



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



José Barbosa do Nascimento Neto

Extensão da Solução Analítica de Pagano Para Análise Estática de Vigas Sanduíche Com Núcleo Poroso e Funcionalmente Graduado

São Cristóvão - SE

2026

José Barbosa do Nascimento Neto

Extensão da Solução Analítica de Pagano Para Análise Estática de Vigas Sanduíche Com Núcleo Poroso e Funcionalmente Graduado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador(a): Prof. Dr. Emerson Figueiredo dos Santos

São Cristóvão - SE

2026



ATA DE DEFESA

José Barbosa do Nascimento Neto

Extensão da Solução Analítica de Pagano para Análise Estática de Vigas Sanduíche com Núcleo Poroso e Funcionalmente Graduado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **13 de agosto de 2026**

Banca Examinadora	Nota
Orientador: Prof. Dr. Emerson Figueiredo dos Santos (UFS)	– 10,0
Coorientador: Prof. Dr. Fabio Carlos da Rocha (UFS)	– 10,0
Examinador(a): Prof. Dr. Mateus Lopes Peres (PUC/RJ)	– 10,0
Examinador(a): Prof. MSc. Rodolfo Santos Conceição (IFS/SE)	– 10,0
Média Final:	10,0

Documento assinado digitalmente
gov.br EMERSON FIGUEIREDO DOS SANTOS
Data: 14/08/2026 19:15:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Emerson Figueiredo dos Santos (UFS)
Assinatura do Orientador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Maria José e Jefferson Rodrigues, por todo o apoio e suporte que me proporcionaram ao longo desses anos de graduação. Agradeço também ao meu falecido avô, José Barbosa, cujo nome carrego e carregarei com o maior orgulho por toda a vida. Agradeço aos meus outros familiares, em especial minha tia Roberta e minha irmã Mirena, que me apoiaram em diversos momentos e em decisões difíceis. Agradeço à minha namorada, Ana Clara, por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, e, principalmente, pela compreensão durante os períodos de rotina intensa ao longo da graduação.

Agradeço ao meu parceiro de longa data, Erick, que atualmente está realizando o seu sonho de estudar fora e desenvolvendo seus estudos na França, por todos os momentos de companheirismo e amizade durante nossas viagens à universidade e nossas sessões de estudos para as disciplinas.

Agradeço aos meus amigos de turma e todas as amizades que foram se formando ao longo desses anos. Vocês foram essenciais em muitos momentos de descontração, especialmente em meio à rotina puxada que as disciplinas do curso proporcionam. Agradeço também ao Thyago, pelo auxílio nos problemas que surgiram durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço ao meu orientador, por me proporcionar a vivência da pesquisa acadêmica, me introduzindo no mundo da ciência, e pelo apoio durante as minhas Iniciações Científicas. Agradeço também aos demais professores do departamento, em especial Rui e Micheline, pelo conhecimento passado, pelos conselhos e momentos de descontração fora de sala de aula.

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Sergipe, por me conceder a estrutura e os recursos necessários para o desenvolvimento dos meus estudos.

RESUMO

As estruturas sanduíche, em especial as vigas, feitas com materiais funcionalmente graduados têm demonstrado grande potencial por combinar propriedades mecânicas de materiais diferentes e contribuírem para a melhoria do desempenho estrutural. Entretanto, o surgimento de defeitos, como os poros, durante os processos de fabricação pode alterar as propriedades efetivas desses materiais e, conseqüentemente, sua resposta mecânica. Nesse contexto, o presente trabalho propõe uma extensão da solução analítica de Pagano, que é baseada na Teoria da Elasticidade 3D, para a análise estática de vigas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado e poroso. Para representar a variação contínua das propriedades mecânicas do material, utilizou-se uma abordagem baseada na discretização do material em subcamadas homogêneas equivalentes. A formulação desenvolvida foi validada por meio da comparação com resultados presentes na literatura. Posteriormente, foi conduzido um estudo paramétrico considerando diferentes índices de gradação do material, índices e modelos de distribuição da porosidade, razões de esbeltez e configurações geométricas das camadas. Os resultados obtidos demonstram que esses parâmetros influenciam diretamente a resposta estrutural, evidenciando a importância de analisar o comportamento dessas estruturas considerando a atuação de forma combinada desses fatores.

Palavras-chave: vigas sanduíche; materiais funcionalmente graduados; porosidade; solução 3D.

ABSTRACT

Sandwich structures, particularly beams, made of functionally graded materials have demonstrated significant potential due to their ability to combine the mechanical properties of different materials and contribute to improved structural performance. However, the occurrence of defects, such as pores, during manufacturing processes can alter the effective properties of these materials and, consequently, their mechanical response. In this context, the present study proposes an extension of Pagano's analytical solution, which is based on the three-dimensional Theory of Elasticity, for the static analysis of sandwich beams with a functionally graded and porous core. To represent the continuous variation of the material's mechanical properties, an approach based on the discretization of the material into equivalent homogeneous sublayers was employed. The developed formulation was validated by comparison with results available in the literature. Subsequently, a parametric study was conducted considering different material gradation indices, porosity indices and distribution models, slenderness ratios, and geometric configurations of the layers. The results demonstrate that these parameters directly influence the structural response, highlighting the importance of analyzing the behavior of these structures by considering the combined effects of these factors.

Keywords: sandwich beams; functionally graded materials; porosity; three-dimensional solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Geometria da viga sanduíche simplesmente apoiada em estudo.	9
Figura 2 - Seção transversal representativa de uma viga compósita laminada por $\overline{N}$ camadas e N subcamadas.	10
Figura 3 – Modelos de distribuição de porosidade no núcleo da viga sanduíche.	13
Figura 4 - Distribuição adimensional da tensão de cisalhamento ao longo da espessura, comparada com os resultados de Pagano (1969): (a) $L/h = 4$; (b) $L/h = 10$	27
Figura 5 - Distribuição de tensões adimensionais ao longo da espessura (z/h) para diferentes índices de gradação (p) ($L/h = 5$, $e_0 = 0$, 2-1-2): (a) tensão axial; (b) tensão de cisalhamento.	35
Figura 6 - Deflexão adimensionalizada para diferentes índices de gradação (p) e configurações geométricas das camadas ($L/h = 5$, $e_0 = 0$).	35
Figura 7 - Deflexão adimensional para diferentes índices de porosidade e distribuição de poros ($L/h = 5$, $p = 1$, 1-8-1).....	38
Figura 8 - Tensões de cisalhamento adimensionais para diferentes distribuições de porosidade ($L/h = 5$, $p = 2$, $e_0 = 0.6$): (a) 1-1-1; (b) 1-8-1.	41
Figura 9 - Tensões axiais adimensionais para diferentes distribuições de porosidade ($L/h = 5$, $e_0 = 0.6$, $p=2$): (a) 1-1-1; (b) 1-8-1.....	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Convergência numérica das deflexões adimensionais em função do número total de subcamadas (N) e do número de termos da série de Fourier (Nt). .24	24
Tabela 2 - Convergência numérica das tensões axiais adimensionais em função do número total de subcamadas (N) e do número de termos da série de Fourier (Nt). .24	24
Tabela 3 – Convergência numérica das tensões cisalhantes adimensionais em função do número total de subcamadas (N) e do número de termos da série de Fourier (Nt).	24
Tabela 4 - Propriedades dos materiais das vigas laminadas para validação com Pagano (1969).....	26
Tabela 5 - Validação das grandezas físicas adimensionais para uma viga simplesmente apoiada cross-ply $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]$ com diferentes razões L/h e das espessuras do núcleo e das faces externas (h_2/h_1).	26
Tabela 6 - Propriedades dos materiais das vigas com núcleo MFG para validação com Vo et al (2015).....	28
Tabela 7 - Validação da deflexão adimensional e das tensões axiais e de cisalhamento do modelo MFG, para diferentes índices de gradação (p) e razões L/h	29
Tabela 8 - Propriedades dos materiais das vigas porosas para validação com Nguyen et al. (2022a).	30
Tabela 9 - Validação das deflexões adimensionais de uma viga porosa simplesmente apoiada para diferentes índices de porosidade (e_0), distribuições de porosidade e $L/h = 5$	31
Tabela 10 - Deflexão adimensionalizada para diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das camadas e relações L/h , para $e_0 = 0$	33
Tabela 11 - Tensões axiais adimensionalizadas para diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das camadas e relações L/h , para $e_0 = 0$	33
Tabela 12 - Tensões cisalhantes adimensionalizadas para diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das camadas e relações L/h , para $e_0 = 0$	34
Tabela 13 - Deflexões adimensionais considerando diferentes relações L/h , distribuições e índices de porosidade. ($p=2, 1-2-1$).....	39
Tabela 14 - Deflexões adimensionais considerando diferentes configurações de geometria, índices de porosidade e gradação p e relação L/h ($T1$).	39

LISTA DE ABREVIATURAS

MFG – Materiais Funcionalmente Graduados
MEF – Método dos Elementos Finitos
HSDT – Higher-Order Shear Deformation Theory
FSDT – First-Order Shear Deformation Theory
PIM – Point Interpolation Method
FG – Funcionalmente Graduado
EPT – Estado Plano de Tensão
FGM – Functionally Graded Material

LISTA DE SIGLAS

k – Número correspondente da camada

$\overline{N}$ - Número de camadas

N – Número de subcamadas

$V^{(k)}(z)$ - Fração volumétrica da fase cerâmica na camada k

$p^{(k)}$ - Índice de gradação do material na camada k

h_c - Espessura do núcleo

h_f - Espessura das faces externas (1 e 2)

L – Comprimento da viga

$q(x)$ - Carregamento da transversal da viga

$E_{t1}^{(k)}, E_{t2}^{(k)}, E_{t3}^{(k)}$ - Módulos de elasticidade do material do topo do núcleo nas direções 1, 2 e 3 na camada k

$E_{b1}^{(k)}, E_{b2}^{(k)}, E_{b3}^{(k)}$ - Módulos de elasticidade do material da base do núcleo nas direções 1, 2 e 3 na camada k

$G_{t12}^{(k)}, G_{t13}^{(k)}, G_{t23}^{(k)}$ - Módulos de cisalhamento transversal do material do topo do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k

$G_{b12}^{(k)}, G_{b13}^{(k)}, G_{b23}^{(k)}$ - Módulos de cisalhamento transversal do material da base do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k

$\nu_{t12}^{(k)}, \nu_{t13}^{(k)}, \nu_{t23}^{(k)}$ - Coeficientes de Poisson do material do topo do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k

$\nu_{b12}^{(k)}, \nu_{b13}^{(k)}, \nu_{b23}^{(k)}$ - Coeficientes de Poisson do material da base do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k .

$T1$ – Modelo de porosidade Tipo 1

$T2$ – Modelo de porosidade Tipo 2

$T3$ – Modelo de porosidade Tipo 3

$f_p^{(k)}$ - Fator de porosidade

$e_0^{(k)}$ - Índice de porosidade na camada k

$E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, E_3^{(k)}$ - Módulo de elasticidade efetivo da combinação do MFG com a porosidade nas direções 1, 2 e 3

$G_{12}^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{23}^{(k)}$ - Módulo de cisalhamento transversal efetivo da combinação do MFG com a porosidade nas direções 12, 13 e 23

$\nu_{12}^{(k)}, \nu_{13}^{(k)}, \nu_{23}^{(k)}$ - Coeficiente de Poisson efetivo da combinação do MFG com a porosidade nas direções 12, 13 e 23

$S_{ij}^{(k,n)}$ - Coeficientes de flexibilidade matriz de flexibilidade

ε_x - Deformação na direção x

ε_z - Deformação na direção z

γ_{xz} - Deformação no plano xz

σ_x - Tensão axial na direção x

σ_z - Tensão axial na direção z

τ_{xz} - Tensão de cisalhamento no plano xz

$R_{ij}^{(k,n)}$ - Coeficientes de flexibilidade reduzidos

θ - Ângulo de inclinação das lâminas

u – Deslocamentos horizontais

v – Deslocamentos transversais

N_t - Número de termos da série de Fourier

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
2	OBJETIVOS	3
2.1	OBJETIVOS GERAIS	3
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
3	METODOLOGIA	4
4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
5	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	8
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	8
5.2	MODELO DE SUBCAMADAS	9
5.3	MATERIAL FUNCIONALMENTE GRADUADO	10
5.4	POROSIDADE	12
5.5	DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO	16
5.5.1	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	16
5.5.2	HIPÓTESE DO ESTADO PLANO DE TENSÃO (EPT)	17
5.5.3	SOLUÇÃO ANALÍTICA	18
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	23
6.1	ESTUDO DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DO MODELO	23
6.2	VALIDAÇÃO CASO LAMINADO (0° 90° 0°)	25
6.3	VALIDAÇÃO DO MODELO MFG	27
6.4	VALIDAÇÃO DO MODELO COM POROSIDADE	30
6.5	ESTUDO PARAMÉTRICO	31
6.5.1	EFEITO DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS, DA RAZÃO DE ESBELTEZ E DO ÍNDICE DE GRADAÇÃO <i>DO MATERIAL</i> NA RESPOSTA ESTRUTURAL DE VIGAS SANDUÍCHE MFG SEM POROS	32

6.5.2	EFEITO DO ÍNDICE DE POROSIDADE e_0 E DAS DISTRIBUIÇÕES DOS POROS NO NÚCLEO NAS DEFLEXÕES, TENSÕES AXIAIS E DE CISALHAMENTO	37
7	CONCLUSÕES.....	43
8	PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS	45
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	46

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Nos últimos anos, a busca por estruturas mais leves e resistentes tem impulsionado o desenvolvimento de materiais com desempenho superior aos convencionais, dando origem a uma classe conhecida como materiais avançados. Esses materiais têm sido amplamente empregados em diversos setores da engenharia, incluindo as áreas civil, naval, automotiva, aeronáutica etc (Hassan; Saeed, 2024; Phiri et al., 2024), com o objetivo de aprimorar o desempenho mecânico, aumentar propriedades como a capacidade absorção de energia e prolongar a vida útil dos componentes estruturais. Nesse contexto, diferentes configurações estruturais e classes de materiais avançados vêm sendo continuamente investigadas com o objetivo de atender a essas demandas.

Dentre essas configurações, destacam-se as estruturas sanduíche, caracterizadas pela combinação de duas faces externas de elevada rigidez e resistência, separadas por um núcleo de baixa densidade. Nessa configuração, as faces são responsáveis por resistir predominantemente aos esforços normais decorrentes da flexão, enquanto o núcleo atua principalmente na transmissão das tensões de cisalhamento entre as faces (Birman; Kardomateas, 2018). Em virtude dessa configuração, as estruturas sanduíche apresentam elevadas relações resistência-peso e rigidez-peso, tornando-se uma solução altamente atrativa para aplicações em setores como aeroespacial, aeronáutico, naval, automotivo e da construção civil (Sadiq; Kovács, 2025). O desempenho global dessas estruturas, entretanto, vai depender diretamente das propriedades mecânicas do material empregado no núcleo, fator esse que têm motivado o desenvolvimento de soluções capazes de otimizar seu comportamento estrutural.

