



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT



AMINTAS VIEIRA DE SANTANA

Princípios básicos e avançados sobre Análise Combinatória e uma proposta didática com o software *SageMath*

Agosto/2025
Itabaiana - SE



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT



Princípios básicos e avançados sobre Análise Combinatória e uma proposta didática com o software *SageMath*

por

Amintas Vieira de Santana

sob orientação do

Prof. Dr. Fábio Lima Santos

Dissertação de mestrado submetida ao
Corpo Docente do Programa de Mes-
trado Profissional em Matemática da
Universidade Federal de Sergipe como
requisito para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Agosto/2025
Itabaiana-SE.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S232p Santana, Amintas Vieira de.
 Princípios básicos e avançados sobre análise combinatória e uma
 proposta didática com o software SageMath / Amintas Vieira de Santana;
 orientação: Fábio Lima Santos. – Itabaiana, 2025.
 108 f.; il.

 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade
 Federal de Sergipe, 2025.

1. Análise combinatória. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Ensino
 médio. I. Santos, Fábio Lima. (orient.). II. Título.

CDU 519

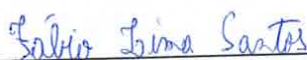
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Princípios básicos e avançados sobre análise combinatória e uma proposta didática com o software SageMath

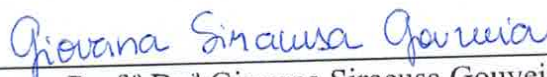
por

Amintas Vieira de Santana

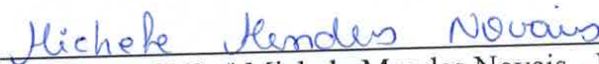
Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fabio Lima Santos - UFS
Orientador



Prof.^a Dr.^a Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Primeiro Examinador



Prof.^a Dr.^a Michele Mendes Novais - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 22 de Agosto de 2025.

Aos meus pais, pois minha vitória é deles.

À minha filha Ana Beatriz, minha maior fonte de inspiração.

À minha esposa Ataciana, parceira de todas as caminhadas.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado força e sabedoria para percorrer esta jornada de dois anos de muito trabalho e empenho.

À minha esposa Ataciana, companheira de todas as horas que dividiu comigo todas as alegrias e tristezas nesta caminhada, sacrificando momentos de lazer e descanso.

À minha filha Ana Beatriz, pela compreensão nos momentos que tive que ficar um pouco ausente no acompanhamento de seus estudos e nos momentos de lazer.

Aos meus pais Antônio e Maria Rosa, aos meus irmãos, meus cunhados e cunhadas, e à minha sogra Maria Amélia, por entenderem que a minha ausência nas reuniões familiares era por uma boa causa.

Agradeço também ao meu orientador, prof. Dr. Fábio Lima Santos, pela confiança e paciência e por sua contribuição essencial para este trabalho. Você é um exemplo de profissional e de ser humano a ser seguido.

À Dra. Giovana Siracusa Gouveia e à Dra. Michele Mendes Novais por terem aceitado o convite para participar da banca cujas contribuições foram de grande valia para melhorar nosso trabalho.

Ao coordenador da Pós-Graduação, Campus Itabaiana, prof. Dr. Éder Mateus de Souza pelo apoio nos momentos mais difíceis, pelas palavras de motivação e por acreditar e torcer pelo meu sucesso.

Agradeço ao prof. Me. Samuel Brito Silva pelas sugestões que contribuíram enormemente para o resultado exitoso deste trabalho e aos professores e professoras do PROF-MAT Campus Itabaiana, Dr. Charles Braga Amorim, Dr. Alejandro Caicedo Roque, Me. Wagner Ferreira Santos, Dra. Marta Élid Amorim Mateus, Dr. Aislan Leal Fontes, Me. Viviane de Jesus Lisboa Aquino, pela dedicação e empenho em compartilhar seus conhecimentos que contribuíram bastante para o nosso crescimento profissional.

Ao colega e meu ex-professor Denival Oliveira Araujo por mostrar a beleza da Matemática.

Aos colegas e amigos Jacson da Silva Santos, Flávio Siqueira de Menezes, Paulo Araújo da Silva, Elton Severino da Silva Dória, José Edi-Ackel Santos, verdadeiros irmãos com os quais dividimos alegrias e muito estudo, e as dezenas de viagens nessa nossa caminhada. A todos meus sinceros agradecimentos.

Ao colega e meu ex-aluno Jaedson dos Santos por acreditar, muitos anos atrás, que os meus ensinamentos matemáticos poderiam mudar a sua vida, não sabendo ele que um

dia estaríamos juntos em uma mesma Pós-Graduação. Ao colega Raimundo, que junto com Jaedson, compartilhamos muitas viagens e dividimos muitas alegrias e desafios.

Ao colega Jean Guilherme da Silva que, graças às suas habilidades, consegui viabilizar os horários que tornaram possível a realização do nosso sonho.

Aos colegas do Centro de Excelência Manoel Messias Feitosa pelas palavras de incentivo.

À diretora Tássia Alexandre Teixeira Bertoldo e às coordenadoras pedagógicas, Aparecida Menezes Lima, Laiz Sousa Oliveira e, em especial, a Aline Maria Braga Santos pela colaboração e compreensão.

Resumo

A *Análise Combinatória* é muitas vezes considerada por alunos e professores um assunto difícil. A dificuldade surge em decorrência da aplicação de métodos e abordagens inadequadas que, ao invés de priorizar o raciocínio, se baseiam quase que exclusivamente em aplicação de fórmulas. Neste trabalho abordamos princípios básicos de contagem tais como os *Bijetivo*, *Aditivo* e *Multiplicativo*, *Permutações* e *Combinações*, simples e com repetição, e também métodos avançados de contagem tais como o *Princípio da Inclusão-Exclusão*, *Permutações Caóticas*, os *Lemas de Kaplansky*, *Contagem via Recorrência*, e o *Princípio da Casa dos Pombos*. Além disso, apresentamos uma seção com estratégias de contagem e outra com os principais erros cometidos durante a resolução de problemas combinatórios. Como aplicação desses conteúdos, incluímos uma seção com problemas resolvidos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares (OBMEP) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Por fim, propomos a utilização de uma ferramenta tecnológica com o objetivo de contribuir para o ensino de *Análise Combinatória* no Ensino Médio. Para isto, foi desenvolvida uma sequência didática com atividades associadas ao software livre *SageMath* o qual exibe na tela todas as configurações possíveis de agrupamentos e conta suas quantidades. As atividades foram elaboradas seguindo um nível crescente de dificuldade permitindo que o aluno construa aos poucos o raciocínio necessário para compreender os conceitos envolvidos e assim, obtenha uma aprendizagem consistente.

Palavras-chave: Ensino de Análise Combinatória, métodos avançados de contagem, problemas olímpicos, estratégias de contagem, análise de erros, Ensino Médio, *Sagemath*, sequência didática.

Abstract

Combinatorial Analysis is frequently regarded by both students and teachers as a challenging subject. This difficulty often stems from the use of inadequate methods and approaches that, rather than fostering logical reasoning, rely almost exclusively on the mechanical application of formulas. In this study, we present fundamental counting principles such as the *Bijjective*, *Additive*, and *Multiplicative Principles*, as well as *Permutations* and *Combinations* (both simple and with repetition). We also explore advanced counting techniques, including the *Inclusion-Exclusion Principle*, *Derangements*, *Kaplansky's Lemmas*, *Recurrence-Based Counting*, and the *Pigeonhole Principle*. Furthermore, we provide a section on counting strategies and another addressing the most common errors encountered in solving combinatorial problems. As an application of these concepts, we include solved problems from the Brazilian Mathematics Olympiad for Public and Private Schools (OBMEP) and the National High School Exam (ENEM). Finally, we propose the integration of a technological tool to support the teaching of Combinatorial Analysis in secondary education. To this end, we developed a didactic sequence of activities using the open-source software *SageMath*, which displays all possible grouping configurations and calculates their quantities. The activities were designed with a progressive level of difficulty, enabling students to gradually build the reasoning required to understand the underlying concepts and thereby achieve consistent learning outcomes.

Key-words: Teaching Combinatorial Analysis, advanced counting methods, olympic problems, counting strategies, error analysis, high school, *SageMath*, teaching sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Partição de X	28
Figura 2 – mesa triangular.	31
Figura 3 – Teclado	35
Figura 4 – mesa triangular.	37
Figura 5 – Esquema bola-traço.	53
Figura 6 – Bijecção multiconjunto sequência ordenada.	54
Figura 7 – Equivalência multiconjunto sequência ordenada.	54
Figura 8 – Brinquedo caminhão-cegonha.	55
Figura 9 – Permutações caóticas.	66
Figura 10 – Bolas e caixas.	66
Figura 11 – Cadeiras numeradas.	68
Figura 12 – 2º Lema de Kaplansky	69
Figura 13 – Pontos no círculo.	79
Figura 14 – Triângulos equiláteros no círculo.	80
Figura 15 – SageMath Cell.	89
Figura 16 – Número de Permutações Simples.	90
Figura 17 – Permutações Simples.	91
Figura 18 – Arranjos Simples.	92
Figura 19 – Número de Combinações Simples.	93
Figura 20 – Combinações Simples.	93
Figura 21 – Número de Permutações com Repetições.	94
Figura 22 – Permutações com Repetições.	94
Figura 23 – Número de Permutações Circulares.	95
Figura 24 – Permutações Circulares.	96
Figura 25 – Número de Combinações Completas.	97
Figura 26 – Combinações Completas.	97
Figura 27 – Permutações Caóticas.	98
Figura 28 – Permutações Simples.	101
Figura 29 – Permutações com elementos repetidos.	105

Lista de tabelas

Tabela 1 – Lista de códigos utilizados nos exemplos.	90
Tabela 2 – Lista de códigos utilizados na proposta didática.	99

Sumário

	Introdução	19
1	SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	21
1.1	Legislação	21
1.2	Estratégias de Contagem	22
1.3	Principais Erros em Contagens	23
1.4	Recomendações	24
2	PRINCÍPIOS BÁSICOS E PADRÕES DE CONTAGEM	27
2.1	O Princípio Bijetivo	27
2.2	O Princípio Aditivo	29
2.3	O Princípio Multiplicativo	33
2.4	Permutações Simples	38
2.5	Permutações Circulares	40
2.6	Combinações Simples	41
2.7	Permutações Com Elementos Repetidos	48
2.8	Combinações Completas (Combinações Com Elementos Repetidos)	51
3	MÉTODOS AVANÇADOS DE CONTAGEM	57
3.1	O Princípio da Inclusão-Exclusão	57
3.2	Permutações Caóticas	62
3.3	Os Lemas de Kaplansky	67
3.4	Contagem Via Recorrência	71
3.5	O Princípio da Casa dos Pombos	74
4	CONTAGEM DE FUNÇÕES	81
5	ANÁLISE COMBINATÓRIA COM O SOFTWARE	
	<i>SAGEMATH</i>	87
5.1	Tecnologias no Ensino e a Legislação Educacional	87
5.2	Apresentando o <i>SageMath</i> e Sua Importância Para o Ensino de Análise Combinatória	88
5.3	Primeiros Passos Com o <i>SageMath</i>	89
5.4	Contagens Com o <i>SageMath</i>	89
5.5	Proposta Didática	98
5.5.1	Aula 1	99

5.5.2	Aula 2	101
5.5.3	Aula 3	104
	Conclusão	107
	REFERÊNCIAS	109

Introdução

Embora a Análise Combinatória represente um caso especial entre outros ramos da Matemática, principalmente por não existir uma teoria axiomática para ela, alguns dos maiores matemáticos estudaram problemas combinatórios. Por classificação axiomática, poderíamos pensar na Análise Combinatória como um capítulo da Teoria dos Números, mas, claramente, a Análise Combinatória lida com tipos de problemas totalmente diferentes.

A Análise Combinatória interage com outras teorias matemáticas, das quais extrai estratégias de resolução de problemas e para as quais fornece resultados. Ela lida com problemas concretos, às vezes fáceis de entender. Essa característica a torna atraente tanto para iniciantes quanto para matemáticos profissionais. Esses tipos de problemas são particularmente úteis quando se aprende ou ensina Matemática.

A Análise Combinatória faz parte do dia a dia das pessoas e às vezes parece um tanto infantil, mas, na verdade, problemas de contagem podem ser bastante profundos e interessantes, e têm muitas conexões com outros ramos da Matemática. Ela também tem aplicações em áreas como Teoria da Codificação, Probabilidade e Estatística (em Matemática) e na Análise de Algoritmos (em Ciência da Computação).

O conteúdo de Análise Combinatória frequentemente enfrenta resistência por parte dos estudantes do Ensino Médio. Uma forma de diminuir essa resistência seria iniciar o assunto com problemas mais atraentes e utilizar princípios ao invés de fórmulas, deixando o uso de fórmulas para o momento que os estudantes já tenham atingido um nível maior de maturidade. Outra coisa que deve ser levado em conta é que classificar os problemas em Permutações, Arranjos e Combinações para depois aplicar uma fórmula não é uma boa ideia pois uma grande parte dos problemas combinatórios não é só de permutação ou só de combinação e, além disso, existem muitos problemas de fácil resolução que são extremamente difícil de resolver através de fórmulas.

Com este trabalho esperamos propor uma metodologia alternativa para uma melhor aprendizagem de Análise Combinatória, proporcionando aos alunos uma maneira de aprender pautada no desenvolvimento do raciocínio combinatório e na assimilação dos conceitos fundamentais.

No Capítulo 1, tratamos das estratégias de contagem e dos principais erros cometidos durante a resolução de um problema combinatório e como evitá-los.

No Capítulo 2, abordamos os princípios básicos de Análise Combinatória e os padrões de contagem. Tratamos dos princípios bijetivo, aditivo e multiplicativo, permutações

e combinações, simples e com repetição, além das permutações circulares, e incluímos ao longo do texto exemplos de questões retiradas da 1ª Fase Nível 3 da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares) e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

No Capítulo 3, tratamos dos métodos avançados de contagem. Temas como o princípio da inclusão-exclusão, permutações caóticas, os Lemas de Kaplansky, contagem via recorrência e o princípio da casa dos pombos, foram abordados de forma atraente e com a profundidade necessária. Incluímos neste capítulo exemplos de questões retiradas da 1ª Fase Nível 3 da OBMEP.

No Capítulo 4, realizamos a contagem de funções através de um passeio pelos principais métodos de contagem, abordando permutações simples e combinações simples, conteúdos que normalmente são suficientes para abordar os problemas de contagem de interesse do Ensino Médio.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos o software *SageMath* e mostramos como ele pode ser uma ferramenta muito útil para complementar o aprendizado de Análise Combinatória, tornando o conteúdo mais atraente para os alunos e proporcionando um conhecimento mais efetivo e aprofundado do tema. Apresentamos na Seção 5.5 uma proposta didática dividida em 3 aulas com atividades em ordem crescente de dificuldade, para as quais incluímos ao longo do texto algumas soluções e também algoritmos do software *SageMath*. Consideramos fundamental proporcionar aos alunos processos de aprendizado que permitam a construção de conceitos, rompendo com o ensino tradicional baseado na mera reprodução de algoritmos sem análise crítica e apropriação significativa. Assim, alinhados com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os parâmetros curriculares, defendemos um ensino voltado para o protagonismo do aluno, onde ele seja parte da construção dos conceitos, desenvolvendo habilidades críticas, criativas e reflexivas. Essa proposta didática sugere a formalização do conceito de permutação de forma que os alunos possam argumentar, com auxílio do *SageMath* e de demonstração. Concordamos com a ideia de que uso de demonstrações são de suma importância no Ensino Básico, pois oportuniza que os alunos se apropriem dos processos de validação e possam chegar as generalizações em situações diversificadas.

1 Sobre o Ensino de Análise Combinatória

1.1 Legislação

O ensino de Análise Combinatória, apesar de surgir de forma muito introdutória já nos anos finais do Ensino Fundamental, é no 2º Ano do Ensino Médio que ele se consolida e apresenta seus resultados mais importantes. Nos documentos legais da educação brasileira ele é sempre referido como um dos mais importantes. Observe a seguir o que diz os PCN+ [3] sobre este tema:

“A Contagem ou análise combinatória, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.” P.126 -127.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) para o Ensino Fundamental [4] recomenda que:

“Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.” P. 275.

De forma a consolidar o tema, a BNCC para o Ensino Médio [5] estabelece como habilidade a ser desenvolvida o seguinte:

“(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.” P. 529.

1.2 Estratégias de Contagem

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis de resolver, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Segundo [7] e [11], para resolver problemas de contagem é muito importante estabelecer algumas técnicas que facilitarão sua resolução. Vejamos algumas delas:

1. Postura. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

2. Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão.

Observação importante: A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução (uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada).

3. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

4. Redução. Tentar reformular o problema para outro equivalente, porém mais simples, reduzindo as quantidades envolvidas. A análise de casos particulares em busca de um padrão pode ajudar a encontrar mais facilmente a solução do problema proposto inicialmente.

5. Listagem. Estabelecer um padrão de listagem organizada de alguns dos resultados possíveis ajuda a resolver problemas de contagem, principalmente os mais complicados.

6. Fazer uma figura. Em vários problemas de combinatória, fazer uma figura (ou esquema) ajuda a entender o que está sendo solicitado pelo problema.

1.3 Principais Erros em Contagens

Grande parte dos erros que ocorrem durante a resolução de problemas combinatórios são decorrentes de contagens múltiplas, ou da contagem incorreta dos elementos de conjuntos que foram inicialmente considerados disjuntos, mesmo não sendo. Outro erro que costuma surgir e produz uma contagem em excesso é quando se tenta ordenar elementos nos quais não há necessidade, nem razão alguma, para tal ordenação. A seguir, apresentamos alguns desses principais erros.

1. Distinção inexistente, ou seja, distinção artificial entre coisas iguais

Esse tipo de erro é comum e para mostrar como ele acontece resolveremos um problema relativamente simples e depois resolveremos ele de modo errado. É claro que exagera-se tanto que vai ficar bastante claro a fonte do erro (geralmente ele aparece mais bem disfarçado).

Problema 1. De um grupo de 5 rapazes e 5 moças deseja-se escolher uma dupla (homem, mulher) para representá-lo. De quantos modos distintos isso pode ser feito?

Solução:(correta) É fácil ver que a solução correta do problema consiste em formar uma dupla, que equivale a escolher um rapaz e uma moça. A primeira decisão é a escolha do rapaz. Podemos escolher o rapaz de 5 modos. A segunda decisão é a escolha da moça, que pode ser feita de 5 modos. Como para cada rapaz escolhido temos 5 maneiras diferentes de escolher a moça, a resposta do problema é $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \cdot 5 = 25$.

Agora vamos ver o que uma pessoa apressada pode fazer nesse problema.

Solução:(errada) Um apressado pode pensar assim: para eu formar uma dupla eu tenho que escolher a primeira pessoa da dupla, o “cabeça” da dupla. Aí, esse “cabeça” da dupla tanto pode ser um homem ou uma mulher, de modo que essa primeira pessoa da dupla pode ser escolhida de 10 modos, qualquer uma das dez pessoas. Se eu escolhi um homem, agora eu vou ter que escolher uma mulher e, neste caso, teríamos 5 possibilidades. Se eu tivesse escolhido uma mulher, agora eu teria que escolher um homem, e assim teríamos 5 possibilidades. Em qualquer caso, independentemente do que eu tenha feito na escolha da primeira pessoa da dupla, a segunda pessoa poderá ser escolhida de 5 modos. Então a resposta é $10 \cdot 5 = 50$.

Comentários e sugestões:

Esse é um erro que acontece muito, só que ele em geral aparece muito mais camuflado do que apareceu nesta solução. A falha consiste em que, toda vez que fazemos uma distinção inexistente, uma distinção artificial entre coisas iguais, isto resulta em uma contagem múltipla, isso faz com que a gente conte a mesma coisa mais de uma vez. Quando eu escolhi o “cabeça” da dupla, eu criei uma distinção inexistente entre os elementos da dupla, o “cabeça” da dupla e o outro. Esse raciocínio faz com que a dupla João/Maria seja contada duas vezes. Uma quando João é o “cabeça” da dupla e Maria é, digamos, o resto, e outra quando Maria é o “cabeça” da dupla e João é o resto. Neste caso cada dupla foi contada duas vezes. Embora essa solução esteja errada, ela pode ser corrigida, basta, para isso dividi-la por 2.

1.4 Recomendações

O conteúdo desta seção em grande parte coincide com o pensamento dos eminentes matemáticos Augusto César Morgado e Elon Lages Lima, autores da Coleção do Professor de Matemática e da Coleção PROFMAT, publicadas pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). Além disso, estes são fundadores do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), uma iniciativa do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que é ofertado gratuitamente todos os anos nos meses de janeiro e julho, desde 2001, e está disponível gratuitamente no canal do IMPA no YouTube.

Segundo Morgado [13] e Lima [12], durante o processo de ensino de análise combinatória alguns cuidados devem ser tomados para que a aprendizagem aconteça, tomando-se como condição indispensável o fato de que este processo seja interessante o suficiente para atrair o interesse dos estudantes. Dentre eles citamos os seguintes:

1. Não fazer fórmulas demais ou casos particulares demais

Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas.

Deve-se dar preferência aos princípios combinatórios (bijetivo, aditivo, multiplicativo, etc) e às estratégias (dividir em casos, reduzir a um problema equivalente, etc) de contagem e somente utilizar fórmulas quando seu uso se tornar razoavelmente justificável, ou seja, naqueles problemas que por aparecerem com muita frequência (formar uma fila, selecionar objetos, etc), valerá a pena utilizar fórmulas, mas somente para estes, e para nenhum outro.

