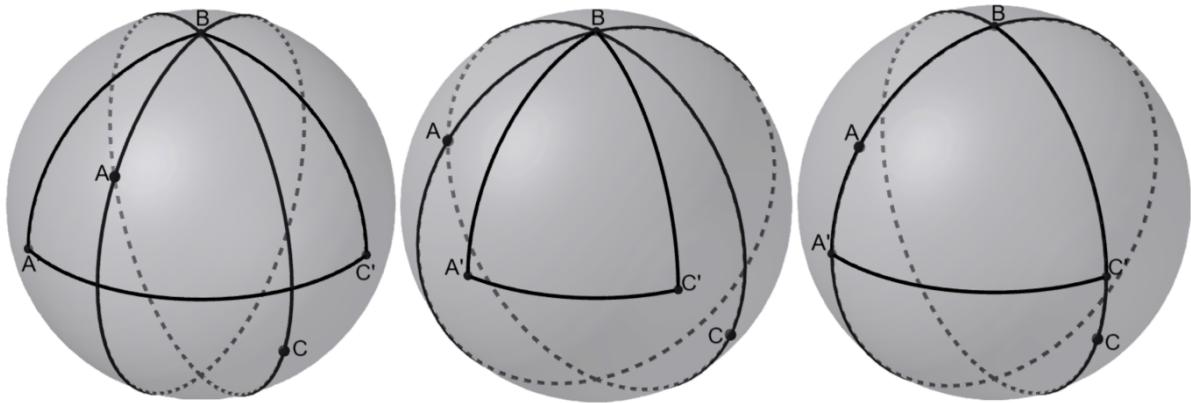


Figura 24 – Ângulos agudo, reto ou obtuso

Se o $\sphericalangle ABC$ é agudo, então pela Proposição 4.21 A está no interior do $\sphericalangle A'BC$ e C está no interior do $\sphericalangle ABC'$. Então

$$\sphericalangle A'BC' = (\sphericalangle A'BA + \sphericalangle ABC) + \sphericalangle CBC' = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle ABC\right) = \pi - \sphericalangle ABC,$$

como desejado.

Se o $\sphericalangle ABC$ é obtuso, então A' e C' estão ambos no interior do $\sphericalangle ABC$. Então,

$$\sphericalangle ABC = (\sphericalangle ABA' + \sphericalangle A'BC') + \sphericalangle CBC' = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle A'BC'\right) = \pi - \sphericalangle A'BC'$$

como desejado.

Se o $\sphericalangle ABC$ é um ângulo reto, então A' está em $\overrightarrow{BA}$ e C' está em $\overrightarrow{BC}$, de modo que o $\sphericalangle A'BC'$ também é um ângulo reto e, portanto, é suplementar o $\sphericalangle ABC$. $\square$

Para introduzir o conceito de distância entre um ponto e um círculo máximo, é necessário compreender o comportamento dos arcos perpendiculares. A proposição seguinte garante a existência de um arco perpendicular mais curto.

Proposição 4.24 *Sejam E um círculo máximo, P um polo de E , e X um ponto que não é um polo de E . Sejam M um círculo máximo que passa por P e X , e seja Y e Z pontos (antípodas) onde E e M se intersectam. Então, a distância esférica de X a Y é diferente da distância esférica de X a Z .*

Demonstração. Note que, o ponto X está no semicírculo máximo M com extremidades Y e Z . Se X é equidistante de Y e Z , então ambas as distâncias são $\frac{\pi}{2}$, o que significa que $X = P$ ou $X = P^a$, o qual é uma contradição. $\square$

Além dos ângulos formados por círculos máximos, também é possível definir o ângulo entre dois círculos mínimos que se intersectam. A definição a seguir formaliza essa ideia.

Definição 4.23 *Suponhamos dois círculos mínimos com centros em A e B que se encontram num ponto C . Então, definimos a medida do ângulo entre as círculos como sendo o $\sphericalangle ACB$.*

Com base na proposição anterior, podemos definir rigorosamente a distância esférica entre um ponto e um círculo máximo, bem como os conceitos de pé da perpendicular e arco perpendicular.

Definição 4.24 *Sejam E um círculo máximo, P um polo de E e X um ponto que não é um polo de E . Seja M um círculo máximo que passa por P e X , e sejam Y e Z os pontos (antípodas) onde E e M se intersectam. (Ver Figura-25)*

Suponhamos que X esteja mais próximo de Y do que de Z . Então, a distância esférica de X a Y é dita ser a distância de X a E . Se $X \neq Y$, então $\widehat{XY}$ é dito ser o arco perpendicular mais curto de X a E , $\widehat{XZ}$ é dito ser o arco perpendicular mais longo

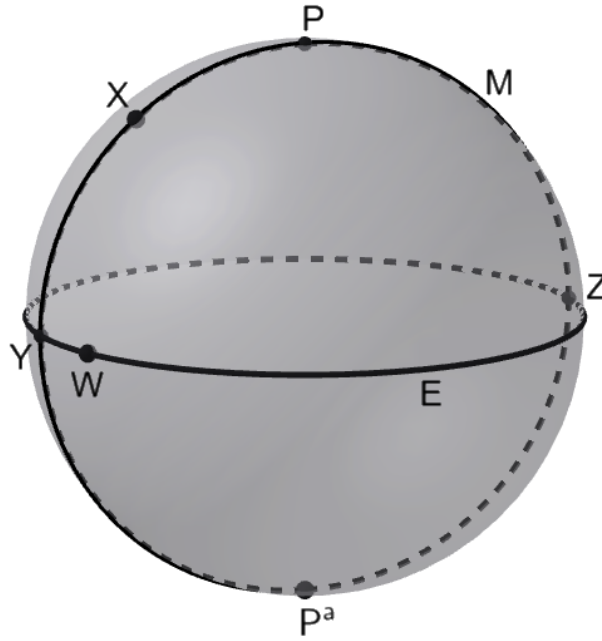


Figura 25 – Pés da perpendicular

de X a E , Y é o pé da perpendicular mais curta, Z é o pé da perpendicular mais longa. A distância de P a E é definida como $\frac{\pi}{2}$ radianos (90°).

A proposição seguinte caracteriza geometricamente os pés da perpendicular de um ponto a um círculo máximo, complementando a definição anterior.

Proposição 4.25 *Suponhamos que E seja um círculo máximo com polo P e X não seja nenhum dos polos de E , e que X não pertença a E . Se W é um ponto de E tal que $\odot WX$ é perpendicular a E , então W deve ser um dos dois pontos onde $\odot PX$ encontra E . (Ver Figura 25)*

Demonstração. Como $\odot WX$ é perpendicular a E , pela Definição 4.24, o polo de E pertence a $\odot WX$. Como P é um polo de E , segue que $P \in \odot WX$. Mas $\odot WX$ é o único círculo máximo que passa pelos pontos distintos W e X . Logo, $\odot WX = \odot PX$. Como $W \in E$ por hipótese e $W \in \odot PX$, concluímos que $W \in E \cap \odot PX$. Portanto, W é um ponto de interseção entre $\odot PX$ e E . Como $X \notin E$ e X não é um polo de E , o círculo máximo $\odot PX$ não coincide com E . Assim, dois círculos máximos distintos intersectam-se exatamente em dois pontos antípodas. Consequentemente, $E \cap \odot PX = \{W, W^a\}$. Logo, W é um dos dois pontos onde $\odot PX$ encontra E . $\square$

A proposição anterior será fundamental para relacionar a distância esférica com a medida de ângulos. Além disso, ela desempenhará um papel essencial nas demonstrações dos critérios de congruência de triângulos esféricos apresentados nas próximas seções.

Encerramos este capítulo com um axioma que estabelece uma importante relação entre a congruência de arcos e a congruência de ângulos. Esse resultado servirá de base para o estudo dos triângulos esféricos.

Axioma 4.8 *Suponhamos que em uma esfera o $\triangle A_1B_1C_1$ e o $\triangle A_2B_2C_2$, temos $\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}$ e $\widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}$. Então $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ se, e somente se, $\widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}$. (Ver Figura-26)*

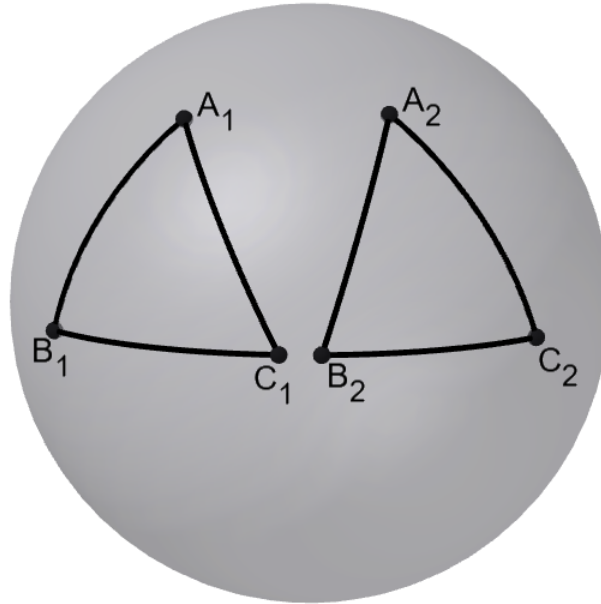


Figura 26 – Relação de triângulos

4.3 TRIÂNGULOS

Na geometria plana, um triângulo surge tomando três pontos que não estão em uma reta, e conectando-os com os segmentos únicos entre pares desses pontos. Assim, três pontos não colineares determinam um único triângulo. Faremos o mesmo em uma esfera (onde, em vez disso, os pontos não estarão em um único círculo máximo, e os conectamos com arcos de grandes círculos). Mas antes de fazê-lo, um problema surgirá. Se três pontos não estão em um único círculo máximo, é possível que algum par deles seja antípoda o que significaria que não existe um arco único de um círculo máximo entre eles? A resposta, felizmente, é não.

Proposição 4.26 *Se três pontos A, B, C sobre uma esfera não pertencem a um mesmo círculo máximo, então nenhum par desses pontos é antípoda. Consequentemente, os arcos esféricos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$ estão bem definidos segundo a definição de arcos esféricos.*

Demonstração. Por contradição. Suponhamos que um par de pontos fosse antípoda (digamos A, B), então (sendo os três pontos, distintos) C não seria antípoda nem a A nem a B . Assim, os grandes círculos $\odot AC$ e o $\odot BC$ estão definidos. Como B é antípoda a A ; B está no $\odot AC$, logo A, B, C estão em um único círculo máximo, uma contradição. Portanto, nenhum par de pontos A, B ou C é antípoda. $\square$

Definição 4.25 *Sejam A, B e C três pontos em uma esfera. Dizemos que eles são cocirculares se, e somente se, pertencem ao mesmo círculo máximo.*

Assim como na geometria plana, um triângulo esférico é determinado por três vértices e três lados. A diferença fundamental é que seus lados são arcos de círculos máximos, e não segmentos de reta. Essa simples mudança faz com que muitas propriedades familiares da geometria plana deixem de ser válidas na esfera.

Definição 4.26 *Sejam A, B, C três pontos em uma esfera que não são cocirculares. Então, o triângulo esférico $\triangle ABC$ é a união dos três arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$. Cada um dos três pontos A, B e C é chamado de vértice do $\triangle ABC$. Os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ são chamados de lados do $\triangle ABC$. Os ângulos esféricos $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle BCA$ (também denotados por $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$) são os ângulos do $\triangle ABC$.*

Definição 4.27 *Dizemos que dois triângulos são colunares se possuem dois vértices em comum e um par de vértices que são antípoda. Isto é, os triângulos têm a forma do $\triangle ABC$ e do $\triangle A^a BC$, onde A e A^a são antípoda.*

A presença de pontos antípodas permite construir novos triângulos associados a um triângulo dado. As próximas proposições mostram como esses triângulos se relacionam por meio de seus lados e ângulos.

Proposição 4.27 *Dado o $\triangle ABC$ e o antípoda A^a de A , os três pontos A^a, B, C formam um triângulo esférico tal que $\widehat{A^a B}$, $\widehat{A^a C}$, $\sphericalangle A^a BC$ e $\sphericalangle A^a CB$ são suplementares a $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle ACB$, respectivamente.*

Demonstração. Notemos que, como A e A^a são antípoda e B está em $\widehat{AB}$ e $\widehat{BA^a}$, então B está no $\bigcirc ABA^a$ com isso o ângulo $\sphericalangle ABA^a = \sphericalangle ABC + \sphericalangle A^a BC = \pi$. O mesmo raciocínio se aplica para o $\sphericalangle ACB + \sphericalangle A^a CB = \pi$. $\square$

Definição 4.28 *Dois triângulos são ditos antípoda se podem ser escritos como o $\triangle ABC$ e $\triangle A^a B^a C^a$, onde A^a, B^a e C^a são antípoda de A, B e C , respectivamente.*

Proposição 4.28 *Dado o $\triangle ABC$, os três pontos antípoda A^a, B^a e C^a formam um triângulo esférico cujos lados e ângulos são congruentes aos lados e ângulos correspondentes no $\triangle ABC$.*

Demonstração. Notemos que, pela Definição 4.28, os dois triângulos serão antípoda. Consideremos o círculo máximo que passa pelos pontos A e B , como sabemos ele deve passar pelos antípodas destes pontos, também assim o círculo máximo $\bigcirc AB$ contém os pontos A^a e B^a . Observemos que a $d(AA^a) = \widehat{AB} + \widehat{BA^a}$, então $\widehat{AB} = d(AA^a) - \widehat{BA^a} = \pi - (\pi - \widehat{A^a B^a}) = \widehat{A^a B^a}$ daí $\widehat{AB} = \widehat{A^a B^a}$ e modo análogo, conseguimos mostrar que

$\widehat{AC} = \widehat{A^a C^a}$ e $\widehat{BC} = \widehat{B^a C^a}$. E pelo Axioma 4.8, temos que os ângulos serão congruentes. $\square$

Diferentemente da geometria plana, um triângulo esférico pode possuir mais de um ângulo reto. Isso ocorre porque a curvatura da esfera altera as relações entre lados e ângulos.

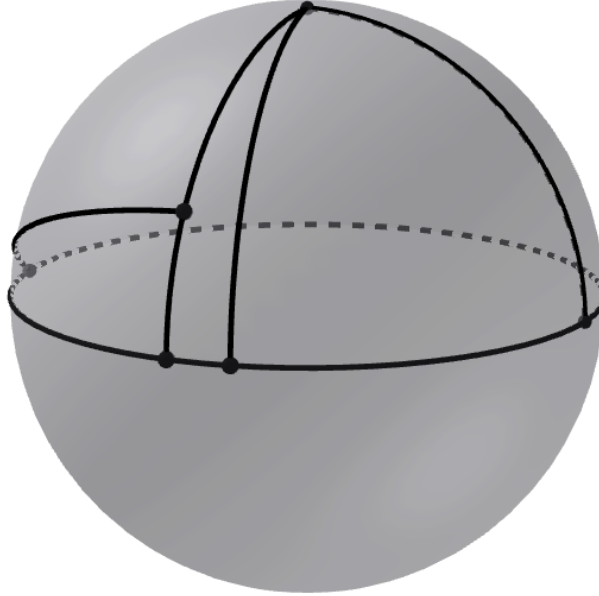


Figura 27 – Triângulos com um, dois e três ângulos retos

Definição 4.29 Um triângulo esférico é dito retângulo se pelo menos um de seus ângulos é um ângulo reto, ou seja, medida $\pi/2$. Um lado de um triângulo que é oposto a um ângulo reto é dito ser a hipotenusa do triângulo retângulo. Um lado do triângulo que não é uma hipotenusa é dito ser um cateto do triângulo. (Ver Figura-27)

Definição 4.30 Um $\triangle ABC$ é dito isósceles com vértice em A se $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$. Os ângulos em B e C são os ângulos da base do triângulo. O triângulo é dito equilátero se todos os seus lados são congruentes.

Teorema 4.5 (do Triângulo Isósceles) Em um triângulo esférico isósceles, os ângulos da base do triângulo também são congruentes.

Demonstração. Suponhamos que o $\triangle ABC$ é isósceles, logo, $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$. Então, comparemos o $\triangle ABC$ com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte forma

$$A \longleftrightarrow A, \quad B \longleftrightarrow C \quad C \longleftrightarrow B,$$

e desta forma comparemos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$. Assim, temos $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$ e $\widehat{BC} \cong \widehat{CB}$. Pelo Axioma 4.8, $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$, como desejado. $\square$

A recíproca também é verdadeira.

Vamos agora provar algumas proposições na geometria esférica que demonstram como o mundo da esfera é diferente daquele do plano. É importante se acostumar com o fato de que, na geometria plana, triângulos podem ter apenas um ângulo reto. Esse não é o caso na esfera, e a próxima proposição explica como isso acontece.

Proposição 4.29 *Um par de ângulos em um triângulo são ângulos retos se, e somente se, os lados opostos são lados retos.*

Demonstração. Suponhamos que no $\triangle ABC$, os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ são ambos retos. Então os círculos máximos $\odot AB$ e o $\odot AC$ são ambos perpendiculares ao $\odot BC$, logo, cada um passa pelos polos do $\odot BC$. Como os $\odot AB$ e $\odot AC$ são distintos, eles se encontram em apenas dois pontos (que, portanto, devem ser os polos do $\odot BC$). Como A é um desses pontos, ele é um polo do $\odot BC$, como B e C estão a um quarto de círculo de A , então $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ são ambos lados retos, pois todo ponto de um círculo máximo está a um quarto de círculo de cada polo.

Reciprocamente, suponhamos que tanto $\widehat{AB}$ quanto $\widehat{AC}$ são lados retos. Assim, A é um polo do $\odot BC$. Desta forma os $\odot AB$ e o $\odot AC$ são ambos perpendiculares ao $\odot BC$, então $\triangle ABC$ tem ângulos retos em B e C . $\square$

Na geometria plana, se um triângulo tem um ângulo reto, os outros ângulos são agudos. Na esfera, isso também se mostra diferente.

Proposição 4.30 *Suponhamos que o $\triangle ABC$ tenha um ângulo reto em B . Então um dos outros ângulos de $\triangle ABC$ é agudo, reto ou obtuso, se, e somente se, o lado oposto é agudo, reto ou obtuso, respectivamente.*

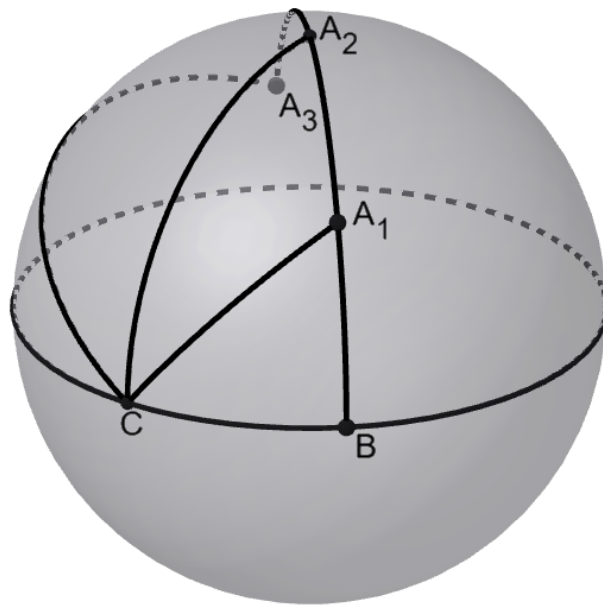


Figura 28 – Relação de ângulos e lados de um triângulo reto

Demonstração. Pela Proposição 4.22, o $\odot AB$ passa pelos polos do $\odot BC$. Seja A' o polo do $\odot BC$ no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$ (Ver Figura-28). Então $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BA'}$ são ambas perpendiculares ao $\odot BC$ em B , e A, A' estão no mesmo hemisfério do $\odot BC$. Assim, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA'}$.

Se o lado $\widehat{BA}$ é um lado reto, então $A = A'$ corolário 4.1. Então, o $\odot AC$ é perpendicular ao $\odot BC$, logo o $\sphericalangle C$ é um ângulo reto, como desejado.

Se o lado $\widehat{BA}$ é agudo, então A está entre B e A' , já que $\widehat{BA} < \widehat{BA'} = \frac{\pi}{2}$. Então concluímos que A está no interior do $\sphericalangle A'CB$. Pela Proposição 4.21, $\sphericalangle ACB < \sphericalangle A'CB = \frac{\pi}{2}$, logo o $\sphericalangle ACB$ é agudo, como desejado.

Se o lado $\widehat{BA}$ é obtuso, então A' está entre B e A (já que $\widehat{BA} > \widehat{BA'} = \frac{\pi}{2}$). Assim concluímos que A' está no interior do $\sphericalangle ACB$. Daí, $\sphericalangle ACB > \sphericalangle A'CB = \frac{\pi}{2}$, logo o $\sphericalangle ACB$ é obtuso, como desejado. $\square$

Se a hipótese de que $\sphericalangle B$ é reto for relaxada para a hipótese de que $\sphericalangle B$ é o ângulo do triângulo mais próximo de ser reto, então a mesma conclusão vale.