Entre as diferentes alternativas propostas para o material do núcleo, destacam-se os materiais funcionalmente graduados (MFG). Esses materiais foram desenvolvidos com o objetivo de combinar as propriedades de dois ou mais constituintes por meio da variação contínua de sua composição ao longo de uma determinada direção. Diferentemente das estruturas sanduíche convencionais, nas quais as propriedades mecânicas sofrem mudanças abruptas nas interfaces entre as camadas, as estruturas sanduíche funcionalmente graduadas apresentam uma

variação contínua das propriedades ao longo da espessura, decorrente da gradação da composição do material (Naebe; Shirvanimoghaddam, 2016). Essa característica proporciona uma transição mais suave entre materiais com propriedades distintas, o que contribui para redução de concentrações de tensões nas interfaces entre as camadas (Boggarapu et al., 2021), promovendo uma distribuição mais uniforme dos esforços ao longo da estrutura. Como consequência, o uso dos MFG's em estruturas sanduíches tem se mostrado uma alternativa promissora para situações em que elevadas relações resistência-peso e rigidez-peso constituem requisitos fundamentais. No entanto, apesar de suas vantagens, os processos de fabricação frequentemente contribuem para formação de poros no interior do material, alterando suas propriedades mecânicas e tornando necessária a consideração dos efeitos da porosidade na avaliação da resposta da estrutura.

A adequada representação do comportamento mecânico de estruturas sanduíche funcionalmente graduadas e porosas requer modelos capazes de descrever os campos de resposta da estrutura, como deslocamentos e tensões decorrentes da variação contínua das propriedades do material ao longo da espessura. Diversas abordagens têm sido empregadas para essa finalidade, incluindo modelos baseados em teorias de vigas, métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), e soluções tridimensionais baseadas na Teoria da Elasticidade. Dentre essas abordagens, destacam-se as soluções exatas tridimensionais, cuja metodologia pioneira foi estabelecida por Pagano (1969), por fornecerem descrições mais completas dos campos de resposta, uma vez que consideram explicitamente a distribuição das grandezas nas três direções espaciais (x , y e z), ao longo de cada camada da estrutura sanduíche. Embora a formulação original de Pagano (1969) tenha sido formulada para camadas homogêneas, a sua extensão para meios contínuos e imperfeitos surge como a ferramenta definitiva para validar novos modelos e compreender o comportamento desses materiais avançados.

Diante desse contexto, este trabalho propõe uma extensão da formulação exata desenvolvida por Pagano (1969) para a análise estática de vigas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado e poroso, empregando uma abordagem baseada em subcamadas homogêneas equivalentes para representar a variação contínua das propriedades mecânicas do material.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS GERAIS

Estender a formulação baseada na solução exata proposta por Pagano (1969) para a análise de vigas sanduíche com núcleo poroso e funcionalmente graduado, utilizando uma abordagem de subcamadas homogêneas equivalentes para representar a variação contínua das propriedades mecânicas ao longo da espessura.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Realizar uma revisão bibliográfica sobre estruturas laminadas, com ênfase em estruturas sanduíche, materiais funcionalmente graduados (MFG) e modelos de porosidade;
- b) Representar a gradação funcional das propriedades mecânicas do núcleo por meio da lei de potência, utilizando uma abordagem de subcamadas homogêneas equivalentes;
- c) Incorporar os efeitos da porosidade no núcleo funcionalmente graduado por meio de diferentes modelos de distribuição de poros ao longo da espessura;
- d) Validar o modelo desenvolvido por meio da comparação com resultados disponíveis na literatura;
- e) Realizar um estudo paramétrico para avaliar a influência da gradação funcional, da porosidade e dos modelos de distribuição de poros sobre a resposta estrutural da viga sanduíche.

3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho, realizou-se inicialmente uma revisão bibliográfica em temas relacionados às estruturas sanduíche, aos materiais funcionalmente graduados (MFG) e aos modelos que incorporam poros, com o objetivo de consolidar o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento do estudo. Em seguida, procedeu-se ao desenvolvimento analítico da abordagem proposta, inicialmente por meio da incorporação dos modelos de gradação do material e da porosidade às propriedades mecânicas dos materiais, bem como da discretização das camadas heterogêneas em subcamadas homogêneas equivalentes. As funções que descrevem a variação das propriedades mecânicas foram então incorporadas à formulação analítica, permitindo a obtenção das equações de governo do problema. Posteriormente, as equações obtidas foram resolvidas para determinar os campos de deslocamentos, tensões e deformações da estrutura. Determinados esses campos, e com auxílio do programa Wolfram Mathematica, realizou-se um estudo de convergência com o objetivo de determinar o número adequado de subcamadas para obter resultados precisos, mantendo baixo o custo computacional. Em seguida, a formulação desenvolvida foi validada por meio da comparação com os resultados da literatura. Por fim, conduziu-se um estudo paramétrico para avaliar a influência do índice de gradação do material, dos índices e modelos de distribuição de porosidade, da razão de esbeltez L/h e das configurações geométricas das camadas sobre a resposta estrutural da viga sanduíche com núcleo poroso e funcionalmente graduado.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No contexto das estruturas funcionalmente graduadas, especialmente as vigas sanduíche, diferentes abordagens têm sido utilizadas para prever o comportamento dessas estruturas. Apetre et al. (2008) compararam diferentes teorias de vigas com resultados obtidos por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), observando que as teorias de ordem superior apresentam boa precisão na previsão da resposta estrutural. Os autores também apresentaram limitações na previsão dos campos de tensões nas interfaces entre o núcleo e as faces externas da viga quando determinadas formulações são empregadas, destacando a necessidade de cuidados adicionais na avaliação das tensões de cisalhamento no núcleo funcionalmente graduado. Entre as teorias de ordem superior utilizadas na literatura, destaca-se a Teoria de Deformação por Cisalhamento de Alta Ordem (HSDT, do inglês *Higher-Order Shear Deformation Theory*), que foi apresentada por Reddy (1984). De maneira semelhante, Vinh (2021) analisou a flexão estática de vigas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado utilizando uma teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT, do inglês *First-Order Shear Deformation Theory*) combinada ao MEF, demonstrando forte influência dos parâmetros da lei de potência, da razão de esbeltez e da relação entre as espessuras do núcleo com as faces externas sobre a resposta estrutural.

Além dessas abordagens, formulações mais refinadas também vêm sendo utilizadas para análise de vigas sanduíche FG. Vo et al. (2015), por exemplo, utilizaram teorias quasi-3D, considerando efeitos da deformação por cisalhamento, combinando a formulação com o MEF e o procedimento de Navier. Na mesma linha, Yarasca; Mantari; Arciniega (2016) desenvolveram uma formulação baseada no MEF e na HSDT. Nesse estudo eles realizaram uma análise estática e avaliaram diferentes configurações de vigas sanduíche funcionalmente graduadas. De maneira geral, esses estudos apresentados demonstraram a diversidade de abordagens empregadas na análise estática de vigas sanduíche FG, bem como a influência dos parâmetros do material e geométricos.

No entanto, apesar dos avanços observados na análise de estruturas MFG, conforme foi apresentado na Seção 1, os processos de fabricação desses materiais podem resultar na formação de poros em seu interior, alterando suas propriedades mecânicas (Chami et al., 2022). Para incorporar os efeitos associados à presença

desses poros, diversas abordagens têm sido empregadas na literatura. Entre elas, destacam-se os modelos baseados na distribuição espacial da porosidade ao longo da espessura, conforme apresentado em Nguyen et al. (2022a). Esses modelos consideram distribuições simétricas e assimétricas dos poros, resultando em diferentes variações das propriedades mecânicas ao longo da espessura da estrutura.

A influência da porosidade sobre o comportamento das estruturas sanduíche funcionalmente graduadas tem sido investigada por diferentes autores. Chinh et al. (2021) analisaram a flexão estática de vigas sanduíche com faces funcionalmente graduadas e núcleo poroso, empregando uma teoria de deformação por cisalhamento de terceira ordem combinada ao Método de Interpolação por Pontos sem Malha (PIM, do inglês *Point Interpolation Method*) baseado em funções polinomiais. Os resultados demonstraram que os parâmetros associados à porosidade e à fração volumétrica dos constituintes do MFG exercem influência sobre a resposta estrutural. Em uma abordagem distinta, Nguyen et al. (2022b) investigaram a flexão estática de placas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado e poroso utilizando uma teoria quasi-3D e o MEF, também evidenciando a influência dos parâmetros de porosidade e da fração volumétrica do MFG poroso sobre o comportamento da estrutura. Belarbi et al. (2023) analisaram, por meio de uma teoria layer-wise estendida, combinada ao MEF, diferentes configurações de distribuição do MFG e da porosidade nas faces externas e no núcleo de placas sanduíche, considerando tanto a flexão estática quanto a vibração livre. Os resultados obtidos reforçaram a influência dos parâmetros de gradação e porosidade sobre a resposta estrutural. De modo geral, esses estudos evidenciam que a consideração simultânea da gradação funcional e da porosidade introduz parâmetros adicionais que podem modificar significativamente o comportamento mecânico de estruturas sanduíche, sendo a resposta dependente tanto da distribuição das propriedades do material quanto da configuração da porosidade ao longo da estrutura.

Apesar dos avanços apresentados, observa-se uma escassez de estudos que buscam analisar vigas sanduíche com gradação funcional do material e de poros por meio de soluções analíticas tridimensionais. Embora as teorias FSDT e HSDT e outras teorias de vigas existentes apresentem resultados satisfatórios e bem consolidados na literatura, principalmente pelo baixo custo computacional envolvido, estas não garantem a continuidade exata das tensões de cisalhamento nas interfaces entre as camadas (Garg et al., 2023) devido a simplificações em sua cinemática. Por isso,

visando preencher essa lacuna, este trabalho propõe uma extensão da solução exata proposta por Pagano (1969), que é baseada na Teoria da Elasticidade 3D, para realizar uma análise estática de vigas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado e poroso, utilizando um modelo de subcamadas homogêneas equivalentes para representar a variação contínua das propriedades mecânicas do material. A solução proposta representa um potencial de benchmark para validar modelos de vigas, principalmente envolvendo MEF e teorias de vigas mais simplificadas.

5 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

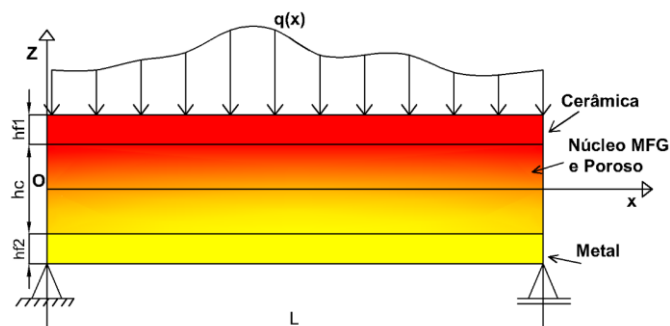
5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nesta seção, será apresentada a formulação matemática empregada na análise estática de vigas sanduíche com núcleo poroso e funcionalmente graduado (FG). Esta formulação baseia-se na solução analítica de Pagano (1969). Neste trabalho, essa formulação foi estendida para permitir a análise de vigas sanduíche constituídas por faces homogêneas (cerâmica e metal) e por um núcleo funcionalmente graduado, considerando a presença de porosidade.

Diferentemente do que ocorre com materiais laminados convencionais, em que as propriedades mecânicas sofrem variações abruptas nas interfaces entre as camadas, os materiais funcionalmente graduados (MFG) apresentam uma transição contínua e suave entre seus constituintes ao longo da espessura da estrutura. Essa transição contínua das propriedades mecânicas reduz as descontinuidades de rigidez entre os materiais, proporcionando uma variação mais suave das deformações e das tensões ao longo da espessura. Como consequência, são reduzidas as concentrações de tensões nas interfaces e a suscetibilidade a falhas interlaminares. Por isso, neste trabalho, a gradação das propriedades mecânicas do núcleo da viga é descrita por meio da lei de potência (Thai e Vo, 2012), enquanto os efeitos da porosidade são incorporados às propriedades finais do material por meio de modelos de distribuição. (Nguyen et al., 2022a)

A solução de Pagano é formulada para materiais homogêneos em cada camada. Ocorre que, ao introduzir o material FG e a porosidade no núcleo, as propriedades dos materiais passam a variar ao longo da espessura. Como forma de contornar isso e manter a proposta da solução de materiais homogêneos, o núcleo foi discretizado em um conjunto de subcamadas para aproximar a variação contínua das propriedades dos materiais e do campo de deslocamentos e tensões. Com isso, as propriedades mecânicas de cada subcamada são determinadas em função de sua posição ao longo da espessura. Ao longo desta seção, são apresentadas as hipóteses adotadas, a modelagem do material funcionalmente graduado e da porosidade, as relações constitutivas empregadas, bem como a formulação analítica utilizada para a determinação dos campos de deslocamentos e tensões.

Figura 1 - Geometria da viga sanduíche simplesmente apoiada em estudo.



Fonte: Autor (2026).

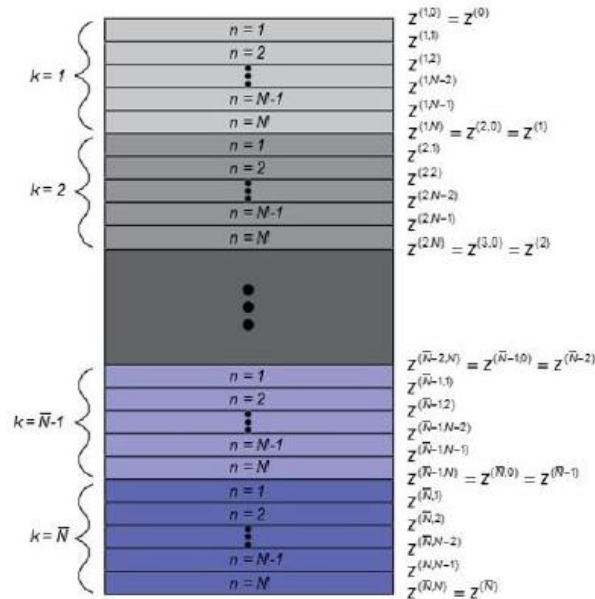
Para o presente trabalho, foi considerada uma viga sanduíche simplesmente apoiada de comprimento L , com altura do núcleo h_c e das faces externas h_f (1 e 2), sob carregamento $q(x)$, com sistema de coordenadas no plano x - z , sendo o eixo x na direção longitudinal da viga e o eixo z na direção da espessura. A face externa superior é de cerâmica, a inferior, de metal, e o núcleo é funcionalmente graduado e poroso, conforme ilustrado na Figura 1.