2. Aprender com os erros

É importante, diante de uma solução errada (induzida ou não), analisar porque

ela está errada. Isto será muito útil para a aprendizagem e necessário quando for resolver problemas mais complicados.

3. Exibicionismo x Aprendizagem

Se a preferência for pela aprendizagem, deve-se resistir à tentação de em cada problema buscar a solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. Combinatória não é sempre difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos.

4. Não dar preferência a raciocínios do tipo contar a mais para depois retirar o excesso

Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Análise Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor contar a mais, a sensação de segurança surge somente quando se domina os raciocínios construtivos. Insistir em contar a mais para depois retirar o que foi contado em excesso, jamais educará o raciocínio e, o que é mais grave, ao se deparar com problemas cuja solução não possuir uma distribuição simétrica, irá falhar na tentativa de retirar aquilo que foi contado a mais.

5. Por que não vale a pena dar destaque para o ensino de arranjos

Todos os problemas de arranjos se resolve mais facilmente utilizando-se o princípio multiplicativo. A fórmula de arranjo é uma coisa totalmente desnecessária. Entretanto, o ENEM (e outros vestibulares) insistem ainda em utilizá-la em suas provas. Como então devem proceder os professores do Ensino Médio ao ensinarem Análise Combinatória? Afinal, deve-se ou não ensinar a fórmula de arranjos? Neste caso, o mais sensato é, no final do ensino de Análise Combinatória dedicar alguns poucos minutos da aula para dizer o que é um arranjo, que existe a tal fórmula e como ela ainda é cobrada no ENEM (e em outros vestibulares), será preciso mostrá-la.

6. Não tentar classificar problemas de Análise Combinatória em permutação, arranjo ou combinação

Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de permutações, arranjos ou combinações? A maioria dos problemas de Combinatória não é só de permutação, nem só de arranjo, nem só de combinação. Na verdade, eles são uma junção destas várias coisas e de outras, e para resolvê-los precisamos utilizar um pouco de cada uma delas e além disso aplicar princípios e métodos. Portanto, tentar classificá-los em “caixinhas” se torna algo totalmente impraticável e inútil. O Importante é perceber como os dados do problema se relacionam entre si e entre os vários paradigmas de contagem.

Para os primeiros passos em Análise Combinatória de uma forma mais agradável recomendamos o livro [7]. Para quem deseja entender a essência da Análise Combinatória a partir de problemas recomendamos o livro [2]. Já para uma compreensão aprofundada indicamos o clássico livro [8].

2 Princípios Básicos e Padrões de Contagem

Neste Capítulo, abordaremos a análise combinatória destacando seus princípios mais básicos que são os princípios bijetivo, aditivo e multiplicativo e padrões de contagem tais como permutação, arranjo e combinação.

Mas, afinal, o que é análise combinatória? Segundo [2], A matemática combinatória surge do estudo de como podemos combinar objetos em agrupamentos. Por exemplo, podemos combinar equipes esportivas em um torneio, amostras de pneus em projetos para montá-las em carros para testes, alunos em turmas para comparar abordagens de ensino de uma matéria ou membros de um clube de tênis em duplas para jogar tênis. Há muitas perguntas que se podem fazer sobre esses agrupamentos de objetos. Aqui, vamos nos concentrar em questões sobre quantas maneiras podemos combinar os objetos em arranjos do tipo desejado. Esses são chamados de problemas de contagem.

Já segundo [13], de maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Veremos a seguir os princípios básicos e paradigmas citados.

2.1 O Princípio Bijetivo

Em tudo o que segue admitimos que o leitor tenha relativa familiaridade com conjuntos e operações sobre os mesmos. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto

$$I_n = \{j \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq n\}$$

dos números naturais de 1 a n .

Definição 2.1.1 (Conjunto finito). *Um conjunto $A \neq \emptyset$ é finito se existe uma bijeção $f : I_n \rightarrow A$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Neste caso, denotando $a_j = f(j)$, escrevemos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e dizemos que n é o número de elementos de A . Ainda neste caso, denotamos por

$$|A| = n \quad \text{ou} \quad \#A = n,$$

o número de elementos do conjunto A .

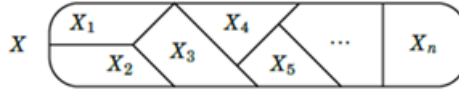
Definição 2.1.2 (Partição). *Por partição de um conjunto X entendemos uma coleção $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X tal que:*

- Estes subconjuntos são dois a dois disjuntos, ou seja, se $\lambda_i \neq \lambda_j$, então $X_{\lambda_i} \cap X_{\lambda_j} = \emptyset$
- A união de todos estes subconjuntos é X , ou seja,

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$$

onde Λ representa um conjunto de índices qualquer, que pode ser, por exemplo, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, um conjunto finito, etc. Figura 1.

Figura 1 – Partição de X



Fonte: Elaborado pelo autor.

A teoria elementar de contagem se baseia na seguinte proposição, conhecida como *princípio bijetivo*. Antes de demonstrar este princípio, vamos mostrar que não existe bijeção entre I_n e um dos seus subconjuntos próprios.

Teorema 2.1.3 (Subconjunto próprio). *Se A é um subconjunto próprio de I_n , não pode existir uma bijeção $f : A \rightarrow I_n$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que o teorema seja falso e considere $n_0 \in \mathbb{N}$, o menor número natural para o qual existem um subconjunto próprio $A \subset I_{n_0}$ e uma bijeção $f : A \rightarrow I_{n_0}$. Tem-se, evidentemente, $n_0 > 1$. Seja $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. A restrição de f ao subconjunto próprio $A - a \subset I_{n_0-1}$ será uma bijeção sobre I_{n_0-1} , o que contraria a minimalidade de n_0 . $\square$

Proposição 2.1.4 (Princípio bijetivo). *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A| = |B|$ se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$.*

Demonstração. Suponha que $|A| = |B| = n$. Logo, existem bijeções $g : I_n \rightarrow A$ e $h : I_n \rightarrow B$. Portanto, $f = h \circ g^{-1} : A \rightarrow B$ é uma bijeção. Reciprocamente, suponha que exista uma bijeção $f : A \rightarrow B$. Como A e B são finitos, existem $n, k \in \mathbb{N}$ e bijeções $g : I_n \rightarrow A$ e $h : I_k \rightarrow B$. Note que

$$p = h^{-1} \circ f \circ g : I_n \rightarrow I_k$$

é uma bijeção, logo $n = k$, ou seja, $|A| = |B|$.

$\square$

2.2 O Princípio Aditivo

O princípio aditivo é utilizado para resolver problemas nos quais é necessário dividir o problema em casos disjuntos. Como já visto na seção anterior, essa divisão do problema é chamada de partição, Definição 2.1.2, e é formada pela união disjunta de todas as partes possíveis.

Proposição 2.2.1 (Princípio aditivo). *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Demonstração. Precisamente, precisamos mostrar que se A e B forem conjuntos disjuntos e não vazios, com $|A| = m$ e $|B| = n$, então existe uma bijeção $f : I_{m+n} \rightarrow A \cup B$, com $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ e $I_{m+n} = \{1, 2, \dots, m+n\}$.

Como $|A| = m$ e $|B| = n$, existem $g : I_m \rightarrow A$ e $h : I_n \rightarrow B$ bijeções.

Defina $f : I_{m+n} \rightarrow A \cup B$ por

$$f(k) = \begin{cases} g(k), & \text{se } 1 \leq k \leq m \\ h(k-m), & \text{se } m+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

Como g e h são sobrejetivas e $m+1 \leq k \leq m+n$ se, e somente se, $1 \leq k-m \leq n$, concluímos que f é também sobrejetiva. Para a injetividade de f , suponhamos que $f(k) = f(l)$, com $1 \leq k, l \leq m+n$. Existem três casos a considerar:

Caso 1: $1 \leq k, l \leq m$.

Neste caso, $g(k) = f(k) = f(l) = g(l)$, e a injetividade de g dá $k = l$.

Caso 2: $m+1 \leq k, l \leq m+n$

Neste caso, $h(k-m) = f(k) = f(l) = h(l-m)$, e a injetividade de h dá $k-m = l-m$, portanto, $k = l$.

Caso 3: $1 \leq k \leq m$ e $m+1 \leq l \leq m+n$

Neste caso, $f(k) = g(k) \in A$ e $f(l) = h(l-m) \in B$. Como $A \cap B = \emptyset$, $f(k) \neq f(l)$. E assim, $f : I_{m+n} \rightarrow A \cup B$ é injetiva.

Como $f : I_{m+n} \rightarrow A \cup B$ é injetiva e sobrejetiva, é uma bijeção. $\square$

Como aplicação dos princípios bijetivo e aditivo, vamos contar quantos são os subconjuntos de um conjunto finito

Exemplo: Se X é um conjunto finito tal que $|X| = n$, então o conjunto $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subset X\}$ das partes de X é finito e $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

De fato, observe que se $|X| = 1$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$. Logo $|\mathcal{P}(X)| = 2 = 2^1$.

Suponha que o resultado é verdadeiro para conjunto de n elementos. Seja X tal que $|X| = n + 1$. Fixe $x \in X$ e seja $Y = X - \{x\}$. Assim $|Y| = n$ e por hipótese $|\mathcal{P}(Y)| = 2^n$. Agora seja $Z = \{A \subset X; x \notin A\}$. Considere a função $\varphi : \mathcal{P}(Y) \rightarrow Z$ dada por $\varphi(A) = A \cup \{x\}$. A função φ é uma bijeção e assim, pelo princípio bijetivo (Proposição 2.1.4), $|Z| = |\mathcal{P}(Y)| = 2^n$. Observe que $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y) \cup Z$ e $\mathcal{P}(Y) \cap Z = \emptyset$, pelo princípio aditivo (Proposição 2.2.1), temos

$$|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)| + |Z| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é verdadeiro.

Na sequência, apresentaremos uma generalização do Princípio Aditivo.

Proposição 2.2.2 (Generalização do princípio aditivo). *Se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, então*

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre n . O caso $n = 2$ já foi demonstrado na Proposição 2.2.1.

Suponha que o resultado é verdadeiro para $n = k$, ou seja,

$$\left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| = \sum_{j=1}^k |A_j|.$$

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ dois a dois disjuntos. Note que

$$\left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \text{ e } A_{k+1}$$

são disjuntos. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right| &= \left| \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cup A_{k+1} \right| = \left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| + |A_{k+1}| \\ &= \sum_{j=1}^k |A_j| + |A_{k+1}| = \sum_{j=1}^{k+1} |A_j|. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é verdadeiro. $\square$

Figura 2 – mesa triangular.



Fonte: OBMEP.

Exemplo 2.2.1 (OBMEP - Nível 3). *As 6 cadeiras de uma fila são numeradas de 1 a 6, como apresentado na figura, e devem ser ocupadas uma de cada vez de modo que, sempre que possível, é escolhida uma cadeira sem vizinhas ocupadas.*

Por exemplo, é válida a ordem de ocupação 1 6 3 2 4 5, em que a primeira pessoa ocupa a cadeira 1, a segunda, a cadeira 6, a terceira, a cadeira 3, a quarta, a cadeira 2, a quinta, a cadeira 4 e a última, a cadeira 5. Já a ordem 1 5 2 3 6 4 não é válida, pois a terceira pessoa sentou-se ao lado da primeira quando poderia ter se sentado em uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Quantas ordens de ocupação válidas existem?

- A) 72
- B) 108
- C) 144
- D) 192
- E) 216

Solução:

Sejam A , B , C , D , E e F as 6 pessoas. Considere que esta ordem determina a vez de cada pessoa sentar, ou seja, primeiro senta a pessoa A , depois a B , depois a C , e assim sucessivamente, até chegar na pessoa F , última a sentar. Temos, para este problema, dois casos a considerar.

1º Caso : suponha que apenas as duas primeiras pessoas, pessoas A e B , conseguiram sentar em cadeiras sem vizinhas ocupadas, e que elas sentaram nas cadeiras 2 e 5.

Neste caso, temos duas opções para as pessoas A e B , (A na cadeira 2 e B na cadeira 5 ou A na cadeira 5 e B na cadeira 2). Distribuindo as 6 pessoas em seus assentos temos: 2 opções para A , 1 opção para B , 4 opções para C , 3 opções para D , 2 opções para E e 1 opção para F . Assim, pelo princípio multiplicativo, contabilizamos $(2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2 \times 24 = 48$ possibilidades.

2º Caso : agora, suponha que as três primeiras pessoas a sentar, pessoas A , B e C , conseguiram sentar em cadeiras sem vizinhas ocupadas, e que elas sentaram:

i) nas cadeiras 1, 3 e 5.

Neste caso temos: 3 opções para A , 2 opções para B , 1 opção para C , 3 opções para D , 2 opções para E e 1 opção para F . Assim, novamente pelo princípio multiplicativo, contabilizamos $(3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 6 \times 6 = 36$ possibilidades.

ii) nas cadeiras 1, 3 e 6.

Procedendo de forma semelhante, obtemos novamente 36 possibilidades.

iii) nas cadeiras 1, 4 e 6.

Temos novamente 36 possibilidades.

iv) nas cadeiras 1, 4 e 6.

Temos novamente 36 possibilidades.

Observe que estes dois casos são disjuntos e a união deles forma o conjunto de todos os resultados possíveis. Portanto, existem $2 \times 24 + 4 \times 36 = 192$ ordens de ocupação válidas. Alternativa D.

Exemplo 2.2.2 (OBMEP - Nível 3). *Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1 000?*

A) 10

B) 20

C) 25

D) 30

E) 40

Solução:

Como $1\,000 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_8 \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{125}$, os possíveis números são formados pelos algarismos:

i) 5, 5, 5, 2 e 4,

caso em que, pelo princípio multiplicativo, contabilizamos

$5 \times 4 = 20$ possibilidades; 5 possibilidades para a posição do algarismo 2 e

4 possibilidades para o algarismo 4 (as demais casas do número devem receber o algarismo 5).

ii) 5, 5, 5, 8 e 1,

caso em que, de forma análoga, contabilizamos $5 \times 4 = 20$ possibilidades.

Logo, pelo princípio aditivo, existem $20 + 20 = 40$ números com tal propriedade.

Alternativa E.

2.3 O Princípio Multiplicativo

O princípio multiplicativo é utilizado em problemas nos quais para se resolver se toma decisões sucessivas, não necessariamente disjuntas. O que é obrigatório quando se opta por este princípio é que para cada um dos resultados de uma decisão, a quantidade de resultados da decisão posterior seja sempre a mesma. Um cuidado que se deve tomar ao utilizar tal princípio é que ele impõe uma ordenanação nos elementos, ordenação esta que inexistente em muitos dos vários problemas. Para maiores detalhes e como tentar contornar esta situação veja a secção 1.3 .

Proposição 2.3.1 (Princípio multiplicativo). *Se A e B são conjuntos finitos não vazios, então $A \times B$ é também finito, com*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Antes de demonstrar o Princípio multiplicativo, provaremos o seguinte lema:

Lema 2.3.2. *Se $A, B_1, \dots, B_n$ são conjuntos não vazios, então*

$$A \times \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{j=1}^n (A \times B_j) \quad (2.1)$$

Demonstração. Para provar o lema acima mostraremos que, se $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$, $a \in A$ e $b \in B$, o par ordenado (a, b) pertence ao primeiro membro da Identidade (2.1) se, e somente se, pertence ao segundo membro.

Note que

$$\begin{aligned} (a, b) \in A \times \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) &\Leftrightarrow a \in A \text{ e } b \in \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) \\ &\Leftrightarrow a \in A \text{ e } b \in B_{j_0} \text{ para algum } j_0 \in \{1, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in A \times B_{j_0} \text{ para algum } j_0 \in \{1, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in \bigcup_{j=1}^n (A \times B_j) \end{aligned}$$

□

Vamos agora demonstrar a Proposição 2.3.1.

Demonstração. Escrevendo

$$B = \{y_1, \dots, y_m\} = \bigcup_{j=1}^m \{y_j\},$$

segue do Lema 2.3.2 que

$$A \times B = A \times \left(\bigcup_{j=1}^m \{y_j\} \right) = \bigcup_{j=1}^m (A \times \{y_j\}),$$

uma união disjunta. Portanto, a Proposição 2.2.2 (*Princípio aditivo*) fornece

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{j=1}^m (A \times \{y_j\}) \right| = \sum_{j=1}^m |A \times \{y_j\}| \quad (2.2)$$

Agora, como

$$f : A \rightarrow A \times \{y_j\} \text{ dada por } f(x) = (x, y_j)$$

é uma bijeção, com inversa

$$g : A \times \{y_j\} \rightarrow A \text{ dada por } g(x, y_j) = x,$$

a Proposição 2.1.4 (*Princípio bijetivo*) garante que

$$|A| = |A \times \{y_j\}| \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

Portanto, segue de (2.2) que

$$|A \times B| = \sum_{j=1}^m |A \times \{y_j\}| = \sum_{j=1}^m |A| = |A| \cdot m = |A| \cdot |B|$$

□

Apresentaremos agora uma generalização do Princípio multiplicativo.

Proposição 2.3.3 (Generalização do princípio multiplicativo). *Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são conjuntos finitos, então*

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre n . O caso $n = 2$ já foi provado na Proposição 2.3.1 (*Princípio multiplicativo*). Suponha que o resultado é verdadeiro para $k < n$, ou seja,

$$|A_1 \times \cdots \times A_k| = \prod_{j=1}^k |A_j|.$$

Observe que a função

$$f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} \rightarrow (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$$

dada por

$$f((x_1, \dots, x_k, x_{k+1})) = ((x_1, \dots, x_k), x_{k+1})$$

é uma bijeção. Pela Proposição 2.1.4 (*Princípio bijetivo*), temos

$$\begin{aligned} |A_1 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| &= |(A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}| \\ &= |A_1 \times \cdots \times A_k| \cdot |A_{k+1}| \\ &= \left(\prod_{j=1}^k |A_j| \right) \cdot |A_{k+1}| = \prod_{j=1}^{k+1} |A_j| \end{aligned}$$

Dessa forma, o resultado também é verdadeiro para $k + 1$. Pelo Princípio da Indução, o resultado é verdadeiro para todo n . $\square$

O exemplo a seguir nos mostra como podemos utilizar o Princípio multiplicativo para resolver problemas de Combinatória.

Exemplo 2.3.1 (ENEM 2024). *Para abrir a porta de uma empresa, cada funcionário deve cadastrar uma senha utilizando um teclado alfanumérico como o representado na figura.*

Figura 3 – Teclado

1	2 _{ABC}	3 _{DEF}
4 _{GHI}	5 _{JKL}	6 _{MNO}
7 _{PQRS}	8 _{TUV}	9 _{WXYZ}
—	0	—

Fonte: ENEM.

Por exemplo: a tecla que contém o número 2 traz as letras correlacionadas A, B e C. Cada toque nessa tecla mostra, sequencialmente, os seguintes caracteres: 2, A, B e C. Para os próximos toques, essa sequência se repete. As demais teclas funcionam da mesma maneira.

As senhas a serem cadastradas pelos funcionários devem conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem. Um funcionário irá cadastrar a sua primeira senha, podendo escolher entre as teclas que apresentam os números 1, 2, 5, 7 e 0 e as respectivas letras correlacionadas, quando houver.

O número de possibilidades diferentes que esse funcionário tem para cadastrar sua senha é

A) 11 520.

B) 14 520.

C) 18 000.

D) 312 000.

E) 390 000.

Solução. Como a senha deve conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem, precisamos primeiramente escolher os 2 algarismos distintos dos 5 algarismos permitidos (1,2,5,7 e 0) para colocar nas duas primeiras posições à esquerda e depois escolher para as três últimas posições à direita 3 letras das 10 letras permitidas ((A,B,C) , (J,K,L) , (P,Q,R) e S) que estão respectivamente correlacionadas com as teclas 2,5 e 7.

As duas primeiras posições à esquerda devem, obrigatoriamente, serem ocupadas por números e as três últimas por letras. Para ocupar a 1ª posição à esquerda temos 5 opções (1,2,5,7 e 0) e, uma vez escolhido o número da 1ª posição temos, para cada uma dessas escolhas, 4 opções para ocupar a 2ª posição. Para ocupar a 3ª posição temos 10 opções ((A,B,C) , (J,K,L) , (P,Q,R e S)) e, uma vez escolhida a letra para esta posição, existem 9 opções para cada uma das 10 opções, para a 4ª posição. Da mesma forma, existem 8 opções para ocupar a última posição para cada uma das 9 opções da penúltima posição. A figura a seguir ilustra como estas escolhas podem ser realizadas, na qual N representa um número e L, uma letra.

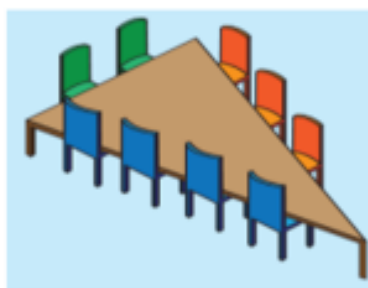
$$\frac{N}{5} \frac{N}{4} \frac{L}{10} \frac{L}{9} \frac{L}{8}$$

Figura 3

Como para cada uma das opções de preencher uma certa posição existem a mesma quantidade de opções para preencher a posição imediatamente posterior (não necessariamente independentes) pela Proposição 2.3.3 (*Princípio multiplicativo*), existem $5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 = 14\,400$ modos diferentes de se cadastrar uma senha satisfazendo as condições do problema. (Alternativa B).

