



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

GILBERTO MESSIAS DOS SANTOS JUNIOR

**ANÁLISE NUMÉRICA DO COLAPSO PROGRESSIVO DE ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO COM BASE NA MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO**

São Cristóvão - SE

2026

GILBERTO MESSIAS DOS SANTOS JUNIOR

**ANÁLISE NUMÉRICA DO COLAPSO PROGRESSIVO DE ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO COM BASE NA MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil como requisito parcial à obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

São Cristóvão - SE

2026

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237a Santos Junior, Gilberto Messias dos  
Análise numérica do colapso progressivo de estruturas de concreto armado com base na mecânica do dano concentrado / Gilberto Messias dos Santos Junior; orientador David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.. - São Cristóvão, 2026.  
109 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, 2026.

1. Mecânica do dano contínuo. 2. Concreto armado. I. Amorim, David Leonardo Nascimento de Figueiredo Orient. II. Título.

CDU 625

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**GILBERTO MESSIAS DOS SANTOS JUNIOR**

APRESENTADO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE EM 24 DE JULHO DE 2026.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim  
Orientador  
Universidade Federal de Sergipe – UFS

Prof. Dr. Higor Sérgio Dantas de Argôlo  
1º Examinador  
Universidade Federal de Sergipe – UFS

Prof. Dr. Rafael Nunes da Cunha  
2º Examinador  
Universidade Federal da Bahia – UFBA



*Dedico este trabalho  
aos meus pais, à minha esposa,  
Grace Kelly, e aos meus filhos,  
Luiz Miguel e Maria Elisa.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus Pai e à Virgem Maria Santíssima, por todas as graças concedidas, pela proteção constante e por me sustentarem nos momentos de dificuldade ao longo desta caminhada.

À minha amada esposa, Grace Kelly, e aos meus queridos filhos, Luiz Miguel e Maria Elisa, pelo amor, compreensão, incentivo e apoio incondicional durante todo o período de desenvolvimento desta pesquisa. Vocês foram minha principal fonte de motivação para seguir em frente e a razão maior de cada conquista alcançada.

Aos meus pais, Gilberto Messias e Elisa Fontes, por todos os ensinamentos, valores e exemplos de vida que contribuíram para minha formação pessoal e profissional.

Aos meus irmãos Simeão Cláudio, Elis Rebeca, Elis Raquel, Filipe Nascimento, João Lucas, Joana Sara e Davi Pedro, pelo carinho, amizade e apoio em todos os momentos.

A todos os meus familiares, em especial aos meus sogros, Sr. Luiz Carlos (*in memoriam*) e D. Maria do Socorro, pelo acolhimento, incentivo e disponibilidade sempre que precisei de apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. David Leonardo, minha profunda gratidão pela orientação segura, pela confiança depositada em meu trabalho, pela disponibilidade constante e pelos valiosos ensinamentos compartilhados ao longo desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Leonardo Bispo, pela atenção, disponibilidade e apoio ao longo desta jornada. Agradeço pelas contribuições, pelas orientações e pela prontidão em auxiliar sempre que necessário, colaborando de forma significativa para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas do Instituto Federal de Sergipe (IFS), campus Estância, pelo incentivo e apoio ao longo desta caminhada. Em especial, ao Prof. Dr. Herbet Alves, grande incentivador da realização deste mestrado, cuja motivação e apoio foram fundamentais para que esta etapa acadêmica se concretizasse.

Aos amigos que fiz no PROEC, especialmente Thyago Andrade e Vitória Bomfim, pela amizade, companheirismo e suporte durante as disciplinas e demais atividades acadêmicas.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (PROEC/UFS), pela oportunidade de realização deste curso e pela contribuição para minha formação acadêmica e profissional. A todos os professores e técnicos administrativos, meu agradecimento.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e para a conclusão desta importante etapa da minha vida.

*“Se alguém quiser ser o primeiro,  
que seja o último de todos e  
aquele que serve a todos.”*

*São Marcos 9, 35*

## RESUMO

O colapso progressivo em estruturas de concreto armado é um fenômeno caracterizado pela propagação de falhas localizadas que podem levar à ruína total do sistema estrutural. Dessa forma, a compreensão desse comportamento é essencial para o desenvolvimento de modelos capazes de prever a resposta de estruturas submetidas à perda súbita de elementos portantes. Dentre os mecanismos resistentes mobilizados durante esse processo, destaca-se a ação catenária, responsável pelo desenvolvimento dos esforços de tração que proporcionam a resistência residual à estrutura. Nesse contexto, o presente trabalho propõe-se analisar numericamente o colapso progressivo de estruturas de concreto armado a partir da Mecânica do Dano Concentrado (MDC), com ênfase na representação dos mecanismos resistentes associados à ação catenária. Para atingir esse objetivo, foi implementado um modelo numérico com o intuito de representar a evolução do dano, a formação de rótulas inelásticas e a redistribuição de esforços resultantes da perda de elementos estruturais. Como contribuição da pesquisa, foi proposta uma modificação na função de escoamento associada aos esforços normais, por meio da introdução do parâmetro adicional  $\gamma$ , visando aprimorar a representação da degradação da capacidade resistente durante a ação catenária. A definição do valor adotado para esse parâmetro foi realizada por meio de análise paramétrica. A validação da formulação foi feita com a comparação entre os resultados numéricos e os experimentais disponíveis na literatura, contemplando ao todo 9 experimentos. Os resultados demonstraram boa concordância entre as curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas, permitindo representar os principais mecanismos envolvidos no colapso progressivo. A análise indicou que a modificação contribuiu para melhorar a representação da resposta estrutural em grandes deslocamentos. Conclui-se que a formulação proposta constitui uma ferramenta que contribui para a compreensão dos mecanismos envolvidos no colapso progressivo de estruturas de concreto armado e para o aprimoramento de técnicas de modelagem baseadas na MDC.

**Palavras-chave:** colapso progressivo; mecânica do dano concentrado; concreto armado.

## ABSTRACT

Progressive collapse in reinforced concrete structures is a phenomenon characterized by the propagation of localized failures that may lead to the complete collapse of the structural system. Therefore, understanding this behavior is essential for the development of models capable of predicting the response of structures subjected to the sudden loss of load-bearing elements. Among the resistant mechanisms mobilized during this process, catenary action plays a prominent role, being responsible for the development of tensile forces that provide residual resistance to the structure. In this context, the present study proposes a numerical analysis of the progressive collapse of reinforced concrete structures based on Lumped Damage Mechanics (LDM), with emphasis on the representation of the resistant mechanisms associated with catenary action. To achieve this objective, a numerical model was implemented to represent damage evolution, the formation of inelastic hinges, and the redistribution of internal forces resulting from the loss of structural elements. As a contribution of this research, a modification was proposed to the yield function associated with axial forces through the introduction of an additional parameter,  $\gamma$ , aiming to improve the representation of the degradation of load-carrying capacity during catenary action. The value adopted for this parameter was defined through a parametric analysis. The proposed formulation was validated by comparing numerical results with experimental data available in the literature, comprising a total of nine experimental tests. The results showed good agreement between the experimental and numerical load-displacement curves, allowing the representation of the main mechanisms involved in progressive collapse. The analysis indicated that the proposed modification contributed to improving the representation of the structural response at large displacements. It is concluded that the proposed formulation constitutes a useful tool for understanding the mechanisms involved in the progressive collapse of reinforced concrete structures and for improving modeling techniques based on Lumped Damage Mechanics.

**Keywords:** progressive collapse; lumped damage mechanics; reinforced concrete.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figura 1</b> - Dinâmica da propagação vertical em colapsos do tipo “panqueca” .....                                                            | 25 |
| <b>Figura 2</b> - Representação da direção da falha do colapso progressivo tipo “zíper” .....                                                     | 26 |
| <b>Figura 3</b> - Representação da direção da progressão do colapso tipo “dominó” .....                                                           | 26 |
| <b>Figura 4</b> - Representação do mecanismo do colapso progressivo tipo “instabilidade” .....                                                    | 27 |
| <b>Figura 5</b> - Colapso do edifício Ronan Point .....                                                                                           | 28 |
| <b>Figura 6</b> - Esquema do processo de colapso da Torre Norte .....                                                                             | 29 |
| <b>Figura 7</b> - Resposta de uma estrutura de concreto armado ao colapso progressivo .....                                                       | 31 |
| <b>Figura 8</b> - Comportamento axial de viga com restrição total sob colapso progressivo.....                                                    | 31 |
| <b>Figura 9</b> - Ações e deformações generalizadas em um elemento.....                                                                           | 38 |
| <b>Figura 10</b> - Deslocamentos generalizados em um elemento .....                                                                               | 39 |
| <b>Figura 11</b> - Pórtico plano e deslocamentos generalizados do nó $i$ .....                                                                    | 40 |
| <b>Figura 12</b> - Formas do elemento $b$ em função das rotações relativas .....                                                                  | 41 |
| <b>Figura 13</b> - Coordenadas locais e deslocamentos generalizados do elemento $b$ em eixos de coordenadas locais.....                           | 42 |
| <b>Figura 14</b> - Variação da deformação em função de deslocamentos infinitesimais no nó $i$ no eixo $x_L$ .....                                 | 43 |
| <b>Figura 15</b> - Variação das rotações relativas em função de deslocamentos infinitesimais no nó $i$ no eixo $z_L$ .....                        | 44 |
| <b>Figura 16</b> - Variação da rotação relativa do nó $i$ em função de variações infinitesimais na sua rotação .....                              | 44 |
| <b>Figura 17</b> - Variação da rotação relativa do nó $j$ em função de variações infinitesimais na sua rotação .....                              | 45 |
| <b>Figura 18</b> - Esforços internos generalizados do elemento $b$ .....                                                                          | 48 |
| <b>Figura 19</b> - Varáveis e equações para uma estrutura elástica .....                                                                          | 49 |
| <b>Figura 20</b> - Forças e deflexões para o elemento de pórtico $b$ .....                                                                        | 50 |
| <b>Figura 21</b> - Petroleiro do tipo T-2 S.S. Schenectady após falha estrutural por fratura em 1943 .....                                        | 53 |
| <b>Figura 22</b> - Trinca através da espessura em placa de grandes dimensões .....                                                                | 54 |
| <b>Figura 23</b> - Elemento de volume representativo (EVR).....                                                                                   | 57 |
| <b>Figura 24</b> - Modelo de dano concentrado para elemento de pórtico .....                                                                      | 60 |
| <b>Figura 25</b> - Representação de elemento de pórtico plano de concreto armado considerando dano concentrado e ativação da ação catenária. .... | 62 |
| <b>Figura 26</b> - Aparato experimental utilizado nos ensaios de Yu e Tan (2013).....                                                             | 69 |
| <b>Figura 27</b> - Vista em planta do protótipo do ensaio de Yu e Tan (2013) .....                                                                | 69 |
| <b>Figura 28</b> - Vista frontal do protótipo do ensaio de Yu e Tan (2013) .....                                                                  | 70 |

|                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 29</b> - Detalhamento geométrico e de armaduras das amostras ensaiadas do ensaio de Yu e Tan (2013): (a) Amostra S1; (b) Amostra S2. ....         | 71  |
| <b>Figura 30</b> – Estrutura protótipo e localização do pilar removido do ensaio de Long <i>et al.</i> (2021): (a) Vista em planta; (b) Vista frontal ..... | 72  |
| <b>Figura 31</b> - Detalhes da armadura da amostra FS-1.43 do ensaio de Long <i>et al.</i> (2021) .....                                                     | 74  |
| <b>Figura 32</b> - Detalhes do conjunto IMF do ensaio de Lew <i>et al.</i> (2011).....                                                                      | 75  |
| <b>Figura 33</b> - Detalhes do conjunto SMF do ensaio de Lew <i>et al.</i> (2011).....                                                                      | 76  |
| <b>Figura 34</b> - Comparação das curvas carga <i>vs.</i> deslocamento obtidas para diferentes valores do parâmetro $\gamma$ .....                          | 82  |
| <b>Figura 35</b> - Discretização em elementos finitos dos experimentos de Yu e Tan (2013).....                                                              | 85  |
| <b>Figura 36</b> - Discretização em elementos finitos dos experimentos de (a) Long <i>et al.</i> (2021) e (b) Lew <i>et al.</i> (2011).....                 | 86  |
| <b>Figura 37</b> - Curvas carga <i>vs.</i> deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) S1 e (b) S2 .....                                         | 88  |
| <b>Figura 38</b> - Distribuição das variáveis de dano nos modelos (a) S1 e (b) S2 ao término da simulação numérica .....                                    | 90  |
| <b>Figura 39</b> - Curvas carga <i>vs.</i> deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) FN-1.05 e (b) FS-1.05 .....                               | 91  |
| <b>Figura 40</b> - Curvas carga <i>vs.</i> deslocamento experimental e numérica do modelo FS-1.43.....                                                      | 92  |
| <b>Figura 41</b> - Curvas carga <i>vs.</i> deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) FS-1.43E e (b) FS-1.86E .....                             | 93  |
| <b>Figura 42</b> - Distribuição das variáveis de dano nos modelos (a) FS-1.43E e (b) FS-1.86E....                                                           | 95  |
| <b>Figura 43</b> - Curvas carga <i>vs.</i> deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) IMF e (b) SMF .....                                       | 97  |
| <b>Figura 44</b> - Distribuição das variáveis de dano nos modelos (a) IMF e (b) SMF .....                                                                   | 98  |
| <b>Figura 45</b> - Comparação entre as formulações para o modelo S1 de Yu e Tan (2013) .....                                                                | 100 |
| <b>Figura 46</b> - Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) S1 e (b) S2 de Yu e Tan (2013).....                              | 101 |
| <b>Figura 47</b> - Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) FN-1.05 e (b) FS-1.05 de Long <i>et al.</i> (2021) .....         | 102 |
| <b>Figura 48</b> - Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) FS-1.43 e (b) FS-1.43E de Long <i>et al.</i> (2021).....         | 102 |
| <b>Figura 49</b> - Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos FS-1.86E de Long <i>et al.</i> (2021) .....                          | 103 |
| <b>Figura 50</b> - Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) IMF e (b) SMF de Lew <i>et al.</i> (2011) .....                  | 103 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tabela 1</b> - Valores dos fatores de aumento de carga para análise estática linear .....                                    | 34 |
| <b>Tabela 2</b> - Valores dos fatores de incremento dinâmico ( $\Omega_N$ ) para análise estática não linear .....              | 36 |
| <b>Tabela 3</b> - Propriedades geométricas dos protótipos e das amostras do ensaio de Yu e Tan (2013) .....                     | 70 |
| <b>Tabela 4</b> - Propriedades mecânicas do aço e do concreto utilizadas no ensaio de Yu e Tan (2013) .....                     | 71 |
| <b>Tabela 5</b> - Dimensões e detalhes de armadura dos pórticos experimentais do ensaio de Long <i>et al.</i> (2021) .....      | 73 |
| <b>Tabela 6</b> - Propriedades mecânicas das armaduras de aço do ensaio de Long <i>et al.</i> (2021) ...                        | 73 |
| <b>Tabela 7</b> - Propriedades mecânicas do concreto do ensaio de Long <i>et al.</i> (2021) .....                               | 74 |
| <b>Tabela 8</b> - Resistência média à compressão e à tração do concreto utilizado nos ensaios de Lew <i>et al.</i> (2011) ..... | 76 |
| <b>Tabela 9</b> - Valores médios das propriedades mecânicas das barras utilizadas nos ensaios de Lew <i>et al.</i> (2011) ..... | 77 |
| <b>Tabela 10</b> - Resultados da análise paramétrica do parâmetro $\gamma$ para o modelo S1 de Yu e Tan (2013) .....            | 81 |
| <b>Tabela 11</b> - Resumo dos resultados experimentais e numéricos dos modelos S1 e S2 .....                                    | 89 |
| <b>Tabela 12</b> - Resumo dos resultados experimentais e numéricos dos modelos de Long <i>et al.</i> (2021) .....               | 94 |
| <b>Tabela 13</b> - Resumo dos resultados experimentais e numéricos dos modelos de Lew <i>et al.</i> (2011) .....                | 98 |



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|        |                                                                            |
|--------|----------------------------------------------------------------------------|
| ACI    | <i>American Concrete Institute</i>                                         |
| APM    | <i>Alternate Path Method</i>                                               |
| ASCE   | <i>American Society of Civil Engineers</i>                                 |
| CPNI   | <i>Centre for the Protection of National Infrastructure</i>                |
| DCR    | <i>Demand-Capacity Ratios</i>                                              |
| FSL    | <i>Facility Security Level</i>                                             |
| GSA    | <i>General Services Administration</i>                                     |
| IMF    | <i>Interior Moment Frame</i>                                               |
| ISC    | <i>Interagency Security Committee</i>                                      |
| LSP    | <i>Linear Static Procedure</i>                                             |
| MDC    | Mecânica do Dano Concentrado                                               |
| NDP    | <i>Nonlinear Dynamic Procedure</i>                                         |
| NIST   | <i>National Institute of Standards and technology</i>                      |
| NISTIR | <i>National Institute of Standards and technology – Interagency Report</i> |
| NSP    | <i>Nonlinear Static Procedure</i>                                          |
| PTV    | Princípio dos Trabalhos Virtuais                                           |
| SMF    | <i>Special Moment Frame</i>                                                |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                |                                                                                                                                                                                                             |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G_{LD}$       | Combinação que considera o aumento das cargas gravitacionais nos vãos imediatamente adjacentes ao elemento removido na determinação das ações controladas por deformação                                    |
| $G$            | Combinação destinada aos vãos que não estão sujeitos ao aumento de cargas gravitacionais                                                                                                                    |
| $\Omega_{LD}$  | Fator de aumento de carga para o cálculo de ações controladas por deformação na análise estática linear                                                                                                     |
| $D$            | Carga permanente incluindo cargas de fachada                                                                                                                                                                |
| $L$            | Carga acidental incluindo redução de carga variável                                                                                                                                                         |
| $S$            | Carga de neve                                                                                                                                                                                               |
| $\Omega_{LF}$  | Fator de aumento de carga para o cálculo de ações controladas por força na análise estática linear                                                                                                          |
| $m$            | Modificador de demanda do componente ou elemento                                                                                                                                                            |
| $m_{LIF}$      | Menor $m$ de qualquer viga primária, viga mestra, vigota ou elemento de parede que esteja diretamente conectado às colunas ou paredes localizadas diretamente acima do local de remoção da coluna ou parede |
| $G_N$          | Combinação que considera o aumento das cargas gravitacionais nos vãos imediatamente adjacentes ao elemento removido na determinação das ações controladas por deformação e por força                        |
| $\Omega_N$     | Fator de incremento dinâmico para o cálculo de ações controladas por deformação e por força na análise estática não linear                                                                                  |
| $\theta_{pra}$ | Ângulo de rotação plástica                                                                                                                                                                                  |
| $\theta_y$     | Ângulo de rotação no escoamento                                                                                                                                                                             |
| $G_{ND}$       | Valor das cargas gravitacionais para análise dinâmica não linear                                                                                                                                            |
| $M(x)$         | Momento fletor ao longo do eixo do elemento                                                                                                                                                                 |
| $N(x)$         | Força axial que atua ao longo do elemento                                                                                                                                                                   |
| $E$            | Módulo de elasticidade longitudinal                                                                                                                                                                         |
| $I$            | Momento de inércia da seção transversal                                                                                                                                                                     |
| $A$            | Área da seção transversal                                                                                                                                                                                   |
| $w(x)$         | Deslocamento transversal generalizado do elemento                                                                                                                                                           |
| $u(x)$         | Deslocamento longitudinal generalizado do elemento                                                                                                                                                          |

|                                |                                                                                                                                                          |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\phi_i^b$                     | Rotação relativa no nó $i$ do elemento $b$                                                                                                               |
| $\phi_j^b$                     | Rotação relativa no nó $j$ do elemento $b$                                                                                                               |
| $\delta_b$                     | Alongamento do elemento $b$                                                                                                                              |
| $m_i$                          | Momento fletor generalizado que atua no nó $i$ do elemento                                                                                               |
| $m_j$                          | Momento fletor generalizado que atua no nó $j$ do elemento                                                                                               |
| $n$                            | Força axial que atua no elemento                                                                                                                         |
| $L_0$                          | Comprimento inicial do elemento                                                                                                                          |
| $L$                            | Comprimento final do elemento                                                                                                                            |
| $u_i$                          | Deslocamento do nó $i$ na direção do eixo X                                                                                                              |
| $w_i$                          | Deslocamento do nó $i$ na direção do eixo Z                                                                                                              |
| $\theta_i$                     | Rotação do nó $i$ em relação à sua posição inicial                                                                                                       |
| $\{\mathbf{q}\}_b$             | Matriz de deslocamentos globais generalizados do elemento $b$                                                                                            |
| $\{\mathbf{q}^L\}_b$           | Matriz de deslocamentos locais generalizados do elemento $b$                                                                                             |
| $[\mathbf{T}]_b$               | Matriz responsável por realizar a mudança de base entre os sistemas de coordenadas global e local                                                        |
| $x_L, z_L$                     | Eixos locais                                                                                                                                             |
| $du_i^L$                       | Incremento de deslocamento do nó $i$ ao longo do eixo $x_L$                                                                                              |
| $dw_i^L$                       | Incremento de deslocamento do nó $i$ ao longo do eixo $z_L$                                                                                              |
| $d\phi_i^L$                    | Incremento infinitesimal na rotação do nó $i$ ,                                                                                                          |
| $[\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b$ | Matriz de transformação cinemática do elemento $b$ no sistema local de coordenadas                                                                       |
| $[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b$   | Matriz de transformação cinemática do elemento $b$ no sistema global                                                                                     |
| $[\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b$ | Matriz que relaciona todos os deslocamentos e rotações locais de um elemento aos deslocamentos e rotações correspondentes do sistema global da estrutura |
| $W_{def}^*$                    | Trabalho virtual interno expresso pelas deformações generalizadas                                                                                        |
| $W_{ext}^*$                    | Trabalho virtual externo definido pelas forças externas aplicadas                                                                                        |
| $\{\mathbf{U}^*\}$             | Matriz que contempla apenas os deslocamentos nodais                                                                                                      |
| $\{\mathbf{P}\}$               | Matriz de forças nodais externas generalizadas                                                                                                           |
| $\{\mathbf{M}\}_b$             | Matriz de esforços internos generalizados do elemento $b$                                                                                                |
| $\{\Phi^*\}_b$                 | Matriz de deformações generalizadas conjugada do elemento $b$                                                                                            |
| $M_b(x_b)$                     | Distribuição do momento fletor no elemento                                                                                                               |
| $Q_b(x_b)$                     | Força externa distribuída                                                                                                                                |

|                                                          |                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_b(x_b)$                                               | Deflexão do elemento                                                                                        |
| $El_b$                                                   | Rigidez à flexão do elemento                                                                                |
| $u_b(x_b)$                                               | Deslocamento longitudinal do elemento                                                                       |
| $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4$ | Constantes de integração                                                                                    |
| $\phi_i^0, \phi_j^0$                                     | Termos das deformações generalizadas iniciais associadas aos nós $i$ e $j$                                  |
| $\{\Phi^0\}_b$                                           | Matriz de deformações generalizadas iniciais                                                                |
| $[\mathbf{F}_0]_b$                                       | Matriz de flexibilidade do elemento $b$                                                                     |
| $[\mathbf{E}_0]_b$                                       | Matriz de elasticidade do elemento $b$                                                                      |
| $U$                                                      | Energia potencial do corpo com trinca                                                                       |
| $U_0$                                                    | Energia potencial do corpo sem trinca                                                                       |
| $\sigma$                                                 | Tensão aplicada                                                                                             |
| $a$                                                      | Metade do comprimento da trinca                                                                             |
| $t$                                                      | Espessura da placa                                                                                          |
| $\gamma_s$                                               | Energia superficial específica                                                                              |
| $d$                                                      | Primeira variável de dano                                                                                   |
| $\ell_1$                                                 | Segunda variável de dano                                                                                    |
| $\bar{A}$                                                | Área da seção transversal do corpo na configuração fictícia                                                 |
| $\bar{\sigma}$                                           | Tensão efetiva                                                                                              |
| $\bar{E}$                                                | Módulo de elasticidade do corpo na configuração fictícia                                                    |
| $\varepsilon$                                            | Deformação específica                                                                                       |
| $\varepsilon^e$                                          | Deformação específica elástica                                                                              |
| $\varepsilon^d$                                          | Deformação específica relativa ao dano                                                                      |
| $\varepsilon^p$                                          | Deformação específica plástica                                                                              |
| $\varepsilon_u$                                          | Deformação específica última                                                                                |
| $\varepsilon_y$                                          | Deformação específica relativa ao escoamento                                                                |
| $\{\Phi^e\}_b$                                           | Matriz de deformações generalizadas do elemento elástico                                                    |
| $\{\Phi^p\}_b$                                           | Matriz de deformações plásticas                                                                             |
| $\{\Phi^d\}_b$                                           | Matriz que contém as rotações devidas ao dano                                                               |
| $[\mathbf{C}(\mathbf{D})]_b$                             | Matriz que representa a flexibilidade adicional do elemento estrutural resultante da fissuração do concreto |
| $F_{ij}^e$                                               | Elemento $(i, j)$ da matriz de flexibilidade elástica                                                       |
| $[\mathbf{F}(\mathbf{D})]_b$                             | Matriz de flexibilidade de um elemento de pórtico danificado                                                |

|                 |                                                                          |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $R_i, R_j$      | Funções de resistência à fissuração nas rótulas $i$ e $j$                |
| $R_0$           | Resistência inicial à fissuração                                         |
| $R_n$           | Função de resistência à fissuração axial                                 |
| $G_i, G_j$      | Taxas de liberação de energia das rótulas $i$ e $j$                      |
| $G_n$           | Taxa de liberação de energia relativa à força axial $n$                  |
| $d_i, d_j$      | Variáveis internas de dano à flexão nas rótulas $i$ e $j$                |
| $d_n$           | Variável interna de dano axial                                           |
| $d_u$           | Dano último                                                              |
| $q_m$           | Parâmetro relativo ao efeito do encruamento das armaduras                |
| $M_{cr}$        | Momento fletor crítico                                                   |
| $M_u$           | Momento fletor último                                                    |
| $f_i, f_j$      | Funções de escoamento nas rótulas $i$ e $j$                              |
| $k_{cp}$        | Parâmetro de ajuste entre as variáveis de dano por flexão e tração axial |
| $c_n$           | Rigidez ao encruamento cinemático                                        |
| $\gamma$        | Parâmetro adicional                                                      |
| $M_p$           | Momento de plastificação                                                 |
| $N_p$           | Esforço normal de plastificação                                          |
| $\delta_b^p$    | Alongamento de plastificação do elemento $b$                             |
| $\delta_{cr}^p$ | Alongamento crítico de plastificação                                     |
| $f_n$           | Função de escoamento relativa ao esforço normal                          |

## SUMÁRIO

|            |                                                                           |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO.....</b>                                                    | <b>19</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Considerações iniciais.....</b>                                        | <b>19</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Estudos numéricos sobre colapso progressivo.....</b>                   | <b>20</b> |
| <b>1.3</b> | <b>MDC aplicada à análise estrutural .....</b>                            | <b>21</b> |
| <b>1.4</b> | <b>Justificativa .....</b>                                                | <b>21</b> |
| <b>1.5</b> | <b>Objetivos.....</b>                                                     | <b>22</b> |
| 1.5.1      | Objetivo geral .....                                                      | 22        |
| 1.5.2      | Objetivos específicos.....                                                | 22        |
| <b>2</b>   | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>                                        | <b>24</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Colapso progressivo de estruturas .....</b>                            | <b>24</b> |
| 2.1.1      | Conceitos fundamentais e caracterização .....                             | 24        |
| 2.1.2      | Evolução histórica .....                                                  | 28        |
| 2.1.3      | Mecanismos de resistência .....                                           | 30        |
| <b>2.2</b> | <b>CrITÉRIOS DO GSA 2016 PARA ANÁLISES LINEAR E NÃO LINEAR.....</b>       | <b>32</b> |
| 2.2.1      | Procedimento Linear Estático.....                                         | 32        |
| 2.2.2      | Procedimento Estático Não Linear .....                                    | 34        |
| 2.2.3      | Procedimento Dinâmico Não Linear .....                                    | 36        |
| <b>2.3</b> | <b>Modelagem teórica de pórticos elásticos .....</b>                      | <b>37</b> |
| 2.3.1      | Notação de Powell .....                                                   | 37        |
| 2.3.2      | Cinemática de pórticos planos.....                                        | 39        |
| 2.3.3      | Formulação das equações de equilíbrio.....                                | 47        |
| 2.3.4      | Equações constitutivas.....                                               | 49        |
| <b>2.4</b> | <b>Fundamentos da Mecânica do Dano .....</b>                              | <b>52</b> |
| 2.4.1      | Fundamentos da Mecânica da Fratura .....                                  | 52        |
| 2.4.2      | Mecânica do Dano Contínuo .....                                           | 56        |
| 2.4.3      | Modelo de Dano Concentrado.....                                           | 59        |
| 2.4.4      | Modelo modificado de dano segundo Silva (2025).....                       | 61        |
| <b>3</b>   | <b>ESTUDOS EXPERIMENTAIS DE REFERÊNCIA .....</b>                          | <b>68</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Descrição do ensaio experimental de Yu e Tan (2013).....</b>           | <b>68</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Descrição do ensaio experimental de Long <i>et al.</i> (2021).....</b> | <b>72</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Descrição do ensaio experimental de Lew <i>et al.</i> (2011).....</b>  | <b>75</b> |
| <b>4</b>   | <b>METODOLOGIA.....</b>                                                   | <b>78</b> |

|            |                                                                       |            |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4.1</b> | <b>Estrutura geral da pesquisa .....</b>                              | <b>78</b>  |
| 4.1.1      | Revisão teórica e levantamento bibliográfico .....                    | 78         |
| 4.1.2      | Configuração dos casos de estudo .....                                | 79         |
| 4.1.3      | Adaptações do modelo de Silva (2025) .....                            | 79         |
| 4.1.3.1    | Análise paramétrica do parâmetro $\gamma$ .....                       | 81         |
| 4.1.4      | Adaptação da MDC ao modelo numérico .....                             | 82         |
| 4.1.4.1    | Lei de evolução da deformação plástica .....                          | 83         |
| 4.1.4.2    | Lei de evolução do dano axial .....                                   | 84         |
| 4.1.4.3    | Lei de evolução do dano para materiais dúcteis .....                  | 84         |
| 4.1.5      | Implementação computacional e simulação numérica .....                | 85         |
| 4.1.6      | Validação do modelo .....                                             | 86         |
| <b>5</b>   | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>                                  | <b>88</b>  |
| <b>5.1</b> | <b>Validação do modelo numérico .....</b>                             | <b>88</b>  |
| 5.1.1      | Validação com os experimentos de Yu e Tan (2013) .....                | 88         |
| 5.1.2      | Validação com os experimentos de Long <i>et al.</i> (2021) .....      | 90         |
| 5.1.3      | Validação com os experimentos de Lew <i>et al.</i> (2011) .....       | 96         |
| <b>5.2</b> | <b>Avaliação da formulação proposta .....</b>                         | <b>99</b>  |
| 5.2.1      | Influência do parâmetro adicional $\gamma$ na resposta numérica ..... | 99         |
| 5.2.2      | Comparações entre a formulação original e a formulação proposta ..... | 100        |
| <b>6</b>   | <b>CONCLUSÕES .....</b>                                               | <b>104</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Recomendações para trabalhos futuros .....</b>                     | <b>105</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                              | <b>106</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações iniciais

De acordo com a ASCE Standard 7-05 (2006), o colapso progressivo pode ser definido como a propagação de uma falha local inicial de um elemento para outros elementos estruturais, resultando, eventualmente, no colapso total da estrutura ou de uma parcela cuja extensão seja desproporcional em relação ao dano inicial, isto é, quando a área afetada pelo colapso excede significativamente aquela que seria razoavelmente esperada em decorrência da falha inicial. Assim, uma pequena falha, como uma fissura ou um dano localizado, quando não controlada, pode resultar na perda da capacidade resistente de uma parte, ainda que pequena, da estrutura. Associada a um efeito de ordem progressiva, a propagação das falhas pode levar ao colapso parcial ou total da edificação.