5.2 MODELO DE SUBCAMADAS

Como discutido na seção 5.1, a formulação analítica proposta por Pagano (1969) foi originalmente desenvolvida para estruturas laminadas constituídas por camadas homogêneas, nas quais as propriedades mecânicas permanecem constantes em cada lâmina. Entretanto, ao considerar um núcleo funcionalmente graduado e poroso, essas propriedades passam a variar continuamente ao longo da espessura, impossibilitando a aplicação direta da solução analítica original.

Para contornar essa limitação, o núcleo funcionalmente graduado e poroso foi discretizado em um conjunto de N subcamadas homogêneas equivalentes. Em cada subcamada, admite-se que as propriedades mecânicas sejam constantes e representativas da posição correspondente ao longo da espessura. Dessa forma, a variação contínua das propriedades é aproximada por uma sequência de camadas homogêneas, possibilitando a utilização da formulação analítica de Pagano (1969) sem alterações em sua estrutura matemática.

Figura 2 - Seção transversal representativa de uma viga compósita laminada por $\overline{N}$ camadas e N subcamadas.



Fonte: Rodrigues (2024)

Neste trabalho, considera-se uma viga sanduíche composta por três camadas principais: duas faces homogêneas e um núcleo funcionalmente graduado e poroso. A partir disso, a estrutura passa a ser representada por um conjunto de subcamadas homogêneas equivalentes, conforme ilustrado na Figura 2. À medida que o número de subcamadas aumenta, a representação se aproxima da distribuição contínua das propriedades mecânicas do material, o que resulta em maior precisão na solução. Entretanto, esse refinamento também implica um aumento do custo computacional, uma vez que eleva a ordem do sistema de equações associado à formulação. Dessa maneira, limitou-se a um número de subcamadas capaz de garantir a convergência dos resultados, com custo computacional adequado. A definição desse número foi realizada por meio do estudo de convergência apresentado na seção 6.1. Essa estratégia permite representar o comportamento de vigas sanduíche com núcleo FG e poroso, preservando a estrutura matemática da formulação analítica proposta por Pagano (1969).

5.3 MATERIAL FUNCIONALMENTE GRADUADO

Nesta seção, apresenta-se a proposta do material funcionalmente graduado (MFG), incluindo o modelo e as hipóteses adotadas. Neste trabalho, considera-se que a gradação do material ocorre apenas ao longo da espessura do núcleo, por meio de

uma lei de potência, modelo amplamente utilizado na literatura de materiais FG. A fração volumétrica da fase cerâmica é descrita pela lei de potência (Thai e Vo, 2012) na equação (5.1):

$$V^{(k)}(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z^{(k)}}{h_c} \right)^{p^{(k)}} \quad (5.1)$$

A fração volumétrica correspondente à fase metálica é determinada de forma complementar, de modo que:

$$V_m^{(k)}(z) = 1 - V^{(k)}(z) \quad (5.2)$$

O índice p corresponde ao índice de gradação da lei de potência do material, k à camada correspondente e h_c à espessura do núcleo. O índice de gradação p é responsável por controlar a distribuição de volume entre as fases metálica e cerâmica ao longo da altura do núcleo. Se $p=0$, o núcleo é composto somente de cerâmica. Por outro lado, à medida que o índice de gradação aumenta, a participação da fase metálica na composição do núcleo também cresce. Para valores elevados de p , a fase metálica passa a predominar, fazendo com que as propriedades mecânicas do núcleo se aproximem das do material. Nas equações (5.3) a (5.14) são apresentadas as relações para determinação das propriedades efetivas dos materiais (Thai e Vo, 2012) com a gradação, ainda sem a porosidade, que são obtidas a partir da Regra da Mistura. As propriedades correspondem ao módulo de elasticidade (E), ao módulo de cisalhamento transversal (G) e ao coeficiente de Poisson (ν):

$$E_{FGM,1}^{(k)} = (E_{t1}^{(k)} - E_{b1}^{(k)}) \cdot V^{(k)}(z) + E_{b1}^{(k)}, \quad (5.3)$$

$$E_{FGM,2}^{(k)} = (E_{t2}^{(k)} - E_{b2}^{(k)}) \cdot V^{(k)}(z) + E_{b2}^{(k)}, \quad (5.4)$$

$$E_{FGM,3}^{(k)} = (E_{t3}^{(k)} - E_{b3}^{(k)}) \cdot V^{(k)}(z) + E_{b3}^{(k)}, \quad (5.5)$$

$$G_{FGM,12}^{(k)} = (G_{t12}^{(k)} - G_{b12}^{(k)}) \cdot V^{(k)}(z) + G_{b12}^{(k)}, \quad (5.6)$$

$$G_{FGM,13}^{(k)} = (G_{t13}^{(k)} - G_{b13}^{(k)}) \cdot V^{(k)}(z) + G_{b13}^{(k)}, \quad (5.7)$$

$$G_{FGM,23}^{(k)} = (G_{t23}^{(k)} - G_{b23}^{(k)}) \cdot V^{(k)}(z) + G_{b23}^{(k)}, \quad (5.8)$$

$$G_{FGM,21}^{(k)} = G_{FGM,12}^{(k)}, \quad (5.9)$$

$$G_{FGM,31}^{(k)} = G_{FGM,13}^{(k)}, \quad (5.10)$$

$$G_{FGM,32}^{(k)} = G_{FGM,23}^{(k)}, \quad (5.11)$$

$$\nu_{FGM,12}^{(k)} = \left(\nu_{t12}^{(k)} - \nu_{b12}^{(k)} \right) \cdot V^{(k)}(z) + \nu_{b12}^{(k)}, \quad (5.12)$$

$$\nu_{FGM,13}^{(k)} = \left(\nu_{t13}^{(k)} - \nu_{b13}^{(k)} \right) \cdot V^{(k)}(z) + \nu_{b13}^{(k)}, \quad (5.13)$$

$$\nu_{FGM,23}^{(k)} = \left(\nu_{t23}^{(k)} - \nu_{b23}^{(k)} \right) \cdot V^{(k)}(z) + \nu_{b23}^{(k)}. \quad (5.14)$$

Onde:

- $E_{t1}^{(k)}, E_{t2}^{(k)}, E_{t3}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, aos módulos de elasticidade do material do topo do núcleo nas direções 1, 2 e 3 na camada k ;
- $E_{b1}^{(k)}, E_{b2}^{(k)}, E_{b3}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, aos módulos de elasticidade do material da base do núcleo nas direções 1, 2 e 3 na camada k ;
- $G_{t12}^{(k)}, G_{t13}^{(k)}, G_{t23}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, aos módulos de cisalhamento transversal do material do topo do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k ;
- $G_{b12}^{(k)}, G_{b13}^{(k)}, G_{b23}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, aos módulos de cisalhamento transversal do material da base do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k ;
- $\nu_{t12}^{(k)}, \nu_{t13}^{(k)}, \nu_{t23}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, aos coeficientes de Poisson do material do topo do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k ;
- $\nu_{b12}^{(k)}, \nu_{b13}^{(k)}, \nu_{b23}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, aos coeficientes de Poisson do material da base do núcleo nas direções 12, 13 e 23 na camada k .

As propriedades mecânicas obtidas por meio da lei de potência da equação (5.1) são então posteriormente utilizadas para determinar as propriedades efetivas de cada subcamada homogênea, no qual será desenvolvido na seção 5.4, permitindo a aplicação da formulação.

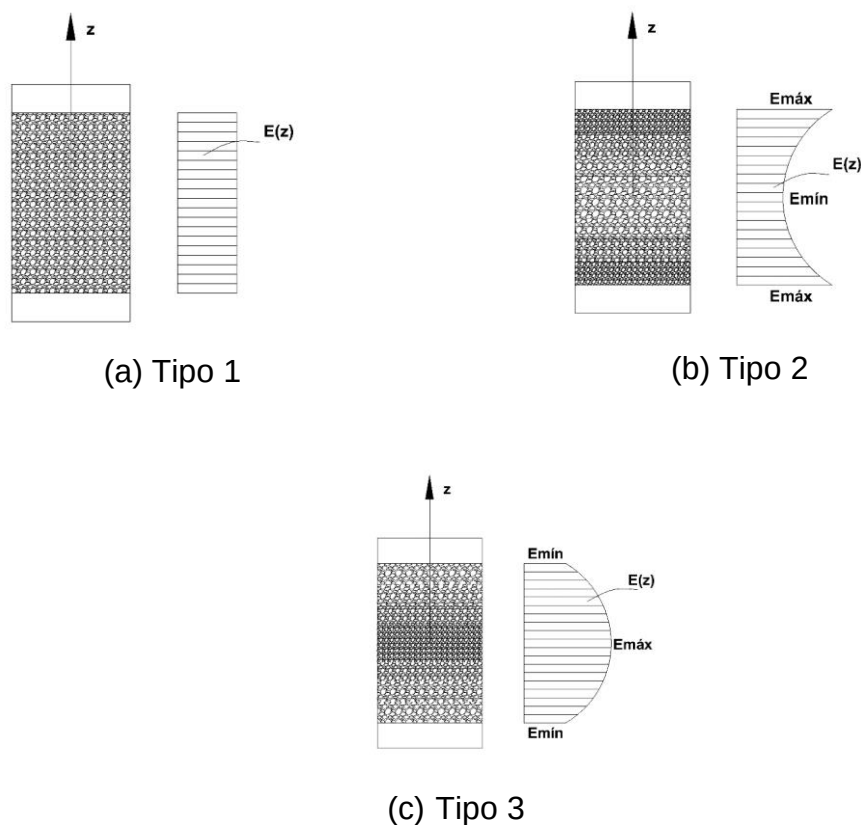
5.4 POROSIDADE

Apresentado o modelo empregado para representar o MFG na abordagem proposta, esta seção tem por objetivo descrever a modelagem adotada para incorporar os efeitos da porosidade no núcleo da viga sanduíche. Embora os materiais funcionalmente graduados apresentem excelentes propriedades mecânicas, a presença de poros as altera, pois reduz a rigidez do material e, conseqüentemente,

influencia a resposta estrutural da viga. Dessa forma, os efeitos da porosidade são incorporados às propriedades mecânicas do núcleo por meio de diferentes modelos de distribuição ao longo de sua espessura (h_c).

Foram considerados três modelos de distribuição de porosidade, denominados Tipo 1 (T1), Tipo 2 (T2) e Tipo 3 (T3). O modelo T1 representa uma distribuição uniforme da porosidade, promovendo uma redução homogênea das propriedades mecânicas ao longo de toda a espessura do núcleo. Já os modelos T2 e T3 correspondem a distribuições simétricas, porém com perfis distintos. No modelo T2, as propriedades mecânicas assumem valores máximos nas interfaces superior e inferior do núcleo e valores mínimos na região central. Em contrapartida, o modelo T3 apresenta comportamento inverso, com propriedades máximas na região central e mínimas nas interfaces. Dessa forma, cada modelo representa uma distribuição distinta da porosidade e, conseqüentemente, produz perfis distintos de variação das propriedades mecânicas ao longo da espessura do núcleo. Abaixo, a Figura 3 apresenta os modelos de distribuição de porosidade considerados neste trabalho, bem como a variação da propriedade em cada modelo.

Figura 3 – Modelos de distribuição de porosidade no núcleo da viga sanduíche.



Para capturar os efeitos da porosidade dos modelos descritos na Figura 3, foram utilizadas as funções descritas nas equações (5.15) a (5.17), por meio dos fatores de porosidade $f_p^{(k)}(z)$ (Nguyen et al., 2022a).

- Distribuição Tipo 1 (T1):

$$f_p^{(k)}(z) = \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - e_0^{(k)}} - \frac{2}{\pi} + 1 \right) \quad (5.15)$$

- Distribuição Tipo 2 (T2):

$$f_p^{(k)}(z) = 1 - e_0^{(k)} \cdot \cos\left(\frac{\pi z^{(k)}}{h_c}\right) \quad (5.16)$$

- Distribuição Tipo 3 (T3):

$$f_p^{(k)}(z) = 1 - e_0^{(k)} \cos\left(\frac{\pi z^{(k)}}{h_c} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.17)$$

Onde:

- $e_0^{(k)}$ corresponde ao índice de porosidade na camada k ;
- h_c é a espessura do núcleo;
- $f_p^{(k)}(z)$ é o fator de porosidade correspondente ao modelo de porosidade utilizado (T1, T2 ou T3).

A partir das equações (5.3) a (5.14) e das equações (5.15) a (5.17), para determinar as propriedades efetivas da combinação do MFG e da porosidade no núcleo, foram utilizadas as seguintes expressões descritas nas equações (5.18) a (5.32):

$$E_1^{(k)} = E_{FGM,1}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.18)$$

$$E_2^{(k)} = E_{FGM,2}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.19)$$

$$E_3^{(k)} = E_{FGM,3}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.20)$$

$$G_{12}^{(k)} = G_{FGM,12}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.21)$$

$$G_{13}^{(k)} = G_{FGM,13}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.22)$$

$$G_{23}^{(k)} = G_{FGM,23}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.23)$$

$$\nu_{12}^{(k)} = \nu_{FGM,12}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.24)$$

$$\nu_{13}^{(k)} = \nu_{FGM,13}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.25)$$

$$\nu_{23}^{(k)} = \nu_{FGM,23}^{(k)} f_p^{(k)}(z), \quad (5.26)$$

$$G_{21}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, \quad (5.27)$$

$$G_{31}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, \quad (5.28)$$

$$G_{32}^{(k)} = G_{23}^{(k)}, \quad (5.29)$$

$$\nu_{21}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}} E_2^{(k)}, \quad (5.30)$$

$$\nu_{31}^{(k)} = \frac{\nu_{13}^{(k)}}{E_1^{(k)}} E_3^{(k)}, \quad (5.31)$$

$$\nu_{32}^{(k)} = \frac{\nu_{23}^{(k)}}{E_2^{(k)}} E_3^{(k)}. \quad (5.32)$$

Onde:

- $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, E_3^{(k)}$ correspondem, respectivamente, ao módulo de elasticidade efetivo da combinação do MFG com a porosidade nas direções 1, 2 e 3;
- $G_{12}^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{23}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, ao módulo de cisalhamento transversal efetivo da combinação do MFG com a porosidade nas direções 12, 13 e 23;
- $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{13}^{(k)}, \nu_{23}^{(k)}$ correspondem, respectivamente, ao coeficiente de Poisson efetivo da combinação do MFG com a porosidade nas direções 12, 13 e 23.

Uma vez determinadas as propriedades mecânicas efetivas ao longo de toda a seção transversal, conforme as equações (5.18) a (5.32), utilizando a abordagem de subcamadas, a estrutura passa a ser tratada como um laminado multicamadas constituído por materiais homogêneos equivalentes, permitindo a aplicação da formulação de Pagano, que será descrita na seção 5.5.