Definição 4.31 *Um arco entre um vértice de um triângulo e um ponto do lado oposto é chamado uma ceviana do triângulo a partir do vértice. Se o ponto no lado oposto é o ponto médio desse lado, a ceviana é chamada a mediana do triângulo a partir do vértice. A ceviana que bissecta o ângulo no vértice é chamada uma bissetriz do ângulo a partir do vértice. Uma ceviana entre um vértice de um triângulo e o círculo máximo contendo o lado oposto, sendo perpendicular ao círculo máximo é chamado uma altura do triângulo a partir desse vértice.*

As noções de mediana, bissetriz e altura também existem na geometria esférica. Entretanto, devido à curvatura da esfera, a posição dessas cevianas pode diferir significativamente daquela observada na geometria euclidiana.

Proposição 4.31 *Suponhamos que no $\triangle ABC$, $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ não são ângulos retos. Então, C não é um polo do $\odot AB$. Sejam D e E os pés das alturas menor e maior de C até o $\odot AB$, respectivamente. Então, podemos determinar a posição de D e E como segue:*

- (1) *D está entre A e B se, e somente se, $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são ambos agudos.*
- (2) *E está entre A e B se, e somente se, $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são ambos obtusos.*
- (3) *nem D nem E está entre A e B se, e somente se, um dos ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ é agudo e o outro é obtuso.*

Demonstração. Se C fosse um polo do $\odot AB$, então pelo Teorema 4.1, $\widehat{CA}$ e $\widehat{CB}$ seriam lados retos, logo $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ seriam ângulos retos, uma contradição de nossas hipóteses (Ver Figura-29). Portanto C não é um polo do $\odot AB$. Se nem $\sphericalangle A$ nem $\sphericalangle B$ são ângulos retos então ambos D e E são distintos de A e B . Notemos que D e E não podem estar

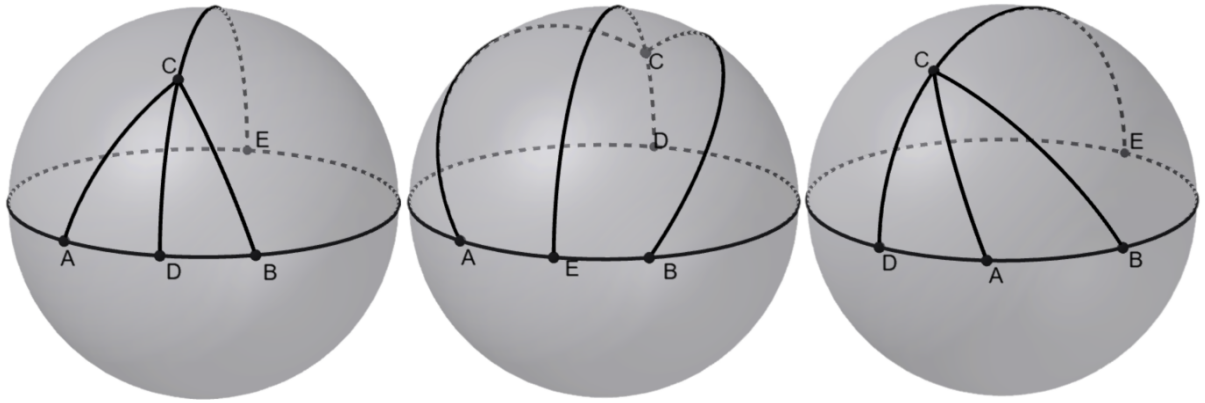


Figura 29 – Extensão de casos do triângulo isósceles

simultaneamente entre A e B porque D e E são antípoda. Assim ou (1) ou (2) ou (3) acontecem.

(1) Suponhamos que D está entre A e B . Então, $\sphericalangle CAB$ é o mesmo que $\sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle CBA$ é o mesmo que $\sphericalangle CBD$. Aplicando a Proposição 4.30 a $\triangle CAD$ e $\triangle CBD$, obtemos que, como $\widehat{CD}$ é agudo, então $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ também são.

(2) Suponhamos que E está entre A e B . Então aplicamos a prova de (1), substituindo D por E , e “agudo” por “obtusos” para concluir que $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são obtusos.

(3) Suponhamos que nem D nem E está entre A e B . Aplicamos novamente a Proposição 4.30 ao $\triangle CAD$ e $\triangle CBD$ para concluir que $\sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle CBD$ são agudos. Então, A e B estão do mesmo lado do círculo máximo $\odot CD = \odot CE$, pois se estivessem em lados opostos, o arco $\widehat{AB}$ iria conter D ou E . Pela Proposição 4.3, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$. Se A está entre D e B , então $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$ são opostos, logo $\sphericalangle CAB$ é suplementar o $\sphericalangle CAD$. Então, $\sphericalangle CAB$ é obtuso e $\sphericalangle CBA$ é agudo. Se B está entre D e A então $\sphericalangle CAB$ é igual o $\sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle CBA$ é suplementar o $\sphericalangle CBD$. Então, $\sphericalangle CBA$ é obtuso e $\sphericalangle CAB$ é agudo.

Quanto à direção oposta, parte meramente da aplicação da Proposição 4.30. $\square$

Definição 4.32 *O interior de um triângulo é a interseção dos interiores de seus ângulos. O exterior de um triângulo é o conjunto dos pontos que não pertencem nem ao triângulo nem ao seu interior.*

Introduzimos agora uma construção exclusivamente esférica, sem análogo na geometria plana, que desempenhará papel fundamental no estudo dos triângulos esféricos: o triângulo polar. Observamos que, se o $\triangle ABC$ é um triângulo esférico, então pela Definição 4.26 o ponto A não está no círculo máximo $\odot BC$. Assim, A deve pertencer a um dos dois hemisférios nos quais a esfera é dividida por $\odot BC$, e portanto pertence a um lado particular do $\odot BC$. Similarmente, B pertence a um lado particular do $\odot AC$ e C pertence a um lado particular do $\odot AB$.

Definição 4.33 *Seja o $\triangle ABC$ um triângulo esférico. Definimos o triângulo polar, como o $\triangle A'B'C'$ de $\triangle ABC$ (também algumas vezes chamado triângulo suplementar ou triângulo*

dual) da seguinte maneira (Ver Figura 30). Seja A' o polo do $\odot BC$ que está no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Definimos B' e C' analogamente: B' é o polo do $\odot AC$ no mesmo hemisfério que B relativo ao $\odot AC$, e C' é o polo do $\odot AB$ no mesmo hemisfério que C relativo ao $\odot AB$.

Precisamos verificar que o $\triangle A'B'C'$ é um triângulo bem definido.

Teorema 4.6 *Se o $\triangle ABC$ é um triângulo esférico bem definido, então o $\triangle A'B'C'$ também é; isto é, os pontos A' , B' e C' não pertencem a um mesmo círculo máximo.*

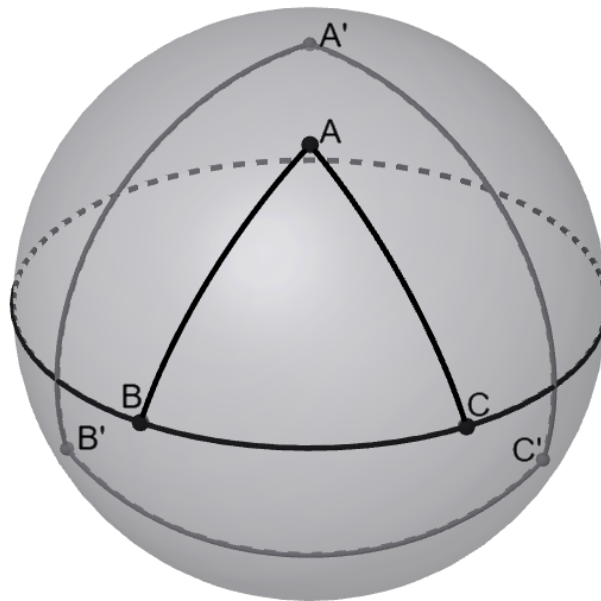


Figura 30 – Triângulo polar

Demonstração. Suponhamos que A' , B' e C' pertençam todos a um mesmo círculo máximo Γ com polos N e S (Ver Figura-30). Por hipótese A' é polo do $\odot BC$, então N e S pertencem ao $\odot BC$. Similarmente concluímos que N e S pertencem também aos $\odot AB$ e o $\odot AC$. Como A , B e C não pertencem todos ao mesmo círculo máximo, os $\odot AB$ e o $\odot BC$ devem ser distintos. Assim, esses dois círculos máximos se intersectam em apenas dois pontos (pela Proposição 4.5), os quais já sabemos serem N e S . Mas os $\odot AB$ e $\odot BC$ também possuem o ponto em comum B , logo B deve coincidir com N ou S . Um argumento semelhante mostra que A coincide com N ou S , e que C coincide com N ou S . Mas, então A , B e C pertencem todos a um mesmo círculo máximo (qualquer círculo máximo passando por N e S contém todos os pontos A , B e C). Isso é uma contradição, portanto a hipótese é falsa, e A' , B' e C' não podem todos pertencer a um mesmo círculo máximo. $\square$

O próximo teorema é uma das razões pelas quais o triângulo polar é algumas vezes chamado de triângulo dual. Esse resultado mostra que a construção polar é involutiva: ao tomar o triângulo polar duas vezes, recupera-se o triângulo original.

Teorema 4.7 *Seja $\triangle A'B'C'$ o triângulo polar do $\triangle ABC$. Então o triângulo polar de $\triangle A'B'C'$ é $\triangle ABC$.*

Demonstração. Como C estão no mesmo hemisfério que C' em relação ao $\odot AB$, e C' é um polo do $\odot AB$, à distância de C ao $\odot AB$ é estritamente menor que $\pi/2$. Consequentemente, à distância esférica entre C e C' é $\pi/2 - d(C, \odot AC)$, que é estritamente menor que $\pi/2$.

Como A' e B' são vértices de um triângulo esférico, eles não são nem idênticos nem antípodas. Portanto, concluímos (pela Proposição 4.26) que o $\odot A'B'$ está bem definido. Como A' e B' estão ambos à distância $\pi/2$ de C , pelas Proposições já vistas, todo ponto do $\odot A'B'$ está à distância $\pi/2$ como C , então C é um dos polos do $\odot A'B'$. De maneira semelhante, pode-se mostrar que B é o polo do $\odot A'C'$ e A é o polo do $\odot B'C'$. Por definição, isso prova que o $\triangle ABC$ é o triângulo polar de $\triangle A'B'C'$. $\square$

O próximo resultado evidencia a forte relação entre um triângulo e seu triângulo polar. Em particular, lados de um correspondem aos suplementares dos ângulos do outro, revelando uma dualidade característica da geometria esférica, justificando a terminologia *triângulo polar*.

Teorema 4.8 *Seja o $\triangle A'B'C'$ o triângulo polar de $\triangle ABC$. Então*

$$\sphericalangle A' = \pi - \widehat{BC}, \quad (2)$$

$$\sphericalangle B' = \pi - \widehat{AC}, \quad (3)$$

$$\sphericalangle C' = \pi - \widehat{AB}, \quad (4)$$

$$\widehat{A'B'} = \pi - \sphericalangle C, \quad (5)$$

$$\widehat{A'C'} = \pi - \sphericalangle B, \quad (6)$$

$$\widehat{B'C'} = \pi - \sphericalangle A. \quad (7)$$

Demonstração. A igualdade (6) segue imediatamente da Proposição 4.23. As equações (5) e (7) seguem por permutação cíclica dos vértices do triângulo.

Para obter as outras três relações envolvendo os ângulos do triângulo polar, observamos que o triângulo polar de $\triangle A'B'C'$ é o próprio $\triangle ABC$. Assim, aplicando as igualdades já demonstradas ao $\triangle A'B'C'$, obtemos (2), (3) e (4). $\square$

Os teoremas anteriores são particularmente valiosos em geometria esférica porque mostram como afirmações envolvendo lados e ângulos de um triângulo podem ser imediatamente convertidas em afirmações correspondentes sobre os lados e ângulos de outro triângulo, isto é, o triângulo polar.

Encerramos este capítulo estendendo os conceitos de triângulos para polígonos esféricos. As definições preservam a ideia da geometria plana, mas substituem segmentos por arcos de círculos máximos e incorporam a noção de convexidade esférica.

Definição 4.34 Um quadrilátero esférico é a união de quatro arcos esféricos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{DA}$, onde A , B , C e D são pontos da esfera tais que nenhum trio desses pontos são colunares, e tais que os quatro arcos se encontram apenas nas suas extremidades. Dizemos que o quadrilátero é esférico convexo se, para cada um dos quatro arcos do quadrilátero, os pontos do quadrilátero que não pertencem a esse arco estão em apenas um dos lados do círculo máximo que contém o arco.

Cada um dos pontos A , B , C e D é chamado um vértice do quadrilátero.

Isto é, os pontos do quadrilátero que não pertencem a $\widehat{AB}$ estão todos no mesmo hemisfério do $\odot AB$; os pontos do quadrilátero que não pertencem a $\widehat{BC}$ estão todos no mesmo hemisfério do $\odot BC$; e assim sucessivamente. Referiremos aos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{DA}$ como os *lados* do quadrilátero esférico. Usamos a notação $\odot ABCD$ para o quadrilátero. Uma definição semelhante pode ser feita para pentágono esférico, hexágono esférico ou, em geral, um n -ágono. (Ver Figura-31)

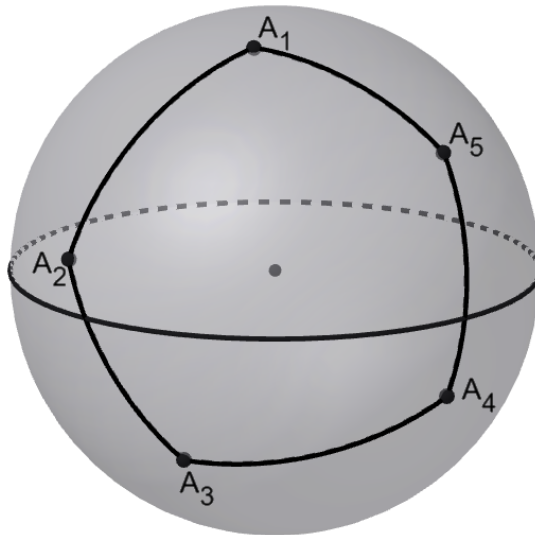


Figura 31 – Um polígono esféricamente convexo $A_1A_2A_3A_4A_5$ e seu interior

Definição 4.35 Um polígono esférico de n lados, ou n -ágono, é a união de n arcos esféricos:

$$\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \dots, \widehat{A_{n-1}A_n}, \widehat{A_nA_1},$$

que se encontram apenas nas extremidades e tais que os pontos: $A_1, A_2, \dots, A_n$

Não pertencem todos a um mesmo círculo máximo, e nenhum trio desses pontos são colunares. O n -ágono é dito esféricamente convexo se, para cada um dos seus lados, os pontos do n -ágono que não pertencem a esse arco estão em apenas um hemisfério do círculo máximo que contém esse arco. Os pontos são chamados vértices do n -ágono.

Um polígono esféricamente convexo determina, para cada um de seus lados, um hemisfério que contém os demais lados. A interseção desses hemisférios forma um conjunto

esfericamente convexo, denominado interior do polígono. Consequentemente, a união do polígono com seu interior também é um conjunto esfericamente convexo.

4.3.1 Círculos Paralelos e Antípoda

O conteúdo apresentado neste capítulo é composto por definições, proposições e observações elaboradas durante o desenvolvimento desta pesquisa. Embora inspiradas por conceitos encontrados na literatura, algumas dessas formulações não foram localizadas de maneira idêntica nas referências consultadas, surgindo a partir de interpretações, adaptações e generalizações realizadas ao longo do estudo. Dessa forma, considera-se pertinente registrá-las neste trabalho, destacando sua contribuição para o desenvolvimento e a organização dos resultados apresentados.

Apresentamos a seguir uma abordagem intrínseca para a definição de círculos paralelos, usualmente associados, na literatura, aos círculos menores concêntricos.

Definição 4.36 *Sejam C_1 e C_2 círculos máximos ou mínimos. Dizemos que C_1 e C_2 são paralelos se, e somente se, seus centros coincidem ou são antípodas. Nesse caso escrevemos, $C_1 \parallel C_2$.*

A partir da Definição 4.36, podem ser estabelecidas algumas proposições que descrevem propriedades dos círculos paralelos.

Proposição 4.32 *Sejam $C_1 \parallel C_2$, e seja C_3 um círculo máximo ou mínimo tal que $C_1 \cap C_3 = \{A, B\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{C, D\}$. Então, $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$.*

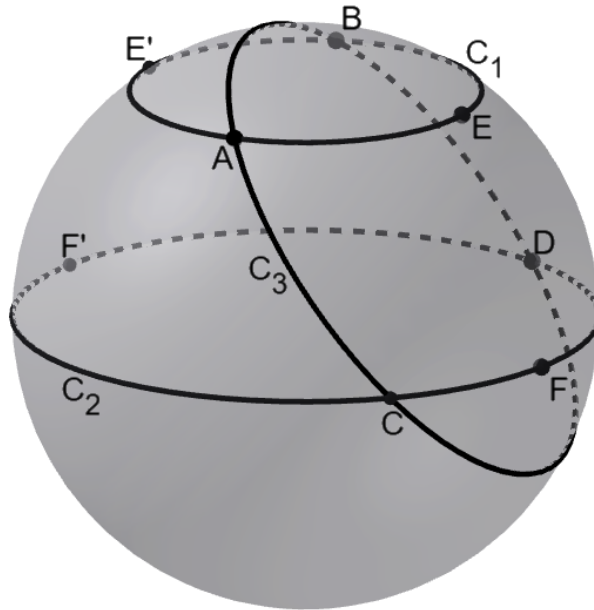


Figura 32 – Círculos paralelos

Demonstração. Sejam $C_1 \parallel C_2$, e seja C_3 um círculo máximo ou mínimo tal que (Ver Figura-32) $C_1 \cap C_3 = \{A, B\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{C, D\}$.

Considere P como sendo o centro de C_3 . Como A, B, C e D pertencem a C_3 , segue da Definição 4.8 que, $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{PC} = \widehat{PD}$.

Além disso, os ângulos $\sphericalangle APC$ e o $\sphericalangle BPD$ são ângulos verticais. Portanto, pela Proposição 4.20 $\sphericalangle APC \cong \sphericalangle BPD$. Assim, o $\triangle APC$ e o $\triangle BPD$ possuem dois lados correspondentes congruentes e o ângulo compreendido entre eles congruente. Pelo critério *LAL*, segue que $\triangle APC \cong \triangle BPD$. Consequentemente, $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$, como desejado. $\square$

Proposição 4.33 *A conclusão da Proposição 4.32 continua válida mesmo quando uma das interseções $C_1 \cap C_3$ ou $C_2 \cap C_3$ é um único ponto.*

Demonstração. Sejam $C_1 \parallel C_2$, e seja C_3 um círculo máximo ou mínimo tal que $C_1 \cap C_3 = \{A\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{B, C\}$. Neste caso, o ponto A é o único ponto de contato entre C_1 e C_3 . Tomando o limite da configuração anterior quando $B \rightarrow A$ (ou $A \rightarrow B$), obtemos a congruência $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$, pois os triângulos degenerados se reduzem a uma relação de simetria. Portanto, a conclusão permanece válida neste caso degenerado, como desejado. $\square$

Observação 4.1 *Nas situações consideradas nas proposições anteriores, se $C_1 \cap C_3 = \{P\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{P'\}$, então P e P' são pontos antípodas em C_3 .*

Proposição 4.34 *Sejam $C_1 \parallel C_2$, e seja C_3 um círculo máximo ou mínimo tal que $C_1 \cap C_3 = \{A, B\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{C, D\}$. Então, $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CDB$ e $\sphericalangle DBA \cong \sphericalangle BAC$.*

Demonstração. Consideremos as lúnulas $AEBE'A$ e $CFDF'C$, onde E' e F' denotam os antípodas de E e F , respectivamente com $E \in C_1$ e $F \in C_2$. (Ver Figura-32)

Notemos que, as lúnulas $AEBE'A$ e $CFDF'C$ possuem a mesma medida, pois os arcos AB e CD são congruentes (pela Proposição 4.32) e, portanto, as lúnulas correspondentes têm a mesma amplitude angular. Assim, segue da definição de lúnula que os ângulos associados são congruentes. Portanto, $\sphericalangle E'AE \cong \sphericalangle F'CF$. Observemos que o $\sphericalangle CAB$ e o $\sphericalangle E'AE$ são ângulos verticais, logo, pela Proposição 4.20,

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle E'AE.$$

De modo análogo, $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle E'BE$. E como $E'AE$ e $E'BE$ são ângulos associados à mesma lúnula, temos $\sphericalangle E'AE \cong \sphericalangle E'BE$. Portanto, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ABD$. Aplicando exatamente o mesmo argumento à lúnula $CFDF'C$, obtemos $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CDB$. Concluimos que $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CDB$ e $\sphericalangle DBA \cong \sphericalangle BAC$, como desejado. $\square$

Proposição 4.35 *A Proposição 4.34 admite uma versão análoga ao caso descrito na Proposição 4.33. Mais precisamente, sejam $C_1 \parallel C_2$, e seja C_3 um círculo máximo ou mínimo tal que $C_1 \cap C_3 = \{A\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{B, C\}$. Então,*

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB$$

Demonstração. No caso degenerado em que $C_1 \cap C_3 = \{A\}$, o ponto A é os dois pontos de interseção A e B da Proposição 4.34 quando estes coincidem. Assim, aplicando a conclusão daquela proposição com $A = B$, obtemos

$$\angle ACD \cong \angle CDA$$

que, renomeando D como B (já que $C_2 \cap C_3 = \{B, C\}$), resulta em

$$\angle ACB \cong \angle CBA.$$

Portanto, $\angle ABC \cong \angle ACB$, como desejado. $\square$

A noção de círculo antípoda surgiu naturalmente a partir do conceito de triângulos antípodas estudado anteriormente. De fato, ao observarmos que um triângulo esférico pode ser associado a outro triângulo obtido pela substituição de cada vértice por seu respectivo ponto antípoda, tornou-se natural investigar se construções análogas poderiam ser realizadas para outros objetos da geometria esférica.