Naturalmente, as edificações estão sujeitas aos mais diversos tipos de ações, sejam elas permanentes (peso próprio da estrutura, por exemplo), variáveis (decorrentes do uso da edificação) e excepcionais (sismos, explosões etc.). Os dois primeiros devem ser considerados no dimensionamento estrutural, enquanto as ações excepcionais, que podem gerar falhas localizadas e desencadear o colapso progressivo, nem sempre são devidamente considerados em projetos, uma vez que possuem baixa probabilidade de ocorrência e grande variabilidade. Dessa forma, eventos imprevisíveis ou que não são contemplados de forma adequada na concepção do projeto estrutural podem levar ao comprometimento da estabilidade global da edificação.

Dentre os primeiros casos documentados de colapso progressivo em edifícios, destaca-se o ocorrido em 1968 na cidade Londres (Reino Unido). Na ocasião, a explosão de um botijão de gás resultou no colapso parcial do edifício *Ronan Point*. Outro caso de grande repercussão ocorreu em 1973 no condado de Fairfax, estado da Virginia (EUA), onde o edifício *Skyline Plaza* apresentou colapso progressivo ainda na fase de construção. Neste caso, o evento foi iniciado pela insuficiente capacidade resistente dos escoramentos que foram utilizados na fase de concretagem das lajes. Outros eventos podem, ainda, ser citados, como os decorridos no edifício *Murrah* (Oklahoma, EUA) em 1995 e no *World Trade Center* (Nova Iorque, EUA) em 2001.

Tais eventos evidenciaram a necessidade de adequação dos conceitos relativos à segurança estrutural, resultando em mudanças normativas e, também, em diretrizes de projeto.



Assim, a necessidade de uma maior atenção na análise de falhas localizadas e na forma como elas se propagam, promoveu o desenvolvimento de estratégias de reforço estrutural bem como melhorias de critérios que levem à uma maior robustez e à redundância de projetos.

Dentre os mecanismos de resistência que são acionados quando da ocorrência de uma falha localizada, destaca-se a ação catenária, que consiste no desenvolvimento de esforços de tração nos elementos da estrutura submetidos a deslocamentos elevados. Tal mecanismo acarreta num aumento da resistência residual da estrutura e contribui para postergar, ou mesmo impedir, a propagação do colapso. Devido à sua importância, vários estudos experimentais e numéricos têm sido desenvolvidos com o intuito de compreender melhor suas consequências na robustez estrutural e, também, na capacidade dos elementos de resistirem a eventos extremos.

Com o avanço das técnicas de modelagem computacional, tem sido possível utilizar formulações capazes de representar os processos de degradação estrutural associados a eventos como o colapso progressivo. A Mecânica do Dano Concentrado (MDC), neste contexto, apresenta-se como ferramenta com potencial para permitir a representação de perda progressiva de rigidez e, também, da resistência de elementos estruturais, por meio de variáveis de dano concentradas em regiões específicas da estrutura. Dessa maneira, a MDC acaba por constituir uma alternativa para análise de fenômenos não lineares, como a formação de rótulas inelásticas e o desenvolvimento da ação catenária.

## **1.2 Estudos numéricos sobre colapso progressivo**

Nas últimas décadas, vários modelos numéricos foram desenvolvidos a fim de contribuir com a análise do comportamento de estruturas submetidas ao colapso progressivo. Os modelos baseados no Método dos Elementos Finitos estão entre as abordagens mais empregadas, sendo capazes de representar com certo nível de detalhamento mecanismos relativos à fissuração, plastificação e redistribuição de esforços. Trabalhos como os de Yi *et al.* (2021), que contribuiu com a consolidação do entendimento de que a ação catenária constitui um dos principais mecanismos responsáveis pela resistência residual, Izzudin *et al.* (2008), que propôs um método simplificado para a análise de edifícios submetidos à perda súbita de pilares e Kim e Kim (2009), que evidenciou que análises lineares podem subestimar ou superestimar a resposta da

estrutura ao colapso progressivo, demonstram a importância das ferramentas numéricas no auxílio da compreensão dos mecanismos resistentes associados à ação catenária.

Ainda que apresente precisão elevada, os modelos refinados demandam alto custo computacional quando aplicados em análises de estruturas completas. Assim, abordagens simplificadas têm sido buscadas a fim de representar os principais fenômenos não lineares envolvidos no colapso progressivo, com o objetivo de alcançar equilíbrio entre precisão numérica e eficiência computacional.

### **1.3 MDC aplicada à análise estrutural**

A MDC, dentre as formulações utilizadas para a representação da não linearidade estrutural, tem lugar de destaque por concentrar em regiões específicas dos elementos estruturais os processos de degradação, que são associados à formação de rótulas inelásticas. Ela foi desenvolvida por Flórez-López (1993), ampliada por diversos pesquisadores e constitui uma abordagem que vem sendo aplicada em análise de diferentes estruturas de concreto armado.

Nos últimos anos, variadas formulações fundamentadas na MDC vêm sendo utilizadas na representação não linear de pórticos de concreto armado. Diversos trabalhos demonstram que a teoria tem potencial para simulação de fenômenos complexos com custo computacional reduzido se comparada a modelos refinados de elementos finitos.

Por outro lado, a aplicação da MDC na análise do colapso progressivo ainda se constitui como um campo pouco explorado, especialmente no que se refere à representação dos mecanismos associados à ação catenária e à perda da resistência residual em grandes deslocamentos.

### **1.4 Justificativa**

Considerada uma das bases do projeto de estruturas, a segurança estrutural é fundamental para garantir a integridade das edificações e de seus usuários. Assim, o aparecimento de falhas localizadas que levem ao colapso estrutural se apresenta como um problema que evidencia a necessidade do conhecimento dos mecanismos que possam resultar neste tipo de falha. Dessa

forma, a realização de pesquisas que tenham como objetivo compreender o comportamento de estruturas em situações de colapso progressivo é fundamental para a ampliação do entendimento dos mecanismos atuantes nesse fenômeno.

Embora na literatura existam diversos estudos voltados para a análise do colapso progressivo, ainda são limitadas as pesquisas que utilizam a MDC para representar, de maneira simultânea, os mecanismos de degradação decorrentes da flexão e os efeitos da ação catenária em estruturas de concreto armado. Além disso, a representação adequada da resistência residual que se desenvolve em grandes deslocamentos se configura como um dos grandes desafios da modelagem numérica desse fenômeno.

Assim, a utilização da MDC constitui uma opção viável para a análise do colapso progressivo, quando associada a adaptações que sejam capazes de representar de forma mais realista a degradação da resistência da estrutura quando submetida a esforços axiais. Dessa maneira, o presente trabalho tem o intuito de contribuir para o avanço da modelagem numérica aplicável à engenharia de estruturas, uma vez que seja capaz de fornecer bases para a compreensão dos mecanismos envolvidos em eventos de colapso progressivo.

## **1.5 Objetivos**

### **1.5.1 Objetivo geral**

Analisar o colapso progressivo em estruturas de concreto armado a partir da MDC, por meio de modelagem numérica, a fim de avaliar sua aplicação na previsão do comportamento estrutural e na compreensão dos fatores que influenciam na propagação do colapso.

### **1.5.2 Objetivos específicos**

- Implementar um modelo numérico baseado na MDC para análise do colapso progressivo em estruturas de concreto armado;
- Validar o modelo por comparação com resultados experimentais publicados, especificamente os obtidos nas bases de dados, analisando a aderência da simulação ao comportamento obtido numericamente;

- Avaliar a capacidade do modelo em reproduzir os mecanismos associados ao colapso progressivo;
- Investigar, via simulações, cenários de propagação do colapso, incluindo a ativação da ação de catenária e a influência de parâmetros estruturais no desenvolvimento do colapso progressivo.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Colapso progressivo de estruturas

#### 2.1.1 Conceitos fundamentais e caracterização

As estruturas são submetidas aos mais diversos tipos de ações ao longo de sua vida útil, sejam elas permanentes, variáveis ou excepcionais. Quando as tensões geradas por essas ações superam a capacidade resistente da estrutura, seja por erros de projeto, falhas na execução ou mesmo explosões ou sismos, por exemplo, há o surgimento de falhas que, após uma reação em cadeia, podem resultar no colapso total ou parcial da estrutura.

Do ponto de vista mecânico, o colapso estrutural pode ser entendido como a perda da capacidade portante da estrutura, que resulta em deformações excessivas ou mesmo na falha total dos seus elementos. Já em termos de funcionalidade, o colapso pode ser caracterizado como a perda do desempenho adequado para o qual a estrutura foi projetada. Do ponto de vista normativo, o colapso ocorre quando a segurança da estrutura não é mais atendida considerando as prescrições das Normas Técnicas.

Segundo a ASCE 7-05 *Minimum Design Loads for Buildings and Others Structures* (2006), o colapso progressivo pode ser definido, como a propagação de uma falha local inicial de elemento para elemento, resultando, eventualmente, no colapso de toda a estrutura ou de uma parte desproporcionalmente grande dela. Dessa forma, ele ocorre quando uma falha local desencadeia uma sequência de sucessivas falhas que levam, de maneira desproporcional, à destruição total ou parcial da edificação.

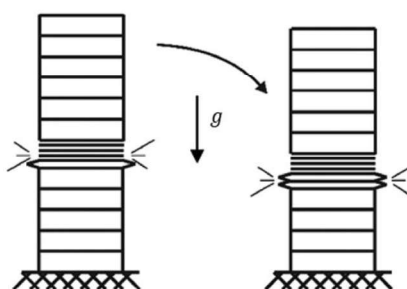
Por vezes, o conceito de colapso progressivo é confundido com o de colapso desproporcional. Porém, o colapso progressivo é caracterizado pela progressividade do seu desenvolvimento, algo semelhante ao colapso de uma fileira de dominós. Ele pode ocorrer tanto de maneira horizontal (quando o dano se estende para elementos adjacentes em um mesmo pavimento) quanto verticalmente (quando a falha de um elemento compromete elementos localizados acima ou abaixo dele). Já o colapso desproporcional é aquele que, segundo um critério determinado pelo observador, é considerado desproporcional em relação à causa inicial. Esse julgamento se dá através da observação das consequências do dano resultante dos eventos iniciais, sem necessariamente descrever as características do comportamento estrutural (CPNI, 2011).

A depender da origem do início da falha e da configuração da estrutura, a ocorrência do colapso progressivo pode se dar de diferentes formas. Isto é, em função da maneira como os elementos da estrutura transmitem os esforços entre si, algum mecanismo predominante governa a propagação da falha e determina a forma como o colapso se desenvolve.

Os principais tipos de colapso progressivo, segundo Starossek (2007), são do tipo “panqueca” (*pancake-type collapse*), “zíper” (*zipper-type collapse*), “dominó” (*domino-type collapse*), “seção” (*section-type collapse*), “instabilidade” (*instability-type collapse*) e “misto” (*mixed-type collapse*). Os tipos de colapso foram definidos segundo a dinâmica de propagação das falhas, evidenciando como a ruptura de um elemento pode desencadear a falência progressiva de outros. (Adam *et al.*, 2018).

O colapso do tipo “panqueca” caracteriza-se por uma sequência de falhas estruturais verticais, iniciadas com a perda de capacidade resistente de elementos responsáveis pela sustentação de cargas, como pilares ou colunas. Essa falha inicial resulta na separação parcial ou completa de componentes estruturais superiores, que se deslocam em movimento rígido na direção vertical, recaindo sobre os elementos inferiores da estrutura, conforme ilustrado na Figura 1. Como consequência, o colapso progride verticalmente, configurando um mecanismo de propagação de colapso progressivo (Starossek, 2007).

**Figura 1** – Dinâmica da propagação vertical em colapsos do tipo “panqueca”.

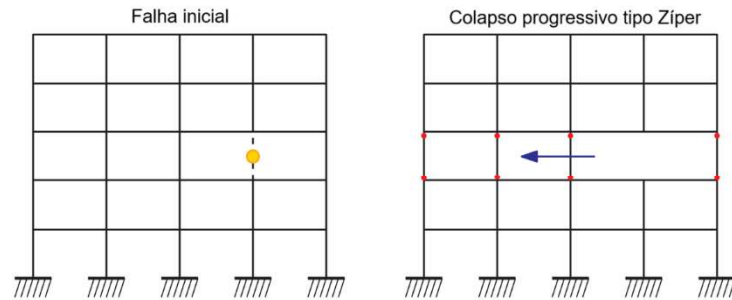


Fonte: Lalkovski & Starossek (2022)

Já o colapso do tipo “zíper” é caracterizado por uma sequência progressiva de falhas estruturais, iniciada geralmente pela ruptura súbita de um ou poucos elementos, o que desencadeia uma redistribuição imediata dos esforços internos para os componentes remanescentes da estrutura. Essa redistribuição provoca um carregamento impulsivo, em virtude da natureza abrupta da falha inicial, levando a uma resposta dinâmica dos elementos ainda íntegros (Starossek, 2007). A perda de um único elemento estrutural de suporte de carga

redistribui os esforços para os demais elementos estruturais situados transversalmente à direção da falha (Figura 2). Se a resistência dos elementos remanescentes for excedida devido aos esforços adicionais aplicados ou ao caráter dinâmico dessa aplicação, a falha será ampliada (Mckenzie *et al.*, 2018).

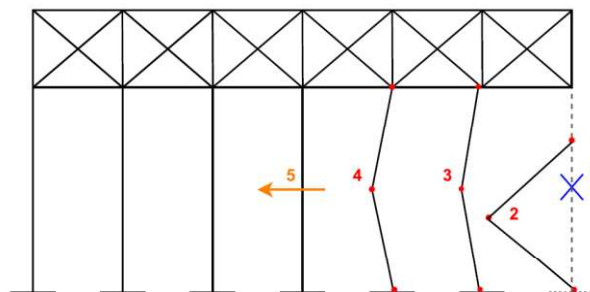
**Figura 2** – Representação da direção da falha do colapso progressivo tipo “zíper”.



Fonte: Adaptado de Kiakojouri (2020)

O colapso do tipo “dominó” caracteriza-se por uma sequência de eventos desencadeados pelo tombamento inicial de um elemento estrutural. Durante essa queda, a energia potencial gravitacional acumulada é convertida em energia cinética, a qual é transferida a um elemento adjacente por meio de um impacto. Esse impacto, causado tanto pela inclinação quanto pela movimentação do elemento em queda, gera uma força com componentes estáticas e dinâmicas. A súbita desaceleração do elemento impactante e a ativação abrupta dos elementos vizinhos contribuem para o tombamento subsequente desses elementos (Starossek, 2007). A progressão do colapso ocorre, portanto, impulsionada pela propagação das forças de impacto e pela repetição do mecanismo de tombamento entre os elementos sucessivos, podendo ocorrer tanto na horizontal como na vertical (Figura 3).

**Figura 3** – Representação da direção da progressão do colapso tipo “dominó”.



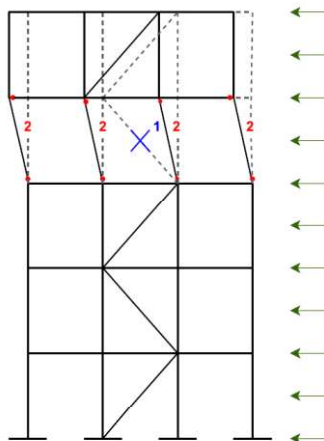
Fonte: Adaptado de Elkady *et al.* (2024)

Por outro lado, o colapso do tipo “seção” é outro tipo de colapso por redistribuição, que é conceitualmente semelhante ao colapso do tipo “zíper”. No entanto, o colapso do tipo “seção”

pode ser considerado como ocorrendo nas seções dos elementos. Esse mecanismo causa uma falha adicional nas partes contíguas do elemento em colapso devido à incapacidade dos esforços serem redistribuídos adequadamente. Assim, pode-se concluir que o colapso do tipo seção não ocorre em objetos que contêm unidades estruturadas, independentes, mas conectadas. No entanto, ele ocorre em unidades contínuas únicas, como cabos e cascas. Devido à sua natureza abrupta e dependente, em muitas situações, a falha gerada por esse tipo de colapso pode ser descrita como uma fratura rápida, em vez de um colapso progressivo (Starossek, 2017 *apud* Elkady *et al.* 2024).

Já colapso do tipo “instabilidade” caracteriza-se por um conjunto de eventos encadeados que se iniciam com a falha de elementos estruturais responsáveis por estabilizar componentes submetidos à compressão (Figura 4). A perda dessa estabilização compromete a capacidade de suporte desses elementos comprimidos, tornando-os suscetíveis à instabilidade. Como consequência, pequenas perturbações podem desencadear a falha súbita desses componentes desestabilizados, promovendo, assim, a progressão do colapso ao longo da estrutura (Starossek, 2007).

**Figura 4** – Representação do mecanismo do colapso progressivo tipo “instabilidade”.



Fonte: Adaptado de Elkady *et al.* (2024)

Quando há a combinação de dois ou mais mecanismos distintos de colapso progressivo, que se manifestam de forma simultânea ou sucessiva em uma mesma estrutura, tem-se o chamado colapso “misto”. Conforme descrito por Starossek (2007), essa interação entre diferentes mecanismos compromete a estabilidade global do sistema estrutural, dificultando a previsibilidade do comportamento pós-falha.

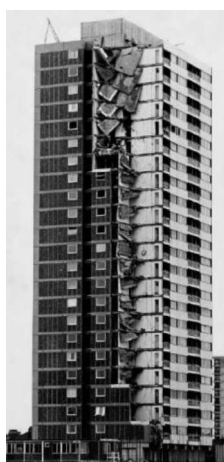


### 2.1.2 Evolução histórica

O colapso progressivo de estruturas tem sido um tema de crescente interesse na engenharia civil, impulsionado por eventos históricos marcantes que evidenciaram sua gravidade e consequências. Embora já houvesse registros anteriores de colapsos estruturais progressivos, foi o desabamento do edifício residencial *Ronan Point*, na Inglaterra, em 1968, que trouxe a questão para o centro dos debates técnicos e acadêmicos.

O edifício *Ronan Point*, uma construção de vinte e dois pavimentos e 110 apartamentos, entrou em colapso parcial apenas dois meses após sua inauguração. O desabamento foi desencadeado por uma explosão de gás no 18º andar, que rompeu as paredes externas da cozinha que eram compostas por painéis pré-moldados de concreto estrutural. Como essas paredes eram o único suporte dos pavimentos superiores, sua falha resultou em um efeito dominó: os andares superiores desmoronaram sucessivamente até o térreo, destruindo o canto sudeste do edifício, conforme mostrado na Figura 5.

**Figura 5** – Colapso do edifício Ronan Point.



Fonte: Palmisano (2014)

De acordo com o *Report of the Inquiry into the Collapse of Flats at Ronan Point, Canning Town* (1968), o prédio foi construído com um sistema composto por paredes, lajes e escadas pré-fabricadas de concreto. Os elementos eram conectados por juntas com limitada capacidade de transferência de esforços entre seus componentes.

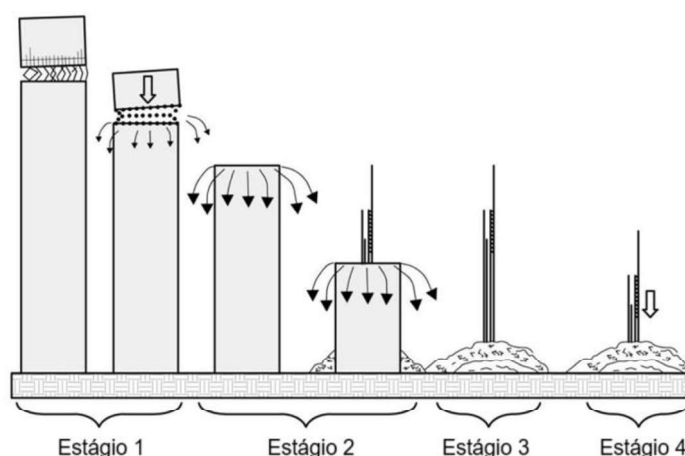
Devido a tais características, a edificação não possuía redundância suficiente para garantir a redistribuição dos esforços após a perda de componentes essenciais. Dessa forma, a remoção de um painel portante resultou numa sequência de falhas nos elementos adjacentes, levando ao colapso progressivo da estrutura.

Esse evento teve impacto significativo na regulamentação britânica, levando à revisão dos códigos de projeto. Em resposta ao ocorrido, a norma UK *Building Regulations* (1970) passou a exigir níveis mínimos de ductilidade e redundância em estruturas de concreto armado, incorporando diretrizes específicas para mitigar colapsos progressivos.

Décadas depois, em 2001, o mundo presenciou um dos casos mais emblemáticos de colapso progressivo: a destruição das Torres Gêmeas do *World Trade Center*, em Nova York. De acordo com o relatório final do NIST (2005), o sistema construtivo das Torres Gêmeas era baseado em um sistema estrutural tubular composto principalmente por colunas perimetrais de aço e um núcleo central de aço. As 244 colunas perimetrais formavam a "casca" externa do edifício, enquanto o núcleo central abrigava as escadas, elevadores e sistemas de utilidades. O núcleo central tinha um formato retangular e era composto por várias colunas de aço dispostas em uma configuração de matriz, o que ajudava a distribuir as cargas verticais e laterais.

A redundância do sistema permitia que, em caso de falha localizada, a carga pudesse ser redistribuída entre os elementos remanescentes, uma característica fundamental para garantir a estabilidade da edificação. Contudo, o impacto dos aviões e os subsequentes incêndios reduziram a capacidade de resistência do sistema e, dessa forma, o colapso progressivo das torres (ver Figura 6), não pode ser atribuído apenas à falha de um único componente, mas sim à combinação de impactos e exposição prolongada ao fogo, que comprometeram a integridade estrutural de forma irreversível.

**Figura 6** – Esquema do processo de colapso da Torre Norte.



Fonte: Adaptado de Le, Bažant e Cole (2022)

O relatório final do NIST (2005) detalha que, embora o sistema estrutural tenha sido projetado para ser altamente resistente, as condições extremas resultantes do ataque terrorista foram além da capacidade de segurança para a qual o edifício foi projetado. Além disso, em

resposta a essa tragédia, o NIST publicou o relatório NISTIR 7396/2007, que sugeriu mudanças e melhorias nas normas de segurança e construção para edifícios altos, a fim de evitar falhas semelhantes em futuros projetos. Entre as recomendações, o relatório propôs aprimoramentos no desempenho das edificações em situações de incêndio, incluindo materiais de construção mais resistentes ao fogo e sistemas de proteção contra incêndio mais eficazes.

A análise histórica de grandes desastres estruturais revela que os episódios de colapso progressivo tiveram um impacto direto na evolução das normas e diretrizes de engenharia ao longo dos anos. Além de motivar revisões imediatas nos códigos de construção, esses eventos impulsionaram pesquisas científicas sobre o tema, tornando-se referências cruciais para o desenvolvimento de projetos mais seguros.

Esse crescimento nas pesquisas reflete uma preocupação global com a segurança das edificações e a necessidade de prevenir falhas catastróficas. Os estudos não apenas analisam as causas dos colapsos, mas também buscam soluções inovadoras para reforçar estruturas, garantindo maior resiliência diante de eventos extremos. Dessa forma, a engenharia moderna incorpora lições do passado para reduzir riscos e salvar vidas.

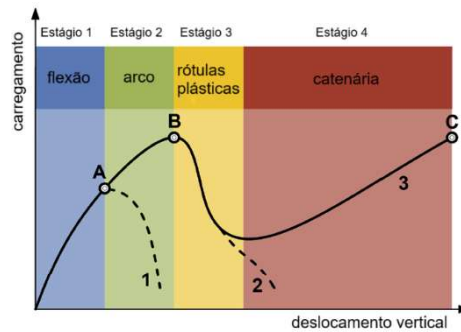
### 2.1.3 Mecanismos de resistência

Em situações de falha localizada em estruturas, diferentes mecanismos de resistência podem ser mobilizados para evitar o colapso progressivo. Esses mecanismos atuam redistribuindo os esforços e contribuindo para a manutenção da estabilidade global, mesmo após a perda de um ou mais elementos estruturais. A compreensão desses comportamentos é fundamental para o correto dimensionamento de estruturas.

A capacidade de uma estrutura resistir ao colapso progressivo está diretamente relacionada à existência de caminhos de carga alternativos eficientes. Dessa forma, em um edifício de concreto armado, por exemplo, a remoção de um pilar pode ser compensada por diversos mecanismos de resistência ou redistribuição de esforços, que criam rotas alternativas para a transferência das cargas.

De acordo com Praxedes (2021), o comportamento estrutural após a remoção de um elemento crítico, como uma coluna, pode ser dividido em quatro etapas: flexão, arqueamento por compressão, formação de rótulas plástica e ação catenária, conforme mostrado na Figura 7.

**Figura 7** – Resposta de uma estrutura de concreto armado ao colapso progressivo.

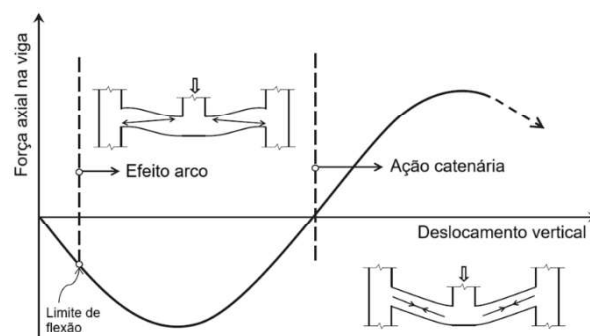


Fonte: Adaptado de Praxedes (2021)

Inicialmente, a estrutura responde à flexão (estágio 1), com comportamento elástico seguido pela formação de fissuras e escoamento do aço. Havendo restrição horizontal, a estrutura pode desenvolver mecanismos adicionais de resistência, como o caracterizado pela ação de arqueamento por compressão, na qual forças axiais aumentam a rigidez e capacidade de carga da viga (estágio 2). O estágio 3 corresponde à formação de rótulas plásticas e ao início da instabilidade, associada ao escoamento do aço e esmagamento do concreto. Por fim, no estágio 4, a estrutura entra em regime de ação catenária, no qual as vigas passam a resistir por tração, comportando-se como cabos e proporcionando uma última reserva de resistência contra o colapso (Praxedes, 2021).

Percebe-se, então, segundo Kunnath *et al.* (2018), que uma das características da resposta de uma viga de concreto armado submetida a grandes rotações e deslocamentos sob cargas gravitacionais crescentes, como nos casos de remoção de pilar, é a transição gradual da força axial na viga de compressão para tração. A Figura 8 mostra a representação conceitual da evolução da força axial em viga totalmente restrita submetida ao colapso progressivo.

**Figura 8** – Comportamento axial de viga com restrição total sob colapso progressivo.



Fonte: Adaptado de Kunnath *et al.* (2018)

Um dos métodos mais difundidos e utilizados para a análise e projeto, com a finalidade de tornar as estruturas mais resilientes ao colapso progressivo, é conhecido como *Alternate Path*

*Method* (APM), ou Método do Caminho Alternativo, que foi desenvolvido pela *General Services Administration* (GSA) dos Estados Unidos como uma das principais estratégias para avaliar a robustez estrutural de edificações frente ao colapso progressivo. A proposta do método consiste em verificar se a estrutura é capaz de redistribuir os esforços após a remoção súbita de um elemento estrutural essencial, como uma viga ou pilar, sem que isso resulte em um colapso em cadeia.