5.5 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

Nesta seção, apresenta-se o desenvolvimento analítico ao longo do trabalho para determinar os campos de resposta (deslocamentos e tensões) da viga sanduíche com núcleo poroso e funcionalmente graduado. A abordagem adotada neste trabalho representa uma extensão da solução analítica proposta por Pagano (1969), que se baseia na Teoria da Elasticidade e foi originalmente desenvolvida para laminados constituídos por camadas homogêneas. Conforme discutido nas seções anteriores, a discretização da seção transversal da viga permite estender essa formulação à análise de estruturas MFGs e porosas, preservando a premissa e a estrutura matemática originais da solução. Inicialmente, são apresentadas as relações constitutivas de cada subcamada por meio dos coeficientes da matriz de flexibilidade (S_{ij}). Em seguida, introduz-se a hipótese de estado plano de tensão (EPT), bem como as expressões analíticas dos campos de deslocamento e de tensão. Por fim, são apresentadas as condições de contorno e de continuidade entre as camadas, o que leva à obtenção do sistema algébrico a ser utilizado para determinar as constantes da solução analítica.

5.5.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Considere uma viga sanduíche composta por três camadas, cujos materiais são admitidos ortotrópicos, conforme Figura 1, com eixos principais paralelos aos eixos cartesianos x, y e z . Conforme estabelecido anteriormente, adota-se a hipótese de estado plano de tensão no plano $x-z$, sendo a estrutura simplesmente apoiada nas extremidades $x = 0$ e $x = L$. A viga encontra-se submetida a um carregamento transversal distribuído, aplicado em sua superfície superior. Na formulação bidimensional adotada, esse carregamento é introduzido por meio da condição de contorno associada à força de superfície, de modo que $\sigma_z = q(x)$.

Como discutido, o núcleo funcionalmente graduado e poroso é discretizado em um conjunto de subcamadas homogêneas equivalentes. Dessa forma, cada subcamada pode ser tratada como um material ortotrópico homogêneo, permitindo que seu comportamento constitutivo seja descrito conforme apresentado na equação (5.33).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(k,n)} &= S_{11}^{(k,n)} \sigma_x^{(k,n)} + S_{12}^{(k,n)} \sigma_z^{(k,n)} \\
\varepsilon_z^{(k,n)} &= S_{12}^{(k,n)} \sigma_x^{(k,n)} + S_{22}^{(k,n)} \sigma_z^{(k,n)} \\
\gamma_{xz}^{(k,n)} &= S_{66}^{(k,n)} \tau_{xz}^{(k,n)}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Onde $S_{ij}^{(k,n)}$ representa os coeficientes da matriz de flexibilidade da subcamada n pertencente à camada k , obtidos considerando a hipótese do Estado Plano de Tensões (EPT). Além disso, ε e σ indicam as deformações e tensões axiais nas direções x e z , e γ_{xz} e τ_{xz} denotam a deformação e a tensão de cisalhamento no plano x - z .

5.5.2 HIPÓTESE DO ESTADO PLANO DE TENSÃO (EPT)

A abordagem adotada neste trabalho considera a hipótese de Estado Plano de Tensão (EPT). Nesse contexto, as equações (5.34) e (5.35) apresentam as relações utilizadas para a determinação dos coeficientes de flexibilidade reduzidos $R_{ij}^{(k,n)}$ no regime de EPT.

$$R_{ij}^{(k,n)} = S_{ij}^{(k,n)}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \tag{5.34}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
R_{11}^{(k,n)} &= \cos^4(\theta) R_{11}^{(k,n)} + \frac{1}{4} \left(4 \sin^4(\theta) R_{22}^{(k,n)} + \sin^2(2\theta) \right) (2R_{12}^{(k,n)} + R_{66}^{(k,n)}), \\
R_{12}^{(k,n)} &= \frac{1}{4} \left((3 + \cos(4\theta)) R_{12}^{(k,n)} + \sin^2(2\theta) R_{11}^{(k,n)} + R_{22}^{(k,n)} - R_{66}^{(k,n)} \right), \\
R_{16}^{(k,n)} &= \frac{1}{4} \left(2 \sin(2\theta) (R_{11}^{(k,n)} - R_{22}^{(k,n)}) + \sin(4\theta) (R_{11}^{(k,n)} - 2R_{12}^{(k,n)} + R_{22}^{(k,n)} - R_{66}^{(k,n)}) \right), \\
R_{22}^{(k,n)} &= \sin^4(\theta) R_{11}^{(k,n)} + \frac{1}{4} \left(4 \cos^4(\theta) R_{22}^{(k,n)} + \sin^2(\theta) (2R_{12}^{(k,n)} + R_{66}^{(k,n)}) \right), \\
R_{26}^{(k,n)} &= \cos(\theta) \sin(\theta) (R_{11}^{(k,n)} - R_{22}^{(k,n)}) - \frac{1}{4} \sin(4\theta) (R_{11}^{(k,n)} - 2R_{12}^{(k,n)} + R_{22}^{(k,n)} - R_{66}^{(k,n)}), \\
R_{66}^{(k,n)} &= \sin^2(2\theta) (R_{11}^{(k,n)} - 2R_{12}^{(k,n)} + R_{22}^{(k,n)}) + \cos^2(2\theta) R_{66}^{(k,n)}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Onde θ representa o ângulo de rotação das fibras. Neste trabalho, foram consideradas apenas as orientações de 0 e 90°, sendo a orientação de 90° utilizada exclusivamente na validação com os resultados apresentados por Pagano (1969), conforme será mostrado posteriormente na seção 6.2. Para as demais análises desenvolvidas, adotou-se $\theta = 0^\circ$.

5.5.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A formulação das equações governantes para Estado Plano é estabelecida a partir das equações de equilíbrio, apresentadas na equação (5.36):

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x}^{(k,n)} + \tau_{xz,z}^{(k,n)} &= 0 \\ \sigma_{z,z}^{(k,n)} + \tau_{xz,x}^{(k,n)} &= 0\end{aligned}\quad (5.36)$$

onde a diferenciação é representada pela vírgula. As relações deformação-deslocamentos são definidas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(k,n)} &= u_{,x}^{(k,n)} \\ \varepsilon_z^{(k,n)} &= v_{,z}^{(k,n)} \\ \gamma_{xz}^{(k,n)} &= u_{,z}^{(k,n)} + v_{,x}^{(k,n)}\end{aligned}\quad (5.37)$$

As condições de contorno aplicadas às superfícies superior e inferior da estrutura são expressas na equação (5.38):

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(1,1)}\left(x, \frac{h}{2}\right) &= q(x) \\ \tau_{xz}^{(1,1)}\left(x, \frac{h}{2}\right) &= 0 \\ \sigma_z^{(\bar{N}, N)}\left(x, -\frac{h}{2}\right) &= \tau_{xz}^{(\bar{N}, N)}\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = 0\end{aligned}\quad (5.38)$$

Enquanto as condições de contorno associadas ao apoio simples são definidas conforme equação (5.39):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k,n)}(0, z) &= \sigma_x^{(k,n)}(L, z) = 0 \\ v^{(k,n)}(0, z) &= v^{(k,n)}(L, z) = 0\end{aligned}\quad (5.39)$$

Para a formulação analítica do problema, é estabelecido um sistema de coordenadas local x_i, y_i, z_i localizado na linha média da k -ésima camada e da n -ésima subcamada, considerando a extremidade $x=0$. As espessuras correspondentes às k -ésimas camadas e n -ésimas subcamadas são representadas por $h^{(k,n)} = \frac{h_k}{N}$, em que N representa o número de subcamadas. A fim de garantir a continuidade das forças de superfície e deslocamentos nas interfaces entre as subcamadas, devem ser satisfeitas as condições expressas pela equação (5.40):

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k,n)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= \sigma_z^{(k,n+1)}\left(x, \frac{h_k}{2N}\right), \\
\tau_{xz}^{(k,n)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= \tau_{xz}^{(k,n+1)}\left(x, \frac{h_k}{2N}\right), \quad n=1, 2, \dots, N-1 \\
u^{(k,n)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= u^{(k,n+1)}\left(x, \frac{h_k}{2N}\right), \\
v^{(k,n)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= v^{(k,n+1)}\left(x, \frac{h_k}{2N}\right).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Analogamente, a continuidade entre as diferentes camadas do material é imposta por meio das condições apresentadas na equação (5.41):

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k,N)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= \sigma_z^{(k+1,1)}\left(x, \frac{h_k}{2N}\right), \\
\tau_{xz}^{(k,N)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= \tau_{xz}^{(k+1,1)}\left(x, \frac{h_k}{2N}\right), \quad k=1, 2, \dots, \bar{N} \\
u^{(k,N)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= u^{(k+1,1)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right), \\
v^{(k,N)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right) &= v^{(k+1,1)}\left(x, -\frac{h_k}{2N}\right).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Onde u e v correspondem, respectivamente, aos deslocamentos horizontais e transversais. O carregamento aplicado é expandido em séries de Fourier, conforme equação (5.42)(Vo et al., 2015):

$$\begin{aligned}
q(x) &= \sum_{m=1}^{N_t} Q_n \sin \frac{m\pi}{L} x, \\
Q_n &= \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Onde Q_n é o coeficiente de Fourier, m é a ordem do termo da série, N_t é o número de termos da série de Fourier para aproximação do carregamento $q(x)$ e L é o comprimento da viga. Com o objetivo de satisfazer automaticamente as equações de equilíbrio e as condições de contorno simplesmente apoiadas nas extremidades da viga, a solução do problema de valor de contorno definido pelas equações (5.33) à (5.42) é obtida assumindo a forma da equação (5.43):

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k,n)} &= \sum_{m=1}^{N_t} f_{m,zz}^{(k,n)}(z) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x, \\
\sigma_z^{(k,n)} &= - \sum_{m=1}^{N_t} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 f_m^{(k,n)}(z) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x, \\
\tau_{xy}^{(k,n)} &= - \sum_{m=1}^{N_t} \frac{m\pi}{L} f_{m,z}^{(k,n)}(z) \cos \frac{m\pi}{L} x,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Essa forma de solução satisfaz automaticamente as equações de equilíbrio apresentadas na equação (5.36), além das condições de contorno simplesmente apoiadas nas extremidades da viga. A partir dela, o campo de deformação pode ser determinado utilizando a relação deformação-deslocamento definida na equação (5.33), resultando em:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(k,n)}(z) &= R_{11}^{(k,n)} \left(\sum_{m=1}^{N_t} f_{m,zz}^{(k,n)}(z) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x \right) + R_{12}^{(k,n)} \left(- \sum_{m=1}^{N_t} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 f_m^{(k,n)}(z) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x \right) \\
\varepsilon_z^{(k,n)}(z) &= \sum_{m=1}^{N_t} \left[R_{11}^{(k,n)} f_{m,zz}^{(k,n)}(z) - R_{12}^{(k,n)} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 f_m^{(k,n)}(z) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x \\
\gamma_{xz}^{(k,n)}(z) &= \sum_{m=1}^{N_t} -R_{66}^{(k,n)} \frac{m\pi}{L} f_{m,z}^{(k,n)}(z) \cos \frac{m\pi}{L} x
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Aplicando a equação de compatibilidade das deformações (Timoshenko; Goodier, 1970):

$$\varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} - \gamma_{xz,xz} = 0 \tag{5.45}$$

obtém-se,

$$R_{11}^{(k,n)} f_{m,zzzz}^{(k,n)}(z) - \left(R_{66}^{(k,n)} + 2R_{12}^{(k,n)} \right) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 f_{m,zz}^{(k,n)}(z) + R_{22}^{(k,n)} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 f_m^{(k,n)}(z) = 0 \tag{5.46}$$

A solução geral da equação (5.46) pode ser expressa como:

$$f_m^{(k,n)}(z) = \sum_{j=1}^4 A_{jm}^{(k,n)} e^{(m_{jm}^{(k,n)} z_m^{(k,n)})} \tag{5.47}$$

Onde $k = 1, 2, \dots, \bar{N}$ camadas e $n = 1, 2, \dots, N$ subcamadas e $A_{jm}^{(k,n)}$ são constantes, provido que $m_j^{(k,n)}$ são todos distintos para um dado (k, n) . Os valores de $m_j^{(k,n)}$ são determinados por:

$$\left. \begin{matrix} m_1^{(k,n)} \\ m_3^{(k,n)} \end{matrix} \right\} = \pm \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\frac{a^{(k,n)} + b^{(k,n)}}{c^{(k,n)}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.48)$$

$$\left. \begin{matrix} m_2^{(k,n)} \\ m_4^{(k,n)} \end{matrix} \right\} = \pm \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\frac{a^{(k,n)} - b^{(k,n)}}{c^{(k,n)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Onde,

$$\begin{aligned} a^{(k,n)} &= R_{66}^{(k,n)} + 2R_{12}^{(k,n)} \\ b^{(k,n)} &= \left[\left(a^{(k,n)} \right)^2 - 4R_{11}^{(k,n)} R_{22}^{(k,n)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ c^{(k,n)} &= 2R_{11}^{(k,n)} \end{aligned} \quad (5.49)$$

As propriedades do material considerado devem satisfazer a condição:

$$a^{(k,n)} > b^{(k,n)} \text{ e } \left(a^{(k,n)} \right)^2 > 4R_{11}^{(k,n)} R_{22}^{(k,n)} \quad (5.50)$$

Dessa forma, todos os valores de $m_j^{(k,n)}$ são reais e distintos e os coeficientes $A_{jm}^{(k,n)}$ são todos reais. As componentes de tensão são então determinadas por meio das relações constitutivas, assumindo a forma:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k,n)} &= \sum_{m=1}^{N_t} \text{sen} \frac{m\pi}{L} x \sum_{j=1}^4 A_{jm}^{(k,n)} \left(m_j^{(k,n)} \right)^2 e^{\left(m_j^{(k,n)} z^{(k,n)} \right)} \\ \sigma_z^{(k,n)} &= - \sum_{m=1}^{N_t} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \text{sen} \frac{m\pi}{L} x \sum_{j=1}^4 A_{jm}^{(k,n)} e^{\left(m_j^{(k,n)} z^{(k,n)} \right)} \\ \tau_{xz}^{(k,n)} &= - \sum_{m=1}^{N_t} \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \sum_{j=1}^4 A_{jm}^{(k,n)} \left(m_j^{(k,n)} \right) e^{\left(m_j^{(k,n)} z^{(k,n)} \right)} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Aplicando as componentes $\sigma_x^{(k,n)}$ e $\sigma_z^{(k,n)}$ da equação (5.51) nas relações constitutivas apresentadas na equação (5.33), determinam-se as deformações $\varepsilon_x^{(k,n)}$ e $\varepsilon_z^{(k,n)}$. Em seguida, utilizando as relações deformação-deslocamento da equação (5.37) e integrando $\varepsilon_x^{(k,n)}$ em relação à x e $\varepsilon_z^{(k,n)}$ em relação à z , determinam-se, respectivamente, os campos de deslocamentos apresentados na equação (5.52):

$$\begin{aligned}
u^{(k,n)}(x,z) &= \sum_{m=1}^{N_t} \frac{\cos \frac{m\pi}{L} x}{\frac{m\pi}{L}} \sum_{j=1}^4 A_{jm}^{(k,n)} e^{(m_j^{(k,n)} z^{(k,n)})} \left(R_{12}^{(k,n)} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - R_{11}^{(k,n)} \left(m_j^{(k,n)} \right)^2 \right) \\
v^{(k,n)}(x,z) &= \sum_{m=1}^{N_t} \frac{\sin \frac{m\pi}{L} x}{\frac{m\pi}{L}} \sum_{j=1}^4 A_{jm}^{(k,n)} \left[R_{12}^{(k,n)} m_j^{(k,n)} - \frac{R_{22}^{(k,n)}}{m_j^{(k,n)}} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] e^{(m_j^{(k,n)} z^{(k,n)})}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

As condições de contorno referentes aos apoios simples, definidas na Equação (5.39) são automaticamente satisfeitas pelas funções adotadas nas equações (5.51) e (5.52). A imposição das demais condições de contorno, referentes às superfícies superior e inferior, conforme a equação (5.38), bem como das condições de continuidade nas interfaces entre camadas e subcamadas (equação 5.39 e 5.40), conduz a um sistema algébrico linear de ordem $4N_{tot}$, em que N_{tot} corresponde ao número total de subcamadas homogêneas consideradas na discretização. A solução desse sistema permite determinar as $4N_{tot}$ constantes $A_{jm}^{(k,n)}$. A solução desse sistema é obtida por meio de um procedimento computacional que considera os parâmetros geométricos e as propriedades mecânicas dos materiais constituintes. Após a determinação das constantes, os campos de tensão e de deslocamento podem ser calculados utilizando as equações (5.51) e (5.52).