Com essa motivação, introduzimos o conceito de círculo antípoda. Embora ideias relacionadas apareçam implicitamente em diversos resultados da geometria esférica, não foi encontrada, nas referências consultadas, uma definição explícita e formalmente apresentada com essa nomenclatura. Assim, julgamos conveniente registrar essa construção, bem como algumas de suas propriedades imediatas.

Definição 4.37 *Seja C um círculo máximo ou mínimo. Definimos o círculo antípoda de C , denotado por C^a , como o conjunto formado pelos pontos antípodas dos pontos de C .*

Notemos que, esta definição é intrínseca porque depende apenas de pontos da esfera e da operação de antípodalidade, sem recorrer a planos ou coordenadas externas.

A definição anterior garante que não é produzido um novo círculo quando aplicada a círculos máximos.

Proposição 4.36 *Se C é um círculo máximo, então $C^a = C$.*

Demonstração.

Seja $P \in C$. Como C é um círculo máximo, então o antípoda de P , $P^a \in C$. Agora consideremos um $P' \neq P$ tal que $P' \in C$, pelo mesmo argumento anterior o antípoda de P , $P'^a \in C$. Desta forma temos P, P', P^a e P'^a todos estão em C , como P^a e P'^a não são antípodas, então existe um único círculo máximo que passa por eles, que definimos sendo o círculo antípoda de C , ou seja, C^a como foi construído será igual a C . $\square$

Para círculos mínimos a situação é diferente. Em geral, o círculo antípoda é distinto do círculo original, mas ambos possuem uma relação geométrica simples.

Axioma 4.9 (Isometria da Antipodalidade.) *A aplicação que associa a cada ponto da esfera o seu antípoda preserva distâncias esféricas. Isto é, para quaisquer dois pontos A e B , tem-se $d(A^a, B^a) = d(A, B)$.*

Proposição 4.37 *Todo círculo máximo ou mínimo é paralelo ao seu círculo antípoda.*

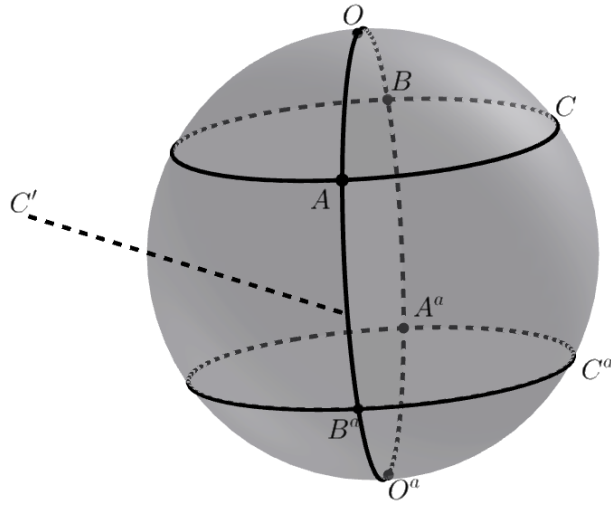


Figura 33 – Círculos paralelos congruentes a círculos antípoda

Demonstração. Se C for um círculo máximo, então pela Proposição 4.36, $C^a = C$. Como círculos coincidentes são paralelos pela Definição 4.36, segue que $C \parallel C^a$.

Se C for um círculo mínimo, seja O seu centro esférico e r seu raio, com $0 < r < \pi/2$. Pela Definição 4.8, para todo $X \in C$, temos $d(O, X) = r$.

Considere o círculo C^a . Afirmamos que O^a é o centro de C^a . De fato, para qualquer ponto $X^a \in C^a$, pelo 4.9 temos que

$$d(O^a, X^a) = d(O, X) = r.$$

Portanto, todos os pontos de C^a estão a uma distância esférica constante r de O^a . Logo, O^a é o centro esférico de C^a .

Como os centros O e O^a são antípodas, pela Definição 4.36, temos que $C \parallel C^a$. Como A^a e B^a são dois pontos arbitrários de C^a obtidos a partir de dois pontos A e B de C , e o raciocínio se repete para qualquer ponto de C , concluímos que todos os pontos de C^a estão a uma distância esférica r de O^a . Logo, O^a é o centro esférico de C^a , e o raio de C^a é o mesmo de C . Assim, C e C^a têm o mesmo centro esférico (antípoda) e o mesmo raio, portanto são círculos paralelos, pela Definição 4.36. Logo, $C \parallel C^a$. □

4.4 CONGRUÊNCIA

Neste capítulo discutiremos quais condições são necessárias sobre os lados e ângulos de dois triângulos para que eles sejam congruentes. Primeiramente, introduzimos a noção de congruência de triângulos esféricos. Assim como na geometria plana, dois triângulos são congruentes quando possuem todos os lados e todos os ângulos correspondentes congruentes.

Definição 4.38 *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são ditos congruentes se satisfazem*

$$\begin{aligned}\widehat{AB} &\cong \widehat{DE}, & \widehat{AC} &\cong \widehat{DF}, & \widehat{BC} &\cong \widehat{EF}, \\ \sphericalangle A &\cong \sphericalangle D, & \sphericalangle B &\cong \sphericalangle E, & \sphericalangle C &\cong \sphericalangle F.\end{aligned}$$

Dizemos então que os lados e ângulos correspondentes são congruentes. Os lados e ângulos correspondentes na Definição 4.38 são determinados pela ordem específica dos vértices em cada triângulo. Assim, $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$. Portanto, afirmar que o $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ é diferente de afirmar que o $\triangle ACB \cong \triangle DEF$.

É esperado que já estejamos familiarizados com as proposições de congruência de triângulos da geometria plana, frequentemente abreviadas como LAL, LLL e ALA. Essas três proposições também serão válidas para triângulos esféricos.

Para evitar confusão, algumas vezes utilizaremos a expressão “LLL plano” para nos referirmos à proposição LLL da geometria plana e “LLL esférico” para nos referirmos à proposição correspondente para triângulos esféricos. Utilizaremos linguagem semelhante para LAL e ALA.

Na geometria plana, é comum adotar um dos casos de congruência de triângulos como axioma e demonstrar os demais a partir dele. Na geometria esférica, adotaremos uma abordagem diferente: todos os casos de congruência para triângulos esféricos serão estabelecidos como teoremas. O principal instrumento utilizado em suas demonstrações será o Axioma 4.8.

O primeiro resultado mostra que, assim como na geometria plana, o conhecimento dos três lados determina completamente um triângulo esférico.

Teorema 4.9 (LLL Esférico) *Suponhamos que nos triângulos $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A_2B_2C_2$ tenhamos $\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}$, $\widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}$ e $\widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}$. Então $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.*

Demonstração. Aplicamos o Axioma 4.8 para concluir que $\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle A_2B_2C_2$. Por permutação das letras A_i , B_i e C_i , podemos concluir o mesmo para os demais ângulos correspondentes. Assim,

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2.$$

□

A seguir mostramos que também é suficiente conhecer dois lados e o ângulo compreendido entre eles.

Teorema 4.10 (LAL Esférico) *Suponhamos que nos $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A_2B_2C_2$ tenhamos $\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}$, $\widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}$ e $\sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B_2$. Então $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.*

Demonstração. Pelo Axioma 4.8 para concluir que os lados opostos aos ângulos congruentes $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$ também são congruentes. Assim, temos uma correspondência LLL entre os triângulos, e pelo Teorema 4.9 os triângulos são congruentes. □

Como na geometria plana, também temos um teorema de congruência ALA. Entretanto, apresentamos uma demonstração que utiliza o triângulo polar.

Teorema 4.11 (ALA Esférico) *Suponhamos que nos $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A_2B_2C_2$ tenhamos $\widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}$, $\sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B_2$ e $\sphericalangle C_1 \cong \sphericalangle C_2$. Então $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.*

Demonstração. Sejam $\triangle A'_iB'_iC'_i$ os triângulos polares de $\triangle A_iB_iC_i$, para $i = 1, 2$ respectivamente. Pelo Teorema 4.8 (2) e como $\widehat{B_1C_1} = \widehat{B_2C_2}$ temos

$$\sphericalangle A'_1 = \pi - \widehat{B_1C_1} = \pi - \widehat{B_2C_2} = \sphericalangle A'_2$$

De modo que $\sphericalangle A'_1 \cong \sphericalangle A'_2$. Dado que $\sphericalangle C_1 \cong \sphericalangle C_2$ e pelo Teorema 4.8 (5)

$$\widehat{A'_1B'_1} = \pi - \sphericalangle C_1 = \pi - \sphericalangle C_2 = \widehat{A'_2B'_2}$$

Logo $\widehat{A'_1B'_1} \cong \widehat{A'_2B'_2}$. Por hipótese o $\sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B_2$ e pelo Teorema 4.8 (6)

$$\widehat{A'_1C'_1} = \pi - \sphericalangle B_1 = \pi - \sphericalangle B_2 = \widehat{A'_2C'_2}$$

Assim $\widehat{A'_1C'_1} \cong \widehat{A'_2C'_2}$. Pelo teorema LAL esférico concluímos que

$$\triangle A'_1B'_1C'_1 \cong \triangle A'_2B'_2C'_2.$$

Por congruência, todos os lados e ângulos correspondentes desses triângulos são congruentes. Em particular,

$$\widehat{A'_1B'_1} \cong \widehat{A'_2B'_2}.$$

Pelo Teorema 4.8 novamente, aplicado na direção inversa, concluímos que os lados correspondentes e os ângulos correspondentes dos triângulos originais $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A_2B_2C_2$ também são congruentes. Portanto,

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2,$$

como desejado. □

Se aplicarmos o mesmo argumento do triângulo polar à congruência LLL esférico, obtemos um teorema muito mais surpreendente, que não é válido na geometria plana.

Teorema 4.12 (AAA Esférico) *Suponhamos que nos $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A_2B_2C_2$ tenhamos $\sphericalangle A_1 \cong \sphericalangle A_2$, $\sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B_2$ e $\sphericalangle C_1 \cong \sphericalangle C_2$. Então $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.*

Demonstração. Sejam o $\triangle A'_iB'_iC'_i$ os triângulos polares de $\triangle A_iB_iC_i$, para $i = 1, 2$.

Pelo Teorema 4.8 (7) e por hipótese temos

$$\widehat{B'_1C'_1} = \pi - \sphericalangle A_1 = \pi - \sphericalangle A_2 = \widehat{B'_2C'_2},$$

Logo $\widehat{B'_1C'_1} \cong \widehat{B'_2C'_2}$. De modo semelhante pelos itens (5) e (6) do Teorema 4.8 e a hipótese obtemos

$$\widehat{A'_1B'_1} \cong \widehat{A'_2B'_2} \quad e \quad \widehat{A'_1C'_1} \cong \widehat{A'_2C'_2}.$$

Assim,

$$\triangle A'_1B'_1C'_1 \cong \triangle A'_2B'_2C'_2$$

pelo Teorema 4.9 LLL esférico. Portanto, todos os ângulos e lados correspondentes dos triângulos $\triangle A'_1B'_1C'_1$ e $\triangle A'_2B'_2C'_2$ são congruentes.

Usando novamente o Teorema 4.8 para retornar aos triângulos originais, concluímos de maneira semelhante que seus lados e ângulos correspondentes também são congruentes. Assim, $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, como desejado. $\square$

Ainda restam outros dois casos a considerar: podemos concluir a congruência de triângulos esféricos a partir de uma correspondência LLA ou LAA de lados e ângulos correspondentes?

Na geometria plana, recordemos que uma correspondência LAA garante a congruência dos triângulos. Entretanto, o mesmo teorema da geometria plana sobre o postulado das paralelas continua válido, e de fato a congruência LAA na geometria plana não depende do postulado das paralelas. Uma demonstração da congruência LAA na geometria plana pode ser encontrada em (Moise, 1963) ou (Moise; Downs, 1971), que utiliza o teorema do ângulo externo. A analogia esférica desse teorema também se mostra falsa.

Na geometria plana, a correspondência LLA não garante a congruência dos triângulos, embora possamos ter uma quantidade finita de triângulos. O conhecimento das medidas de dois lados e de um ângulo não compreendido entre eles não é suficiente para determinar os demais lados do triângulo. Os outros lados podem ser determinados se o ângulo for reto, mas, em caso contrário, existem duas possibilidades para os demais lados e ângulos, ou então o triângulo não pode ser construído.

Podemos fazer uma observação imediata para a geometria esférica: ou LLA ou LAA devem garantir a congruência dos triângulos, ou então nenhum deles o faz. A razão é que, se um deles garantisse congruência, poderíamos demonstrar que o outro também a garante empregando o mesmo argumento com triângulos polares utilizado nos resultados anteriores.

Por exemplo, suponhamos que existisse um teorema de congruência LAA. Para demonstrar que uma correspondência LLA garante congruência, consideraríamos dois triângulos que possuem uma correspondência LLA. Seus triângulos polares teriam então uma correspondência LAA pelo Teorema 4.8, e portanto seriam congruentes. A congruência dos triângulos polares implicaria então (novamente pelo Teorema 4.8) que os triângulos originais também seriam congruentes. Um raciocínio semelhante nos permitiria utilizar um teorema de congruência LLA para demonstrar um teorema de congruência LAA.

Embora LLA e LAA não garantam congruência em geral, é possível obter um resultado parcial impondo uma hipótese adicional relacionada à suplementaridade entre lados ou ângulos correspondentes. O próximo teorema formaliza essa situação.

Teorema 4.13 (LLAA Esférico) *Suponhamos que*

1. *Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ satisfaçam $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$ e $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$. E que o $\sphericalangle C$ não seja suplementar ao $\sphericalangle F$. Então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*
2. *Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ satisfaçam $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$ e $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$. E que $\widehat{AC}$ não seja suplementar a $\widehat{DF}$. Então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Demonstração.

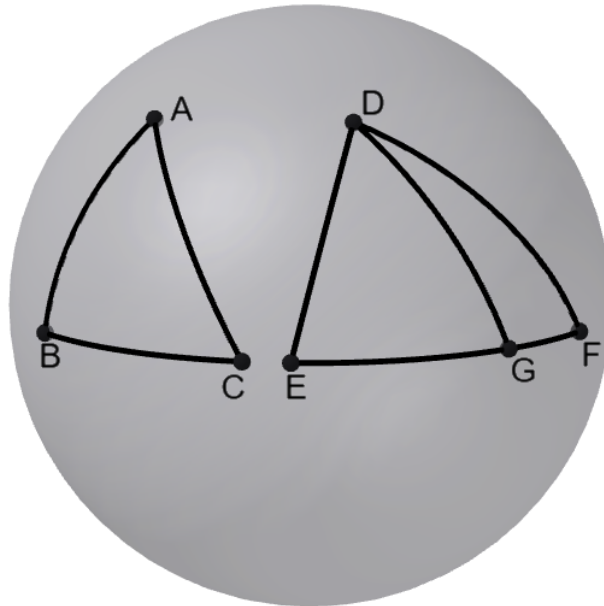


Figura 34 – Teorema LLAA Congruência

Caso (1). Suponhamos que $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Pelo teorema de congruência LLL esférico temos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Caso (2), $\widehat{BC} \neq \widehat{EF}$ então um dos dois arcos $\widehat{BC}$ e $\widehat{EF}$ é maior. Assumamos, sem perda de generalidade, que $\widehat{EF}$ é o arco maior. Então existe um ponto G em $\widehat{EF}$, distinto de E e de F , tal que $\widehat{BC} \cong \widehat{EG}$. Então, pelo caso congruência LAL esférico temos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEG$$

Consequentemente,

$$\sphericalangle DGE \cong \sphericalangle ACB \quad \text{e} \quad \widehat{AC} \cong \widehat{DG}.$$

Por hipótese $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$, logo $\widehat{DG} \cong \widehat{DF}$.

Assim, o $\triangle DGF$ é isósceles e os ângulos opostos aos lados $\widehat{DG}$ e $\widehat{DF}$ são congruentes; isto é,

$$\sphericalangle DGF \cong \sphericalangle DFE.$$

Mas, o $\sphericalangle DGF$ é suplementar e $\sphericalangle DGE \cong \sphericalangle ACB$, assim $\sphericalangle DFE$ é suplementar o $\sphericalangle ACB$, o que é uma contradição das suposições. Portanto, temos que $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$ como acima. Dai o caso (2) não ocorre isso conclui a prova de (1), de modo semelhante se prova (2). $\square$

Isso sugere que, se fornecermos dois pares de lados de um triângulo esférico e os ângulos opostos a eles, então o terceiro lado e o terceiro ângulo podem, em geral, ser determinados. Essa situação é simples na geometria plana (uma vez que a soma das medidas dos ângulos é conhecida), mas não tão simples na esfera.

Entretanto, verifica-se que, na esfera, nem correspondências LLA nem LAA garantem a congruência de triângulos em geral. Um único contraexemplo será suficiente para ambos. Seja $A_1 = A_2$ o polo de qualquer círculo máximo. Escolha pontos B_1, B_2, C_1 e C_2 nesse círculo máximo tais que $\widehat{B_1C_1} \neq \widehat{B_2C_2}$. Pela definição de polo, $\widehat{A_1B_1}, \widehat{A_1C_1}, \widehat{A_2B_2}$ e $\widehat{A_2C_2}$ são todos quartos de círculo. Além disso, $\sphericalangle B_1, \sphericalangle C_1, \sphericalangle B_2$ e $\sphericalangle C_2$ são todos ângulos retos pela Proposição 4.22. Assim, os triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A_2B_2C_2$ estão em correspondência tanto LLA quanto LAA, mas não são congruentes (Ver Figura-35), pois $\widehat{B_1C_1} \neq \widehat{B_2C_2}$.

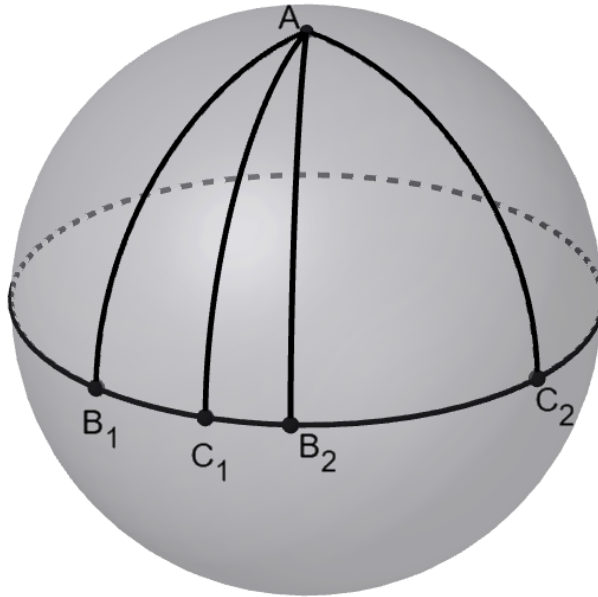


Figura 35 – Contraexemplo LLA e LAA

Os contraexemplos acima são um pouco artificiais, pois envolvem um número maior de ângulos retos do que normalmente ocorre na geometria plana. Se houver exatamente um ângulo reto, obtemos teoremas de congruência.

Apesar dos contraexemplos anteriores, em triângulos retângulos ainda existem casos especiais de congruência, análogos aos conhecidos da geometria plana. O primeiro deles utiliza a hipotenusa e um dos catetos.

Corolário 4.3 (Hipotenusa-Cateto) *Dois triângulos que possuem uma correspondência entre hipotenusa e cateto são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos esféricos tais que $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle E$ são retos, as hipotenusas correspondentes são congruentes e um par de catetos correspondentes também é congruente. Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E \cong \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{AC} \cong \widehat{DF}, \quad \widehat{AB} \cong \widehat{DE},$$

onde $\widehat{AC}$ e $\widehat{DF}$ são as hipotenusas dos respectivos triângulos, e $\widehat{AB}$ e $\widehat{DE}$ são catetos correspondentes.

Sendo $\widehat{AC}$ e $\widehat{DF}$ as hipotenusas dos respectivos triângulos. Como os ângulos retos estão em B e E , os ângulos opostos aos catetos correspondentes $\widehat{AB}$ e $\widehat{DE}$ são, $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle F$, respectivamente.

Afirmamos que $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle F$ não são suplementares. Por contradição Se $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle F$ fossem suplementares, então, pela relação entre lados e ângulos em triângulos esféricos, teríamos que os lados opostos a eles seriam iguais ou suplementares. Mas, como $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ e $\widehat{AC} = \widehat{DF}$ com $\widehat{AC} > \widehat{AB}$, a igualdade $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ seria necessária, o que contradiz a propriedade fundamental de que a hipotenusa é maior que o cateto em todo triângulo retângulo esférico não degenerado. Portanto, $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle F$ não são suplementares.