Para isso, a GSA estabeleceu diretrizes que orientam a aplicação do método por meio de análises computacionais e critérios de aceitação baseados em deslocamentos e limites de dano. Esse procedimento passou a ter destaque principalmente após eventos de falhas estruturais, sendo incorporado em normas e guias técnicos voltados à segurança estrutural de edificações públicas e privadas.

A adoção das diretrizes do APM está condicionada ao que a *Interagency Security Committee* (ISC) define como *Facility Security Level* (FSL), ou Nível de Segurança da Instalação, e à quantidade de pavimentos da edificação. O FSL é determinado por diversos critérios relacionados à segurança, incluindo a atratividade do alvo e o valor estratégico da estrutura (Praxedes, 2021).

Segundo McKay *et al.* (2012), no APM, o projetista deve demonstrar que a edificação é capaz de resistir à ausência de um elemento estrutural removido, e que a extensão dos danos resultantes não ultrapassa os limites aceitáveis. Além disso, a análise feita por APM pode ser realizada a partir de três procedimentos distintos: linear estático, estático não linear e dinâmico não linear, .

## **2.2 Critérios do GSA 2016 para análises linear e não linear**

### **2.2.1 Procedimento Linear Estático**

Segundo a GSA (2016), o procedimento Linear Estático, ou *Linear Static Procedure* (LSP) é o método mais simplificado entre os três propostos e é recomendado apenas para estruturas que atendem a algumas limitações de regularidade e ductilidade. Além disso, seu uso está restrito a edificações com até 10 pavimentos e que atendam a critérios específicos relacionados a irregularidades estruturais e às Razões de Demanda-Capacidade, ou *Demand-Capacity Ratios* (DCRs).

São consideradas irregularidades estruturais: (a) as descontinuidades significativas nos sistemas de suporte vertical ou lateral, como desalinhamentos de pilares ou vigas de transferência; (b) as variações de rigidez ou resistência em colunas externas, exceto nas de canto, entre vãos adjacentes inferiores a 50%; (c) as descontinuidades análogas em paredes externas portantes; e (d) elementos resistentes a cargas laterais que não estejam alinhados com os eixos principais da estrutura. Já a verificação das DCRs deve ser feita por meio de um modelo linear da estrutura e é calculada pela razão entre a ação solicitante e a resistência esperada do componente (GSA, 2016).

A análise do modelo deve ser feita a partir da consideração de dois casos de carregamentos: um para calcular as ações controladas por deformação ( $Q_{UD}$ ) e outro para calcular as ações controladas por forças ( $Q_{UF}$ ).

Para a determinação das ações controladas por deformação, deve-se aplicar simultaneamente uma combinação específica de cargas gravitacionais. A combinação referente à Demanda Geral de Carregamento  $G_{LD}$ , considera o aumento das cargas gravitacionais nos vãos imediatamente adjacentes ao elemento removido (coluna ou parede), bem como em todos os pavimentos localizados acima desse elemento. Seu cálculo é mostrado na Equação (1). Para as áreas de piso afastadas do elemento removido, deve-se aplicar uma combinação específica de cargas gravitacionais ( $G$ ), conforme Equação (2). Essa combinação é destinada aos vãos que não estão sujeitos ao aumento de cargas gravitacionais (GSA, 2016).

$$G_{LD} = \Omega_{LD}(1,2D + 0,5L) \quad (1)$$

$$G = 1,2D + 0,5L \quad (2)$$

onde  $\Omega_{LD}$  é o fator de aumento de carga para o cálculo de ações controladas por deformação na análise estática linear,  $D$  é a carga permanente, incluindo cargas de fachada,  $L$  é a carga devido ao uso ou ocupação, incluindo redução de carga variável.

De forma similar, para o cálculo das ações controladas por força, deve-se aplicar simultaneamente uma combinação específica de cargas gravitacionais conforme Equação (3).

$$G_{LF} = \Omega_{LF}(1,2D + 0,5L) \quad (3)$$

onde  $\Omega_{LF}$  é o fator de aumento de carga para o cálculo de ações controladas por força na análise estática linear.

A Tabela 1 abaixo apresenta os valores dos fatores de aumento de carga para ações controladas por deformação e ações controladas por força para o caso de remoção de colunas e paredes.

**Tabela 1** - Valores dos fatores de aumento de carga para análise estática linear.

| Material        | Tipo de estrutura | $\Omega_{LD}$       | $\Omega_{LF}$ |
|-----------------|-------------------|---------------------|---------------|
| Aço             | Pórtico           | $0,9 m_{LIF} + 1,1$ | 2,0           |
| Concreto Armado | Pórtico           | $1,2 m_{LIF} + 0,8$ | 2,0           |
|                 | Parede portante   | $2,0 m_{LIF}$       | 2,0           |
| Alvenaria       | Parede portante   | $2,0 m_{LIF}$       | 2,0           |

Fonte: Adaptado de GSA (2016)

Onde  $m_{LIF}$  é o menor  $m$  de qualquer viga primária, viga mestra, vigota ou elemento de parede que estejam diretamente conectados às colunas ou paredes localizadas diretamente acima do local de remoção da coluna ou parede; e  $m$  é o modificador de demanda do componente ou elemento, definido conforme critérios da ASCE 41 (2023).

### 2.2.2 Procedimento Estático Não Linear

O procedimento Estático Não Linear, ou *Nonlinear Static Procedure* (NSP), conforme a GSA (2016), representa um método mais detalhado e preciso para a análise estrutural, sendo indicado para estruturas que não atendem aos limites de regularidade e ductilidade exigidos para o método linear estático. Este procedimento permite considerar o comportamento real dos materiais e a redistribuição de esforços durante o colapso progressivo, por meio da modelagem do avanço das deformações e da plastificação dos elementos estruturais.

A modelagem para o NSP requer um modelo tridimensional completo da estrutura, incluindo os elementos principais, como vigas, pilares e paredes estruturais. A inclusão de componentes secundários é opcional, mas, caso omitidos, estes devem ser avaliados posteriormente para garantir que suas deformações estejam dentro dos limites aceitáveis sob critérios controlados por deformação (GSA, 2016).

As propriedades de rigidez e resistência dos materiais devem seguir os critérios estabelecidos na norma ASCE 41 (2017) e nos códigos de projeto específicos para cada material (ACI 318, AISC, entre outros), aplicando-se os fatores de redução de resistência conforme o tipo de componente e comportamento controlado (força ou deformação). Além disso, a análise deve considerar os efeitos globais e locais de estabilidade, incluindo a estabilidade lateral e o flambagem lateral-torcional dos elementos estruturais (GSA, 2016). Esses efeitos são essenciais para garantir que o modelo reflita adequadamente as condições reais de serviço e possíveis mecanismos de falha.

Para a determinação das ações controladas por deformação e por força, deve-se aplicar simultaneamente uma combinação de cargas gravitacionais. A combinação  $G_N$ , mostrada na Equação (4), considera o aumento das cargas gravitacionais nos vãos imediatamente adjacentes ao elemento removido, seja ele coluna ou parede, bem como em todos os pavimentos localizados acima desse elemento. Para as áreas de piso afastadas do elemento removido, deve-se aplicar uma combinação específica de cargas gravitacionais ( $G$ ), conforme Equação (5):

$$G_N = \Omega_N(1,2D + 0,5L) \quad (4)$$

$$G = 1,2D + 0,5L \quad (5)$$

onde  $\Omega_N$  é o fator de incremento dinâmico para o cálculo de ações controladas por deformação e por força na análise estática não linear.

A Tabela 2 apresenta os valores dos fatores de incremento dinâmico ( $\Omega_N$ ) para análise estática não linear.



**Tabela 2** - Valores dos fatores de incremento dinâmico ( $\Omega_N$ ) para análise estática não linear.

| Material        | Tipo de estrutura | $\Omega_N$                                                 |
|-----------------|-------------------|------------------------------------------------------------|
| Aço             | Pórtico           | $1,08 + \frac{0,76}{\frac{\theta_{pra}}{\theta_y} + 0,83}$ |
| Concreto Armado | Pórtico           | $1,04 + \frac{0,45}{\frac{\theta_{pra}}{\theta_y} + 0,48}$ |
|                 | Parede portante   | 2,0                                                        |
| Alvenaria       | Parede portante   | 2,0                                                        |

Fonte: Adaptado de GSA (2016)

onde  $\theta_{pra}$  é o ângulo de rotação plástica e  $\theta_y$  é o ângulo de rotação no escoamento, obtidos a partir de critérios de aceitação descritos na ASCE 41 (2023) e no GSA (2016).

### 2.2.3 Procedimento Dinâmico Não Linear

O procedimento Dinâmico Não Linear, ou *Nonlinear Dynamic Procedure* (NDP), segundo as diretrizes do GSA (2016), constitui uma das abordagens analíticas mais robustas para a avaliação da resistência progressiva de estruturas frente à perda súbita de elementos verticais. Este método é aplicável sem restrições quanto à DCR ou irregularidades geométricas da edificação, representando uma vantagem significativa em relação a outros procedimentos.

Para a aplicação do NDP, é necessário o desenvolvimento de um modelo tridimensional da estrutura completa, incluindo os elementos estruturais e não estruturais relevantes, bem como o trecho da parede ou coluna que será removido durante a análise. Os componentes primários devem ter sua rigidez e resistência corretamente representadas. Para os componentes com controle por deformação (como vigas e conexões dúcteis), deve-se aplicar os fatores de redução de resistência diretamente aos modelos não lineares de resistência. (GSA, 2016)

A modelagem deve seguir os requisitos de rigidez estipulados na ASCE 41 (2023) e, além disso, deve-se discretizar a resposta carga-deformação ao longo do comprimento dos elementos para identificar regiões de comportamento inelástico. Todos os componentes devem ter seu comportamento força-deslocamento modelado de forma explícita, incluindo a degradação de resistência e a resistência residual, quando aplicável. (GSA, 2016)

Para a determinação das ações controladas por deformação e por força, deve-se aplicar uma combinação de cargas gravitacionais. A combinação  $G_{ND}$ , que é o valor das cargas gravitacionais para análise dinâmica não linear, é mostrado na Equação (6).

$$G_{ND} = 1,2D + 0,5L \quad (6)$$

## 2.3 Modelagem teórica de pórticos elásticos

### 2.3.1 Notação de Powell

A notação de Powell consiste em uma formulação matricial desenvolvida para analisar estruturas submetidas a deslocamentos e rotações, admitindo, entretanto, pequenas deformações nos elementos. Tal notação permite representar os deslocamentos, deformações e esforços generalizados de elementos de pórtico, tornando-se uma ferramenta importante para a formulação de problemas não lineares.

Considerando a MDC, a notação de Powell é utilizada na descrição de variáveis cinemáticas e estáticas relacionadas aos elementos estruturais, o que possibilita representar as deformações e tensões generalizadas. Isso contribui para uma melhor modelagem do comportamento não linear das estruturas, bem como para a incorporação de mecanismos de dano e plasticidade concentrados nas extremidades dos elementos.

Em estruturas de barras, como vigas e pórticos, nas quais os deslocamentos, rotações, forças e momentos podem ser agrupados em vetores, essa notação facilita a utilização de matrizes e a formulação de modelos numéricos. Considera-se a teoria da flexão de Euler-Bernoulli, expressa nas Equações (7) e (8), para deduzir o comportamento estrutural dos elementos de pórtico.

$$M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (7)$$

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} \quad (8)$$

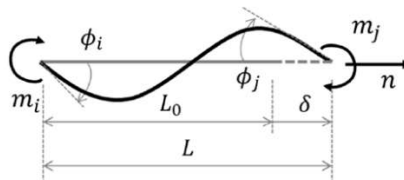
Onde  $M(x)$  corresponde ao momento fletor e  $N(x)$  à força axial que atuam ao longo do elemento,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $A$  é a área da seção transversal, e  $w$  e  $u$  correspondem aos campos de deslocamentos transversais e longitudinais do elemento, respectivamente.

Com o objetivo de incluir os efeitos associados à não linearidade geométrica em estruturas elásticas, Powell (1969) propôs uma nova abordagem para a formulação das equações estruturais. Sua proposta considerava deslocamentos de grande magnitude ao mesmo tempo em que admitia que as deformações permanecessem pequenas, diferentemente dos métodos tradicionais, baseados em formulações das forças ou dos deslocamentos.

Inicialmente aplicada a elementos de pórtico, essa formulação mostrou-se versátil, sendo estendida a outros tipos de elementos estruturais, como placas em flexão e sistemas em estado plano ou tridimensional de tensões. A estrutura é, então, modelada como um conjunto de nós considerados rígidos, interligados por elementos deformáveis inicialmente retilíneos e com ações externas concentradas nos nós.

Dessa maneira, no elemento, conforme mostrado na Figura 9, as deformações generalizadas são representadas por duas rotações relativas ( $\phi_i$  e  $\phi_j$ ) que ocorrem nos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente, e pela sua deformação axial ( $\delta$ ). Essas deformações são conjugadas aos momentos fletores ( $m_i$  e  $m_j$ ) e a força axial ( $n$ ), respectivamente.

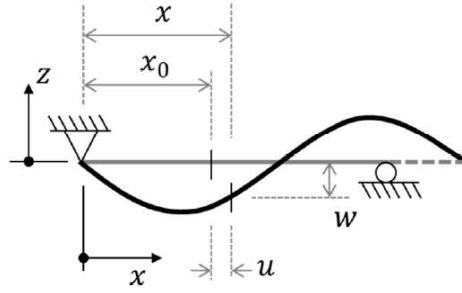
**Figura 9** – Ações e deformações generalizadas em um elemento.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Já os deslocamentos generalizados  $u(x)$  e  $w(x)$ , mostrados na Figura 10, são descritos por uma função linear e por um polinômio de terceiro grau, respectivamente.

**Figura 10** – Deslocamentos generalizados em um elemento.



Fonte: Amorim (2016)

Assumindo como desprezíveis a diferença entre os comprimentos inicial ( $L_0$ ) e final ( $L$ ) do elemento mostrado na Figura 10, bem como as condições de contorno relativas aos deslocamentos longitudinais e transversais descritas na Equações (9) e (10), respectivamente, os deslocamentos  $u(x)$  e  $w(x)$  podem ser escritos, nesta ordem, conforme as Equações (11) e (12).

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(L) &= \delta \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w(L) &= 0 \\ \phi_i &= -\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} \\ \phi_j &= -\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} \end{aligned} \tag{10}$$

$$u(x) = \frac{x}{L} \delta \tag{11}$$

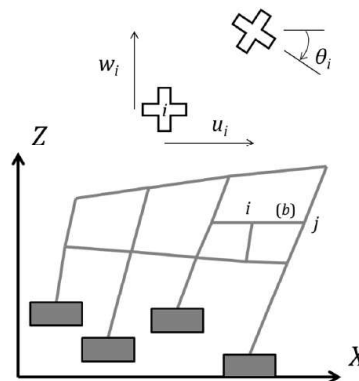
$$w(x) = \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{2x^2}{L} - x\right) \phi_i + \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L}\right) \phi_j \tag{12}$$

### 2.3.2 Cinemática de pórticos planos

Um pórtico plano é uma estrutura formada por um conjunto de barras interligadas, dispostas em um mesmo plano, cujos elementos são capazes de resistir, simultaneamente, a

esforços axiais, cortantes e momentos fletores. A cinemática de pórticos planos, por sua vez, descreve como a geometria de um pórtico se deforma ou se desloca sob ação de cargas, sem considerar as forças internas que causam esses movimentos. No sistema de referência global XZ, mostrado na Figura 11, considera-se um pórtico plano composto por elementos lineares capazes de se deformar, unidos por nós rígidos.

**Figura 11** – Pórtico plano e deslocamentos generalizados do nó  $i$ .



Fonte: Amorim (2016)

Para um nó  $i$ , definem-se:  $u_i$ , correspondente ao deslocamento na direção do eixo X;  $w_i$ , relativo ao deslocamento na direção do eixo Z; e  $\theta_i$ , referente à rotação do nó em relação à sua posição inicial. Dessa forma, a matriz de deslocamentos generalizados para o nó  $i$  pode ser escrita conforme a Equação (13), onde o  $T$  sobrescrito indica matriz transposta.

$$\{\mathbf{u}\}_i = \{u_i \ w_i \ \theta_i\}^T \quad (13)$$

Considerando, especificamente, o elemento  $b$  localizado entre os nós  $i$  e  $j$ , a matriz de deslocamentos generalizados assume a forma:

$$\{\mathbf{q}\}_b = \{u_i \ w_i \ \theta_i \ u_j \ w_j \ \theta_j\}^T \quad (14)$$

Para a estrutura completa, a matriz de deslocamentos nodais generalizados deve abranger todos os graus de liberdade de cada nó que integra o sistema, podendo ser expressa conforme apresentado na Equação (15).

$$\{\mathbf{U}\} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ w_n \ \theta_n\}^T \quad (15)$$

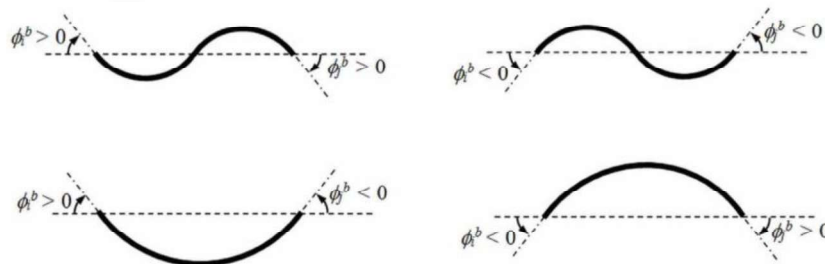
A matriz de deslocamentos generalizados descreve, portanto, o estado cinemático global, representando como cada nó se desloca em relação ao sistema de referência adotado. Na formulação de pórticos planos, é necessário conectar, de forma direta, estes deslocamentos, definidos no sistema global, às deformações internas do elemento estrutural, representadas no sistema local. Essa conexão é feita pela matriz de transformação cinemática.

A matriz de deformações generalizadas para o elemento  $b$ , mostrada na Equação (16), é composta pelas rotações relativas ( $\phi_i^b$  e  $\phi_j^b$ ) das suas seções transversais em relação às seções transversais dos nós  $i - j$  da corda, e pela deformação axial ( $\delta_b$ ) da corda.

$$\{\Phi\}_b = \{\phi_i^b \ \phi_j^b \ \delta_b\}^T \quad (16)$$

A matriz  $\{\Phi\}_b$  será nula, isto é,  $\phi_i^b = \phi_j^b = \delta_b = 0$ , quando o elemento sofrer um movimento de corpo rígido. Por outro lado, na hipótese em que as rotações relativas não são nulas, o elemento apresentará mudança de forma, conforme mostrado na Figura 12.

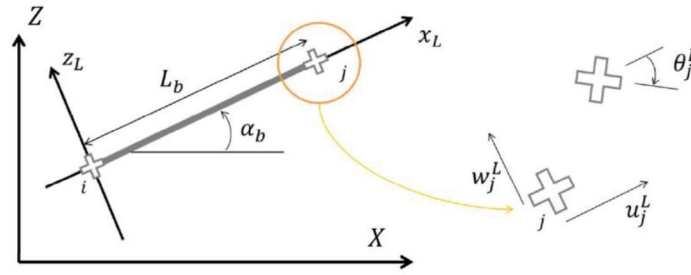
**Figura 12** – Formas do elemento  $b$  em função das rotações relativas.



Fonte: Flórez-Lopez *et al.* (2015)

Por meio de considerações geométricas, são estabelecidas as relações entre as deformações e os deslocamentos, conhecidas como equações cinemáticas. A Figura 13 mostra um elemento  $b$ , de comprimento  $L_b$ , conectado aos nós  $i$  e  $j$  e posicionado em um sistema de coordenadas local ( $x_L z_L$ ). Considerando que a estrutura está posicionada em um sistema de coordenadas global ( $XZ$ ), tal elemento forma um ângulo  $\alpha_b$  com o eixo  $X$  global da estrutura.

**Figura 13** – Coordenadas locais e deslocamentos generalizados do elemento  $b$  em eixos de coordenadas locais.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Em coordenadas locais, portanto, os deslocamentos generalizados do elemento  $b$  podem ser expressos conforme Equação (17) e as relações entre os deslocamentos generalizados globais  $\{\mathbf{q}\}_b$  e locais  $\{\mathbf{q}^L\}_b$  são descritas na Equação (18).

$$\{\mathbf{q}^L\}_b = \{u_i^L \quad w_i^L \quad \theta_i^L \quad u_j^L \quad w_j^L \quad \theta_j^L\}^T \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_i^L &= u_i \cos \alpha_b + w_i \sin \alpha_b; \quad w_i^L = -u_i \sin \alpha_b + w_i \cos \alpha_b; \quad \theta_i^L = \theta_i \\ u_j^L &= u_j \cos \alpha_b + w_j \sin \alpha_b; \quad w_j^L = -u_j \sin \alpha_b + w_j \cos \alpha_b; \quad \theta_j^L = \theta_j \end{aligned} \quad (18)$$

A matriz de deslocamentos generalizados expressa no sistema de coordenadas locais, denotada por  $\{\mathbf{q}^L\}_b$ , pode ser obtida a partir da matriz de deslocamentos generalizados no sistema global  $\{\mathbf{q}\}_b$  em função da relação matricial:

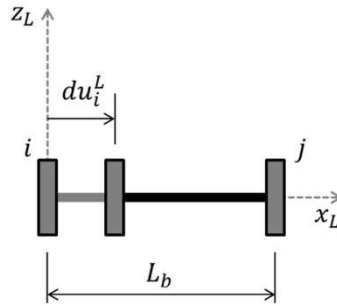
$$\{\mathbf{q}^L\}_b = [\mathbf{T}]_b \{\mathbf{q}\}_b \quad (19)$$

em que  $[\mathbf{T}]_b$  representa a matriz de transformação entre os sistemas de coordenadas global e local, sendo chamada de matriz de transformação geométrica e pode ser representada conforme mostrado na Equação (20).

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

As relações entre deslocamentos nodais e deformações podem ser determinadas de maneira mais direta quando expressas no sistema de coordenadas locais. Considere, conforme mostrado na Figura 14, um pequeno incremento de deslocamento do nó  $i$  ao longo do eixo  $x_L$ , indicado como  $du_i^L$ .

**Figura 14** – Variação da deformação em função de deslocamentos infinitesimais no nó  $i$  no eixo  $x_L$ .



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

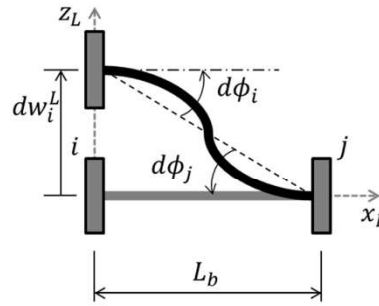
Observa-se que esse movimento não resulta em variações nas rotações relativas do elemento, mas apenas uma alteração no seu comprimento, dessa forma:

$$d\phi_i^b = 0; \quad d\phi_j^b = 0; \quad d\delta_b = -du_i^L \quad (21)$$

Por outro lado, caso seja aplicado um pequeno incremento de deslocamento do nó  $i$  ao longo do eixo  $z_L$ , indicado como  $dw_i^L$ , conforme ilustrado na Figura 15, ocorrem variações nas rotações relativas dos nós  $i$  e  $j$ , sem que isso resulte em alteração no comprimento do elemento.



**Figura 15** – Variação das rotações relativas em função de deslocamentos infinitesimais no nó  $i$  no eixo  $z_L$ .



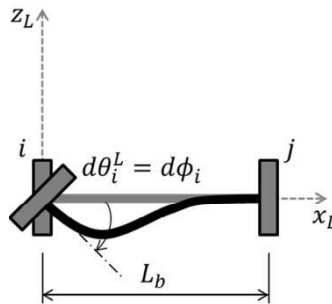
Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Dessa forma, nesta situação, tem-se que:

$$d\phi_i^b = -\frac{dw_i^L}{L_b}; \quad d\phi_j^b = -\frac{dw_i^L}{L_b}; \quad d\delta_b = 0 \quad (22)$$

Por fim, como mostrado na Figura 16, um incremento infinitesimal na rotação do nó  $i$ , indicada como  $d\theta_i^L$ , resulta somente em uma variação na rotação relativa na extremidade do nó  $i$ , sem produzir alterações na rotação relativa na extremidade do nó  $j$  e no comprimento do elemento.

**Figura 16** – Variação da rotação relativa do nó  $i$  em função de variações infinitesimais na sua rotação.



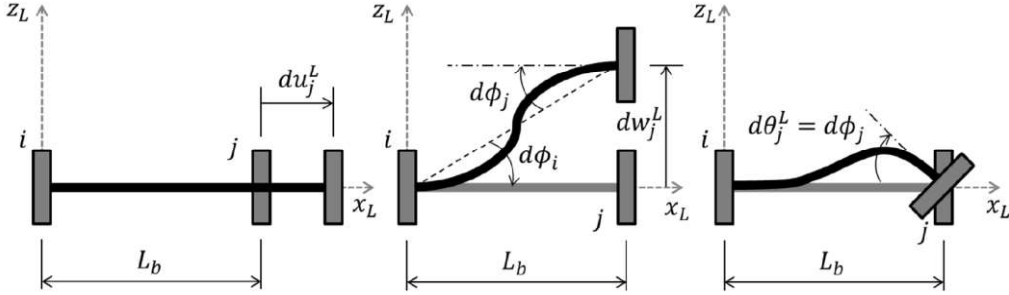
Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Assim, os incrementos nas rotações relativas e no comprimento assumem o comportamento mostrado na Equação (23).

$$d\phi_i^b = d\theta_i^L; \quad d\phi_j^b = 0; \quad d\delta_b = 0 \quad (23)$$

Como observado na Figura 17, esta mesma análise pode ser realizada considerando incrementos infinitesimais de deslocamentos (nos eixos  $x_L$  e  $z_L$ ) e rotações no nó  $j$ .

**Figura 17** – Variação da rotação relativa do nó  $j$  em função de variações infinitesimais na sua rotação.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

As rotações relativas neste nó, bem como o comprimento do elemento, apresentarão as variações mostradas na Equação (24).

$$d\phi_i^b = 0; \quad d\phi_j^b = 0; \quad d\delta_b = du_j^L$$

$$d\phi_i^b = \frac{dw_j^L}{L_b}; \quad d\phi_j^b = \frac{dw_j^L}{L_b}; \quad d\delta_b = 0 \quad (24)$$

$$d\phi_i^b = 0; \quad d\phi_j^b = d\theta_j^L; \quad d\delta_b = 0$$

As relações cinemáticas do elemento, apresentadas na Equação (25), são obtidas a partir do incremento total da deformação, determinado pela aplicação do princípio da superposição de efeitos ao adicionar todos os termos referentes às deformações generalizadas.

$$d\phi_i^b = -\frac{dw_i^L}{L_b} + d\theta_i^L + \frac{dw_j^L}{L_b};$$

$$d\phi_j^b = -\frac{dw_i^L}{L_b} + \frac{dw_j^L}{L_b} + d\theta_j^L \quad (25)$$

$$\delta_b = -du_i^L + du_j^L$$

Ao substituir as relações entre os deslocamentos generalizados globais  $\{\mathbf{q}\}_b$  e locais  $\{\mathbf{q}^L\}_b$ , descritas na Equação (18), nas relações cinemáticas mostradas na Equação (25), obtém-se as equações cinemáticas para o sistema global de eixos, onde a matriz  $[\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b$  é denominada matriz de transformação cinemática do elemento  $b$  no sistema local de coordenadas (Flórez-López *et al.*, 2015). Dessa forma, tem-se que:

$$\{d\boldsymbol{\phi}\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b \{d\mathbf{q}^L\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b [\mathbf{T}]_b \{d\mathbf{q}\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b \{d\mathbf{q}\}_b \quad (26)$$

Assim,  $[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b$  é denominada matriz de transformação cinemática do elemento  $b$  no sistema global e pode ser escrita sob a forma mostrada na Equação (27).

$$[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 \\ \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 \\ -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

A equação cinemática também pode ser formulada utilizando a matriz de deslocamentos do pórtico, ao invés de se basear nos deslocamentos do elemento (Flórez-López *et al.*, 2015):

$$\{d\boldsymbol{\phi}\}_b = [\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b \{d\mathbf{U}\} \quad (28)$$

Onde  $[\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b$  é uma matriz que relaciona todos os deslocamentos e rotações locais de um elemento aos deslocamentos e rotações correspondentes do sistema global da estrutura, sendo denominada matriz de transformação ampliada. Nela, nas posições que não possuem correspondência com os deslocamentos do elemento, são inseridas colunas compostas por valores nulos.

$$[\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \dots & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

### 2.3.3 Formulação das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio estático de uma estrutura podem ser formuladas por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), segundo o qual o trabalho virtual interno, expresso pelas deformações generalizadas ( $W_{def}^*$ ) deve ser igual ao trabalho virtual externo ( $W_{ext}^*$ ), definido pelas forças externas aplicadas, conforme mostrado na Equação (30).

$$W_{def}^* = W_{ext}^* \quad \forall \{ \mathbf{U}^* \} \quad (30)$$

onde  $\{ \mathbf{U}^* \}$  é a matriz de deslocamentos nodais globais virtuais.

Na análise estrutural, as ações externas podem ser classificadas em duas categorias principais. A primeira refere-se a forças e momentos aplicados diretamente nos nós, enquanto a segunda está associada a carregamentos distribuídos ao longo dos elementos (Flórez-Lopez *et al.*, 2015).