Exemplo 2.3.2 (OBMEP - Nível 3). *Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura.*

Figura 4 – mesa triangular.



Fonte: OBMEP.

De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

- A) 288
- B) 6 720
- C) 10 080
- D) 15 120
- E) 60 480

Solução:

Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares.

Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras diferentes.

Pelo princípio multiplicativo, no total, os amigos podem se sentar à mesa de $6 \times 2 \times 840 = 10\,080$ maneiras diferentes. Alternativa C.

2.4 Permutações Simples

Uma permutação de n objetos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos. Quando todos os objetos são distintos, dizemos que os agrupamentos ordenados são permutações simples destes objetos.

Apresentaremos duas demonstrações para a proposição a seguir. Na primeira, utilizaremos o Princípio da Indução, o que torna esta demonstração mais formal. Acreditamos que, com os devidos cuidados, esta demonstração pode ser replicada em sala de aula para justificar para os alunos que o resultado é verdadeiro. Nesse trabalho iremos porpor uma sequência didática (ou proposta de aula) onde sugerimos a utilização dessa demonstração para fazer com que os alunos compreendam a veracidade do resultado. A segunda demonstração é feita utilizando o Princípio multiplicativo, ela se faz importante por mostrar uma forma alternativa de contar o número de permutações de conjuntos com n elementos.

Proposição 2.4.1 (Permutações simples). *O número de permutações de n objetos é $n!$.*

Demonstração 1. Provaremos a proposição por indução sobre n .

Seja X o conjunto das possíveis filas de n objetos, representado por

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) ; \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\} \text{ e, se } i \neq j, \text{ vale } x_i \neq x_j \},$$

onde $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ é o conjunto dos n objetos.

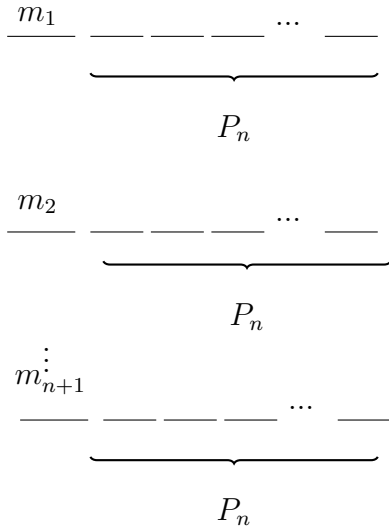
Para $n = 1$, o conjunto S tem apenas um elemento. Logo, existe apenas uma permutação em X . Como $1! = 1$, temos a base de indução.

Suponha que o resultado seja válido para um certo n , ou seja, suponha que o número de permutações de qualquer conjunto com n elementos seja igual a $n!$.

Considere agora um conjunto M com $n + 1$ elementos. Uma permutação dos elementos de M é uma $(n+1)$ -upla $(x_1, \dots, x_{n+1})$ cujas entradas são todas elementos de M , e não há repetições.

Contemos quantas são as permutações de M . Para a escolha da primeira entrada, x_1 há $n+1$ possibilidades. Assim, podemos dividir o conjunto M das permutações em $n+1$

conjuntos, a depender do primeiro objeto na fila. Para cada uma dessas possibilidades, restam n elementos a serem distribuídos nas entradas restantes.



Pela hipótese de indução, o número de permutações dos n elementos restantes é igual a $n!$. Como os conjuntos das $n + 1$ permutações de M são dois a dois disjuntos, da hipótese de indução e da Proposição 2.2.2 (*Princípio aditivo*), segue que o total de permutações em M é igual a

$$(n + 1) \cdot P_n = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!.$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita, concluímos que o número de permutações de n objetos distintos é igual a $n!$.

□

Demonstração 2. Formaremos uma lista com os n objetos. O primeiro objeto da lista pode ser escolhido de n modos, uma vez escolhido o primeiro, o segundo pode ser escolhido de $n - 1$ modos, e assim por diante e, finalmente, uma vez escolhido o penúltimo, o último pode ser escolhido de 1 modo apenas. Pela Proposição 2.3.3 (*Princípio multiplicativo*) obtemos

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

□

2.5 Permutações Circulares

As permutações nas quais os elementos são distribuídos em torno de um círculo são chamadas de permutações circulares ou cíclicas. Duas permutações são consideradas a mesma se uma pode ser obtida da outra por rotação. Existem problemas que, apesar dos elementos não estarem distribuídos em torno de um círculo, estes podem ser posicionados de tal forma e, através de uma equivalência, serem resolvidos usando permutações circulares.

Proposição 2.5.1 (Permutação circular). *O número de permutações circulares de n objetos é*

$$(PC)_n = (n - 1)!$$

Demonstraremos esta proposição utilizando três métodos diferentes. Tal postura se justifica no fato de que as três demonstrações juntas garantem um completo entendimento do tema, uma vez que os raciocínios presentes em cada uma delas são indispensáveis para se interpretar de forma correta os problemas.

Demonstração 1. Se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!.$$

□

Demonstração 2. Como o que importa é a posição relativa dos objetos no círculo, vamos então distribuir cada um deles.

Há 1 modo de colocar o 1º objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo);

Há 1 modo de colocar o 2º objeto (ele será o objeto imediatamente após o primeiro);

Há 2 modos de colocar o 3º objeto (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º);

Há 3 modos de colocar o 4º objeto (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º ou imediatamente após o 3º).

Adotando sucessivamente este raciocínio, temos que

Há $n - 1$ modos de colocar o n -ésimo e último objeto. Logo, pela Proposição 2.3.3 (*Princípio multiplicativo*) obtemos

$$(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) = (n - 1)!.$$

□

Demonstração 3. Fixemos um dos objetos no círculo e em seguida permutamos os $n - 1$ objetos restantes entre os $n - 1$ lugares que sobraram. Pela Proposição 2.3.3 (*Princípio multiplicativo*) temos

$$(PC)_n = 1 \cdot (n - 1)! = (n - 1)!.$$

□

2.6 Combinações Simples

O propósito desta seção é calcular quantas são as escolhas não ordenadas de k elementos distintos de um conjunto com n elementos; costuma-se dizer que tais escolhas são combinações de n objetos, tomando k de cada vez. Quando elas não apresentam repetição de elementos, dizemos que são combinações simples.

Denotaremos por $C_{n,k}$ ou por C_n^k o número de combinações de n objetos, tomando k de cada vez. Na proposição a seguir, mostraremos que o número de tais combinações é $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Proposição 2.6.1 (Combinações simples). *O número de subconjuntos de k elementos distintos de um conjunto com n elementos distintos é denotado por C_n^k e definido por*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \quad (2.3)$$

Apresentaremos a seguir três demonstrações desta proposição. Na primeira utilizamos uma abordagem algébrica, na segunda um raciocínio combinatório e, na terceira, o método indutivo. A decisão de apresentar três, ao invés de apenas uma, se justifica no fato de que todas elas utilizam métodos que são indispensáveis na resolução dos problemas. Métodos estes que juntos proporcionam um completo entendimento do conteúdo.

Demonstração 1. Para ver isso, observe que quando nós contamos o número de listas de k elementos, cada subconjunto de tamanho k é contado uma vez para cada modo de ordenar seus elementos. O primeiro elemento da lista pode ser escolhido de n modos, o segundo de $n - 1$ modos, $\dots$, o último de $n - (k - 1)$ modos. Assim, pela Proposição 2.3.3 (*Princípio multiplicativo*), o número de listas de k elementos é $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$.

Observe que permutações de cada escolha dos k elementos não nos proporcionam conjuntos diferentes, ou seja, da forma que fizemos, cada escolha foi contada $k!$ vezes. Dessa forma, o número que procuramos é

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1) [(n-k)(n-k-1)\cdots 2 \cdot 1]}{k! [(n-k)(n-k-1)\cdots 2 \cdot 1]} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

□

Observação. É comum referir-se ao número $\binom{n}{k}$ como “ n escolhe k ”, para denotar o número de combinações de n objetos distintos tomados k a k .

Observe que podemos denotar os elementos de um conjunto X com n elementos por $x_1, x_2, \dots, x_n$. Como cada escolha de k elementos $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$ é igual independente da ordem em que eles aparecem, podemos os dispor de modo que $m_1 < m_2 < \dots < m_k$, ou seja, de modo que seus índices são dispostos de ordem crescente. Dessa forma, contar o número de subconjuntos de k elementos de X é equivalente a contar o número de sequências crescentes de tamanho k dos números $1, 2, \dots, n$. Assim, contamos mais facilmente o número de combinações contando o número de sequências crescentes, o qual, pode ser determinado aplicando a proposição (2.3.3) (Princípio multiplicativo).

Demonstração 2. (raciocínio combinatório) Como alguns estudantes acham confusa a ideia de transformar seleções ordenadas em seleções não ordenadas, aqui está outra maneira de deduzir a fórmula de combinações simples.

Suponha que tenhamos que escolher uma equipe de k jogadores de um grupo de n , sendo que um deles será nomeado capitão. Isso pode ser feito primeiro escolhendo a equipe – e o número de equipes é denotado por $\binom{n}{k}$ e depois escolhendo o capitão – existem k modos de fazer isso. Assim, existem $k \binom{n}{k}$ escolhas no total. Mas poderíamos, em vez disso, primeiro escolher o capitão – existem n modos de fazer isso – e depois escolher os $k-1$ outros membros da equipe – e existem $\binom{n-1}{k-1}$ modos de fazer isso. Assim, o número de opções é também $n \binom{n-1}{k-1}$. Portanto,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1},$$

assim

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Mas, de forma semelhante,

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2}.$$

Substituindo n por $n-1$ e k por $k-1$, obtemos

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2}.$$

Continuando deste modo, obtemos

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-(k-2)}{2} \binom{n-(k-1)}{1}.$$

Como $\binom{m}{1}$ é claramente sempre m , obtemos, finalmente

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1) [(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1]}{k! [(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1]} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

□

Lema 2.6.2 (Relação de Stifel).

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (2.4)$$

Demonstração do lema.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} + \frac{kn!}{k(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} + \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1-k)n! + kn!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Demonstração 3. Se $k = 0$ nada há que fazer, pois $\emptyset$ é o único subconjunto de A com 0 elementos e assim $C_{n,0} = C_n^0 = 1 = \binom{n}{0}$.

Vamos demonstrar o Lema utilizando o Princípio de Indução Finita sobre o número n e $1 \leq k \leq n$.

Seja A um conjunto com n elementos e C_n^k o número de subconjuntos de A com k elementos.

Para $n = 1$. Nesse caso, só existe a possibilidade de $k = 1$, e o único subconjunto de A com 1 elemento é o próprio A . Assim, para $k = 1$ e $n = 1$ temos

$$C_n^k = C_1^1 = 1 = \binom{1}{1}.$$

Agora, suponha que o resultado seja verdadeiro para um certo $n \geq 1$, ou seja, $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Seja A um conjunto com $n + 1$ elementos. Note que A só possui 1 subconjunto com $n + 1$ elementos, o próprio A e $n + 1$ com 1 elemento. Assim

$$\begin{aligned}
C_{n+1}^{n+1} &= 1 = \binom{n+1}{n+1}, \\
C_{n+1}^1 &= n + 1 = \frac{(n+1)!}{1!(n+1-1)!} = \binom{n+1}{1}.
\end{aligned}$$

Se k é tal que $1 < k < n + 1$, fixe um $x \in A$. Existem dois tipos de subconjuntos de A com k elementos, aqueles que não contém x e aqueles que contém x .

Os primeiros são justamente os subconjuntos de k elementos de $A \setminus \{x\}$. Como $|A \setminus \{x\}| = n$, da hipótese de indução, existem $\binom{n}{k}$ desses subconjuntos de k elementos de A .

Por outro lado, se $B \subset A$ tem k elementos e $x \in B$, então $(B \setminus \{x\}) \subset (A \setminus \{x\})$ tem $k - 1$ elementos. Inversamente, se $B \subset (A \setminus \{x\})$ tem $k - 1$ elementos, então $(B \cup \{x\}) \subset A$ tem k elementos, um dos quais é x .

Como tais correspondências são inversas uma da outra, concluímos que existem tantos subconjuntos de k elementos de A contendo x , quanto existem subconjuntos de $k - 1$ elementos de $A \setminus \{x\}$. Novamente por hipótese de indução, existem exatamente $\binom{n}{k-1}$ tais subconjuntos de k elementos de A .

Dessa forma e pelo lema (2.6.2) (*Relação de Stifel*), o número de subconjuntos de A com k elementos é

$$C_{n+1}^k = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Portanto, para $1 \leq k \leq n + 1$, temos

$$C_{n+1}^k = \binom{n+1}{k}.$$

Pelo Princípio de Indução Finita, concluímos que o número de subconjuntos de k elementos distintos de um conjunto com n elementos distintos é $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

□

Exemplo 2.6.1 (OBMEP - Nível 3). *Quantos são os números menores que 10 000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque $4 \times 5 \times 5 = 100$.*

A) menos de 10

B) 18

C) 21

D) 28

E) mais de 30

Solução:

Para que o produto seja 100, cada algarismo deve ser um divisor de 100. Como $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$, os algarismos divisores de 100 são 1, 2, 4 e 5. Observe que não é possível obter o produto 100 com números que tenham apenas 1 ou 2 algarismos, pois $9 < 100$ e $9 \times 9 = 81 < 100$, logo os números procurados têm 3 ou 4 algarismos, por serem menores que 10000. Vejamos como obter o produto 100 com 3 ou 4 desses algarismos.

Antes disso, note que como $2 \times 5 \times 5 = 50 < 100$, os números de 3 algarismos são formados apenas pelos algarismos 4 e 5. Por outro lado, como $5 \times 5 \times 5 = 125 > 100$, os números procurados precisam ter dois algarismos 5.

Para facilitar a listagem observamos que $8 = 2 \times 4$ não é divisor de 100, donde os algarismos 2 e 4 não podem aparecer num mesmo número. Assim, os possíveis números são formados pelos algarismos:

1º Caso: 5,5 e 4,

caso em que contabilizamos

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3 \text{ possibilidades; permutando os três algarismos dos}$$

quais dois são repetidos.

Obtemos assim os números $\{455, 545, 554\}$.

2º Caso: 5,5,1 e 4, caso em que

i) fixando o 1 na primeira posição à esquerda e permutando o 4 e os dois 5,

contabilizamos

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3 \text{ possibilidades.}$$

Obtendo os números $\{1455, 1545, 1554\}$.

ii) Fixando o 4 na primeira posição à esquerda e permutando o 1 e os dois 5,

contabilizamos

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3 \text{ possibilidades.}$$

Obtendo os números $\{4155, 4515, 4551\}$.

iii) fixando um dos 5 na primeira posição à esquerda e permutando os outros

3 algarismos, contabilizamos

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ possibilidades.}$$

Obtendo os números $\{5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541\}$.

3º Caso: 5,5,2 e 2,

caso em que contabilizamos

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ possibilidades; combinando os 4}$$

algarismos dois a dois, para decidir onde colocar os 5, ou os 2.

Obtendo os números $\{2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225\}$.

Logo os números procurados são:

a) números de 3 algarismos: 455, 545, 554

b) números de 4 algarismos: 1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415,

5451, 5514, 5541, 2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225.

Portanto, temos um total de $3 + (3 + 3 + 6) + 6 = 21$ números. Alternativa C.

Exemplo 2.6.2 (ENEM 2024). *Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.*

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

A) $\frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$

B) $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$

C) $\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$

D) $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!}\right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!}\right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!}\right)$

E) $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}\right) + \left(\frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!}\right) + \left(\frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}\right)$

Solução: Para formar uma equipe com 5 médicos na qual pelo menos 3 são cardiologistas existem três casos possíveis:

1º caso: 3 cardiologistas e 2 neurologistas

Neste caso devemos escolher 3 dos 7 cardiologistas, o que pode ser feito de $\binom{7}{3}$ modos, e em seguida completar a equipe escolhendo 2 dos 6 neurologistas, o que pode ser feito de $\binom{6}{2}$ modos. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem $\binom{7}{3} \times \binom{6}{2}$ modos de formar uma equipe com 3 cardiologistas e 2 neurologistas.

2º caso: 4 cardiologistas e 1 neurologista

Neste caso devemos escolher 4 dos 7 cardiologistas, o que pode ser feito de $\binom{7}{4}$ modos, e em seguida completar a equipe escolhendo 1 dos 6 neurologistas, o que pode ser feito de $\binom{6}{1}$ modos. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem $\binom{7}{4} \times \binom{6}{1}$ modos de formar uma equipe com 4 cardiologistas e 1 neurologista.

3º caso: 5 cardiologistas e 0 neurologista

Neste caso devemos escolher 5 dos 7 cardiologistas, o que pode ser feito de $\binom{7}{5}$ modos.

Agora, como os três casos são dois a dois disjuntos e além disso englobam todas as possibilidades, pelo Princípio Aditivo segue que o número total de possibilidades de formar uma equipe com 5 médicos na qual pelo menos 3 são cardiologista é dado por

$$\begin{aligned}
 \binom{7}{3} \times \binom{6}{2} + \binom{7}{4} \times \binom{6}{1} + \binom{7}{5} \times \binom{6}{0} &= \left(\frac{7!}{3! \times (7-3)!} \times \frac{6!}{2! \times (6-2)!} \right) \\
 &+ \left(\frac{7!}{4! \times (7-4)!} \times \frac{6!}{1! \times (6-1)!} \right) \\
 &+ \left(\frac{7!}{5! \times (7-5)!} \times \frac{6!}{0! \times (6-0)!} \right) \\
 &= \left(\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} \right) + \left(\frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} \right) \\
 &+ \left(\frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!} \right) \quad \text{Alternativa E} \\
 &= (7 \times 5 \times 3 \times 5) + (7 \times 5 \times 6) + (7 \times 3) \\
 &= 525 + 210 + 21 \\
 &= 756
 \end{aligned}$$

Portanto, existem 756 modos distintos de formar uma equipe com 5 médicos na qual pelo menos 3 são cardiologistas, satisfazendo as condições do problema.

2.7 Permutações Com Elementos Repetidos

Denotaremos por $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}$ o número de permutações de n objetos dos quais α_1 são do tipo 1, α_2 são do tipo 2, $\dots$, α_m são do tipo m .

Proposição 2.7.1 (Permutações com repetição). *Dados n objetos dos quais α_1 são do tipo 1, α_2 são do tipo 2, $\dots$, α_{m-1} são do tipo $m-1$, α_m são do tipo m , e $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1} + \alpha_m = n$, e permutando esses objetos do mesmo tipo entre si não alteramos a lista. Assim, o número de permutações desses n objetos é*

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{m-1}! \alpha_m!}. \quad (2.5)$$

Apresentaremos a seguir duas demonstrações desta proposição. A primeira utilizando ordenação dos elementos e a segunda utilizando combinação simples. A decisão de apresentar duas ao invés de apenas uma demonstração se justifica no fato de que permite ao leitor adquirir maturidade para perceber que existe uma relação muito estreita entre permutação com repetição e combinação simples. Na verdade combinação simples é um caso particular de permutação com repetição envolvendo apenas dois tipos de objetos. Serve também para mostrar que tentar classificar um problema em permutação ou combinação não é uma atitude nem um pouco sensata para quem deseja adquirir um conhecimento sólido de Análise Combinatória.

Demonstração 1. Suponhamos que todos os n objetos fossem distintos. Logo, teríamos $n!$ listas desses n objetos.

Como os α_1 objetos do tipo 1 são iguais, contamos cada lista $\alpha_1!$ vezes. Analogamente, contamos novamente cada lista $\alpha_2!$ vezes, $\dots$, $\alpha_{m-1}!$ vezes, $\alpha_m!$ vezes.

Eliminamos as contagens múltiplas dividindo o número de listas por

$$\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_{m-1}! \alpha_m!$$

obtendo assim

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_{m-1}! \alpha_m!}.$$

□

Demonstração 2. (usando combinação) Escolheremos os objetos de cada tipo separadamente. Assim, existem $\binom{n}{\alpha_1}$ modos de selecionar os α_1 objetos do tipo 1 dentre os n objetos disponíveis. Uma vez escolhidos os α_1 objetos do tipo 1, os α_2 objetos do tipo 2 podem ser selecionados de $\binom{n - \alpha_1}{\alpha_2}$ modos, $\dots$, os α_m objetos do tipo m podem ser selecionados de $\binom{n - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{m-1}}{\alpha_m}$ modos.

Daí, aplicando a proposição (2.3.3) (*Princípio multiplicativo*) obtemos

$$\begin{aligned}
P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} &= \binom{n}{\alpha_1} \cdot \binom{n - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \binom{n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-1}}{\alpha_m} \\
&= \frac{n!}{\alpha_1!(n - \alpha_1)!} \cdot \frac{(n - \alpha_1)!}{\alpha_2!(n - \alpha_1 - \alpha_2)!} \cdot \dots \\
&\quad \cdot \frac{(n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-1})!}{m!(n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-1} - \alpha_m)!} \\
&= \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{m-1}! \alpha_m! 0!} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{m-1}! \alpha_m!}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.7.1 (OBMEP - Nível 3). *Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 000 a 9 999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?*

A) 32

B) 36

C) 45

D) 46

E) 48

Solução:

Um possível bilhete comprado por Marcelo é o bilhete 7737. Utilizando a fórmula de permutações com repetição, determinamos que existem $P_4^3 = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$ bilhetes em que o algarismo 7 aparece exatamente três vezes e o outro algarismo é o número 3. De acordo com o enunciado do problema, o algarismo 7 deve aparecer exatamente três vezes e o zero não deve aparecer. Desta forma, três algarismos são iguais a 7, e o outro poderá ser um dos seguintes oito algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Agora, observe que para resolver o problema tomamos as seguintes decisões sucessivas:

1ª Decisão: Determinar em quantos bilhetes o algarismo 7 aparece exatamente três vezes.