Assim, as hipóteses do item (1) do Teorema 4.13 são satisfeitas: dois lados correspondentes congruentes ($\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$ e $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$), com os ângulos opostos a um deles congruentes ($\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$), e os ângulos opostos ao outro lado não suplementares ($\sphericalangle C$ e $\sphericalangle F$). Logo,

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

□

Outro caso especial para triângulos retângulos envolve a hipotenusa e um dos ângulos agudos correspondentes.

Corolário 4.4 (Hipotenusa-Ângulo) *Dois triângulos esféricos que possuem uma correspondência hipotenusa-ângulo são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos esféricos tais que $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E \cong \frac{\pi}{2}$, as hipotenusas $\widehat{AC}$ e $\widehat{DF}$ sejam congruentes e um par de ângulos correspondentes não retos seja congruente. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$. Assim,

$$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E \cong \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{AC} \cong \widehat{DF}, \quad \sphericalangle C \cong \sphericalangle F,$$

onde $\widehat{AC}$ e $\widehat{DF}$ são as hipotenusas dos respectivos triângulos.

Precisamos mostrar que os triângulos são congruentes. Pelo Teorema 4.13 (item 2 - Congruência LLAA) basta verificar que os lados opostos aos ângulos retos, AC e DF , não são suplementares.

De fato, como $AC \cong DF$, temos que suas medidas são iguais. Se as medidas de AC e DF não são iguais a $\frac{\pi}{2}$, então a soma de suas medidas é diferente de π , logo AC e DF não são suplementares. Assim, pelo Teorema 4.13, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Agora, se as medidas de AC e DF não são iguais a $\frac{\pi}{2}$. Nessa situação, AC e DF são lados retos. Então, pela Proposição 4.29 os ângulos opostos a eles também são retos. Portanto, $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle E$ já são retos por hipótese, e além disso, os lados AB , BC , DE e EF também serão retos. Consequentemente, todos os três lados dos triângulos ABC e DEF são congruentes. Pelo caso de congruência LLL Esférico (Teorema 4.9), concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Portanto, em todos os casos, a correspondência hipotenusa-ângulo garante a congruência dos triângulos esféricos. □

4.5 DESIGUALDADES

Tendo considerado muitas situações em que objetos da geometria esférica são iguais ou congruentes, passamos agora a considerar situações em que ocorrem desigualdades. Recorde que, no plano, a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é π radianos (180°). Isso não é verdadeiro para os triângulos esféricos e é provavelmente a distinção mais importante entre os triângulos no plano e os triângulos na esfera. Examinaremos inicialmente essa questão no caso dos triângulos retângulos.

Proposição 4.38 *Em um triângulo esférico retângulo, a soma das medidas dos ângulos é maior que π (180°).*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, suponhamos que o $\triangle ABC$ possui um ângulo reto em B . Se qualquer um dos ângulos em A ou C for reto ou obtuso, o resultado está provado. Assim, podemos supor que os ângulos em A e C são ambos agudos.

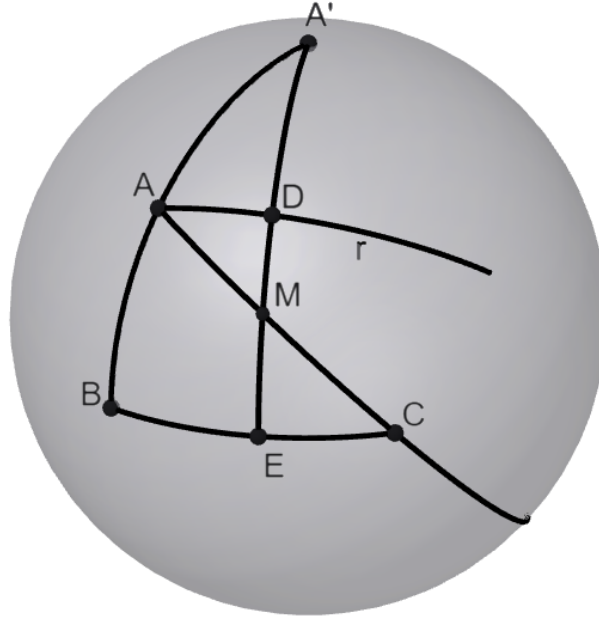
Pela Proposição 4.30, os lados opostos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ também são agudos. Seja A' um polo do $\odot BC$ situado no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$. Então, como $\widehat{AB}$ é agudo, A está entre A' e B (Ver Figura 36). Logo, $\sphericalangle A'AC$ é obtuso, uma vez que sua medida é o suplemento da medida do $\sphericalangle A$.

Como o $\sphericalangle C$ é agudo, temos

$$\sphericalangle C < \sphericalangle A'AC.$$

Então, pela Proposição 4.3, existe uma semirreta $\vec{r}$ com origem em A , formando com $\vec{AC}$ um ângulo congruente o $\sphericalangle C$, e tal que $\vec{r}$ está no mesmo hemisfério que A' relativo ao $\odot AC$. Seja M o ponto médio de $\widehat{AC}$. Pela Proposição 4.4, $\vec{r}$ encontra $\widehat{A'M}$ em um ponto D , situado entre A' e M .

Como A e A' estão no mesmo hemisfério do $\odot BC$, pela Proposição 4.18, os pontos de $\widehat{CA}$, exceto C , estão no mesmo hemisfério que A relativo ao $\odot BC$ e, portanto, no mesmo hemisfério que A' . Assim, M está no mesmo hemisfério que A' relativo ao $\odot BC$, logo $\widehat{A'M}$ é agudo. Como D está entre A' e M , segue que $\widehat{A'D}$ também é agudo.

Figura 36 – Soma dos ângulos de um triângulo é maior que π

Como M está entre A e C , o ponto M está no interior do $\angle AA'C$. Portanto, $\widehat{A'M}$ também está no interior do $\angle AA'C$, exceto em A' , e encontra $\widehat{BC}$ em um ponto E entre B e C . Como $\widehat{A'M}$ passa pelo polo A' do $\odot BC$, encontra $\widehat{BC}$ em ângulo reto. Assim, $\triangle MEC$ é retângulo. Como $\widehat{AM} \cong \widehat{MC}$, pela definição de M , temos $\angle AMD \cong \angle CME$, (por serem ângulos verticais) e $\angle MAD \cong \angle MCE$. Pelo caso de congruência ALA esférico, temos por construção. Logo,

$$\triangle AMD \cong \triangle CME$$

Como o $\triangle CME$ tem ângulo reto em E , segue que o $\triangle AMD$ tem ângulo reto em D . Portanto, o $\triangle A'DA$ também tem ângulo reto em D .

Como $\widehat{A'D}$ é agudo, pela Proposição 4.30 aplicada ao $\triangle A'DA$, concluímos que $\angle DAA'$ é obtuso. Logo, $\angle BAD$ é obtuso. Como o $\angle BAC$ é agudo, então $\angle BAC < \angle BAD$.

Agora, sejam qualquer ponto de $\widehat{A'D}$ que esteja no mesmo hemisfério que A' relativo ao $\odot AB$, exceto por D , de modo que D e M estejam no mesmo hemisfério do $\odot AB$. Pela Proposição 4.21, M está no interior do $\angle BAD$. Assim,

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle A + \angle C.$$

Logo, a soma do $\angle A$ e $\angle C$ é maior que $\frac{\pi}{2}$. Como o $\angle B$ é reto, a soma dos ângulos de $\triangle ABC$ é maior que π . $\square$

A proposição anterior trata apenas dos triângulos retângulos. Mostraremos agora que essa propriedade é válida para qualquer triângulo esférico.

Teorema 4.14 *Em qualquer triângulo esférico, a soma das medidas dos ângulos é maior que π radianos (180°).*

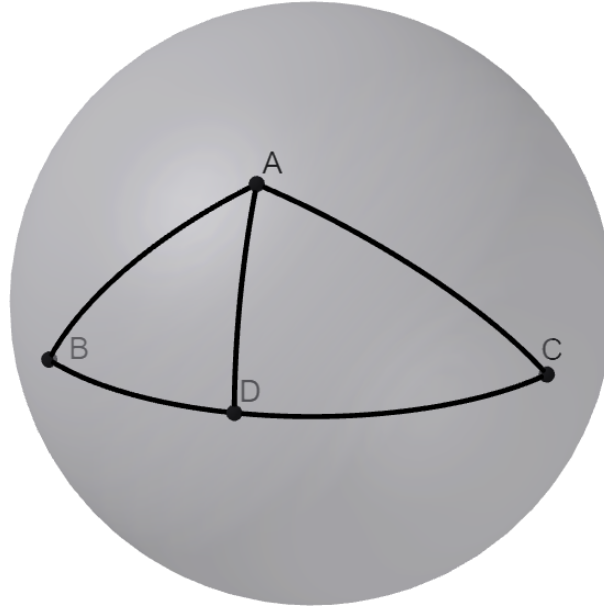


Figura 37 – Em qualquer triângulo a soma é maior que π

Demonstração. Se o triângulo esférico $\triangle ABC$ é retângulo, aplicamos a Proposição 4.38. Se o triângulo dado possui apenas um ângulo agudo, então a soma das medidas dos outros dois (ambos obtusos) deve ser maior que π , e assim terminamos. (Ver Figura 37)

Agora suponhamos que o $\triangle ABC$ tenha dois ângulos agudos (digamos em B e C). Seja D o pé da perpendicular traçada de A ao $\widehat{BC}$, isto é, um ponto D entre B e C . A soma das medidas dos ângulos não retos no $\triangle ADB$ é maior que $\frac{\pi}{2}$. O mesmo é verdadeiro no $\triangle ADC$. Mas, a soma das medidas dos ângulos no $\triangle ABC$ é

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CAD + \sphericalangle B + \sphericalangle C,$$

Uma vez que D está entre B e C . Então essa soma é

$$(\sphericalangle B + \sphericalangle BAD) + (\sphericalangle C + \sphericalangle CAD),$$

A qual (pela Proposição 4.38) é maior que

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

Como desejado. □

O Teorema 4.14 possui uma série de consequências que obtemos simplesmente fazendo uso de triângulos colunares e polares na esfera.

O resultado anterior pode ser transportado para os lados de um triângulo utilizando a noção de triângulo polar, que estabelece uma correspondência entre lados e ângulos.

Teorema 4.15 *Em qualquer triângulo esférico, a soma das medidas dos lados é menor que 2π .*

Demonstração. Dado o $\triangle ABC$, consideramos o seu triângulo polar $\triangle A'B'C'$. Pelo Teorema 4.14

$$\sphericalangle A' + \sphericalangle B' + \sphericalangle C' > \pi.$$

Mas, pelo Teorema 4.8 itens (2), (3) e (4) temos

$$\sphericalangle A' = \pi - \widehat{BC}, \quad \sphericalangle B' = \pi - \widehat{AC}, \quad \text{e} \quad \sphericalangle C' = \pi - \widehat{AB}.$$

Substituindo essas expressões na desigualdade acima, obtemos

$$(\pi - \widehat{BC}) + (\pi - \widehat{AB}) + (\pi - \widehat{AC}) > \pi \quad \text{ou} \quad \widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} < 2\pi$$

Como desejado. $\square$

Outra consequência importante da desigualdade obtida para a soma dos lados é a validade da desigualdade triangular na geometria esférica.

Teorema 4.16 *A soma das medidas de quaisquer dois lados de um triângulo esférico é maior que a medida do terceiro.*

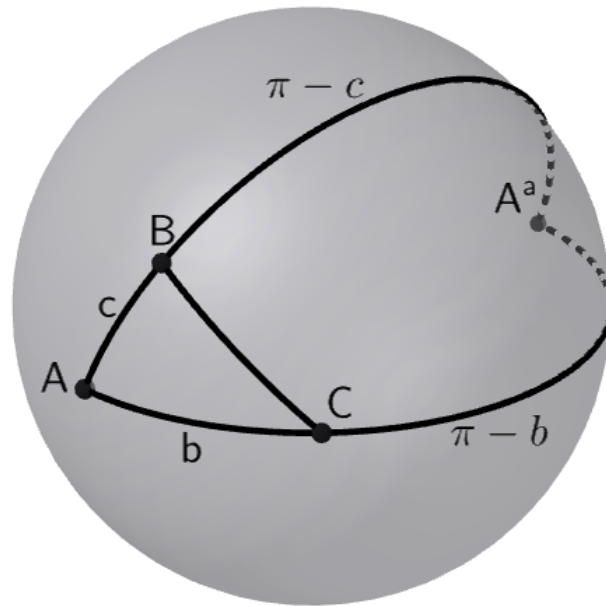


Figura 38 – Soma da medida de quaisquer dois lados

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e o triângulo colunar $\triangle A^aBC$ com o $\triangle ABC$ (Ver Figura 38), então

$$\widehat{A^aB} = \pi - \widehat{AB} \quad \text{e} \quad \widehat{A^aC} = \pi - \widehat{AC}.$$

Aplicando o Teorema 4.15 ao $\triangle A^aBC$, obtemos

$$(\pi - \widehat{AB}) + (\pi - \widehat{AC}) + \widehat{BC} < 2\pi \quad \text{ou} \quad \widehat{BC} < \widehat{AB} + \widehat{AC}$$

Como desejado. As outras duas desigualdades são obtidas por permutação dos vértices. $\square$

Teorema 4.17 (Desigualdade Triangular) *Se A , B e C são três pontos (distintos) sobre uma esfera, então*

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

Onde a igualdade ocorre se, e somente se, B está entre A e C ou $A = C^a$.

Demonstração. Se os pontos A , B e C não são cocirculares, eles formam um triângulo esférico e a conclusão segue imediatamente do Teorema 4.16 (onde B não pode estar entre A e C porque os três pontos não pertencem a um círculo máximo, e A não pode ser antípoda a C pela Proposição 4.26).

Se os pontos são cocirculares. Nesse caso, identificamos um círculo máximo com uma círculo de comprimento 2π .

Se B está entre A e C , então, pela definição de ponto entre em um círculo máximo,

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Além disso, se $A = C^a$, então $d(A, C) = \pi$. Como $d(A, B) \geq 0$ e $d(B, C) \geq 0$. E qualquer caminho de A até C ao longo do círculo máximo possui comprimento pelo menos π , segue que

$$d(A, B) + d(B, C) = \pi = d(A, C).$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Se $A \neq C^a$, existe um único arco menor ligando A a C . Como a distância esférica é o comprimento desse arco menor, a igualdade acima só pode ocorrer quando B pertence a esse arco, isto é, quando B está entre A e C .

Se $A = C^a$, então $d(A, C) = \pi$, e a igualdade pode ocorrer independentemente da posição de B no círculo máximo. Portanto, a igualdade ocorre se, e somente se, B está entre A e C ou $A = C^a$.

□

A desigualdade triangular pode ser estendida imediatamente para cadeias finitas de pontos sobre a esfera.

Corolário 4.5 *Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontos distintos sobre uma esfera. Então*

$$d(A_1, A_n) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + d(A_3, A_4) + \dots + d(A_{n-1}, A_n).$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n .

Para $n = 2$, temos

$$d(A_1, A_2) \leq d(A_1, A_2),$$

O que é imediato. Suponhamos agora que o resultado seja verdadeiro para algum inteiro $n \geq 2$, isto é

$$d(A_1, A_n) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \cdots + d(A_{n-1}, A_n).$$

Mostremos que ele também é verdadeiro para $n + 1$. Pelo Teorema 4.17, aplicado aos pontos A_1 , A_n e A_{n+1} , temos

$$d(A_1, A_{n+1}) \leq d(A_1, A_n) + d(A_n, A_{n+1}).$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$d(A_1, A_{n+1}) \leq (d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \cdots + d(A_{n-1}, A_n)) + d(A_n, A_{n+1}).$$

Logo,

$$d(A_1, A_{n+1}) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \cdots + d(A_{n-1}, A_n) + d(A_n, A_{n+1}),$$

O que prova o resultado para $n + 1$. Portanto, pelo princípio da indução matemática

$$d(A_1, A_n) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + d(A_3, A_4) + \cdots + d(A_{n-1}, A_n)$$

Para quaisquer pontos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n$ sobre uma esfera. $\square$

Agora utilizamos a noção de triângulo polar para provar mais dois teoremas que nos permitem encontrar relações entre as medidas dos ângulos de um triângulo esférico.

Teorema 4.18 *Em qualquer $\triangle ABC$, temos*

1. $\sphericalangle A + \sphericalangle B < \pi + \sphericalangle C$;
2. $\sphericalangle B + \sphericalangle C < \pi + \sphericalangle A$;
3. $\sphericalangle A + \sphericalangle C < \pi + \sphericalangle B$;
4. $\pi < \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 3\pi$.

Demonstração. Seja o $\triangle A'B'C'$ o triângulo polar de $\triangle ABC$. Pelo Teorema 4.16, $\widehat{B'C'} + \widehat{A'C'} > \widehat{A'B'}$. Pelo Teorema 4.8, temos

$$\widehat{B'C'} = \pi - \sphericalangle A, \quad \widehat{A'C'} = \pi - \sphericalangle B \quad e \quad \widehat{A'B'} = \pi - \sphericalangle C.$$

Substituindo essas expressões na desigualdade acima, obtemos

$$(\pi - \sphericalangle A) + (\pi - \sphericalangle B) > \pi - \sphericalangle C,$$

o que implica

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B < \pi + \sphericalangle C,$$

provando o item (1).

Os itens (2) e (3) são obtidos por permutação dos vértices.

A desigualdade inferior do item (4) é exatamente a afirmação do Teorema 4.14. Já a desigualdade superior decorre do fato de que nenhum ângulo esférico pode ter medida maior que π . Portanto,

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 3\pi.$$

Assim,

$$\pi < \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 3\pi,$$

concluindo a demonstração do item (4). $\square$

Os Teoremas 4.15 e 4.18 estabelecem que, em todo triângulo esférico, a soma das medidas dos lados pertence ao intervalo $(0, 2\pi)$ e a soma das medidas dos ângulos ao intervalo $(\pi, 3\pi)$. Esses limites são ótimos: em triângulos muito pequenos, a soma dos lados aproxima-se de 0 e a soma dos ângulos aproxima-se de π ; por outro lado, em triângulos cujos lados quase coincidem com um círculo máximo, a soma dos lados aproxima-se de 2π e a soma dos ângulos aproxima-se de 3π , como ilustrado na Figura 39.

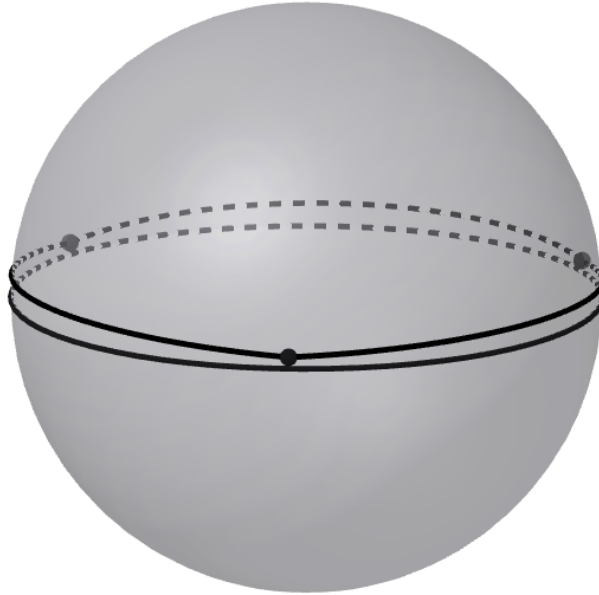


Figura 39 – Um triângulo cuja soma dos ângulos é próxima de 3π

Para estabelecer uma versão esférica do Teorema do Ângulo Externo, introduzimos inicialmente a noção de ângulo externo de um triângulo esférico.

Definição 4.39 *Seja o $\triangle ABC$ um triângulo esférico. Sejam A^a , B^a e C^a os pontos antípodas de A , B e C , respectivamente. Então, os ângulos externo em A são os ângulos $\sphericalangle BAC^a$ e $\sphericalangle CAB^a$. Os ângulos interiores opostos (ou ângulos interiores remotos) o $\sphericalangle BAC^a$ e $\sphericalangle CAB^a$ são os ângulos $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle ACB$.*

A definição anterior permite estabelecer uma versão esférica do clássico Teorema do Ângulo Externo da geometria plana.