O deslocamento global da estrutura é descrito pela matriz  $\{ \mathbf{U}^* \}$ , a qual contempla os deslocamentos nodais generalizados. Dessa forma, os carregamentos distribuídos precisam ser convertidos em forças nodais equivalentes para que possam ser incorporados ao sistema. Assim, o trabalho virtual externo pode ser expresso por (Flórez-López *et al.*, 2015):

$$W_{ext}^* = \{ \mathbf{U}^* \}^T \{ \mathbf{P} \} \quad (31)$$

onde  $\{ \mathbf{P} \}$  é a matriz de forças nodais externas generalizadas, dada por:

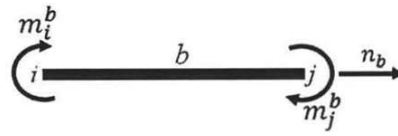
$$\{ \mathbf{P} \} = \begin{Bmatrix} P_{u1} \\ P_{w1} \\ P_{\theta1} \\ P_{u2} \\ \vdots \\ P_{un} \\ P_{wn} \\ P_{\theta n} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

É importante notar que para cada componente de força generalizada, existem dois índices: o primeiro está associado à direção de referência global, ou seja,  $u$  para a força horizontal,  $w$

para a força vertical e  $\theta$  para o momento fletor; já o segundo índice está relacionado ao nó, identificado por 1, 2, ..., i, j, ... n (Amorim, 2016).

Considerando um elemento  $b$ , conforme mostrado na Figura 18, o trabalho virtual devido às deformações internas é obtido a partir da matriz de tensões generalizadas, denotada como  $\{\mathbf{M}\}_b = \{m_i^b, m_j^b, n_b\}$ , onde  $m_i^b$  e  $m_j^b$  correspondem, respectivamente, aos momentos fletores nos nós  $i$  e  $j$ , e  $n_b$  à força axial atuante no elemento.

**Figura 18** – Esforços internos generalizados do elemento  $b$ .



Fonte: Adaptado de Flórez-López (2015)

Na literatura de mecânica do contínuo, afirma-se que as tensões e as deformações são variáveis conjugadas, sendo as tensões os agentes responsáveis pelas deformações do elemento. Assim, o trabalho virtual de deformação é dado por (Flórez-López, 2015):

$$W_{def}^* = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{\mathbf{M}\}_b \quad (33)$$

Onde  $\{\Phi^*\}_b$  é a matriz de deformações generalizadas conjugada do elemento  $b$ .

Para obter as equações de equilíbrio, portanto, substitui-se as Equações (31) e (33) na Equação (30). Assim:

$$\sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{\mathbf{M}\}_b = \{\mathbf{U}^*\}^T \{\mathbf{P}\} \vee \{\mathbf{U}^*\} \quad (34)$$

Sabendo-se que  $\{\Phi^*\}_b^T = [\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b^T \{\mathbf{U}^*\}^T$ , então:

$$\sum_{b=1}^m \{\mathbf{U}^*\}^T [\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b^T \{\mathbf{M}\}_b = \{\mathbf{U}^*\}^T \{\mathbf{P}\} \vee \{\mathbf{U}^*\} \quad (35)$$

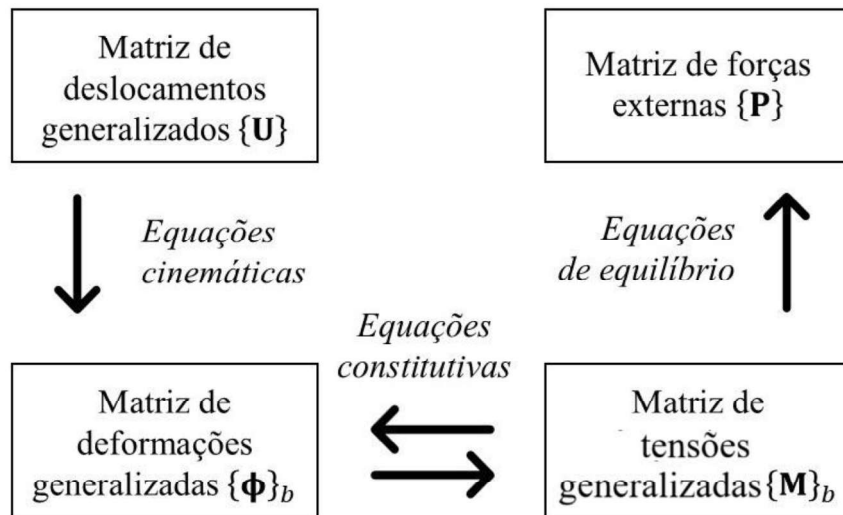
Dessa forma, tem-se que:

$$\sum_{b=1}^m [\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b^T \{\mathbf{M}\}_b = \{\mathbf{P}\} \quad (36)$$

#### 2.3.4 Equações constitutivas

Para que o modelo estrutural seja devidamente caracterizado, faz-se necessária a introdução das equações constitutivas, a fim de que seja estabelecida a relação entre as deformações e as tensões. Uma síntese dessas relações é mostrada na Figura 19 abaixo.

**Figura 19** – Varáveis e equações para uma estrutura elástica.

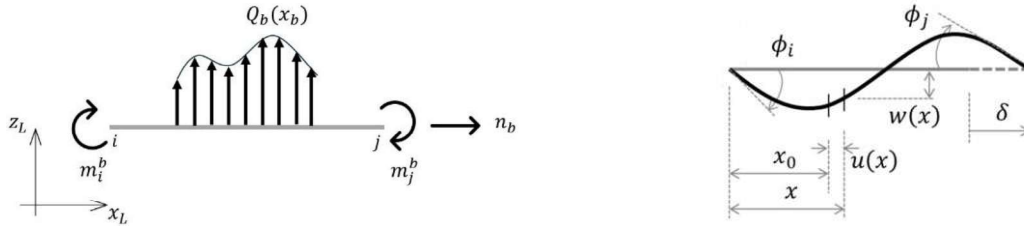


Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

A teoria de Euler-Bernoulli estabelece que o comportamento para o elemento de pórtico  $b$ , compreendido entre os nós  $i$  e  $j$  mostrado na Figura 20, é dado pelas formulações:

$$\frac{d^2 M_b(x_b)}{dx_b^2} = Q_b(x_b); \frac{d^2 w_b(x_b)}{dx_b^2} = \frac{M_b(x_b)}{EI_b}; n_b = EA_b \frac{du_b(x_b)}{dx_b}. \quad (37)$$

Onde  $M_b(x_b)$  é a distribuição do momento fletor no elemento,  $Q_b(x_b)$  representa a força externa distribuída,  $w_b(x_b)$  é o campo de deslocamentos transversais do elemento,  $EI_b$  é a rigidez à flexão do elemento,  $n_b$  é a força axial,  $A_b$  é área da seção transversal do elemento e  $u_b(x_b)$  é o campo de deslocamentos longitudinais do elemento.

**Figura 20** – Forças e deflexões para o elemento de pórtico  $b$ .

Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

A partir do desenvolvimento da equação do momento  $M_b(x_b)$ , tem-se que:

$$M_b(x_b) = \int \int Q_b(x_b) dx_b dx_b \quad (38)$$

onde, aplicando-se as condições de contorno dadas por  $M_b(0) = m_i^b$  e  $M_b(L) = -m_j^b$ , são definidos os valores das constantes resultantes da integração.

Ao substituir a Equação (38) na equação do deslocamento transversal  $w_b(x_b)$ , tem-se que:

$$w_b(x_b) = \frac{1}{EI_b} \left( \int \int \int \int Q_b(x_b) dx_b dx_b \right) \quad (39)$$

onde as condições de contorno  $w_b(0) = 0$  e  $w_b(L) = 0$ , definem os valores das constantes resultantes da integração.

As equações constitutivas podem, então, ser obtidas a partir das equações que definem os valores das rotações relativas nos nós  $i$  e  $j$  do elemento  $b$ , isto é:  $\phi_i^b = -\frac{dw_b}{dx_b} \Big|_{x=0}$  e

$\phi_j^b = -\frac{dw_b}{dx_b} \Big|_{x=L_b}$ . Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \phi_i^b &= \frac{L_b}{3EI_b} m_i^b - \frac{L_b}{6EI_b} m_j^b + \phi_i^0 \\ \phi_j^b &= -\frac{L_b}{6EI_b} m_i^b + \frac{L_b}{3EI_b} m_j^b + \phi_j^0 \end{aligned} \quad (40)$$

Onde  $\phi_i^0$  e  $\phi_j^0$  representam os termos das deformações generalizadas iniciais associadas aos nós  $i$  e  $j$ , decorrentes da ação dos carregamentos distribuídos no elemento, isto é, termos que não dependem dos esforços  $m_i^b$  e  $m_j^b$ .

Do desenvolvimento da equação da força axial  $n_b$  e aplicando-se as condições de contorno dadas por  $u_b(0) = 0$  e  $u_b(L_b) = \delta_b$ , obtém-se que:

$$n_b = \frac{EA_b}{L_b} \delta_b \quad (41)$$

Assim, matricialmente, as equações constitutivas podem ser escritas sob a forma:

$$\{\Phi\}_b = [\mathbf{F}_0]_b \{\mathbf{M}\}_b + \{\Phi^0\}_b \quad (42)$$

De acordo com Flórez-López *et al.* (2015), a matriz de deformações generalizadas iniciais  $\{\Phi^0\}_b$  e a matriz de flexibilidade  $[\mathbf{F}_0]_b$  se apresentam conforme as Equações (43) e (44), respectivamente.

$$\{\Phi^0\}_b = \{\phi_i^0 \quad \phi_j^0 \quad 0\}^T \quad (43)$$

$$[\mathbf{F}_0]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b} & -\frac{L_b}{6EI_b} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{EA_b} \end{bmatrix} \quad (44)$$

De forma alternativa, as equações constitutivas podem ser expressas em termos das tensões em função das deformações (Flórez-López *et al.*, 2015):

$$\{\mathbf{M}\}_b = [\mathbf{E}_0]_b \{\Phi\}_b + \{\mathbf{M}^0\}_b \quad (45)$$



Onde  $\{\mathbf{M}^0\}_b$  é a matriz de tensões iniciais e  $[\mathbf{E}_0]_b$  é a matriz de elasticidade do elemento  $b$ , dadas pelas Equações (46) e (47), respectivamente.

$$\{\mathbf{M}^0\}_b = \{m_i^0 \quad m_j^0 \quad 0\}^T \quad (46)$$

$$[\mathbf{E}_0]_b = \begin{bmatrix} \frac{4EI_b}{L_b} & \frac{2EI_b}{L_b} & 0 \\ \frac{2EI_b}{L_b} & \frac{4EI_b}{L_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_b}{L_b} \end{bmatrix} \quad (47)$$

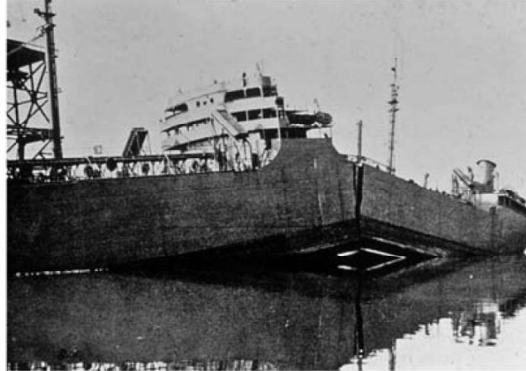
## 2.4 Fundamentos da Mecânica do Dano

### 2.4.1 Fundamentos da Mecânica da Fratura

Segundo Callister e Rethwisch (2012), a falha de materiais de engenharia é um evento indesejável, podendo resultar em riscos à vida humana, perdas econômicas e interrupção de serviços. Embora as causas das falhas sejam compreendidas, sua prevenção completa é difícil de garantir, sendo frequentemente associada à seleção inadequada de materiais, processamento deficiente, projetos mal planejados ou uso incorreto dos componentes.

Ao longo da história, diversos eventos de falha estrutural relacionados à fratura despertaram a atenção da comunidade científica, tanto por suas consequências catastróficas quanto pelo impacto que exerceram no desenvolvimento de novos critérios de projeto de engenharia. Dentre eles, destacam-se as rupturas súbitas observadas em navios durante a Segunda Guerra Mundial, como no caso dos petroleiros do tipo T-2, que sofreram fraturas frágeis decorrentes da combinação entre propriedades inadequadas do aço e tensões induzidas pela soldagem.

**Figura 21** – Petroleiro do tipo T-2 S.S. Schenectady após falha estrutural por fratura em 1943.



Fonte: Hertzberg *et al.* (2012)

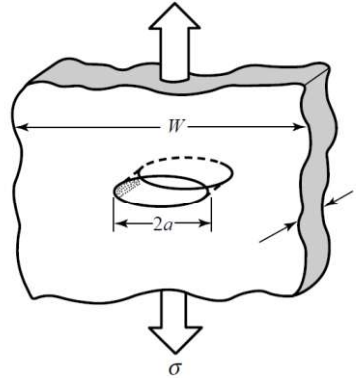
A ocorrência de fratura frágil em materiais normalmente dúcteis, conforme mostrado na Figura 21, evidenciou a necessidade de um entendimento mais aprofundado dos mecanismos de fratura. Ao longo do último século, esforços de pesquisa contínuos contribuíram para o desenvolvimento e a consolidação da chamada mecânica da fratura (Callister; Rethwisch, 2012).

A fratura pode ser compreendida como a separação ou fragmentação de um corpo sólido em duas ou mais partes devido à ação de tensões, sendo esse fenômeno constituído essencialmente por duas etapas: a iniciação e a propagação da trinca (Dieter, 1981). Segundo Callister e Rethwisch (2012), a resistência à fratura medida para a maioria dos materiais é significativamente menor que a vista a partir de cálculos teóricos devido à presença de defeitos ou trincas microscópicas que sempre existem na superfície e no interior do corpo de um material.

Griffith (1920) propôs que, ao introduzir uma trinca em uma placa de material elástico submetida a tensões, ocorre um equilíbrio entre a diminuição da energia potencial decorrente da liberação da energia elástica armazenada e do trabalho realizado pelas cargas externas, e o aumento da energia superficial gerado pela presença da trinca. Caso a energia superficial adicional necessária seja fornecida, a trinca existente pode se propagar. A energia superficial resulta da configuração fora de equilíbrio dos átomos na superfície do sólido.

A partir da análise de placas com trincas elípticas, como mostrado na Figura 22, observa-se que a variação da energia potencial associada à presença de uma trinca pode ser relacionada à geometria da trinca, às propriedades do material e às tensões aplicadas.

**Figura 22** – Trinca através da espessura em placa de grandes dimensões.



Fonte: Hertzberg *et al.* (2012)

A variação da energia potencial da placa associada à introdução de uma trinca pode ser expressa por (Hertzberg *et al.*, 2012):

$$U = 4at\gamma_s - \frac{\pi\sigma^2 a^2 t}{E} + U_0 \quad (48)$$

onde  $U$  é a energia potencial do corpo com trinca,  $U_0$  é a energia potencial do corpo sem trinca,  $\sigma$  é tensão normal aplicada,  $a$  é a metade do comprimento da trinca,  $t$  é a espessura da placa e  $\gamma_s$  é a energia superficial específica.

A condição de equilíbrio é determinada diferenciando-se a energia potencial  $U$  em relação ao comprimento da trinca e igualando o resultado a zero (Hertzberg *et al.*, 2012):

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 4t\gamma_s - \frac{2\pi\sigma^2 at}{E} = 0 \quad (49)$$

Assim, tem-se que:

$$2\gamma_s = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (50)$$

A Equação (50) é válida desde que  $U_0$  represente a energia potencial do corpo sem trinca e não varie com o comprimento da trinca; o lado esquerdo da equação representa a energia necessária para criar uma unidade adicional de área da superfície da trinca, enquanto o lado

direito está relacionado à energia elástica por unidade de volume  $\left(\frac{\sigma^2}{E}\right)$  disponível para promover a propagação da trinca (Hertzberg *et al.*, 2012).

Segundo o critério de Griffith, a propagação da trinca ocorre sob tensão aplicada constante quando o incremento do seu comprimento não altera a energia total do sistema, ou seja, o aumento da energia superficial é equilibrado pela redução da energia elástica de deformação (Dieter, 1981). A Equação (50) pode ser escrita sob a forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (51)$$

A Equação (51) expressa a tensão necessária para a propagação de uma fissura num material frágil em função do tamanho da micro trinca (Dieter, 1981). Segundo Hertzberg *et al.* (2012), esta equação é aplicada para o caso de estado plano de tensões com tensões biaxiais. Para o caso de estado plano de tensões com tensões triaxiais (com a supressão de tensões em uma direção) aplica-se a Equação (52) abaixo.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a(1 - \nu^2)}} \quad (52)$$

A análise tridimensional, em que a trinca é considerada como um esferoide bastante achatado, implica apenas na alteração da constante presente na equação de Griffith. Assim, a adoção do caso bidimensional representa uma simplificação que não acarreta erro significativo (Dieter, 1981).

Callister e Rethwisch (2012) afirmam que todos os materiais frágeis contêm uma distribuição de pequenas trincas e defeitos com diversos tamanhos, geometrias e orientações, de forma que, quando a magnitude de uma tensão de tração na extremidade de um desses defeitos excede o valor dessa da tensão descrita na Equação (51), ocorre a formação de uma trinca que, então, se propaga, resultando em uma fratura.

#### 2.4.2 Mecânica do Dano Contínuo

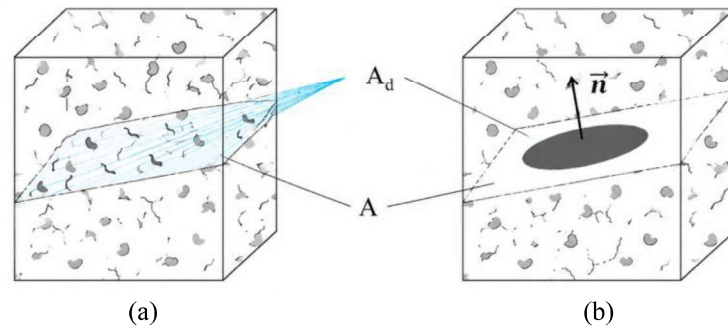
A mecânica da fratura é amplamente utilizada na avaliação da vulnerabilidade estrutural, mas apresenta limitações relacionadas ao alto custo computacional e à desconsideração da degradação local que antecede a propagação de trincas. Nesse contexto, a mecânica do dano contínuo surge como uma alternativa mais eficiente para tratar essas questões (Flórez-López *et al.*, 2015).

Fenômenos inelásticos em certos materiais podem ocorrer devido à distribuição difusa de microtrincas ou outros microdefeitos que comprometem sua integridade. Nesse contexto, trabalhos pioneiros de Kachanov (1958) e Rabotnov (1968) estabeleceram bases importantes sobre a integridade do material, enquanto Lemaitre e Chaboche (1985) avançaram na formalização da mecânica do dano contínuo utilizando a termodinâmica dos processos irreversíveis (Amorim, 2016).

Lemaitre e Chaboche (1990) propuseram uma teoria fundamentada nos princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis, baseando-se na introdução de uma variável interna, denominada dano ( $\omega$ ), destinada a quantificar a degradação do material em função da presença e da evolução de microdefeitos. Essa variável permite descrever a deterioração progressiva de propriedades mecânicas decorrentes de carregamentos aplicados.

Segundo Lemaitre e Desmorat (2005), o dano em materiais sólidos, em seu sentido mecânico, pode ser compreendido como a criação e o crescimento de microvazios ou microtrincas, que constituem descontinuidades em um meio considerado contínuo em escalas maiores. Do ponto de vista físico, tais danos estão sempre associados a deformações plásticas ou irreversíveis e, mais geralmente, à dissipação de energia mecânica, ocorrendo tanto na escala intermediária, quanto na escala microscópica.

Considere a Figura 23 a seguir, que ilustra um elemento de volume representativo (EVR). Trata-se de um certo volume de material representado em mesoescala, suficientemente grande para conter uma distribuição representativa de microdefeitos e suficientemente pequeno em relação às dimensões globais de uma estrutura, de forma a permitir que o material seja considerado um meio equivalente.

**Figura 23** – Elemento de volume representativo (EVR).

Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Assim, a variável de dano ( $d_{\vec{n}}$ ) pode ser calculada conforme a Equação (53) e assumir valores entre 0 (zero) e 1 (um), que representam o elemento intacto e totalmente danificado, respectivamente.

$$d_{\vec{n}} = \frac{A_d}{A} \quad (53)$$

onde  $A$  é a área total da seção transversal e  $A_d$  é a área danificada, com o vetor normal  $\vec{n}$ .

A variável tensorial  $d_{\vec{n}}$ , para qualquer plano  $\vec{n}$  pode ser definida como uma variável escalar  $d$ , assumindo a hipótese de dano isotrópico, sendo esta a hipótese adota na continuidade deste trabalho.

O cálculo do dano requer a inclusão dessa variável nas equações constitutivas, sendo a utilização da chamada tensão efetiva ( $\bar{\sigma}$ ) uma das formas mais simples e eficazes de viabilizar esse procedimento (Flórez-López *et al.*, 2015). Dessa forma, tem-se que:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (54)$$

A mecânica do dano contínuo, portanto, procura explicar como os materiais perdem suas propriedades em função da formação e do crescimento de microdefeitos. Assim, surge a hipótese da equivalência em deformações que estabelece, segundo Flórez-López *et al.* (2015), que o comportamento de um material danificado pode ser descrito pelas mesmas equações de um material íntegro, desde que a medida de tensão normal ( $\sigma$ ) seja substituída pela tensão efetiva ( $\bar{\sigma}$ ). Dessa forma, tem-se que:

$$\sigma = \varepsilon E \Rightarrow \bar{\sigma} = \varepsilon E \Rightarrow \frac{\sigma}{1-d} = \varepsilon E \therefore \sigma = (1-d)\varepsilon E \quad (55)$$

O dano provoca redução da rigidez efetiva do material, de modo que  $\bar{E} = (1-d)E$ . Consequentemente, a lei da elasticidade também pode ser formulada em termos de flexibilidade, conforme mostrado na Equação (56), sendo uma alternativa para a representação do comportamento do material degradado (Flórez-López *et al.*, 2015).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(1-d)E} \quad (56)$$

Percebe-se, ainda, que a deformação específica ( $\varepsilon$ ) pode ser dividida em dois termos: um elástico ( $\varepsilon^e$ ) e outro relativo ao dano ( $\varepsilon^d$ ), onde  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^d$ , conforme Equações (57) e (58), respectivamente.

$$\varepsilon^e = \frac{1}{E} \sigma \quad (57)$$

$$\varepsilon^d = \frac{d}{(1-d)E} \sigma \quad (58)$$

Se o material for elastoplástico, tem-se que (Flórez-López *et al.*, 2015):

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \Rightarrow \sigma = (1-d)E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (59)$$

Que, em termos de flexibilidade, pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^d + \varepsilon^p \quad (60)$$

### 2.4.3 Mecânica do Dano Concentrado

A MDC considera que os efeitos inelásticos estão concentrados nas extremidades dos elementos finitos. Para representar esse comportamento de forma simplificada, modelos com dano concentrado utilizam variáveis internas associadas ao nível de dano, que indicam o grau de degradação do material (Flórez-López *et al.*, 2015).

Segundo Lemaitre e Desmorat (2005), o dano está associado à formação e ao crescimento de microvazios no interior do material, que reduzem sua área efetiva. Assim, o dano pode ser definido pela razão entre a área danificada e a área total de uma seção representativa do material. Dessa forma, o nível de dano pode ser representado por meio de uma variável escalar  $D$ , que varia de 0 (sem dano) a 1 (material totalmente fragilizado). Tal variável depende de uma grandeza representativa da deformação, geralmente a deformação equivalente, e atua diretamente no modelo constitutivo para reduzir a rigidez efetiva do material. A eficácia dessa abordagem fica clara quando se observa que é possível simular a deterioração estrutural sem modelar explicitamente a microfissuração, resultando em análise mais eficiente.

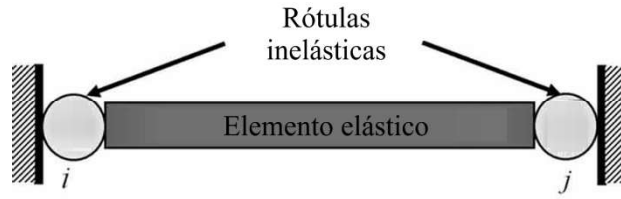
Na prática, em vez de distribuir o dano ao longo de todo o componente estrutural, a MDC concentra o comportamento não linear em pontos discretos do modelo, como articulações inelásticas. Essa escolha reduz o custo computacional e mantém a representatividade dos principais fenômenos físicos envolvidos, o que é particularmente útil em análises que simulam colapso progressivo ou redistribuições bruscas de carga (Flórez-López *et al.*, 2015).

Dessa forma, o uso da MDC oferece uma representação realista do comportamento estrutural em condições extremas, com custo computacional reduzido. Além disso, normas como a ASCE/SEI 41 (2017) e diretrizes como o guia GSA (2016) recomendam explicitamente a utilização de modelos não lineares capazes de representar adequadamente a degradação da resistência e da rigidez, além da plastificação e dos mecanismos de colapso.

Segundo Amorim (2016), a modelagem não linear de estruturas de concreto armado pelo modelo de dano concentrado parte da premissa de que os fenômenos inelásticos se concentram em rótulas inelásticas situadas nas extremidades dos elementos finitos, conforme representado na Figura 24.



**Figura 24** – Modelo de dano concentrado para elemento de pórtico.



Fonte: Adaptado de Flórez-López *et al.* (2015)

A hipótese da equivalência em deformações mostrada na Equação (61) pode ser expressa, no caso de um elemento de pórtico utilizando a notação de Powell, como (Flórez-López *et al.*, 2015):

$$\{\Phi\}_b = \{\Phi^e\}_b + \{\Phi^p\}_b + \{\Phi^d\}_b \quad (61)$$

sendo  $\{\Phi^e\}_b$  a matriz de deformações generalizadas elásticas,  $\{\Phi^p\}_b$  a matriz de deformações plásticas e  $\{\Phi^d\}_b$  a matriz que contém as deformações de dano.

As deformações do elemento podem ser expressas em termos das deformações iniciais mostradas na Equação (42), onde  $[\mathbf{F}_0]_b$  é a matriz de flexibilidade do elemento,  $\{\mathbf{M}\}_b$  é a matriz de esforços internos generalizados e  $\{\Phi^0\}_b$  é a matriz de deformações generalizadas iniciais assumindo a forma:

$$\{\Phi^e\}_b = [\mathbf{F}_0]_b \{\mathbf{M}\}_b + \{\Phi^0\}_b \quad (62)$$

Segundo Amorim (2016), as deformações plásticas estão associadas ao escoamento da armadura. Entretanto, em estruturas de concreto armado, os alongamentos plásticos podem ser desprezados, de modo que a matriz de deformações plásticas passa a considerar apenas as rotações plásticas das rótulas, conforme Equação (63).

$$\{\Phi^p\}_b = \begin{Bmatrix} \phi_i^p \\ \phi_j^p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

De acordo com a hipótese da equivalência em deformações, a matriz que contém as rotações de dano pode ser formulada de maneira a relacionar o comportamento do material

danificado com o de um material íntegro, conforme mostrado abaixo (Flórez-López *et al.*, 2015):

$$\{\boldsymbol{\Phi}^d\}_b = [\mathbf{C}(\mathbf{D})]_b \{\mathbf{M}\}_b \quad (64)$$

Onde  $[\mathbf{C}(\mathbf{D})]_b$  é a uma matriz que representa a flexibilidade adicional do elemento estrutural resultante da fissuração do concreto.

$$[\mathbf{C}(\mathbf{D})]_b = \begin{bmatrix} \frac{d_i}{1-d_i} F_{11}^e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j}{1-d_j} F_{22}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Onde  $F_{ij}^e$  corresponde ao elemento  $(i, j)$  da matriz de flexibilidade elástica.

As relações constitutivas, em termos de flexibilidade, são obtidas ao se substituir as Equações (62) e (64) na Equação (61):

$$\{\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}^p\}_b = [\mathbf{F}(\mathbf{D})]_b \{\mathbf{M}\}_b + \{\boldsymbol{\Phi}^0\}_b \quad (66)$$

Onde é  $[\mathbf{F}(\mathbf{D})]_b$  a é a matriz de flexibilidade de um elemento de pórtico danificado, dada por:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{D})]_b = [\mathbf{F}_0]_b + [\mathbf{C}(\mathbf{D})]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b(1-d_i)} & -\frac{L_b}{6EI_b} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{EA_b} \end{bmatrix} \quad (67)$$

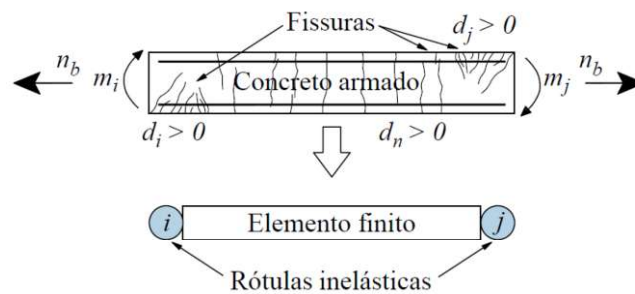
#### 2.4.4 Modelo modificado de dano segundo Silva (2025)

Com base na formulação apresentada por Cipollina *et al.* (1995), Silva (2025) propôs um modelo de dano concentrado modificado para a análise da resistência ao colapso progressivo

em estruturas de concreto armado, onde há a incorporação do dano resultante da carga axial de tração.