2ª Decisão: Determinar em quantos bilhetes o algarismo 0 não aparece.

Como para cada um dos quatro resultados da 1ª decisão existem oito resultados possíveis para a 2ª decisão, pelo princípio multiplicativo obtemos $4 \times 8 = 32$ bilhetes onde o algarismo 7 aparece três vezes e o algarismo 0 (zero) não aparece. Alternativa A.

2.8 Combinações Completas (Combinações Com Elementos Repetidos)

Definição 2.8.1 (Multiconjuntos). *Um multiconjunto é como um conjunto, exceto que os elementos podem ser repetidos. Por exemplo o conjunto $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$ é um multiconjunto de cardinalidade $|A| = 6$.*

Denomina-se combinações completas as seleções de r objetos distintos ou não dentre n objetos distintos dados.

Denotaremos por CR_n^p o número de combinações completas de classe p de n objetos.

Mostraremos agora que quando são permitidas repetições na seleção dos objetos, o número de maneiras de selecionar r objetos de n objetos distintos é dado pela seguinte proposição:

Proposição 2.8.2 (Combinações completas). *O número de maneiras de selecionar p objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto pode ser tomado até p vezes é*

$$CR_n^p = \binom{n+p-1}{p} \quad (2.6)$$

Demonstração 1. Sejam os n objetos identificados pelos inteiros $1, 2, \dots, n$, e seja uma seleção específica de p objetos identificados por uma lista dos inteiros correspondentes $\{i, j, k, \dots, m\}$ organizados em ordem não decrescente.

Por exemplo, a seleção na qual o primeiro objeto é selecionado três vezes, o segundo objeto não é selecionado, o terceiro objeto é selecionado uma vez, o quarto objeto é selecionado uma vez, o quinto objeto é selecionado duas vezes, etc., é representado como $\{1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, \dots\}$.

Observe que dados dois números inteiros positivos x e y temos

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y + 1.$$

Assim, x não poderia ser inteiro pois entre dois inteiros consecutivos y e $y + 1$, não existe inteiro qualquer. Mas, isto contradiz nossa condição inicial na qual adotamos uma lista de números inteiros.

Portanto,

$$i < j + 1 < k + 2 < \cdots < m + (n - 1).$$

Deste modo, para os p inteiros em uma tal lista adicionamos 0 ao primeiro inteiro, 1 ao segundo inteiro, $\cdots$, e $p - 1$ ao p -ésimo inteiro. Assim, $\{i, j, k, \cdots, m\}$ torna-se $\{i, j + 1, k + 2, \cdots, m + (p - 1)\}$. Por exemplo, a seleção $\{1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, \cdots\}$ torna-se $\{1, 2, 3, 6, 8, 10, 11, \cdots\}$.

Como cada seleção será então unicamente identificada como uma seleção de p inteiros distintos dos inteiros $1, 2, \cdots, n + (p - 1)$, nós provamos a fórmula em (2.6).

□

A seguir, provaremos que o número de combinações completas de k dos n elementos é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$.

Proposição 2.8.3 (Soluções inteiras não negativas). *Dados $n, k \in \mathbb{N}$, a equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ tem exatamente $\binom{n+k-1}{k}$ soluções inteiras não negativas.*

Apresentaremos a seguir duas demonstrações desta proposição. Na primeira transformamos uma sequência numérica arbitrária em uma sequência monótona não decrescente. Já na segunda utilizamos um método surpreendentemente simples para resolver problemas difíceis. A decisão de apresentar duas ao invés de apenas uma demonstração se justifica no fato de que os raciocínios utilizados nos dois métodos são indispensáveis para se atacar problemas de combinações com repetição, uma vez que tanto um quanto o outro precisarão ser usados na resolução, dependendo do tipo do problema em questão.

Demonstração 1. Considere uma sequência $(a_1, \cdots, a_{n+k-1})$ de $n + k - 1$ termos, sendo $n - 1$ deles iguais a 0 e k iguais a 1, e sejam $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq n + k - 1$ os índices dos termos da sequência iguais a 0.

Há exatamente $x_1 = i_1 - 1 \geq 0$ termos anteriores a a_{i_1} (que é o i -ésimo termo), $x_2 = i_2 - i_1 - 1 \geq 0$ termos entre a_{i_1} e a_{i_2} , $\cdots$, $x_n = (n + k - 1) - i_{n-1} \geq 0$ termos posteriores a $a_{i_{n-1}}$.

Como todos tais termos são iguais a 1 e há precisamente k termos iguais a 1, segue que $x_1 + \cdots + x_n = k$.

Assim, a partir de cada sequência $(a_1, \cdots, a_{n+k-1})$ descrita como acima, obtemos uma solução, em inteiros não negativos, da equação do enunciado.

Reciprocamente, dada uma solução $x_i = j_i, \cdots, x_n = j_n$ em inteiros não negativos da equação do enunciado, podemos formar uma sequência $(a_1, \cdots, a_{n+k-1})$ como acima, fazendo os termos de índices $j_1 + 1, j_1 + j_2 + 2, j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-1} + (n - 1)$ iguais a 0 e todos os demais iguais a 1.

Portanto, pela proposição (2.1.4) (*Princípio bijetivo*) basta contarmos quantas são tais sequências, o que é muito simples de fazer: basta escolhermos um subconjunto de $n - 1$ elementos do conjunto dos $n + k - 1$ índices possíveis, fazendo em seguida, todos os termos correspondentes aos índices escolhidos iguais a 0 e os demais termos iguais a 1.

Portanto, pela proposição (2.6.1) (*Combinações simples*), há $\binom{n+k-1}{n-1}$ escolhas possíveis.

Agora, note que

$$\begin{aligned} \binom{n+k-1}{n-1} &= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! [(n+k-1) - (n-1)]!} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

Daí, concluímos que a equação $x_1 + \dots + x_n = k$ tem exatamente $\binom{n+k-1}{k}$ soluções inteiras não negativas.

□

Demonstração 2. (Esquema bola-traço) Dado um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n elementos, qualquer k -multiconjunto construído a partir de seus elementos pode ser codificado em uma lista do tipo bola-e-traço com k bolas e $n - 1$ traços verticais como mostrado na figura 5.

Figura 5 – Esquema bola-traço.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como exemplo, contaremos parcialmente os multiconjuntos de cardinalidade 5 construídos a partir do conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

Observe que se um elemento de X não aparece no multiconjunto, ainda assim escrevemos a(s) barra(s) que o separaria dos demais. Uma parte desta contagem pode ser vista na figura 6.

Figura 6 – Bijeção multiconjunto sequência ordenada.

Multiconjunto	com barras de separação	codificação	(x_1, x_2, x_3, x_4)
$\{a, a, b, c, d\}$	$aa b c d$	$\bullet\bullet \bullet \bullet \bullet$	$(2, 1, 1, 1)$
$\{a, b, b, c, d\}$	$a bb c d$	$\bullet \bullet\bullet \bullet \bullet$	$(1, 2, 1, 1)$
$\{a, b, c, c, d\}$	$a b cc d$	$\bullet \bullet \bullet\bullet \bullet$	$(1, 1, 2, 1)$
$\{a, a, c, c, d\}$	$aa cc d$	$\bullet\bullet \bullet\bullet \bullet$	$(2, 0, 2, 1)$
$\{b, b, d, d, d\}$	$ bb ddd$	$ \bullet\bullet \bullet\bullet\bullet$	$(0, 2, 0, 3)$
$\{a, a, a, a, a\}$	$aaaaa $	$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet $	$(5, 0, 0, 0)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estabeleceremos agora duas bijeções

$$f : M \rightarrow C \text{ e } g : C \rightarrow S.$$

A primeira bijeção f entre o conjunto M de todos os multiconjuntos de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e o conjunto C de todas as codificações correspondentes dos elementos de M , no esquema bola-traço, fazendo corresponder cada elemento de M a um único elemento de C .

A segunda bijeção g entre o conjuntos C e o conjunto S das respectivas sequências associadas a cada elemento de C , onde estas tais sequências são soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

Podemos fazer isto, em particular, através da seguinte equivalência (figura 7)

Figura 7 – Equivalência multiconjunto sequência ordenada.

$$\begin{aligned} \{a, a, b, c, d\} &\leftrightarrow \bullet\bullet|\bullet|\bullet|\bullet \leftrightarrow (2, 1, 1, 1) \\ \{a, a, c, c, d\} &\leftrightarrow \bullet\bullet||\bullet\bullet|\bullet \leftrightarrow (2, 0, 2, 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, observe que cada elemento do conjunto C de todas as codificações é formado por uma lista de k bolas e $n-1$ traços. Assim, contar os elementos de C é equivalente a determinar o número de anagramas de uma palavra com repetição de letras, o qual pode ser obtido através do cálculo do número de permutações com repetição, do seguinte modo

$$P_{n+k-1}^{k,n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Como $f : M \rightarrow C$ e $g : C \rightarrow S$ são bijeções, $h = g \circ f : M \rightarrow S$ é também uma bijeção.

Portanto, a equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ possui $\binom{n+k-1}{k}$ soluções inteiras não negativas.

□

Proposição 2.8.4 (Soluções inteiras positivas). *Dados $n, k \in \mathbb{N}$, a equação $x_1 + \cdots + x_k = n$ tem exatamente $\binom{n-1}{k-1}$ soluções inteiras positivas.*

Demonstração. Se $y_i = x_i - 1$ para $1 \leq i \leq k$, a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ se transforma em $(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + \cdots + (y_k + 1) = n$, o que é equivalente a $y_i \geq 0$ e $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k$. Pela proposição (2.8.3) (Soluções inteiras não negativas) existem

$$\binom{(n-k) + k - 1}{k - 1} = \binom{n-1}{k-1}$$

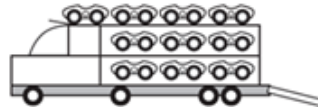
k -uplas ordenadas $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ de inteiros positivos satisfazendo a equação

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k.$$

Assim, concluímos que existem $\binom{n-1}{k-1}$ k -uplas ordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de inteiros positivos satisfazendo a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ □

Exemplo 2.8.1 (ENEM 2017). *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura 8.*

Figura 8 – Brinquedo caminhão-cegonha.



Fonte: ENEM.

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A) $C_{6,4}$

B) $C_{9,3}$

C) $C_{10,4}$

D) 6^4

E) 4^6 .

Solução: Sejam A , B , L e V a quantidade de carrinhos das cores amarelo, branco, laranja e verde, respectivamente. Assim,

$$A + B + L + V = 10 \quad (2.7)$$

Fazendo $A = x_1$, $B = x_2$, $L = x_3$ e $V = x_4$ podemos reescrever a equação (2.7) como

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad (2.8)$$

que possui soluções inteiras não negativas. Como deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis, esta equação admite somente soluções inteiras positivas.

Fazendo $x_1 = 1 + y_1$, $x_2 = 1 + y_2$, $x_3 = 1 + y_3$ e $x_4 = 1 + y_4$ a equação (2.8) se transforma em

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

que possui soluções inteiras positivas.

Pela proposição (2.8.4) (*Soluções inteiras positivas*) existem

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = C_{9,3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84 \text{ modelos.}$$

Alternativa B.

3 Métodos Avançados de Contagem

3.1 O Princípio da Inclusão-Exclusão

O Princípio da Inclusão-Exclusão é útil para a contagem dos elementos da união de conjuntos com sobreposições de elementos, ou seja, cujas intersecções não são o conjunto vazio. Uma pergunta que surge naturalmente é: qual é o tamanho de uma união de conjuntos? Um dos nossos primeiros princípios de contagem foi o princípio aditivo, que afirma que o tamanho de uma união de conjuntos disjuntos é a soma de seus tamanhos. Calcular o tamanho de conjuntos sobrepostos requer, naturalmente, informações sobre como eles se sobrepõem. Levar essas informações em consideração nos permitirá desenvolver uma extensão poderosa do princípio aditivo, conhecida como "princípio da inclusão-exclusão".

Proposição 3.1.1 (Princípio da Inclusão-Exclusão para 2 conjuntos). *Sejam A e B conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos.*

Então,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (3.1)$$

Demonstração. Como A e $B - A$ são conjuntos disjuntos e tais que $A \cup B = A \cup (B - A)$, temos $|A \cup B| = |A| + |B - A|$. Por outro lado, temos também a união disjunta $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, donde segue que $|B| = |A \cap B| + |B - A|$. Substituindo essa relação na expressão para $|A \cup B|$, obtemos $|A \cup B| = |A| + (|B| - |A \cap B|)$. $\square$

A seguir demonstraremos o princípio da Inclusão-Exclusão para 3 conjuntos. Essa demonstração nos ajuda a entender melhor a demonstração do caso geral.

Proposição 3.1.2 (Princípio da Inclusão-Exclusão para 3 conjuntos). *Sejam A , B e C conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos.*

Então

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (3.2)$$

Demonstração. [10] Aplicando a proposição (3.1.1) temos:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |(A \cup B)| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a proposição (3.1.1), agora no primeiro e no terceiro termo da linha acima, obtemos

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Proposição 3.1.3 (Generalização do princípio da inclusão-exclusão). *Sejam $A_1, \dots, A_n$ conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos.*

Então

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| &= \sum_{k=1}^n |A_k| \\ &\quad - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2}| \\ &\quad + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}| \\ &\quad - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3} \cap A_{k_4}| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Antes de provar o Princípio de Inclusão-Exclusão, apresentamos uma forma muito elegante e sucinta de se escrever (3.3), que é a seguinte:

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \tag{3.4}$$

Como as expressões nos membros direitos de (3.3) e (3.4) coincidem, provar (3.3) é equivalente a provar (3.4).

Apresentaremos a seguir duas demonstrações do princípio da inclusão-exclusão. Na primeira delas utilizaremos o método indutivo e, na segunda, um raciocínio combinatório. A decisão de apresentar duas demonstrações ao invés de uma, está pautada no fato de que tanto o raciocínio utilizado em um método quanto o utilizado no outro, são imprescindíveis na resolução de problemas deste tipo. Além disso, a junção deles proporciona um domínio aprofundado do conteúdo.

Demonstração 1. Utilizando a expressão (3.4) faremos indução no número de conjuntos seguindo a mesma ideia da demonstração da proposição (3.1.2) (*Princípio da Inclusão-Exclusão para 3 conjuntos*).

Para $n = 2$, o resultado já foi provado na proposição (3.1.1). Considere, portanto, que a expressão (3.4) seja verdadeira para algum $n \geq 2$, e sejam $A_1, \dots, A_{n+1}$ conjuntos finitos. Usando a proposição (3.1.1) (*Princípio da Inclusão-Exclusão para 2 conjuntos*), observe que

$$\begin{aligned}
 \left| \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right| &= \left| \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup A_{n+1} \right| \\
 &= \left| \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \right| + |A_{n+1}| - \left| \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cap A_{n+1} \right| \\
 &= \left| \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \right| + |A_{n+1}| - \left| \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1}) \right|. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução no primeiro e no terceiro termo de (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
 \left| \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right| &= \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \right) + |A_{n+1}| \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1}) \right| \\
 &= \sum_{k=1}^n |A_k| + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1}) \right| \\
 &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}| \\
 l-1 = k \quad \therefore \quad l &= k+1 \\
 &= \sum_{k=1}^n |A_k| + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\
 &\quad + \sum_{l=2}^{n-1} (-1)^{l-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=l}} \left| \bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1}) \right| + (-1)^{(n+1)-1} |A_j \cap \dots \cap A_{n+1}| \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} |A_k| + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + (-1)^{(n+1)-1} |A_j \cap \dots \cap A_{n+1}| \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|
 \end{aligned}$$

Note que, no primeiro somatório acima, há apenas intersecções de conjuntos que não incluem A_{n+1} , enquanto que, no segundo somatório, todas as intersecções incluem o conjunto A_{n+1} . Com isso em mente, podemos concluir que

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

e, portanto, vale (3.4) para todo $n \geq 2$, pelo Princípio da Indução Finita.

□

Observação(1): A expressão (3.4) acima também poderia ser reescrita da seguinte forma

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \quad (3.6)$$

a última soma acima se estendendo a todas as sequências $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, tais que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Demonstração 2. [6] Provaremos a proposição utilizando um argumento combinatório. Para isto, reescreveremos a fórmula (3.4) um pouco mais explicitamente

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|. \quad (3.7)$$

Precisamos mostrar que um elemento que pertença a p ($p = 1, 2, 3, \dots, n$) dos subconjuntos A_i 's é contado por (3.7) exatamente uma vez.

Fixe $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ e suponha que x pertence a exatamente p dos subconjuntos, digamos $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$. Este elemento será contado p vezes em

$$\sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Em

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

será contado $\binom{p}{2}$, em

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$\binom{p}{3}$, e assim sucessivamente até o termo $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}|$, que nos dará um resultado igual a 1. É claro que a intersecção de mais do que p subconjuntos não fornecerá nenhuma contribuição.

Assim, para $1 \leq k \leq n$ fixado, x é contado no somatório

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

tantas vezes quantas forem as sequências $(i_1, \dots, i_k)$ tais que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ e $x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$. Como x pertence a p dos conjuntos dados, há tantas sequências quantos forem os modos de escolher k desses p conjuntos, ou seja, há $\binom{p}{k}$ tais sequências.

Portanto, o número de vezes que x é contado no segundo membro de (3.7) é igual a

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \binom{p}{k} \quad (3.8)$$

$$= \binom{p}{0} - \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k}. \quad (3.9)$$

Note que aplicando a fórmula da expansão binomial (também conhecida como Binômio de Newton)

$$(a - b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$$

na segunda parcela de (3.9), tomando $a = -1$ e $b = 1$, obtemos

$$0 = (1 - 1)^p = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k}.$$

Daí, e de (3.8) e (3.9), obtemos

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} = \binom{p}{0} - 0 = 1 - 0 = 1,$$

como já era esperado, pois um elemento não deve ser contado mais de uma vez.

Note que o segundos membros das fórmulas (3.8) e (3.9) são iguais pois

$$\begin{aligned} \binom{p}{0} - \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} &= \binom{p}{0} - \left[\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \binom{p}{4} - \dots \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{p-1} + (-1)^p \binom{p}{p} \right] \\ &= \binom{p}{0} - \left[\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \binom{p}{4} - \dots \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{p-1} + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} \right] \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \binom{p}{k}. \end{aligned}$$

Por outro lado, é claro que se $x \notin A_1 \cup \dots \cup A_n$, então x é contado 0 vezes no segundo membro de (3.7) e segue, daí, que o segundo membro de (3.7) conta precisamente quantos são os elementos de $A_1 \cup \dots \cup A_n$. $\square$

3.2 Permutações Caóticas

Definição 3.2.1 (Permutação caótica). *Uma permutação dos números $(1, 2, \dots, n)$ é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo.*

Por exemplo, considerando o número 1234, as permutações 2143 e 3142 são caóticas mas 1342 não é (1 está no seu lugar primitivo).

Problemas de permutações caóticas surgem no dia-a-dia das pessoas de forma bastante natural. O *Problema do amigo oculto*, onde nenhuma das pessoas presentes podem retirar o próprio nome, e o *Problema das cartas mal endereçadas* (Exemplo 3.2.1), que será mostrado mais a frente, onde o carteiro entrega todas as cartas no endereço errado, são exemplos clássicos de situações em que o uso de permutações caóticas se faz necessário.

Proposição 3.2.2. *O número D_n de permutações caóticas de $(1, 2, \dots, n)$ é*

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

Demonstração. Seja A_i o conjunto das permutações de $(1, 2, \dots, n)$ em que o número i ocupa o i -ésimo lugar, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Assim, $|A_i| = (n-1)!$ pois é o número de permutações de $n-1$ elementos.

Queremos calcular o número de elementos do conjunto Ω das permutações de $(1, 2, \dots, n)$ que não pertencem a algum dos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Seja S_k o número de permutações que fixam k elementos.

Note que

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \\
S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2} \cdot (n-2)! \\
&= \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!} \\
S_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (n-3)! = \binom{n}{3} \cdot (n-3)! \\
&= \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!} \\
&\vdots \\
S_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 1 = \frac{n!}{n!}.
\end{aligned}$$

Observe que $S_k = \frac{n!}{k!}$, para $1 \leq k \leq n$. Dessa forma,

$$|\Omega| = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

Pela proposição (3.1.3) (Princípio da Inclusão-Exclusão), temos

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot S_k \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{n!}{k!}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{n!}{k!} \\
&= n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} \\
&= n! + \left[-\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n! \cdot (-1)^n}{n!} \right] \\
&= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]
\end{aligned}$$

Logo, o número de permutações caóticas (desarranjos) de $(1, 2, \dots, n)$ é

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

□

Observação(1): Na disciplina de Cálculo na graduação aprendemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Para $x = -1$, temos

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_n &= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] \\ &= n! \cdot \frac{1}{e} \\ &= \frac{n!}{e} \end{aligned}$$

Portanto, o número de permutações caóticas de n elementos D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$

Exemplo 3.2.1 (O problema das cartas mal endereçadas). *Há um novo carteiro no bairro. Infelizmente ele tem o péssimo hábito de entregar as cartas nas casas erradas. Na verdade, em uma rua com n casas, cada casa recebeu uma carta, mas ele colocou cada carta na casa errada. Suponha que uma certa rua existe apenas quatro casas e ele entregou uma carta em cada casa, mas todas as quatro cartas forem entregues em casas erradas.*

De quantas maneiras ele pode fazer isso?