Teorema 4.19 (do Ângulo Externo Esférico) *A medida de qualquer ângulo externo de um triângulo esférico é menor que a soma das medidas dos ângulos interiores opostos e maior que a diferença (em valor absoluto) entre essas medidas.*

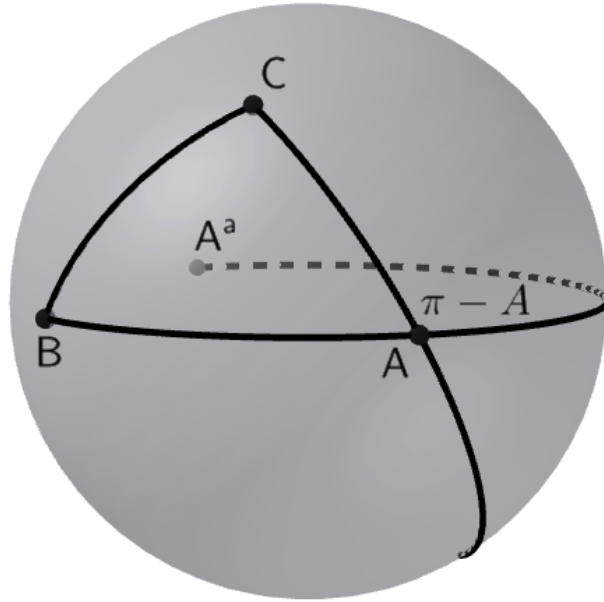


Figura 40 – Teorema do Ângulo Externo Esférico

Demonstração. Seja o $\triangle ABC$ um triângulo esférico e consideremos o ângulo externo em A (Ver Figura 40). Pelo Teorema 4.14

$$\pi < \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C,$$

Logo,

$$\pi - \sphericalangle A < \sphericalangle B + \sphericalangle C.$$

Por outro lado o ângulo externo em A tem medida $\pi - \sphericalangle A$, segue que a medida desse ângulo externo é menor que a soma das medidas dos ângulos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$. Das desigualdades (1) e (3) do Teorema 4.18 obtemos, respectivamente

$$\pi - \sphericalangle A > \sphericalangle B - \sphericalangle C \quad \text{e} \quad \pi - \sphericalangle A > \sphericalangle C - \sphericalangle B,$$

Portanto,

$$\pi - \sphericalangle A > |\sphericalangle B - \sphericalangle C|.$$

Assim, a medida do ângulo externo é maior que o valor absoluto da diferença entre as medidas dos ângulos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$. Isso é exatamente o que queríamos demonstrar. As desigualdades para os ângulos externos em B e em C são análogas. $\square$

Diferentemente da geometria plana, em que a medida de um ângulo externo é exatamente igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes, na geometria esférica essa igualdade deixa de ser válida. Como a soma das medidas dos ângulos

internos de um triângulo esférico é sempre maior que π , o ângulo externo passa a satisfazer apenas desigualdades: sua medida é menor que a soma das medidas dos ângulos interiores opostos e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas. Assim, o teorema do ângulo externo na esfera fornece limites para a medida do ângulo externo, em vez de uma expressão de igualdade como ocorre na geometria euclidiana.

Como consequência das desigualdades obtidas anteriormente, podemos estabelecer a relação entre a ordem dos lados e a ordem dos ângulos opostos de um triângulo esférico.

Teorema 4.20 *Em um triângulo, valem as seguintes relações entre lados e ângulos opostos:*

1. *Se dois lados têm comprimentos diferentes, então os ângulos opostos a eles também são diferentes, e o maior ângulo está oposto ao maior lado.*
2. *Reciprocamente, se dois ângulos têm medidas diferentes, então os lados opostos a eles também são diferentes, e o maior lado está oposto ao maior ângulo.*

Demonstração. 1. Suponhamos que o triângulo seja o $\triangle ABC$ e que $\widehat{AB} > \widehat{BC}$. Escolha um ponto D em $\widehat{AB}$ tal que $\widehat{BD} = \widehat{BC}$. (Ver Figura 41)

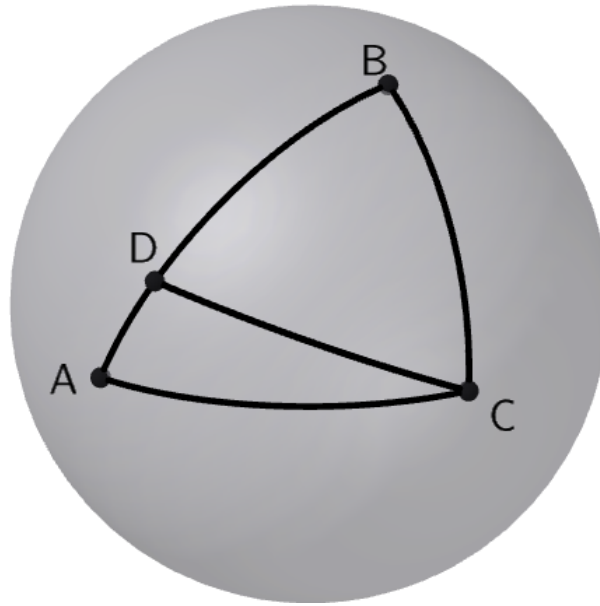


Figura 41 – Triângulo cujas medidas são desiguais

Pelo teorema do triângulo isósceles 4.5

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD.$$

Agora, $\sphericalangle BDC$ é um ângulo externo de $\triangle ADC$; portanto, pelo teorema do ângulo externo 4.19,

$$\sphericalangle BDC > |\sphericalangle BAC - \sphericalangle DCA|.$$

Como o $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$, temos

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle DCA > \sphericalangle BAC.$$

Pela Proposição 4.21

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA.$$

Logo,

$$\sphericalangle BCA > \sphericalangle BAC,$$

Como desejado.

A segunda afirmação segue da primeira e do teorema do triângulo isósceles 4.5: se os lados opostos fossem iguais em medida, então os ângulos também o seriam. $\square$

Assim como na geometria plana, a ordem de grandeza entre os lados de um triângulo esférico corresponde exatamente à ordem de grandeza entre os ângulos opostos. Em outras palavras, o maior lado está sempre oposto ao maior ângulo, e reciprocamente. Embora a demonstração na geometria esférica exija argumentos próprios, baseados no teorema do ângulo externo esférico e em propriedades específicas da esfera, o resultado final coincide com o conhecido teorema da geometria euclidiana. Isso mostra que, apesar das diferenças introduzidas pela curvatura da esfera, a relação de monotonicidade entre lados e ângulos permanece preservada.

Aplicando os resultados anteriores ao caso particular dos triângulos retângulos, obtemos uma caracterização da posição da hipotenusa em relação aos catetos.

Proposição 4.39 *Suponhamos que o $\triangle ABC$ tenha um ângulo reto em C . Então o lado $\widehat{BC}$ é menor que, congruente a, ou maior que a hipotenusa $\widehat{AB}$ se, e somente se, $\widehat{BC}$ é agudo, reto ou obtuso, respectivamente. Além disso, se $\widehat{BC}$ não é reto, então $\widehat{AB}$ está entre $\widehat{BC}$ e $\pi - \widehat{BC}$.*

Demonstração. Sabemos pela Proposição 4.30 (Ver Figura 25) que $\widehat{BC}$ é agudo, reto ou obtuso se, e somente se, $\sphericalangle BAC$ é agudo, reto ou obtuso, respectivamente.

Pelos teoremas 4.20, 4.5 e 4.14, segue que isso ocorre se, e somente se, o lado oposto o $\sphericalangle BAC$ é menor que, congruente a, ou maior que o lado oposto o $\sphericalangle ACB$, respectivamente; isto é, se $\widehat{BC}$ é menor que, congruente a, ou maior que a hipotenusa $\widehat{AB}$.

Consideremos agora o $\triangle A^aBC$. Se $\widehat{BC}$ é agudo, então $\sphericalangle BAC$ é agudo, logo $\sphericalangle BA^aC$ também é agudo. Assim,

$$\widehat{A^aB} > \widehat{BC},$$

ou seja, $\pi - \widehat{AB} > \widehat{BC}$ e, portanto, $\widehat{AB} < \pi - \widehat{BC}$. Como já sabemos que $\widehat{AB} > \widehat{BC}$, concluímos que

$$\widehat{BC} < \widehat{AB} < \pi - \widehat{BC}.$$

O caso em que $\widehat{BC}$ é obtuso é semelhante. $\square$

O próximo resultado será apresentado sem demonstração, uma vez que sua prova depende de conceitos que ainda serão desenvolvidos posteriormente.

Proposição 4.40 (da Dobradiça Esférica) *Suponhamos que o $\triangle ABC$ e o $\triangle DEF$ sejam triângulos esféricos com $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$ e $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$. Então, $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF$ se, e somente se, $\widehat{AC} < \widehat{DF}$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF$. Como $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$ e $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$. Se tivéssemos, $\widehat{AC} = \widehat{DF}$.

Então o $\triangle ABC$ e o $\triangle DEF$ seriam congruentes pelo caso LLL, e consequentemente

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF,$$

e que contradiz a hipótese. Além disso, não pode ocorrer $\widehat{AC} > \widehat{DF}$. Pois, pelo Teorema 4.20, aplicado aos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, teríamos $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$. Novamente uma contradição. Logo, $\widehat{AC} < \widehat{DF}$.

Reciprocamente, suponha que $\widehat{AC} < \widehat{DF}$. Se fosse $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$. Então, juntamente com

$$\widehat{AB} \cong \widehat{DE} \quad \text{e} \quad \widehat{BC} \cong \widehat{EF},$$

os $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ seriam congruentes pelo caso LAL. Portanto $\widehat{AC} = \widehat{DF}$, contradizendo a hipótese. Por outro lado, se $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$. Então, pela primeira parte da demonstração já estabelecida, teríamos $\widehat{AC} > \widehat{DF}$, o que também contradiz a hipótese. Consequentemente,

$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF.$$

Portanto, $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF$ se, e somente se, $\widehat{AC} < \widehat{DF}$. □

4.6 ÁREA

O principal objetivo deste capítulo é desenvolver fórmulas para o cálculo de áreas de regiões esféricas delimitadas por triângulos. A partir dos conceitos e resultados estabelecidos anteriormente, obteremos expressões que relacionam a área dessas regiões com os ângulos e evidenciando algumas das diferenças fundamentais entre a geometria esférica e a geometria plana.

Axioma 4.10 *Existe um número real positivo r tal que a área da esfera é igual a $4\pi r^2$, a área da lúnula determinada por um ângulo de medida θ radianos é igual a $2\theta r^2$ e a área de qualquer arco esférico é nula.*

O Axioma 4.10 define as bases para medir áreas na superfície da esfera. Ele estabelece a área total esférica a partir de seu raio, define que a área de uma lúnula é proporcional ao seu ângulo e determina que arcos esféricos possuem área nula. Com isso, a área total passa a servir de referência para medir qualquer outra região da esfera, o que permite deduzir, mais adiante, a fórmula para a área de um triângulo esférico.

Axioma 4.11 *Se dois triângulos esféricos são antípodas, então seus interiores possuem a mesma área.*

Axioma 4.12 *Se duas regiões esféricas possuem interiores que não se sobrepõem, então a área da união das regiões é a soma das áreas das regiões.*

Como um arco esférico tem área zero, a área do triângulo em si é nula, mas a região por ele limitada possui área positiva. Assim, a área dessa região coincide com a da união do triângulo com seu interior. Portanto, podemos falar indistintamente em "área delimitada por um triângulo" para ambas as noções; com frequência, abusa-se da linguagem e diz-se simplesmente "área do triângulo" para denotar a área da região interna, quando o contexto torna essa interpretação evidente (Figura 42).

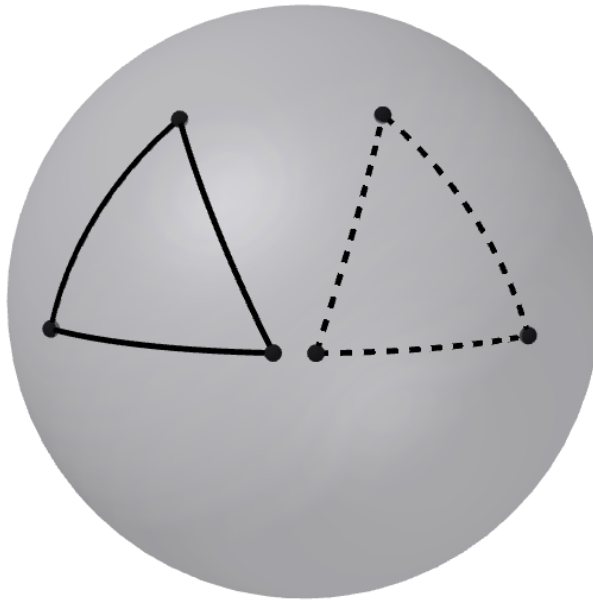


Figura 42 – Um triângulo, seu interior e a união do triângulo com seu interior

Definição 4.40 *Em um $\triangle ABC$, o excesso esférico é definido como a quantidade $2E$, onde*

$$E = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi}{2}.$$

Sejam A^a , B^a e C^a os antípodas de A , B e C , respectivamente. O círculo máximo $\bigcirc AB$ divide a esfera em dois hemisférios; C está em um deles e C^a está no outro. Nesta demonstração, nos referiremos informalmente ao hemisfério que contém C como o hemisfério “superior” e ao hemisfério que contém C^a como o hemisfério “inferior” (Figura 43).

Teorema 4.21 *A área delimitada por um $\triangle ABC$ é dada por*

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \text{area}(\triangle ABC) = (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi)r^2.$$

À primeira vista, esse resultado pode parecer surpreendente, pois, na geometria plana, a área de um triângulo não é determinada apenas por seus ângulos. Entretanto, em geometria esférica, o Teorema de Congruência AAA esférico garante que um triângulo é completamente determinado por seus ângulos. Consequentemente, sua área também fica unicamente determinada por eles.

Demonstração. Sobre o $\odot AB$, temos os pontos A, B, A^a e B^a nessa ordem. Então o hemisfério superior pode ser escrito como a união das regiões limitadas por quatro triângulos:

$$\triangle ABC, \quad \triangle BA^aC, \quad \triangle A^aB^aC, \quad \text{e} \quad \triangle B^aAC.$$

(Desprezamos a contribuição dos lados dos triângulos propriamente ditos, que possuem área nula.) A união das regiões limitadas pelos dois primeiros triângulos ($\triangle ABC$ e $\triangle BA^aC$) é a lúnula ABA^aCA ; sua medida angular é o $\sphericalangle A$. Assim, sua área é $2 \sphericalangle A r^2$. (Ver Figura 43)

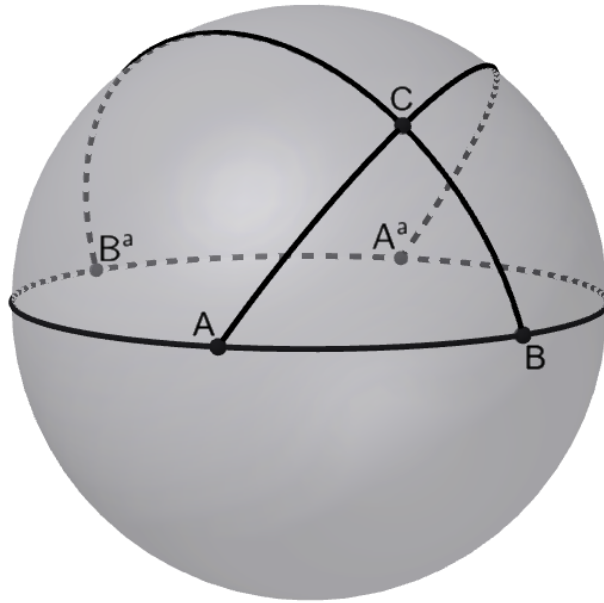


Figura 43 – Área do triângulo ABC

A união das regiões do primeiro e do quarto triângulo ($\triangle ABC$ e $\triangle B^aAC$) é a lúnula BAB^aC^aB ; sua medida angular é o $\sphericalangle B$, de modo que sua área é $2 \sphericalangle B r^2$.

A lúnula CAC^aBC possui medida angular $\sphericalangle C$ (de modo que sua área é $2 \sphericalangle C r^2$) e é a união das regiões do $\triangle ABC$ e do $\triangle A^aB^aC$.

Tendo escrito três dessas regiões como uniões de duas regiões triangulares não sobrepostas, podemos escrever que a área de cada lúnula é a soma das áreas dos dois triângulos cuja união o constitui

$$2 \sphericalangle A r^2 = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle BA^aC) \quad 14.4$$

$$2 \sphericalangle B r^2 = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle B^aAC) \quad 14.5$$

$$2 \sphericalangle C r^2 = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle ABC^a) \quad 14.6$$

Observemos que, em (14.6), $\triangle ABC^a$ é antípoda a $\triangle A^a B^a C$, e portanto possui a mesma área, de modo que podemos substituir (14.6) por

$$2 \sphericalangle C r^2 = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle A^a B^a C) \quad 14.7$$

Somando (14.4), (14.5) e (14.7), obtemos

$$2(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C)r^2 = 3\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle B^a AC) + \mathcal{A}(\triangle BA^a C) + \mathcal{A}(\triangle A^a B^a C) \quad 14.8$$

O lado direito de (14.8) consiste na área de quatro regiões triangulares cuja união não sobreposta cobre o hemisfério superior.

Como a área do hemisfério superior é $2\pi r^2$, podemos escrever sua área como a soma das áreas dos quatro triângulos

$$2\pi r^2 = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle BA^a C) + \mathcal{A}(\triangle B^a AC) + \mathcal{A}(\triangle A^a B^a C).$$

Substituindo isso em (14.8), obtemos

$$(2 \sphericalangle A + 2 \sphericalangle B + 2 \sphericalangle C)r^2 = 2\mathcal{A}(\triangle ABC) + 2\pi r^2$$

E, resolvendo para $\mathcal{A}(\triangle ABC)$, obtemos, como desejado.

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi)r^2.$$

□

4.7 TRIGONOMETRIA

4.7.1 Teorema de Pitágoras Esférico e Lei dos Senos Esférico

A trigonometria esférica estuda as relações entre distâncias e ângulos na esfera, tendo como foco principal os triângulos esféricos. Diferentemente do que ocorre no plano, a curvatura da esfera altera significativamente essas relações. Enquanto, no plano, duas semirretas com a mesma origem afastam-se continuamente uma da outra, na esfera elas inicialmente se afastam, mas acabam voltando a se aproximar à medida que se dirigem para o ponto antípoda da origem comum. O axioma a seguir quantifica esse comportamento característico da geometria esférica.

Axioma 4.13 *Suponhamos que duas semirretas formem um ângulo de medida θ . Seja x a distância esférica entre dois pontos (um em cada semirreta) situados a uma distância esférica φ do vértice. Então*

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{sen}(\varphi)\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Este axioma é essencialmente a Proposição A.6 localizada no Apêndice B. (Veja também a Figura 53.) Ali a demonstramos como um teorema para esferas no espaço, utilizando as propriedades da geometria tridimensional. Em nosso sistema axiomático não dispomos dessas técnicas e assumiremos isso como um axioma.

Utilizaremos a proposição anterior para deduzir importantes propriedades dos triângulos esféricos retângulos. Para simplificar a notação, adotaremos a seguinte convenção: em um $\triangle ABC$, denotaremos por a , b e c os comprimentos dos lados opostos aos vértices A , B e C , respectivamente.

Proposição 4.41 *Se o $\triangle ABC$ possui um ângulo reto em C (Ver Figura 44), então*

$$\text{sen}(\sphericalangle A) = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(c)}.$$

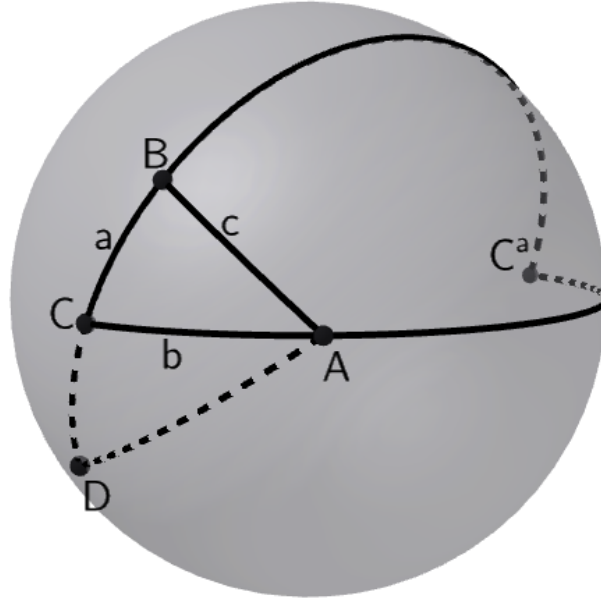


Figura 44 – Se ABC possui um ângulo reto

Demonstração. Primeiramente suponhamos que $\sphericalangle A$ seja agudo. Então, o $\triangle ABC$ pode ser considerado como metade de um triângulo esférico isósceles $\triangle ABD$, em que C é o ponto médio de $\widehat{BD}$. Tomando

$$x = \widehat{BD}, \quad \varphi = \widehat{BA} = \widehat{DA}, \quad \text{e} \quad \theta = 2\sphericalangle A,$$

a Proposição 4.13 fornece,

$$\text{sen}\left(\frac{\widehat{BD}}{2}\right) = \text{sen}(\widehat{BA})\text{sen}\left(\frac{2\sphericalangle A}{2}\right).$$

Como C é o ponto médio do arco $\widehat{BD}$, temos $\frac{\widehat{BD}}{2} = \widehat{BC}$. Além disso, $\frac{2\sphericalangle A}{2} = \sphericalangle A$. Portanto,

$$\text{sen}(\widehat{BC}) = \text{sen}(\widehat{BA}) \text{sen}(\sphericalangle A).$$

Observando que $\widehat{BC} = a$ e $\widehat{BA} = c$, obtemos

$$\text{sen}(a) = \text{sen}(c) \text{sen}(\sphericalangle A).$$

Isolando $\text{sen}(\sphericalangle A)$, segue que

$$\text{sen}(\sphericalangle A) = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(c)},$$

como queríamos demonstrar.

Se $\sphericalangle A$ é reto, então, pela Proposição 4.29, os lados $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ também são retos; assim, a afirmação a ser demonstrada reduz-se a $1 = 1$.