No modelo proposto por Silva (2025), admite-se que os efeitos de fissuração e de plastificação associados à flexão concentram-se nas extremidades dos elementos finitos, enquanto aqueles decorrentes da tração axial distribuem-se ao longo do meio contínuo do elemento finito. A resposta inelástica por flexão é representada pela formação de rótulas inelásticas, às quais se vinculam variáveis internas de dano local ( $d_i$  e  $d_j$ ). Por sua vez, a degradação resultante das tensões de tração é descrita por uma variável interna de dano axial ( $d_n$ ), responsável pela representação do processo de fissuração longitudinal do elemento. Tal consideração se deu para um elemento de concreto armado submetido a uma força axial de tração  $n_b$  e a momentos fletores  $m_i$  e  $m_j$  aplicados em seus nós  $i$  e  $j$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 25.

**Figura 25** – Representação de elemento de pórtico plano de concreto armado considerando dano concentrado e ativação da ação catenária



Fonte: Silva (2025)

Para Silva (2025), a matriz de deformações devido ao dano  $\{\Phi^d\}_b$  assume a forma da Equação (68), uma vez que considera o dano axial ( $d_n$ ). Neste caso, a matriz de flexibilidade adicional devido ao dano  $[\mathbf{C}(\mathbf{D})]_b$  pode ser escrita conforme Equação (69).

$$\{\Phi^d\}_b = [\mathbf{C}(d, n)]_b \{\mathbf{M}\}_b \quad (68)$$

$$[\mathbf{C}(d, n)]_b = \begin{bmatrix} \frac{d_i}{1-d_i} F_{11}^e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j}{1-d_j} F_{22}^e & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_n}{1-d_n} F_{33}^e \end{bmatrix} \quad (69)$$

A fim de representar a deformações plásticas decorrentes tanto da flexão como da força axial, a matriz de deformações plásticas obtém a forma mostrada na Equação (70).

$$\{\boldsymbol{\Phi}^p\}_b = \begin{Bmatrix} \phi_i^p \\ \phi_j^p \\ \delta_b^p \end{Bmatrix} \quad (70)$$

A lei de elasticidade, em termos de flexibilidade, considerando a hipótese de equivalência em deformações é, então, expressa por:

$$\{\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}^p\}_b = [\mathbf{F}(d, n)]_b \{\mathbf{M}\}_b + \{\boldsymbol{\Phi}^0\}_b \quad (71)$$

Onde é  $[\mathbf{F}(d, n)]_b$  é a matriz de flexibilidade de um elemento de pórtico danificado, dada por:

$$[\mathbf{F}(d, n)]_b = \begin{bmatrix} \frac{8L(L^2n + 30EI)}{(L^2n + 12EI)(L^2n + 60EI)(1-d_i)} & \frac{2L(L^2n - 60EI)}{(L^2n + 12EI)(L^2n + 60EI)} & 0 \\ \frac{2L(L^2n - 60EI)}{(L^2n + 12EI)(L^2n + 60EI)} & \frac{8L(L^2n + 30EI)}{(L^2n + 12EI)(L^2n + 60EI)(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA(1-d_n)} \end{bmatrix} \quad (72)$$

As leis de evolução do dano podem ser obtidas considerando o critério de Griffith (1921), como mostrado abaixo (Silva, 2025):

$$\begin{cases} \dot{d}_i = 0 & \text{se } G_i < R_i \\ G_i = R_i & \text{se } \dot{d}_i > 0 \end{cases} \quad (73)$$

$$\begin{cases} \dot{d}_j = 0 & \text{se } G_j < R_j \\ G_j = R_j & \text{se } \dot{d}_j > 0 \end{cases} \quad (74)$$

$$\begin{cases} \dot{d}_n = 0 & \text{se } G_n < R_n \\ G_n = R_n & \text{se } \dot{d}_n > 0 \end{cases} \quad (75)$$

Onde  $R_i$  e  $R_j$  correspondem às funções de resistência à flexão das rótulas  $i$  e  $j$ ; e  $R_n$  é a função de resistência à fissuração axial. As taxas de liberação de energia das rótulas  $i$  e  $j$ , denominadas  $G_i$  e  $G_j$ , e a taxa de liberação de energia relativa à força axial  $n$ , denominada  $G_n$ , são formuladas segundo as Equações (76), (77) e (78), respectivamente.

$$G_i = \frac{m_i^2 L}{6EI(1 - d_i)^2} \quad (76)$$

$$G_j = \frac{m_j^2 L}{6EI(1 - d_j)^2} \quad (77)$$

$$G_n = \frac{n^2 L}{2EA(1 - d_n)^2} \quad (78)$$

As funções de resistência  $R_i$  e  $R_j$ , bem como a função  $R_n$ , foram definidas como (Silva, 2025):

$$R = R_0 + q_m \frac{\ln(1 - d)}{1 - d} \quad (79)$$

Onde  $R_0$  é a resistência inicial à fissuração e  $q_m$  é relativo ao efeito do encruamento das armaduras que dificulta a propagação de fissuras no concreto.

Os parâmetros  $R_0$  e  $q_m$  estão condicionados às propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais, sendo passíveis de definição a partir do momento fletor crítico ( $M_{cr}$ ) e do momento fletor último ( $M_u$ ). O  $M_{cr}$ , também conhecido como momento de fissuração, corresponde à solicitação de momento fletor necessária para o início da formação de fissuras no concreto. Já o  $M_u$  representa o valor máximo de momento fletor que a estrutura pode resistir, caracterizando o estado limite último (Silva, 2025).

Considera-se que o início da fissuração ocorre quando o momento fletor alcança o valor correspondente ao momento crítico ( $M_{cr}$ ), sendo que, nesse estágio, não há dano acumulado na estrutura. Com base no critério de Griffith, estabelece-se que a resistência inicial à fissuração pode ser expressa por:

$$R_0 = \frac{M_{cr}^2 L}{6EI} \quad (80)$$

Ao atingir o valor correspondente ao momento último ( $M_u$ ), o momento fletor provoca um dano último ( $d_u$ ). Nesse estágio, observa-se que a curva que relaciona o momento fletor ao dano apresenta uma tangente horizontal, caracterizando uma condição de esgotamento da capacidade resistente. A partir dessa configuração, torna-se viável a formulação de um sistema de equações que descreve o comportamento estrutural nesse regime, do qual determinam-se os valores de  $q_m$  e  $d_u$  (Silva, 2025):

$$\begin{cases} M_u^2 = \frac{6EI(1-d_u)^2}{L} R_0 + \frac{6EIq_m}{L} (1-d_u) \ln(1-d_u) \\ \left. \frac{\partial m}{\partial d} \right|_{d=d_u} = 0 \rightarrow 2(1-d_u)R_0 + q_m[\ln(1-d_u) + 1] = 0 \end{cases} \quad (81)$$

Já as leis de evolução das deformações plásticas nas rótulas  $i$  e  $j$  podem ser expressas conforme Equações (82) e (83), respectivamente. Nelas,  $f_i$  e  $f_j$  são as funções de escoamento nas rótulas  $i$  e  $j$ , respectivamente, e são dadas pelas Equações (84) e (85).

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i^p = 0 & \text{se } f_i < 0 \\ f_i = 0 & \text{se } \dot{\phi}_i^p \neq 0 \end{cases} \quad (82)$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_j^p = 0 & \text{se } f_j < 0 \\ f_j = 0 & \text{se } \dot{\phi}_j^p \neq 0 \end{cases} \quad (83)$$

$$f_i = \left| \frac{m_i}{1 - d_i} - c_i \phi_i^p \right| - k_{i0} \quad (84)$$

$$f_j = \left| \frac{m_j}{1 - d_j} - c_j \phi_j^p \right| - k_{j0} \quad (85)$$

Onde  $c_i \phi_i^p$  e  $c_j \phi_j^p$  correspondem aos encruamentos cinemáticos lineares, os quais são definidos em função das rotações plásticas associadas aos nós  $i$  e  $j$ . Os parâmetros  $c$  e  $k_0$ , por sua vez, são determinados com base nas propriedades mecânicas e geométricas do elemento estrutural considerado.

A lei de evolução da deformação plástica relativa aos alongamentos plásticos ( $\delta_b^p$ ) proposta por Silva (2025) é mostrada na Equação (86) abaixo.

$$\begin{cases} \dot{\delta}_b^p = 0 & \text{se } f_i < 0 \text{ e } f_j < 0 \\ f_n = 0 & \text{se } \dot{\delta}_b^p \neq 0 \end{cases} \quad (86)$$

Onde  $f_n$  é a função de escoamento relativa à força axial e é expressa conforme Equação (87). Nesta, o parâmetro  $c_n$  representa a rigidez ao encruamento cinemático.

$$f_n = \left| \frac{n_b}{1 - d_n} - c_n \delta_b^p \right| \quad (87)$$

Em se tratando da correlação entre as variáveis de dano por flexão e dano por tração axial, deve-se considerar a interação entre seus efeitos a fim de garantir a consistência do modelo numérico. Assim, pode-se representar essa relação a partir da

Equação (88). Silva (2025) destaca que essa relação com o expoente  $1/3$  surgiu da análise geométrica do momento de inércia efetivo e área efetiva da seção transversal danificada.

$$d_n = 1 - (1 - d_i)^{\frac{1}{3}} \quad (88)$$

Silva (2025) propôs substituir o expoente  $1/3$  por um parâmetro denominado  $k_{cp}$  a fim de minimizar os erros advindos da não linearidade do material, redistribuições de tensões ou interações entre os modos de danos. Esse parâmetro pode ser ajustado por meio de calibração numérica ou ajustes com bases experimentais e é inserido na Equação (88).

$$d_n = 1 - (1 - d_i)^{k_{cp}} \quad (90)$$



### 3 ESTUDOS EXPERIMENTAIS DE REFERÊNCIA

A análise e o estudo do colapso progressivo em estruturas de concreto armado requerem a utilização de abordagens que unam a teoria com a verificação experimental. Dessa forma, ensaios laboratoriais são fundamentais para a clara compreensão dos mecanismos envolvidos na perda de estabilidade ou na redistribuição de esforços. Porém, em virtude dos altos custos normalmente envolvidos, bem como a necessidade de infraestrutura adequada, a realização desses experimentos nem sempre é viável. Nesse contexto, a modelagem numérica se apresenta como ferramenta útil que permite a simulação, de forma controlada, de situações complexas e, ao mesmo tempo, a avaliação dos mais diversos parâmetros estruturais.

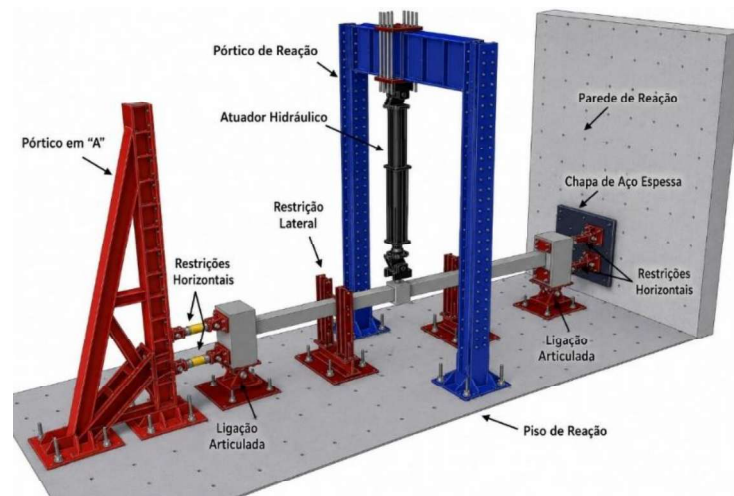
Do ponto de vista da confiabilidade dos resultados numéricos, os mesmos devem ser confrontados com experimentos de referência disponíveis na literatura. Assim, neste trabalho, adotou-se como base os ensaios desenvolvidos por Lew *et al.* (2011), Yu e Tan (2013) e Long *et al.* (2021). A escolha se deu em virtude da relevância dos estudos bem como pela disponibilidade de informações resultantes dos experimentos que permitem a validação do modelo numérico proposto.

#### 3.1 Descrição do ensaio experimental de Yu e Tan (2013)

O estudo realizado por Yu e Tan (2013) teve como foco analisar a resistência ao colapso progressivo em estruturas compostas por vigas e colunas de concreto armado. Para isso, os autores realizaram testes experimentais visando compreender os mecanismos de falha envolvidos e a forma como os esforços são redistribuídos durante o processo de colapso.

Para tanto, duas amostras simplificadas (S1 e S2) em escala reduzida foram projetadas e testadas sob um cenário de remoção da coluna central. As amostras consistiam em uma viga de dois vãos, uma junta central e dois pilares de extremidade ampliados. As mesmas foram apoiadas por um dispositivo de teste estaticamente determinado, e uma carga pontual foi aplicada no topo da junta central com controle de deslocamento até que falhassem completamente (Figura 28).

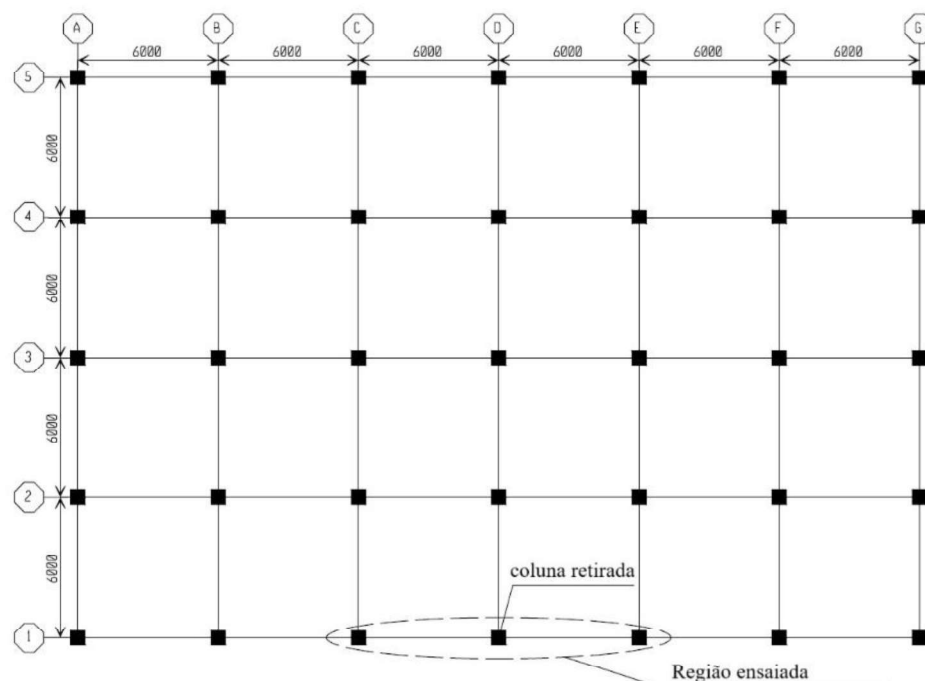
**Figura 26** – Aparato experimental utilizado nos ensaios de Yu e Tan (2013).



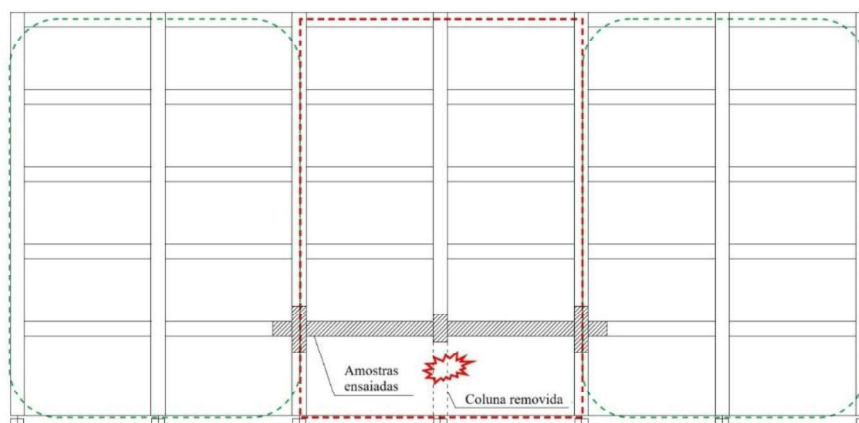
Fonte: Adaptado de Yu e Tan (2013)

Os autores consideraram um protótipo de pórtico em concreto armado, representativo de edifícios usuais de múltiplos pavimentos. As Figuras 29 e 30 apresentam a localização dos elementos protótipos ensaiados dentro do pórtico de referência.

**Figura 27** – Vista em planta do protótipo do ensaio de Yu e Tan (2013).



Fonte: Adaptado de Yu e Tan (2013)

**Figura 28** – Vista frontal do protótipo do ensaio de Yu e Tan (2013).

Fonte: Adaptado de Yu e Tan (2013)

Conforme descrito por Yu e Tan (2013), na Figura 30 a região diretamente afetada (delimitada pelas linhas tracejadas vermelhas) está localizada imediatamente acima do pilar removido, enquanto os pórticos adjacentes (delimitados pelas linhas tracejadas verdes) são indiretamente afetados em decorrência da redistribuição dos esforços.

As dimensões principais e as características geométricas tanto dos protótipos quanto das amostras S1 e S2 são resumidas na Tabela 6.

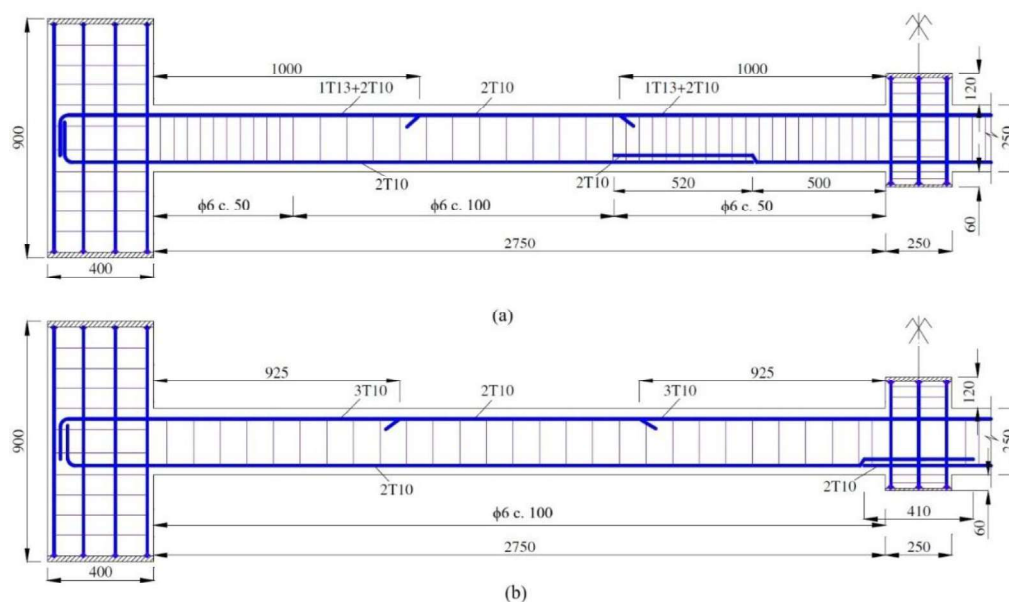
**Tabela 3** - Propriedades geométricas dos protótipos e das amostras do ensaio de Yu e Tan (2013).

| Protótipos e Amostras | Vão livre da viga (mm) | Dimensões da viga (mm) |         | Dimensões da coluna central (mm) |         | Detalhamento |
|-----------------------|------------------------|------------------------|---------|----------------------------------|---------|--------------|
|                       |                        | Profundidade           | Largura | Profundidade                     | Largura |              |
| Protótipo 1           | 5500                   | 500                    | 300     | 500                              | 500     | Sísmico      |
| Amostra S1            | 2750                   | 250                    | 150     | 250                              | 250     | Sísmico      |
| Protótipo 2           | 5500                   | 500                    | 300     | 500                              | 500     | Não-sísmico  |
| Amostra S2            | 2750                   | 250                    | 150     | 250                              | 250     | Não-sísmico  |

Fonte: Adaptado de Yu e Tan (2013)

A Figura 31 ilustra em detalhe a configuração geométrica e o detalhamento das armaduras longitudinais e transversais das amostras ensaiadas. Observa-se o arranjo das barras principais, o espaçamento dos estribos e a região de aplicação das cargas, o que permite compreender a forma de transferência de esforços e o comportamento esperado durante o colapso.

**Figura 29** – Detalhamento geométrico e de armaduras das amostras ensaiadas do ensaio de Yu e Tan (2013):  
(a) Amostra S1; (b) Amostra S2.



Fonte: Adaptado de Yu e Tan (2013)

As propriedades mecânicas dos materiais empregados nos ensaios são apresentadas na Tabela 7, incluindo os módulos de elasticidade, limites de escoamento e resistência última do aço, bem como a resistência à compressão do concreto.

**Tabela 4** - Propriedades mecânicas do aço e do concreto utilizadas no ensaio de Yu e Tan (2013).

| <b>Materiais ensaiados</b>                        | <b>Diâmetro nominal (mm)</b>               |    | <b>Módulo de Elasticidade (MPa)</b> | <b>Tensão de escoamento (MPa)</b> | <b>Tensão de ruptura (MPa)</b> |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------|----|-------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| Barras Longitudinais                              | T10                                        | 10 | 182,611                             | 511                               | 731                            |
|                                                   | T13                                        | 13 | 185,763                             | 527                               | 640                            |
| Estribos                                          | R6                                         | 6  | 178,500                             | 310                               | 422                            |
| Concreto<br>(diâmetro: 150 mm;<br>altura: 300 mm) | Resistência à compressão: 31,2 MPa         |    |                                     |                                   |                                |
|                                                   | Resistência à tração: 3,2 MPa              |    |                                     |                                   |                                |
|                                                   | Módulo de Elasticidade inicial: 27,633 MPa |    |                                     |                                   |                                |

Fonte: Adaptado de Yu e Tan (2013)

As curvas carga vs. deslocamento obtidas por Yu e Tan (2013) permitem acompanhar a evolução da resposta das amostras submetidas a diferentes níveis de carregamento, bem como a identificação dos mecanismos de falha, incluindo a formação e propagação de fissuras, o início da plastificação das armaduras e a ativação da ação catenária. Considerando o nível de

detalhamento fornecido pelos autores em termos de geometria, armadura e propriedades dos materiais, o ensaio se apresenta como uma referência adequada para validação numérica, possibilitando uma comparação direta entre os resultados experimentais e aqueles previstos pelo modelo numérico desenvolvido nesta dissertação.

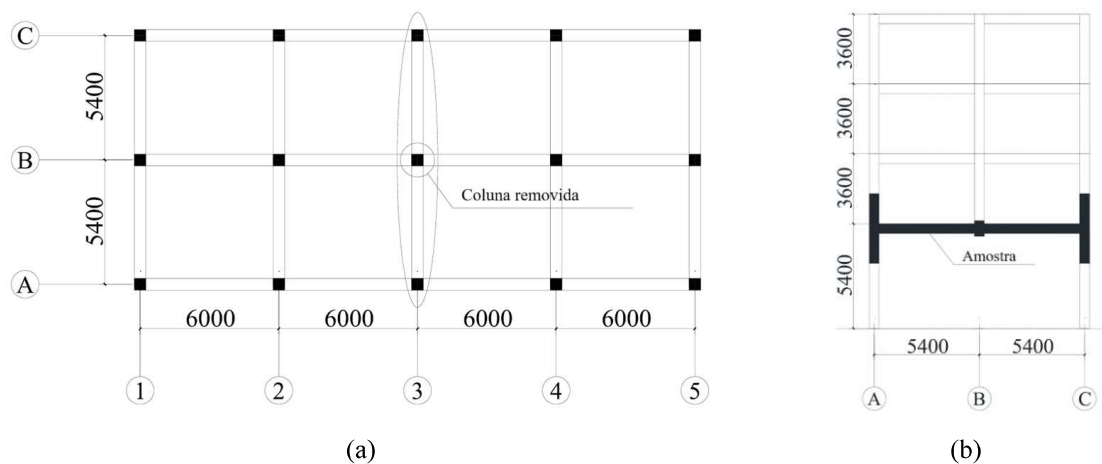
### 3.2 Descrição do ensaio experimental de Long *et al.* (2021)

O estudo conduzido por Long *et al.* (2021) teve como objetivo realizar a análise da resistência ao colapso progressivo de pórticos de concreto armado sujeitos a condições de carregamentos representativos de ações devidas ao uso ou ocupação e de falhas localizadas. O experimento reproduziu um pórtico em concreto armado com a finalidade de avaliar tanto o comportamento local dos elementos da estrutura como, também, a interação global entre vigas e pilares durante o processo de falha.

Para tanto, a estrutura foi submetida a incrementos de carregamentos aplicados em elementos específicos do pórtico, especificamente nos locais onde as colunas foram removidas, de forma a simular a perda súbita de um apoio vertical. Dessa forma, foram observados mecanismos de colapso como a redistribuição de esforços após a perda de um elemento vertical, o surgimento e propagação de trincas em regiões específicas e a ação catenária. O experimento teve a finalidade de avaliar tanto o comportamento local dos elementos da estrutura como a interação global entre vigas e pilares durante o processo de falha (Figura 26).

**Figura 30** – Estrutura protótipo e localização do pilar removido do ensaio de Long *et al.* (2021):

(a) Vista em planta; (b) Vista frontal.



Fonte: Adaptado de Long *et al.* (2021)

As dimensões do pórtico experimental e os detalhes das armaduras utilizadas foram definidos conforme a Tabela 3, permitindo a reprodução da geometria e da distribuição de barras

para a modelagem numérica, onde T12, T14 e T16 correspondem às barras com diâmetros nominais iguais a 12 mm, 14 mm e 16 mm, respectivamente.

**Tabela 5** - Dimensões e detalhes de armadura dos pórticos experimentais do ensaio de Long *et al.* (2021)

| Amostra  | Vão livre da viga (mm) | Viga                   |          |          |              | Coluna   |              |                | Detalhamento das ligações |
|----------|------------------------|------------------------|----------|----------|--------------|----------|--------------|----------------|---------------------------|
|          |                        | Seção transversal (mm) | Armadura |          | Estribos     | Armadura | Estribos     | Dimensões (mm) |                           |
|          |                        |                        | Superior | Inferior |              |          |              |                |                           |
| FN-1.05  | 5150                   | 150x250                | 3 T12    | 2 T12    | φ8 c. 100    | 8 T12    | φ8 c. 100    | 250x250        | Não sísmico               |
| FS-1.05  | 5150                   | 150x250                | 3 T12    | 2 T12    | φ8 c. 60/100 | 8 T12    | φ8 c. 70/100 | 250x250        | Sísmico                   |
| FS-1.43  | 5150                   | 150x250                | 3 T14    | 2 T12    | φ8 c. 60/100 | 8 T12    | φ8 c. 50/100 | 250x250        | Sísmico                   |
| FS-1.43E | 5150                   | 150x250                | 3 T14    | 2 T12    | φ8 c. 60/100 | 8 T12    | φ8 c. 50/100 | 300x300        | Sísmico                   |
| FS-1.86E | 5150                   | 150x250                | 3 T16    | 2 T12    | φ8 c. 60/100 | 8 T12    | φ8 c. 40/100 | 300x300        | Sísmico                   |

Fonte: Adaptado de Long *et al.* (2021)

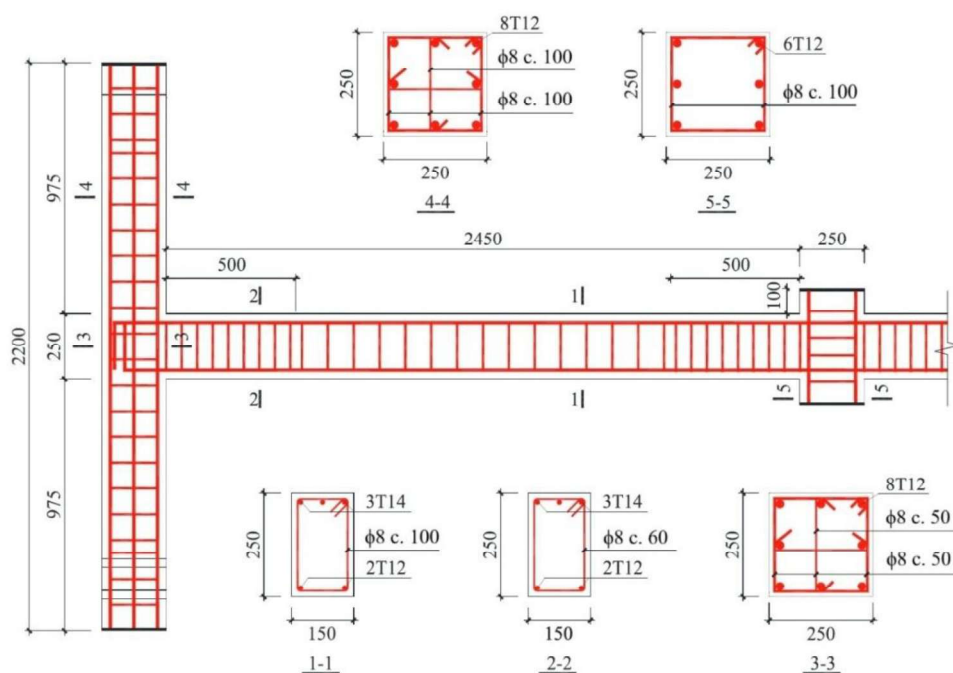
As propriedades mecânicas das armaduras utilizadas no ensaio, incluindo módulo de elasticidade e limite de escoamento, estão resumidas na Tabela 4 e serão adotadas na modelagem numérica.