Solução: Sejam 1,2,3,4 os números das cartas e 1,2,3,4 os números das casas.

Seja

A_1 o número de entregas com carta 1 entregue na casa 1

A_2 o número de entregas com carta 2 entregue na casa 2

A_3 o número de entregas com carta 3 entregue na casa 3

A_4 o número de entregas com carta 4 entregue na casa 4

Para $|A_1|$, a carta 1 vai para a casa 1 e assim, restam três opções de cartas para a casa 2, depois duas opções para a casa 3 e finalmente uma para a casa 4. Portanto, $|A_1| = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

De modo semelhante, $|A_2| = |A_3| = |A_4| = 6$.

Para $|A_1 \cap A_2|$, a carta 1 vai para a casa 1 e a carta 2 para a casa 2. Isto dá duas opções para a casa 3 e uma opção para a casa 4. Portanto, $|A_1 \cap A_2| = 2 \cdot 1 = 2!$.

De modo análogo, $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 2$.

Para $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, como três cartas já foram entregues, a carta 4 só pode ser entregue na casa 4, ou seja, uma opção. Então, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.

E semelhantemente para $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4|$ e $|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

Finalmente $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$ é obviamente 1.

Então, juntando tudo isso temos

$$\begin{aligned} S_1 &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 6 + 6 + 6 + 6 = 24 = \frac{4!}{1!} \\ S_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 = \frac{4!}{2!} \\ S_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = \frac{4!}{3!} \\ S_4 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1 = \frac{4!}{4!} \end{aligned}$$

Juntando tudo temos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 24 - 12 + 4 - 1 = 15$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_4 &= P_4 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= 4! - (S_1 - S_2 + S_3 - S_4) \\ &= 24 - 15 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Outra maneira de calcular a quantidade destas permutações é utilizando a fórmula apresentada na proposição (3.2.2). Assim,

$$\begin{aligned}
 D_4 &= 4! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] \\
 &= \frac{4!}{0!} - \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} \\
 &= 4! - 4! + (4 \cdot 3) - 4 + 1 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

Portanto, as 9 permutações caóticas são 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 e 4321, conforme mostrado na figura 9.

Figura 9 – Permutações caóticas.

casa 1	casa 2	casa 3	casa 4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 3.2.2 (OBMEP - Nível 3). *Cinco bolas numeradas de 1 a 5 estão dentro de cinco caixas tampadas, também numeradas de 1 a 5. Em cada caixa há somente uma bola, e sabe-se que apenas uma caixa está numerada com o mesmo número de sua bola. Qual é o número mínimo de tampas que devemos abrir para descobrir, com certeza, que caixa é essa?*

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Figura 10 – Bolas e caixas.



Fonte: OBMEP.

Solução:

As 5 bolas podem ser permutadas entre as 5 caixas de $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ modos distintos. Como somente uma caixa contém a bola com número igual ao número da caixa, todas as outras 4 caixas restantes possuem uma bola cada e seu número é diferente do número da caixa. Assim, as bolas destas 4 caixas devem permutar desordenadamente sem que nenhuma destas caixas contenha bola cujo número coincida

com o da caixa. Logo, se trata de um caso de permutação caótica de 4 elementos que é igual a

$$D_4 = 4! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \times 3 - 4 + 1 = 9.$$

Para determinarmos o número mínimo de caixas que deveremos abrir satisfazendo as condições do problema basta dividirmos o número de permutações das 5 bolas por cinco vezes o número de permutações caóticas de 4 bolas, que é dado por

$$\frac{P_5}{5 \times D_4} = \frac{120}{5 \times 9} = \frac{120}{45} = 2, \bar{6}.$$

Portanto, para termos a certeza que abriremos uma caixa que contenha o número da bola igual ao número da caixa, precisarem abrir no mínimo 3 caixas.

3.3 Os Lemas de Kaplansky

Definição 3.3.1 (p-subconjunto). *Dado um conjunto A com n elementos, dizemos que B é um p-subconjunto de A , $p \leq n$, se B é formado exclusivamente por p dos elementos de A . Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ é um 3-subconjunto de A , ou seja, um subconjunto de A de tamanho 3.*

Proposição 3.3.2 (Primeiro Lema de Kaplansky). *O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é*

$$f(n, p) = \binom{p}{n - p + 1} \quad (3.10)$$

Demonstração. Estabeleceremos uma bijeção entre o conjunto dos p-subconjuntos nos quais não há números consecutivos e o conjunto das filas de tamanho n formadas de sinais $+$ e $-$. Cada p-subconjunto é associado a uma única fila de n sinais da seguinte forma: se um determinado número $1 \leq a_i = i \leq n$ faz parte de um certo p-subconjunto colocaremos um sinal $+$ na posição i da fila. Caso contrário, colocamos um sinal $-$. Por exemplo, para $n = 7$ e $p = 2$, o subconjunto $\{1, 3, 5\}$ será unicamente relacionado com a lista $+ - + - + - -$. Assim, temos p sinais $(+)$ e $n - p$ sinais $(-)$ para arrumar sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Temos 1 modo de colocar os sinais $-$ (que é colocar um sinal $-$ entre cada um dos p sinais $+$) e $\binom{p}{n - p + 1}$ modos de colocar os sinais $+$. Aplicando a proposição (2.3.1)(Princípio multiplicativo), concluímos que o número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é

$$f(n, p) = 1 \cdot \binom{p}{n - p + 1} = \binom{p}{n - p + 1}$$

□

Exemplo 3.3.1 (OBMEP - Nível 3). As 6 cadeiras de uma fila são numeradas de 1 a 6 e devem ser ocupadas uma de cada vez de modo que, sempre que possível, é escolhida uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Por exemplo, é válida a ordem de ocupação 1 6 3 2 4 5, em que a primeira pessoa ocupa a cadeira 1, a segunda, a cadeira 6, a terceira, a cadeira 3, a quarta, a cadeira 2, a quinta, a cadeira 4 e a última, a cadeira 5. Já a ordem 1 5 2 3 6 4 não é válida, pois a terceira pessoa sentou-se ao lado da primeira quando poderia ter se sentado em uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Quantas ordens de ocupação válidas existem?

- A) 72
- B) 108
- C) 144
- D) 192
- E) 216

Figura 11 – Cadeiras numeradas.



Fonte: OBMEP.

Solução: Podemos imaginar, inicialmente, que nossa primeira decisão é a escolha dos três primeiros lugares sem que haja cadeiras consecutivas. Isso pode ser feito de $f(6, 3) = C_4^3 = 4$ maneiras. Porém, como a ordem de ocupação desses lugares resulta em soluções diferentes, temos $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de acomodação para essas 4 maneiras. Logo, há $4 \times 6 = 24$ possibilidades para as três primeiras ocupações. E para as três ocupações seguintes temos, também, $4 \times 6 = 24$ possibilidades de escolha. Pelo Princípio Multiplicativo, há $24 \times 6 = 144$ soluções. Entretanto, existe também a possibilidade de iniciar a ocupação com as cadeiras 2 e 5. Isso pode ocorrer de $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$ modos. Logo em seguida, temos $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modos para as quatro ocupações seguintes. Novamente pelo Princípio Multiplicativo, há $2 \times 24 = 48$ soluções. Assim, pelo princípio aditivo, há $144 + 48 = 192$ maneiras de ocupação. Alternativa D.

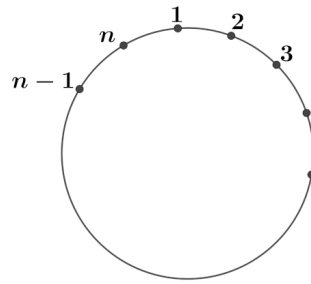
Observe que desse jeito foi mais rápido que pelo princípio multiplicativo.

Proposição 3.3.3 (Segundo Lema de Kaplansky). O número de p -subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} \binom{p}{n-p} \quad (3.11)$$

Demonstração. Suponhamos agora que os elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ estejam arrumados em círculo, como na figura 12.

Figura 12 – 2º Lema de Kaplansky



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora os elementos “1” e “n” são consecutivos. De quantos modos é possível formar um p -subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$ no qual não haja números consecutivos? Ora, o número total de subconjuntos será a soma do número de subconjuntos nos quais o elemento “1” figura com o número de subconjuntos nos quais o elemento “1” não figura. Analisemos os dois casos:

a) Subconjuntos nos quais o elemento “1” figura

Para formá-los devemos escolher $p-1$ elementos em $\{3, 4, \dots, n-1\}$ (pois se o “1” figura, o “2” e o “n” não podem figurar) para serem os companheiros do “1” no subconjunto, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Pela proposição (3.3.2) (Primeiro Lema de Kaplansky), o número de modos que isso pode ser feito é

$$f(n-3, p-1) = \binom{p-1}{n-3-(p-1)+1} = \binom{p-1}{n-p-1}$$

b) Subconjuntos nos quais o elemento “1” não figura

Para formá-los devemos escolher p elementos em $\{2, 3, \dots, n\}$, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Novamente pela proposição (3.3.2) (Primeiro Lema de Kaplansky), isso pode ser feito de

$$f(n-1, p) = \binom{p}{n-1-p+1} = \binom{p}{n-p}$$

modos. Como os casos (a) e (b) são disjuntos, pela proposição (2.2.1) (Princípio aditivo),

temos que

$$\begin{aligned}
 \binom{n-p-1}{p-1} + \binom{n-p}{p} &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
 &= \frac{(n-p-1)! + (n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
 &= (n-p-1)! \frac{p + (n-p)}{p!(n-2p)!} \\
 &= n \frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\
 &= \frac{n}{n-p} \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
 &= \frac{n}{n-p} \binom{n-p}{p}
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3.2 (IME). *Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.*

Solução: Imagine os doze cavaleiros em um círculo. Devemos escolher cinco sem que haja cavaleiros consecutivos.

1º Caso: Se o cavaleiro 1 pertence ao grupo, então devemos escolher 4 cavaleiros do conjunto $\{3, 4, 5, \dots, 11\}$ (como o 1 já figura no conjunto, não podemos ter os cavaleiros 2 e 12) tomando o cuidado de não pegarmos cavaleiros consecutivos. Pela proposição (3.3.2)(1º Lema de Kaplansky), isso pode ser feito de

$$f(9, 4) = C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

maneiras.

2º Caso: Se o cavaleiro 1 não pertence ao grupo, então devemos escolher 5 cavaleiros do conjunto $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ de modo que não haja cavaleiros consecutivos. Novamente, pela proposição (3.3.2)(1º Lema de Kaplansky), isso pode ser feito de

$$f(11, 5) = C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

maneiras.

Portanto, pela proposição (2.2.1) (Princípio aditivo), há $15 + 21 = 36$ grupos.

Utilizando a notação do Segundo Lema de Kaplansky (proposição 3.3.3),

$$g(12, 5) = \frac{12}{(12-5)} \cdot C_{12-5}^5 = \frac{12}{7} \cdot C_7^5 = 36$$

grupos.

3.4 Contagem Via Recorrência

Definição 3.4.1 (Sequência de Fibonacci).

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 & F_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots) \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n > 0 & F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{cases}$$

Exemplo 3.4.1 (Sequência de Fibonacci). *Suponha que um casal de coelhos está apto a gerar descendentes quando completa dois meses de vida, gerando, então, um novo casal de coelhos a cada mês. Se tivermos inicialmente, em um ambiente isolado, um casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais teremos após 12 meses?*

Solução: Denote por F_n a quantidade de casais de coelhos após n meses, de maneira que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ (o primeiro casal de descendentes só nasce no início do terceiro mês). Consideremos agora a quantidade F_{k+2} de casais existentes após $k+2$ meses. Há duas possibilidades para um tal casal: ou ele já existia após $k+1$ meses, ou ele nasceu no $(k+2)$ -ésimo mês (mês seguinte). O primeiro caso corresponde a um total de F_{k+1} casais; no segundo caso, nosso casal descende de um dos casais que já existiam após k meses (e, reciprocamente, cada um dos casais que existiam após k meses gera um casal de descendentes que será contabilizado após o $(k+2)$ -ésimo mês), o que nos dá F_k casais após $k+2$ meses. Portanto, as quantidades de casais após k , $k+1$ e $k+2$ meses relacionam-se pela igualdade

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 \\ F_7 &= F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13 \\ F_8 &= F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21 \\ F_9 &= F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34 \\ F_{10} &= F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55 \\ F_{11} &= F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89 \\ F_{12} &= F_{11} + F_{10} = 89 + 55 = 144 \end{aligned}$$

Portanto, após 12 meses há 144 casais.

Exemplo 3.4.2 (Clubes de Matemática da OBMEP). *Em uma bancada há 4 lâmpadas enfileiradas, podendo cada uma estar ligada ou desligada. Quantas são as configurações possíveis de tal maneira que não haja lâmpadas adjacentes ligadas?*

Solução: Vamos separar o problema em casos.

1º Caso: Nenhuma lâmpada acesa: Apenas uma solução.

D D D D

2º Caso: Apenas uma lâmpada acesa: Quatro soluções.

L D D D

D L D D

D D L D

D D D L

3º Caso: Duas lâmpadas acesas: Três soluções.

L D L D

L D D L

D L D L

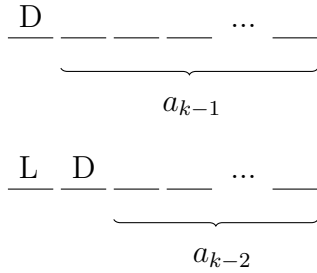
Portanto, há 8 configurações possíveis.

O exemplo 1 é um problema razoavelmente simples. Agora, vejamos o que acontece se nós modificarmos esse problema para 10 lâmpadas. O que inicialmente era fácil, parece que se tornou extremamente complicado. Uma das maneiras muito utilizadas para enfrentar este tipo de desafio é atacar o problema utilizando um raciocínio recursivo. Veremos como tal procedimento pode ser realizado no exemplo 2 a seguir. (Outra maneira seria utilizar funções geradoras).

Exemplo 3.4.3 (Clubes de Matemática da OBMEP). *Em uma bancada há 10 lâmpadas enfileiradas, podendo cada uma estar ligada ou desligada. Quantas são as configurações possíveis de tal maneira que não haja lâmpadas adjacentes ligadas?*

Solução: Para $n \geq 1$, seja a_n o número de filas de n lâmpadas satisfazendo as condições do enunciado. A primeira lâmpada da fila pode estar ligada (L) ou desligada (D). Para $k \geq 3$, se a 1ª lâmpada da fila estiver desligada, as $k - 1$ lâmpadas restantes podem formar qualquer uma das a_{k-1} filas de $k - 1$ lâmpadas satisfazendo as condições do enunciado; se a 1ª lâmpada estiver ligada, a 2ª lâmpada deve necessariamente estar desligada (uma vez que não podemos ter duas lâmpadas adjacentes ligadas) e as $k -$

2 lâmpadas restantes podem formar qualquer uma das a_{k-2} filas de $k - 2$ lâmpadas satisfazendo as condições do enunciado.



O argumento do parágrafo anterior nos fornece a relação de recorrência

$$a_k = \underbrace{a_{k-1}}_{1st \text{ lâmpada desligada}} + \underbrace{a_{k-2}}_{1st \text{ lâmpada ligada}}, \quad k \geq 3$$

Como $a_1 = 2$ (D ; L) e $a_2 = 3$ (as possíveis filas de duas lâmpadas são DD, DL ou LD), temos sucessivamente

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34$$

$$a_8 = a_7 + a_6 = 34 + 21 = 55$$

$$a_9 = a_8 + a_7 = 55 + 34 = 89$$

$$a_{10} = a_9 + a_8 = 89 + 55 = 144$$

Portanto, há 144 configurações possíveis.

De forma surpreendente, a solução do problema das lâmpadas (exemplos 1 e 2) é obtida pelo deslocamento dos termos da Sequência de Fibonacci através da relação

$$L_n = F_{n+2}.$$

Definição 3.4.2. *Palavras, com ou sem significado, formadas pelas permutações de letras, são denominadas de anagramas.*

Exemplo 3.4.4. *Quantos anagramas de dez letras podemos formar com as letras A, B e C, de modo que não haja duas consoantes consecutivas.*

Solução: Para $n \geq 1$, seja a_n o número de palavras de n letras satisfazendo as condições do enunciado. Para $k \geq 3$, uma palavra de k letras pode terminar em A, B ou

C . Se terminar em A , as $k - 1$ letras anteriores podem formar qualquer uma das a_{k-1} palavras de $k - 1$ letras satisfazendo as condições do enunciado; se terminar em B ou C , a penúltima letra deve necessariamente ser A (uma vez que não podemos ter duas consoantes consecutivas) e as $k - 2$ letras iniciais podem formar qualquer uma das a_{k-2} palavras de $k - 2$ letras satisfazendo as condições do enunciado.

$$\begin{array}{c}
 \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \dots \underline{\quad} \underline{A} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} \\
 a_{k-1} \\
 \\
 \underline{\quad} \underline{\quad} \dots \underline{\quad} \underline{A} \underline{B} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} \\
 a_{k-2} \\
 \\
 \underline{\quad} \underline{\quad} \dots \underline{\quad} \underline{A} \underline{C} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} \\
 a_{k-2}
 \end{array}$$

O argumento do parágrafo anterior nos fornece a relação de recorrência

$$a_k = \underbrace{a_{k-1}}_{\text{terminando em } A} + \underbrace{2a_{k-2}}_{\text{terminando em } B \text{ ou } C}, \quad k \geq 3$$

Como $a_1 = 3$ ($A; B; C$) e $a_2 = 5$ (as possíveis palavras de duas letras são AA , AB , AC , BA ou CA), temos sucessivamente

$$\begin{aligned}
 a_3 &= a_2 + 2a_1 = 5 + 2 \cdot 3 = 11 \\
 a_4 &= a_3 + 2a_2 = 11 + 2 \cdot 5 = 21 \\
 a_5 &= a_4 + 2a_3 = 21 + 2 \cdot 11 = 43 \\
 a_6 &= a_5 + 2a_4 = 43 + 2 \cdot 21 = 85 \\
 a_7 &= a_6 + 2a_5 = 85 + 2 \cdot 43 = 171 \\
 a_8 &= a_7 + 2a_6 = 171 + 2 \cdot 85 = 341 \\
 a_9 &= a_8 + 2a_7 = 341 + 2 \cdot 171 = 683 \\
 a_{10} &= a_9 + 2a_8 = 683 + 2 \cdot 341 = 1\,365
 \end{aligned}$$

Portanto, há 1 365 palavras possíveis.

3.5 O Princípio da Casa dos Pombos

Nesta secção apresentaremos o Princípio da Casa dos Pombos, também conhecido como Princípio das Gavetas ou Princípio de Dirichlet, uma ferramenta aparentemente

inocente porém muito poderosa para atacar problemas olímpicos. De forma surpreendente, ele surge na resolução de problemas nos quais jamais poderia se esperar seu uso. Ao longo desta secção veremos alguns desses impressionantes problemas.

Proposição 3.5.1 (Princípio da Casa dos Pombos). *Se temos que distribuir n pombos em m casas com $m < n$, então pelo menos uma casa conterà dois ou mais pombos.*

Demonstração. Demonstraremos esta proposição através da contrapositiva.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_m$ a quantidade de pombos em cada casa e suponha que $x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, m$.

Assim,

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m}_{n \text{ pombos}} \leq m \text{ casas.}$$

O que é uma contradição pois assumimos inicialmente que $m < n$.

□

Exemplo 3.5.1 (Clubes de Matemática da OBMEP). *Em uma sala há n pessoas. Prove que dentre elas existem duas pessoas que possui o mesmo número de conhecidos na sala.*

Solução: Uma pessoa vai para dentro de um quarto i se ela tem i conhecidos. Nós temos n pessoas e n quartos numerados $0, 1, \dots, n-1$. Mas os quartos com os números 0 e $n-1$ não podem ser ocupados (eles não podem contar a si mesmos). Pela proposição 4.8.1 (Princípio da casa dos pombos), existe no mínimo um quarto com mais de uma pessoa, ou seja, existe mais de uma pessoa com o mesmo número de conhecidos.

Observe que, se nenhuma delas se conhecem, todas tem o mesmo número de conhecidos, isto é, zero. Suponha que uma das pessoas A possui um conhecido B na sala. Como A conhece B , B também conhece A , ou seja, as pessoas A e B possuem o mesmo número, 1 , de conhecidos.

Exemplo 3.5.2. *Um certo livreiro vende pelo menos um livro por dia. Sabendo que o livreiro vendeu 463 livros durante 305 dias consecutivos, mostre que em algum período de dias consecutivos o livreiro vendeu exatamente 144 livros.*

Solução: Seja a_i o número de livros vendidos até o i -ésimo dia, inclusive. Então a sequência de números inteiros positivos

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{305} \tag{3.12}$$

é uma sequência estritamente crescente pois no mínimo um livro é vendido a cada dia.

Portanto, temos

$$1 \leq a_1 < \dots < a_{305} = 463. \tag{3.13}$$

A sequência

$$a_1 + 144, a_2 + 144, \dots, a_{305} + 144 \quad (3.14)$$

também é uma sequência estritamente crescente.

Somando 144 a cada um dos termos de da equação (3.13) obtemos

$$145 \leq a_1 + 144 < a_2 + 144 < \dots < a_{305} + 144 = 463 + 144 = 607. \quad (3.15)$$

Considerando as duas sequências, (3.12) e (3.14), temos, no total, $2 \times 305 = 610$ números inteiros positivos, nenhum dos quais excede $463 + 144 = 607$.