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos a partir da formulação desenvolvida para uma viga sanduíche com núcleo poroso e funcionalmente graduado (MFG), baseada na solução analítica de Pagano, por meio de um modelo de subcamadas homogêneas equivalentes. Os resultados são organizados em três etapas. Inicialmente, apresenta-se o estudo de convergência, no qual são avaliados o número total de subcamadas e o número de termos da série de Fourier utilizados na aproximação da carga uniformemente distribuída, necessários para uma boa precisão do modelo. Em seguida, realiza-se validação do modelo proposto para os casos de uma viga sanduíche homogênea laminada ($0^\circ|90^\circ|0^\circ$), de uma viga sanduíche funcionalmente graduada (MFG) e de uma viga graduada por poros, por meio da comparação com os resultados da literatura. Por fim, é desenvolvido um estudo paramétrico para analisar a influência de parâmetros como a razão de esbeltez (L/h), índice de gradação (p), a configuração geométrica das camadas, o índice de porosidade e a distribuição dos poros sobre o comportamento estrutural da viga. As vigas analisadas possuem condição de vinculação simplesmente apoiada (S-A) e são submetidas a carregamento uniformemente distribuído. A aproximação do carregamento foi realizada por meio de séries de Fourier, conforme apresentado no capítulo 5.

6.1 ESTUDO DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DO MODELO

Para avaliar a influência do número de subcamadas utilizadas na discretização da espessura da viga e do número de termos considerados nas séries de Fourier para aproximação do carregamento uniformemente distribuído, foi conduzido um estudo de convergência numérica. Com isso, foi possível verificar e definir uma discretização (número de subcamadas e de termos da série) capaz de eliminar a influência da quantidade de subcamadas e de termos da série de Fourier nos resultados, com menor custo computacional. Portanto, para essa finalidade, foram avaliadas as deflexões adimensionais ($\bar{w}$), as tensões axiais ($\bar{\sigma}_x$) e as de cisalhamento adimensionais ($\bar{\tau}$) para diferentes valores de subcamadas totais e de termos da série. Esses resultados são apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3. As respectivas expressões

utilizadas para a adimensionalização das variáveis descritas são as mesmas utilizadas na seção 6.3, nas equações (6.6) a (6.8).

Tabela 1 – Convergência numérica das deflexões adimensionais em função do número total de subcamadas (N) e do número de termos da série de Fourier (N_t).

Número de subcamadas totais	Número de termos da série							
	2	4	6	8	10	12	14	16
6	10,93	10,87	10,88	10,88	10,88	10,88	10,88	10,88
12	10,44	10,39	10,39	10,39	10,39	10,39	10,39	10,39
18	10,30	10,24	10,24	10,24	10,24	10,24	10,24	10,24
24	10,24	10,18	10,19	10,19	10,19	10,19	10,19	10,19
30	10,21	10,15	10,16	10,16	10,16	10,16	10,16	10,16
36	10,19	10,14	10,14	10,14	10,14	10,14	10,14	10,14
42	10,19	10,13	10,14	10,13	10,13	10,13	10,13	10,13

Fonte: Autor (2026).

Tabela 2 - Convergência numérica das tensões axiais adimensionais em função do número total de subcamadas (N) e do número de termos da série de Fourier (N_t).

Número de subcamadas totais	Número de termos da série							
	2	4	6	8	10	12	14	16
6	18,08	17,37	17,54	17,46	17,51	17,48	17,50	17,48
12	16,33	15,66	15,83	15,75	15,80	15,76	15,79	15,77
18	15,84	15,18	15,36	15,28	15,33	15,29	15,32	15,30
24	15,66	15,01	15,18	15,10	15,15	15,11	15,14	15,12
30	15,57	14,92	15,10	15,01	15,06	15,03	15,06	15,04
36	15,52	14,88	15,05	14,97	15,02	14,98	15,01	14,99
42	15,49	14,85	15,02	14,94	14,99	14,96	14,98	14,96

Fonte: Autor (2026).

Tabela 3 – Convergência numérica das tensões cisalhantes adimensionais em função do número total de subcamadas (N) e do número de termos da série de Fourier (N_t).

Número de subcamadas totais	Número de termos da série							
	2	4	6	8	10	12	14	16
6	0,5031	0,5582	0,5774	0,5866	0,5919	0,5951	0,5971	0,5985
12	0,5186	0,5747	0,5939	0,6029	0,6078	0,6107	0,6124	0,6136
18	0,5197	0,5759	0,5951	0,6041	0,6090	0,6119	0,6137	0,6148
24	0,5198	0,5761	0,5953	0,6043	0,6092	0,6121	0,6139	0,6150
30	0,5199	0,5761	0,5954	0,6044	0,6093	0,6122	0,6139	0,6151
36	0,5199	0,5762	0,5954	0,6044	0,6093	0,6122	0,6140	0,6151
42	0,5199	0,5762	0,5954	0,6044	0,6093	0,6122	0,6140	0,6151

Fonte: Autor (2026).

A partir dos resultados obtidos, observa-se que o aumento do número de subcamadas totais (N) aliado ao número de termos da série de Fourier (N_t) conduz à estabilização dos resultados. Para as deflexões adimensionais ($\bar{w}$), verifica-se que a influência do número de termos da série é estável entre $N_t = 8$ e 10, enquanto o aumento de N promove uma redução gradual até a estabilização. As tensões axiais

adimensionais ($\overline{\sigma_x}$) se comportaram de forma semelhante, porém apresentaram convergência mais lenta em relação às deflexões. Isso ocorre porque as tensões são obtidas a partir das derivadas dos campos de deslocamento, o que as torna naturalmente mais sensíveis à discretização adotada. Da mesma maneira, entre as variáveis analisadas, as tensões de cisalhamento adimensionais ($\overline{\tau}$) também apresentaram grande sensibilidade ao refinamento numérico. Devido a isso, considerando simultaneamente a precisão dos resultados e o custo computacional envolvido no processamento, adotou-se, para as análises subsequentes, uma discretização composta por 48 subcamadas totais e 10 termos da série de Fourier, com exceção da elaboração dos gráficos das tensões axiais, pois estas exigiram um número maior de subcamadas totais para melhorar o aspecto visual dos pontos gerados. Mas, fora do escopo das tensões axiais, foram fixados o número de subcamadas totais N e o número de termos da série N_t descritos anteriormente, uma vez que adições a mais que estas produzem variações não significativas nos resultados, ao custo de um aumento do tempo de processamento.

6.2 VALIDAÇÃO CASO LAMINADO (0°|90°|0°)

Com o objetivo de verificar a precisão da formulação desenvolvida para laminados convencionais, realizou-se um estudo de validação por meio da comparação dos resultados obtidos com a solução analítica exata proposta por Pagano (1969), considerando o clássico problema de flexão cilíndrica de uma viga laminada *cross-ply* (0°|90°|0°). As propriedades mecânicas dos materiais empregados estão dispostas na Tabela 4. A Tabela 5 e a Figura 4 apresentam a comparação entre os resultados do presente trabalho e os reportados na literatura. Na validação foram analisados os deslocamentos horizontais ($\overline{u}$), as deflexões ($\overline{w}$), bem como as distribuições de tensões axiais ($\overline{\sigma_x}$) e as de cisalhamento ($\overline{\tau}$) adimensionalizadas sob um carregamento senoidal q_0 de uma viga laminada *cross-ply* simplesmente apoiada. As expressões utilizadas para a adimensionalização são apresentadas a seguir, nas equações (6.1) a (6.5):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x(L/2, z)}{q_0}, \quad (6.1)$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau(0, z)}{q_0}, \quad (6.2)$$

$$\bar{w} = \frac{100 \cdot E_b^{(1)} \cdot h^3 \cdot w(x, 0)}{q_0 \cdot L^4}, \quad (6.3)$$

$$\bar{u} = \frac{E_b^{(1)} \cdot u(0, z)}{h \cdot q_0}, \quad (6.4)$$

$$\bar{z} = \frac{z}{h}. \quad (6.5)$$

Tabela 4 - Propriedades dos materiais das vigas laminadas para validação com Pagano (1969).

Propriedades do material	Faces externas	Núcleo
E _{t1} (GPa)	25	25
E _{t2} = E _{t3} (GPa)	1	1
E _{b1} (GPa)	25	25
E _{b2} = E _{b3} (GPa)	1	1
G _{t12} = G _{t13} (GPa)	0.20	0.20
G _{b12} = G _{b13} (GPa)	0.20	0.20
G _{t23} (GPa)	0.50	0.50
G _{b23} (GPa)	0.50	0.50
V _{t12} =V _{t13} =V _{t23}	0.25	0.25
V _{b12} =V _{b13} =V _{b23}	0.25	0.25

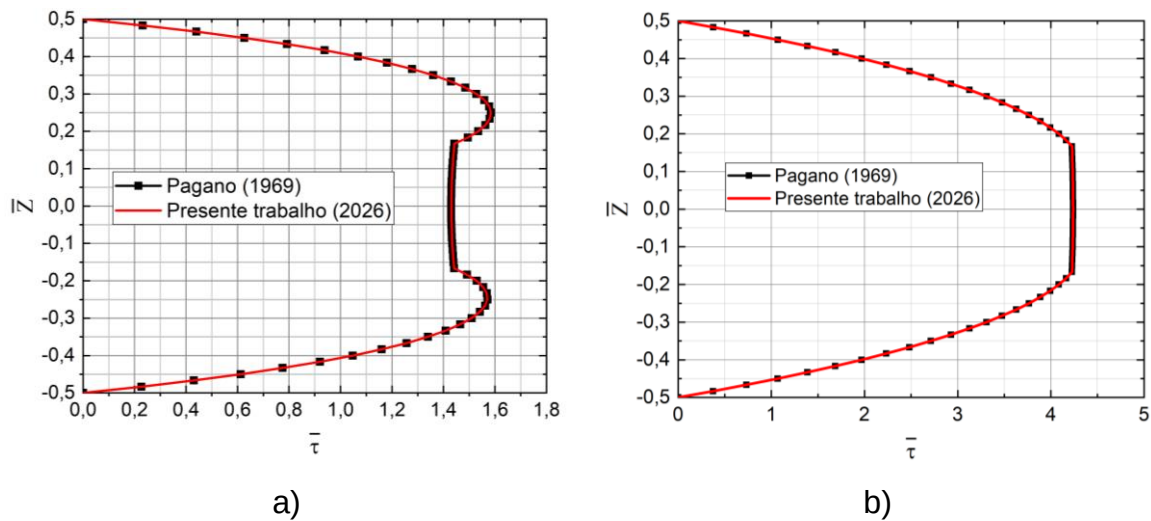
Fonte: Autor (2026).

Tabela 5 - Validação das grandezas físicas adimensionais para uma viga simplesmente apoiada cross-ply [0°|90°|0°] com diferentes razões L/h e das espessuras do núcleo e das faces externas (h₂/h₁).

Viga Biapoiada - (0° 90° 0°)										
Grandezas Físicas	Autor	h ₂ /h ₁ = 3			h ₂ /h ₁ = 6			h ₂ /h ₁ = 8		
		L/h = 5	L/h = 10	L/h = 50	L/h = 5	L/h = 10	L/h = 50	L/h = 5	L/h = 10	L/h = 50
u _x (0, h/2)	Presente (2026)	-1,76	-10,88	-1222,62	-2,01	-13,75	-1623,15	-2,22	-15,80	-1896,49
	Pagano (1969)	-1,77	-10,96	-1226,79	-2,04	-13,87	-1630,48	-2,25	-15,95	-1906,48
u _x (0, -h/2)	Presente (2026)	1,77	10,92	1222,82	2,03	13,79	1623,35	2,24	15,84	1896,69
	Pagano (1969)	1,76	10,90	1226,42	2,01	13,77	1629,91	2,21	15,82	1905,80
w (L/2, 0)	Presente (2026)	2,56	1,12	0,64	2,86	1,34	0,85	3,02	1,48	0,98
	Pagano (1969)	2,56	1,12	0,64	2,86	1,34	0,85	3,02	1,48	0,99
σ _x (L/2, h/2)	Presente (2026)	27,98	85,99	1925,61	31,97	108,60	2556,34	35,24	124,75	2986,78
	Pagano (1969)	27,82	86,07	1927,04	32,01	108,92	2561,15	35,37	125,24	2994,69
σ _x (L/2, -h/2)	Presente (2026)	-27,85	-85,95	-1925,61	-31,91	-108,58	-2556,34	-35,20	-124,74	-2986,78
	Pagano (1969)	-27,96	-85,85	-1926,70	-31,78	-108,38	-2560,51	-34,94	-124,52	-2993,87
σ _{xz} (0, 0)	Presente (2026)	1,87	3,89	19,71	1,81	3,68	18,48	1,79	3,62	18,13
	Pagano (1969)	1,87	3,89	19,70	1,82	3,68	18,45	1,79	3,61	18,10

Fonte: Autor (2026).

Figura 4 - Distribuição adimensional da tensão de cisalhamento ao longo da espessura, comparada com os resultados de Pagano (1969): (a) $L/h = 4$; (b) $L/h = 10$.



Fonte: Autor (2026).