Se $\sphericalangle A$ é obtuso, consideramos o triângulo colunar, sendo $\triangle ABC^a$. O ângulo $\sphericalangle BAC^a$ é agudo e sua medida é $\pi - \sphericalangle A$, enquanto $\widehat{BC}^a = \pi - a$; portanto, pelo caso agudo já considerado,

$$\text{sen}(\pi - \sphericalangle A) = \frac{\text{sen}(\pi - a)}{\text{sen}(c)},$$

o que nos fornece o resultado desejado pela propriedade da função seno. $\square$

A Proposição 4.41 apresenta uma interessante analogia com a trigonometria plana, na qual o seno de um ângulo de um triângulo retângulo é obtido pela razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Em geometria esférica, uma relação semelhante é preservada, mas envolvendo os senos das medidas dos lados: o seno do ângulo é dado pelo quociente entre o seno do lado oposto e o seno da hipotenusa.

Agora utilizamos a notação que acabamos de introduzir para demonstrar diversas relações importantes entre os lados e os ângulos do $\triangle ABC$.

Teorema 4.22 *Se o $\triangle ABC$ possui um ângulo reto em C , então*

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) \tag{4.1}$$

$$\cos(\sphericalangle B) = \text{sen}(\sphericalangle A) \cos(b) \tag{4.2}$$

A Equação (4.1) é chamada de Teorema de Pitágoras Esférico, e a Equação (4.2) é algumas vezes chamada de Teorema de Geber's.

Demonstração. Veja a Figura 45. Primeiramente, suponhamos por simplicidade, que $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são agudos (o que significa que os lados $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$ também são agudos, pela Proposição 4.30). Escolhemos pontos D e E sobre as semirretas esféricas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ a uma distância esférica de $\frac{\pi}{2}$ de B . Então, $\widehat{DE} = \sphericalangle B$. Seja A' o polo do $\odot BC$ no mesmo hemisfério do $\odot BC$ que A . Então B é o polo do $\odot DE$ e, $\widehat{BD} = \widehat{BE} = \widehat{A'C} = \widehat{A'E} = \frac{\pi}{2}$.

Como $\widehat{AC}$ é agudo e $\widehat{A'C}$ é reto, A está entre A' e C . Assim,

$$\widehat{BA'} = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \widehat{BC} < \frac{\pi}{2},$$

temos, $\widehat{BA} < \frac{\pi}{2}$ (pela Proposição 4.18 aplicada a $\overrightarrow{A'C}$). Consideremos o $\triangle A'AD$, que possui um ângulo reto em D . Temos

$$\widehat{A'A} = \frac{\pi}{2} - b, \quad \widehat{AD} = \frac{\pi}{2} - c \quad e \quad \widehat{A'D} = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle B.$$

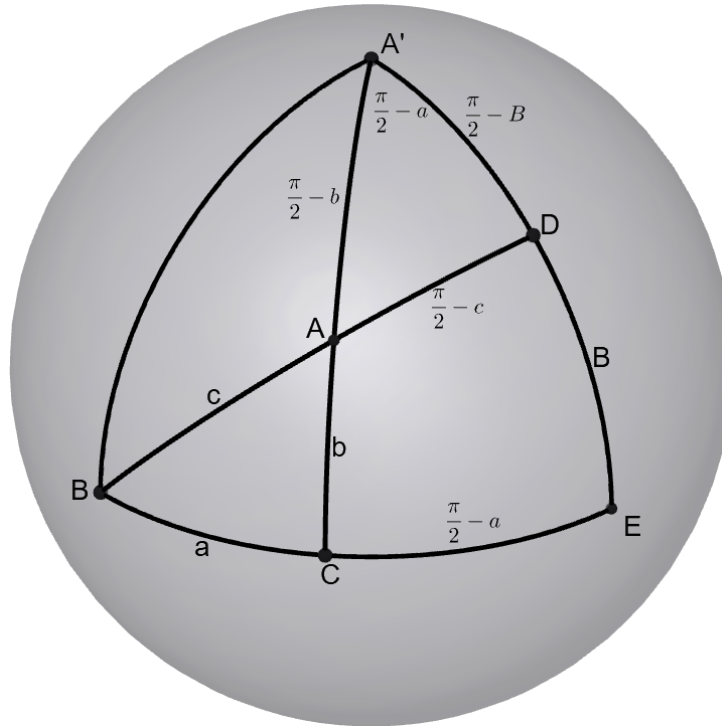


Figura 45 – Se ABC possui um lado reto

Além disso,

$$\widehat{CE} = \frac{\pi}{2} - a,$$

De modo que,

$$\sphericalangle AA'D = \frac{\pi}{2} - a$$

Pela Definição 4.18. Aplicamos então a Proposição 4.41 ao $\triangle A'AD$ duas vezes. Primeiramente,

$$\text{sen}(\sphericalangle AA'D) = \frac{\text{sen}(\widehat{AD})}{\text{sen}(\widehat{A'A})},$$

o que fornece,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}$$

usando,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad (\text{I})$$

e, consequentemente, (4.1). Em seguida,

$$\operatorname{sen}(\sphericalangle A'AD) = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{A'D})}{\operatorname{sen}(\widehat{A'A})} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(A) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle B\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right)},$$

Usando novamente (I), temos que (4.2) também é válida. Os casos em que $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ não são agudos seguem pela consideração de triângulos colunares. Se $\sphericalangle B$ é reto, então $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ também o são pela Proposição 4.29. Assim, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = b = c = \frac{\pi}{2}$, e tanto (4.1) quanto (4.2) reduzem-se a $0 = 0$. Um argumento semelhante vale se $\sphericalangle A$ for reto. Suponhamos agora que $\sphericalangle A$ seja agudo e $\sphericalangle B$ obtuso. Pela Proposição 4.30, $\widehat{BC}$ é agudo e $\widehat{AC}$ é obtuso. Consideremos o $\triangle A^a BC$ colunar, em que ambos os ângulos não retos e sim agudos. Aplicamos (4.1) e (4.2) ao caso agudo para obter

$$\cos(\pi - c) = \cos(a) \cos(\pi - b) \quad e \quad \operatorname{sen}(A) \cos(\pi - b) = \cos(\pi - \sphericalangle B),$$

o que implica o resultado desejado. Um argumento semelhante vale se $\sphericalangle A$ for obtuso e $\sphericalangle B$ agudo. Se $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são ambos obtusos, então consideramos o $\triangle A^a B^a C$ colunar, em que ambos os ângulos não retos são agudos. Aplicamos (4.1) e (4.2) ao caso agudo para obter

$$\cos(c) = \cos(\pi - a) \cos(\pi - b) \quad e \quad \operatorname{sen}(\pi - \sphericalangle A) \cos(\pi - b) = \cos(\pi - \sphericalangle B),$$

o que novamente implica o resultado desejado. $\square$

À primeira vista, pode parecer contraditório que o Teorema de Pitágoras esférico tenha uma forma tão diferente do Teorema de Pitágoras plano, especialmente porque triângulos esféricos muito pequenos se assemelham bastante a triângulos planos. Surge então a questão de como conciliar essas duas expressões. A resposta está no fato de que, para lados suficientemente pequenos, a relação esférica aproxima-se da relação plana. Assim, embora a curvatura da esfera exija uma fórmula diferente, o Teorema de Pitágoras clássico reaparece como uma excelente aproximação local da versão esférica.

A resposta está na observação da série de Taylor para o cosseno. Temos que,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Se substituirmos essa expansão em,

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b),$$

obtemos,

$$1 - \frac{c^2}{2!} + \frac{c^4}{4!} + \cdots = \left(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots\right) \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \cdots\right),$$

igualamos os dois lados

$$1 - \frac{c^2}{2} + \underbrace{\frac{c^4}{4!} - \cdots}_{\text{ordem } \geq 4} = 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \underbrace{\text{termos de ordem } \geq 4}_{\text{em } a, b}.$$

Cancelando o 1 e desprezando os termos de ordem superior (que são $O(a^4, b^4, a^2b^2, c^4)$ e, portanto, muito menores que os quadráticos quando a, b, c são pequenos), obtemos a aproximação de primeira ordem

$$-\frac{c^2}{2} \approx -\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2},$$

donde

$$c^2 \approx a^2 + b^2.$$

Assim, a equação esférica se reduz, em primeira aproximação, ao Teorema de Pitágoras plano $c^2 = a^2 + b^2$. Portanto, o Teorema de Pitágoras plano é o limite de primeira ordem do Teorema de Pitágoras esférico para triângulos esféricos cujos lados e ângulos são extremamente pequenos em comparação com o raio da esfera.

No plano, conclui-se que os ângulos não retos em um triângulo retângulo são complementares e, conseqüentemente, o cosseno de um deles é o seno do outro. A Equação (4.2) lembra esse fato. De fato, se a e b são próximos de 0, então o triângulo é quase plano, $\cos(b)$ é próximo de 1, e (4.2) fornece o resultado plano.

A Proposição 4.41 também nos permite obter rapidamente um importante resultado para triângulos gerais.

Teorema 4.23 (*Lei dos Senos Esférico*) *Em qualquer $\triangle ABC$, é válido*

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\sphericalangle A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\sphericalangle B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\sphericalangle C)} \quad 4.3$$

Demonstração. Provaremos que,

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\sphericalangle A)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\sphericalangle C)} \quad 4.4$$

Então, (4.3) é obtida pela permutação dos vértices. Se $\triangle ABC$ possui um ângulo reto em C , então $\text{sen}(\sphericalangle C) = 1$ e, pela Proposição 4.41,

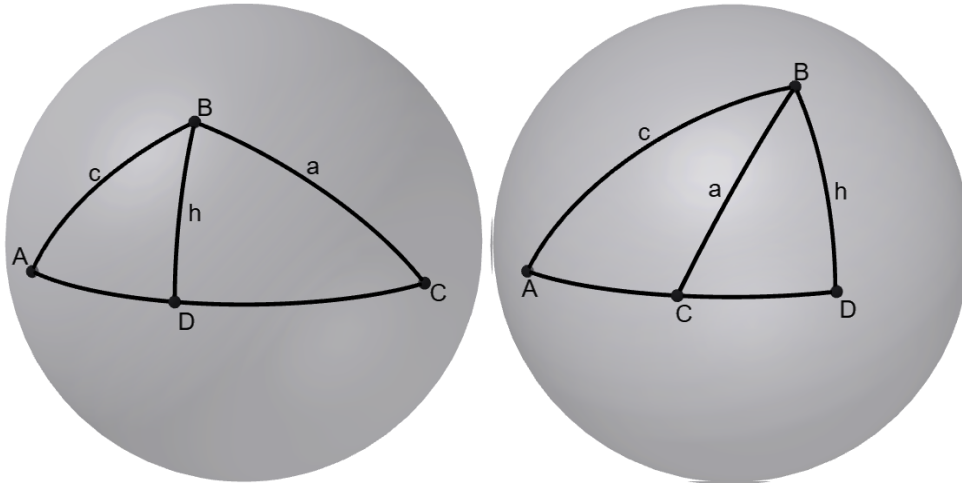


Figura 46 – A Lei dos Senos Esférico

$$\text{sen}(\sphericalangle A) = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(c)},$$

o que implica,

$$\frac{\text{sen}(\sphericalangle A)}{\text{sen}(\sphericalangle C)} = \text{sen}(\sphericalangle A) = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(c)},$$

forneendo (4.4). Uma observação semelhante vale se houver um ângulo reto em A . Se os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle C$ não são retos, então existem dois pés de altura a partir de B sobre o $\widehat{AC}$. Esses são antípodas, de modo que um deles (digamos D) pertence a $\widehat{AC}$. Então, D é distinto de C e de A . Sejam o $\triangle ADB$ e o $\triangle CDB$ triângulos que possuem ângulos retos em D , de modo que, pela Proposição 4.41

$$\text{sen}(\sphericalangle A) = \frac{\text{sen}(h)}{\text{sen}(c)} \quad e \quad \text{sen}(\sphericalangle C) = \frac{\text{sen}(h)}{\text{sen}(a)}.$$

Dividindo essas duas igualdades e reorganizando os fatores, obtemos (4.4). $\square$

A Lei dos Senos Esférico preserva a ideia fundamental da versão plana ao relacionar os lados de um triângulo com seus ângulos opostos. Entretanto, diferentemente da geometria euclidiana, essa relação envolve os senos das medidas dos lados, e não os próprios comprimentos. Essa diferença é consequência da curvatura da esfera. Além disso, quando os lados do triângulo são suficientemente pequenos, vale a aproximação $\sin(x) \approx x$, de modo que a Lei dos Senos Esférico se reduz naturalmente à Lei dos Senos da geometria plana.

5 CONCLUSÃO

O estudo desenvolvido ao longo deste trabalho permitiu alcançar o objetivo proposto de apresentar, de forma introdutória e sistemática, a Geometria Esférica, destacando seus fundamentos históricos, sua construção axiomática e alguns de seus principais resultados geométricos e trigonométricos. A partir da análise de conceitos relacionados à curvatura da esfera e às geodésicas, nos foi possível compreender como a geometria sobre superfícies esféricas difere da geometria euclidiana e como essas diferenças influenciam propriedades fundamentais de figuras geométricas.

A abordagem axiomática que adotamos mostrou-se particularmente importante para o desenvolvimento da teoria, permitindo construir rigorosamente conceitos como distância esférica, antipodalidade, hemisférios, convexidade esférica e ângulos. A partir desses elementos, foi possível estabelecer diversos resultados fundamentais que serviram de base para o estudo dos triângulos esféricos e da trigonometria esférica.

O estudo dos triângulos esféricos constituiu uma das partes centrais deste trabalho. A análise de suas propriedades evidenciou características que contrastam diretamente com a geometria plana, destacando a influência da curvatura da esfera sobre as relações geométricas. Nesse contexto, os critérios de congruência, os resultados envolvendo a soma dos ângulos internos e o desenvolvimento da teoria de áreas permitiram compreender de forma mais profunda a estrutura geométrica da esfera. Em particular, a obtenção da fórmula da área dos triângulos esféricos por meio do Teorema de Girard-Euler revelou uma importante conexão entre medidas angulares e propriedades métricas.

Outro aspecto relevante foi o estudo da Trigonometria Esférica. As demonstrações do Teorema de Pitágoras Esférico e da Lei dos Senos Esférico evidenciaram como resultados clássicos da geometria plana admitem versões adaptadas ao contexto esférico.

Além dos resultados clássicos presentes na literatura, o desenvolvimento deste trabalho nos possibilitou a investigação de conceitos relacionados a círculos antípodas e círculos paralelos. Embora apresentados como resultados complementares, esses estudos contribuíram para ampliar a compreensão das propriedades geométricas da esfera e estabelecer conexões entre a abordagem axiomática e a interpretação espacial dos objetos estudados.

Ao longo desta pesquisa, foi possível constatar que a geometria esférica preserva diversos conceitos da geometria plana, porém com propriedades profundamente influenciadas pela curvatura da esfera. Enquanto na geometria plana as retas são infinitas, na geometria esférica as retas são representadas por círculos máximos, que possuem comprimento finito. Além disso, ao contrário do plano, onde existem retas paralelas que não se intersectam, quaisquer dois círculos máximos distintos sempre se intersectam em exatamente dois pontos antípodas. Observou-se também que a noção de polo de um círculo máximo desempenha papel análogo ao do centro de uma circunferência plana, embora possua pro-

priedades próprias da geometria esférica. Da mesma forma, enquanto uma semirreta plana é infinita, uma semirreta esférica possui extensão limitada e termina no ponto antípoda de sua origem. O estudo evidenciou ainda a existência de conceitos tipicamente esféricos, como hemisférios, lúnulas, triângulos colunares, triângulos antípodas, triângulos polares e polos de círculos máximos, objetos que não possuem equivalentes naturais na geometria euclidiana.

No contexto dos triângulos, verificou-se que os casos de congruência LLL, LAL e ALA permanecem válidos, mas, diferentemente da geometria plana, onde o caso AAA garante apenas semelhança, na geometria esférica ele garante congruência. Consequentemente, não existem triângulos semelhantes não congruentes na esfera. Verificou-se também que a relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos opostos permanece válida: o maior lado está sempre oposto ao maior ângulo e, reciprocamente, o maior ângulo está sempre oposto ao maior lado, embora sua demonstração na geometria esférica utilize propriedades específicas da esfera. Outra diferença fundamental observada foi que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior que π e menor que 3π , enquanto na geometria plana essa soma é sempre igual a π . Da mesma forma, o Teorema do Ângulo Externo também sofre uma alteração significativa: na geometria plana, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes, ao passo que, na geometria esférica, essa igualdade deixa de ser válida, sendo substituída por desigualdades que estabelecem limites para a medida do ângulo externo. Esse fato evidencia como a curvatura da esfera modifica relações clássicas da geometria euclidiana. Além disso, a soma dos ângulos está diretamente relacionada ao excesso esférico, que permite calcular a área de um triângulo esférico exclusivamente a partir de seus ângulos, algo impossível na geometria plana.

No campo da trigonometria, verificou-se que o seno de um ângulo em um triângulo retângulo esférico é dado pela razão entre o seno do lado oposto e o seno da hipotenusa, enquanto no plano utiliza-se a razão entre os próprios comprimentos dos lados. De maneira semelhante, o Teorema de Pitágoras assume na esfera a forma $\cos(c) = \cos(a) \cos(b)$, em contraste com a relação algébrica clássica $c^2 = a^2 + b^2$ da geometria plana. Entretanto, por meio da expansão em série de Taylor da função cosseno, observou-se que a fórmula esférica aproxima-se naturalmente da fórmula plana quando os lados do triângulo são suficientemente pequenos, evidenciando que a geometria euclidiana pode ser vista como uma aproximação local da geometria da esfera.

Por fim, este trabalho evidenciou a riqueza matemática da Geometria Esférica e sua importância dentro do contexto das Geometrias Não Euclidianas. Espera-se que os resultados apresentados possam contribuir para o estudo introdutório do tema e servir como material de apoio para estudantes interessados em aprofundar seus conhecimentos nessa área.

REFERÊNCIAS

EUCLID. **Phaenomena**. [*S. l.*]: Ancient Greek manuscript, 300. Early work on spherical astronomy; survives only in later commentaries.

HENDERSON, David W.; TAIMINA, Daina. **Experiencing Geometry: Euclidean and Non-Euclidean with History**. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN 9780131437487.

MOISE, Edwin E. **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1963. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2021/Moise.pdf>. Acesso em: 31 maio 2026.

MOISE, Edwin E.; DOWNS, Floyd L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1971. v. 1. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2021/MoiseGeometriaModerna1.pdf>. Acesso em: 31 maio 2026.

PITANE, Autolycus of. **On the Moving Sphere**. Tradução: Thomas L. Heath. [*S. l.*]: Ancient Greek manuscript, 320. Earliest known treatise on spherical geometry; modern translation with commentary.

PTOLEMY, Claudius. **Geographia**. Reprint with English translation. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000. Book I, Ch. 2; transl. and comm. by J.L. Berggren & A. Jones. Original ca. 150 A.D. ISBN 9780691002606.

TOOMER, G. J. (ed. e trad.). **Ptolemy's Almagest**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1984. English translation and critical edition; original ca. 150 A.D. ISBN 9780691002606.

WHITTLESEY, Marshall A. **Spherical Geometry and Its Applications**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2019. (Textbooks in Mathematics). ISBN 9780367196905.

APÊNDICE A – A ESFERA NO ESPAÇO

A.1 GRANDES CÍRCULOS

Depois de explorarmos a geometria esférica a partir de suas propriedades intrínsecas isto é, aquelas que podem ser concebidas sem recorrer ao espaço tridimensional que envolve a esfera —, iniciamos nossa jornada por essa geometria por meio de uma perspectiva extrínseca, ou seja, encarando a esfera como um corpo arredondado imerso no espaço tridimensional. Nessa abordagem, recorreremos a conceitos da geometria espacial, da trigonometria e da álgebra vetorial para compreender suas características. Dominar esse ponto de vista é especialmente relevante para as aplicações práticas da geometria esférica. Embasaremos nosso estudo seguindo a linha de pensamento do livro de (Whittlesey, 2019), para iniciarmos vamos definir o que é uma esfera.

Definição A.1 *Seja O um ponto no espaço e r um número real positivo. A esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos no espaço que estão a uma distância r de O .*

Proposição A.1 *A interseção entre uma esfera e um plano no espaço é um círculo, um ponto ou um conjunto vazio. (Ver Figura-47)*

Demonstração. Seja π um plano no espaço. Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais com origem em O e eixo z perpendicular ao plano π . Daí, o plano π é descrito pela equação $z = d$, onde $d \in \mathbb{R}$ é a distância (com sinal) da origem O ao plano π .

Seja S a esfera de centro O e raio $r > 0$, definida por $S = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid d(P, O) = r\}$. Observemos que $|d|$ é a distância perpendicular de O ao plano.

Por outro lado, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à esfera se, e somente se,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{1}$$

E pertence ao plano se, e somente se,

$$z = d. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos $x^2 + y^2 + d^2 = r^2$, ou seja,

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2. \tag{3}$$

Analisemos os três casos possíveis,

Caso 1. $r^2 - d^2 > 0$ se, e só se, $|d| < r$). Nesse caso, a equação (3) descreve uma circunferência no plano $z = d$, com centro no ponto $(0, 0, d)$ e raio $\rho = \sqrt{r^2 - d^2} > 0$. Portanto, a interseção entre a esfera e o plano é um círculo nesse plano.

Caso 2. $r^2 - d^2 = 0$, ou seja, $|d| = r$. Nesse caso, a equação (3) reduz-se a $x^2 + y^2 = 0$, cuja única solução é $x = 0$ e $y = 0$. Assim, a interseção entre a esfera e o plano é o único ponto $(0, 0, d)$ (ponto de tangência).