**Tabela 6** - Propriedades mecânicas das armaduras de aço do ensaio de Long *et al.* (2021).

| Material             |     | Diâmetro (mm) |  | Tensão de escoamento (MPa) | Tensão de ruptura (MPa) | Módulo de Elasticidade (GPa) |
|----------------------|-----|---------------|--|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| Estribos             |     | 8             |  | 532                        | 671                     | 209,6                        |
| Barras Longitudinais | T12 | 12            |  | 413                        | 548                     | 201,1                        |
|                      | T14 | 14            |  | 435                        | 640                     | 203,0                        |
|                      | T16 | 16            |  | 420                        | 625                     | 211,2                        |

Fonte: Adaptado de Long *et al.* (2021)

O detalhamento da armadura da amostra FS-1.43, incluindo número e posicionamento das barras longitudinais e transversais, é apresentado na Figura 27.

**Figura 31** – Detalhes da armadura da amostra FS-1.43 do ensaio de Long *et al.* (2021).

Fonte: Adaptado de Long *et al.* (2021)

Já as propriedades mecânicas do concreto utilizado no ensaio, como resistência à compressão e módulo de elasticidade, estão resumidas na Tabela 5.

**Tabela 7** - Propriedades mecânicas do concreto do ensaio de Long *et al.* (2021).

| Amostra  | Resistência à compressão das amostras cúbicas (MPa) | Resistência à compressão equivalente para amostras cilíndricas (MPa) | Módulo de Elasticidade (MPa) |
|----------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| FN-1.05  | 37,4                                                | 29,9                                                                 | 32,0                         |
| FS-1.05  | 36,6                                                | 29,3                                                                 | 31,8                         |
| FS-1.43  | 41,7                                                | 33,4                                                                 | 32,0                         |
| FS-1.43E | 43,9                                                | 35,1                                                                 | 33,4                         |
| FS-1.86E | 44,6                                                | 35,7                                                                 | 33,6                         |

Fonte: Adaptado de Long *et al.* (2021)

Dentre os resultados apresentados por Long *et al.* (2021), destacam-se tanto as curvas carga *vs.* deslocamento que descrevem a resposta da estrutura ao carregamento aplicado, como a identificação das etapas de ruptura. Assim, considerando o detalhamento fornecido pelo autores em termos geométricos e de comportamento estrutural, o ensaio se apresenta adequado

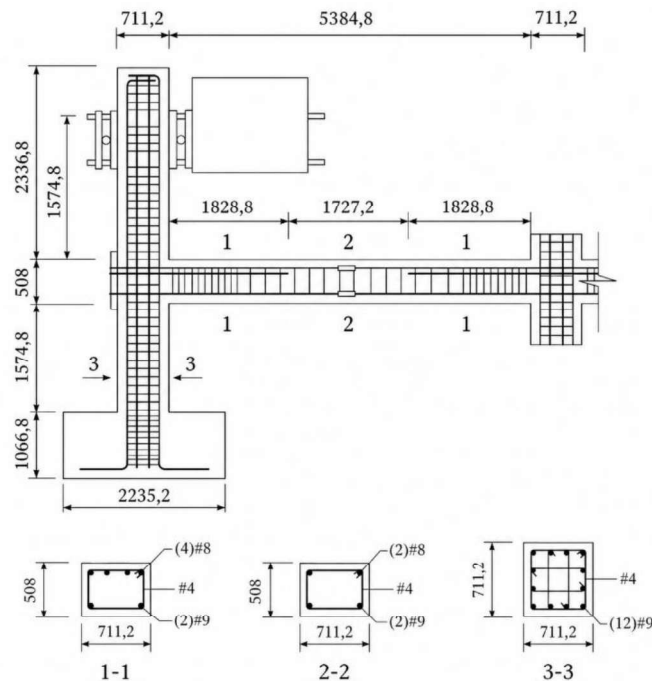
para fins de validação numérica, uma vez que permite a comparação entre os resultados experimentais e os previstos pelo modelo numérico proposto nesta dissertação.

### 3.3 Descrição do ensaio experimental de Lew *et al.* (2011)

O estudo conduzido por Lew *et al.* (2011) teve como objetivo investigar o comportamento de conjuntos de vigas e colunas de concreto armado submetidos à remoção súbita de um pilar, simulando cenários de colapso progressivo. Para tanto, a pesquisa combinou ensaios experimentais e análises computacionais, de forma a avaliar tanto a resposta local dos elementos quanto a redistribuição global de esforços.

Assim, as estruturas foram submetidas a carregamento incremental em regiões específicas, simulando a perda súbita de um pilar e permitindo observar a ativação de mecanismos de colapso progressivo, como redistribuição de momentos e ação catenária das vigas. Os mecanismos de falha observados incluíram a formação inicial de fissuras nas regiões de tração, a plastificação das armaduras em pontos críticos e a progressão do dano até falha parcial ou global do conjunto. A Figura 32 apresenta os detalhes do conjunto IMF (*Interior Moment Frame*), incluindo dimensões das vigas e pilares em milímetros, arranjo das armaduras longitudinais e transversais e regiões de aplicação do carregamento.

**Figura 32** – Detalhes do conjunto IMF do ensaio de Lew *et al.* (2011)

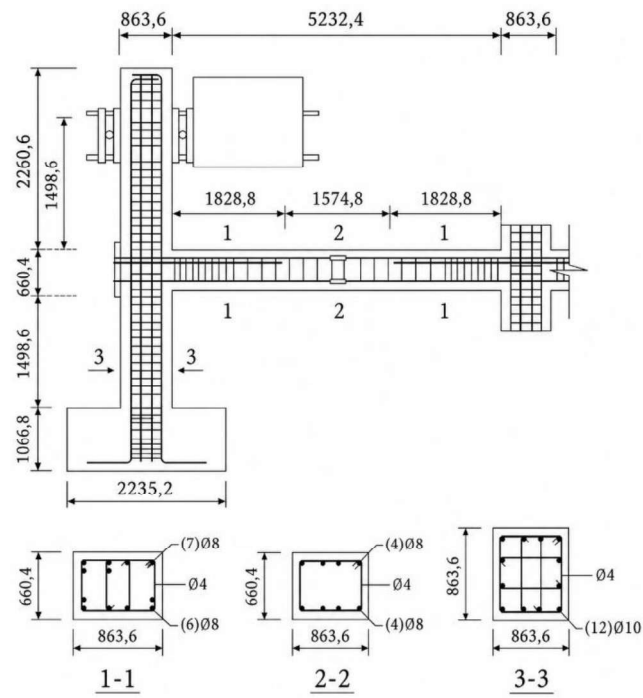


Fonte: Adaptado de Lew *et al.* (2011)



Já a Figura 33 mostra os detalhes do conjunto SMF (*Special Moment Frame*), destacando as diferenças de geometria e armaduras em relação à IMF, com dimensões de vigas e pilares em milímetros.

**Figura 33** – Detalhes do conjunto SMF do ensaio de Lew *et al.* (2011)



Fonte: Adaptado de Lew *et al.* (2011)

A Tabela 8 apresenta os valores médios de resistência à compressão e à tração de cilindros de concreto no momento da execução dos ensaios. Estes dados fornecem informações sobre o comportamento mecânico do concreto empregado nos conjuntos e são fundamentais para a definição de parâmetros constitutivos e calibração do modelo numérico de dano concentrado.

**Tabela 8** - Resistência média à compressão e à tração do concreto utilizado nos ensaios de Lew *et al.* (2011).

| Conjunto<br>(Amostra) | Resistência à<br>compressão<br>(MPa) | Resistência à<br>tração<br>(MPa) |
|-----------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
|                       | Vigas e Colunas                      | Vigas e Colunas                  |
| IMF                   | 31                                   | 3,1                              |
| SMF                   | 36                                   | 2,9                              |

Fonte: Adaptado de Lew *et al.* (2011)

Os valores médios das propriedades mecânicas das barras de aço utilizadas nas submontagens, incluindo módulo de elasticidade, limite de escoamento e resistência última são

mostrados na Tabela 9. Essas informações servem para a representação do comportamento do aço no modelo numérico, permitindo que a simulação reproduza a resposta estrutural observada nos ensaios experimentais.

**Tabela 9** - Valores médios das propriedades mecânicas das barras utilizadas nos ensaios de Lew *et al.* (2011).

| <b>Bitola da armadura</b> | <b>Diâmetro (mm)</b> | <b>Tensão de escoamento (MPa)</b> | <b>Tensão de ruptura (MPa)</b> |
|---------------------------|----------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| 8                         | 25,40                | 476                               | 648                            |
| 9                         | 28,65                | 462                               | 641                            |
| 9                         | 28,65                | 483                               | 690                            |
| 10                        | 31,75                | 503                               | 731                            |
| 4                         | 12,70                | 524                               | 710                            |
| 4                         | 12,70                | 545                               | 676                            |

Fonte: Adaptado de Lew *et al.* (2011)

Lew *et al.* (2011) apresentaram curvas carga vs. deslocamento, diagramas de deformações e identificação das etapas de ruptura, fornecendo dados que permitem comparação com simulações numéricas. Assim, considerando o detalhamento fornecido pelos autores acerca da geometria, armaduras e propriedades dos materiais, o ensaio é uma adequado para validação do modelo numérico, permitindo verificar a capacidade da modelagem em reproduzir o comportamento observado experimentalmente.

## 4 METODOLOGIA

### 4.1 Estrutura geral da pesquisa

A presente pesquisa teve como objetivo realizar uma análise do colapso progressivo em estruturas de concreto armado fundamentada na MDC, a partir do desenvolvimento de uma modelagem numérica capaz de representar a propagação de danos localizados, bem como a perda de rigidez em pontos críticos da estrutura. Dessa forma, a fim de garantir uma integração entre a teoria, a validação do modelo numérico e a análise dos mecanismos de colapso, a pesquisa foi estruturada nas etapas descritas a seguir.

#### 4.1.1 Revisão teórica e levantamento bibliográfico

A fim de conceber fundamentação teórica e base metodológica ao estudo, a primeira etapa desta pesquisa consistiu na revisão teórica e no levantamento bibliográfico, onde foram analisados os fundamentos do colapso progressivo em estruturas de concreto armado. Para isso, grande enfoque foi dado aos mecanismos de falha em elementos localizados que podem resultar na propagação de danos. Assim, foram estudados conceitos acerca da redistribuição de esforços e de mecanismos alternativos de resistência, como a ação catenária.

Em um segundo momento, a pesquisa teve como foco o estudo da MDC, uma vez que esta oferece uma base teórica capaz de representar a formação e a evolução de danos localizados em estruturas de concreto armado. Assim, esta teoria se constitui como uma base para o desenvolvimento do modelo numérico adotado neste trabalho, o que permite representar de forma separada os danos no concreto e nas armaduras, ao tempo que a avaliação da redução da rigidez associada à propagação do dano não é prejudicada.

Por fim, com o intuito de servir como referência para validação dos resultados do modelo numérico, realizou-se um levantamento de ensaios experimentais publicados na literatura. Os estudos selecionados compreendem os realizados por Long *et al.* (2021), Yu e Tan (2013) e Lew *et al.* (2011).

#### 4.1.2 Configuração dos casos de estudo

Esta etapa foi compreendida pela definição dos casos de estudo e da configuração do modelo numérico. O principal propósito foi implementar as informações dos experimentos à formulação baseada na MDC, a fim de possibilitar uma comparação entre os resultados teóricos e os observados em laboratório.

Para tanto, foram escolhidas estruturas representativas documentadas na literatura, notadamente, os experimentos Long *et al.* (2021), Yu e Tan (2013) e Lew *et al.* (2011), que, por apresentarem geometrias distintas, detalhamento das armaduras e condições de carregamento bem definidas, permitem a construção de um conjunto amplo de casos de estudo. Além disso, tais trabalhos apresentam as informações necessárias para replicar os ensaios, através do modelo proposto.

Foram, então, estabelecidas hipóteses simplificadoras adotadas na formulação numérica do modelo. A modelagem estrutural consistiu num sistema plano composto por elementos de barra, nos quais o comportamento axial e à flexão foram avaliados separadamente, observando-se os princípios da MDC. Os comportamentos do concreto (responsável por resistir à compressão e suscetível à fissuração por tração) e das armaduras (material dúctil capaz de suportar deformações plásticas significativas) também foram tratados de forma independente, a fim de permitir a representação diferenciada dos mecanismos de dano em cada material.

As propriedades dos materiais, bem como a geometria e as condições de contorno foram obtidas a partir das informações contidas nos trabalhos experimentais de referência. Dessa forma, considerou-se as propriedades mecânicas do concreto e do aço como módulo de elasticidade, resistência à compressão e tração e limites de escoamento. Também foram definidas, conforme procedimentos experimentais, as condições de carregamento e vinculação, de forma a reproduzir a situação de remoção de um pilar e o consequente desenvolvimento da ação catenária.

#### 4.1.3 Adaptações do modelo de Silva (2025)

No presente trabalho, o modelo apresentado por Silva (2025) foi utilizado como base para a representação dos mecanismos de dano no concreto armado em situação de colapso progressivo. Em seu modelo, Silva (2025) considera a interação entre os danos por flexão e por

tração axial, de maneira que as fissuras resultantes de um tipo de solicitação afetam, diretamente, a resistência da outra, garantindo a consistência física do modelo. Entretanto, neste trabalho, foi adotada uma abordagem distinta para esta análise.

A principal adaptação consistiu em considerar os danos no concreto e nas armaduras de forma separada, de modo que, uma vez atingida a fase de ação catenária, isto é, quando o elemento estrutural passa a resistir, predominantemente, a esforços de tração, o concreto não mais contribui para a resistência axial. A partir desse estágio, admite-se que apenas as armaduras sejam responsáveis pela resistência aos esforços de tração desenvolvidos ao longo da evolução do colapso progressivo.

Dessa maneira, considerou-se que a evolução do dano é regida por leis distintas para cada material. No concreto, a evolução do dano cessa quando o elemento estrutural entra em regime de ação catenária. Por outro lado, nas armaduras, o processo de degradação continua sendo acompanhado, à medida que o dano segue em evolução e os esforços de tração são intensificados.

Além da separação dos mecanismos de dano, introduziu-se uma modificação na função de escoamento responsável pela representação da degradação da capacidade resistente do elemento aos esforços axiais. Assim a função de escoamento adotada nesta pesquisa foi definida conforme mostrado na Equação (89):

$$f_n = \frac{n}{(1 - d_n^\gamma)N_p} + \frac{m}{M_p} - 1 \leq 0 \quad (89)$$

Onde  $n$  corresponde ao esforço normal atuante,  $m$  é o momento fletor atuante,  $N_p$  é o esforço normal de plastificação,  $M_p$  é o momento de plastificação,  $d_n$  é a variável de dano axial associada aos esforços normais e  $\gamma$  é o parâmetro adicional associado ao dano axial.

A introdução do parâmetro adicional  $\gamma$  teve como objetivo flexibilizar a modelagem numérica, de maneira a permitir uma representação mais adequada da perda gradativa de resistência observada nos experimentos. Assim, foi possível calibrar a resposta estrutural do modelo sem efetuar alterações nos fundamentos da MDC adotados na formulação original.

#### 4.1.3.1 Análise paramétrica do parâmetro adicional $\gamma$

Após a definição da função de escoamento mostrada na Equação (91), foi realizada uma análise paramétrica a fim de avaliar a influência do parâmetro adicional  $\gamma$  sobre a resposta do modelo numérico. A finalidade desta etapa foi investigar a sensibilidade da formulação em relação à variação do expoente associado ao dano axial, além de identificar o valor mais adequado para representar a degradação da capacidade resistente.

Para tanto, a análise foi feita utilizando-se como referência o modelo S1 de Yu e Tan (2013). Tal modelo foi selecionado por apresentar desenvolvimento completo da ação catenária e possuir resultados experimentais documentados na literatura. Assim, o valor experimental adotado como referência corresponde à carga resistente de 68,8 kN e um deslocamento vertical de 573 mm.

Para fins de análise, foram mantidas inalteradas todas as características geométricas, propriedades mecânicas dos materiais, condições de contorno, carregamentos e parâmetros constitutivos da MDC. A única variável que sofreu alterações nas simulações foi o parâmetro adicional  $\gamma$  presente na função de escoamento axial. A Tabela 10 apresenta os resultados alcançados para os diferentes valores  $\gamma$  de analisados.

**Tabela 10** – Resultados da análise paramétrica do parâmetro  $\gamma$  para o modelo S1 de Yu e Tan (2013).

| $\gamma$ | Carga final<br>(kN) | Deslocamento vertical<br>(mm) | $d_n$  |
|----------|---------------------|-------------------------------|--------|
| 2,0      | 64,88               | 573                           | 0,1788 |
| 2,5      | 65,89               | 573                           | 0,1782 |
| 3,0      | 66,32               | 573                           | 0,1779 |
| 3,5      | 66,50               | 573                           | 0,1778 |
| 4,0      | 66,57               | 573                           | 0,1777 |
| 4,5      | 66,60               | 573                           | 0,1777 |
| 5,0      | 66,61               | 573                           | 0,1777 |

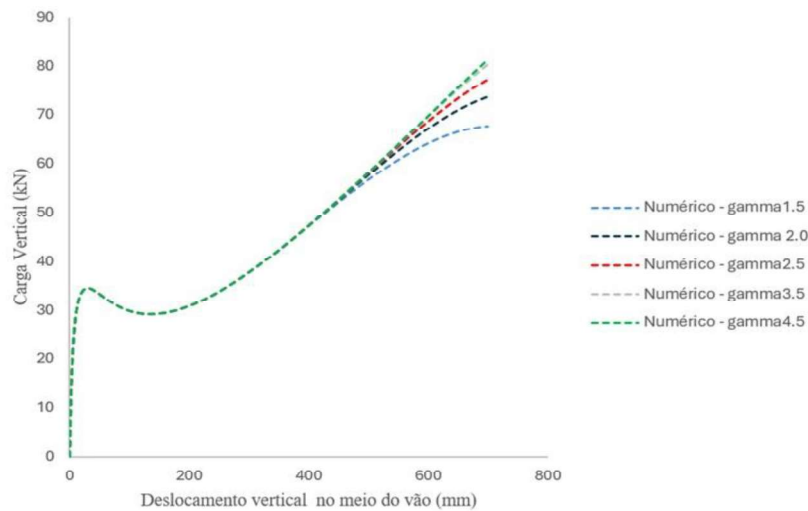
Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Os resultados apresentados na Tabela 10 demonstram que o aumento do parâmetro adicional  $\gamma$  resulta numa elevação gradual da carga ao final da análise, ao tempo que reduz os valores finais da variável de dano axial. Pode-se observar que os maiores incrementos ocorrem para valores de  $\gamma$  entre 2,0 e 3,5 e, a partir daí, as variações se tornam menores, indicando uma estabilização da resposta estrutural.

Para valores de  $\gamma$  superiores a 3,5 a carga converge para valores próximos a 66,6 kN, enquanto o dano axial permanece praticamente constante, com variações entre 0,1778 e 0,1777. Tal comportamento indica que, acima desse limite, a influência do parâmetro  $\gamma$  sobre a resposta da estrutura analisada torna-se pouco significativa.

Além da análise dos valores finais de carga resistente, comparou-se as curvas carga vs. deslocamento resultantes das diversas simulações, conforme mostrado na Figura 34. Considerando a proximidade dos resultados obtidos para valores superiores de  $\gamma$  e o fato de  $\gamma = 3,5$  representar o início da estabilização da resposta numérica, esse valor foi adotado nas análises subsequentes desta pesquisa.

**Figura 34** – Comparação das curvas carga vs. deslocamento obtidas para diferentes valores do parâmetro  $\gamma$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

#### 4.1.4 Adaptação da MDC ao modelo numérico

O modelo proposto neste trabalho teve sua formulação numérica baseada no modelo de dano concentrado desenvolvido por Silva (2025), que por sua vez fundamentou-se no modelo proposto por Cipollina *et al.* (1995), uma vez que este fornece um esquema simplificado para a representação da não linearidade física em estruturas de barras. Como a MDC é baseada na hipótese de que o dano se concentra em regiões específicas da estrutura, enquanto o restante do elemento permanece elástico, é possível analisar a evolução da consequente degradação do elemento.

A formulação proposta por Silva (2025) inclui o efeito do dano axial no concreto, com o fim de representar o comportamento deste material quando submetido à perda de apoio e à

redistribuição de esforços. O modelo foi aprimorado, também, para considerar o comportamento diferenciado do concreto e das armaduras, uma vez que tais materiais apresentam comportamentos distintos em relação ao mecanismo de dano.

A evolução da rigidez e os critérios de ruptura foram definidos por meio de leis constitutivas específicas para cada material. No caso do concreto, o processo de degradação foi representado por uma variável escalar de dano, responsável pela redução gradual do módulo de elasticidade do material ao longo da sua degradação. No aço, por outro lado, a deformação plástica foi considerada mediante um comportamento elasto-plástico com encruamento do material. Os parâmetros constitutivos como módulo de elasticidade, resistência à compressão e resistência à tração, relativos ao concreto, e o módulo de elasticidade e o limite de escoamento, relativos às armaduras, bem como os limites de dano como a rigidez residual e o parâmetro associado ao encruamento, para o concreto e o aço, respectivamente, foram definidos com base nas propriedades mecânicas obtidas nos ensaios de referência.

A adaptação aqui proposta teve a finalidade de obter uma representação mais refinada da interação entre concreto e as armaduras no desenvolvimento do colapso progressivo. O modelo forneceu uma base para a implementação computacional descrita em 4.1.5.

#### 4.1.4.1 Lei de evolução da deformação plástica

A evolução da deformação plástica foi definida a partir de condições que estabelecem que a deformação plástica somente pode evoluir quando o estado de tensões atinge o patamar de escoamento, a fim de garantir a consistência física da formulação. Dessa forma, a lei de evolução plástica é expressa por:

$$\begin{cases} \delta_b^p = 0 & \text{se } f_n < 0 \\ f_n = 0 & \text{se } \delta_b^p \neq 0 \end{cases} \quad (90)$$

A Equação (92) estabelece, portanto, que não há evolução das deformações permanentes enquanto o estado resistente permanecer dentro do domínio elástico. Por outro lado, desenvolve-se deformações plásticas irreversíveis quando o patamar de escoamento é atingido, o que permite a representação da formação e evolução das rótulas inelásticas.



#### 4.1.4.2 Lei de evolução do dano axial

A evolução da dano axial é definida pela formulação mostrada na Equação (91), que permite representar o processo de degradação gradual da capacidade resistente relativo ao desenvolvimento de esforços normais de tração durante a ação catenária.

$$\begin{cases} \dot{d}_n = 0 & \text{se } \delta_b^p < R(d_n) \\ \delta_b^p = R(d_n) & \text{se } \dot{d}_n \neq 0 \end{cases} \quad (91)$$

O dano axial permanece constante enquanto a deformação plástica for inferior à resistência associada ao estado atual de dano. A partir do momento em que tal resistência é alcançada, tem-se início a evolução da variável  $d_n$ . Já a função de resistência do dano  $R(d_n)$  define o valor limite necessário para que o dano continue evoluindo e seu valor é obtido a partir da Equação (92) a seguir.

$$R(d_n) = \delta_{cr}^p + \frac{d_n}{k_n} \quad (92)$$

Onde  $k_n$  é o parâmetro de evolução do dano e que, neste trabalho, foi adotado igual a 6,0 por ser o valor que melhor se adequou aos resultados experimentais e  $\delta_{cr}^p$  é o alongamento plástico crítico definido por:

$$\delta_{cr}^p = (\varepsilon_u - \varepsilon_y)L \quad (93)$$

#### 4.1.4.3 Lei de evolução de dano para materiais dúcteis

Para a evolução do dano em materiais dúcteis utilizou-se a Equação (94) mostrada abaixo.

$$d_n = k_n \langle \delta_b^p - \delta_{cr}^p \rangle_+ \quad (94)$$

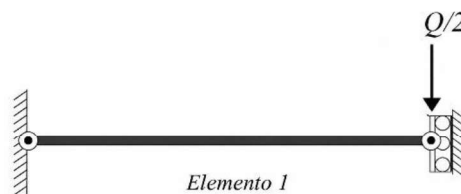
#### 4.1.5 Implementação computacional e simulação numérica

Nesta etapa foi realizada a implementação do modelo numérico proposto no trabalho. Seu desenvolvimento consistiu em representar de forma incremental e não linear o comportamento da estrutura, de forma a permitir a simulação do processo de evolução do colapso progressivo.

Para discretização da estrutura utilizou-se elementos finitos de pórticos bidimensionais, que são compatíveis com a formulação da MDC. As malhas adotadas foram definidas de forma a representar a distribuição dos deslocamentos, bem como a formação de rótulas inelásticas decorrentes da evolução do dano.

A Figura 35 apresenta a malha utilizada para o modelo de Yu e Tan (2013), composta por um único elemento finito de pórtico representando o vão estrutural entre os apoios. Essa malha mostrou-se adequada para reproduzir os mecanismos de resposta estrutural observados experimentalmente, incluindo a formação da ação catenária e a evolução do dano durante o processo de colapso progressivo.

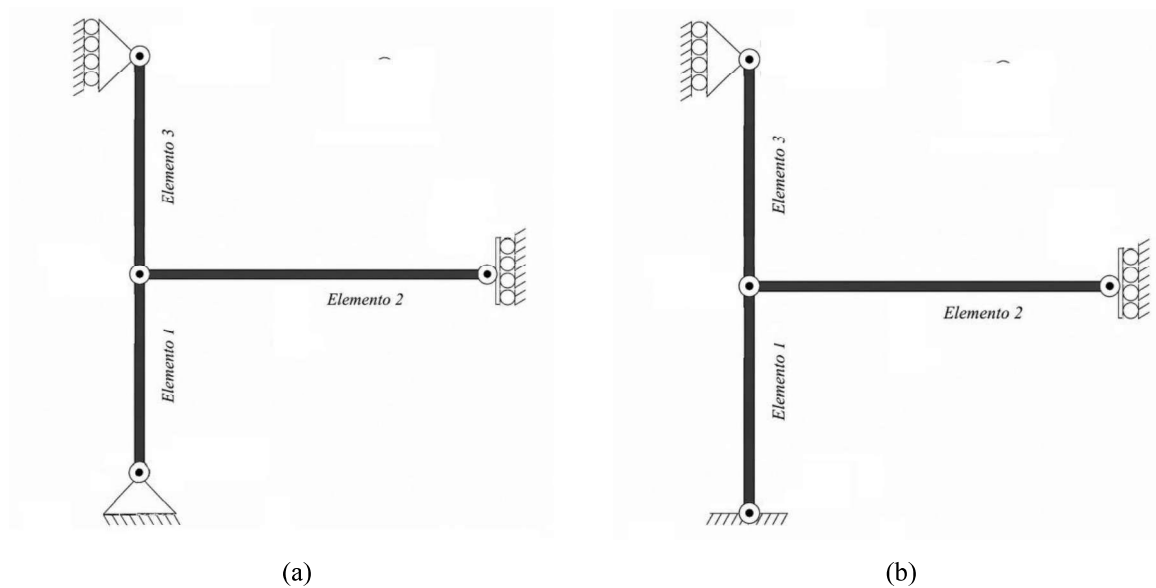
**Figura 35** – Discretização em elementos finitos dos experimentos de Yu e Tan (2013).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Já para os modelos de Long *et al.* (2021) e Lew *et al.* (2011) discretizou-se a estruturas em três elementos finitos de pórtico, sendo dois verticais representando os pilares e um elemento horizontal representando a viga principal. A Figura 36 apresenta a discretização adotada para os modelos citados.

**Figura 36** – Discretização em elementos finitos dos experimentos de (a) Long *et al.* (2021) e (b) Lew *et al.* (2011).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

O algoritmo, estruturado de forma a considerar a atualização da rigidez dos elementos conforme a evolução do dano, possibilitou a representação da degradação e da redistribuição de esforços. A análise se deu com incrementos de carga a fim de garantir um monitoramento detalhado da resposta da estrutura em diferentes estágios de solicitação.

As simulações foram executadas para as condições descritas no Capítulo 3, isto é, com base nos ensaios experimentais de referência. Os parâmetros relacionados à ativação da ação catenária, a evolução do dano no concreto e nas armaduras e a redistribuição de esforços decorrente da perda de elementos estruturais, foram observados durante o processo de cálculo.

Por fim, os resultados numéricos obtidos nas análises foram comparados com os dados experimentais, o que permitiu a avaliação da consistência do modelo proposto.

#### 4.1.6 Validação do modelo

Esta etapa consistiu na verificação da fidelidade do modelo numérico em relação aos resultados experimentais de referência. Para isso, a análise baseou-se em parâmetros representativos do comportamento estrutural, mais especificamente as curvas carga vs. deslocamento.

A análise comparativa considerou a resposta da estrutura obtida numericamente e experimentalmente, de forma a avaliar a capacidade do modelo de reproduzir o comportamento observado nos ensaios. Aspectos relativos à rigidez, capacidade resistente e, também, evolução dos deslocamentos ao longo do carregamento, foram examinados.