Portanto, cada um dos 610 números

$$a_1, a_2, \dots, a_{305}, a_1 + 144, a_2 + 144, \dots, a_{305} + 144 \quad (3.16)$$

é um inteiro entre 1 e 607.

Como temos 610 números inteiros positivos e nenhum deles excede 607, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos dois desses 610 números devem ser iguais. No entanto, não há dois inteiros da sequência

$$a_1, a_2, \dots, a_{305}$$

que sejam iguais, uma vez que o livreiro vendeu pelo menos um livro por dia; da mesma forma, não há dois inteiros

$$a_1 + 144, a_2 + 144, \dots, a_{305} + 144$$

que sejam iguais. Portanto, devemos ter, para algum k e algum l , a igualdade

$$a_k = a_l + 144.$$

Esta equação afirma que

$$a_k - a_l = 144;$$

em uma sucessão de $k - l$ dias - do $(l + 1)^\circ$ ao k -ésimo, inclusive - o livreiro vendeu exatamente 144 livros.

Para ilustrar a situação suponha que nos quatro primeiros dias foram vendidos, respectivamente, 47, 48, 49 e 18 livros e que nos outros 301 dias restantes foram vendidos 1 livro em cada um deles, formando a sequência

$$47, 48, 49, 18, 1, 1, \dots, 1$$

Assim, nos 3 primeiros dias foram vendidos

$$47 + 48 + 49 = 144$$

livros, enquanto que, nos 305 dias foram vendidos

$$47 + 48 + 49 + 18 + 301 \times 1 = 144 + 18 + 301 = 463.$$

livros.

Exemplo 3.5.3 (jogador de xadrez). *Um mestre de xadrez que tem 11 semanas para se preparar para um torneio decide jogar todos os dias, mas, para não se cansar, concorda em jogar no máximo 12 partidas por semana. Prove que existe uma sucessão de dias durante os quais o mestre terá jogado exatamente 21 partidas.*

Solução: Como 11 semanas é equivalente a $11 \times 7 = 77$ dias, ele terá 77 dias para se preparar.

Começando com um dia inicial, digamos segunda-feira, suponha que o jogador de xadrez jogue a_1 partidas; na segunda e na terça-feira, ele joga a_2 partidas; no período de três dias, de segunda a quarta-feira, ele joga a_3 partidas, e assim por diante, até o final do 77º dia, ele terá jogado a_{77} partidas.

A sequência de números inteiros positivos

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{77} \tag{3.17}$$

é uma sequência estritamente crescente pois no mínimo uma partida é jogada cada dia.

Além disso, $a_1 \geq 1$, e como no máximo 12 partidas são jogadas durante qualquer semana, $a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$.

Portanto, temos

$$1 \leq a_1 < \dots < a_{77} \leq 11 \times 12 = 132. \tag{3.18}$$

A sequência

$$a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21 \tag{3.19}$$

também é uma sequência estritamente crescente.

Somando 21 a cada um dos termos da sequência (3.18) obtemos

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153. \tag{3.20}$$

Considerando as duas sequências, (3.17) e (3.19), temos, no total, $2 \times 77 = 154$ números inteiros, nenhum dos quais excede $132 + 21 = 153$, desde que a_{77} não exceda, de acordo com as condições impostas, $11 \times 12 = 132$ partidas jogadas em onze semanas.

Portanto, cada um dos 154 números

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21 \tag{3.21}$$

é um inteiro entre 1 e 153.

Como temos 154 números inteiros positivos e nenhum deles excede 153, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos dois desses 154 números inteiros devem ser iguais.

No entanto, não há dois inteiros da sequência

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}$$

que sejam iguais, uma vez que o jogador de xadrez jogou pelo menos uma partida por dia;

da mesma forma, não há dois inteiros

$$a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

que sejam iguais.

Portanto, devemos ter, para algum k e algum l , a igualdade

$$a_k = a_l + 21.$$

Esta equação afirma que

$$a_k - a_l = 21;$$

em uma sucessão de $k - l$ dias - do $(l + 1)^{\circ}$ ao k -ésimo, inclusive - o mestre de xadrez jogou exatamente 21 partidas.

Para ilustrar a situação suponha que os números de partidas jogadas nas primeiras duas semanas sejam, respectivamente,

$$(6, 1, 1, 1, 1, 1, 1, | 5, 2, 1, 1,) 1, 1, 1, \dots$$

Assim, nos 11 primeiros dias consecutivos seriam jogadas

$$6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 2 + 1 + 1 = 21$$

partidas.

Exemplo 3.5.4. *Dados 8 números inteiros mostre que existem dois deles que são divisíveis por 7.*

Há várias generalizações interessantes do princípio da casa dos pombos. A proposição a seguir mostra a que é, provavelmente, a mais útil de todas elas; para o enunciado da mesma lembre que, dado um real x , a **parte inteira** de x , denotada $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro menor ou igual a x . Por exemplo, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor x \rfloor = x$ se e só se $x \in \mathbb{Z}$ e, mais geralmente, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro n tal que

$$n \leq x < n + 1.$$

Proposição 3.5.2 (Princípio da Casa dos Pombos generalizado). *Se colocarmos n pombos em k casas, então pelo menos uma das casas conterá, no mínimo, $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que dispusemos os n pombos nas k casas mas nenhuma delas ficou com pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos. Então cada uma das k casas ficou com, no máximo, $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ pombos. Portanto, todas as casas juntas contêm, no máximo, $k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ pombos. Mas, como

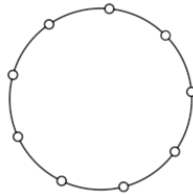
$$k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \leq k \left(\frac{n-1}{k} \right) = n-1 < n,$$

temos uma contradição.

□

Exemplo 3.5.5 (OBMEP 2022 1ª Fase Nível 3). *Os nove pontos da figura estão igualmente espaçados na circunferência. Maria quer pintar alguns desses pontos de tal forma que **não** exista triângulo equilátero cujos vértices estejam todos pintados. Qual é o maior número de pontos que ela pode pintar? Figura 13.*

Figura 13 – Pontos no círculo.

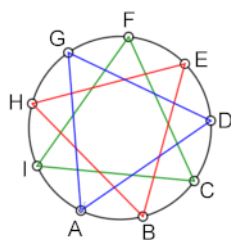


Fonte: Elaborado pelo autor.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Solução: Considerando os 9 pontos como os objetos e os 3 triângulos equiláteros como as gavetas, para que Maria consiga pintar a maior quantidade de pontos sem formar nenhum triângulo equilátero ela terá que pintar apenas dois dos três pontos de cada um dos triângulos equiláteros. Pela proposição 4.8.2 (Princípio das gavetas generalizado) como $9 > 3 \cdot (3 - 2) = 6$, temos que existe no máximo 6 pontos (2 de cada triângulo) que podem ser pintados sem que tenhamos um triângulo equilátero com todos os vértices pintados, conforme mostrado na figura 14. Alternativa C.

Figura 14 – Triângulos equiláteros no círculo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 Contagem de Funções

O que faremos nesta secção é utilizar problemas cujo enunciado parece muito semelhante mas que esse conjunto vai nos permitir fazer um passeio pelas técnicas de contagem que a gente aprende e ensina no Ensino Médio. Então nós vamos ter ocasião de utilizar o Princípio multiplicativo, vamos ter ocasião de usar permutações simples e vamos ter ocasião de utilizar combinações simples, que são as três ferramentas com as quais a gente resolve todos os problemas de interesse do Ensino Médio.

Proposição 4.0.1 (Funções sem restrições). *Dados dois conjuntos finitos A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, o número de funções $f : A \rightarrow B$ é dado por n^m .*

Demonstração. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \dots, m\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Para determinarmos o número de funções (sem restrições) de A em B faremos uma aplicação direta do princípio apresentado na proposição (2.3.3) (Princípio multiplicativo).

Uma função de A em B é uma correspondência que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B . Para formar tal função precisamos tomar uma sequência de decisões. Inicialmente decidiremos que elemento iremos associar ao número 1 do conjunto A . É claro que podemos fazer essa escolha de n modos porque qualquer um dos elementos do conjunto B pode ser escolhido como imagem do elemento 1. Depois faremos a mesma coisa com o 2. Como nesse item da nossa função não estamos impondo nenhum tipo de restrição a ela, novamente temos todos os elementos do conjunto B à nossa disposição. Podemos escolher, inclusive, o mesmo elemento que nós escolhemos para associar ao elemento 1, e assim por diante.

Então o número de funções de A em B que nós podemos formar sem impor nenhuma restrição vem da aplicação do princípio multiplicativo. Assim, para escolher o elemento associado ao 1 nós temos n possibilidades, para escolher o elemento que vai estar associado ao 2 temos n possibilidades, para escolher o elemento que vai estar associado ao elemento m temos n possibilidades também.

Portanto, pela Proposição (2.3.3)(*princípio multiplicativo*), o número de funções de A em B , sem restrições, é dado por

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m \text{ fatores}} = n^m \quad (4.1)$$

□

Proposição 4.0.2 (Funções injetivas). *Dados dois conjuntos finitos A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, com $m \leq n$, o número de funções injetivas $f : A \rightarrow B$ é dado por*

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m \quad (4.2)$$

Demonstração. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \dots, m\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \leq n$. Para determinarmos o número de funções injetivas de A em B utilizaremos o princípio apresentado na proposição (2.3.3) (*Princípio multiplicativo*).

Em uma função injetiva de A em B não podemos ter elementos diferentes do conjunto A associados a um mesmo elemento do conjunto B .

Observação(1): Nem sempre é possível ter uma função injetiva de A em B . Para que seja possível ter uma função injetiva de A em B é preciso que B tenha pelo menos tantos elementos quanto tem A . Se B tiver menos elementos do que A , pela Proposição (3.5.1) (*Princípio da Casa dos Pombos*), é certo que haverá pelo menos um elemento de B associado a mais de um elemento de A . Portanto, formar funções injetivas de A em B só faz sentido se $m \leq n$.

Para formar as funções injetivas de A em B precisamos tomar uma sequência de decisões. Inicialmente decidiremos que elemento iremos associar ao número 1 do conjunto A . É claro que podemos fazer essa escolha de n modos porque qualquer um dos elementos do conjunto B pode ser escolhido como imagem do elemento 1. Porém, quando formos escolher o elemento de B que será a imagem do número 2, estaremos proibidos de escolher o elemento que já fora escolhido para imagem do 1. Então, para a escolha da imagem do número 2 temos à nossa disposição todos os elementos de B , exceto, aquele que já foi utilizado para associar ao elemento 1. Portanto, o número de opções para a imagem do elemento 2 é $n - 1$. Quando formos escolher a imagem do terceiro elemento de A , não poderemos escolher para ele nem o que já foi escolhido para o primeiro nem o que já foi escolhido para o segundo. Portanto, temos para a escolha da imagem do terceiro elemento apenas $n - 2$ possibilidades. Finalmente, para a escolha da imagem do m -ésimo elemento de A temos apenas $n - (m - 1) = n - m + 1$ possibilidades.

Portanto, pela Proposição (2.3.3) (*princípio multiplicativo*), o número de funções injetivas de A em B , é dado por

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ fatores}}$$

Se a gente tivesse que exprimir isso aqui com uma fórmula combinatória, isso corresponde ao problema dos arranjos simples. O que fizemos aqui foi escolher m dos n elementos do conjunto B numa certa ordem. Para quem gosta de usar fórmulas combi-

natórias esse resultado aqui corresponde ao número de arranjos simples de n elementos tomados m a m , dado por

$$A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ fatores}} &= \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ fatores}} \cdot \frac{(n-m) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

□

Proposição 4.0.3 (Funções bijetivas). *Dados dois conjuntos finitos A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, com $m = n$, o número de funções bijetivas $f : A \rightarrow B$ é dado por $n! = P_n$.*

Demonstração. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \dots, m\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Uma função de A em B é bijetiva quando além de ser injetiva ela é sobrejetiva, ou seja, ela utiliza todos os elementos de B . Para que seja possível construir uma função bijetiva de A em B é preciso que tenhamos $m = n$.

Observe que este é um caso particular do que fizemos na proposição (4.0.2) (*Funções injetivas*), tomando $m = n$. Assim, para $m = n$ temos

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}_{n \text{ fatores}} = n!$$

É claro que $n!$ é o número de permutações simples de n elementos. Mas isso é exatamente o que se faz ao construir uma função bijetiva do conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ em $\{1, 2, \dots, n\}$. No momento em que se escolhe qual dos elementos será associado ao 1, qual dos elementos será associado ao 2, assim por diante, está se impondo uma ordem nos elementos do conjunto B . Então não é surpreendente que esse resultado seja o número de permutações simples de n objetos.

□

Proposição 4.0.4 (Funções sobrejetivas). *Dados dois conjuntos finitos A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, com $m \geq n$, o número de funções sobrejetivas $f : A \rightarrow B$ é dado por*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \quad (4.3)$$

Demonstração. [9] Resolver esta situação é bem mais complicado do que os dois casos que resolvemos anteriormente.

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \dots, m\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \geq n$.

Para tornar evidente a complexidade deste caso e entendermos por que esse problema é mais complicado que os anteriores, consideraremos um caso particular onde o conjunto B possui apenas 3 elementos, ou seja, fazendo $n = 3$. É bastante razoável que sejamos tentados a resolver este problema utilizando o mesmo método que foi usado nos casos anteriores, ou seja, fazendo escolhas sucessivas.

Vejamos.

Para a imagem do Elemento 1 podemos escolher qualquer um dos três elementos do conjunto B . Quando formos escolher a imagem do 2, também podemos escolher qualquer um dos três elementos de B . Quando formos escolher a imagem do 3, em princípio, também podemos escolher qualquer um dos três elementos de B . Porém, essas escolhas feitas até agora vão interferir em decisões posteriores. Por exemplo, se em todas $n - 2$ primeiras decisões tivéssemos escolhido o elemento 1 para ser a imagem de cada um dos $n - 2$ elementos, na hora que faltarem apenas dois elementos de A para ser escolhida a imagem, seremos forçados a fazer escolhas diferentes para estes elementos. Este tipo de situação indica que não é possível resolvermos o problema usando o Princípio multiplicativo como fizemos na contagem das funções, das funções injetivas e das funções bijetivas. Na verdade, uma das soluções gerais para esse problema de contagem das funções sobrejetivas, consiste em contarmos quantas funções não são sobrejetivas.

Uma função de A em B é *não sobrejetiva* quando ela deixa de incluir algum elemento de B na imagem.

A estratégia que usaremos para contar as funções sobrejetivas é contar as funções não sobrejetivas e depois subtrairmos estas do número total de funções, que já resolvemos na proposição (4.0.1).

Para isto, definiremos os seguintes conjuntos:

$\mathcal{F}$

$C_i = \{ \text{funções de } A \text{ em } B \text{ em que } i \text{ não está na imagem} \}$

Aplicando o Princípio da Inclusão-Exclusão (3.1.3), temos que o número de funções *não sobrejetivas* é

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

Como

$$|A_1| = |A_2| = |A_3|, \quad |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| \quad \text{e} \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

temos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot |A_1| - 3 \cdot |A_1 \cap A_2| + 0$$

Usando o resultado da secção (4.3.1) temos

$$|A_1| = 2^m \quad \text{e} \quad |A_1 \cap A_2| = 1^m.$$

Assim,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 2^m - 3 \cdot 1^m + 0$$

Portanto, o número de funções sobrejetivas de A em B para $|A| = m$ e $|B| = 3$ é

$$3^m - 3 \cdot 2^m + 3$$

O argumento utilizado neste caso particular leva à fórmula geral

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot 1$$

□

Proposição 4.0.5 (Funções estritamente crescentes). *Dados dois conjuntos finitos ordenados A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, com $m \leq n$, o número de funções estritamente crescentes $f : A \rightarrow B$ é dado por $C_n^m = \binom{n}{m}$.*

Demonstração. Uma função é estritamente crescente quando é injetiva.

Considere os conjuntos ordenados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \leq n$.

Neste caso, como os conjuntos A e B precisam necessariamente ser ordenados, tentar usar a estratégia de tomada de decisões sucessivas (princípio multiplicativo) se tornaria inviável uma vez que ao se escolher um dos elementos de B para ser imagem de algum elemento de A , os elementos de B que forem menor que ele não poderão mais serem escolhidos. Assim, precisamos usar uma estratégia diferente.

Para determinar o número de funções de A em B estritamente crescentes a estratégia que adotaremos será escolher o conjunto imagem, ou seja, um subconjunto de B que seja do tamanho de A . Deste modo, a função fica completamente determinada.

Portanto, contar o número de funções de A em B estritamente crescentes se reduz a determinar o número de combinações simples de n elementos tomados m a m , já visto em 2.6.1, que é dado por

$$C_{n,m} = C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

□

Proposição 4.0.6 (Funções não decrescentes). *Dados dois conjuntos finitos ordenados A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, o número de funções estritamente crescentes $f : A \rightarrow B$ é dado por $CR_n^m = \binom{m-1}{n-1}$.*

Demonstração. Para determinar o número de funções não decrescente de A em B a estratégia que adotaremos será decidir quantas vezes cada elemento do conjunto B vai aparecer na imagem. No total, esses elementos vão ter que aparecer tantas vezes quanto forem os elementos de A . Seja x_1 o número de vezes que elemento 1 de B apareceu na imagem, x_2 o número de vezes que elemento 2 de B , $\dots$, x_n o número de vezes que elemento n de B apareceu na imagem.

Assim, o número de funções não decrescentes de A em B é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ que, como já vimos na proposição (2.8.3), é dado por

$$\binom{m-1}{n-1}$$

□

5 Análise Combinatória com o software *SageMath*

O uso das tecnologias na sala de aula é um assunto bastante debatido atualmente. Se adotados de forma adequada, os recursos tecnológicos podem se tornar um importante aliado para complementar a aprendizagem. Existem vários softwares que podem auxiliar professores e alunos, tornando mais consistente o processo cognitivo.

5.1 Tecnologias no Ensino e a Legislação Educacional

A utilização de softwares no ensino segue as recomendações dos PCN+ (Parâmetros Curriculares Nacionais) que estabelece o seguinte, no contexto da análise combinatória:

“As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística.

Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares.” P. 123 – 124.

Ainda nesta mesma direção, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) estabelece como habilidade a ser desenvolvida pelo aluno o seguinte:

“(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.” P.531.

5.2 Apresentando o *SageMath* e Sua Importância Para o Ensino de Análise Combinatória

A importância do SageMath para o ensino de Análise Combinatória não reside simplesmente no fato de com ele podermos realizar o cálculo do número de permutações, arranjos e combinações, uma vez que isto uma calculadora científica faz. A sua maior contribuição, e esta sim justifica o seu uso e a sua relevância para o ensino de Análise Combinatória, é que ele exhibe todos os grupamentos que fazem parte da solução, além, é claro, de calcular a quantidade destas configurações. Exibição esta que nos permite estabelecer estratégias de contagem de todos os resultados de um problema observando os padrões que surgem em cada uma das partes da solução. Munidos destas informações é possível fazer conjecturas e generalizações de um problema. Todas estas características apresentadas fazem do SageMath um software indispensável para aumentar a aprendizagem de Análise Combinatória.

O SageMath é um programa livre (de código aberto) e gratuito que pode ser utilizado para fazer quase tudo que outros programas de CAS (Computação Algébrica Simbólica) pagos fazem, como o Maple, o Mathematica e o MATLAB. Ele pode ser utilizado diretamente na internet (sem instalação) <https://sagecell.sagemath.org/> ou pode ser baixado em <https://www.sagemath.org/> juntamente com outros materiais (inclusive a apostila Sage para Estudantes (espanhol)), vídeos e informações. Além disso, ele é multiplataforma, ou seja, pode ser instalado no sistema Windows e também no sistema Linux.

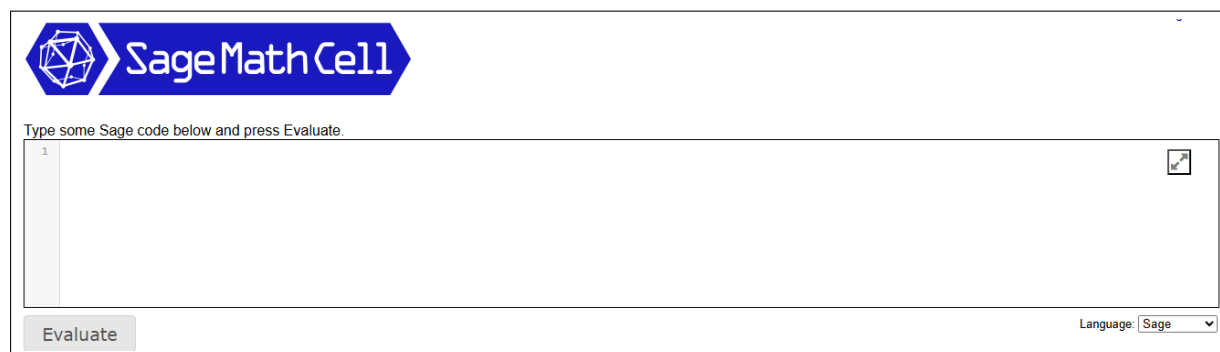
Seus guias de instalação podem ser obtidos no site <https://dma.uem.br/kit/sagemath>. Para quem desejar se aprofundar no SageMath indicamos as videoaulas do YouTube disponíveis na playlist Curso rápido de SageMath (Português-BR) do canal KIT Matemática da UEM (Universidade Estadual de Maringá).

Como dissemos acima, o SageMath é um software gratuito que pode ser instalado no computador ou acessado diretamente na sua página na web através da interface SageMathCell. Todo o seu potencial pode ser obtido por meio de uma linguagem comum de programação baseada em Python ou diretamente por meio de interfaces, sendo esta última a que adotaremos ao longo de todo o nosso trabalho.