Caso 3. $r^2 - d^2 < 0$, é dizer, $|d| > r$. Nesse caso, a equação (3) não tem solução real, pois $x^2 + y^2$ seria igual a um número negativo, o que é impossível. Portanto, a interseção é o conjunto vazio. $\square$

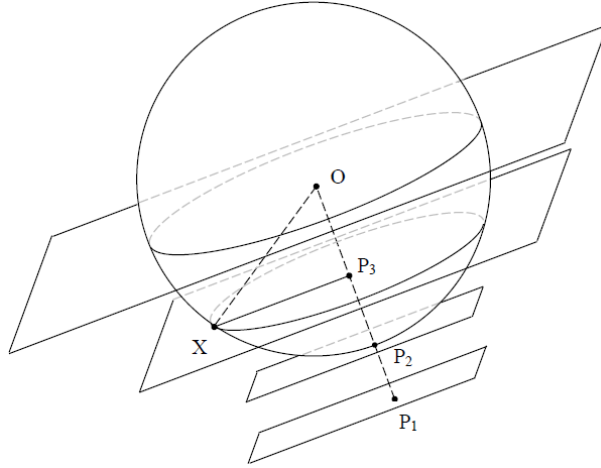


Figura 47 – A interseção de um plano com uma esfera

Definição A.2 Seja S uma esfera de centro O , π_1 e π_2 planos no espaço e l à reta que passa por O e é perpendicular a π_1 e π_2 . (Ver Figura 48.)

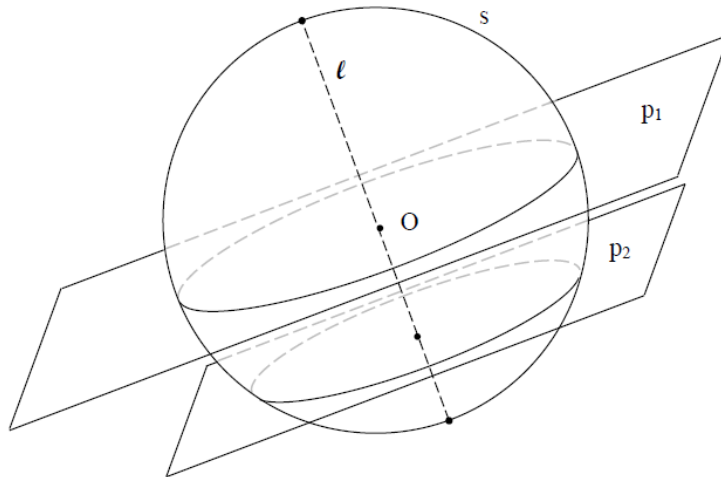


Figura 48 – Círculos máximos, círculos menores e polos

- Se π_1 passa por O , então a interseção de π_1 com S é chamado de círculo máximo da esfera.
- Se π_2 intercepta S e não passa por O , considerando que a interseção não seja um ponto e nem vazia. Dizemos que a interseção é um círculo mínimo ou círculo mínimo

A.2 PONTOS ANTÍPODAS

Definição A.3 *Dois pontos distintos em uma esfera são considerados antípodas se a reta que os contém passa pelo centro da esfera.*

Observação A.1 *Seja A um ponto, escrevemos A^a para denotar o antípoda de A .*

Observação A.2 *Os polos de um círculo máximo são pontos antípodas e dividem o círculo máximo em dois semicírculos máximos.*

Observação A.3 *Os círculos máximos na geometria esférica são importantes porque são o equivalente as retas da geometria plana. Em outras palavras, são as curvas que definem as trajetórias mais curtas entre dois pontos, dividem a esfera em duas partes iguais e servem como referência para medir distâncias e ângulos.*

Observação A.4 *O caminho mais curto entre dois pontos sobre uma esfera é sempre um arco de círculo máximo. Além disso, dois pontos quaisquer sobre a esfera determinam, um único círculo máximo, exceto quando são antípodas.*

Note que dois círculos máximos surgem da interseção da esfera com dois planos que passa pelo centro da esfera. E como sabemos esses dois planos se intersectam em uma reta que passa pelo centro da esfera; que encontra a esfera em dois pontos. Assim temos um resultado fundamental. (Ver Figura-49)

Definição A.4 *Quando uma região é limitada por dois semicírculos que não pertencem ao mesmo círculo máximo, damos a ela o nome de lúnula. A figura abaixo ilustra uma lúnula, identificada como NASBN.*

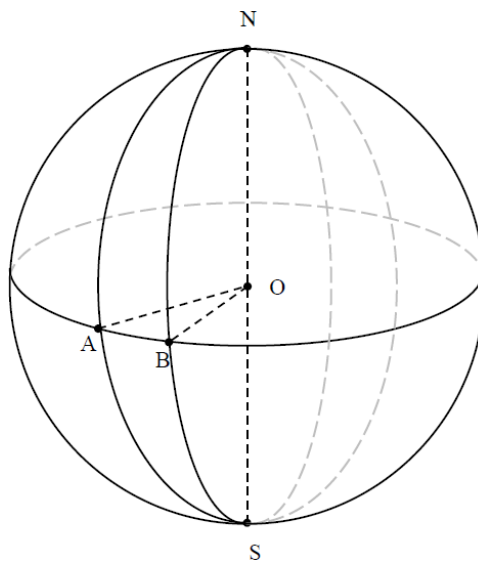


Figura 49 – Círculos máximos que se encontram em pontos antípodas N e S

Proposição A.2 *Dois círculos máximos distintos se encontram em exatamente dois pontos e eles são antípodas.*

Como comentamos anteriormente um círculo máximo é o equivalente a uma "reta", na geometria esférica! No plano determinamos uma reta a partir de dois pontos distintos, mas e a nosso círculo máximo, na esfera é determinado da mesma forma?

Consideremos a figura 50. Fica claro que isso nem sempre ocorre na esfera, pois dois pontos antípodas determinam uma reta que passa por eles e pelo centro O da esfera, na qual por essa reta existem infinitos planos que passam por ela, conforme postulado da geometria espacial. Assim acaba gerando também infinitos círculos máximos que passam por M e S , mas essa é a única exceção.

Proposição A.3 *Se dois pontos distintos em uma esfera não são antípodas, então existe um único círculo máximo que passa por eles.*

Demonstração. Consideremos uma esfera de centro O e raio $r > 0$. Sejam A e B dois pontos distintos sobre a superfície da esfera, com a condição de que não são antípodas, ou seja, $B \neq A^a$ e $A \neq B^a$. Assim, para mostrar que existe um círculo máximo contendo A e B , basta mostrar que existe um plano passando por O , A e B . De fato, como A e B são dois pontos distintos, eles determinam, juntamente com O , um único plano, a menos que O , A e B sejam colineares, o que não ocorre pois por hipótese A e B não são antípodas. Logo, existe um único plano Γ_1 que os contem. Por outro lado, cada círculo máximo é a interseção da esfera com um plano que passa por O . Portanto, o círculo máximo que passa por A e B é único. $\square$

Na geometria plana um segmento de reta é determinado por dois pontos. Na geometria esférica não é muito diferente.

Definição A.5 *Um segmento esférico é um arco de círculo máximo que liga dois pontos. Se os pontos não são antípodas, o segmento é o arco menor desse círculo máximo. Se são antípodas, o segmento é um dos semicírculos escolhido com o auxílio de um ponto adicional.*

Para dois pontos não antípodas A e B , o segmento será denotado por $\widehat{AB}$. E, no caso dos pontos serem antípodas o segmento esférico será, denotado com um ponto auxiliar C por $\widehat{ACB}$.

Definição A.6 *A distância esférica entre dois pontos é definida como a medida do menor arco de um círculo máximo entre os dois pontos. (Ver Figura-50)*

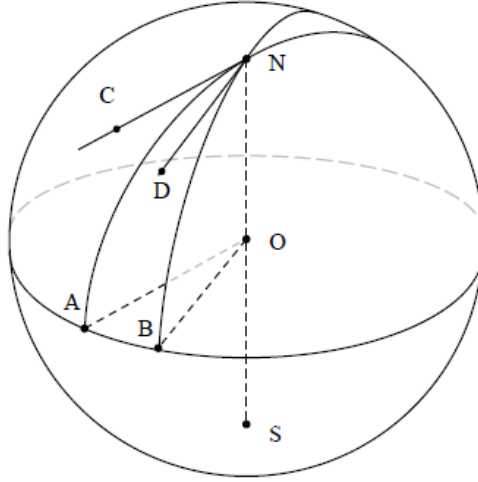


Figura 50 – Medida de um ângulo esférico

A figura 50 ilustra como entenderemos a medida dos ângulos entre os círculos máximos na esfera. Os arcos de círculos máximos $\widehat{NA}$ e $\widehat{NB}$ estão nos lados do que entenderemos ser um ângulo esférico. As semirretas NC e ND são tangentes a esses dois arcos em N . A medida do ângulo entre essas duas semirretas $\sphericalangle CND$ será a medida do ângulo entre os arcos. Mas, como a semirreta OA é paralela à semirreta NC e OB é paralela a ND , as medidas do $\sphericalangle CND$ e o $\sphericalangle AOB$ são as mesmas. Note que o ângulo $\sphericalangle AOB$ e o segmento $\widehat{AB}$ são relacionados o que possibilita encontrarmos o ângulo esférico.

Resumindo, para medirmos ângulos esféricos entre os círculos máximos. Basta calcular o segmento formado pela interseção dos dois círculos máximos com um círculo máximo perpendicular a eles dois.

Proposição A.4 *Um círculo máximo de uma esfera S no espaço é o conjunto de todos os pontos de S que estão a uma distância esférica de um quarto de círculo de um polo do círculo máximo.*

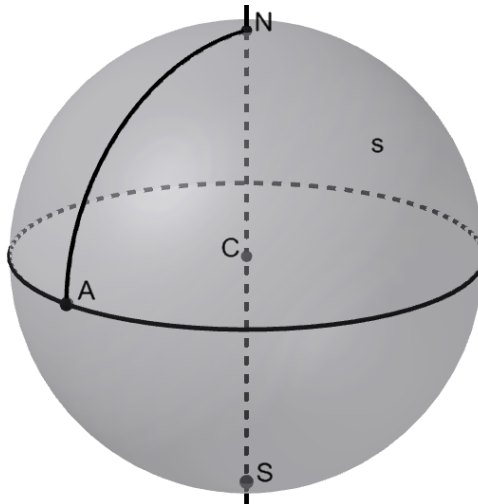


Figura 51 – Definição de círculo máximo extrinsecamente

Demonstração. O círculo máximo é a interseção de um plano π com a esfera S e os polos do círculo máximo são a interseção de uma reta l a esfera S , onde l é perpendicular a o plano π . Primeiro, mostraremos que qualquer ponto do círculo máximo está a uma distância $\frac{\pi}{2}$ de um polo.

Qualquer ponto A do círculo máximo é um ponto do plano p e um polo N do círculo máximo está em l . Como l é perpendicular a p . Então ON é perpendicular a OA e consequentemente a qualquer outra reta no plano p pois ON é ortogonal ao plano. Por definição, a distância esférica entre A e N é a medida do ângulo $\angle AON$.

Reciprocamente, suponhamos que o ponto A esteja a uma distância esférica $\frac{\pi}{2}$ do polo N . Por definição, o $\angle AON$ tem medida igual a $\frac{\pi}{2}$, daí temos que OA é perpendicular a ON . Pela Definição A.2 concluímos que A é um ponto de p , portanto pertence ao círculo máximo. $\square$

Proposição A.5 *Um círculo mínimo em uma esfera é o conjunto de todos os pontos na esfera a uma distância esférica fixa de $p < \frac{\pi}{2}$ de um de seus polos P .*

Demonstração.

Sejam Γ um círculo mínimo na esfera, P um de seus polos e O o centro da esfera. Consideremos o plano p que contém o círculo mínimo. Lembremos que o polo P é o ponto da esfera equidistantes de todos os pontos do círculo. Seja ρ a distância esférica entre o polo P e qualquer ponto X do círculo mínimo. Como o círculo não é máximo, o plano que o contém não passa por O . Portanto, o ângulo $\angle POX$ é menor que $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente, $\rho < \frac{\pi}{2}$.

Reciprocamente, se tomarmos todos os pontos da esfera que estão a uma distância esférica fixa $\rho < \frac{\pi}{2}$ de um ponto fixo P , esses pontos formam um círculo cujo plano é perpendicular ao raio OP e não passa por O . Portanto, é um círculo mínimo. $\square$

Definição A.7 *O ponto P encontrado na Proposição A.5 é chamado de centro (esférico) do círculo mínimo, e a quantidade ρ é chamada de raio (esférico) do círculo mínimo.*

Na geometria plana, uma reta divide o plano em dois semiplanos convexos. De maneira análoga, na esfera, um círculo máximo divide a superfície em dois hemisférios, obtidos pela interseção da esfera com os semiespaços determinados pelo plano que contém esse círculo. Esses hemisférios desempenham o papel dos lados de um círculo máximo, motivando o estudo da noção de convexidade esférica.

Na esfera, um plano define dois semiespaços convexos. Ao intersectá-los com a esfera, geram-se dois hemisférios. Um círculo máximo é esfericamente convexo, pois qualquer arco esférico ligando dois de seus pontos (não antípodas) permanece contido nele. O mesmo vale para qualquer arco esférico, que também é convexo. Além disso, diremos que um hemisfério é esfericamente convexo, se o menor arco de círculo máximo entre quaisquer dois pontos (não antípodas) também estiver contido nesse hemisfério.

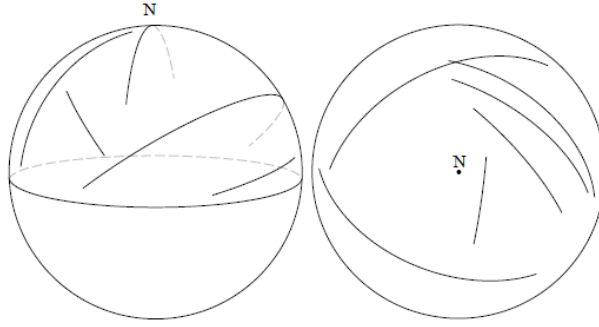


Figura 52 – Hemisfério esfericamente convexo

A.3 DISTÂNCIA E ÂNGULOS

Na geometria plana podemos observar que o resultado mais importante sobre distância "o Teorema de Pitágoras" pode ser enunciando sem o uso de funções trigonométricas. Porém na geometria esférica não temos essa mesma facilidade de enunciar esse tipo de teorema, até mesmo as relações mais básicas sobre relações em triângulos requerem o uso de funções trigonométricas.

Proposição A.6 *Suponhamos que dois arcos esféricos de igual comprimento ϕ , formem um ângulo de medida θ . Seja x a distância entre dois pontos (Um em cada arco) e ϕ a distância esférica do vértice para com os pontos. Então, $\sin(\frac{x}{2}) = \sin(\phi) \cdot \sin(\frac{\theta}{2})$.*

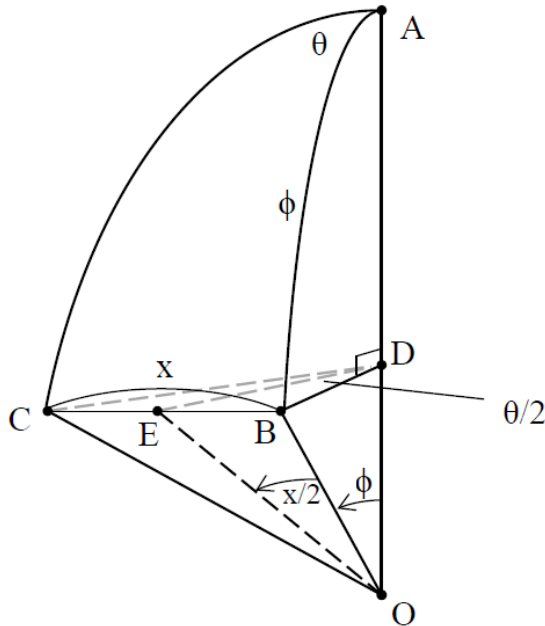


Figura 53 – Relações de seno

Demonstração. Suponhamos que a esfera tenha centro O e raio r . Como $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ têm a mesma medida ϕ , note que o plano determinado pelos pontos B, C, D é um plano perpendicular a OA (Ver Figura-53). Por simetria, também temos $DB = DC$ e $OB =$

$OC = r$. Seja E o ponto médio do segmento de reta BC . Então os DEB e o OEB possuem um ângulo reto em E . Obtemos que, $\sphericalangle EOB = \frac{1}{2}\sphericalangle COB = \frac{x}{2}$ por definição da medida de $\widehat{BC}$.

Além disso, $\sphericalangle EDB = \frac{1}{2}\sphericalangle BDC$. Mas o $\sphericalangle BDC$ é um ângulo entre os planos $\sphericalangle B - OA - C$, então tem medida θ pela definição da medida do ângulo esférico $\sphericalangle BAC$. Assim, $\sphericalangle EDB = \frac{\theta}{2}$. Pela definição de arco, o $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOA = \phi$. Aplicando trigonometria plana no triângulo retângulo OBD , temos $BD = OB \sin(\phi) = r \sin(\phi)$. Aplicando agora no triângulo BED , temos $EB = BD \sin(\frac{\theta}{2}) = r \sin(\phi) \sin(\frac{\theta}{2})$. Por último para o triângulo OEB , encontramos $EB = r \sin(\frac{\phi}{2})$. Assim $r \sin(\frac{\phi}{2}) = EB = r \sin(\phi) \sin(\frac{\theta}{2})$. $\square$

Observação A.5 *O argumento anterior assume que ϕ é ângulo agudo, um argumento semelhante vale nos casos em que é o ângulo reto ou obtuso.*

A Proposição A.6 pode ser considerada o primeiro resultado sobre o que chamaremos de triângulo esférico. Temos três pontos A, B e C com três arcos esféricos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$. A união de três desses arcos forma um triângulo esférico.

Exemplo A.1 *Seja O o centro de uma esfera e sejam A, B e C pontos distintos da esfera, nenhum dos quais é antípoda. Assim, temos três arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$, cujas medidas denotamos por c, b e a , respectivamente. Sejam $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$ as medidas dos ângulos esféricos $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$ e o $\sphericalangle ACB$, respectivamente. Suponhamos que o ângulo esférico $\sphericalangle ACB$ seja reto. (Isto é o plano contendo O, A e C é perpendicular ao plano contendo O, B e C). Então, pensaremos em A, B e C formando um "triângulo esférico", ABC com um ângulo reto em C . Suponhamos que D esteja entre O e A , E esteja entre O e B e F esteja entre O e C . Suponhamos também que DE e DF sejam perpendiculares a OD . (Ver Figura-54)*

(a) Expliquemos por que o $\sphericalangle DFE$ e o $\sphericalangle OFE$ são ângulos retos.

Notemos que OD pertence ao plano EFD e EF pertence ao plano EFD portanto existe um segmento paralelo a OD perpendicular a EF , assim EF é perpendicular a $O'D'$ e OD então EF é ortogonal ao plano OCA , o que implica que EF é perpendicular a OF e FD .

(b) Expliquemos por que a medida do ângulo esférico $\sphericalangle FDE$ é a mesma medida do ângulo esférico $\sphericalangle BAC$.