A Tabela 5 apresenta os resultados adimensionalizados dos deslocamentos horizontais ($\bar{u}$), das deflexões ($\bar{w}$), das tensões axiais ($\bar{\sigma}_x$) e das tensões de cisalhamento ($\bar{\tau}$), considerando diferentes razões de esbeltez (L/h) e diferentes configurações de espessuras das faces e do núcleo (h_f/h_c). De forma complementar, a Figura 4 apresenta a distribuição das tensões de cisalhamento adimensionais $\bar{\tau}$ ao longo da espessura para as razões de esbeltez $L/h = 4$ e $L/h = 10$. Observa-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos pela formulação proposta e aqueles fornecidos pela solução analítica exata de Pagano (1969), tanto para os deslocamentos, apresentados na Tabela 5, quanto para as distribuições de tensões, mostradas na Tabela 5 e na Figura 4. Essa concordância demonstra a capacidade da abordagem desenvolvida de reproduzir a resposta estrutural de vigas laminadas *cross-ply* ($0^\circ|90^\circ|0^\circ$), validando a implementação da formulação para esse tipo de problema.

6.3 VALIDAÇÃO DO MODELO MFG

Com o objetivo de verificar a acurácia da formulação desenvolvida para vigas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado (MFG), realizou-se um estudo de validação por meio de comparação dos resultados obtidos com aqueles apresentados por Vo et al. (2015). Para essa finalidade, foi considerado o problema de uma viga simplesmente apoiada, composta por faces homogêneas de metal (face inferior) e

cerâmica (face superior) e por um núcleo MFG, submetida a um carregamento uniformemente distribuído q_0 . As propriedades mecânicas dos materiais utilizados são apresentadas na Tabela 6, enquanto a Tabela 7 apresenta a comparação entre os resultados do presente trabalho e os reportados na literatura. Na validação, foram analisadas as deflexões adimensionalizadas ($\bar{w}$), bem como as distribuições de tensões axiais ($\bar{\sigma}_x$) e de cisalhamento ($\bar{\tau}$) adimensionalizadas para diferentes índices de gradação do material (p) e razões de esbeltez (L/h). As expressões empregadas para a adimensionalização das variáveis são apresentadas nas equações (6.6) a (6.8) :

$$\bar{\tau} = \frac{h \cdot \tau(0, z)}{q_0 \cdot L}, \quad (6.6)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h \cdot \sigma_x(L/2, z)}{q_0 \cdot L}, \quad (6.7)$$

$$\bar{w} = \frac{100 \cdot E_{t1}^{(3)} \cdot h^3 \cdot w(L/2, z)}{q_0 \cdot L^4}. \quad (6.8)$$

Tabela 6 - Propriedades dos materiais das vigas com núcleo MFG para validação com Vo et al (2015).

Propriedades	Camada inferior (Metal)	Núcleo	Camada superior (Cerâmica)
$E_{t1}=E_{t2}=E_{t3}$ (GPa)	70	380	380
$E_{b1}=E_{b2}=E_{b3}$ (GPa)	70	70	380
$G_{t12}=G_{t13}=G_{t23}$ (GPa)	27	146	146
$G_{b12}=G_{b13}=G_{b23}$ (GPa)	27	27	146
$\nu_{t12}=\nu_{t13}=\nu_{t23}$	0.30	0.30	0.30
$\nu_{b12}=\nu_{b13}=\nu_{b23}$	0.30	0.30	0.30

Fonte: Autor (2026).

Tabela 7 - Validação da deflexão adimensional e das tensões axiais e de cisalhamento do modelo MFG, para diferentes índices de gradação (p) e razões L/h .

Análise	Estudo	L/h = 5			L/h = 20		
		p			p		
		1	2	5	1	2	5
w (L/2)	Presente (2026)	6,6940	8,0260	9,1345	6,2562	7,4121	8,1745
	Vo et al. (2015)	6,7166	8,0083	9,0691	6,2638	7,4085	8,1587
	Erro relativo	0,336%	0,221%	0,721%	0,121%	0,048%	0,194%
σ_x (L/2, h/2)	Presente (2026)	5,9987	6,5532	6,9459	23,6909	25,7100	27,0531
	Vo et al. (2015)	6,0094	6,5256	6,8886	23,708	25,6849	26,9694
	Erro relativo	0,178%	0,424%	0,832%	0,072%	0,098%	0,310%
τ (0,0)	Presente (2026)	0,7037	0,6552	0,6296	0,7199	0,6745	0,6525
	Vo et al. (2015)	0,7318	0,6445	0,5319	0,7436	0,6558	0,5425
	Erro relativo	3,84%	1,66%	18,36%	3,19%	2,84%	20,28%

Fonte: Autor (2026).

A Tabela 7 apresenta as deflexões, as tensões axiais e de cisalhamento adimensionalizadas, para diferentes razões de esbeltez (L/h) e índices de gradação (p), em comparação com os resultados reportados por Vo et al. (2015). De modo geral, observa-se uma boa concordância entre os valores obtidos, evidenciada pelos baixos erros relativos, principalmente para as deflexões ($\bar{w}$) e as tensões axiais ($\bar{\sigma}$) adimensionais. Esses resultados indicam que a formulação proposta é capaz de reproduzir a resposta estrutural de vigas sanduíche com núcleo funcionalmente graduado (MFG). Para as deflexões adimensionais, os erros relativos permaneceram inferiores a 1% em todos os casos analisados. Da mesma forma, as tensões axiais também apresentaram excelente concordância com a literatura de confronto, corroborando a capacidade da formulação de representar adequadamente os principais campos de resposta do problema. As maiores diferenças foram observadas nas tensões de cisalhamento adimensionais, avaliadas no centro da viga (núcleo), cujos erros relativos atingiram valores próximos de 20% para $p = 5$. Esse comportamento pode ser atribuído à elevada sensibilidade dessa grandeza às aproximações inerentes às diferentes teorias estruturais empregadas, bem como à representação aproximada da variação contínua das propriedades do núcleo por meio de subcamadas homogêneas equivalentes.

De maneira geral, os resultados obtidos demonstram que a formulação desenvolvida reproduz satisfatoriamente as soluções disponíveis na literatura para

vigas sanduíche com núcleo MFG, confirmando a correta implementação do modelo e sua adequação para as análises desenvolvidas neste trabalho.

6.4 VALIDAÇÃO DO MODELO COM POROSIDADE

Com o objetivo de validar a capacidade do modelo proposto em prever a resposta de estruturas porosas, realizou-se um estudo comparativo com os resultados apresentados no trabalho de Nguyen et al. (2022a). Para essa finalidade, foi considerado o problema de uma viga porosa simplesmente apoiada de camada única, submetida a um carregamento uniformemente distribuído $q_0 = 10000 \text{ N/m}$, adotando-se diferentes distribuições de porosidade (T1, T2 e T3), como apresentado na Figura 3. As propriedades mecânicas dos materiais empregados na análise são apresentadas na Tabela 8, enquanto a Tabela 9 apresenta a comparação das deflexões adimensionais ($\bar{w}$) obtidas no presente trabalho com aquelas reportadas por Nguyen et al. (2022a), considerando diferentes índices de porosidade e_0 e distribuições de porosidade (T1, T2 e T3), para uma razão de esbeltez $L/h = 5$. A expressão utilizada para a adimensionalização das deflexões é apresentada na equação (6.9):

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad (6.9)$$

Tabela 8 - Propriedades dos materiais das vigas porosas para validação com Nguyen et al. (2022a).

Propriedades	Camada inferior	Núcleo	Camada superior
$E_{t1}=E_{t2}=E_{t3} \text{ (GPa)}$	200	200	200
$E_{b1}=E_{b2}=E_{b3} \text{ (GPa)}$	200	200	200
$G_{t12}=G_{t13}=G_{t23} \text{ (GPa)}$	75	75	75
$G_{b12}=G_{b13}=G_{b23} \text{ (GPa)}$	75	75	75
$\nu_{t12}=\nu_{t13}=\nu_{t23}$	0.33	0.33	0.33
$\nu_{b12}=\nu_{b13}=\nu_{b23}$	0.33	0.33	0.33

Fonte: Autor (2026).

Tabela 9 - Validação das deflexões adimensionais de uma viga porosa simplesmente apoiada para diferentes índices de porosidade (e_0), distribuições de porosidade e $L/h = 5$.

L/h	Tipo de distribuição	Descrição	e_0		
			0.2	0.4	0.6
5	T1	Presente (2026)	0,061	0,073	0,091
		Nguyen (2022)	0,056	0,066	0,083
	T2	Presente (2026)	0,058	0,064	0,072
		Nguyen (2022)	0,053	0,058	0,065
	T3	Presente (2026)	0,064	0,081	0,111
		Nguyen (2022)	0,058	0,073	0,099

Fonte: Autor (2026).

Da Tabela 9 observa-se concordância entre os resultados obtidos da presente formulação e os reportados por Nguyen et al. (2022a) para uma viga porosa simplesmente apoiada, considerando diferentes índices de porosidade e distribuições de poros, com uma razão de esbeltez $L/h = 5$. De maneira geral, observa-se boa concordância entre os resultados obtidos, o que evidencia a capacidade do modelo de prever o comportamento estrutural de vigas com gradiente de poros. Verifica-se o aumento das deflexões à medida que o índice de porosidade e_0 cresce. Esse é um comportamento esperado, pois o aumento da porosidade reduz a rigidez do material, tornando a estrutura mais deformável (flexível) sob a ação de um carregamento. De maneira geral, os resultados demonstram que a formulação proposta é capaz de reproduzir adequadamente a influência dos poros sobre a resposta estrutural, validando sua aplicação na simulação de imperfeições do material (presença de vazios) decorrentes de processos de fabricação.

Uma vez validada a capacidade da formulação de representar simultaneamente materiais funcionalmente graduados e porosos, procede-se à investigação desses parâmetros na resposta estrutural.

6.5 ESTUDO PARAMÉTRICO

Após a verificação da convergência numérica do modelo e da validação da formulação proposta, apresentadas nas seções anteriores, realiza-se, nesta seção, um estudo paramétrico com o objetivo de avaliar a influência dos principais parâmetros geométricos e constitutivos na resposta estrutural de vigas sanduíche. Para esse fim, investigam-se os efeitos das espessuras das faces e do núcleo, da razão de esbeltez (L/h) e do índice de gradação p do MFG do núcleo. Adicionalmente,

são considerados tanto núcleos ideais, livres de porosidade ($e_0 = 0$), quanto núcleos com porosidade, de modo a representar imperfeições que surgem durante os processos de manufatura.

6.5.1 EFEITO DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS, DA RAZÃO DE ESBELTEZ E DO ÍNDICE DE GRADAÇÃO DO MATERIAL NA RESPOSTA ESTRUTURAL DE VIGAS SANDUÍCHE MFG SEM POROS

Esta seção tem como objetivo investigar a influência da geometria da viga sanduíche, da razão de esbeltez (L/h) e do índice de gradação p do material funcionalmente graduado (MFG) presente no núcleo sobre a resposta estrutural de vigas sanduíche MFG, na ausência de porosidade. As Tabelas 10, 11 e 12 apresentam, respectivamente, as deflexões adimensionais ($\bar{w}$), as tensões axiais adimensionais ($\bar{\sigma}$) e as tensões de cisalhamento adimensionais ($\bar{\tau}$), considerando diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das faces e do núcleo e razões de esbeltez L/h . De forma complementar, as Figuras 5 e 6 apresentam as distribuições adimensionais das tensões axiais e de cisalhamento ao longo da espessura da viga, bem como a variação das deflexões adimensionais em função do índice de gradação p , para diferentes configurações geométricas analisadas. As propriedades mecânicas dos materiais utilizados são as mesmas apresentadas da Tabela 6, enquanto as expressões utilizadas para a adimensionalização das variáveis correspondem às equações (6.6) a (6.8).

Tabela 10 - Deflexão adimensionalizada para diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das camadas e relações L/h , para $e_0=0$.

L/h	p	Configuração				
		1-1-1	1-2-1	1-8-1	2-1-2	2-2-1
5	0	6,468	5,506	3,956	7,220	4,952
	0,5	7,290	6,676	5,509	7,716	5,999
	1	7,772	7,418	6,694	7,996	6,694
	2	8,265	8,181	8,026	8,285	7,470
	5	8,715	8,828	9,135	8,567	8,233
	10	8,945	9,109	9,617	8,741	8,583
20	0	6,124	5,207	3,692	6,806	4,668
	0,5	6,875	6,302	5,160	7,245	5,677
	1	7,287	6,962	6,257	7,473	6,327
	2	7,663	7,575	7,410	7,684	7,029
	5	7,937	7,970	8,172	7,861	7,645
	10	8,006	8,039	8,386	7,921	7,840

Fonte: Autor (2026).

Tabela 11 - Tensões axiais adimensionalizadas para diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das camadas e relações L/h , para $e_0=0$.

L/h	p	Configuração				
		1-1-1	1-2-1	1-8-1	2-1-2	2-2-1
5	0	6,029	5,495	4,433	6,363	5,143
	0,5	6,311	6,020	5,386	6,488	5,701
	1	6,444	6,286	5,999	6,547	6,030
	2	6,541	6,481	6,553	6,595	6,345
	5	6,577	6,544	6,946	6,624	6,569
	10	6,571	6,541	7,265	6,629	6,617
20	0	23,887	21,842	17,622	25,075	20,452
	0,5	24,886	23,814	21,342	25,472	22,620
	1	25,293	24,744	23,691	25,620	23,861
	2	25,501	25,306	25,710	25,692	24,976
	5	25,412	25,281	27,053	25,653	25,617
	10	25,277	25,169	28,385	25,592	25,649

Fonte: Autor (2026).

Tabela 12 - Tensões cisalhantes adimensionalizadas para diferentes índices de gradação p , configurações geométricas das camadas e relações L/h , para $e_0 = 0$.