Após comparação, verificou-se adequação dos parâmetros constitutivos, bem como das leis de evolução do dano adotadas na modelagem, o que possibilitou a utilização do modelo numérico nas demais análises desenvolvidas neste trabalho.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 Validação do modelo numérico

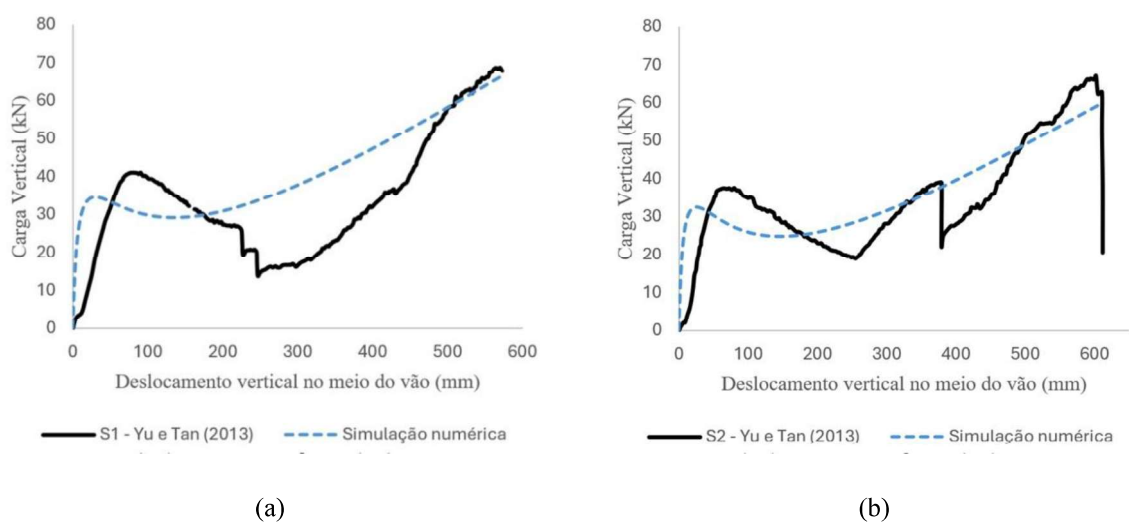
#### 5.1.1 Validação com os experimentos de Yu e Tan (2013)

Com a finalidade de avaliar a capacidade preditiva do modelo proposto neste trabalho, foram realizadas simulações numéricas dos ensaios experimentais S1 e S2 desenvolvidos por Yu e Tan (2013). Os autores analisaram a resposta de vigas de concreto armado submetidas à perda súbita de apoio central e avaliaram a transição entre o mecanismo resistente à flexão e a ação catenária durante o colapso progressivo.

A viga foi discretizada por um único elemento finito, conforme mostrado na Figura 34, e as propriedades geométricas e mecânicas foram definidas de acordo com os dados experimentais fornecidos pelos autores e elencados no Capítulo 3 deste trabalho.

As Figuras 37a e 37b apresentam as comparações entre as curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas para os modelos S1 e S2, respectivamente. As análises dessas relações constituem alguns dos principais critérios de validação do modelo, uma vez que permitem avaliar sua capacidade de reproduzir a rigidez inicial, a resistência máxima e o comportamento pós-pico observados nos experimentos.

**Figura 37** – Curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) S1 e (b) S2.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Os resultados numéricos obtidos nestas simulações reproduziram de forma adequada a resposta estrutural de forma global. Mesmo havendo discrepâncias na região intermediária das

curvas, onde o modelo subestimou os primeiros picos de resistência e não reproduziu as quedas bruscas observadas tanto em S1 como em S2, a região da fase da ação catenária, especialmente acima de 500 mm em S1 e em S2 foram bem reproduzidas na simulação.

Outro ponto a se destacar é que o modelo numérico apresentou rigidez inicial superior àquela observada nos experimentos. Como consequência, para deslocamentos menores, foram alcançados níveis elevados de carga, se comparados com os ensaios.

A fim de complementar a análise gráfica, a Tabela 11 quantifica o desempenho do modelo numérico e apresenta uma síntese dos principais parâmetros obtidos nas simulações. Para tanto, são comparados os valores relativos ao primeiro pico de resistência e à carga máxima alcançada na fase de ação catenária.

**Tabela 11** – Resumo dos resultados experimentais e numéricos dos modelos S1 e S2.

| <b>Modelo</b> | <b>Pico inicial</b> | <b>Pico inicial</b> | <b>Carga final</b>  | <b>Carga final</b> |
|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
|               | <b>experimental</b> | <b>numérico</b>     | <b>experimental</b> | <b>numérico</b>    |
|               | <b>(kN)</b>         | <b>(kN)</b>         | <b>(kN)</b>         | <b>(kN)</b>        |
| S1            | 41,1                | 34,6                | 68,8                | 66,5               |
| S2            | 37,1                | 32,5                | 67,0                | 59,9               |

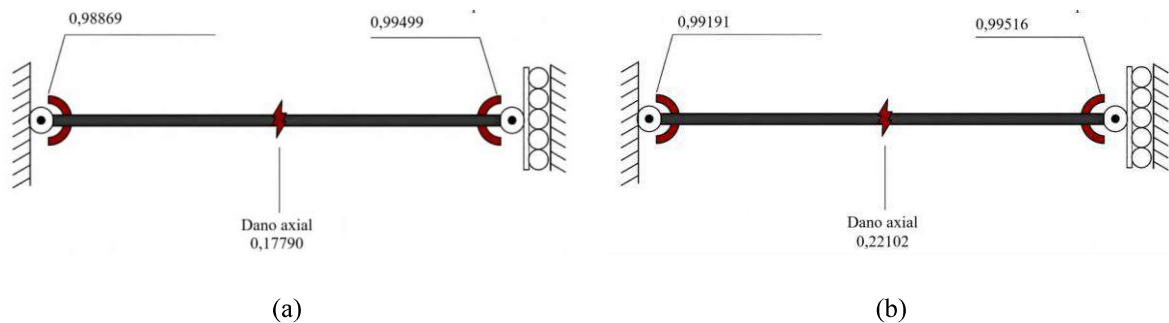
Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Os dados apresentados na Tabela 11 demonstram que o modelo numérico subestimou em, aproximadamente, 15,8% para o modelo S1 e 12,4% para o modelo S2, as resistências correspondentes ao primeiro pico de carga. Esse comportamento pode estar associado à maior rigidez inicial observada nas simulações e, também, às simplificações da modelagem em relação aos mecanismos de fissuração e plastificação presentes nos ensaios experimentais. Já na fase da ação catenária, observou-se certa concordância entre os resultados experimentais e numéricos. Para o modelo S1, o resultado numérico apresentou diferença de 3,3% para menos, em relação ao valor experimental, e o modelo S2, 10,6%, também para menos.

Assim, a aproximação observada entre cargas finais, fase governada pela ação catenária, experimentais e numéricas indica consistência na formulação implementada, no que se refere aos ensaios em questão.

Por fim, os níveis de dano nas rótulas inelásticas e axial observados numericamente ao fim da simulação são apresentados na Figura 38 a seguir.

**Figura 38** – Distribuição das variáveis de dano nos modelos (a) S1 e (b) S2 ao término da simulação numérica.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Verifica-se que os danos nas rótulas atingiram valores que indicam a degradação completa da capacidade resistente à flexão nas extremidades do elemento estrutural. Porém, os danos axiais apresentam valores significativamente inferiores se comparados com os valores à flexão, podendo indicar que, embora a ação catenária tenha contribuído para a resistência residual em grandes deslocamentos, o mecanismo que predominou em relação à deterioração estrutural permaneceu associado à formação e evolução das rótulas inelásticas.

Por fim, uma comparação entre os modelos S1 e S2 mostra que o ensaio S2 apresentou dano axial, aproximadamente, 24,2% superior ao ensaio S1, o que sugere uma participação maior dos esforços de tração na resistência residual em S2.

De modo geral, os resultados alcançados numericamente apresentaram boa concordância com o que foi observado por Yu e Tan (2013). As simulações foram capazes de reproduzir, coerentemente, as respostas dos modelos S1 e S2, uma vez que conseguiram captar a formação de rótulas inelásticas e a redução da resistência devido à degradação à flexão do elemento, bem como a posterior recuperação da capacidade resistente resultante da ação catenária.

Os elevados níveis de dano à flexão observados nas extremidades dos elementos, juntamente com a evolução do dano axial, sugerem que a resistência residual foi governada pela capacidade das armaduras em desenvolver esforços de tração. Tal comportamento foi observado experimentalmente por Yu e Tan (2013).

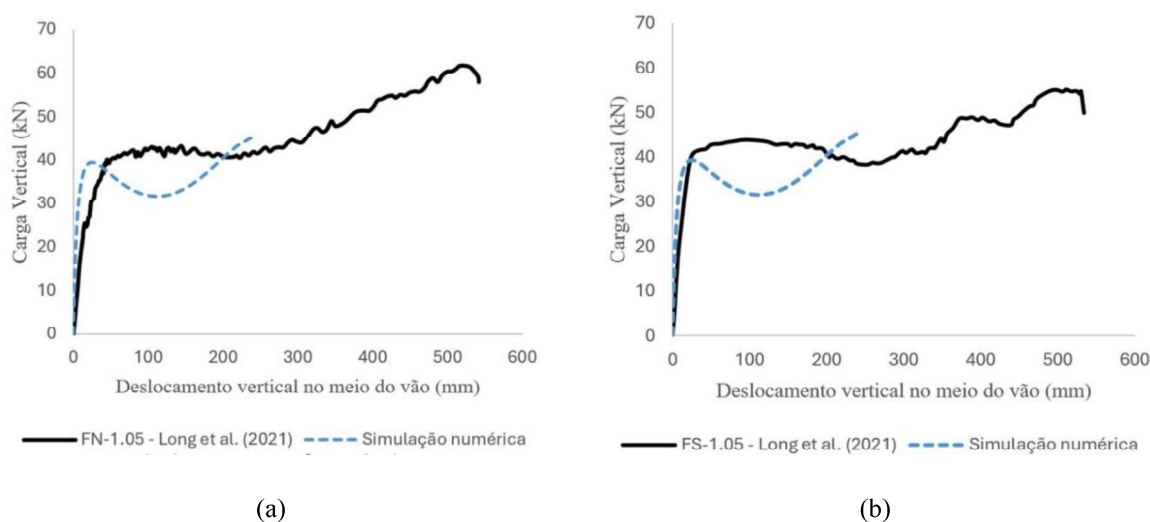
#### 5.1.2 Validação com os experimentos de Long *et al.* (2021)

A fim de ampliar o processo de validação da formulação numérica, foram feitas simulações baseadas nos ensaios experimentais desenvolvidos por Long *et al.* (2021). Neste

caso, os autores analisaram a resposta de subestruturas de concreto armado submetidas a situações de perda de apoio. Para tanto, avaliaram a influência da variação de diferentes taxas de armadura longitudinal e configurações estruturais na capacidade resistente e, também, no desenvolvimento da ação catenária.

Os modelos em questão foram designados como FN-1.05, FS-1.05, FS-1.43, FS-1.43E e FS-1.86E, e suas propriedades geométricas, condições de contorno e propriedades mecânicas foram definidas conforme mostrado na seção 3.1. As Figuras 39a e 39b apresentam as comparações entre as curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas para os modelos FN-1.05 e FS-1.05, respectivamente.

**Figura 39** – Curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) FN-1.05 e (b) FS-1.05.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

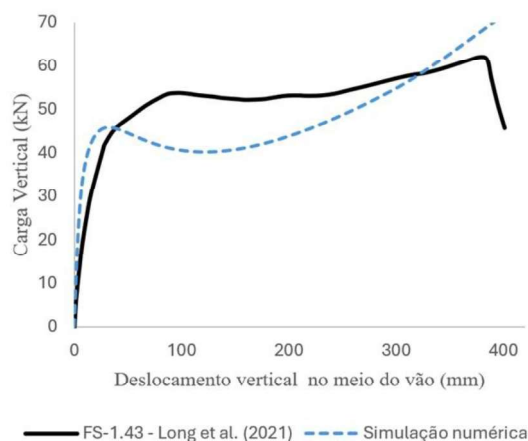
É possível observar que o modelo numérico reproduziu de forma satisfatória a fase inicial de carregamento da estrutura. Entretanto, distanciando-se do mostrado pelos experimentos, o modelo numérico interrompe sua análise para deslocamentos inferiores aos registrados por Long *et al.* (2021), o que limitou a representação completa da fase de ação catenária.

As variáveis de dano associadas às rótulas inelásticas atingiram valores de 0,97381 e 0,98422 ao final da simulação, porém o dano axial não foi captado pelo modelo durante toda a análise. Assim, a ação catenária não foi mobilizada pela simulação para os ensaios em questão, o que explica a interrupção da curva carga vs. deslocamento em níveis inferiores aos experimentais, o que indica uma limitação na representação da fase final associada à resistência por tração nestes ensaios.



A Figura 40 a seguir mostra a comparação entre as curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas para o modelo FS-1.43.

**Figura 40** – Curvas carga vs. deslocamento experimental e numérica do modelo FS-1.43.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Observa-se que o modelo numérico, mais uma vez, apresenta uma rigidez inicial pouco superior ao que é observado no modelo experimental, o que evidencia a tendência da modelagem em superestimar a rigidez nos estágios iniciais de carregamento e subestimar o pico inicial de resistência. Tal fenômeno pode ter como causa a consideração de condições de contorno ideais no modelo, bem como a não consideração de microfissurações prévias presentes no modelo real.

Do ponto de vista global, a simulação reproduziu de forma satisfatória a tendência de resposta da estrutura, uma vez que se pode identificar as fases relativas à rigidez inicial, a degradação da capacidade resistente e o desenvolvimento da ação catenária. Por outro lado, na região intermediária da curva a simulação apresentou uma redução maior da resistência em comparação com a curva experimental.

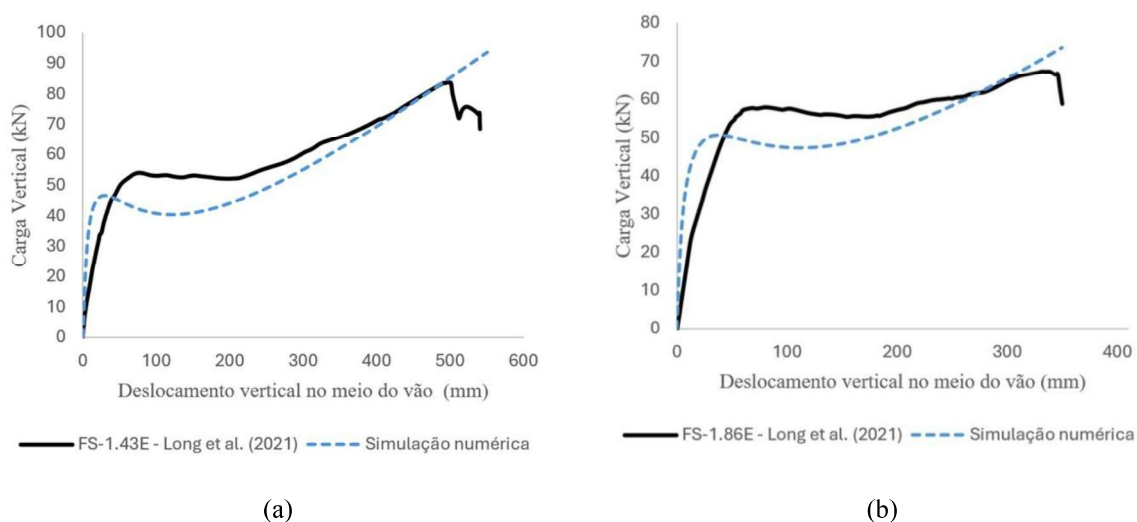
Considerando a região relativa a grandes deslocamentos, verifica-se certa concordância entre as curvas, o que evidencia a capacidade do modelo em representar, ao menos em parte, a mobilização dos esforços axiais que são responsáveis pela resistência residual da estrutura analisada. Observa-se, também, que o modelo superestimou a carga resistente, indicando que a formulação adotada considerou uma contribuição maior dos mecanismos relativos à ação catenária.

Com relação às variáveis de dano à flexão, seus valores foram iguais a 0,972786 e 0,987364 nas extremidades do elemento, o que indica a ocorrência de elevada degradação da

capacidade resistente à flexão. Por outro lado, muito embora a curva numérica tenha apresentado crescimento da carga em grandes deslocamentos, a variável de dano axial não foi ativada na simulação, tal qual ocorrido com os ensaios FN-1.05 e FS-1.05.

A seguir são mostradas as curvas carga vs. deslocamento obtidas para os modelos FS-1.43E e FS-1.86E (Figura 41). Tais ensaios apresentaram maior capacidade resistente bem como um desenvolvimento mais expressivo da ação catenária se comparados com os modelos anteriores (FN-1.05, FS-1.05 e FS-1.43).

**Figura 41** – Curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) FS-1.43E e (b) FS-1.86E.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Para o ensaio FS-1.43E, o modelo numérico reproduziu de forma adequada a tendência da resposta estrutural, principalmente no que se refere à ação catenária. Na região situada após a transição entre os esforços de flexão e axial, as curvas se sobrepõem para deslocamentos superiores a 400 mm, aproximadamente. Por outro lado, na região que caracteriza o final do carregamento, a simulação superestimou a capacidade resistente da estrutura e não foi capaz de reproduzir a queda abrupta observada no experimento, o que sugere que os mecanismos responsáveis pela ruptura final do elemento não foram devidamente capturados pela simulação. Apesar disso, a mobilização dos esforços axiais e a resposta global da estrutura foi representada de forma satisfatória.

Já para o ensaio FS-1.86E, de maneira geral, verifica-se boa aderência entre as curvas carga vs. deslocamento, principalmente na região em que se desenvolve a ação catenária, muito embora a simulação tenha apresentado rigidez inicial superior à observada no experimento. Da

mesma forma que o ocorrido para o ensaio FS-1.43E, observou-se certa aproximação das curvas para deslocamentos elevados.

Considerando a fase final da simulação, o modelo numérico retornou valores de resistência superiores aos observados experimentalmente e não foi capaz de reproduzir a queda acentuada da capacidade resistente após a carga máxima. Por outro lado, o modelo conseguiu capturar o comportamento associado à ação catenária.

A Tabela 12 apresenta uma síntese dos principais resultados obtidos para os experimentos de Long *et al.* (2021).

**Tabela 12** – Resumo dos resultados experimentais e numéricos dos modelos de Long *et al.* (2021).

| <b>Modelo</b> | <b>Pico inicial<br/>experimental<br/>(kN)</b> | <b>Pico inicial<br/>numérico<br/>(kN)</b> | <b>Carga final<br/>experimental<br/>(kN)</b> | <b>Carga final<br/>numérico<br/>(kN)</b> |
|---------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------|
| FN-1.05       | 43,9                                          | 39,4                                      | 61,6                                         | -                                        |
| FS-1.05       | 43,9                                          | 39,4                                      | 54,7                                         | -                                        |
| FS-1.43       | 53,8                                          | 45,9                                      | 62,1                                         | 70,0                                     |
| FS-1.43E      | 54,1                                          | 46,7                                      | 83,5                                         | 85,4                                     |
| FS-1.86E      | 57,9                                          | 50,7                                      | 67,1                                         | 73,6                                     |

Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Em todos os modelos analisados, a formulação numérica adotada apresentou uma subestimação (entre 10% e 17%) dos resultados relativos ao pico inicial de resistência, o que pode indicar uma tendência de previsão de resistência inicial inferior à observada nos ensaios. Ainda assim, pode-se considerar que os erros são uniformes entre os diferentes ensaios.

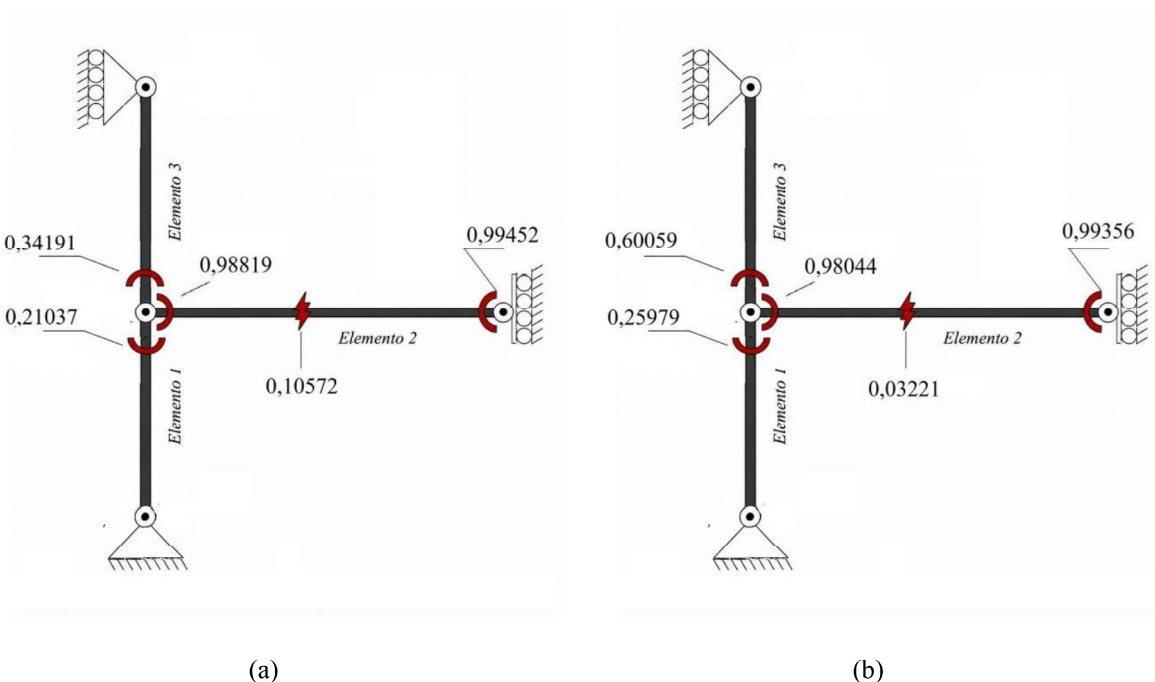
Como as simulações relativas aos ensaios FN-1.05 e FS-1.05 não conseguiram representar toda a evolução dos experimentos, não foi possível comparar os valores de carga final, muito embora os picos iniciais de resistência tenham sido reproduzidos de forma satisfatória. Como a ação catenária não foi capturada pela análise numérica, nesses modelos não foram observadas as evoluções dos danos axiais.

Por outro lado, os modelos FS-1.43, FS-1.43E e FS-1.86E apresentaram desenvolvimento completo da resposta da estrutura até a finalização do carregamento. De forma global, as curvas apresentaram tendências satisfatórias, com pequenas diferenças nos valores de carga máxima.

Especificamente, o modelo FS-1.43E apresentou a melhor aderência com os valores experimentais, com erro da ordem de 2,3% na carga final. Já os modelos FS-1.43 e FS-1.86E apresentaram valores finais superestimados em, aproximadamente, 12,7% e 9,7%, respectivamente.

Por fim, os níveis de dano nas rótulas inelásticas e axial observados numericamente ao fim das simulações para os ensaios FS-1.43E e FS-1.86E são apresentados na Figura 42 abaixo.

**Figura 42** – Distribuição das variáveis de dano nos modelos (a) FS-1.43E e (b) FS-1.86E.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

De acordo com os dados mostrados na Figura 41a, para o modelo FS-1.43E, observa-se que os danos localizados nas rótulas inelásticas da viga atingiram valores que indicam a degradação completa da capacidade resistente à flexão do elemento. Por outro lado, os níveis de dano relativos às rótulas associadas aos pilares apresentaram-se com valores inferiores, indicando uma menor participação desses elementos no processo de degradação estrutural.

Pode-se verificar, diferentemente dos modelos FN-1.05, FS-1.05 e FS-1.43, a evolução da variável de dano axial que, neste caso, atingiu valor final de 0,10572. Tal valor de dano, embora reduzido, demonstra que, para este modelo numérico, os mecanismos relativos aos esforços normais foram mobilizados.

Para o modelo FS-1.86E, os danos relativos às rótulas inelásticas da viga assumiram valores iguais a 0,98044 e 0,99356 ao final da simulação, evidenciando a degradação completa

da resistência à flexão. Já os danos nos elementos de pilar, tal qual observado no modelo FS-1.43E, assumiram valores inferiores (0,60059 e 0,25979). Já o dano axial, na simulação numérica, apresentou valor significativamente inferior quando comparado com os danos à flexão. Isso pode indicar que a resistência associada à ação catenária foi muito pouco afetada ao longo da análise, resultando numa superestimação da resistência final.

Por fim, os modelos FS-1.43E e FS-1.86E foram os únicos desta série em que se capturou a evolução da variável de dano axial, mesmo que com valores relativamente pequenos. Por outro lado, tais simulações apresentaram resultados numéricos e experimentais aproximados, principalmente na fase de grandes deslocamentos.

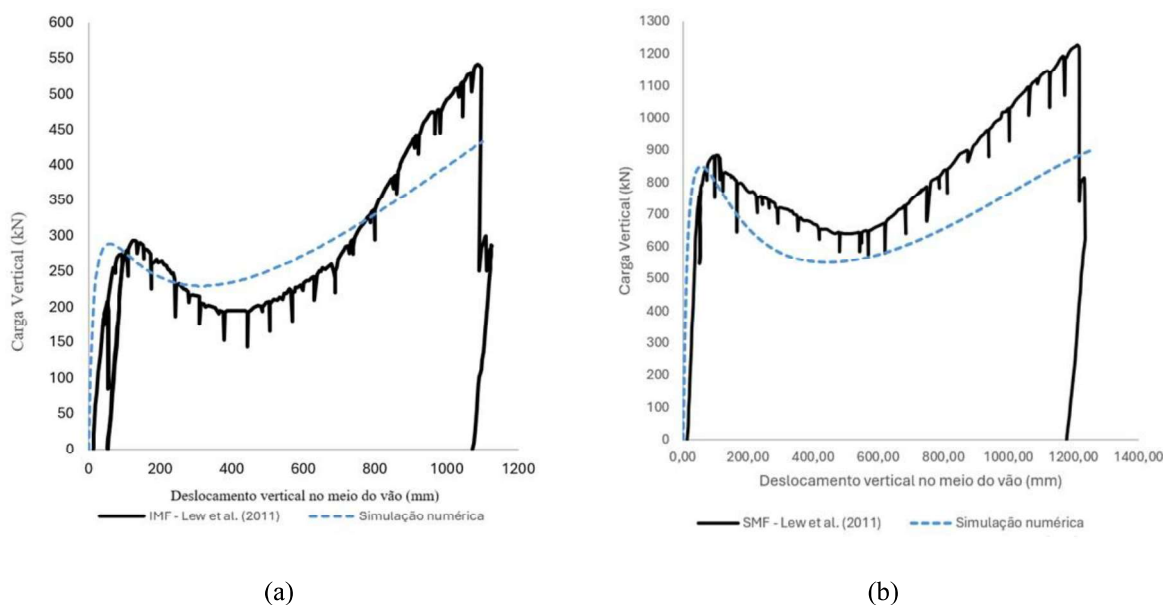
Os resultados numéricos alcançados nesta etapa apresentaram, em parte, boa aderência com os resultados experimentais de Long *et al.* (2021), uma vez que os modelos FN-1.05 e FS-1.05 tiveram suas simulações interrompidas antes da evolução completa observada nos experimentos. Já nos outros modelos, verificou-se boa aderência entre as respostas experimental e numérica, especialmente no que se refere à ação catenária.

### 5.1.3 Validação com os experimentos de Lew *et al.* (2011)

Para validação do modelo numérico a partir dos experimentos de Lew *et al.* (2011), utilizou a discretização mostrada na Figura 35b, bem como as propriedades geométricas e mecânicas, e condições de contorno descritas no Capítulo 3. Os experimentos, designados como IMF e SMF, retratam pórticos de concreto armado submetidos à cenários de retirada súbita de colunas, a fim de proceder com a avaliação da capacidade do modelo em reproduzir a redistribuição dos esforços, bem como a degradação da rigidez e o desenvolvimento de mecanismos de resistência durante o colapso progressivo.

A Figura 43 apresenta as comparações entre as curvas carga vs. deslocamento resultantes dos experimentos e das simulações numéricas realizadas para os modelos IMF e SMF.

**Figura 43** – Curvas carga vs. deslocamento experimentais e numéricas dos modelos (a) IMF e (b) SMF.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

A partir da análise da Figura 42a verifica-se que a formulação reproduziu a tendência global em termos de resposta estrutural, uma vez que se identificou claramente as fases relativas à rigidez inicial, à degradação da capacidade resistente e, posteriormente, a ação catenária para o modelo IMF. Além disso, a tendência de crescimento da carga em função dos esforços axiais foi representada adequadamente pelo modelo, evidenciando sua capacidade de simular os mecanismos resistentes envolvidos no processo de colapso progressivo deste ensaio.

Algumas discrepâncias, porém, foram observadas na região de grandes deslocamentos, na qual o modelo numérico subestimou a resistência final da estrutura. Enquanto o experimento atinge valores próximos a 540 kN, o modelo numérico alcança 431 kN, aproximadamente. Assim, muito embora o modelo tenha representado o comportamento dos esforços axiais e a recuperação da resistência dada pela ação catenária, a magnitude dessa contribuição acabou sendo inferior à observada pelo experimento.

O comportamento do modelo SMF, mostrado na Figura 43b, se apresenta com características similares às observadas no modelo IMF. Porém as cargas para este modelo são significativamente maiores, o que resultou numa discrepância mais evidente na fase final do carregamento.

De forma global, o modelo numérico reproduziu as fases da resposta estrutural de forma adequada. Entretanto, houve uma subestimação da resistência na região intermediária e,

também, nos grandes deslocamentos. A Tabela 13 apresenta uma síntese dos principais parâmetros obtidos experimentalmente e numericamente para os modelos de Lew *et al.* (2011).