Devido a sua grande versatilidade, praticamente quase todos os conteúdos de Matemática do Ensino Médio e muitos da graduação podem ser abordados através do SageMath. Neste trabalho abordaremos apenas o conteúdo análise combinatória. Para outros conteúdos que não este, recomendamos o livro [1].

5.3 Primeiros Passos Com o SageMath

Figura 15 – SageMath Cell.



Fonte: Imagem capturada da página oficial do Sagemath.

Vejamos algumas noções básicas e alguns comandos do SageMath(Python) que utilizaremos em nossos exemplos.

Observação: Na janela de digitação, para representar uma sequência usa-se [] colchetes. Para inserir letras como elementos de um conjunto devemos usar aspas.

5.4 Contagens Com o SageMath

Nessa seção, apresentaremos alguns exemplos práticos mostrando como utilizar o aplicativo SageMath na resolução de problemas de Combinatória.

Permutações Simples

Exemplo 5.4.1. *Quantas e quais são as permutações simples dos elementos 1, 2, 3?*

Solução:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Usando tecnologia:

1º) Determinando o número de permutações simples de 3 elementos.

Na tela do SageMath Cell digite:

Tabela 1 – Lista de códigos utilizados nos exemplos.

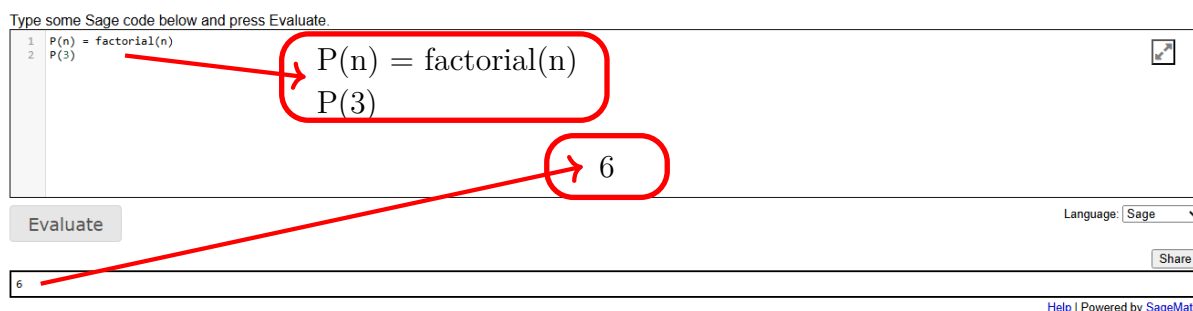
Códigos e métodos	Descrição
def p	Cria uma função p para realizar algum tipo de cálculo.
set = []	Insere um conjunto.
cartesian-product = ([A, B])	Determina o produto cartesiano dos conjuntos A e B.
A.union(B)	Determina a união dos conjuntos A e B.
print()	Exibe o resultado de um cálculo acompanhado ou não de uma frase.
list()	Lista todos os elementos de um conjunto.
factorial(n)	Calcula o fatorial do número natural n.
P(n) = factorial(n) P(k)	Calcula o número de permutações de k elementos.
Permutations(['a','b','c']).list()	Lista todas as permutações de 3 elementos do conjunto $\{a, b, c\}$.
PC(n) = factorial(n-1) PC(k)	Calcula o número de permutações circulares de k elementos.
CyclicPermutations(['a','b','c']).list()	Lista todas as permutações circulares dos elementos do conjunto $\{a, b, c\}$.
Derangements(['a','b','c','d']).list()	Lista todas as permutações caóticas dos elementos do conjunto $\{a, b, c, d\}$.
C(n,p) = binomial(n,p) C(k,m)	Calcula o número de combinações de k elementos escolhidos m a m.
Combinations(['a','b','c','d'],3).list()	Lista todas as combinações de 3 elementos do conjunto $\{a, b, c, d\}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

 $P(n) = \text{factorial}(n)$ $P(3)$

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 16)

Figura 16 – Número de Permutações Simples.



Fonte: O autor.

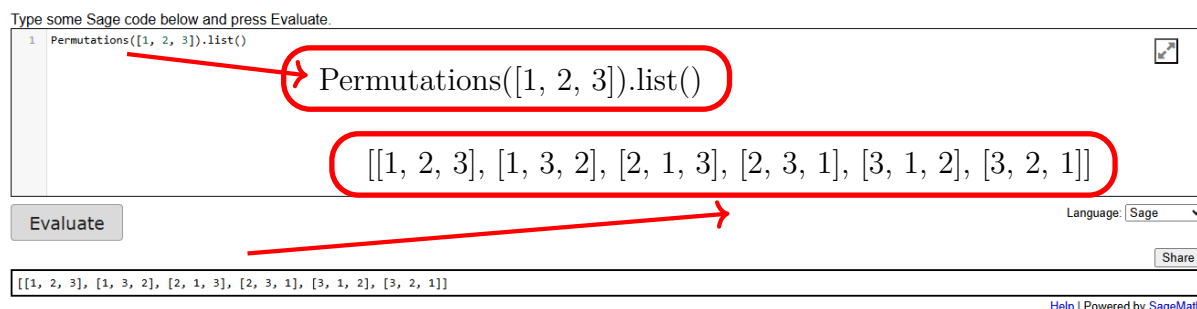
2º) Determinando todas as permutações simples dos elementos 1,2,3.

Na tela do SageMath Cell digite:

```
Permutations([1, 2, 3]).list()
```

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 17)

Figura 17 – Permutações Simples.



Fonte: O autor.

Arranjos Simples

Exemplo 5.4.2. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, quantos e quais são os arranjos com 2 elementos?

Solução:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

Usando tecnologia:

1º) Determinando o número de arranjos de 2 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

Na tela do SageMath Cell digite:

```
def arranjo(n,k):
    return factorial(n) // factorial(n-k)

n=4
k=2

arranjos = arranjo(n,k)

print(f'Número de arranjos possíveis: arranjos')

set = [1,2,3,4]

Arrangements(set, 2).list()
```

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 18)

Figura 18 – Arranjos Simples.

Type some Sage code below and press Evaluate.

```

1 def arranjo(n,k):
2     return factorial(n) // factorial(n - k)
3
4 n=4
5 k=2
6 arranjos = arranjo(n,k)
7 print(f'Número de arranjos possíveis: {arranjos}')
8 set = [1,2,3,4]
9 Arrangements(set, 2).list()

```

Número de arranjos: 12

[[1, 2],
[1, 3],
[1, 4],
[2, 1],
[2, 3],
[2, 4],
[3, 1],
[3, 2],
[3, 4],
[4, 1],
[4, 2],
[4, 3]]

def arranjo(n,k):
 return factorial(n) // factorial(n - k)

n=4
k=2
arranjos = arranjo(n,k)
print(f'Número de arranjos possíveis: {arranjos}')
set = [1,2,3,4]
Arrangements(set, 2).list()

Fonte: O autor.

Combinações Simples

Exemplo 5.4.3. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, quantos e quais são os seus subconjuntos com 4 elementos?

Solução:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

Usando tecnologia:

1º) Determinando o número de subconjuntos de 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

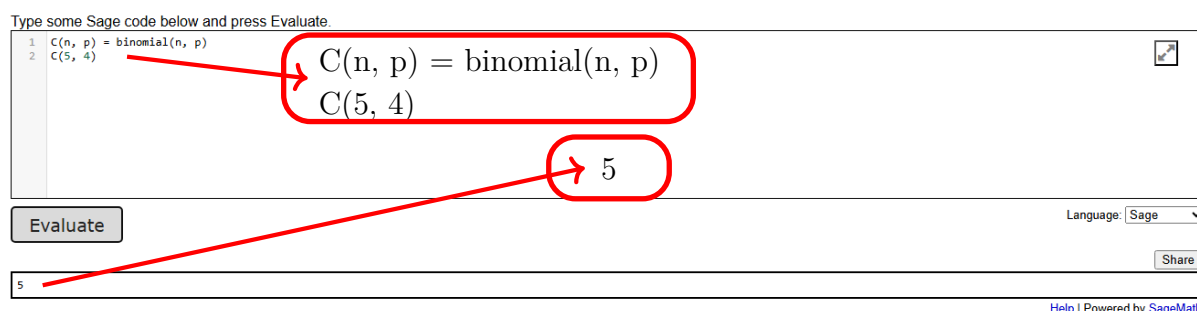
Na tela do SageMath Cell digite:

$C(n,p) = \text{binomial}(n,p)$

$C(5,4)$

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 19)

Figura 19 – Número de Combinações Simples.



Fonte: O autor.

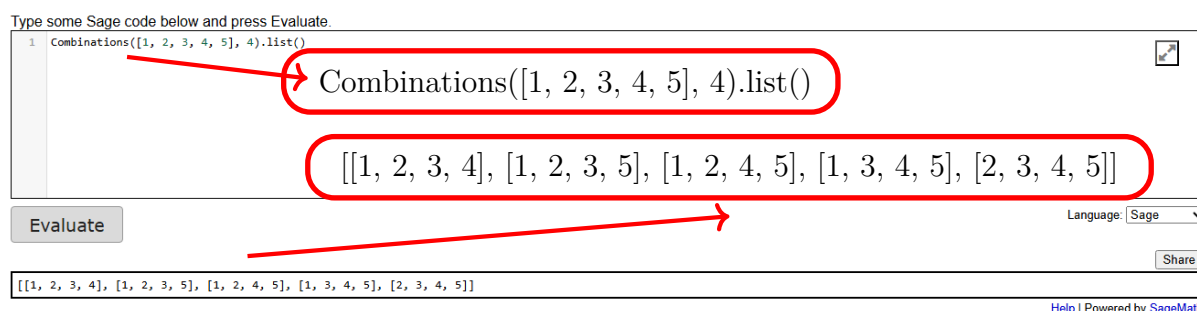
2º) Determinando todos os subconjuntos de 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Na tela do SageMath Cell digite:

`Combinations([1, 2, 3, 4, 5], 4).list()`

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 20)

Figura 20 – Combinações Simples.



Fonte: O autor.

Permutações com Repetições

Exemplo 5.4.4. Quantas e quais são as permutações dos elementos $1, 1, 1, 2, 2$?

Solução:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10.$$

Usando tecnologia:

1º) Determinando o número de permutações dos elementos $1, 1, 1, 2, 2$.

Na tela do SageMath Cell digite:

```
def PR(*lista):
    p = factorial(lista[0])
```

```

for i in lista[1:]:
    p = p/factorial(i)

return p

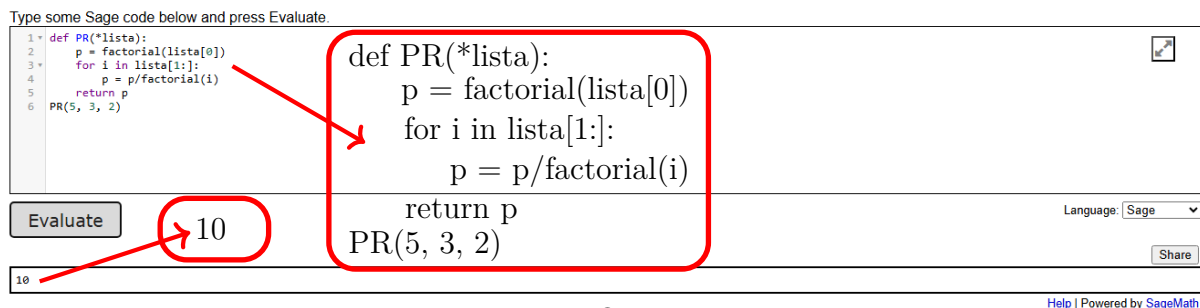
PR(5, 3, 2)

```

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 21)

Observação: Na segunda linha de programação, `lista[0]` significa que será usado nesta parte do cálculo (fatorial) só o primeiro número da lista `5,3,2`, ou seja, o número 5. Já na terceira linha de programação, `lista[1:]` significa que nesta parte do cálculo será usado todos os números da lista `5,3,2` a partir do segundo, ou seja, 3 e 2.

Figura 21 – Número de Permutações com Repetições.



Fonte: O autor.

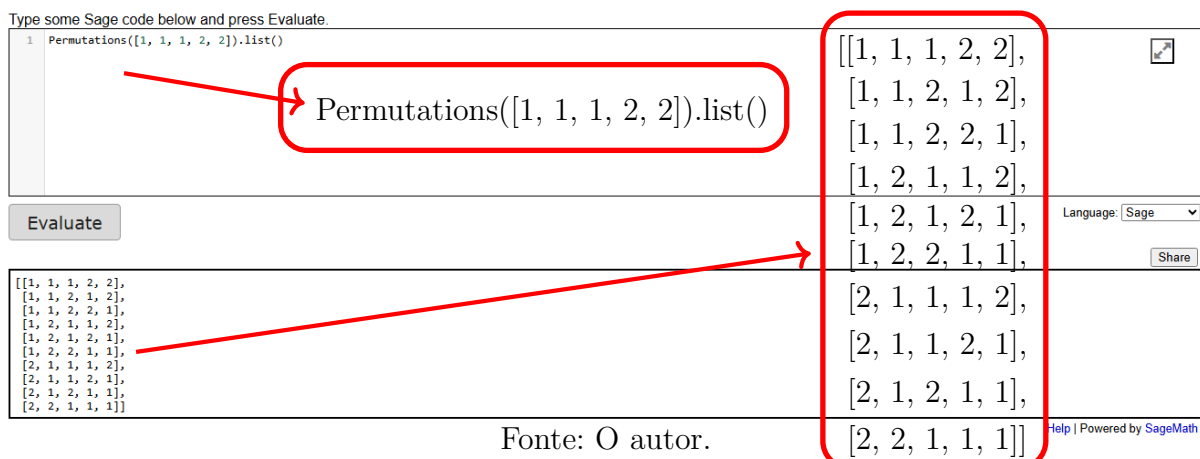
2º) Determinando todas as permutações dos elementos 1,1,1,2,2.

Na tela do SageMath Cell digite:

```
Permutations([1, 1, 1, 2, 2]).list()
```

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 22)

Figura 22 – Permutações com Repetições.



Fonte: O autor.

Permutações Circulares

Exemplo 5.4.5. De quantos e quais modos diferentes podemos distribuir 4 pessoas em torno de uma mesa circular?

Solução:

$$PC_4 = (4 - 1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Usando tecnologia:

1º) Determinando o número de permutações circulares de 4 elementos.

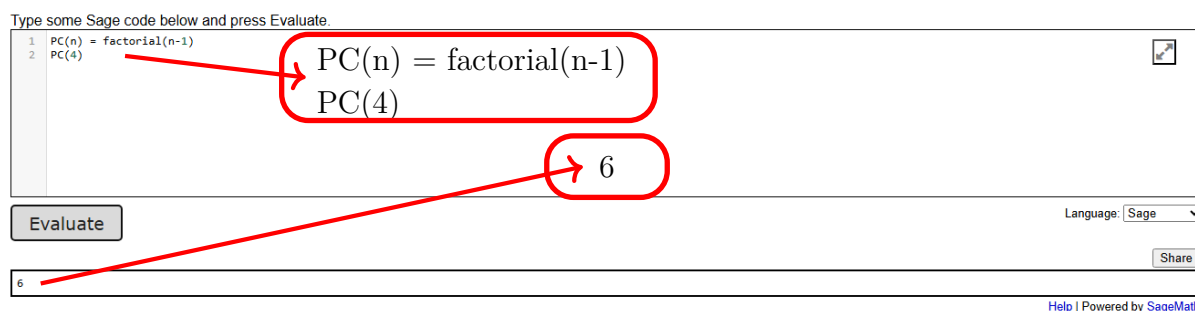
Na tela do SageMath Cell digite:

`PC(n) = factorial(n-1)`

`PC(4)`

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 23)

Figura 23 – Número de Permutações Circulares.



Fonte: O autor.

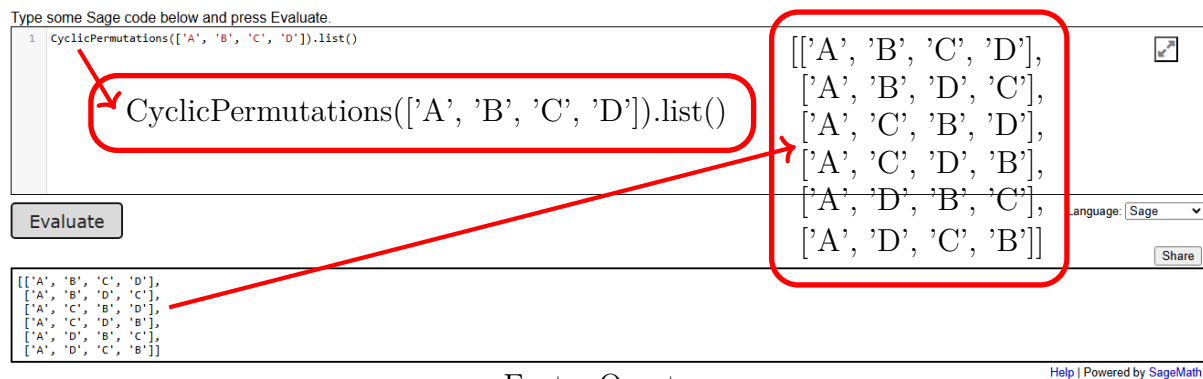
2º) Determinando todas as permutações circulares dos elementos A,B,C e D.

Na tela do SageMath Cell digite:

`CyclicPermutations(['A', 'B', 'C', 'D']).list()`

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 24)

Figura 24 – Permutações Circulares.



Fonte: O autor.

Help | Powered by SageMath

Combinações completas

Definição 5.4.1 (Combinação completa). Dizemos que uma combinação é completa quando é permitida a repetição de elementos.

Exemplo 5.4.6. Uma sorveteria disponibiliza três sabores de sorvete: Abacaxi, Baunilha e Coco. Quantos e quais são os modos distintos de um cliente escolher 3 bolas de sorvete?

Solução:

$$CR_{3,3} = C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10.$$

,

Usando tecnologia:

1º) Determinando o número de maneiras de se escolher as 3 bolas de sorvete.

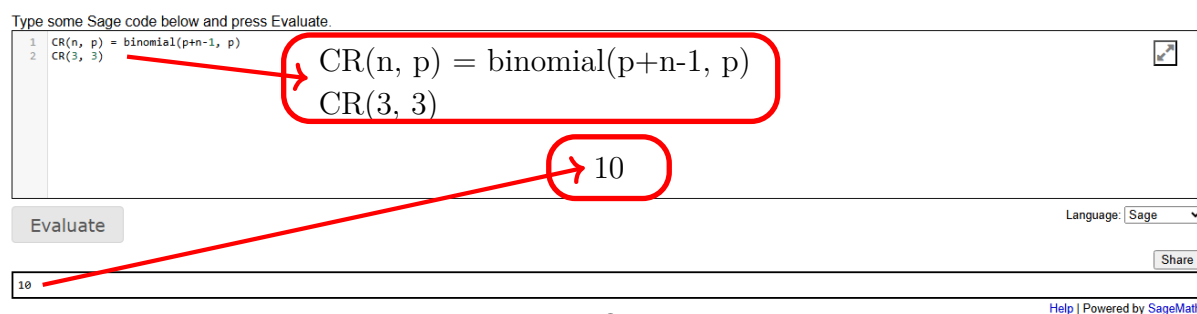
Na tela do SageMath Cell digite:

`CR(n,p) = binomial(p+n-1,p)`

`CR(3,3)`

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 25)

Figura 25 – Número de Combinações Completas.



Fonte: O autor.

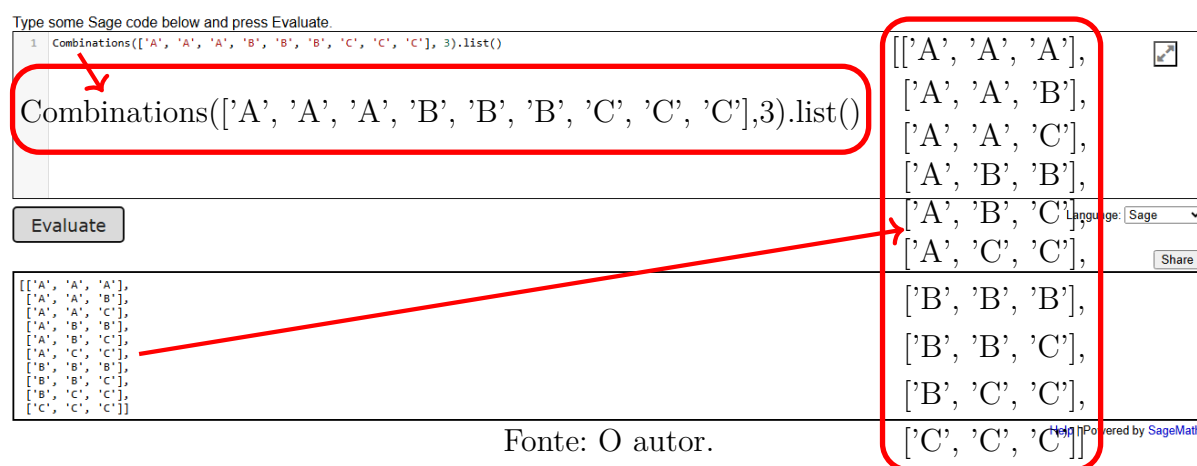
2º) Determinando todas as maneiras de se escolher as 3 bolas de sorvete.