L/h	p	Configuração				
		1-1-1	1-2-1	1-8-1	2-1-2	2-2-1
5	0	0,7623	0,7914	0,7616	0,7053	0,7908
	0,5	0,6904	0,7246	0,7385	0,6469	0,7441
	1	0,6506	0,6789	0,7037	0,6186	0,6989
	2	0,6187	0,6365	0,6552	0,5980	0,6372
	5	0,6127	0,6241	0,6296	0,5955	0,5885
	10	0,6198	0,6305	0,6308	0,6010	0,5930
20	0	0,7711	0,8038	0,7765	0,7142	0,8049
	0,5	0,7034	0,7383	0,7539	0,6626	0,7575
	1	0,6684	0,6954	0,7199	0,6397	0,7130
	2	0,6438	0,6590	0,6745	0,6257	0,6552
	5	0,6452	0,6535	0,6526	0,6295	0,6165
	10	0,6540	0,6601	0,6507	0,6370	0,6263

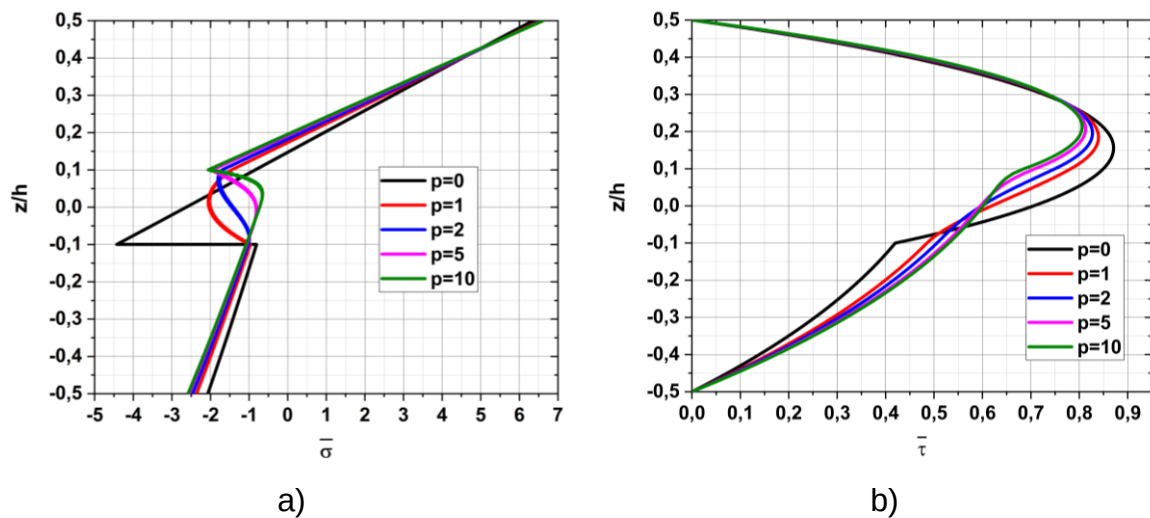
Fonte: Autor (2026).

Dos resultados apresentados nas Tabelas 10, 11 e 12, verifica-se que a configuração geométrica das camadas, o índice de gradação p e a razão de esbeltez (L/h) exercem influência significativa na resposta estrutural da viga. Em relação às deflexões, na Tabela 10, observa-se que, tanto para $L/h = 5$ quanto para $L/h = 20$, o aumento de p proporciona um aumento nas deflexões adimensionais para todas configurações geométricas analisadas. A geometria das camadas, também apresentou influência significativa sobre os campos de resposta da estrutura, uma vez que altera diretamente a distribuição de rigidez ao longo da espessura. Entre as configurações analisadas, a configuração 2-2-1 apresentou-se as menores deflexões adimensionais para cenários de $p \geq 2$, tanto para vigas mais espessas ($L/h=5$), como para vigas mais esbeltas ($L/h=20$). Em contrapartida, a configuração 1-8-1 mostrou-se a mais flexível $p \geq 2$.

Da mesma maneira, verifica-se influência dos parâmetros nas tensões axiais. O aumento da espessura do núcleo em relação às faces externas, como na configuração 1-8-1, proporcionou um aumento significativo nas tensões na borda superior da viga. Por outro lado, a configuração 2-1-2, caracterizada por faces externas mais espessas, apresentou um aumento menos pronunciado das tensões axiais. Esse comportamento decorre da maior capacidade das faces em distribuir os esforços, reduzindo a concentração de tensões na borda da viga. As tensões de cisalhamento também se mostraram sensíveis aos parâmetros avaliados. À medida que p aumentou, observou-

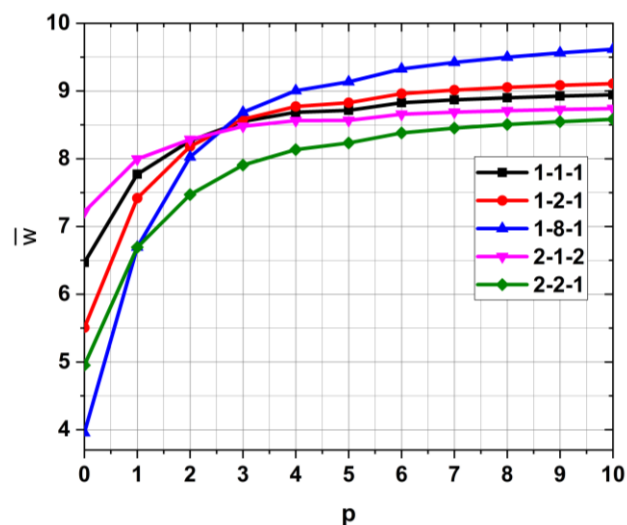
se redução dos picos de tensões de cisalhamento. Além disso, nota-se um deslocamento da posição onde ocorre a tensão máxima em relação ao plano médio ($z/h=0$), aproximando-se da face cerâmica. Esse comportamento está associado à redistribuição da rigidez promovida pela gradação do material no núcleo da viga, que altera a distribuição dos esforços internos e desloca os picos em direção à região mais rígida. De maneira geral, os resultados obtidos pela formulação proposta demonstram que tanto a configuração geométrica da viga quanto o índice de gradação p do material influenciam a resposta estrutural.

Figura 5 - Distribuição de tensões adimensionais ao longo da espessura (z/h) para diferentes índices de gradação (p) ($L/h = 5$, $e_0 = 0$, 2-1-2): (a) tensão axial; (b) tensão de cisalhamento.



Fonte - Autor (2026).

Figura 6 - Deflexão adimensionalizada para diferentes índices de gradação (p) e configurações geométricas das camadas ($L/h = 5$, $e_0 = 0$).



Fonte: Autor (2026).

A Figura 5 apresenta as distribuições de tensões axiais (a) e de cisalhamento (b) adimensionais ao longo da espessura normalizada (z/h) da viga, para diferentes índices de gradação p , $L/h = 5$ e configuração geométrica 2-1-2. Na Figura 5(a), observa-se que a introdução da gradação do material no núcleo modifica significativamente a distribuição das tensões axiais, que deixa de apresentar comportamento linear ao longo da espessura da seção transversal. Essa não-linearidade decorre da variação do módulo de elasticidade $E(z)$ ao longo da espessura, descrita pela regra da mistura, diferentemente do caso homogêneo, em que o módulo permanece constante. Além disso, verifica-se que a gradação funcional promove uma transição mais suave das propriedades mecânicas entre as faces e o núcleo (na interface). Quando $p = 0$, correspondente ao caso sem gradação, observa-se uma descontinuidade nas tensões nas interfaces entre os materiais, decorrente da mudança abrupta das propriedades mecânicas. Essa descontinuidade pode favorecer concentrações de tensão na interface e aumentar a suscetibilidade da estrutura à ocorrência de falhas interfaciais, como fissuração, fendilhamento e delaminação. A Figura 5(b) apresenta as tensões de cisalhamento adimensionais. Observa-se o que o aumento do índice de gradação p reduz os picos máximos e desloca os pontos de máximo em direção à face cerâmica, caracterizada por maior rigidez. Destaca-se que as demais configurações geométricas apresentaram tendências semelhantes.

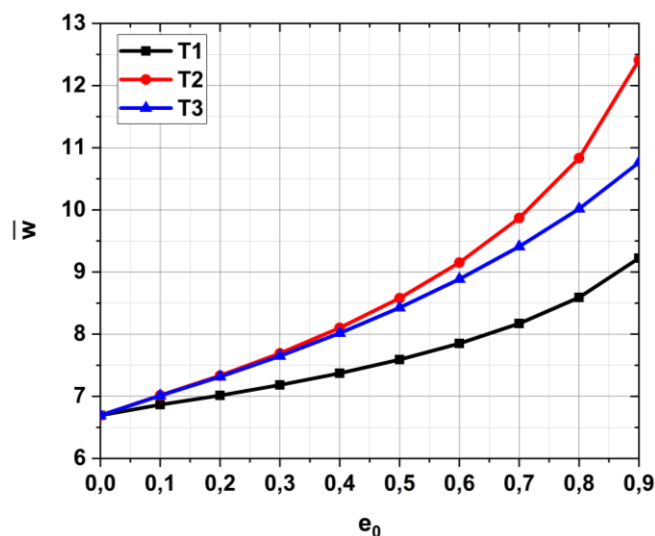
A Figura 6 apresenta as deflexões adimensionais em função do índice de gradação p para diferentes configurações geométricas das camadas de uma viga espessa ($L/h = 5$). Em concordância com os resultados apresentados na Tabela 10, verifica-se que o aumento de p provoca um aumento das deflexões adimensionais em todas as configurações analisadas, refletindo a redução da rigidez equivalente à medida que aumenta a participação da fase metálica. Nota-se, entretanto, que para valores de p superiores a 5, o incremento das deflexões adimensionais torna-se menor, indicando uma tendência de estabilização da resposta estrutural. Esse comportamento ocorre porque, para valores elevados do índice de gradação, a distribuição das propriedades do núcleo se aproxima de uma condição predominantemente metálica, fazendo com que aumentos de p produzam reduções cada vez menos expressivas na rigidez da estrutura.

Os resultados obtidos evidenciam que o índice de gradação constitui um importante parâmetro, permitindo controlar a rigidez da estrutura e, conseqüentemente, sua resposta em termos de deslocamentos e tensões.

6.5.2 EFEITO DO ÍNDICE DE POROSIDADE e_0 E DAS DISTRIBUIÇÕES DOS POROS NO NÚCLEO NAS DEFLEXÕES, TENSÕES AXIAIS E DE CISALHAMENTO

Esta seção tem como objetivo investigar a influência da porosidade do núcleo, por meio da variação do índice de porosidade (e_0) e da distribuição dos poros ao longo da espessura. Para isso, foram realizados estudos paramétricos para avaliar os efeitos desses parâmetros sobre as deflexões e os campos de tensão da viga. A Figura 7 apresenta as deflexões adimensionais para diferentes índices e distribuições de porosidade, considerando a razão de esbeltez $L/h = 5$, a configuração geométrica 1-8-1 e o índice de gradação $p = 1$. As Tabelas 13 e 14 apresentam, respectivamente, as deflexões adimensionais para diferentes razões de esbeltez L/h , distribuições e índices de porosidade considerando $p = 2$ e a configuração geométrica 1-2-1, e as deflexões adimensionais obtidas para diferentes configurações geométricas das camadas, índices de porosidade e índices de gradação p e razão de esbeltez L/h , adotando-se a distribuição de porosidade T1. Por fim, as Figuras 8 e 9 apresentam, respectivamente, as distribuições adimensionais das tensões de cisalhamento e das tensões axiais para diferentes distribuições de porosidade, considerando um índice de porosidade $e_0 = 0.6$, $p = 2$, $L/h = 5$ e duas configurações geométricas da viga: (a) 1-1-1; (b) 1-8-1.

Figura 7 - Deflexão adimensional para diferentes índices de porosidade e distribuição de poros ($L/h = 5$, $p = 1$, 1-8-1).



Fonte: Autor (2026).

A Figura 7 apresenta a variação da deflexão adimensional em função do índice de porosidade (e_0), considerando diferentes distribuições de poros T1, T2 e T3. De maneira geral, observa-se que o aumento do índice de porosidade resulta em maiores deflexões adimensionais, independentemente do modelo de distribuição adotado. Nota-se que para baixos valores de porosidade, a influência desse parâmetro sobre a resposta estrutural é pouco expressiva, resultando em diferenças reduzidas entre as distribuições analisadas. Entretanto, à medida que o índice de porosidade aumenta, verifica-se um aumento mais acentuado das deflexões, acompanhado de maior divergência entre os modelos T1, T2 e T3. Esse comportamento está diretamente relacionado à redução da rigidez do material, decorrente do aumento da quantidade de poros no núcleo da viga, o que torna a estrutura mais deformável sob a ação do carregamento uniformemente distribuído. Além disso, nota-se que a distribuição T2 apresentou as maiores deflexões adimensionais em todos os índices de vazios, sendo essa diferença mais pronunciada para valores de porosidade acima de 50%, $e_0 \geq 0.5$. Em contrapartida, a distribuição T1 resultou nas menores deflexões adimensionais para todos os índices de porosidade analisados, evidenciando que não apenas a quantidade de poros, mas também sua distribuição ao longo da espessura do núcleo exerce influência sobre a rigidez global da viga. Consequentemente, diferentes modelos de distribuição da porosidade podem conduzir a respostas estruturais distintas, mesmo para um mesmo índice de porosidade.

Tabela 13 - Deflexões adimensionais considerando diferentes relações L/h , distribuições e índices de porosidade. ($p=2$, 1-2-1).

L/h	Distrib.	$e0$			
		0	0,1	0,3	0,5
5	T1	8,181	8,298	8,458	8,662
	T2	8,181	8,426	8,895	9,524
	T3	8,181	8,309	8,479	8,667
20	T1	7,575	7,629	7,749	7,891
	T2	7,575	7,724	8,048	8,442
	T3	7,575	7,639	7,769	7,906

Fonte: Autor (2026).

Tabela 14 - Deflexões adimensionais considerando diferentes configurações de geometria, índices de porosidade e gradação p e relação L/h (T1).

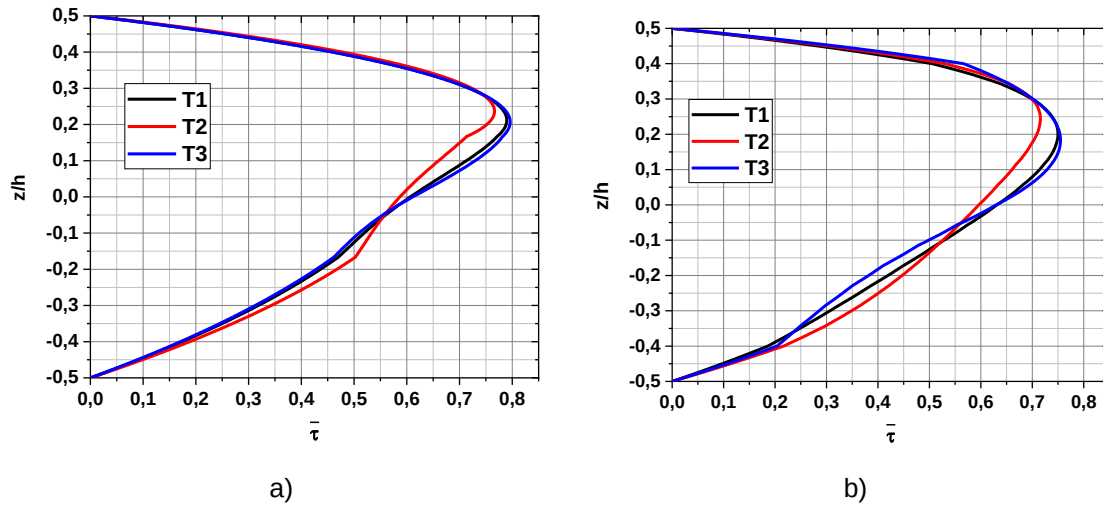
L/h	p	$e0$	Configuração				
			1-1-1	1-2-1	1-8-1	2-1-2	2-2-1
5	0,5	0	7,290	6,676	5,509	7,716	5,999
		0,1	7,375	6,778	5,655	7,790	6,097
		0,3	7,484	6,934	5,933	7,863	6,254
		0,5	7,621	7,132	6,295	7,953	6,457
	5	0	8,715	8,828	9,135	8,567	8,233
		0,1	8,816	8,960	9,368	8,646	8,358
		0,3	8,922	9,133	9,759	8,708	8,536
		0,5	9,058	9,353	10,263	8,787	8,761
	20	0	6,875	6,302	5,160	7,245	5,677
		0,1	6,917	6,361	5,264	7,274	5,739
		0,3	6,999	6,486	5,509	7,326	5,876
		0,5	7,109	6,651	5,831	7,398	6,059
20	5	0	7,937	7,970	8,172	7,861	7,645
		0,1	7,968	8,023	8,316	7,879	7,711
		0,3	8,032	8,140	8,641	7,915	7,857
		0,5	8,104	8,275	9,036	7,952	8,031

Fonte: Autor (2026).