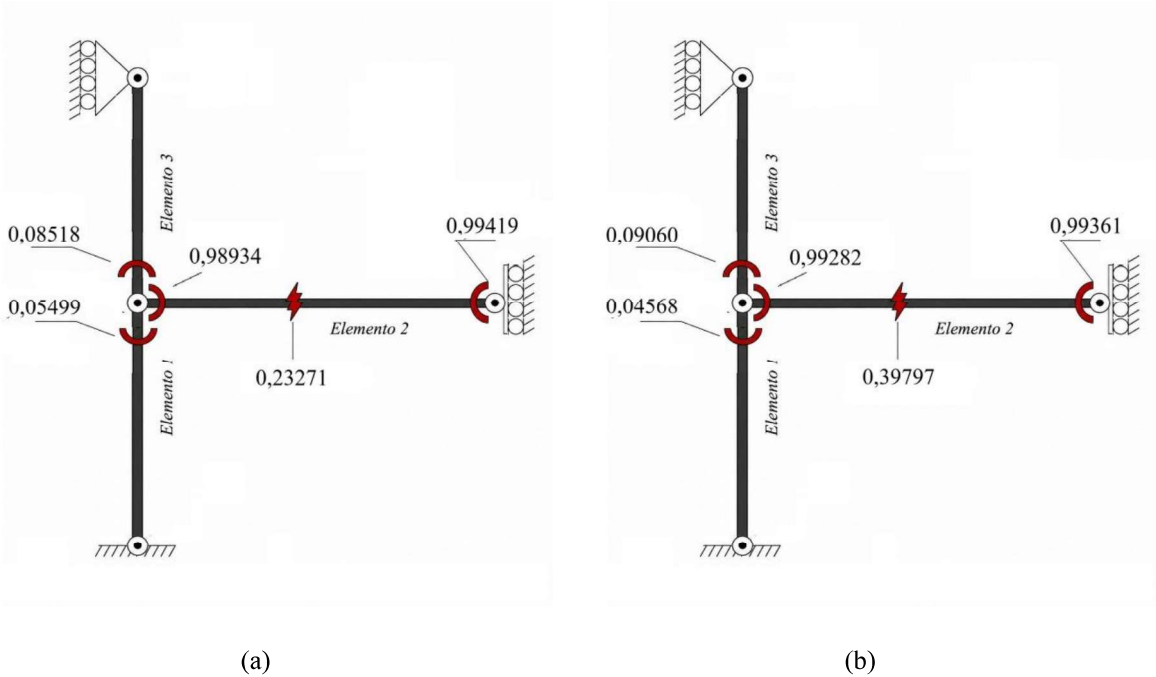
**Tabela 13** – Resumo dos resultados experimentais e numéricos dos modelos de Lew *et al.* (2011).

| Modelo | Pico inicial experimental (kN) | Pico inicial numérico (kN) | Carga final experimental (kN) | Carga final numérico (kN) |
|--------|--------------------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| IMF    | 291,3                          | 288,4                      | 539,7                         | 430,7                     |
| SMF    | 882,3                          | 840,5                      | 1222,6                        | 896,9                     |

Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Como resultado da análise numérica, os níveis de dano relativos aos modelos IMF e SMF são mostrados na Figura 44.

**Figura 44** – Distribuição das variáveis de dano nos modelos (a) IMF e (b) SMF.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

De acordo com os dados mostrados na Figura 44, observa-se que, após a formação das rótulas inelásticas, a resistência residual do elemento estrutural passa a ser governada pelos esforços axiais em decorrência da ação catenária. Como a capacidade resistente do modelo SMF é maior, conforme mostrado na Figura 43b, é coerente que o valor de dano axial neste modelo também seja maior (Figura 44b).

## 5.2 Avaliação da formulação proposta

Com a validação do modelo numérico a partir dos estudos experimentais de Yu e Tan (2013), Long *et al.* (2021) e Lew *et al.* (2011) é possível proceder com a avaliação do desempenho da formulação proposta neste trabalho. O objetivo é analisar se a modificação proposta na função de escoamento foi capaz de melhorar a descrição dos mecanismos de resistência inerentes ao colapso progressivo. Especial atenção se deve à transição entre a fase governada pela flexão e a mobilização da ação catenária.

Dessa forma, a análise da formulação foi feita a partir da interpretação conjunta das curvas carga *vs.* deslocamento e dos níveis finais de dano à flexão e axial, bem como da capacidade do modelo em reproduzir a resistência residual observada nos experimentos. O intuito é não somente discutir a aproximação dos resultados numéricos e experimentais de forma quantitativa, mas também se há coerência física entre as variáveis internas do modelo ao longo da evolução do dano estrutural.

### 5.2.1 Influência do parâmetro adicional $\gamma$ na resposta numérica

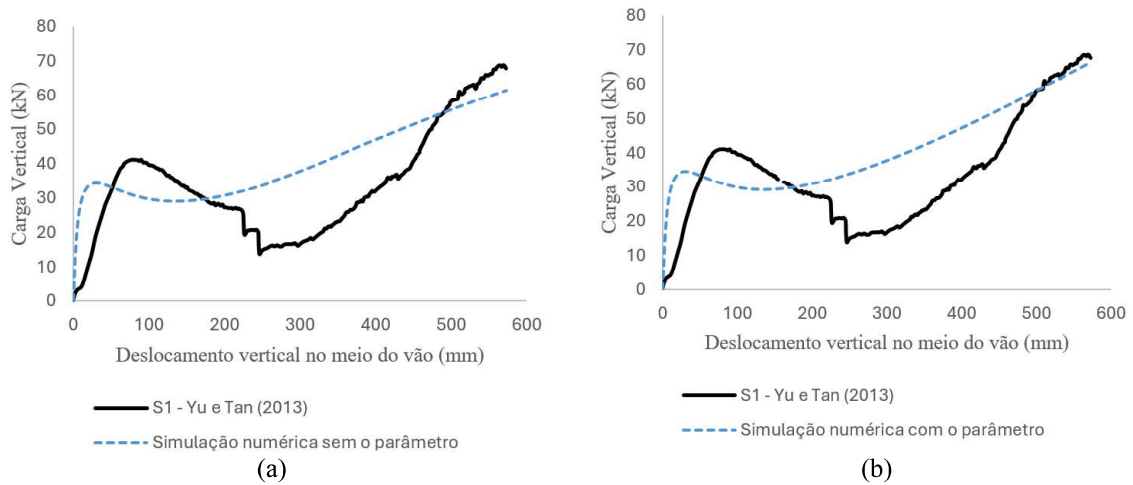
A inclusão do parâmetro adicional  $\gamma$  consistiu na principal modificação introduzida na formulação. O objetivo foi controlar a influência do dano axial na degradação da capacidade resistente do elemento estrutural.

Verificou-se, com a análise paramétrica mostrada no Capítulo 4, que a variação do parâmetro  $\gamma$  influenciou diretamente na resposta global do modelo, uma vez que reduziu a influência do dano axial sobre a função de escoamento. Isso resultou em maiores níveis de resistência residual durante a fase da ação catenária e possibilitou uma aproximação entre os resultados numéricos e experimentais.

Sendo assim, o valor  $\gamma = 3,5$  adotado nas simulações deste trabalho foi capaz de representar o início da região de estabilização da resposta estrutural, resultando em valores finais de carregamentos próximos aos experimentais. Nesse contexto, a modificação mostrou-se capaz de, ao menos em parte, melhorar a representação da resistência residual da estrutura, principalmente nas fases em que a ação catenária tem papel predominante na redistribuição dos esforços, conforme mostrado na Figura 45 a seguir.



**Figura 45** – Comparação entre as formulações para o modelo S1 de Yu e Tan (2013).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Observa-se que ambas as formulações conseguem reproduzir adequadamente o comportamento global da estrutura durante as fases iniciais do carregamento. Porém, algumas diferenças podem ser notadas na fase final da análise, ou seja, onde há predominância da ação catenária. Na Figura 45a a resistência residual foi subestimada, apresentando valores inferiores aos observados nos experimentos. Já com a introdução do parâmetro  $\gamma$  (Figura 45b) observou-se um aumento da capacidade resistente residual e, também, uma melhor aproximação da resposta numérica em relação aos resultados experimentais.

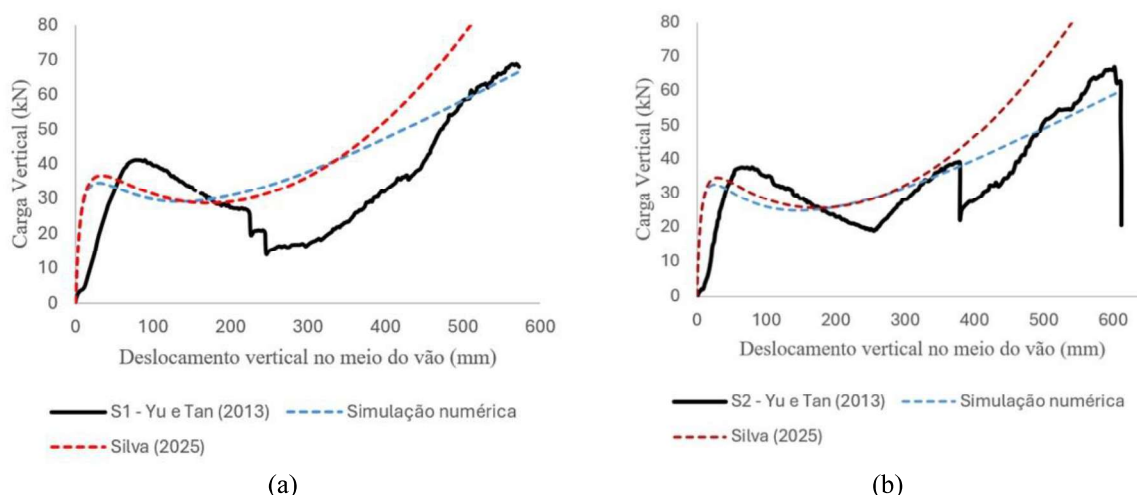
Para pequenos deslocamentos, o parâmetro  $\gamma$  não alterou significativamente a resposta da estrutura, ou seja, sua influência foi concentrada na fase em que os esforços de tração são predominantes. Assim, a modificação teve atuação específica sobre os mecanismos associados à ação catenária e contribuiu para uma representação mais adequada da resistência residual do elemento.

### 5.2.2 Comparações entre a formulação original e a formulação proposta

A fim de avaliar a contribuição da modificação imposta à função de escoamento axial, foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos pela formulação proposta neste trabalho e os produzidos pela formulação apresentada por Silva (2025). A primeira comparação foi feita com a utilização dos modelos S1 e S2 de Yu e Tan (2013), sendo o S1 adotado como referência na análise paramétrica do parâmetro adicional  $\gamma$ .

A Figura 46 apresenta a comparação entre as curvas carga vs. deslocamento obtidas experimentalmente, pela formulação de Silva (2025) e pela formulação proposta neste trabalho para os modelos S1 e S2.

**Figura 46** – Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) S1 e (b) S2 de Yu e Tan (2013).



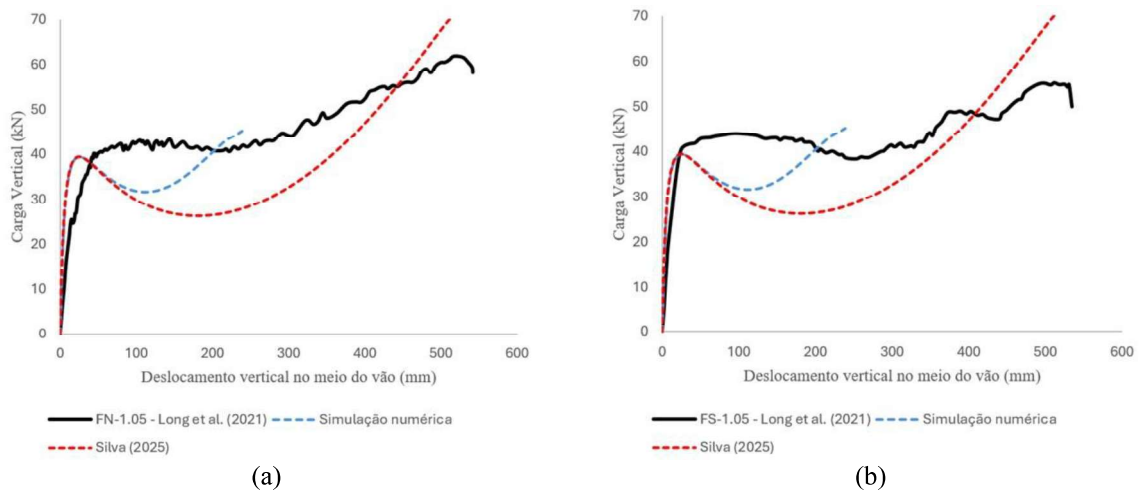
Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Conforme pode ser observado nas Figuras 45a e 45b, ambas as formulações foram capazes de reproduzir o comportamento estrutural durante as fases iniciais do carregamento, demonstrando comportamento semelhante até a formação das rótulas inelásticas. Porém, na fase correspondente à ação catenária, algumas diferenças de comportamento são observadas.

Para estes modelos, a formulação proposta apresentou melhor aproximação em relação aos resultados do experimento na fase de grandes deslocamentos, reproduzindo de forma mais consistente o comportamento da resistência residual observada no ensaio. A formulação de Silva (2025) acabou superestimando a capacidade resistente da estrutura nesta mesma fase, resultando em valores de carga superiores ao observados experimentalmente.

A Figura 47 a seguir mostra os resultados experimentais, pela formulação de Silva (2025) e pela proposta neste trabalho obtidos nos modelos de Long *et al.* (2021) nos modelos FN-1.05 e FS-1.05. Nela é possível observar que a formulação proposta não foi capaz de reproduzir integralmente a resposta dos experimentos, enquanto a formulação de Silva (2025) apresentou maior capacidade de acompanhar o comportamento estrutural ao longo de todo o carregamento, o que resultou numa representação mais satisfatória em relação ao observado experimentalmente.

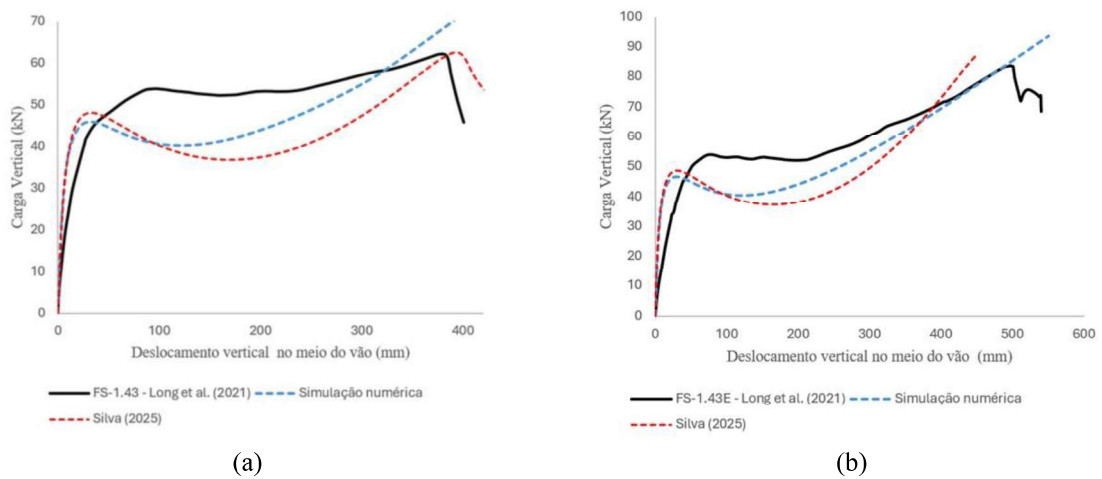
**Figura 47** – Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) FN-1.05 e (b) FS-1.05 de Long *et al.* (2021).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

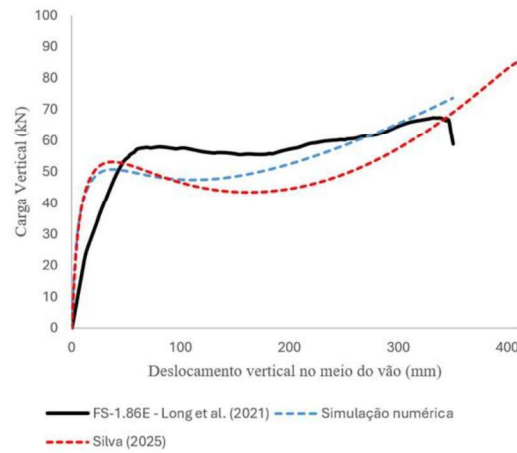
Para os ensaios FS-1.43 e FS-1.43E a principal diferença está na forma como as formulações acompanharam a evolução da resistência residual, sendo levemente subestimada na formulação de Silva (2025). Neste quesito, o parâmetro  $\gamma$  contribuiu para uma representação mais consistente dos mecanismos de resistência na fase de ação catenária, conforme Figura 48 abaixo. Análise similar pode ser feita para o ensaio FS-1.86E mostrado na Figura 49.

**Figura 48** – Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) FS-1.43 e (b) FS-1.43E de Long *et al.* (2021).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

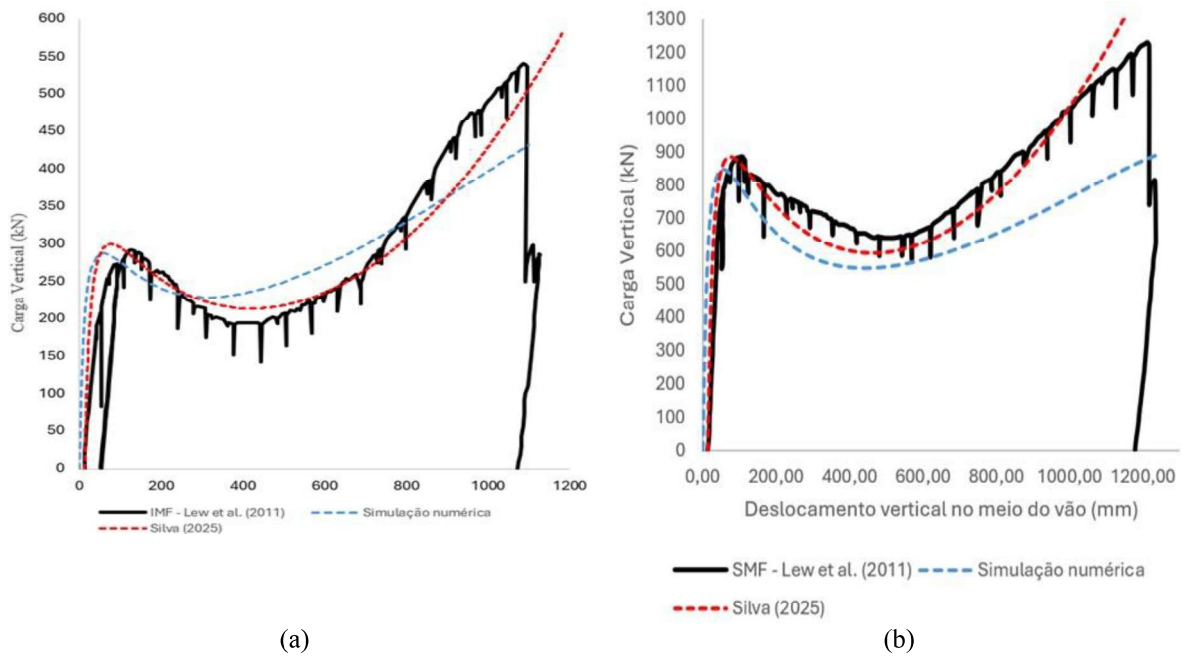
**Figura 49** – Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos FS-1.86E de Long *et al.* (2021).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Por fim, a comparação para os resultados obtidos com as simulações para os ensaios de Lew *et al.* (2011) demonstra que a formulação proposta neste trabalho subestima a capacidade resistente final do elemento estudado em ambos os casos, enquanto a solução proposta por Silva (2025) apresenta melhor aderência ao modelo experimental, principalmente em relação ao modelo IMF.

**Figura 50** – Comparação entre as formulações original e proposta para os modelos (a) IMF e (b) SMF de Lew *et al.* (2011).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

## 6 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver e avaliar uma formulação baseada na MDC para a análise numérica do colapso progressivo de estruturas de concreto armado, com ênfase na representação dos mecanismos resistentes associados à ação catenária. Para tanto, foi proposto um modelo numérico com a finalidade de simular a evolução do dano e a formação das rótulas inelásticas, bem como a redistribuição de esforços provenientes da perda súbita de elementos estruturais. Assim, à função de escoamento foi introduzido um parâmetro  $\gamma$  com o objetivo de melhorar a representação da perda da capacidade resistente durante a ação catenária.

O modelo numérico apresentou capacidade de reproduzir os resultados experimentais de Yu e Tan (2013), Long *et al.* (2021) e Lew *et al.* (2011), uma vez que conseguiu representar, ao menos em parte, a resposta global das estruturas submetidas a situações de perda súbita de apoio. De modo geral, houve certa concordância entre as curvas carga *vs.* deslocamento experimentais e numéricas, muito embora tenham sido verificadas algumas diferenças na rigidez inicial e na capacidade resistente de alguns ensaios. Além disso, o modelo foi capaz de representar os estágios de degradação progressiva da estrutura, a formação das rótulas inelásticas, a redistribuição dos esforços internos e a resistência residual.

A introdução do parâmetro  $\gamma$  na função de escoamento axial propiciou o controle da influência do dano axial em relação à capacidade resistente da estrutura. Isso colaborou com a melhoria na representação da resistência residual observada nos experimentos. Além disso, a variação desse parâmetro atuou diretamente na resposta estrutural, conforme visto na análise paramétrica, principalmente durante a fase da ação catenária. Outro fator importante é que a modificação proposta conseguiu melhorar a representação da resposta estrutural sem alterar os fundamentos da MDC.

Os resultados demonstraram, ainda, que a formulação proposta conseguiu simular a transição entre os mecanismos relativos à flexão e os relativos aos esforços normais de tração. Isso fez com que a reprodução da mobilização da ação catenária, observada experimentalmente, fosse adequada.

Quanto às variáveis de dano, sua evolução se apresentou de forma coerente com os mecanismos observados nos experimentos. Verificou-se que houve uma maior evolução do dano axial nos modelos que apresentaram maior mobilização da ação catenária e maiores deslocamentos finais.

Assim, de modo geral, a formulação aqui proposta apresenta-se, até certo ponto, adequada para a análise numérica de colapso progressivo em estruturas de concreto armado, uma vez que permite representar de forma coerente os mecanismos de degradação, redistribuição de esforços e evolução da ação catenária.

### **6.1 Recomendações para trabalhos futuros**

Embora os resultados obtidos neste trabalho tenham demonstrado capacidade em representar os mecanismos envolvidos no colapso progressivo, algumas questões podem ser aprofundadas em pesquisas futuras. Assim, é recomendável a ampliação da base de experimentos utilizada para validação do modelo, inserindo configurações estruturais distintas, bem como variadas taxas de armadura e níveis de carregamentos, a fim de avaliar a aderência da formulação em um conjunto mais abrangente de situações.

Interessante é, também, a aplicação do modelo em estruturas tridimensionais e a consideração da interação entre os elementos de viga, lajes e pilares. Assim seria possível investigar outros mecanismos que atuam na redistribuição de esforços, aumentando o entendimento sobre como os elementos estruturais contribuem para a resistência ao colapso progressivo.

Por fim, é recomendável a realização de análises adicionais que contemplem a influência do parâmetro  $\gamma$  em diferentes tipologias de estruturas e condições de carregamento, a fim de contribuir para o estabelecimento de critérios mais amplos para sua utilização em análises relativas ao colapso progressivo fundamentadas na MDC.

## REFERÊNCIAS

- ADAM, José M.; PARISI, Fulvio; SAGASETA, Juan; LU, Xinzhen. **Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century.** Engineering Structures, v. 173, p. 122–149, 2018. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.06.082.
- AMORIM, David Leonardo Nascimento de Figueiredo. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses:** new developments and applications. 2016. 187 f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- ASCE - AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **ASCE/SEI 7-05:** Minimum design loads for buildings and other structures. Reston: ASCE, 2006.
- CALLISTER, William D.; RETHWISCH, David G. **Ciência e engenharia de materiais:** uma introdução. Tradução de Sérgio Murilo Stamile Soares. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 912 p.
- CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. **A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames.** Computers & Structures, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995. DOI: 10.1016/0045-7949(94)00394-I
- CPNI - CENTRE FOR THE PROTECTION OF NATIONAL INFRASTRUCTURE. **Review of international research on structural robustness and disproportionate collapse.** London: Queens Printer and Controller of Her Majesty's Stationery Office, 2011.
- DIETER, George E. **Metalurgia mecânica.** Tradução de Antônio Sérgio de Souza e Silva, Luiz Henrique de Almeida e Paulo Emílio Valadão de Miranda. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- ELKADY, Nada; AUGUSTHUS NELSON, Levingshan; WEEKES, Laurence; MAKOOND, Nirvan; BUITRAGO, Manuel. **Progressive collapse:** past, present, future and beyond. Structures, v. 62, art. 106131, 2024. DOI: 10.1016/j.istruc.2024.106131.
- ELLINGWOOD, Bruce R. *et al.* **Best practices for reducing the potential for progressive collapse in buildings.** NISTIR 7396. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology, 2007.
- FLÓREZ-LÓPEZ, Julio; MARANTE, María Eugenia; PICÓN, Ricardo. **Fracture and damage mechanics for structural engineering of frames:** state-of-the-art industrial applications. Hershey: IGI Global, 2015.
- GRIFFITH, A. A. **The phenomena of rupture and flow in solids.** *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, London, v. 221, p. 163–198, 1921.
- GSA - GENERAL SERVICES ADMINISTRATION. **Alternate Path Analysis & Design Guidelines for Progressive Collapse Resistance.** Revisão 1, 2016.

HERTZBERG, Richard W.; VINCI, Richard P.; HERTZBERG, Jason L. **Deformation and fracture mechanics of engineering materials**. 5. ed. Hoboken: Wiley, 2012. 800 p.

IZZUDDIN, B. A.; VLASSIS, A. G.; ELGHAZOULI, A. Y.; NETHERCOT, D. A. **Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss – Part I: Simplified assessment framework**. *Engineering Structures*, v. 30, n. 5, p. 1308–1318, 2008.

KIAKOJOURI, Foad; DE BIAGI, Valerio; CHIAIA, Bernardino; SHEIDAI, Mohammad Reza. **Progressive collapse of framed building structures: current knowledge and future prospects**. *Engineering Structures*, v. 202, art. 110968, 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.110968.

KIM, Jinkoo; KIM, Taewan. **Assessment of progressive collapse-resisting capacity of steel moment frames**. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 65, n. 1, p. 169–179, 2009.

KUNNATH, Sashi K.; BAO, Yihai; EL-TAWIL, Sherif. **Advances in computational simulation of gravity-induced disproportionate collapse of RC frame buildings**. *Journal of Structural Engineering*, v. 144, n. 2, art. ST.1943-541X.0001938, 2018. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001938.

LALKOVSKI, Nikolay; STAROSSEK, Uwe. **The total collapse of the Twin Towers: what it would have taken to prevent it once collapse was initiated**. *Journal of Structural Engineering*, v. 148, n. 6, art. ST.1943-541X.0003244, 2022. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003244.

LEMAITRE, Jean; DESMORAT, Rodrigue. **Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures**. Berlin: Springer, 2005. 376 p.

LEW, H. S.; BAO, Y.; SADEK, F.; MAIN, J. A.; PUJOL, S.; SOZEN, M. A. **An experimental and computational study of reinforced concrete assemblies under a column removal scenario**. NIST Technical Note 1720. National Institute of Standards and Technology. U. S. Department of Commerce, 2011.

LONG, X.; WANG, S.; HUANG, X.-J.; LI, C.; KANG, S.-B. **Progressive collapse resistance of exterior reinforced concrete frames and simplified method for catenary action**. *Engineering Structures*, v. 249, 113316, 2021. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113316

MCKENZIE, Graeme; SAMALI, Bijan; ZHANG, Chunwei. **Review collapse mechanisms causing damage from controlled and uncontrolled demolitions**. *International Journal of GEOMATE*, v. 17, n. 59, p. 197–203, 2019. DOI: 10.21660/2019.59.75784.

NIST - NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY. **Final report on the collapse of the World Trade Center towers**. NIST NCSTAR 1, 2005.

PALMISANO, Fabrizio. **Mitigation of progressive collapse by the activation of the elastoplastic catenary behaviour of R.C. slab structures**. *Open Construction and Building Technology Journal*, v. 8, p. 122–130, 2014. DOI: 10.2174/1874836801408010122.

PRAXEDES, Conrado; YUAN, Xian-Xun; HE, Xiao-Huang-Can. **A novel robustness index for progressive collapse analysis of structures considering the full risk spectrum of**



**damage evolution.** Structure and Infrastructure Engineering, v. 18, n. 3, p. 376–394, 2021. DOI: 10.1080/15732479.2020.1851730.

SILVA, Leonardo Andrade Bispo. **Contribuições à mecânica do dano concentrado para análises de pórticos planos.** Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2025.

STAROSSEK, Uwe. **Progressive collapse of structures.** 2. ed. London: ICE Publishing, 2022.

STAROSSEK, Uwe. **Typology of progressive collapse.** Engineering Structures, v. 29, p. 2302–2307, 2007. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.11.025.

VOYIADJIS, George Z. (Ed.). **Handbook of damage mechanics: nano to macro scale for materials and structures.** New York: Springer, 2015. 1386 p.

YI, Wei-Jian; YI, Fan; ZHOU, Yun. **Experimental studies on progressive collapse behavior of RC frame structures: advances and future needs.** *Steel and Composite Structures*, v. 20, n. 1, p. 1–28, 2016.

YU, J.; TAN, K.-H. **Experimental and numerical investigation on progressive collapse resistance of reinforced concrete beam column sub-assemblages.** Engineering Structures, v. 55, p. 90–106, 2013. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.08.040