A medida dos ângulos esféricos são iguais, pois por construção o segmento DE pertence ao plano OAB e o segmento DF pertence ao plano OAC deste modo o ângulo esférico entre os arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{AB}$ é a medida do ângulo entre os segmentos DF e DE ou seja o ângulo $\sphericalangle FDE = \sphericalangle BAC$

(c) Utilizamos o mesmo raciocínio da Proposição A.6 introduzida no início deste capítulo, pra provar que

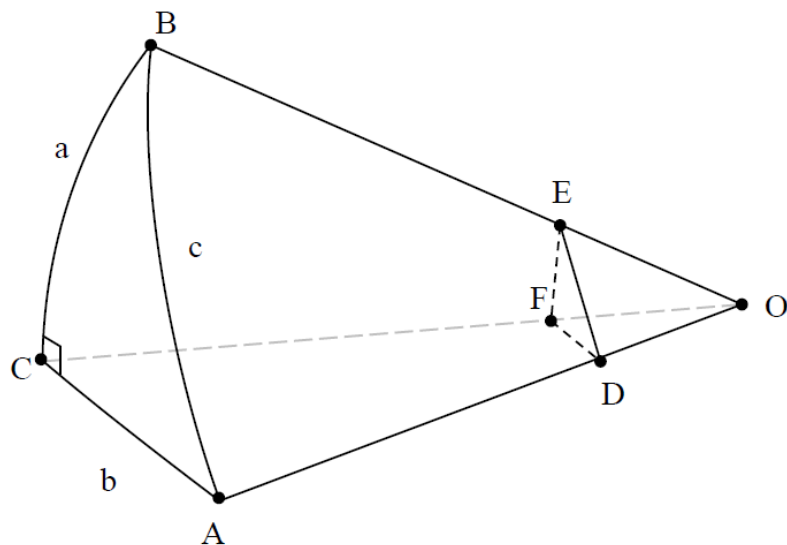


Figura 54 – Medida entre ângulos

$$(I) \cos(c) = \cos(a)\cos(b)$$

$$(II) \sin(\hat{A}) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$$

$$(III) \cos(\hat{A}) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}$$

$$(IV) \tan(\hat{A}) = \frac{\tan(a)}{\sin(b)}$$

Podemos observar algumas relações a partir dos seguintes triângulos (Ver Figura-55). Temos que para os triângulos

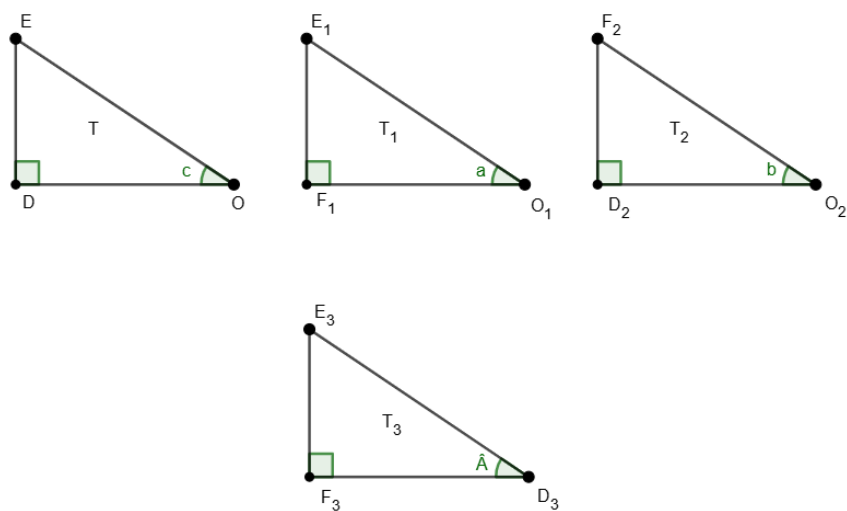


Figura 55 – Triângulos recortados da figura

$$\begin{aligned}
T &: \cos(c) = \frac{OD}{OE}; \quad \sin(c) = \frac{DE}{OE}; \quad \tan(c) = \frac{DE}{OD}; \\
T_1 &: \cos(a) = \frac{OF}{OE}; \quad \sin(a) = \frac{EF}{OE}; \quad \tan(a) = \frac{EF}{OF}; \\
T_2 &: \cos(b) = \frac{OD}{OF}; \quad \sin(b) = \frac{FD}{OF}; \quad \tan(b) = \frac{FD}{OD}; \\
T_3 &: \cos(\hat{A}) = \frac{EF}{DE}; \quad \sin(\hat{A}) = \frac{FD}{DE}; \quad \tan(\hat{A}) = \frac{EF}{FD}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \cos(c) &= \frac{OD}{OE} = \frac{\cos(b) \cdot OF}{OE} = \frac{\cos(b) \cdot \cos(a) \cdot OE}{OE} = \cos(a) \cdot \cos(b). \\
\text{(ii)} \quad \sin(\hat{A}) &= \frac{EF}{DE} = \frac{\sin(a) \cdot OE}{DE} = \frac{\sin(a) \cdot OE}{\sin(c) \cdot OE} = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}. \\
\text{(iii)} \quad \cos(\hat{A}) &= \frac{FD}{DE} = \frac{\tan(b) \cdot OD}{\tan(c) \cdot OD} = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}. \\
\text{(iv)} \quad \tan(\hat{A}) &= \frac{EF}{FD} = \frac{\tan(a) \cdot OF}{\sin(b) \cdot OF} = \frac{\tan(a)}{\sin(b)}. \\
\text{(d)} \quad &\text{Provemos que, } \sin(\hat{A}) = \cos(\hat{B}) \text{ e } \cos(c) = \cot(\hat{A}) \cdot \cot(\hat{B}).
\end{aligned}$$

De fato, consideremos o triângulo retângulo esférico ABC com $\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$. Sejam a, b, c as medidas dos lados BC, AC, AB , respetivamente.

A partir da construção geométrica na Figura 55, obtivemos

$$\sin(\hat{A}) = \frac{EF}{DE}, \quad \cos(\hat{B}) = \frac{EF}{DE}.$$

Para a segunda, usaremos as relações já estabelecidas nos itens anteriores. Do item (i), temos o Teorema de Pitágoras Esférico

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b).$$

Do item (iv), temos $\tan(\hat{A}) = \frac{\tan(a)}{\sin(b)}$ e $\tan(\hat{B}) = \frac{\tan(b)}{\sin(a)}$, então

$$\cot(\hat{A}) = \frac{\sin(b)}{\tan(a)} \quad \text{e} \quad \cot(\hat{B}) = \frac{\sin(a)}{\tan(b)}. \quad (\text{I})$$

Multiplicando as equações em (I), obtemos

$$\begin{aligned}
\cot(\hat{A}) \cdot \cot(\hat{B}) &= \frac{\sin(b)}{\tan(a)} \cdot \frac{\sin(a)}{\tan(b)} \\
&= \frac{\sin(b)}{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}} \cdot \frac{\sin(a)}{\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} \\
&= \frac{\sin(b) \cos(a)}{\sin(a)} \cdot \frac{\sin(a) \cos(b)}{\sin(b)} = \cos(a) \cos(b).
\end{aligned}$$

A.4 ÁREA

Neste capítulo, determinaremos as áreas de uma superfície curva aproximando-a como partes de superfícies cuja área é conhecida. A ideia é que, se uma sequência de superfícies se aproxima da superfície com área desconhecida, então a área da superfície desconhecida é o valor do limite das superfícies na sequência.

Essa ideia gera uma discussão em volta de cálculo integral e análise real. No entanto iremos abordar uma discussão que seja mais persuasiva. Começaremos apresentando uma abordagem para determinar a área de toda a esfera.

No espaço, suponhamos que nos seja dado um conjunto de pontos b no plano e um ponto P que não pertence ao plano. Então, lembramos que um cone com vértice P e base b é a união de todos os segmentos de reta com uma extremidade em P e uma extremidade em b .

Vamos observar certos tipos de cone, suponhamos que a base seja um círculo. Então, dizemos que o cone é circular e no caso do segmento PO onde O é o centro do círculo que é a base do cone. Caso $PO \perp b$ então dizemos que o cone é um cone circular reto. Além disso, para este cone o comprimento de P para algum ponto do círculo é sempre igual e chamamos de altura inclinada e o raio do círculo é chamado de raio do cone. (Ver Figura-56)

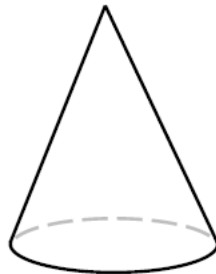


Figura 56 – Cone Circular Reto

Suponhamos que a base do cone seja um polígono. Então dizemos que o cone é poligonal e no caso do polígono ser regular, dizemos que o cone é um cone poligonal regular. O conceito de ser um cone poligonal regular reto, se aplica a mesma ideia do cone circular reto, mas agora o ponto O sendo o centro do polígono. (Ver Figura-57)

Um caso particular do cone é o tronco de cone que é a porção do cone obtida pela intercessão de um plano paralelo a base abaixo do vértice P . No qual esse tronco de cone possua duas bases sendo uma a original do cone e a outra é o resultado da intercessão do plano com o cone. Podemos também definir o tronco de cone poligonal regular reto como a união de n trapézios, onde n é o número de lados do polígono. E a altura oblíqua l é a altura do trapézio. (Ver Figura-58)

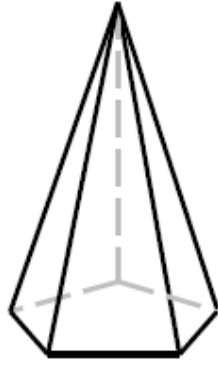


Figura 57 – Cone Poligonal Regular Reto

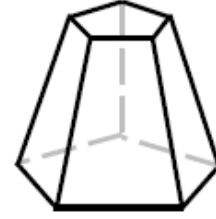


Figura 58 – Tronco de Cone Poligonal

Proposição A.7 *Suponhamos que o tronco de um cone poligonal reto tenha bases de n lados cada. Suponhamos que os perímetros das bases sejam p_1 e p_2 , e que o tronco tenha altura inclinada l . Então, a área lateral do tronco é $\frac{l(p_1 + p_2)}{2}$.*

Demonstração. O tronco é a união de trapézios e cada um tem uma altura l e bases de comprimento $\frac{p_1}{n}$ e $\frac{p_2}{n}$, já que as bases têm lados de comprimentos igual. Pelos conceitos

de geometria plana temos que a área dos trapézios é $\frac{l(\frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n})}{2} = \frac{l(p_1 + p_2)}{2}$. $\square$

Proposição A.8 *Suponhamos que o tronco de um cone circular reto tenha duas bases com perímetros s_1 e s_2 e altura oblíqua l . Então, a área da superfície (lateral) do cone é $\frac{l(s_1 + s_2)}{2}$.*

Demonstração. Aproximamos a base circular de um polígono regular de n lados formado pelo espaçamento igual de n pontos ao redor do perímetro da base, e obtemos a fórmula para a área do tronco poligonal da Proposição A.7. Para valores grandes de n , a altura inclinada l_n , do tronco poligonal é próxima da altura inclinada l do tronco circular, e os perímetros p_1^n, p_2^n das bases do tronco poligonal são próximos dos perímetros s_1, s_2 das bases do tronco circular, portanto, a fórmula $\frac{l_n(p_1^n + p_2^n)}{2}$ obtida da Proposição A.7 se aproxima do valor $\frac{l(s_1 + s_2)}{2}$. $\square$

Observação A.6 *Suponhamos que os raios das bases sejam r_1 e r_2 . Note que, $s_1 = 2\pi r_1$ e $s_2 = 2\pi r_2$, desta maneira podemos escrever a equação da Proposição A.8 da seguinte maneira*

$$\frac{l(s_1 + s_2)}{2} = \frac{l(2\pi r_1 + 2\pi r_2)}{2} = \frac{2\pi l(r_1 + r_2)}{2} = \pi l(r_1 + r_2) \quad (8)$$

Prosseguindo com abordagem para a fórmula do cálculo de área da superfície de uma esfera de raio r . Consideramos a esfera como sendo obtida pela rotação de um semicírculo de raio r em torno de seu diâmetro. Se considerarmos o semicírculo como

sendo aproximado pela união de pequenas cordas do semicírculo, então a esfera inteira é aproximada pela rotação das cordas em torno de eixo do diâmetro do semicírculo.

Deste modo, suponhamos que um arco de um semicírculo gire em torno de um diâmetro desse semicírculo. O resultado é uma superfície chamada zona da esfera.

Lema A.1 *Suponhamos que ℓ seja uma reta em um plano, s um segmento de reta e M um ponto em s . Suponhamos que à reta perpendicular a s em M intersecta ℓ em um ponto N . Seja a_1 o comprimento de s , b_1 à distância de M até ℓ , a_2 o comprimento da projeção de s sobre ℓ , e b_2 o comprimento do segmento de M até N . Então, temos $a_1b_1 = a_2b_2$.*

Teorema A.1 *Suponhamos que uma área de um semicírculo de raio r gire em torno do diâmetro do semicírculo. Suponhamos que a projeção da área no diâmetro tenha comprimento d . Então, a zona gerada tem área de superfície $2\pi rd$.*

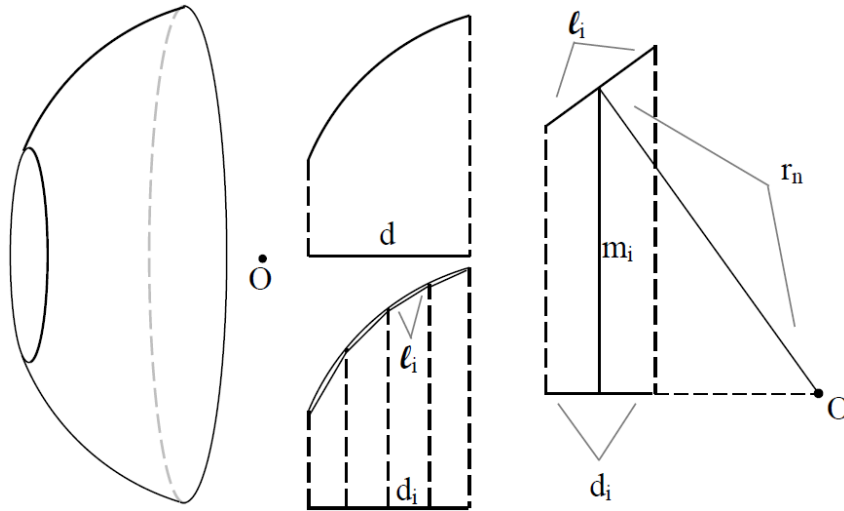


Figura 59 – Área de superfície da zona de uma esfera

Demonstração. Suponhamos que $n-1$ pontos distintos são escolhidos igualmente espaçados na área (Ver Figura-59). Conectamos os pontos em ordem, junto com os pontos finais da área para formar cordas do arco de igual comprimento. Se considerarmos o arco como sendo aproximado pelas cordas, então a zona é aproximada pela rotação das cordas em torno do eixo do diâmetro do semicírculo. Cada corda, juntamente com sua projeção no diâmetro, forma um trapézio. Para $i = 1, 2, \dots, n$, seja l_i o comprimento da i^{th} -ésima corda, seja m_i o comprimento da linha média do i^{th} -ésimo trapézio, e seja d_i o comprimento da projeção da i^{th} -ésima corda no diâmetro. Como cada corda tem o mesmo comprimento, o ponto médio de cada uma está à mesma distância r_n , do centro do semicírculo.

Então, a i^{th} -ésima corda gera uma área de superfície de $2\pi l_i m_i$, de acordo com a equação (8) para o comprimento da linha média de um trapézio (o comprimento da linha média é a média dos comprimentos das bases dividido por dois). Pelo Lema A.1, $2\pi l_i m_i = 2\pi d_i r_n$. Então a união de todas as cordas gera uma superfície de área

$$\sum_{i=1}^n 2\pi l_i m_i = \sum_{i=1}^n 2\pi d_i r_n = 2\pi d r_n, \quad (9)$$

onde $\sum_{i=1}^n d_i = d$ porque a união das projeções das cordas é a mesma que a projeção do arco, que tem comprimento d . Agora, como o número de áreas n pode se tornar arbitrariamente grande, r_n se aproxima de r , então a área de superfície gerada pela união das áreas se aproxima de $2\pi r d$; esta é a área de superfície da zona. $\square$

Corolário A.1 *A área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.*

Demonstração. Usando o Teorema A.1, consideramos a área como o semicírculo inteiro. Como a projeção do semicírculo inteiro tem comprimento $2r$, a área da superfície da esfera inteira é $2\pi r d = 2\pi r 2r = 2\pi 2r^2 = 4\pi r^2$. $\square$

Concluimos discutindo a área delimitada por uma lúnula. Como uma lúnula em si é meramente a união de dois semicírculos, tecnicamente ela tem área zero. Mas é comum abusar um pouco da linguagem e escrever “área de uma lúnula” quando queremos dizer “área delimitada por uma lúnula”. Também faremos isso, desde que não haja motivo para confusão.

Proposição A.9 *Em uma esfera de raio r , a área de uma lúnula cujo ângulo tem medida em radianos θ é $2r^2\theta$.*

Demonstração. A justificativa mais simples para isso envolve o uso da simetria rotacional da esfera. Se girarmos qualquer lúnula em torno de seu eixo, obteremos uma lúnula do mesmo tamanho e formato e, portanto, da mesma área. Então, a proporção da área da esfera que está na lúnula é a mesma que a proporção de θ para 2π . Portanto, a área da lúnula é $4\pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = 2r^2\theta$, como desejado. $\square$

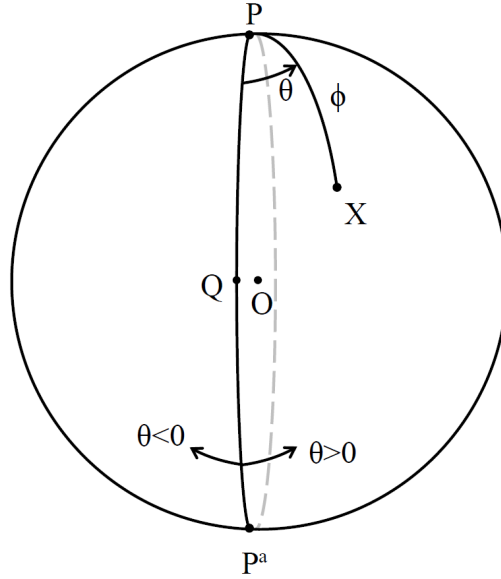
A.5 COORDENADAS ESFÉRICAS

Introduziremos dois tipos de coordenadas para pontos em uma esfera. Sendo elas as coordenadas polares e coordenadas de latitude-longitude.

Suponhamos S uma esfera de raio, escolhamos um ponto P em S , que chamaremos de polo (N) e um grande semicírculo PQP^a . Aqui está como especificaremos coordenadas polares (ϕ, θ) para um ponto X em S .

- ϕ é a medida do arco $\widehat{PX}$.
- θ é a medida através da qual giramos o grande semicírculo PQP^a para obter o grande semicírculo PXP^a .

Assim podemos relacionar com as coordenadas de latitudes e longitude (Ver Figura-60). Pois $(l_1, l_2) = (\frac{\pi}{2} - \phi, \theta)$ e aqui a variável l_1 é zero no equador. Além disso l_1 é

Figura 60 – Valores de ϕ e θ

positivo no hemisfério que contém P (Norte) e negativo hemisfério que contém P^a (Sul), então $-\frac{\pi}{2} < l_1 < \frac{\pi}{2}$ e l_2 é zero no meridiano.

Com isso podemos definir que, para qualquer ponto no espaço existe uma esfera centrada na origem com raio r . E então o ponto $P = (r, \phi, \theta)$ e chamamos isso de tripla ordenada.

Teorema A.2 *Suponhamos que (ϕ, θ) sejam coordenadas polares para uma esfera de raio r . Suponhamos que as coordenadas x, y, z sejam escolhidas para o espaço da seguinte maneira. (Ver Figura-61)*

- (i) *Seja O o centro da esfera a origem.*
- (ii) *Seja Z o eixo positivo z apontado na direção do polo do sistema de coordenadas.*
- (iii) *Seja X o eixo positivo x apontado na direção do ponto $(\frac{\pi}{2}, 0)$.*
- (iv) *Seja Y o eixo positivo y apontado na direção do ponto $(\frac{\pi}{2}, (\frac{\pi}{2}))$*

Então, o ponto A no espaço sobre a esfera S de raio r , com coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas esféricas (ϕ, θ) , satisfaz

$$(x, y, z) = (r \sin(\phi) \cos(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\phi))$$

Demonstração. A discussão acima mostra como cada (ϕ, θ) determina um ponto A na esfera. Sejam X, Y e Z as projeções do ponto A sobre os eixos coordenados correspondentes. Então, AZO é um triângulo retângulo com ângulo reto em Z . Pela definição de medida de arco, $\angle AOZ = \widehat{AP}$, que é ϕ por definição. Como AZO é um triângulo retângulo e o comprimento do segmento $\overline{OA}$ é r , a coordenada z de Z é $r \cos \phi$ e o comprimento de $\overline{AZ}$ é $r \sin \phi$. Assim, $z = r \cos \phi$, como desejado.

Agora, seja W a projeção de A sobre o plano XY . Então, o comprimento de $\overline{OW}$ é o mesmo que o comprimento de $\overline{AZ}$, que é $r \sin \phi$. As projeções de W sobre os eixos x e

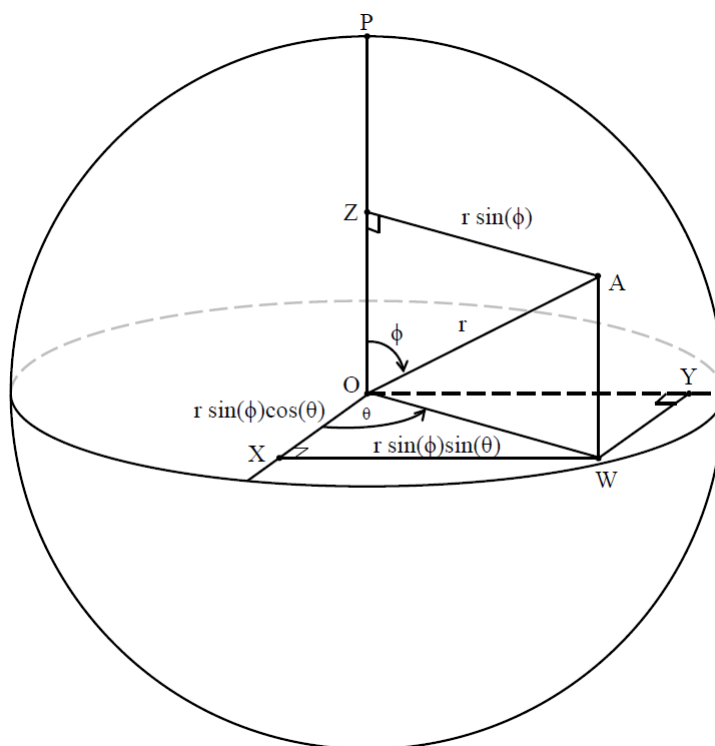


Figura 61 – Coordenadas

y são X e Y , respectivamente. Em seguida, o valor absoluto de θ é a medida do ângulo plano $\angle XOW$. Então, como W está a uma distância $r \sin \phi$ de O e $\overline{OW}$ forma um ângulo orientado θ com o eixo positivo x , suas coordenadas no plano xy devem ser

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \phi \sin \theta.$$

□