Após analisar a influência da distribuição dos poros na Figura 7, procede-se à avaliação dos efeitos da porosidade em diferentes razões de esbeltez e em diferentes configurações geométricas. A Tabela 13 apresenta as deflexões adimensionais para diferentes razões L/h , distribuições de porosidade e índices de porosidade, considerando um índice de gradação $p=2$ e a configuração geométrica 1-2-1. Observa-se o mesmo efeito discutido anteriormente na Figura 7: o aumento do índice de porosidade promove o crescimento das deflexões adimensionais, independentemente do modelo de distribuição de poros adotado. A Tabela 14

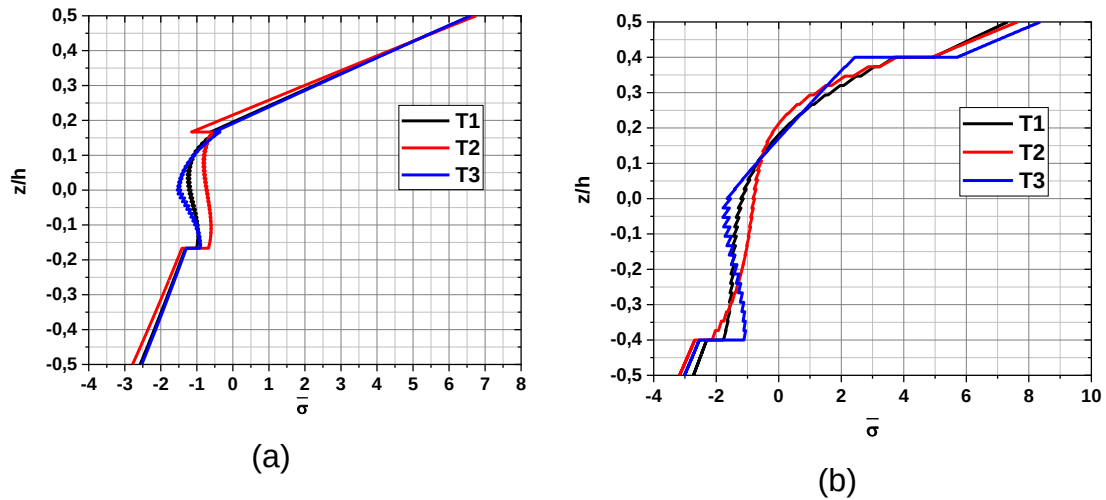
apresenta as deflexões adimensionais para diferentes configurações geométricas das camadas, índices de porosidade e de gradação, e relações L/h , utilizando o modelo de distribuição de poros T1. Os resultados evidenciam que a geometria das camadas exerce influência significativa sobre a resposta estrutural. De maneira geral, como observado na Tabela 14, o aumento da espessura do núcleo em relação às faces externas torna a estrutura mais sensível aos efeitos da porosidade, resultando em incrementos mais elevados das deflexões quando comparados aos casos sem porosidade. Entre as configurações analisadas, a 1-8-1 apresentou os maiores aumentos absolutos nas deflexões adimensionais em ambas as situações de gradação ($p = 0.5$ e $p = 5$) e para as duas razões de esbeltez consideradas. Esse comportamento está associado à maior participação do núcleo na rigidez equivalente da viga. Como o núcleo é a região afetada pela porosidade, o aumento de sua espessura intensifica os efeitos da redução das propriedades mecânicas decorrentes da presença de vazios, tornando a estrutura mais deformável. Os resultados também evidenciam a influência do índice de gradação p . Para valores reduzidos de p , nos quais predomina a fase cerâmica no núcleo, a maior rigidez equivalente do material limita o aumento das deflexões adimensionais provocado pela porosidade, efeito que se torna ainda mais evidente nas configurações com núcleo mais espesso. Em contrapartida, para valores elevados de p , a maior participação da fase metálica reduz significativamente a rigidez do núcleo. Nessa condição, a presença de poros provoca uma degradação mais pronunciada da rigidez da viga, resultando em aumentos mais expressivos das deflexões. Esses resultados demonstram que os efeitos dos poros se tornam mais relevantes à medida que a rigidez do núcleo diminui, evidenciando a interação entre a gradação funcional do material e a distribuição de porosidade na resposta estrutural.

Figura 8 - Tensões de cisalhamento adimensionais para diferentes distribuições de porosidade ($L/h = 5$, $p = 2$, $e_0 = 0.6$): (a) 1-1-1; (b) 1-8-1.



Fonte: Autor (2026).

Figura 9 - Tensões axiais adimensionais para diferentes distribuições de porosidade ($L/h = 5$, $e_0 = 0.6$, $p=2$): (a) 1-1-1; (b) 1-8-1.



Fonte: Autor (2026).

As Figuras 8 e 9 apresentam, respectivamente, as distribuições adimensionais das tensões de cisalhamento e das tensões axiais, considerando diferentes distribuições de porosidade e configurações geométricas das camadas, para uma viga com razão de esbeltez $L/h = 5$, índice de gradação $p = 2$ e índice de porosidade $e_0 = 0.6$.

Das Figuras 8 e 9, nota-se que a distribuição de porosidade influencia tanto os campos de tensões axiais quanto os de cisalhamento, embora essa influência seja mais pronunciada nos campos de tensões de cisalhamento. Para as tensões axiais,

verifica-se que a distribuição dos poros influencia a resposta estrutural principalmente na região do núcleo, enquanto, nas faces externas, as diferenças entre os modelos são pouco significativas. Esse comportamento decorre do fato de a porosidade estar restrita ao núcleo, o que reduz localmente da rigidez. Já para as tensões de cisalhamento, observa-se maior sensibilidade à distribuição dos poros, refletida principalmente na variação dos valores máximos de tensão. Verifica-se que a distribuição T3 apresenta os maiores picos de tensão de cisalhamento, enquanto a distribuição T2 apresenta os menores valores, sendo a distribuição T1 intermediária.

A comparação entre as configurações geométricas (1-1-1 e 1-8-1) mostra ainda que os efeitos da distribuição de porosidade tornam-se mais expressivos na configuração 1-8-1, na qual o núcleo representa a maior parcela da espessura da viga. Nessa configuração, a redução da rigidez causada pela presença de poros exerce maior influência sobre a resposta da estrutura, intensificando as diferenças na distribuição de tensões. Em contrapartida, na configuração 1-1-1, a maior participação relativa das faces externas, principalmente das faces cerâmicas, na rigidez equivalente da estrutura reduz a sensibilidade da estrutura às diferentes distribuições de porosidade. Em conjunto, os resultados obtidos mostram que a resposta estrutural de vigas MFG e porosas depende da interação entre a geometria da seção, a gradação funcional e a distribuição da porosidade. Dessa forma, a consideração simultânea desses parâmetros torna-se fundamental para uma representação mais realista do comportamento estrutural.

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo estender a solução exata proposta por Pagano (1969) para a análise estática de vigas sanduíche com núcleo poroso e funcionalmente graduado, empregando um modelo de subcamadas homogêneas equivalentes para representar a variação contínua das propriedades mecânicas do material. Essa estratégia permitiu transformar um problema com coeficientes variáveis, decorrentes da variação das propriedades do material ao longo da espessura do núcleo, em um problema com coeficientes constantes, viabilizando a aplicação da formulação original de Pagano (1969). Os efeitos da gradação do material foram incorporados por meio da lei de potência, amplamente empregada na análise de estruturas funcionalmente graduadas. Além disso, os efeitos da porosidade foram considerados por meio de um índice de porosidade e de modelos de distribuição que contemplam distribuições uniformes (T1) e não uniformes (T2 e T3) ao longo da espessura do núcleo.

Para a formulação estendida, conduziu-se inicialmente um estudo de convergência numérica para determinar o número adequado de subcamadas totais e números de termos da série para aproximação do carregamento uniformemente distribuído que apresentam resultados precisos. O estudo demonstrou que a discretização do núcleo em um número adequado de subcamadas permite representar satisfatoriamente a variação contínua das propriedades mecânicas, garantindo precisão dos resultados com custo computacional reduzido. Após isso, a formulação foi validada por meio da comparação com resultados consolidados na literatura, apresentando boa concordância. Por fim, foi realizado um estudo paramétrico para avaliar a influência da configuração geométrica das camadas, do índice de gradação p , da razão de esbeltez (L/h), do índice de porosidade (e_0) e dos modelos de distribuição de porosidade sobre a resposta estrutural da viga, em termos de deflexões, tensões axiais e de cisalhamento. Os resultados demonstraram que todos esses parâmetros influenciam o comportamento estrutural da viga.

Quanto ao estudo paramétrico, verificou-se que o índice de gradação do material influencia a resposta estrutural. O aumento do índice de gradação p , correspondente à maior participação da fase metálica no núcleo, resultou em maiores deflexões adimensionais em todas as configurações geométricas analisadas. Observou-se ainda que configurações com núcleo mais espesso apresentaram maior sensibilidade

ao aumento de p , evidenciando um comportamento estrutural mais flexível quando predominam materiais de menor rigidez.

Em relação aos campos de tensões, constatou-se que a introdução da gradação funcional altera a distribuição das tensões axiais ao longo da espessura, que deixa de apresentar comportamento linear em decorrência da variação contínua das propriedades mecânicas do núcleo. Além disso, observou-se que a gradação do núcleo promoveu uma transição mais suave das tensões nas interfaces entre as camadas, reduzindo as descontinuidades nas estruturas laminadas convencionais. Para as tensões de cisalhamento, verificou-se que o aumento do índice de gradação reduz os picos máximos de tensão e desloca os pontos máximos em direção à face de maior rigidez (fase cerâmica).

Quanto aos efeitos da porosidade, os resultados demonstraram que o aumento do índice de porosidade promove um incremento das deflexões em todos os modelos de distribuição analisados, em consequência da redução da rigidez do núcleo. Verificou-se ainda que as configurações com núcleos mais espessos apresentaram maior sensibilidade à presença de poros, resultando em aumentos mais expressivos das deflexões quando comparadas às configurações com faces externas relativamente mais espessas. Esses resultados da interação entre a geometria das camadas, o índice de gradação p do material e da porosidade desempenham papel fundamental na resposta estrutural de vigas sanduíche, indicando que esses parâmetros devem ser considerados de forma conjunta nas análises.

8 PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para futuros trabalhos, destacam-se as seguintes perspectivas:

- a) Incorporar modelos de porosidade assimétricos;
- b) Incorporar gradação do material e porosidade nas faces externas;
- c) Avaliar a resposta estrutural das vigas para diferentes orientações das fibras;
- d) Validação experimental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APETRE, N. A.; SANKAR, B. V.; AMBUR, D. R. Analytical modeling of sandwich beams with functionally graded core. **Journal of Sandwich Structures and Materials**, v. 10, n. 1, p. 53–74, jan. 2008.

BELARBI, Mohamed Ouejdi *et al.* Bending and free vibration analysis of porous functionally graded sandwich plate with various porosity distributions using an extended layerwise theory. **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, v. 23, n. 1, 1 mar. 2023.

BIRMAN, Victor; KARDOMATEAS, George A. **Review of current trends in research and applications of sandwich structures. Composites Part B: Engineering** Elsevier Ltd, , 1 jun. 2018.

BOGGARAPU, Vasavi *et al.* **State of the art in functionally graded materials. Composite Structures** Elsevier Ltd, , 15 abr. 2021.

CHAMI, Guermit Mohamed Bilal; KAHIL, Amar; HADJI, Lazreg. Influence of porosity on the fundamental natural frequencies of FG sandwich beams. **Materials Today: Proceedings**, v. 53, p. 107–112, 2022.

CHINH, Truong Hoai *et al.* Static flexural analysis of sandwich beam with functionally graded face sheets and porous core via point interpolation meshfree method based on polynomial basic function. **Archive of Applied Mechanics**, v. 91, n. 3, p. 933–947, 1 mar. 2021.

GARG, A. *et al.* On accurately capturing the through-thickness variation of transverse shear and normal stresses for composite beams using FSDT coupled with GPR. **Composite Structures**, v. 305, 1 fev. 2023.

HASSAN, Hogr Z.; SAEED, Najmadeen M. Advancements and applications of lightweight structures: a comprehensive review. **Discover Civil Engineering**, v. 1, n. 1, 13 ago. 2024.

NAEBE, Minoo; SHIRVANIMOGHADDAM, Kamyar. **Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. Applied Materials Today**Elsevier Ltd, , 1 dez. 2016.

NGUYEN, Ngoc Duong *et al.* A new two-variable shear deformation theory for bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams. **Composite Structures**, v. 282, 15 fev. 2022a.

NGUYEN, Van Chinh *et al.* A novel finite element formulation for static bending analysis of functionally graded porous sandwich plates. **Frontiers of Structural and Civil Engineering**, v. 16, n. 12, p. 1599–1620, 1 dez. 2022b.

PAGANO, N. J. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. **Journal of Composite Materials**, v. 3, n. 3, p. 398–411, 1969.

PHIRI, Resego *et al.* **Advances in lightweight composite structures and manufacturing technologies: A comprehensive review. Heliyon**Elsevier Ltd, , 15 nov. 2024.

REDDY, J. N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, n. 4, p. 745–752, 1 dez. 1984.

RODRIGUES, Joseph Richard Santana. **Análise estática de vigas compósitas laminadas funcionalmente graduadas: uma abordagem pela teoria zigue-zague refinada modificada.** São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, 2024.

SADIQ, Muhammad Ali; KOVÁCS, György. **Optimization of Composite Sandwich Structures: A Review. Machines**Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI), , 1 jul. 2025.

STEPHEN P. TIMOSHENKO; JAMES N. GOODIER. **Theory of Elasticity - Timoshenko & J. N. Goodier.** 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1970.

VAN VINH, Pham. Static bending analysis of functionally graded sandwich beams using a novel mixed beam element based on first-order shear deformation theory. **Forces in Mechanics**, v. 4, 1 out. 2021.

VO, Thuc P. *et al.* Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory. **Composites Part B: Engineering**, v. 68, p. 59–74, 2015.

YARASCA, J.; MANTARI, J. L.; ARCINIEGA, R. A. Hermite-Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams. **Composite Structures**, v. 140, p. 567–581, 15 abr. 2016.