Na tela do SageMath Cell digite:

`Combinations(['A', 'A', 'A', 'B', 'B', 'B', 'C', 'C', 'C'], 3).list()`

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 26)

Figura 26 – Combinações Completas.



Fonte: O autor.

Permutações Caóticas

Definição 5.4.2 (Permutação caótica). *Dada uma lista de objetos, denominamos de permutação caótica (ou desordenamento) destes elementos as permutações nas quais nenhum dos elementos permanece na sua posição original.*

Exemplo 5.4.7. *Quantas e quais são as permutações caóticas dos elementos da lista 1,2,3,4?*

Solução:

$$D_4 = 4! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] = 4! - 4! + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \times 3 - 4 + 1 = 9$$

Usando tecnologia:

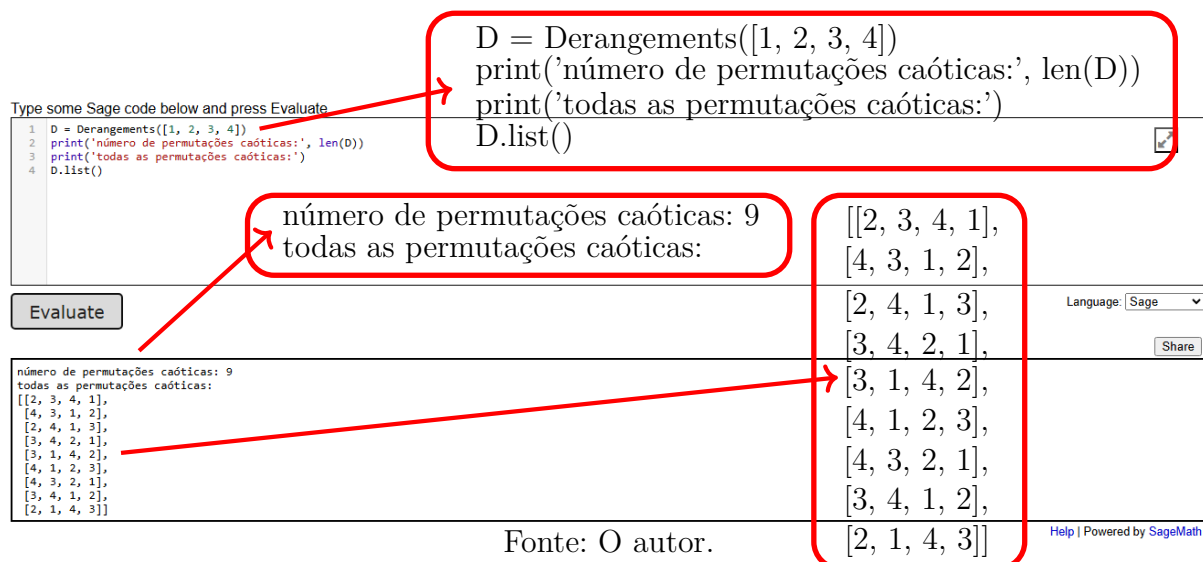
Determinando o número de permutações caóticas dos elementos da lista 1,2,3,4 e quais são elas.

Na tela do SageMath Cell digite:

```
D = Derangements([1,2,3,4])
print('número de permutações caóticas:',len(D))
print('todas as permutações caóticas:')
D.list()
```

depois clique em "Evaluate" para obter o resultado desejado. (Figura 29)

Figura 27 – Permutações Caóticas.



Fonte: O autor.

5.5 Proposta Didática

A proposta didática que apresentaremos ao longo desta seção é composta de três aulas e algumas atividades e foi elaborada com o objetivo de proporcionar ao professor, com o auxílio do software SageMath, as condições necessárias para oferecer ao seu aluno um aprendizado de análise combinatória mais consistente e reflexivo, pautado no estudo de problemas nos quais conjecturas e generalizações são propostas. Essa proposta foi pensada de forma que o aluno construa o seu conhecimento referente a permutações, e não apenas receba uma fórmula pronta e a decore. Nessa proposta, optamos por demonstrar as expressões apresentadas com o intuito de incentivar os professores a trabalharem com argumentação e demonstração desde o ensino básico, bem como mostrar que, com as devidas adaptações e cuidados, demonstrações utilizando, por exemplo, o Princípio da

Indução Finita podem ser utilizadas.

Habilidades da BNCC

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT405) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Metodologia

5.5.1 Aula 1

No primeiro momento, faremos uma introdução ao aplicativo SageMath e apresentaremos os principais comandos que serão utilizados na aula. Os comandos utilizados são:

Tabela 2 – Lista de códigos utilizados na proposta didática.

Códigos e métodos	Descrição
<code>print()</code>	Exibe o resultado de um cálculo acompanhado ou não de uma frase.
<code>list()</code>	Lista todos os elementos de um conjunto.
<code>Permutations(['a','b','c']).list()</code>	Lista todas as permutações de 3 elementos do conjunto $\{a, b, c\}$.
<code>len(P)</code>	Conta as permutações de a,b,c.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência, explicaremos os significados de permutação e de anagrama.

Definição 5.5.1 (Permutação simples). *Seja X um conjunto com n objetos distintos. Cada ordem que se dá aos objetos de X é chamada de uma permutação simples dos objetos de X .*

Assim, por exemplo, as permutações simples das letras A , M e O são (AMO) , (AOM) , (OAM) , (OMA) , (MAO) e (MOA) . Quando os objetos do conjunto X forem as letras de uma palavra, cada uma das permutações é chamada de *anagrama* das letras dessa palavra. No exemplo acima, podemos ver que existem 6 anagramas possíveis formados pelas letras da palavra AMO.

Se os objetos do conjunto X não forem todos distintos, dizemos que se trata de *permutações com elementos repetidos*.

Continuaremos apresentando o seguinte questionário.

1. Escreva todos os anagramas que são possíveis de serem formados com cada palavra dada. Em seguida conte quantas anagramas foram encontrados.

- a) CA;
- b) AB;
- c) DA;
- d) DE.

Utilize o SageMath para conferir os resultados.

2. Escreva todos os anagramas que são possíveis de serem formados com cada palavra dada. Em seguida conte quantas anagramas foram encontrados.

- a) BOA;
- b) RUA;
- c) MEL;
- d) PAU.

Utilize o SageMath para conferir os resultados.

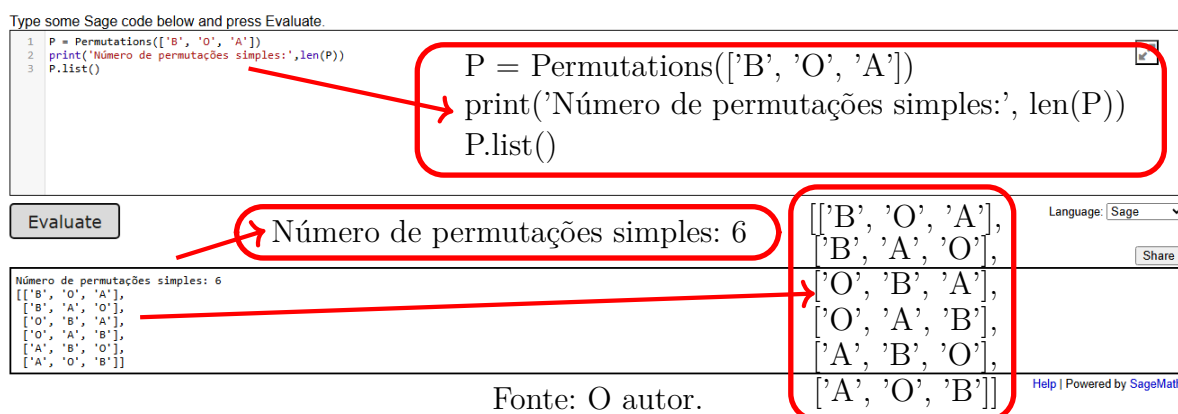
A seguir, exibiremos um exemplo dos comandos utilizados pelos alunos e da tela que eles visualizarão:

No *SageMath Cell* digite:

```
P = Permutations(['B', 'O', 'A'])  
  
print('Número de permutações simples:', len(P))  
  
P.list()
```

depois clique em *"Evaluate"* para obter o resultado desejado.

Figura 28 – Permutações Simples.



Fonte: O autor.

3. Escreva todos os anagramas que são possíveis de serem formados com a palavra PATO. Em seguida conte quantas anagramas foram encontrados. Por fim, utilize o Sagemath para conferir os resultados.

O objetivo dessa aula é fazer com que os alunos entendam o significado de permutação e anagramas, bem como adquirir uma familiaridade com a utilização do SageMath. O Sagemath aqui aparece como uma ferramenta que permite conferir e visualizar os resultados obtidos.

5.5.2 Aula 2

Com os alunos já familiarizados com a utilização do aplicativo SageMath e com a noção de permutação, iniciamos a segunda aula lembrando os resultados dos exemplos feitos na aula anterior. O SageMath pode ser utilizado para exibir os resultados.

Na sequência, apresentaremos o seguinte questionário.

1. Com o auxílio do Sagemath plote todos as permutações/anagramas que são possíveis de serem formados com as palavras dadas e conte quantos anagramas foram encontrados
 - a) PATO;
 - b) CARO;
 - c) BOLA;
 - d) MEDO.

Os comandos que serão utilizados são:

No *SageMath Cell* digite:

```
P = Permutations(['P', 'A', 'T', 'O'])  
  
print('Número de permutações simples:',len(P))  
  
P.list()
```

depois clique em *"Evaluate"* para obter o resultado desejado.

2. Com o auxílio do Sagemath plote todos as permutações/anagramas que são possíveis de serem formados com as palavras dadas e conte quantos anagramas foram encontrados

- a) MUITO;
- b) GARFO;
- c) PODER;
- d) CHUVA.

3. Com o auxílio do Sagemath plote todos as permutações/anagramas que são possíveis de serem formados com as palavras dadas e conte quantos anagramas foram encontrados

- a) LEGADO;
- b) COLHER;
- c) MERITO;
- d) GENTIL.

Após finalizado o questionário, abriremos um momento de discussão onde será questionado se eles conseguem perceber algum padrão nas respostas de cada exercício.

O objetivo desse momento de discussão, é fazer com que os alunos percebam que palavras com a mesma quantidade de letras possuem o mesmo número de permutações. Observe que a utilização do Sagemath é crucial nessa atividade, já que ele permite exibir de forma rápida e prática todas as permutações de várias palavras, o que seria impraticável fazer manualmente.

Continuaremos a aula pedindo para que os alunos preencham a seguinte tabela

QUANTIDADE DE LETRAS DA PALAVRA	QUANTIDADE DE PERMUTAÇÕES
Palavras com 2 letras	
Palavras com 3 letras	
Palavras com 4 letras	
Palavras com 5 letras	
Palavras com 6 letras	

Em seguida, abriremos um momento de discussão questionando a relação entre a quantidade de letras das palavras e a quantidade de permutações.

O objetivo dessa discussão é fazer com que os alunos percebam que o número de permutações de palavras com 3 letras é 3 vezes maior que o número de permutações de palavras com 2 letras, o número de permutações de palavras com 4 letras é 4 vezes maior que o número de permutações de palavras com 3 letras, o número de permutações de palavras com 5 letras é 5 vezes maior que o número de permutações de palavras com 4 letras e por fim que o número de permutações de palavras com 6 letras é 6 vezes maior que o número de permutações de palavras com 5 eltras.

Se após um tempo esse objetivo não for alcançado, insentivaremos que os alunos dividam o número de permutações de palavras com n letras pelo número de palavras com $n - 1$ letras para que esse objetivo seja alcançado.

Após toda essa discussão, denotaremos por P_n o número de permutações de palavras com n letras e observamos que

$$\begin{aligned}
 P_2 &= 2 = 2 \cdot 1 \\
 P_3 &= 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 P_4 &= 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \\
 P_5 &= 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 P_6 &= 6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1
 \end{aligned}$$

E observamos que continuando esse argumento de forma iterativa, obtemos

$$\begin{aligned}
 P_n &= n \cdot P_{n-1} \\
 p_n &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 P_n &= n!
 \end{aligned}$$

5.5.3 Aula 3

Na sequência, relembramos que o número de permutações de n objetos é dado por $P_n = n!$ e utilizaremos as ideias desenvolvidas nas aulas anteriores para apresentar a seguinte demonstração:

- Para dois objetos, digamos x_1, x_2 , temos as seguintes possibilidades

$$\underline{x_1}, \underline{x_2} \quad \text{e} \quad \underline{x_2}, \underline{x_1}.$$

Logo, temos $P_2 = 2 = 2!$ permutações.

- Para três objetos, apesar de ser possível exibir todas as possibilidades, vamos utilizar a seguinte estratégia para obter o número de permutações, sendo x_1, x_2, x_3 esses objetos, iniciaremos fixando o primeiro objeto, assim teremos 3 possibilidades para este primeiro objeto. Após fixado esse primeiro objeto, em cada caso sobram 2 objetos para serem permutados.

$$x_1, \underbrace{\quad, \quad}_{P_2}; \quad x_2, \underbrace{\quad, \quad}_{P_2}; \quad x_3, \underbrace{\quad, \quad}_{P_2}.$$

Assim, o número de permutações de 3 objetos é $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2! = 3!$

- Para quatro objetos, digamos x_1, x_2, x_3, x_4 , iniciaremos fixando o primeiro objeto, assim teremos 4 possibilidades para este primeiro objeto. Após fixado esse primeiro objeto, em cada caso sobram 3 objetos para serem permutados.

$$x_1, \underbrace{\quad, \quad, \quad}_{P_3}; \quad x_2, \underbrace{\quad, \quad, \quad}_{P_3}; \quad x_3, \underbrace{\quad, \quad, \quad}_{P_3}; \quad x_4, \underbrace{\quad, \quad, \quad}_{P_3}.$$

Assim, o número de permutações de 4 objetos é $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!$

- Para finalizar, tendo entendido a estratégia utilizada e continuando de forma iterada, já tendo obtido que o número de permutações de $n-1$ objetos é $P_{n-1} = (n-1)!$, quantos são as permutações de n objetos, digamos $x_1, x_2, \dots, x_n$? Para contar, fixamos inicialmente o primeiro objeto, para isso temos n possibilidades, restando $n-1$ objetos a serem ordenados, como mostrado abaixo

$$x_1, \underbrace{\quad, \quad, \dots, \quad}_{P_{n-1}}; \quad x_2, \underbrace{\quad, \quad, \dots, \quad}_{P_{n-1}}; \quad \dots \quad x_n, \underbrace{\quad, \quad, \dots, \quad}_{P_{n-1}}.$$

Dessa forma, observamos $P_n = n \cdot P_{n-1}$, como já sabemos que $P_{n-1} = (n-1)!$, concluímos que $P_n = n \cdot (n-1)!$, ou seja

$$P_n = n!$$

O objetivo aqui é incentivar a prática de argumentação de resultados no ensino básico. Mostrar que, com as devidas adaptações, demonstrações por indução podem ser utilizadas.

Para finalizar, solicitaremos que os alunos resolvam a seguinte atividade:

1. Com o auxílio do SageMath, exiba e conte todas as permutações das seguintes palavras:

- a) CASA
- b) CARRO
- c) BANANA

Os comandos que serão utilizados são:

No *SageMath Cell* digite:

```
P = Permutations(['C', 'A', 'S', 'A'])
print('Número de permutações simples:', len(P))
P.list()
```

depois clique em *"Evaluate"* para obter o resultado desejado.

Figura 29 – Permutações com elementos repetidos.

The screenshot shows the SageMath Cell interface. At the top, a red box highlights the code entered in the input area:

```
P = Permutations(['C', 'A', 'S', 'A'])
print('Número de permutações com elementos repetidos:', len(P))
P.list()
```

Below the code, the output is displayed. A red box highlights the first line of the output, which states: "Número de permutações com elementos repetidos: 12". To the right of this, another red box highlights a portion of the list of permutations, including:

```
['C', 'A', 'A', 'S'],
['C', 'A', 'S', 'A'],
['C', 'S', 'A', 'A'],
['A', 'C', 'A', 'S'],
['A', 'C', 'S', 'A'],
['A', 'A', 'C', 'S'],
['A', 'A', 'S', 'C'],
['A', 'S', 'C', 'A'],
['A', 'S', 'A', 'C'],
['S', 'C', 'A', 'A'],
['S', 'A', 'C', 'A'],
['S', 'A', 'A', 'C']
```

At the bottom of the interface, the text "Fonte: O autor." is visible.

Na sequência, abriremos um momento de discussão indagando o motivo de os resultados obtidos serem diferentes de $n!$.

O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos percebam que nesse questionário todas as palavras possuem letras que se repetem, e mudar a ordem dessas letra não nos fornecem novas palavras.

Finalizamos observando que se em uma palavra, uma determinada letra aparece k vezes, permutações dessa letra não fornecem novas palavras. Assim, quando utilizamos a expressão $P_n = n!$ estamos contando cada palavra $P_k = k!$ vezes, dessa forma precisamos dividir P_n por $k!$ para estinguir os excessos.

Dessa forma, se em uma lista de n objetos, o objeto x_1 aparece k_1 vezes, o objeto x_2 aparece k_2 vezes, $\dots$, o objeto x_l aparece k_l vezes, o número de permutações desses objetos é:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_l!}$$

Como exemplo, vamos contar quantas permutações das palavras CASA e BANANA possui.

Para a palavra CASA, observe que ela possui 4 letras, entretanto a letra "A" aparece duas vezes, dessa forma o número de permutações da palavra CASA é:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Para a palavra BANANA, observe que essa palavra possui 6 letras. Entretanto temos letras repetidas, a letra "A" aparece 3 vezes e a letra "N" aparece 2 vezes, dessa forma, o número de permutações da palavra BANANA é:

$$P_6^{3,2} = \frac{P_6}{3! \cdot 2!} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60.$$

Acreditamos que essa proposta de atividades. Com essa proposta de atividades, mostramos que, com as devidas adaptações, é possível utilizar técnicas de demonstrações como o Princípio da Indução Finita

Conclusão

Neste trabalho apresentamos as causas da baixa aprendizagem no ensino de Análise Combinatória provocada pela abordagem inadequada presente em TODOS os livros didáticos, tanto os usados na escola pública quanto os usados na escola privada. Mostramos estratégias de contagem e apontamos os principais erros comuns cometidos e como evitá-los. Apresentamos metodologias, uma básicas e outras avançadas, que permitem atacar com segurança problemas combinatórios difíceis de forma fácil. Além disso, apresentamos o software *SageMath* e como usá-lo para aumentar o aprendizado de Análise Combinatória.

De forma complementar, apresentamos as seguintes recomendações.

Como material didático para ser trabalhado com os alunos nas escolas recomendamos fortemente a apostila Métodos de Contagem e Probabilidade do PIC (Programa de Iniciação Científica da OBMEP) do autor Paulo Cezar Pinto Carvalho. Como suporte aos alunos indicamos o site Portal da OBMEP que disponibiliza gratuitamente videoaulas da teoria e de exercícios, materiais em PDF, exercícios resolvidos e simulados, tudo gratuitamente.

Já para os professores, existe no canal do IMPA no YouTube, videoaulas do PAP-MEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio). As revistas da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) que são a RPM (Revista do Professor de Matemática), que possui edições impressas e atualmente digitais, a revista PMO (Professor de Matemática Online).

Outro recurso para professores, e alunos mais experientes com foco em olimpíadas, são a revista EUREKA da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), as videoaulas do PIC no YouTube, além dos materiais e das videoaulas do POTI (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo), estas voltadas para preparação para a prova da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) e para competições internacionais.

Em relação a livros, tanto para professores quanto para alunos, recomendamos:

1. A Matemática do Ensino Médio, vol 2, Elon Lages Lima et all, Coleção do Professor de Matemática, editora da SBM;
2. Análise Combinatória e Probabilidade, Morgado et all, Coleção do Professor de Matemática, editora da SBM;
3. Círculos Matemáticos: A experiência Russa, Fomin et all, editora do IMPA;

4. Introdução à Análise Combinatória, José Plínio Santos et all, editora Ciência Moderna.

Referências

- [1] Nenhuma citação no texto.
- [2] Bogart, K. P. *Combinatorics through guided discovery*. Kenneth P. Bogart, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- [3] BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio,. (PCN+) , *Matemática e suas Tecnologias, MEC* (2002). Citado na página 21.
- [4] BRASIL. Base nacional comum curricular do ensino fundamental. (BNCC), MEC (2017). Citado na página 21.
- [5] BRASIL. Base nacional comum curricular do ensino médio. (BNCC), MEC (2017). Citado na página 22.
- [6] C. Pereira, A. G., Gomes, C. A., and Simioli, V. *Introdução à combinatória e probabilidade*. Ed. Ciencia Moderna, 2014. Citado na página 60.
- [7] Carvalho, P. C. P. Métodos de contagem e probabilidade. *Rio de Janeiro: OBMEP* (2009). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- [8] Chen, C.-C., Koh, K. M., and Khee-Meng, K. *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific, 1992. Citado na página 26.
- [9] de Oliveira Santos, J. P., Mello, M. P., and Murari, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. Ed. Ciencia Moderna, 2007. Citado na página 83.
- [10] Franco, T. Princípios de combinatória e probabilidade. *Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada* (2021), pp.97. Citado na página 57.
- [11] Larson, L. C. *Problem-solving through problems*. Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 22.
- [12] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. *A matemática do ensino médio*, vol. 2. SBM Rio de Janeiro, 1997. Citado na página 24.
- [13] Morgado, A. d. O., Carvalho, J. B. P. d., Carvalho, P. C. P., and Fernandez, P. Análise combinatória e probabilidade. *Rio de Janeiro: Graftex* (1991). Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.